Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.002/18

Modelos Integráveis e Supersimétricos

Jogean Matheus Carvalho Ferreira

Orientador

José Francisco Gomes

Fevereiro de 2018

Agradecimentos

Trilhar o caminho da ciência não é uma tarefa fácil, cada degrau é sinônimo de muito esforço e investimento feito por por parte de quem o trilha e dos que ajudam a trilhar. Neste caminho se encontram personagens principais aos quais dedico aqui meus sinceros agradecimentos.

Primeiramente agradeço aos meus pais, minha mãe Cleonice Martins de Carvalho e meu pai Adelmo Batista Ferreira, que nunca mediram esforços e deram o melhor de si para me prover recursos e ajudar a seguir meus sonhos. Sem pensar em retorno e abrindo mão de si mesmos venceram as dificuldades financeiras e me deram todo suporte para minha formação. Não posso deixar de recordar os infindáveis conselhos de minha mãe, que quando criança eu achava um tédio, mas hoje vejo que esses conselhos foram a semente que deu origem a quem me tornei. Aos meus irmãos Jefferson Carvalho Ferreira e Adielson de Carvalho Ferreira, que também fazem parte dessa história, me apoiaram e partilho com vocês esta conquista. Sei que ainda há muito que caminhar, mas se cheguei até aqui é graças a vocês, meu alicerce, minha família.

Neste caminho tão vasto chamado ciência é impossível trilhar sem orientação. Por isso aqui deixo meus agradecimentos à meu orientador José Francisco Gomes, que me aceitou no programa de mestrado e sempre esteve disponível a tirar minhas dúvidas. Também sou muito grato ao professor Abraham Hirsz Zimerman, que é fonte de inspiração a todos que o conhecem. Durante a pesquisa tive um companheiro com quem compartilhei minhas dúvidas e tivemos longas discussões sobre física e este também merece meus agradecimentos, Gabriel Vieira Lobo.

Nestes dois anos dedicados ao mestrado algumas intempéries surgiram pelo caminho, e os amigos me ajudaram a superar as dificuldades. Portanto não posso deixar de agradecer à Natália Tenório Maia que estendeu sua mão amiga. Não menos importante, devo meus agradecimentos às amizades feitas em outrora, Katiane Fernandes da Silva, Tathianne Bezerra, Luana Oliveira que, mesmo com a distância, se fizeram presentes nesses momentos difíceis. Também sou grato às amizades feitas em São Paulo, as quais eu tive o privilégio de compartilhar bons momentos com Diego Restrepo, Catarina Sato, Rayssa Bruzaca e Bárbara Abigail Ribeiro.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Supersimetria é um tema de bastante interesse na física, em particular na física de partículas, existem dezenas de modelos supersimétricos e diversos estudos sobre o assunto. Outra área de bastante interesse na física, e na matemática, é a integrabilidade de equações diferenciais, que as vezes é uma propriedade exigida em modelos físicos. Este trabalho é dedicado ao estudo de modelos tanto integráveis quanto supersimétricos para campos clássicos.

No primeiro capítulo nós falamos sobre todos os conhecimentos necessários para o entendimento dos capítulos subsequentes; introduzimos conceitos sobre grupos, álgebra de Lie, *loop algebra*, álgebra de *Kac-Moody* e propriedades requeridas para construção dos modelos. No capítulo três nós apresentamos dois modelos supersimétricos e integráveis que são obtidos por vias diferentes. No capítulo três nós propomos transformações para eliminar redundâncias e discutimos as principais diferenças entres esses três modelos.

Palavras Chaves: supersimetria; integrabilidade; curvatura nula; modelo WZNW; transformações de gauge;

Áreas do conhecimento: Modelos Integráveis; Teoria de Campos;

Abstract

Supersymmetry is a well studied branch of physics having promising physical models applied to theoretical physics and we still are looking forward experimental evidences for such phenomenon. Integrability is another great interesting theme on physics, and mathematics, that is sometimes required for physical models. This works put together supersymmetry and integrability of models based on standard principles. However, we treat of classical point of view, just looking for supersymmetry transformations and integrability of motion equations for fields.

In chapter one we speak about groups, Lie algebra, loop algebra, superalgebra and others property needed to constructions of our models, introducing all knowledge for understanding the follows chapters. In chapter two we develop three supersymmetric and integrable models by different ways. In chapter three we discus the correspondence of this three models, proposing transformations with aim of to eliminate redundancies, and discuss the main differences between them.

Key Words: supersymmetry; integrability; null curvature; WZNW model; gauge transformation;

Índice

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo falamos sobre teoria de grupos e álgebra de Lie de forma introdutória, sem definições formais, porém carregado de conceitos fundamentais para entender os capítulos posteriores.

1.1 Grupos

A Teoria de Grupos tem início quando Evariste Galois (1811-1832) utilizou grupos para tentar resolver equações polinomiais chegando a um resultado que o deixou famoso. Ele provou que usando operações básicas ($+$, $-$, $\times$, $\div$) é impossível achar uma fórmula para encontrar as raízes de polinômios de grau maior ou igual a cinco. Esse grande feito do matemático francês de morte precoce inspirou um outro matemático norueguês, Marius Sophus Lie (1842–1899), ao aplicar teoria de grupos para resolver equações diferenciais. Lie pensou que se grupos com finitos elementos podem ser usados para resolver equações polinomiais, então grupos com infinitos elementos poderiam ser usados no tratamento de equações diferenciais e indicar uma possível solubilidade ou uma possível simplificação das equações.

Quando se fala em grupo, se associa ao significado de um conjunto de elementos (pessoas, objetos e etc) que partilham algo em comum. Em matemática não é muito diferente. A definição matemática de grupo é um conjunto de elementos quaisquer, com uma certa operação de multiplicação "$*$" entre eles, que satisfaz algumas propriedades. Considere que g_1, g_2, e g_3 sejam elementos de um grupo G qualquer, então esses elementos devem satisfazer

(i) $g_1 * g_2 \in G$

(ii) $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$

(iii) Para todo $g_i \in G$ exite g_i^{-1} tal que $g_i * g_i^{-1} = g_i^{-1} * g_i = e$

(iv) No caso de grupos denominados "grupos abelianos" temos que $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$

onde e é chamado de elemento identidade do grupo.

Um exemplo de grupo é o conjunto dos número inteiros $\mathbb{Z}$ onde a operação "$*$" é a adição "$+$" e a identidade e é o numeral zero. Claro que a soma de quaisquer números inteiros também vai ser um número inteiro, o item (i) está satisfeito. É óbvio que $0+n = n+0 = n$ sendo $n \in \mathbb{Z}$, logo o item (ii) é satisfeito. O terceiro item também é satisfeito pois para todo $n \in \mathbb{Z}$ exite $-n$ tal que $-n+n = n+(-n) = 0$. O fato da operação $+$ ser comutativo (i.e $m+n = n+m$) implica que o grupo dos números inteiros sobre a operação $+$ é abeliano.

Há uma variedade enorme de conjuntos que satisfazem as propriedades de grupos e há campos da matemática destinado apenas em estuda-los, em física essa teoria desempenha um papel fundamental. Um dos exemplos que mostra nosso grande interesse em grupos é o fato que cada transformação de simetria é um elemento de um certo grupo e sabemos que simetrias estão ligados a quantidades conservadas. Existem muitas outras aplicabilidades de teoria de grupos que não está ligado a simetrias. Dentre a enorme variedade de grupos existentes, neste trabalho estaremos interessados em alguns grupos específicos chamados *Super Grupos de Lie.*

1.2 Grupos de Lie

Muitos livros introduzem este tópico explorando conceitos profundos de topologia e geometria, mas vou tentar seguir um caminho diferente. A primeira coisa a se dizer é que Grupos de Lie é um conjunto contínuo de elementos, isso significa que se g é um elemento do grupo então existe um outro g' que é infinitesimalmente próximo de g. Essa continuidade do grupo permite usar todo nosso conhecimento de cálculo diferencial e incorporar o conceito de variedade, o mesmo não é possível em grupos discretos como no caso do grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$.

Considere o conjunto dos números complexos com módulo igual a 1; é fácil verificar que esse conjunto satisfaz as propriedades de grupo. Vamos denotar esse grupo como $U(1) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$. Podemos fazer uma parametrização ao dizer que $z = e^{i\theta}$ com $0 \leq \theta < 2\pi$ e incorporar o conceito de variedade, dado que todos os elementos do grupo são pontos do círculo de raio unitário no plano complexo. Essas propriedades que os grupos de Lie tem permitem explorar tanto conceitos geométricos quanto algébricos. As propriedades geométricas vem da atribuição do elemento do grupo ser um ponto de um espaço topológico (uma variedade) e as propriedades algébricas vem das operações entre os elementos que definem o grupo.

O conceito de dimensão de grupo surge naturalmente ao pensá-lo como uma variedade, quando fazemos uma parametrização, geometricamente estamos criando um mapa[1] entre uma região do espaço plano para a variedade. No caso do grupo $U(1)$, dado acima, a função $e^{i\theta}$ é o mapa que leva um pedaço de reta $\mathbb{R}$ para o círculo unitário em $\mathbb{C}$. É natural pensar que a dimensão do grupo é exatamente a dimensão da variedade i.e. o número de parâmetros necessários para parametrizá-lo. Além disso se olharmos para o espaço tangente da variedade, que nesse caso nada mais é do que fazer uma linearização, podemos obter os geradores que o formam o grupo e a álgebra que eles obedecem. Por esta ração dizemos que um Grupo de Lie é uma variedade e a Álgebra de Lie é o espaço tangente à essa variedade.

1.3 Álgebra de Lie

Estamos interessado em grupos que tem uma representação matricial com a operação de grupo "$*$" sendo a multiplicação de matrizes usual. As propriedades de grupo mostrado anteriormente nos leva a concluir que a matriz identidade I faz o papel do elemento e, também da propriedade (iii) concluímos que as matrizes que forma nosso grupo em questão devem ter determinantes não nulos, casso contrário não existiria o elemento inverso do grupo.

Suponha que o grupo do qual estamos falando seja o conjunto de todas as matrizes ortogonais 2×2 com parâmetro ϕ

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} u_{11}(\phi) & u_{12}(\phi) \\ u_{21}(\phi) & u_{22}(\phi) \end{pmatrix}$$

onde cada elemento u_{ij} desta matriz é uma função de ϕ. Ao pensar em matrizes ortogonais incorporamos o conceito de rotação de vetores, portanto podemos, sem perda de generalidade, dizer que para $\phi = 0 \Rightarrow R(0) = I_{2\times 2}$. Mas o que acontece se calcularmos $R(\epsilon)$ para ϵ sendo um elemento infinitesimal? Bem, como esperamos um comportamento regular da variedade, então dizemos que

$$R(\epsilon) = 1 + \epsilon J \tag{1.1}$$

onde J é uma certa matriz. Como grupos de Lie podem ser pensados como uma variedade "suave" (isso quer dizer que existem derivadas de todas as ordens) podemos calcular R em

[1] O conceito de mapa em matemática não foge muito do conceito usual, é apenas uma regra que permite sair de um ponto da variedade e chegar em outro.

$\phi = 0 + \epsilon$ o que equivale a fazer uma expansão em série de Taylor das funções u_{ij}

$$R(\epsilon) = \begin{pmatrix} u_{11}(0) + u'_{11}(0)\epsilon + O\left(\epsilon^2\right) & u_{12}(0) + u'_{12}(0)\epsilon + O\left(\epsilon^2\right) \\ u_{21}(0) + u'_{21}(0)\epsilon + O\left(\epsilon^2\right) & u_{22}(0) + u'_{22}(0)\epsilon + O\left(\epsilon^2\right) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Ignorando os termos de $O\left(\epsilon^2\right)$ e comparando as equações (1.1) e (1.2), concluímos que

$$J = \begin{pmatrix} u'_{11}(0) & u'_{12}(0) \\ u'_{21}(0) & u'_{22}(0) \end{pmatrix}$$

Podemos extrair mais propriedades sobre a matriz J. O fato de R ser uma matriz ortogonal implica que

$$\begin{aligned} & R(\epsilon)^T R(\epsilon) = 1 \\ \Rightarrow & \left(1 + \epsilon\, J^T\right)(1 + \epsilon\, J) = 1 + \epsilon\left(J^T + J\right) + O\left(\epsilon^2\right) \\ \Rightarrow & J^T = -J \end{aligned} \tag{1.3}$$

Outra propriedade das matrizes ortogonais é $\det(R) = \pm 1$, mas vamos nos restringir[2] ao caso $+1$, assim

$$\begin{aligned} & \det(R(\epsilon)) = \det(1 + \epsilon J) = 1 + \epsilon\,\mathrm{Tr}(J) + O\left(\epsilon^2\right) = 1 \\ \Rightarrow & \mathrm{Tr}(J) = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Essas propriedades da matriz J, mostradas em (1.3) e (1.4), que derivadas das propriedades do grupo, implicam em

$$\begin{aligned} u_{11}(0) &= u_{22}(0) = 1 \\ u_{12}(0) &= -u_{21}(0) = 0 \\ u'_{11}(0) &= u'_{22}(0) = 0 \\ u'_{12}(0) &= -u'_{21}(0) = a \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde a é um número real. Há duas funções que são boas candidatas caso escolhamos $a = 1$. Se dissermos que $u_{11} = \cos(\phi)$ e $u_{12} = \sin(\phi)$ chegamos ao seguinte resultado

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

[2] As matrizes com $\det(R) = -1$ estão ligadas a transformações que não são contínuas, por exemplo reflexões, e por isso não podem ser expandidas a partir da identidade I.

satisfazendo todas propriedades impostas anteriormente.

Podemos escrever $R(\phi)$ como uma exponenciação da matriz J, dado que $R(\phi)$ mostrada em (1.6) satisfaz a relação $R(a)R(b) = R(a+b)$, devido as propriedades das funções *cosseno* e *seno*. Com essa propriedade podemos obter ϕ finito fazendo o produto $R(\epsilon)...R(\epsilon)$ N vezes. Veja que da equação (1.1) obtermos as duas seguintes relações

$$\begin{aligned} R(\epsilon)^N &= (1 + N\epsilon J)^N \\ R(\epsilon)^N &= (1 + N\epsilon J) + O(\epsilon^2) = R(N\epsilon) \end{aligned}$$

Dado que podemos fazer ϵ infinitesimal tomando o limite $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{\phi}{N}$ concluímos que

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} R\left(N\frac{\phi}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{\phi}{N}J\right)^N \\ &\Rightarrow R(\phi) = \exp(\phi J) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Resta verificar se o resultado obtido em (1.8) está de acordo com (1.6) e (1.7), e de fato

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\phi^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \dots \\ &= 1 + \phi J + \frac{\phi^2}{2!}J^2 + \frac{\phi^3}{3!}J^3 + ... \end{aligned} \tag{1.9}$$

Nos perguntamos agora o significado de todos estes resultados. Claro que a matriz $R(\phi)$ que obtivemos é uma matriz de rotação genérica que opera sobre vetores que vivem em um espaço $\mathbb{R}^2$. Para cada valor de ϕ temos uma matriz de rotação e o conjunto dessas infinitas matrizes de rotação chamamos de grupo $SO(2)$ (do inglês a letra S caracteriza *special*, que exclui as matrizes com $\det(R) = -1$, e a letra O para *orthogonal*). A matriz J é um objeto fundamental de toda essa construção, pois conhecendo quem é essa matriz podemos gerar qualquer matriz do grupo através de uma série como mostrado em (1.9). Atribuímos à matriz J nomes como "gerador do grupo $SO(2)$" e "álgebra do grupo $SO(2)$".

O próximo passo é pensar em rotações em três dimensões e o raciocínio pode ser conduzindo da mesma maneira. No entanto em $\mathbb{R}^3$ temos três planos de rotações (logo três ângulos ϕ, θ, e ψ são necessários para parametrizar o grupo), ao invés de um como no caso anterior. O grupo das rotações em três dimensões é o grupo $SO(3)$ com os seguintes geradores

$$
\begin{aligned}
R_z(\phi) = \exp(\phi\, J_z) &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
R_x(\theta) = \exp(\theta\, J_x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
R_y(\psi) = \exp(\psi\, J_y) &= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

onde $R_z(\phi)$ corresponde a uma rotação no plano xy, $R_x(\theta)$ corresponde a uma rotação no plano yz e $R_y(\psi)$ uma rotação no plano xz. Poderíamos pensar que todos nosso problemas relacionados a rotações em $\mathbb{R}^3$ estão resolvidos pois conhecemos os geradores J_x, J_y e J_z do grupo $SO(3)$ e com isso gerar qualquer matriz de rotação. No entanto as coisas não são tão simples; para entender como seria uma rotação em torno e um vetor unitário $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ qualquer ou como fazer duas rotações consecutivas temos que olhar mais a fundo como as matrizes J_x, J_y e J_z se relacionam, pois o produto de duas matrizes nem sempre é comutativo.

Para entender melhor, suponhamos duas rotações infinitesimais consecutivas, porém em torno de eixos diferentes, como mostradas abaixo

$$
\begin{aligned}
R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) &= (1 + \epsilon J_x)(1 + \epsilon J_y) = 1 + \epsilon (J_x + J_y) + \epsilon^2 J_x J_y \\
R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) &= (1 + \epsilon J_y)(1 + \epsilon J_x) = 1 + \epsilon (J_x + J_y) + \epsilon^2 J_y J_x
\end{aligned}
$$

Subtraindo a equação de cima pela de baixo obtemos

$$
R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) = \epsilon^2 (J_x J_y - J_y J_x)
$$

Vamos definir a seguinte operação chamada comutador: $[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x$. Utilizando as expressões das matrizes $J's$ dadas em (1.10) obtemos as seguintes relações

$$
\begin{aligned}
[J_x\, , J_y] &= J_z \\
[J_z\, , J_x] &= J_y \\
[J_y\, , J_z] &= J_x
\end{aligned}
$$

que podemos escrever de forma resumida

$$[J_i\,, J_j] = \varepsilon^{ijk} J_k \tag{1.11}$$

onde os índices i, j e k assumem os nomes das coordenadas x, y e z e ε^{ijk} é o tensor de Levi-Civita[3]. Dizemos finalmente que a relação entre as matrizes $J's$ mostrada em (1.11) descreve a álgebra do grupo $SO(3)$ e chamamos esse conjunto de álgebra $\mathfrak{so}(3) = \{J_x,\ J_y,\ J_z\}$.

Primeiro falamos sobre rotações em $\mathbb{R}^2$, do grupo $SO(2)$ e obtivemos sua respectiva álgebra $\mathfrak{so}(2) = \{J\}$. Depois estendemos o raciocínio para rotações em $\mathbb{R}^3$ obtendo do grupo de rotações $SO(3)$, sua álgebra $\mathfrak{so}(3) = \{J_x,\ J_y,\ J_z\}$, juntamente com as relações de comutação. O próximo passo seria estudar o grupo de rotações para N dimensões $SO(N)$, mas qual sua respectiva álgebra? Quantos geradores vão ter? Podemos perceber que para cada plano de rotação vai existir um gerador associado, logo o número de geradores da álgebra é igual ao número de planos de rotações (isso é válido para espaços vetoriais sobre o corpo dos reais, o mesmo não é sempre válido para espaços que estão sobre o corpo dos complexos) e isso é fácil descobrir. Para um espaço vetorial real com N dimensões exitem N combinado dois a dois planos de rotações (ou seja $\frac{N(N-1)}{2}$). Logo para o grupo $SO(N)$ sua álgebra vai conter $\frac{N(N-1)}{2}$ geradores.

Resta nos perguntar qual é a relação de comutação entre os geradores da álgebra $\mathfrak{so}(N)$, assim como obtivemos na equação (1.11). Para isso teríamos que ter as expressões das matrizes, mas de antemão podemos escrever de forma geral

$$[T_i\,, T_j] = f^{ijk} T_k$$

onde f^{ijk} é um tensor anti-simétrico nos dois primeiros índices, chamado de constante de estrutura do grupo que carrega toda informação das relações de comutação, também por conveniência vamos denotar a partir de agora um elemento qualquer da álgebra por T_a ao invés de J_a.

Até agora falamos sobre grupos de rotações que agem em espaços vetoriais reais e suas álgebras correspondente, mas as coisas podem ser ainda mais gerais. Como dito antes um Grupos de Lie pode ser pensados como uma variedade "suave" e consequentemente para cada grupo existirá sua Álgebra de Lie, o espaço tangente à variedade, que contém um conjunto de operadores $\{T_1,\ \ldots, T_n\}$. Para ser considerado uma álgebra de Lie esses geradores devem satisfazer as seguintes propriedades

[3]O tensor de Levi-Civita é um tensor anti-simétrico que assumem valores de 1, 0 e -1 para i, j e k iguais a $\{1, 2, 3\}$. Por definição $\varepsilon^{123} = 1$, consequentemente $\varepsilon^{213} = -1$ e assim sucessivamente.

(i) O conjunto $\{T_1, \ldots, T_n\}$ forma um espaço vetorial. Isso implica que a dimensão da álgebra é igual o número de geradores que ela contém.

(ii) Os geradores satisfazem a relação de comutação

$$[T_i\,, T_j] = f^{ijk} T_k$$

(iii) Os geradores devem satisfazem a identidade de Jacobi

$$[T_i\,, [T_j\,, T_k]] + [T_j\,, [T_k\,, T_i]] + [T_k\,, [T_i\,, T_j]] = 0$$

Além da infinidade de álgebras existentes há também diferentes notações que são usadas para classificá-las, cada álgebra goza de propriedades e são aplicáveis em diferentes ramos da física e matemática. Abaixo estão listadas algumas álgebras de Lie

- $\mathfrak{sl}(n+1)$ (as vezes denotado por A_n): chamada de *special linear Lie algebra*, que pode estar sobre um corpo $\mathbb{F}$. Tem inúmeras aplicações, por exemplo em física, sobre o corpo do complexos $\mathbb{C}$, descreve a teoria de spinores.
- $\mathfrak{so}(2n+1)$ (as vezes denotado por B_n): quando está sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$ essa álgebra gera rotações em espaços vetoriais reais, preservando a norma euclidiana, com isso é bastante empregado em teoria de momento angular.
- $\mathfrak{sp}(2n)$ (as vezes denotado por C_n): essa álgebra gera o grupo simplético e tem aplicações, por exemplo, em mecânica Hamiltoniana.
- $\mathfrak{so}(2n)$ (as vezes denotado por D_n): apesar de também descrever rotações em espaços euclidianos, quando está sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$, essa álgebra tem propriedades diferentes da álgebra $\mathfrak{so}(2n+1)$, mas carrega as mesmas informações.

Há também as “álgebras excepcionais” denominadas por $E6$, $E7$, $E8$, $F4$ e $G2$ que são casos muito particulares, mas vamos deixar a referência [1] caso seja interesse do leitor.

1.3.1 Produto Interno

Como uma Álgebra de Lie é também um espaço vetorial, temos toda liberdade de adicionar estruturas cabíveis dentro espaços vetoriais lineares, por tanto estamos hábeis a definir um produto interno. Quando estamos dentro de uma representação matricial da álgebra definir um produto interno não é uma tarefa difícil, no entanto temos certas ambiguidade ao definir uma forma bilinear. Geralmente as propriedades requeridas para um produto interno são

- Ser bilinear i.e. $\langle A,\, B + \alpha C\rangle = \langle A,\, B\rangle + \alpha\langle A,\, C\rangle$.
- Ser positivo definido, ou seja $\langle A,\, A\rangle \geq 0$, igual a 0 se e somente se $A = 0$.

A exigência de ser positivo definido não é sempre requerida em alguns espaços de interesse físico, exemplo o espaço tempo de Minkowski. Vamos então definir um produto interno que é muito empregado em teorias de classificação de álgebras de Lie que preserva propriedades geométricas e algébricas, conhecido como forma de Cartan-Killing

$$\langle A,\, B\rangle := \mathrm{tr}\{AB\}$$

que não é positivo definido. Na verdade para $T_a \in \mathfrak{g}$ as três situações podem ocorrer

$$\langle T_a T_a\rangle \rightarrow \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Há outras definições de produto interno, e cada uma se demonstra útil dependendo do objetivo e aplicação. Deixamos ao leitor a referência [7] que faz uma boa introdução, caso o leitor queira se aprofundar em conceitos mais formais de álgebras e grupos de Lie.

1.4 Super Álgebra

Estamos interessados em sistemas físicos que contém partículas que obedecem diferentes estatísticas (de Bose e de Fermi). Isso vai exigir estruturas extras em todas construções algébricas que fizemos até agora. Essa estrutura adicional à nossa álgebra deve vir em forma de soma direta, pois poderíamos requerer o limite bosônico. Também seus geradores devem carregar a informação da natureza bosônica e fermiônica, assim dizemos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \tag{1.12}$$

onde $\mathfrak{g}$ é nossa super álgebra, $\mathfrak{g}_0$ contém os geradores de natureza bosônica e $\mathfrak{g}_1$ os de natureza fermiônica. Os subíndices 0 e 1 são atributos dados aos geradores de seus respectivos conjuntos que indicam a paridade, os geradores de $\mathfrak{g}_0$ tem paridade par e os de $\mathfrak{g}_1$ tem paridade ímpar. Essa paridade dos geradores é introduzida para dar conda da natureza grassmanniana[4] e abeliana dos campos fermiônicos e bosônicos respectivamente.

[4]Em poucas palavras, variáveis grassmannianas são quantidades anticomutativas, i.e dado que η_1 e η_2 são quantidades grasmanianas, então $\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1$. Isso tem implicações como $\eta_1^2 = 0$ entre outras.

Considere dois geradores $F_1, F_2 \in \mathfrak{g}_1$ e dois campos grassmannianos η_1 e η_2, então

$$[\eta_1 F_1\,,\eta_2 F_2] = \eta_1\eta_2 F_1 F_2 - \eta_2\eta_1 F_2 F_1$$
$$\eta_1\eta_2(F_1F_2 + F_2F_1)$$

pois $\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1$. Por tanto a operação algébrica entre os geradores pertencentes a $\mathfrak{g}_1$ é de anticomutação $[a\,,b]_+ = ab + ba$. Agora considere que $B \in \mathfrak{g}_0$ e ϕ seja um campo abeliano, logo

$$[\phi B\,,\eta_1 F_1] = \phi\eta_1\,(BF_1 - F_1B) = \phi\eta_1\,[B\,,F_1]$$

pois $\phi\eta_1 = \eta_1\phi$. Obviamente a operação entre operadores de $\mathfrak{g}_0$ não muda pois é exatamente a Álgebra de Lie que estamos habituados. Resumindo, uma superálgebra contém geradores fermiônicos e bosônicos onde

- A operação entre operadores bosônicos é de comutação $[\,,]$
- A operação entre operadores bosônicos e fermiônicos também é de comutação $[\,,]$
- A operação entre operadores fermiônicos é de anticomutação $[\,,]_+$

Todas essas informações podem ser condensadas em um super comutador de tal forma que não precisaremos dizer a qual parte da álgebra o gerador pertence e nem colocar o subíndice "+" quando for anticomutação. Formalmente uma Super Álgebra de Lie é definida como um espaço $\mathbb{Z}_2$ gradado ($\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$) com as seguintes propriedades

(i) $[\mathfrak{g}_i\,,\mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$

(ii) Se $x, y \in \mathfrak{g}$ então $[x\,,y] = xy - (-1)^{deg(y)deg(x)}yx$

(iii) Deve satisfazer a Super Identidade de Jacobi

$$(-1)^{deg(x)deg(z)}\,[x\,,[y\,,z]] + (-1)^{deg(y)deg(x)}\,[y\,,[z\,,x]] + (-1)^{deg(z)deg(y)}\,[z\,,[x\,,y]] = 0$$

onde o $deg(x)$ lê o subíndice de qual parte da álgebra x pertence, se $x \in \mathfrak{g}_0$ ou $x \in \mathfrak{g}_1$ então $deg(x)$ assumirá os valores 0 ou 1 respectivamente.

A notação usada para denotar a superálgebra carrega dois números inteiros n, m que estão relacionados com o número de geradores fermiônicos e bosônicos, mas deixamos a referência [6] caso seja interesse do leitor se aprofundar no assunto.

1.5 Loop algebra e Kac-Moody

Até agora falamos de álgebras de Lie semi-simples e superálgebras, que ambas tem dimensão finita e são fundamentais em sistemas físicos com um número finito de simetrias. No entanto há sistemas físicos de bastante interesse que apresentam um número infinito de quantidades conservadas e com isso uma classe infinita de simetrias. Obviamente teremos que fazer uma extensão da nossa boa e velha conhecida Álgebra de Lie Semi-Simples (ou superálgebra) e adicionar a ela estruturas extras para dar conta dessa nova exigência.

Podemos construir essa álgebra de dimensão infinita tomando o produto direto entre o círculo unitário do plano complexo $(z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1)$ e nossa álgebra de Lie semi simples (ou superálgebra se for o caso) $\mathfrak{g} \to z \otimes \mathfrak{g}$. Cada gerador, dessa chamada loop algebra, será escrito como $z^m \otimes T_a$ que obviamente irá satisfazer a seguinte relação de comutação

$$[z^m \otimes T_a \,, z^n \otimes T_b] = z^{m+n} \otimes f^{abc}\, T_c \tag{1.13}$$

Se $m, n \in \mathbb{Z}$ podemos definir o elemento da loop algebra $\mathfrak{g}$ como $T_a^{(n)} := z^n \otimes T_a$ satisfazendo por tanto.

$$\left[T_a^{(m)} \,, T_b^{(m)}\right] = f^{abc}\, T_c^{(m+n)}$$

Podemos imaginar essa nova álgebra como um conjunto infinito de camadas onde cada camada contém todos os geradores da álgebra de Lie, além de está associada a uma gradação específica n, que é justamente o expoente do parâmetro z. Essa gradação, que está associado a estrutura adicional que colocamos na álgebra, identifica qual camada da loop algebra um certo gerador $T_a^{(n)}$ está a partir de um operador d definido como

$$d := z \frac{d}{dz}$$

Logo

$$\begin{aligned} \left[d \,, T_a^{(n)}\right] &= \left(z \frac{d}{dz}\, z^n \right) \otimes T_a \\ &= n\, T_a^{(n)} \end{aligned} \tag{1.14}$$

O auto valor do operador d é justamente o grau do gerador $T_a^{(n)}$. Isso permite separar nossa álgebra em subespaços gradados da seguinte maneira

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{g}_n$$

que obviamente, em $\mathfrak{g}_n$ contém somente os geradores de grau n.

Apesar de termos adicionado estruturas extras à nossa álgebra ainda não temos a ferramenta necessária para lidar com certos problemas. A loop álgebra ∞-dimensional apesar de dar conta de sistemas com infinitas quantidades conservadas não descreve simetrias quânticas. A álgebra que corresponde a grupos de simetrias para sistemas quânticos tem uma extensão central e é conhecida como álgebra de Kac-Mood [10]. A definição formal é feita a partir da generalização da matriz de Cartan[5], aqui apresentaremos apenas algumas ideias gerais. Primeiro é que a álgebra de Kac-Moody também é uma álgebra ∞-dimensional. Um elemento geral dessa álgebra pode ser escrito como $T_a^{(n)}$, que se assemelha muito com as definições anteriores, mas difere conceitualmente e satisfaz a seguinte relação de comutação

$$\left[T_a^{(m)}\,, T_b^{(m)}\right] = f^{abc}\,T_c^{(m+n)} + m\hat{c}\,\delta_{m+n,0}\mathrm{Tr}\{T_a, T_b\}$$

Aqui os índices m, n são inteiros, mas não carrega o mesmo conceito apresentado em (1.13). Esses índices estão relacionados à extensão feita à álgebra de Lie e está associada a um operador a mais que foi acrescentado. O termo $\hat{c}$ que aparece na equação acima é chamado de termo central, ou extensão central. Nada mais é do que um gerador pertencente a álgebra que comuta com todos os demais geradores $\left[\hat{c}\,, T_a^{(n)}\right] = 0$.

Ainda falta definirmos um produto interno para esse novo espaço. Esse produto interno tem que levar em conta a gradação, mas tem que preservar todas as propriedades da álgebra de Lie (ou superálgebra de Lie, se for o caso). Definimos portanto a seguinte forma de Cartan-Killing

$$\begin{aligned}\langle T_a^{(m)}\,T_b^{(n)}\rangle =& \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z} z^{m+n}\ \mathrm{Tr}\{T_a\,T_b\} \\ =& \,\delta_{m+n,0}\mathrm{Tr}\{T_a T_b\}\end{aligned} \tag{1.15}$$

onde caminho da integral no plano complexo inclui o ponto $z = 0$.

[5]A matriz de Cartan é uma peça central no entendimento de álgebras de Lie, ela carrega a informação das relações de comutação e raízes da álgebra.

Capítulo 2

Modelos Supersimétricos

Os três artigos [2], [3] e [8] trataram um mesmo problema seguindo vias diferentes obtendo modelos integráveis e supersimétricos. No artigo [2], que estuda uma teoria Toda abordando o problema fazendo uso de uma álgebra de Kac-Moody e a partir da conservação de correntes obtém um conjunto de equações supersimétricas, de fato essa correntes, são correntes de Noether derivadas de uma ação $WZNW$ que apresentaremos mais adiante. Em [8] temos a mesma estrutura algébrica que [2] e, com certas condições impostas, as mesmas equações são derivadas fazendo a variação da mesma ação $WZNW$, porém sob algumas transformações de gauge específicas. No artigo [3] é obtido uma classe de hierarquias integráveis a partir de uma estrutura algébrica muito semelhantes às dos artigos [2] e [8], e para certas escolhas de parâmetros pode-se obter equações que descrevem modelos físicos de bastante interesse. Não surpreendentemente, para uma escolha específica de parâmetros, as mesmas equações supersimétricas são obtidas. Neste capítulo vamos fazer uma revisão desses três trabalhos seguindo uma sequência histórica iniciando a discussão falando da ligação entre uma teoria Toda e uma teoria $WZNW$.

Estamos interessados em uma classe de equações diferenciais parciais não lineares, basicamente as equações de nosso interesse são generalizações da equação de Liouville

$$\partial_+\partial_-\phi + M\, e^{\phi} = 0 \tag{2.1}$$

onde M é uma constante. Estamos usando o sistema de coordenadas bidimensionais do cone de luz que são definidas como $z = t+x$ e $\bar{z} = t-x$ onde definimos $\partial_+ = \frac{\partial}{\partial z}$ e $\partial_- = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Esta equação, que é invariante conforme, possui uma solução bastante conhecida que foi achada pelo próprio Liouville

$$\exp\left(2\phi\right) = \frac{\partial_z \eta(z) \partial_{\bar{z}} \rho(\bar{z})}{(1-\eta(z)\rho(\bar{z}))^2}$$

onde η e ρ são duas funções arbitrárias dependentes de z e $\bar{z}$ respectivamente.

Uma generalização pode ser pensada de forma a incluir r campos se reescrevermos a equação (2.1) de forma mais genérica como

$$\partial_+\partial_-\phi_i + K_{ij}\, e^{\phi_j} = 0 \tag{2.2}$$

Essa equação, com K_{ij} sendo uma matriz qualquer é encontrada em diferentes áreas da física como aerodinâmica, teoria de plasma, eletrólitos entre outros. Porém se essa matriz for uma matriz de Cartan de uma álgebra de Lie semi-simples obtemos modelos integráveis, a demonstração pode ser encontrada em [11]. Outros modelos foram posteriormente obtidos a partir de generalizações da álgebra usada para construção do modelo, o exemplo mais simples é o modelo sinh-Gordon

$$\partial_-\partial_+\phi + M(e^{2\phi} - e^{-2\phi}) = 0 \tag{2.3}$$

que é obtido a partir da *loop algebra* $\mathfrak{sl}(2)$. Essa equação não é invariante conforme como é a (2.1), mas podemos recobrar essa invariância se usarmos a álgebra de Kac-Moody, onde a existência do termo central permite novamente a existência da invariância conforme.

A equação (2.2) pode ser derivada a partir da seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_+\phi_i\partial_-\phi_j - K_{ij}\exp\left(\phi_j\right)$$

o que aumenta o interesse físico; chamamos de modelo de Toda. O modelo de Toda surgiu inicialmente no trabalho [13] com a proposta de resolver o problema de Fermi–Pasta–Ulam, que consiste basicamente de uma rede de osciladores harmônicos com uma interação não linear, mais detalhes sobre esse modelo tal como as soluções pode ser encontrado em [12]. Neste trabalho estamos interessados em uma versão supersimétrica dessas equações onde o limite bosônico deve nos levar a equação (2.3), por isso o grade desafio é incluir férmios na teoria de forma a obter supersimetria.

2.1 Conexão entre Teoria Toda e a ação WZNW

Vamos agora apresentar uma construção de uma teoria de Toda a partir de correntes de Noether derivadas de uma ação $WZNW$, que com certos vínculos impostos, possibilita obter equações de movimento para os campos, semelhante as equações apresentadas em (2.2). Esse tipo de construção foi apresentado primeiramente em [4] numa versão puramente bosônica. A ação em questão é definida sobre um elemento do grupo g que é mapa exponencial de uma álgebra de Lie semi-simples

$$S_{WZNW}[g] = \frac{-k}{4\pi}\int_{\mathsf{M}} \langle g^{-1}\partial_+ g\, g^{-1}\partial_- g\rangle\, dx^2 + \frac{k}{12\pi}\int_{\partial\mathsf{M}} \varepsilon^{ijk}\langle (g^{-1}\partial_i g)(g^{-1}\partial_j g)(g^{-1}\partial_k g)\rangle\, dx^2 \tag{2.4}$$

onde $g \in G$, k é uma constante e o segundo termo do lado direito da igualdade é uma integral sobre a borda do espaço-tempo de Minkowski $\partial\mathsf{M}$, considerando que todo espaço tempo esteja dentro de um superfície fechada. A partir dessa ação podemos obter duas correntes conservadas que são escritas como derivadas de g

$$J = g^{-1}\partial_- g, \quad \bar{J} = \partial_+ g g^{-1} \tag{2.5}$$

e por serem conservadas satisfazem as seguintes equações

$$\partial_+ J = 0, \quad \partial_- \bar{J} = 0 \tag{2.6}$$

Aqui iremos obter uma versão supersimétrica onde campos fermiônicos são adicionados tal como equações de movimento referente a esses campos. A adição desses campos fermiônicos parte de considerar a ação $WZNW$ definida sobre um supergrupo de Lie G com exponenciando de $g \in G$ sendo **uma loop superálgebra** dotada de uma gradação inteira para os elementos com paridade par (bosônicos) e uma gradação semi-inteira para os elementos com paridade ímpar (fermiônicos). Além disso usaremos a seguinte decomposição Gaussiana para o elemento do grupo

$$g = NBM \quad \text{onde} \quad N \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_<\right), \; B \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_0\right), \; M \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_>\right) \tag{2.7}$$

Claramente os elementos N, B e M também pertencem ao grupo e são mapas exponenciais dos elementos da álgebra com a gradação indicada. Vale notar que

$$\hat{\mathfrak{g}}_< \subset \bigoplus_{n=-1/2}^{-\infty} \hat{\mathfrak{g}}_n, \quad \hat{\mathfrak{g}}_> \subset \bigoplus_{n=1/2}^{\infty} \hat{\mathfrak{g}}_n \tag{2.8}$$

e obviamente $\mathfrak{g}_0$ são todos os elementos da álgebra de grau zero.

Com todas todas essas considerações podemos usar as equações (2.5) e (2.6) para escrever equações de movimento de uma maneira mais conveniente, dado a definição de g em (2.7), e assim reescrever as correntes como

$$J = M^{-1}KM, \quad \bar{J} = N\bar{K}N^{-1}$$

onde

$$
\begin{aligned}
K &= B^{-1}N^{-1}(\partial_- N)B + B^{-1}\partial_- B + (\partial_- M)M^{-1} \\
\bar{K} &= N^{-1}(\partial_+ N) + \partial_+ B B^{-1} + B\partial_+ M M^{-1} B^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Usando essa equações juntamente com (2.6) obtemos as seguintes equações de movimento

$$
\partial_+ K + \left[K\,, \partial_+ M M^{-1}\right] = 0 \tag{2.10}
$$

$$
\partial_- \bar{K} - \left[\bar{K}\,, N^{-1}\partial_- N\right] = 0 \tag{2.11}
$$

Para estabelecer a conexão entre uma teoria $WZNW$ e uma teoria Super Toda precisamos impor os seguintes vínculos para as correntes J e $\bar{J}$

$$
\begin{aligned}
J &= E^{(-1)} + j_{-1/2} + j_0 + j_> \\
\bar{J} &= E^{(1)} + \bar{j}_{1/2} + \bar{j}_0 + \bar{j}_<
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

onde $E^{(\pm 1)} \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$ é um elemento constante da álgebra. Os demais elementos como $j_{-1/2}$, $\bar{j}_{1/2}$ e etc, contém campos da teoria. Se fizermos a comparação grau a grau entre os termos das equações (2.9) e (2.12), isso nos permite achar vínculos para os seguintes termos

$$
\begin{aligned}
B^{-1}N^{-1}\partial_- N B &= E^{(-1)} + j_{-1/2} \\
B\partial_+ M M^{-1} B^{-1} &= E^{(1)} + j_{1/2}
\end{aligned}
$$

Se usarmos esses vínculos nas equações (2.10) e projetarmos nos elementos de grau $-1/2$ e 0 (identificando $\bar{j_{1/2}} = A_{1/2}$ obtemos), obtemos as seguintes equações

$$
\begin{aligned}
\partial_+ j_{-1/2} + \left[E^{(-1)}\,, B^{-1}A_{1/2}B\right] &= 0 \\
\partial_+(B^{-1}\partial_- B) + \left[E^{(-1)}\,, B^{-1}E^{(1)}B\right] + \left[j_{-1/2}\,, B^{-1}A_{1/2}B\right] &= 0
\end{aligned}
$$

Fazendo o mesmo para a equação (2.11) obtemos

$$
\begin{aligned}
\partial_- A_{1/2} + \left[Bj_{1/2}B^{-1}\,, E^{(1)}\right] &= 0 \\
\partial_-(\partial_+ B B^{-1}) - \left[E^{(1)}\,, BE^{(-1)}B^{-1}\right] - \left[A_{1/2}\,, Bj_{-1/2}B^{-1}\right] &= 0
\end{aligned}
$$

As duas equações correspondentes a projeção em 0 são idênticas a menos de uma conjugação[1] por B. Por fim obtemos o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned}\partial_+ j_{1/2} &= \left[B^{-1}A_{1/2}B\,,E^{(-1)}\right]\\ \partial_-(\partial_+ BB^{-1}) &= \left[E^{(1)}\,,BE^{(-1)}B^{-1}\right] + \left[A_{1/2}\,,Bj_{-1/2}B^{-1}\right]\\ \partial_- A_{1/2} &= \left[E^{(1)}\,,Bj_{1/2}B^{-1}\right]\end{aligned} \tag{2.13}$$

Se escolhermos uma superálgebra e explicitarmos os termos desse conjunto de equações, obteremos uma versão supersimética de (2.2), como mostraremos na seção 2.4 deste capítulo.

2.2 Método dressing

Vamos apresentar aqui uma maneira sistemática de construir uma classe de infinitas equações diferenciais parciais não lineares porém integráveis, é o que chamamos de “Hierarquia Integrável”. A beleza da construção desse modelo é que para certas escolhas de parâmetros, as equações obtidas descrevem modelos físicos de bastante interesse e admitem soluções tipo sóliton. Aqui trataremos de modelos bidimensionais no espaço tempo (x, t). Primeiramente vamos falar do método *dressing* para uma **teoria bosônica** fazendo uso de uma loop algebra, depois vamos fazer uma extensão do problema para incluir fermions e derivar as equações a partir do problema de fatorização de Riemann-Hilbert. De fato mostraremos a ligação entre o método *dressing* e Riemann-Hilbert. O que garante a integrabilidade do modelo é a representação do mesmo em termos da equação da Zakharov-Shabat, também conhecido como equação de curvatura nula

$$[\partial_x + A_x\,,\partial_t + A_t] = 0 \tag{2.14}$$

É fácil mostrar que essa equação é invariante por transformações de gauge (que neste caso é uma conjugação por um elemento do grupo). Seja $g \in G$, conjugar a equação acima significa multiplicar pela direita (e pela esquerda) por g^{-1} (respectivamente por g), ou seja

$$\begin{aligned}& g\,[\partial_x + A_x\,,\partial_t + A_t]\,g^{-1} = 0\\ \Rightarrow & g\left[\partial_x + \partial_x g g^{-1} + gA_x g^{-1}\,,\partial_t + \partial_t g g^{-1} + A_t g^{-1}\right] = 0\\ \Rightarrow & \left[\partial_x + A'_x\,,\partial_t + A'_t\right] = 0\end{aligned}$$

onde $A'_x = gA_xg^{-1} + \partial_x g g^{-1}$ e $A'_t = gA_tg^{-1} + \partial_t g g^{-1}$ e são chamados de potenciais. A equação (2.14) é satisfeita se esses potenciais, A_x e A_t, forem soluções do tipo puro gauge,

[1]O sentido atribuído a “conjugação” é uma multiplicação pela direita por um certo elemento do grupo X e pela esquerda pelo seu inverso X^{-1}

i.e.

$$A_x = -\partial_x \Omega \Omega^{-1}, \quad A_t = -\partial_t \Omega \Omega^{-1} \tag{2.15}$$

onde $\Omega \in G$. Por substituição direta é fácil mostrar que (2.15) é solução de (2.14).

A vantagem da equação de curvatura nula ser invariante por transformações de gauge é que podemos partir de uma equação trivial, solução de vácuo que não contém campos, e obter soluções não triviais que contém campos. Definimos $\Omega_0 = \exp\left(xE^{(1)} + tE^{(-1)}\right)$ onde $E^{(\pm 1)}$ é um elemento constante da álgebra satisfazendo $\left[E^{(1)}, E^{(-1)}\right] = 0$. Obviamente a equação (2.14) é satisfeita

$$\left[\partial_x + E^{(1)}, \partial_t + E^{(-1)}\right] = 0$$

e identificamos os operadores no vácuo $A_x^{vac} = -\partial_x \Omega_0 \Omega_0^{-1} = E^{(1)}$ e $A_t^{vac} = -\partial_t \Omega_0 \Omega_0^{-1} = E^{(-1)}$. O método *dressing* em sumo é uma transformação de gauge dos potenciais no vácuo através de um elemento pertencente ao grupo que tem a mesma estrutura apresentada na seção anterior

$$A_\mu = \Theta_+ A_\mu^{vac} \Theta_+^{-1} - \partial_\mu \Theta_+ \Theta_+^{-1} \tag{2.16}$$

$$A_\mu = \Theta_-^{-1} A_\mu^{vac} \Theta_- + \Theta_-^{-1} \partial_\mu \Theta_- \tag{2.17}$$

onde definimos as quantidades

$$\begin{aligned} \Theta_+ &= B\, e^{W^{(1)}} e^{W^{(2)}} \cdots \\ \Theta_- &= \cdots e^{W^{(-2)}} e^{W^{(-1)}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Aqui, $W^{(i)} \in \mathfrak{g}_i$ é uma combinação linear dos elementos da álgebra de grau i. Veja a semelhança com as definições feitas na equação (2.7). De fato $\Theta_+ \in \exp(\mathfrak{g}_\geq)$ e $\Theta_- \in \exp(\mathfrak{g}_<)$, porém inicialmente trataremos de uma teoria puramente bosônica, ou seja, não se trata de uma loop superálgebra mas de uma loop álgebra de Lie apenas. O elemento B é definido exatamente como anteriormente sendo o exponenciando dos elementos pertencentes a $\mathfrak{g}_0$. Escrevemos essas transformações em termos de $\Theta_\pm$ e não em termos de N, B e M somente por conveniência e facilitar a comparação com outros trabalhos como [9], [3]. Vamos mostrar agora que, tanto as transformações com Θ_+ quanto com Θ_-, levam aos mesmos potenciais A_x e A_t.

O que queremos é que a equação (2.16) nos leve a transformações tais que

$$E^{(1)} \to E^{(1)} + A_0, \quad E^{(-1)} \to D^{(-1)}$$

onde A_0 contém os campos bosônicos da teoria e $D^{(-1)}$ é uma combinação de elementos de grau -1.

Primeiramente vamos expandir a transformação mostrada em (2.16), assim

$$\begin{aligned}
A_\mu =& B\, e^{W^{(1)}} e^{W^{(2)}} \cdots E^{(\pm 1)} \cdots e^{-W^{(2)}} e^{-W^{(1)}} B^{-1} - \partial_x \left(B\, e^{W^{(1)}} e^{W^{(2)}} \cdots \right) \left(\cdots e^{-W^{(2)}} e^{-W^{(1)}} B^{-1} \right) \\
=& B \left\{ E^{(1)} + \left[W^{(1)} , E^{(1)} \right] + \left[W^{(2)} , E^{(1)} \right] + \frac{1}{2} \left[W^{(1)} , \left[W^{(1)} , E^{(1)} \right] \right] + \cdots \right\} B^{-1} + \\
& - \partial_x B B^{-1} + B \left\{ \partial_x W^{(1)} + \partial_x W^{(2)} + \left[W^{(1)} , \partial_x W^{(1)} \right] + \cdots \right\} B^{-1}
\end{aligned}$$

O problema todo consistirá em achar soluções para todos os $W^{(i)}$ e verificar a compatibilidade das equações. Projetando grau a grau para A_x obtemos

$$\begin{array}{lrcl}
\text{grau } 0: & -\partial_x B B^{-1} & = & A_0 \\
\text{grau } 1: & B E^{(1)} B^{-1} - B \partial_x W^{(1)} B^{-1} & = & E^{(1)} \\
\text{grau } 2: & -B \left\{ \left[W^{(1)} , E^{(1)} \right] - \frac{1}{2} \left[W^{(1)} , \partial_x W^{(1)} \right] - \partial_x W^{(2)} \right\} B^{-1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

A transformação para A_t segue da mesma maneira, no entanto obviamente com diferentes gradações

$$\begin{array}{lrcl}
\text{grau -1}: & B E^{(-1)} B^{-1} & = & D^{(-1)} \\
\text{grau } 0: & B \left[W^{(1)} , E^{(-1)} \right] B^{-1} - \partial_t B B^{-1} & = & 0 \\
\text{grau } 1: & -B \left\{ \left[W^{(2)} , E^{(-1)} \right] - \frac{1}{2} \left[W^{(1)} , \left[W^{(1)} , E^{(-1)} \right] \right] - \partial_t W^{(1)} \right\} B^{-1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Esses conjuntos de equações devem ser resolvidos grau a grau achando soluções para os $W^{(i)}$'s.

Para a teoria ser auto consistente devemos verificar os mesmos tipos de transformações para os operadores no vácuo $E^{(\pm 1)}$ porém sob o *dressing* de Θ_- como mostra a equação (2.17). Logo

$$\begin{aligned}
A_\mu =& \cdots e^{-W^{(-2)}} e^{-W^{(-1)}} E^{(\pm 1)} e^{W^{(-1)}} e^{W^{(-2)}} \cdots + \left(\cdots e^{-W^{(-2)}} e^{-W^{(-1)}} \right) \partial_\mu \left(e^{W^{(-1)}} e^{W^{(-2)}} \cdots \right) \\
=& E^{(\pm 1)} + \left[E^{(\pm 1)} , W^{(-1)} \right] + \frac{1}{2} \left[\left[E^{(\pm 1)} , W^{(-1)} \right] , W^{(-1)} \right] + \left[E^{(\pm 1)} , W^{(2)} \right] \\
& + \partial_\mu W^{(-1)} + \left[\partial_x W^{(-1)} , W^{(-1)} \right] + \partial_\mu W^{(-2)} + \cdots
\end{aligned}$$

As equações resultantes da transformação de A_x são

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{grau } 1: & E^{(1)} & = & E^{(1)} \\
\text{grau } 0: & \left[E^{(1)}, W^{(-1)}\right] & = & A_0 \\
\text{grau } \text{-}1: & \left[E^{(1)}, W^{(-2)}\right] + \frac{1}{2}\left[\left[E^{(1)}, W^{(-1)}\right], W^{(-1)}\right] + \partial_x W^{(-1)} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

As equações da transformação de A_t são

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{grau } \text{-}1: & \partial_t W^{(-1)} + E^{(-1)} & = & D^{(-1)} \\
\text{grau } \text{-}2: & \partial_t W^{(-2)} + \left[E^{(-1)}, W^{(-1)}\right] + \frac{1}{2}\left[W^{(-1)}, \partial_t W^{(-1)}\right] & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Neste ponto temos certas ambiguidades nas definições dos operadores, mas não quer dizer que seja uma inconsistência, apenas que podem ser definidos de diferentes maneiras

$$
\begin{array}{l}
\textit{Dressing} \text{ por } \Theta_+ \Rightarrow A_0 = -\partial_x B B^{-1} \\
\textit{Dressing} \text{ por } \Theta_- \Rightarrow A_0 = \left[E^{(1)}, W^{(-1)}\right]
\end{array}
$$

Obviamente podemos achar soluções para $W^{(-1)}$ e B tal que forneçam um mesmo A_0, mas isso implica que os elementos da álgebra que estão no exponenciando de B pertençam a imagem do operador $E^{(1)}$.

Dado as transformações dos potenciais no vácuo $A_\mu^{vac} \to A_\mu$ o passo seguinte é usá-los na equação de curvatura nula (2.14) e resolvê-la grau a grau. Assumindo as soluções $A_0 = -\partial_x B B^{-1}$ e $D^{(-1)} = B E^{(-1)} B^{-1}$ achadas acima, obtemos

$$
\left[\partial_x + E^{(1)} - \partial_x B B^{-1}, \partial_t + B E^{(-1)} B^{-1}\right]
$$

$$
\begin{array}{ll}
\Rightarrow \text{Grau -1:} & \partial_x (B E^{(-1)} B^{-1}) - \left[\partial_x B B^{-1}, B E^{(-1)} B{-1}\right] = 0 \\
\Rightarrow \text{Grau } 0: & \partial_t (\partial_x B B^{-1}) = \left[B E^{(-1)} B^{-1}, E^{(1)}\right]
\end{array}
$$

Claramente a equação de grau -1 é identicamente satisfeita. A equação de grau 0 é a equação de movimento puramente bosônica da teoria. Veja que se identificarmos

$$
\partial_x \Leftrightarrow -\partial_+ \quad \text{e} \quad \partial_t \Leftrightarrow \partial_- \tag{2.19}
$$

obtemos justamente a equação de grau 0 mostrada em (2.13) no limite onde os campos fermiônicos $A_{1/2}$ e $j_{1/2}$ vão a zero.

2.2.1 Riemann-Hilbert

O método *dressing* pode ser pensado de uma maneira mais generalizada. A intensão da generalização é **incluir campos fermiônicos** associados aos elementos da superálgebra. Além disso podemos, através de uma escolha de grau para o operador $E^{(n)}$, obter uma classe de equações diferenciais. Essa construção bem sistemática de hierarquia integrável foi apresentada em [3] fazendo uso de uma super-álgebra de Kac-Moody dotada de uma gradação principal, sendo que a parte par da álgebra possui gradação inteira e a parte ímpar semi-inteira. Assim como na primeira seção deste capítulo, vamos considerar um elemento do grupo g e a mesma decomposição Gaussiana já apresentada em (2.7)

$$g = NBM \quad \text{onde} \quad N \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_{<}\right), \; B \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_{0}\right), \; M \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_{>}\right) \tag{2.20}$$

Os elementos do grupo N, B e M são mapas exponenciais dos elementos da álgebra com a gradação indicada com as mesmas definições da equação (2.8).

Um outro objeto fundamental para construção do nosso modelo é um operador $E^{(n)} \in \hat{\mathfrak{g}}_n$, o mesmo que aparece nas equações (2.13), no entanto com com uma gradação $n \in \mathbb{Z}$, que induz a seguinte decomposição na nossa álgebra

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$$

onde $\mathcal{K}$ é o Kernel[2] e $\mathcal{M}$ a Image do operador $E^{(n)}$, conjunto complementar.

Como mostrado em [3] o modelo integrável pode ser derivado a partir da extensão do problema de fatorização de Riemann-Hilbert. Considere o seguinte elemento em G

$$\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} E^{(n)} t_n\right) \tilde{g} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{(-n)} t_{-n}\right) = N\Pi \tag{2.21}$$

onde $\tilde{g}$ é um elemento constante do grupo e $\Pi = BM$. Os tempos $t_{\pm n}$ caracterizam os *flows* (do inglês, fluxos), parâmetros da álgebra gradada. Para cada grau $n \in \mathbb{Z}$ definimos um parâmetro t_n onde $\frac{\partial t_m}{\partial t_n} = \delta_{m\,n}$. A equação (2.21) é uma consequência direta do método *dressing* feito anteriormente. Sabemos que uma solução puro gauge (2.15) satisfaz a equação de curvatura nula (2.14). Logo as equações (2.16) e (2.17) nos leva as seguintes

[2]Kernel e Image são dois conjuntos disjuntos de vetores que satisfazem uma certa propriedade, esse conceito vem da álgebra linear. Se $X \in \mathfrak{g}$ onde $[E\,, X] = 0$ então $X \in \mathcal{K}$. Todos os outros elementos de $\mathfrak{g}$ que não comutam com E pertencem a Image $\mathcal{M}$.

conclusões

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \Omega \Omega^{-1} &= -\,\Theta_+ \partial_\mu \Omega_0 \Omega_0^{-1} \Theta_+^{-1} - \partial_\mu \Theta_+ \Theta_+^{-1} \\ &= -\,\partial_\mu \left(\Theta_+ \Omega_0\right) \left(\Omega_0^{-1} \Theta_+^{-1}\right) \;\Rightarrow \Omega = \Theta_+ \Omega_0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \Omega \Omega^{-1} &= -\,\Theta_-^{-1} \partial_\mu \Omega_0 \Omega_0^{-1} \Theta_- + \Theta_-^{-1} \partial_\mu \Theta_- \\ &= -\,\partial_\mu \left(\Theta_-^{-1} \Omega_0\right) \left(\Omega_0^{-1} \Theta_-\right) \;\Rightarrow \Omega = \Theta_-^{-1} \Omega_0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $A_\mu^{vac} = \partial_\mu \Omega_0 \Omega_0^{-1}$ com $\Omega_0 = \exp\left(xE^{(1)} + tE^{(-1)}\right)$. Comparando as equações (2.22) e (2.23) concluímos que

$$\Theta_+ \Omega_0 = \Theta_-^{-1} \Omega_0 \tilde{g}$$

com $\tilde{g}$ sendo um elemento constante. Dado que $\left[E^{(1)}, E^{(-1)}\right] = 0$ podemos multiplicar pela direita e pela esquerda ora por $\exp\left(tE^{(-1)}\right)$, ora por $\exp\left(xE^{(1)}\right)$, absorvendo-os em $\Theta_\pm$ de forma a obtermos a seguinte equação

$$\exp\left(-xE^{(1)}\right) \tilde{g} \exp\left(tE^{(-1)}\right) = \Theta_- \Theta_+$$

Claramente podemos estender o raciocínio para outras gradações $E^{(\pm n)}$ e associar a cada n um parâmetro $t_{\pm n}$ a qual vamos chamar de *flows*. Para efeito de comparação vamos renomear os elementos $\Theta_- = N$ e $\Theta_+ = \Pi = BM$, veja que essas definições estão totalmente de acordo com (2.18), e com isso finalmente obtemos (2.21).

Tomando derivadas dos dois lados da equação (2.21) para $n > 0$ e $n < 0$ obtemos as seguinte relações

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_n} N &= -N \left(N^{-1} E^{(n)} N\right)_- \\ \frac{\partial}{\partial t_{-n}} N &= N \left(\Pi E^{(-n)} \Pi^{-1}\right)_- \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_n} \Pi &= -\left(N^{-1} E^{(n)} N\right)_+ \Pi \\ \frac{\partial}{\partial t_{-n}} \Pi &= \left(\Pi E^{(-n)} \Pi^{-1}\right)_+ \Pi \end{cases} \tag{2.25}$$

Aqui estamos denotando que $(...)_+$ significa projeção em elementos de grau positivos e iguais a zero $\hat{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ e $(...)_-$ de grau negativos $\hat{\mathfrak{g}}_<$. O conjunto dessas equações são equivalente, (2.24) corresponde a um *dressing* por Θ_- e (2.25) corresponde a um *dressing* por Θ_+, e como mostrado na seção anterior, ambas as transformações fornecem operadores de Lax iguais.

Vamos agora derivar operadores de Lax a partir das equações (2.24) para $t_1 = x$ (mas nada impede de usar as relações (2.25)).

$$\begin{aligned}\partial_x(N) &= -N(N^{-1}E^{(1)}N)_- = -E^{(1)}N + N(N^{-1}E^{(1)}N)_+ \\ &= -E^{(1)}N + N\left(E^{(1)} + \left[W^{(-1/2)}, E^{(1)}\right] + \left[W^{(-1)}, E^{(1)}\right] + \frac{1}{2!}\left[W^{(-1/2)}, \left[W^{(-1/2)}, E^{(1)}\right]\right]\right) \\ &= -E^{(1)}N + N(E^{(1)} + A_0 + Q_+^{(0)} + A_{1/2})\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde

$$A_0 = \left[W^{(-1)}, E^{(1)}\right] \quad A_{1/2} = \left[W^{(-1/2)}, E^{(1)}\right]$$
$$Q_+^{(0)} = \frac{1}{2!}\left[W^{(-1/2)}, \left[W^{(-1/2)}, E^{(1)}\right]\right]$$

Devemos encarar o lado esquerdo da equação (2.26) como um operador que age em uma certa função f, assim

$$\partial_x(N)f = \partial_x(Nf) - N\partial_x f \to \partial_x(N) = \partial_x N - N\partial_x \tag{2.27}$$

Portanto a equação (2.26) resulta no seguinte

$$\begin{aligned}\partial_x + E^{(1)} + A_0 + Q_+^{(0)} + A_{1/2} = N^{-1}(\partial_x + E^{(1)})N \\ \Rightarrow \mathcal{L}_x = \partial_x + E^{(1)} + A_0 + Q_+^{(0)} + A_{1/2}\end{aligned} \tag{2.28}$$

Para outros valores de $n's$ positivos podemos fazer a mesma coisa, a diferença é que a expansão de $(NE^{(n)}N^{-1})_+$ vai conter mais termos, assim obtemos a expressão geral

$$N^{-1}(\partial_{t_n} + E^{(n)})N = \partial_{t_n} + E^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} D_n^{(i)} + D_n^{(i-1/2)}$$

onde $D_n^{(k)}$ é uma combinação linear de elementos de grau k. No lado direito da equação acima fica evidente a conexão entre a extensão do problema de Riemann-Hilbert e o "método *dressing*", a matriz N ao conjugar o operador de Lax no vácuo $\mathcal{L}^v = \partial_{t_n} + E^{(n)}$ transforma-o em um operador que contém campos da teoria.

Para os *flows* negativos ($n < 0$) obtemos outros operadores de Lax usando a outra equação de (2.24). Dado que $M = \exp\left(W^{(1/2)} + W^{(1)} + W^{(3/2)} + \cdots\right)$ obtemos

$$\begin{aligned}\partial_{t_{-n}}N =& (BME^{(-n)}M^{-1}B^{-1})_- N = -B(ME^{(-n)}M^{-1})_- B^{-1}N \\ &= B\left(E^{(-n)} + \left[W^{(1/2)}, E^{(-n)}\right] + \left[W^{(1)}, E^{(-n)}\right] + \cdots\right)_- B^{-1}N\end{aligned} \tag{2.29}$$

Com o mesmo raciocínio usado em (2.27) podemos reescrever a equação acima como um *dressing* do operador $\partial_{t_{-n}}$

$$N^{-1}\partial_{t_{-n}}N = \partial_{t_{-n}} + B\left(E^{(-n)} + \sum_{i=-1}^{-n+1} D^{(i)} + D^{(i+1/2)}\right)B^{-1} \tag{2.30}$$

Escolhendo $n = -1$ e definindo $j_{-1/2} = -\left[W^{(1/2)}, E^{(-1)}\right]$, $t_{-1} = t$ obtemos o seguinte operador de Lax

$$\mathcal{L}_t = \partial_t + Bj_{-1/2}B^{-1} + BE^{(-1)}B^{-1} \tag{2.31}$$

O fato de estarmos fazendo uso de uma super-álgebra nos permite derivar um outro operador de Lax correspondente a um *flow* de gradação semi-inteira fazendo uso e um operador $D^{(1/2)}$ que pertença ao kernel. Associado à esse operador $D^{(1/2)}$ definimos um parâmetro $t_{1/2}$ e estendemos o raciocínio assumindo um *dressing* do operador $\mathcal{L}_{1/2}^{vac} = \partial_{1/2} + D^{(1/2)}$, logo

$$\begin{aligned} N^{-1}(\partial_{1/2} + D^{(1/2)})N &= \partial_{1/2} + D^{(0)} + D^{(1/2)} \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{1/2} &= \partial_{1/2} + D^{(0)} + D^{(1/2)} \end{aligned} \tag{2.32}$$

O ponto chave dessa construção é que, usando as equações (2.24) para cada escolha de n inteiro, podemos obter operadores de Lax e com isso usar a equação de curvatura nula (2.14) e assim obter obter uma classe infinita de equações de movimento, e que obviamente serão integráveis. Além do mais, podemos achar transformações de supersimetria para as equações dado extensão feita (2.32), onde incluímos operadores de Lax associados a gradações semi-inteira! Veja a seguir.

Por construção, os operadores de Lax achados em (2.28), (2.31) e (2.32) obedecem as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{L}_{1/2}, \mathcal{L}_t\right] &= 0 \\ \left[\mathcal{L}_{1/2}, \mathcal{L}_x\right] &= 0 \\ \left[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_t\right] &= 0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Assim como no método *dressing* essas equações devem ser resolvidas grau a grau, por tanto obtemos

$$\left[\mathcal{L}_{1/2}, \mathcal{L}_t\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_{1/2}(BE^{(-1)}B^{-1}) &= \left[BE^{(-1)}B^{-1}, D^{(0)}\right] \\ \partial_{1/2}(Bj_{-1/2}B^{-1}) &= [BE^{(-1)}B^{-1}, D^{(-1/2)}] + [Bj_{-1/2}B^{-1}\, D^{(0)}] \\ \partial_t D^{(0)} &= [D^{(1/2)}, Bj_{-1/2}B^{-1}] \\ \partial_t D^{(1/2)} &= 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

$$
\left[\mathcal{L}_{1/2}\,,\mathcal{L}_x\right]=0\Rightarrow\begin{cases}
[E^{(1)},\,D^{(1/2)}] & =0\\
\partial_{1/2}A_{1/2}-\partial_x D^{(1/2)} & =[A_{1/2},\,D^{(0)}]+[A_0+Q_+^{(0)},\,D^{(1/2)}]\\
\partial_{1/2}(A_0+Q_+^{(0)})-\partial_x D^{(0)} & =[A_0+Q_+^{(0)},\,D^{(0)}]
\end{cases}
\tag{2.35}
$$

$$
\left[\mathcal{L}_x\,,\mathcal{L}_t\right]=0\Rightarrow\begin{cases}
\partial_x(BE^{(-1)}B^{-1}) & =[A_0+Q_+^{(0)},\,BE^{(-1)}B^{-1}]\\
\partial_x(Bj_{-1/2}B^{-1}) & =[BE^{(-1)}B^{-1},\,A_{1/2}]+[Bj_{-1/2}B^{-1},\,A_0+Q_+^{(0)}]\\
\partial_t(A_0+Q_+^{(0)}) & =[BE^{(-1)}B^{-1},\,E^{(1)}]+[Bj_{-1/2}B^{-1},\,A_{1/2}]\\
\partial_t A_{1/2} & =[E^{(1)},\,Bj_{-1/2}B^{-1}]
\end{cases}
\tag{2.36}
$$

O conjunto de equações (2.34) e (2.35) são aqui interpretados como transformações de supersimetria das equações (2.36) sustentado pelo fato de que $\partial_{1/2}\left[\mathcal{L}_x\,,\mathcal{L}_t\right]=0$. É fácil demonstrar isso usando a identidade de Jacobi

$$
\begin{aligned}
\partial_{1/2}\left[\mathcal{L}_x\,,\mathcal{L}_t\right] &= -\left[\left[D^{(0)}+D^{(1/2)}\,,\mathcal{L}_x\right]\,,\mathcal{L}_t\right]-\left[\mathcal{L}_x\,,\left[D^{(0)}+D^{(1/2)}\,,\mathcal{L}_t\right]\right]\\
&= -\left[D^{(0)}+D^{(1/2)}\,,\left[\mathcal{L}_x\,,\mathcal{L}_t\right]\right]=0
\end{aligned}
$$

Se interpretarmos $\partial_{1/2}$ como uma variação δ obtemos, integrado as equações (2.34) e (2.35), as seguintes transformações de super-simetria

$$
\begin{aligned}
\delta j_{-1/2} &= \left[E^{(-1)}\,,B^{-1}D^{(1/2)}B\right]\\
\partial_t(\delta BB^{-1}) &= \left[Bj_{-1/2}B^{-1}\,,D^{(1/2)}\right]\\
\delta A_{1/2} &= \left[\delta BB^{-1}\,,A_{1/2}\right]-\left[\partial_x BB^{-1}\,,D^{(1/2)}\right]\\
\left[E^{(1)}\,,\delta BB^{-1}\right] &= \left[A_{1/2}\,,D^{(1/2)}\right]
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

A equação de grau -1 de (2.36) nos fornece a solução $A_0+Q_+^{(0)}=-\partial_x BB^{-1}$. Com isso finalmente obtemos as equações de movimento

$$
\begin{aligned}
\partial_x j_{1/2} &= \left[E^{(-1)}\,,B^{-1}A_{1/2}B\right]\\
\partial_t(\partial_x BB^{-1}) &= \left[BE^{(-1)}B^{-1}\,,E^{(1)}\right]+\left[Bj_{-1/2}B^{-1}\,,A_{1/2}\right]\\
\partial_t A_{1/2} &= \left[E^{(1)}\,,Bj_{1/2}B^{-1}\right]
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

que, dado a identificação mostrado em (2.19), são idênticas às equações (2.13). Além do mais elas são invariantes pela variação δ se usarmos as transformações (2.37), ver detalhes no Apêndice C.

2.3 Modelo de gauge WZNW

As mesmas equações (2.38) derivadas pelo método *dressing* e pela conservação de correntes, mostrado nas duas seções anteriores, podem ser derivadas a partir de um formalismo lagrangiano. Como mostrado em [8], vamos obter as equações supersimétricas do modelo Super Toda a partir de uma ação WZNW onde os campos matriciais da teoria pertencem a uma *Twisted Affine Lie Superalgebra.*

Faremos uso de uma super álgebra com as mesmas propriedades apresentadas anteriormente, os campos bosônicos e fermiônicos parametrizam a parte par e ímpar da álgebra respectivamente. Considere os mesmos elementos da álgebra apresentados em (2.7) e (2.8), porém com a seguinte decomposição gaussiana para os elementos N e M do grupo

$$N = \chi_< \Phi, \quad M = \Psi \chi_>$$

Então reescrevemos

$$g = \chi_< \Gamma \chi_>, \quad \Gamma = \Phi B \Psi$$

onde

$$\begin{gathered} \chi_< \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_{\leq -1}\right), \quad \chi_> \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_{\geq 1}\right) \\ \Phi = \exp\left(W^{(-1/2)}\right), \quad B \in \exp\left(\hat{g}^{(0)}\right), \quad \Psi = \exp\left(W^{(1/2)}\right) \end{gathered} \tag{2.39}$$

e consideramos $W^{(\pm 1/2)}$ sendo uma combinação linear dos elementos da álgebra com gradação semi inteira. Os símbolos $\leq, \geq, <, >$ denotam uma projeção dos elementos da álgebra com os respectivos graus. Em fim a ação proposta para o modelo é

$$\begin{aligned} S[g, A_\pm] =& S_{WZNW}[g] - \\ & - \frac{k}{2\pi} \int \left\langle A_- \left(\partial_+ g g^{-1} - E^{(1)}\right) + A_+ \left(g^{-1}\partial_- g - E^{(-1)}\right) + A_- g A_+ g^{-1} \right\rangle d^2x \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde $\langle * \rangle$ significa o super traço generalizado[3], já apresentado na equação (1.15). Essa ação

[3] O super traço generalizado leva em conta não somente o traço das matrizes, mas também a gradação associada a elas. Se $T_a^{(m)} \in \hat{g}_m$ e $T_b^{(n)} \in \hat{g}_n$ então $\langle T_a^{(m)} T_b^{(n)} \rangle = \delta_{m+n,0} \langle T_a T_b \rangle$.

é invariante sobre as seguintes transformações locais de gauge

$$
\begin{aligned}
g \to\ & \alpha g \beta, \quad \alpha \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_{\leq -1}\right) \quad \text{e} \quad \beta \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_{\geq 1}\right) \\
A_+ \to\ & \beta^{-1} A_+ \beta - \beta^{-1}\partial_+ \beta \\
A_- \to\ & \alpha A_- \alpha^{-1} - \partial_- \alpha \alpha^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

onde $A_- \in \hat{\mathfrak{g}}_{\leq 1}$, $A_+ \in \hat{\mathfrak{g}}_{\leq -1}$ (a demonstração da invariância da ação por estas transformações está no Apêndice A). Podemos então tirar proveito dessa invariância e escolher $\alpha = \chi_<^{-1}$, $\beta = \chi_>^{-1}$ e com isso obtemos a seguinte ação

$$
\begin{aligned}
S[\Gamma, A_\pm] =& S_{WZNW}[\Gamma] + \\
& - \frac{k}{2\pi} \int \langle A_- \left(\partial_+ \Gamma \Gamma^{-1} - E^{(1)}\right) + A_+ \left(\Gamma^{-1}\partial_- \Gamma - E^{(-1)}\right) + A_- \Gamma A_+ \Gamma^{-1} \rangle dx^2
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

onde a ação S_{WZNW} é a mesma apresentada em (2.4). Para simplificarmos nossa ação, eliminando redundâncias, vamos fazer uso da seguinte identidade de Polyakov-Wiegmann

$$
\begin{aligned}
S_{WZNW}[ABC] =& S_{WZNW}[A] + S_{WZNW}[B] + S_{WZNW}[C] + \\
& - \frac{k}{2\pi} \int \langle A^{-1}\partial_- A \partial_+ B B^{-1} + B^{-1}\partial_- B \partial_+ C C^{-1} + A^{-1}\partial_- A B \partial_+ C C^{-1} B^{-1} \rangle dx^2
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

E com isso podemos escrever a ação $WZNW$ como

$$
S_{WZNW}[\Gamma] = S_{WZNW}[B] - \frac{k}{2\pi} \int \langle \Phi^{-1}\partial_- \Phi\, B\, \partial_+ \Phi \Phi^{-1}\, B^{-1} \rangle dx^2 \tag{2.44}
$$

Os cancelamentos de termos como $S_{WZNW}[\Phi] = 0$, $S_{WZNW}[\Psi] = 0$ entre outros vem da ortogonalidade associada a gradação, ou seja, somente produtos com gradações opostas ou de grau zero não serão anulados. Logo os termos que não serão anulados no segundo termo do lado direito da equação (2.42), quando tomarmos o traço, são

$$
\begin{aligned}
\langle A_- ((\partial_+ \Gamma \Gamma^{-1})|_{\geq +1} - E^{(1)}) \rangle &= \langle A_- (\Phi B \partial_+ \Psi \Psi^{-1} B^{-1} \Phi^{-1} - E^{(1)}) \rangle \\
\langle A_+ ((\Gamma^{-1}\partial_- \Gamma)|_{\leq -1} - E^{(-1)}) \rangle &= \langle A_+ (\Psi^{-1} B^{-1} \Phi^{-1} \partial_- \Phi B \Psi - E^{(-1)}) \rangle
\end{aligned}
$$

Podemos resolver as equações de movimento para os campos $A_\pm$

$$
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\pm} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\pm)} \right) = 0
$$

com o objetivo de achar uma ação efetiva, o que nos resulta na seguinte solução

$$A_+ = \Gamma^{-1} E^{(1)} \Gamma - \Psi \partial_+ \Psi$$
$$A_- = \Gamma E^{(-1)} \Gamma^{-1} - \partial_- \Phi \Phi^{-1}$$

Substituindo os resultados de (2.44) e (2.3) em (2.42) obtemos a ação com campos que efetivamente contribuem nas equações de movimento

$$\begin{aligned} S_{eff}[\Phi, B, \Psi] =& S_{WZNW}[B] - \frac{k}{2\pi} \int \langle (\Phi^{-1} E^{(1)} \partial_- \Phi) + (\Psi E^{(-1)} \Psi^{-1} \partial_+ \Psi \Psi^{-1}) \rangle \\ &+ \frac{k}{2\pi} \int \langle \Phi^{-1} E^{(1)} \Phi B \Psi E^{(-1)} \Psi^{-1} B^{-1} \rangle \end{aligned} \tag{2.45}$$

Em princípio essa ação teria infinitos termos devido a expansão de Baker-Haussdorff do termo $\Phi^{-1} E^{(1)} \Phi B \Psi E^{(-1)} \Psi^{-1} B^{-1}$ presente na última integral, no entanto a série sempre será truncada em alguma ordem pela natureza grassmanniana dos campos fermiônicos, ou pela nilpotência dos geradores.

2.3.1 Equações de movimento

Para obter as equações de movimento do modelo precisamos fazer a variação da ação (2.45). Aqui, vamos impor duas condições que possibilitará a truncagem da série no termo de segunda ordem.

$$Q_+^{(0)} = (\Phi^{-1} E^{(1)} \Phi)|_0 = \frac{1}{2} \left[W^{(-1/2)}, \left[W^{(-1/2)}, E^{(1)} \right] \right] = 0$$
$$Q_-^{(0)} = (\Psi^{-1} E^{(-1)} \Psi)|_0 = \frac{1}{2} \left[W^{(1/2)}, \left[W^{(1/2)}, E^{(-1)} \right] \right] = 0$$

Essa condição nada mais é do que impor vínculos entre campos fermiônicos, no capítulo seguinte discutiremos as implicações de não considerar esses termos iguais a zero. Fazendo a expansão dos termos $\Phi^{-1} E^{(1)} \Phi$ e $\Psi E^{(-1)} \Psi^{-1}$ com o vínculo mostrado na equação acima, obtemos a seguinte ação

$$\begin{aligned} S_{eff}[W^{(-1/2)}, B, W^{(1/2)}] =& S_{WZNW}[B] \\ &- \frac{k}{2\pi} \int \langle \partial_- W^{(-1/2)} \left[W^{(-1/2)}, E^{(1)} \right] + \partial_+ W^{(1/2)} \left[W^{(1/2)}, E^{(-1)} \right] \rangle \\ &- \frac{k}{2\pi} \int \langle \left[W^{(1/2)}, E^{(1)} \right] B \left[W^{(1/2)}, E^{(-1)} \right] - E^{(1)} B E^{(-1)} B^{-1} \rangle \end{aligned}$$

Fazendo uma variação da ação com respeito a B e $W^{(\pm 1/2)}$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{k}S = &\int \langle \delta B B^{-1}\left\{\partial_-(\partial_+ B B^{-1}) - \left[E^{(1)}\,, B E^{(-1)} B^{-1}\right] - \left[A_{1/2}\,, B j_{1/2} B^{-1}\right]\right\}\rangle \\ &+ \int \langle \delta W^{(1/2)}\left\{\partial_+ j_{-1/2} - \left[E^{(-1)}\,, B^{-1} A_{1/2} B\right]\right\}\rangle \\ &+ \int \langle \delta W^{(-1/2)}\left\{\partial_- A_{1/2} + \left[E^{(1)}\,, B j_{1/2} B^{-1}\right]\right\}\rangle\end{aligned}$$

onde definimos $j_{-1/2} = \left[W^{(1/2)}\,, E^{(-1)}\right]$ e $A_{1/2} = \left[E^{(1)}\,, W^{(-1/2)}\right]$, portanto obtemos novamente as mesmas equações obtidas em (2.38) e (2.13).

$$\begin{aligned}\partial_+ j_{-1/2} &= \left[B^{-1} A_{1/2} B,\, E^{(-1)}\right] \\ \partial_-(\partial_+ B B^{-1}) &= [E^{(1)},\, B E^{(-1)} B^{-1}] + \left[A_{1/2},\, B j_{-1/2} B^{-1},\right] \\ \partial_- A_{1/2} &= \left[E^{(1)},\, B j_{-1/2} B^{-1}\right]\end{aligned}$$

2.4 Modelo $\mathfrak{sl}(2,1)$

Vamos então escolher uma super-álgebra e explicitar todas as equações de movimento que obtivemos tal como as transformações de supersimetria, para isso vamos escolher a superálgebra $\hat{\mathfrak{sl}}(2,1)$ e os seguinte operadores $E^{(n)}$ e Q:

$$E^{(n)} = h_1^{(n+1/2)} + 2h_n^{(n+1/2)} - \left(E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{-\alpha_1}^{(n)}\right), \quad Q = 2d + \frac{1}{2}h_1$$

$$\begin{aligned}\hat{sl}(2,1) &= \hat{\mathfrak{g}}_0 \oplus \hat{\mathfrak{g}}_1 \\ \text{onde} \quad \hat{\mathfrak{g}}_0 &= \left\{h_1^{(n)},\, h_2^{(n)},\, E_{\alpha_1}^{(n)},\, E_{-\alpha_1}^{(n)}\right\} \\ \hat{\mathfrak{g}}_1 &= \left\{E_{\alpha_2}^{(n+1/2)},\, E_{-\alpha_2}^{(n+1/2)},\, E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/2)},\, E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1/2)}\right\}\end{aligned} \tag{2.46}$$

Aqui os subíndices 0 e 1 estão denotando as partes par e ímpar da álgebra respectivamente, como dito na seção Super Álgebra do Capítulo 1.

Como dito antes o operador $E^{(n)}$ induz uma separação da super-álgebra em dois conjuntos Kernel e Image

$$\hat{\mathfrak{g}}_0 = \mathcal{M}_B \oplus \mathcal{K}_B, \quad \hat{\mathfrak{g}}_1 = \mathcal{M}_F \oplus \mathcal{K}_F \tag{2.47}$$

O fato da álgebra também ser um espaço vetorial nos permite escolher uma base mais conveniente. Essa nova base que vamos escolher contém elementos do Kernel fermiônito e bosônico, isso permite eliminar campos redundantes da nossa teoria. A seguinte base

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{sl}}(2,1) &= \hat{\mathfrak{g}}_{0\mathcal{K}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_{0\mathcal{M}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_{1\mathcal{K}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_{1\mathcal{M}} \\
\text{onde} \quad \hat{\mathfrak{g}}_{0\mathcal{K}} &= \left\{K_1^{(2n+1)},\, K_2^{(2n+1)}\right\},\, \hat{\mathfrak{g}}_{0\mathcal{M}} = \left\{M_1^{(2n+1)},\, M_2^{(2n)}\right\} \\
\hat{\mathfrak{g}}_{1\mathcal{K}} &= \left\{F_1^{(2n+3/2)},\, F_2^{(2n+1/2)}\right\},\, \hat{\mathfrak{g}}_{1\mathcal{M}} = \left\{G_1^{(2n+1/2)}, G_2^{(2n+3/2)}\right\}
\end{aligned}
$$

é na verdade uma subálgebra da *loop*-superálgebra. No Apêndice B consta como essa nova base está escrita em termos da base mostrada em (2.46) e as novas relações de comutação. Essa escolha implica que $Q_+^{(0)} = 0$ e portanto obtemos

$$A_0 = -\partial_x B B^{-1},\, A_{1/2} = \bar{\psi} G_1^{(1/2)},\, j_{-1/2} = \psi G_2^{(-1/2)}$$

Como B tem que ser o mapa exponencial dos elementos de grau zero, nessa base específica então

$$B = \exp\left(\phi M_2^{(0)}\right)$$

Juntando todas essas informações obtemos as chamadas equações Super sinh-Gordon

$$
\begin{aligned}
\partial_x \psi &= 2\psi \cosh(\phi) \\
\partial_t \partial_x \phi &= 2\sinh(2\phi) + 2\bar{\psi}\psi \sinh(\phi) \\
\partial_t \bar{\psi} &= 2\cosh(\phi)
\end{aligned}
$$

que são invariantes sobre as seguinte transformação de supersimetria

$$\delta\bar{\psi} = \epsilon \partial_x \phi, \quad \delta\phi = \epsilon\bar{\psi}, \quad \delta\psi = 2\epsilon \sinh(\phi)$$

Essas transformações são obtidas a partir das equações (2.37).

Capítulo 3

Modelos Completos

Os três modelos apresentados no capítulo anterior são idênticos quando se trunca a expansão de Baker-Haussdorff do termo potencial até primeira ordem. Essa truncagem da série impõe vínculos entre campos fermiônicos pois as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$\begin{aligned} Q_+^{(0)} &= (\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi)|_0 = \frac{1}{2}\left[W^{(-1/2)}, \left[W^{(-1/2)}, E^{(1)}\right]\right] = 0 \\ Q_-^{(0)} &= (\Psi^{-1}E^{(-1)}\Psi)|_0 = \frac{1}{2}\left[W^{(1/2)}, \left[W^{(1/2)}, E^{(-1)}\right]\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se quisermos fazer uma realização da teoria para superalgebras com dimensões maiores que 8 (o caso da álgebra $\mathfrak{sl}(2,1)$) essas condições irão impor muitos vínculos entre os campos fermiônicos e assim reduzindo graus de liberdade essenciais da teoria. Neste capítulo estudaremos os modelos sem imposição de vínculos e quais consequências isso traz às equações de movimento.

3.1 Decomposição gaussiana para o modelo WZNW

O fato do operador $E^{(n)}$ induzir a separação $\mathfrak{sl}(2,1) = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ nos permite escolher uma base da álgebra com geradores no Kernel e na Image e assim usar a decomposição de Gauss para reescrever os elementos do grupo como

$$\begin{aligned} \Phi &\to \Phi_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{M}} = \exp\left(W_{\mathcal{K}}^{(-1/2)}\right)\exp\left(W_{\mathcal{M}}^{(-1/2)}\right) \\ \Psi &\to \Psi_{\mathcal{M}}\Psi_{\mathcal{K}} = \exp\left(W_{\mathcal{M}}^{(1/2)}\right)\exp\left(W_{\mathcal{K}}^{(1/2)}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $W_{\mathcal{M}}^{(\pm 1/2)}$ é uma combinação linear de elementos da Image e $W_{\mathcal{K}}^{(\pm 1/2)}$ do Kernel. Assim poderemos eliminar campos fermiônicos redundantes, pois

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}\Phi_{\mathcal{K}}^{-1}E^{(n)}\Phi_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{M}} &= \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E^{(n)}\Phi_{\mathcal{M}} \\ \Psi_{\mathcal{M}}\Psi_{\mathcal{K}}E^{(n)}\Psi_{\mathcal{K}}^{-1}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1} &= \Psi_{\mathcal{M}}E^{(n)}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para ser mais categóricos devemos mostrar que a ação (2.45) é invariante sob a decomposição dos elementos do grupo mostrado em (3.2), dessa forma

$$\begin{aligned} &S_{eff}[\Phi, B, \Psi] \to \\ &S_{eff}[\Phi_{\mathcal{K}}, \Phi_{\mathcal{M}}, B, \Psi_{\mathcal{M}}, \Psi_{\mathcal{K}}] = S_{WZNW}[B] + \frac{k}{2\pi}\int \langle \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}\Phi_{\mathcal{K}}^{-1}E^{(1)}\Phi_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{M}}B\Psi_{\mathcal{M}}\Psi_{\mathcal{K}}E^{(-1)}\Psi_{\mathcal{K}}^{-1}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}B^{-1}\rangle\, dx^2 \\ &-\frac{k}{2\pi}\int \langle \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}\Phi_{\mathcal{K}}^{-1}E^{(1)}\partial_-(\Phi_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{M}}) + \Psi_{\mathcal{M}}\Psi_{\mathcal{K}}E^{(-1)}\Psi_{\mathcal{K}}^{-1}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}\partial_+(\Psi_{\mathcal{M}}\Psi_{\mathcal{K}})\Psi_{\mathcal{K}}^{-1}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}\rangle\, dx^2 \end{aligned}$$

Usando (3.3) podemos reescrever a ação como

$$\begin{aligned} S_{eff}[\Phi_{\mathcal{K}}, \Phi_{\mathcal{M}}, B, \Psi_{\mathcal{M}}, \Psi_{\mathcal{K}}] =& S_{WZNW}[B] + \frac{k}{2\pi}\int \langle \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E^{(1)}\Phi_{\mathcal{M}}B\Psi_{\mathcal{M}}E^{(-1)}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}B^{-1}\rangle\, dx^2 \\ &-\frac{k}{2\pi}\int \langle \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E^{(1)}\partial_-\Phi_{\mathcal{M}} + \Psi_{\mathcal{M}}E^{(-1)}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}\partial_+\Psi_{\mathcal{M}}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}\rangle\, dx^2 \\ &-\frac{k}{2\pi}\int \langle\, dx^2\Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E^{(1)}\Phi_{\mathcal{K}}^{-1}\partial_-\Phi_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{M}} + \Psi_{\mathcal{M}}E^{(-1)}\partial_+\Psi_{\mathcal{K}}\Psi_{\mathcal{K}}^{-1}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}\rangle\, dx^2 \\ =& S_{eff}[\Phi_{\mathcal{M}}, B, \Psi_{\mathcal{M}}] - \frac{k}{2\pi}\int \langle\, dx^2 E^{(1)}\Phi_{\mathcal{K}}^{-1}\partial_-\Phi_{\mathcal{K}} + E^{(-1)}\partial_+\Psi_{\mathcal{K}}\Psi_{\mathcal{K}}^{-1}\rangle\, dx^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde usamos as propriedades do traço

$$\begin{aligned} \langle [A,B]\rangle &= 0 \\ \langle [A,B]\,C\rangle &= \langle A\,[B,C]\rangle \\ \langle A^{-1}BA\rangle &= \langle B\rangle \langle ABCD\rangle = \langle BCDA\rangle = \langle CDAB\rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

Fazendo a variação do segundo termo da última linha da equação (3.4) obtemos

$$\delta\int \langle E^{(1)}\Phi_{\mathcal{K}}^{-1}\partial_-\Phi_{\mathcal{K}} + E^{(-1)}\partial_+\Psi_{\mathcal{K}}\Psi_{\mathcal{K}}^{-1}\rangle\, dx^2 = \int \langle \partial_-(E^{(1)}\delta\Phi_{\mathcal{K}}\Phi_{\mathcal{K}}^{-1}) + \partial_+(E^{(-1)}\delta\Psi_{\mathcal{K}}\Psi_{\mathcal{K}}^{-1})\rangle\, dx^2 \tag{3.6}$$

que é apenas uma derivada total, logo as decomposições dos elementos do grupo mostradas em (3.2) mantém a ação invariante. Logo a ação que contém campos que realmente contribuem para as equações de movimento é

$$\begin{aligned}S_{eff}[\Phi_{\mathcal{M}}, B, \Psi_{\mathcal{M}}] = & S_{WZNW}[B] - \frac{k}{2\pi}\int \langle (\Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E_+\partial_-\Phi_{\mathcal{M}}) + (\Psi_{\mathcal{M}}E_-\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}\partial_+\Psi_{\mathcal{M}}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1})\rangle\, dx^2 \\ & + \frac{k}{2\pi}\int \langle \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E_+\Phi_{\mathcal{M}}B\Psi_{\mathcal{M}}E_-\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}B^{-1}\rangle\, dx^2\end{aligned}$$

Fazendo a variação dessa ação com relação aos elementos do grupo obtemos

$$\begin{aligned}\delta S_{eff}[\Phi_{\mathcal{M}}, B, \Psi_{\mathcal{M}}] = & \int \left\langle \delta BB^{-1}\left\{\partial_-(\partial_+BB^{-1}) + \left[B\Psi_{\mathcal{M}}E^{(-1)}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}B^{-1}, \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E^{(1)}\Phi_{\mathcal{M}}\right]\right\}\right\rangle dx^2 \\ & + \int \left\langle \delta\Phi_{\mathcal{M}}\Phi_{\mathcal{M}}^{-1}\left\{\partial_-\left(\Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E^{(1)}\Phi_{\mathcal{M}}\right) + \left[B\Psi_{\mathcal{M}}E^{(-1)}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}B^{-1}, \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E^{(1)}\Phi_{\mathcal{M}}\right]\right\}\right\rangle dx^2 \\ & + \int \left\langle \delta\Psi_{\mathcal{M}}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}\left\{\partial_+\left(\Psi_{\mathcal{M}}E^{(-1)}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}\right) + \left[\Psi_{\mathcal{M}}E^{(-1)}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}, B^{-1}\Phi_{\mathcal{M}}^{-1}E^{(1)}\Phi_{\mathcal{M}}B\right]\right\}\right\rangle dx^2\end{aligned} \tag{3.7}$$

e mais alguns termos de superfície que não escrevemos. As equações de movimento serão os termos que multiplicam os elementos infinitesimais $\delta\Phi_{\mathcal{M}}\Phi_{\mathcal{M}}^{-1}$, δBB^{-1} e $\delta\Psi_{\mathcal{M}}\Psi_{\mathcal{M}}^{-1}$, a partir de agora vamos omitir o subíndice $\mathcal{M}$ pra termos uma notação menos carregada. Dado que o super-traço leva em conta a gradação (ver página 12) teremos de projetar os termos das equações em certos graus, dessa forma

- Como $\delta\Psi\Psi^{-1}$ tem grau 1/2, então o termo $\partial_+\left(\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1}\right)+\left[\Psi E_-\Psi^{-1}, B^{-1}\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi B\right]$ tem que ser projetado em grau -1/2, o que resulta na seguinte equação

$$\partial_+ j_{-1/2} = \left[B^{-1}A_{1/2}B,\, E^{(-1)}\right] + \left[B^{-1}Q_+^{(0)}B,\, j_{-1/2}\right] + \frac{1}{3}\left[B^{-1}\left[Q_+^{(0)}, W^{(-1/2)}\right]B,\, Q_-^{(0)}B^{-1}\right] + \cdots \tag{3.8}$$

- Como δBB^{-1} tem grau zero, então o termo $\partial_-(\partial_+BB^{-1})+\left[B\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1}B^{-1}, \Phi^{-1}E^{(1)}\Phi\right]$ tem que ser projetado em grau zero, o que resulta na seguinte equação

$$\begin{aligned}\partial_-(\partial_+BB^{-1}) = & [E^{(1)},\, BE^{(-1)}B^{-1}] + [A_{1/2},\, Bj_{-1/2}B^{-1},] + \\ & + \left[Q_+^{(0)},\, BQ_-^{(0)}B^{-1}\right] + \frac{1}{9}\left[\left[W^{(-1/2)}, Q_+^{(0)}\right],\, B\left[W^{(1/2)}, Q_-^{(0)}\right]B^{-1}\right] + ...\end{aligned} \tag{3.9}$$

- Como $\delta\Psi\Psi^{-1}$ tem grau 1/2, então o termo $\partial_-\left(\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi\right)+\left[B\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1}B^{-1}, \Phi^{-1}E^{(1)}\Phi\right]$ tem que ser projetado em grau -1/2, o que resulta na seguinte equação

$$\partial_- A_{1/2} = \left[E^{(1)},\, Bj_{-1/2}B^{-1}\right] + \left[A_{1/2},\, BQ_-^{(0)}B^{-1}\right] + \frac{1}{3}\left[Q_+^{(0)},\, B\left[W^{(1/2)}, Q_-^{(0)}\right]B^{-1}\right] + \cdots \tag{3.10}$$

onde, como dito antes, estamos definindo $A_{1/2} = \left[E^{(1)}\,, W^{(-1/2)}\right]$ e $j_{-1/2} = \left[W^{(1/2)}\,, E^{(-1)}\right]$. Essa expansão não se estende ao infinito dado a natureza grassmanniana dos campos fermiônicos e nilpotência dos elementos da álgebra.

Como a superálgebra $\mathfrak{sl}(2,1)$, a qual vamos realizar nosso modelo, tem dimensão da Image fermiônica igual a 2 os termos serão trucados na segunda ordem da expansão, assim nossas equações de movimentos conterão apenas os termos

$$\begin{array}{lrl}
\textbf{Grau -1/2:} & \partial_+ j_{-1/2} & = \left[B^{-1}A_{1/2}B,\, E^{(-1)}\right] + \left[B^{-1}Q_+^{(0)}B,\, j_{-1/2}\right] \\
\textbf{Grau 0:} & \partial_-(\partial_+ BB^{-1}) & = [E^{(1)},\, BE^{(-1)}B^{-1}] + \left[A_{1/2},\, Bj_{-1/2}B^{-1},\right] + \left[Q_+^{(0)},\, BQ_-^{(0)}B^{-1}\right] \\
\textbf{Grau 1/2:} & \partial_- A_{1/2} & = \left[E^{(1)},\, Bj_{-1/2}B^{-1}\right] + \left[A_{1/2},\, BQ_-^{(0)}B^{-1}\right]
\end{array} \tag{3.11}$$

Esse conjunto de equações é o que chamamos de modelo completo, onde não se impões nenhum tipo de vínculo.

3.2 Transformações de gauge para correntes

A primeira seção do Capítulo 2 iniciou mostrando uma conexão entre uma teoria Super Toda e uma ação $WZNW$ onde obtivemos equações supersimétricas e integráveis a partir da conservação de duas correntes J e $\bar{J}$. Já na terceira seção (ver página 26) nós obtivemos as mesmas equações que vieram a partir da variação da mesma ação $WZNW$, tirando proveito da invariância da ação por certas transformações de gauge mostradas em (2.41). Essas transformações eliminam uma infinidade de campos presentes na estrutura do grupo, mas que não são de interesse do modelo. Em nossos modelos estamos interessados em campos associados a geradores da álgebra com gradações $\pm 1/2$ e 0, em analogia à spins de partículas. Por isso aqui vamos propor uma transformação de gauge com o objetivo de obter a mesma estrutura entre as equações vindas da conservação de correntes e da variação da ação.

Guiado pelas transformações propostas em (2.41), aqui vamos propor a mesma transformação para o elemento do grupo g, onde

$$g \to \alpha g \beta \tag{3.12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J & = (\alpha g \beta)^{-1}\partial_-(\alpha g \beta) \\ \bar{J} & = \partial_+(\alpha g \beta)(\alpha g \beta)^{-1} \end{cases}$$

Abrindo todos os termos, lembrando que $g = NBM$, reescrevemos as correntes como

$$J = (M\beta)^{-1}B^{-1}(\alpha N)^{-1}\partial_-(N\alpha)B(M\beta) + (M\beta)^{-1}B^{-1}\partial_- B(M\beta) + (M\beta)^{-1}\partial_-(M\beta)$$
$$\bar{J} = \partial_+(\alpha N)(\alpha N)^{-1} + (\alpha N)\partial_+ BB^{-1}(\alpha N)^{-1} + (\alpha N)B\partial_+(M\beta)(M\beta)^{-1}(\alpha N)^{-1}$$

Assim como feito anteriormente, podemos usar a seguinte decomposição gaussiana

$$N = \chi_< \Phi, \quad M = \Psi\chi_>$$

e escolhemos

$$\alpha = \chi^{-1}_{<-1/2}, \quad \beta = \chi^{-1}_{>1/2}$$

Dessa forma eliminamos todos os campos associados a geradores com graus inferiores a $-1/2$ e superiores a $1/2$ e reescrevemos os elementos resultantes dessa transformação como

$$\alpha N = \Phi \in \mathfrak{g}_{-1/2}, \quad M\beta = \Psi \in \mathfrak{g}_{1/2}$$

aproveitando as definições feitas em (2.39). Podemos redefinir as correntes escrevendo-as como

$$J = \Psi^{-1}K\Psi, \quad \bar{J} = \Phi\bar{K}\Phi^{-1}$$

onde

$$\begin{aligned} K &= B^{-1}\Phi^{-1}(\partial_-\Phi)B + B^{-1}\partial_- B + (\partial_-\Psi)\Psi^{-1} \\ \bar{K} &= \Phi^{-1}(\partial_+\Phi) + \partial_+ BB^{-1} + B\partial_+\Psi\Psi^{-1}B^{-1} \end{aligned} \tag{3.13}$$

O que de fato permite a conexão entre um modelo $WZNW$ e uma teoria Toda é a imposição de vínculos nas correntes [4], esses vínculos já foram apresentadas em (2.12)

$$\begin{aligned} J &= E^{(-1)} + j_{-1/2} + j_0 + j_> \\ \bar{J} &= E^{(1)} + \bar{j}_{1/2} + \bar{j}_0 + \bar{j}_< \end{aligned} \tag{3.14}$$

Podemos identificar, fazendo a projeção em graus, quais campos efetivamente contribuem para os dois primeiros termos das duas correntes mostradas acima. Além disso, denotando $\bar{j}_{1/2} = A_{1/2}$ e guiados pelas seguintes definições

$$\begin{aligned} j_{-1/2} &= (\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1})|_{-1/2} \\ A_{1/2} &= (\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi)|_{1/2} \end{aligned}$$

somos levados, a partir de (3.13), à seguinte conclusão

$$
\begin{aligned}
B^{-1}\Phi^{-1}\partial_-\Phi B =& (\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1})|_< = E^{(-1)} + j_{-1/2} \\
B\partial_+\Psi\Psi^{-1}B^{-1} =& (\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi)_> = E^{(1)} + A_{1/2}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

que nada mais é do que a consequência dos vínculos impostos às correntes. A substituição de (3.15) em (3.13), juntamente com a conservação das correntes em (2.6), nos leva as seguintes equações

$$
\begin{aligned}
&\partial_+\left(\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1}\right)|_< + \left[(\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1})|_< \,, (B^{-1}\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi B)|_>\right] + \\
&+ \partial_+(B^{-1}\partial_- B) + \partial_+(\partial_-\Psi\Psi^{-1}) + \left[B^{-1}\partial_- B + \partial_-\Psi\Psi^{-1} \,, (B^{-1}\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi B)|_>\right] = 0
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_-\left(\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi\right)|_> - \left[(\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi)|_> \,, (B\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1}B^{-1})|_<\right] + \\
&+ \partial_-(\partial_+ BB^{-1}) + \partial_-(\Phi^{-1}\partial_+\Phi) + \left[\partial_+ BB^{-1} + \Phi^{-1}\partial_+\Phi \,, (B\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1}B^{-1})|_<\right] = 0
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Se projetarmos a equação (3.16) nos graus $-1/2$ e 0, e a equação (3.17) em nos graus 0 e $1/2$, vamos obter justamente as equações já obtidas em (2.13), porém não obteremos o que chamamos de modelo completo, que inclui os termos $Q_{\pm}^{(0)}$ e termos de ordem superiores como mostra a equação (3.11). A razão disto está no termo potencial, onde

$$
\left[(\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi)|_> \,, (B\Psi E^{(-1)}\Psi^{-1}B^{-1})|_<\right] \neq \left[\Phi^{-1}E^{(1)}\Phi \,, B\Phi E^{(-1)}\Phi^{-1}B^{-1}\right]
$$

para qualquer uma das projeções em $-1/2$, 0 e $1/2$.

3.3 Riemann-Hilbert sobre decomposição gaussiana

A separação da álgebra em Kernel e Image também se demonstra muito útil para eliminar campos redundantes, quando queremos abordar nosso modelo via curvatura nula. Outro ponto é que queremos tratar o problema sem impor vínculos e assim achar as equações de movimento completas. Nesse sentido percebemos uma grande diferença entre as equações de movimento derivada por meio da ação e por meio da curvatura nula, que discutiremos adiante.

As matrizes *dressing*, que transforma os operadores de Lax no vácuo, introduzindo campos, podem ser reescritas usando a decomposição de Gauss para os elementos do grupo da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
N &\to N_{\mathcal{K}}\, N_{\mathcal{M}} \\
M &\to M_{\mathcal{M}}\, M_{\mathcal{K}}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

onde as definições dessas matrizes estão na página 15, porém com uma sutil diferença, o exponenciando contém elementos da álgebra projetados em Kernel e Image conforme indicam os subíndices dos elementos do grupo. Com isso podemos usar o par de equações (2.24) e (2.25) para obter os operadores de Lax tanto para $t_1 = x$ quanto $t_{-1} = t$.

O par de equações (2.24) nos conduz a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(N_{\mathcal{K}}N_{\mathcal{M}}) &= -N_{\mathcal{K}}N_{\mathcal{M}}\left(N_{\mathcal{M}}^{-1}N_{\mathcal{K}}^{-1}E^{(1)}N_{\mathcal{K}}N_{\mathcal{M}}\right)_{-} \\
\frac{\partial}{\partial t}(N_{\mathcal{K}}N_{\mathcal{M}}) &= N_{\mathcal{K}}N_{\mathcal{M}}\left(BM_{\mathcal{M}}M_{\mathcal{K}}E^{(-1)}M_{\mathcal{K}}^{-1}M_{\mathcal{M}}^{-1}B^{-1}\right)_{-}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow N_{\mathcal{M}}^{-1}(\partial_x + N_{\mathcal{K}}^{-1}\partial_x N_{\mathcal{K}} + E^{(1)})N_{\mathcal{M}} = \partial_x + E^{(1)} + A_0 + Q_{+}^{(0)} + A_{1/2} = \mathcal{L}_x \\
&\Rightarrow N_{\mathcal{M}}^{-1}(\partial_t + N_{\mathcal{K}}^{-1}\partial_t N_{\mathcal{K}})N_{\mathcal{M}} = \partial_t + B\left(E^{(-1)} + j_{-1/2}\right)B^{-1} = \mathcal{L}_t
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

O par de equações (2.25) nos conduz a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(BM_{\mathcal{M}}M_{\mathcal{K}}) &= -\left(N_{\mathcal{M}}^{-1}N_{\mathcal{K}}^{-1}E^{(1)}N_{\mathcal{K}}N_{\mathcal{M}}\right)_{+}BM_{\mathcal{M}}M_{\mathcal{K}} \\
\frac{\partial}{\partial t}(BM_{\mathcal{M}}M_{\mathcal{K}}) &= \left(BM_{\mathcal{M}}M_{\mathcal{K}}E^{(-1)}M_{\mathcal{K}}^{-1}M_{\mathcal{M}}^{-1}B^{-1}\right)_{+}BM_{\mathcal{M}}M_{\mathcal{K}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow BM_{\mathcal{M}}\left(\partial_x + \partial_x M_{\mathcal{K}}M_{\mathcal{K}}^{-1}\right)M_{\mathcal{M}}^{-1}M_{\mathcal{K}}^{-1} = \partial_x + E^{(1)} + A_0 + Q_{+}^{(0)} + A_{1/2} = \mathcal{L}_x \\
&\Rightarrow BM_{\mathcal{M}}\left(\partial_t + \partial_t M_{\mathcal{K}}M_{\mathcal{K}}^{-1} + E^{(-1)}\right)M_{\mathcal{M}}^{-1}B^{-1} = \partial_t + B\left(E^{(-1)} + j_{-1/2}\right)B^{-1} = \mathcal{L}_t
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

o que mostra a auto consistência do modelo. Além disso as equações (3.19) e (3.20) definem da mesma maneira os seguintes operadores

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \left[E^{(1)}, W_{\mathcal{M}}^{(-1)}\right], \quad A_{1/2} = \left[E^{(1)}, W_{\mathcal{M}}^{(-1/2)}\right] \\
Q_{+}^{(0)} &= \frac{1}{2!}\left[W_{\mathcal{M}}^{(-1/2)}, \left[W_{\mathcal{M}}^{(-1/2)}, E^{(1)}\right]\right], \quad j_{-1/2} = \left[W_{\mathcal{M}}^{(1/2)}, E^{(-1)}\right]
\end{aligned}
$$

Ainda, do par de equações (2.40) podemos obter, caso façamos uma projeção em grau 0

$$
A_0 + Q_{+}^{(0)} = -\partial_x BB^{-1} \tag{3.21}
$$

que na verdade é apenas consequência direta da solução da equação de curvatura nula referente a equação de grau -1 como veremos abaixo.

$$\left[\partial_x + E^{(1)} + A_{1/2} + A_0 + Q_+^{(0)}\,, \partial_t + BE^{(-1)}B^{-1} + Bj_{-1/2}B^{-1}\right] = 0$$

Como dito antes essa equação deve ser resolvida grau a grau achando-se as soluções para os operadores. A equação de grau -1

$$\partial_x(BE^{(-1)}B^{-1}) + \left[A_0 + Q_+^{(0)}\,, BE^{(-1)}B^{-1}\right] = 0$$

nos leva a solução já mencionada em (3.21). As demais equações já serão as equações de movimento

$$\begin{array}{lrl} \textbf{Grau -1/2:} & \partial_x j_{-1/2} & = \left[E^{(-1)}\,, B^{-1}A_{1/2}B\right] \\ \textbf{Grau 0:} & \partial_t(\partial_x BB^{-1}) & = \left[E^{(1)}\,, BE^{(-1)}B^{-1}\right] + \left[A_{1/2}\,, Bj_{-1/2}B^{-1}\right] \\ \textbf{Grau 1/2:} & \partial_t A_{1/2} & = \left[E^{(1)}\,, Bj_{-1/2}B^{-1}\right] \end{array} \quad (3.22)$$

Logo fica evidente a diferença entre as duas formulações se compararmos (3.11) com (3.22). Outra diferença a ser notada é o fato do elemento B definido nesta formulação conter campos fermiônicos, uma vez que $Q_+^{(0)}$ é quadrático em $W^{(-1/2)}$. Já o elemento B usado na ação $WZNW$ contém apenas campos bosônicos.

A decomposição dos elementos do grupo (3.18) implica nas seguintes transformações para as derivadas

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + N_{\mathcal{K}}^{-1}\partial_\mu N_{\mathcal{K}}$$
$$\partial_\mu \to \partial_\mu + M_{\mathcal{K}}\partial_\mu M_{\mathcal{K}}^{-1}$$

possibilitando o *dressing* ser feito apenas por elementos do grupo que são mapas exponenciais da Image. Isso nos leva a pensar que os campos associados aos elementos do Kernel são constantes, visto que estes não entram nas equações de movimento.

3.4 Considerações Finais

Esse trabalho surgiu com a tentativa de realizar modelos integráveis e supersimétricos construídos a partir de superálgebras gradadas. Tais modelos já eram bem conhecidos para as superálgebras $\mathfrak{sl}(2,1)$ e $\mathfrak{sl}(2,2)$. Ao tentarmos explicitar os modelos para álgebra maiores, como $\mathfrak{sl}(3,2)$ entre outras, nos deparamos com a necessidade de imposição de vínculos entre campos fermiônicos, vide (3.1). Dado que tais vínculos não são justificados, pois a intensão é justamente modelos com um número maior de campos bosônicos e fermiônicos, passamos a então a investigar modelos completos onde não há restrições aos campos.

As equações de movimento derivadas a partir da conservação de correntes, de uma ação $WZNW$ e da curvatura nula são integráveis, supersimétricas e idênticas quando se impõe as condições mostradas em (3.1). Ao explicitarmos as equações seguindo as três vias, sem a imposição de vínculos, nos deparamos com três conjuntos de equações diferentes. Também nos valemos da decomposição gaussiana e transformações de gauge, visto que as teorias são invariantes por tais transformações, na tentativa de obter equivalência entre os três modelos, o que não deu frutos.

Até o momento não podemos garantir integrabilidade e nem supersimetria das equações (3.11) visto que não obtidas a partir da curvatura nula e as transformações de supersimetria (2.37) não contém variações de $Q_{\pm}^{(0)}$, mas o fato dessas equações partirem de um um princípio variacional onde a lagrangiana é invariante por transformações de gauge nos faz crer que esse modelo seja mais promissor. Outro ponto é que o número de termos das equações crescem de forma simétrica a medida que escolhemos superálgebras maiores, o mesmo não acontece acontece para os outros dois modelos derivados das correntes e curvatura nula.

O modelo completo precedente da curvatura nula é, com certeza, integrável e existe supersimetria para $Q_{+}^{(0)} \neq 0$ como foi demonstrado em [3]. A grande vantagem dessa construção é que se pode derivar as transformações de supersimetria tal como obter outros modelos físicos para diferentes *flows*, por exemplo equações supersimétricas mKdV [9]. A inconsistência está no fato de B não ser abeliano, conter campos fermiônicos, quando se estuda o modelo completo, além de não haver o termo $Q_{-}^{(0)}$ como acontece em (3.11). A incoerência com o modelo $WZNW$ se tornam mais evidentes quando se realiza as equações para superálgebras "grandes" pois a expansão de Baker-Hausdorff sempre trunca no termo de segunda ordem para *flows* positivos e no termo de primeira ordem para *flows* negativos.

Do ponto de vista das correntes, ao tentarmos realizar o modelo completo, nos deparamos com vínculos que necessariamente devem ser satisfeitos. Ao impormos (3.14), o que é necessário para obtenção das equações, teve como consequência a imposição de $Q_{\pm}^{(0)} = 0$. De fato há razões para acreditar que as equações vindas da conservação de J e $\bar{J}$ possam nos levar às mesmas equações (3.11), visto que essas correntes são obtidas a partir da invariância da ação $WZNW$ por uma transformação de gauge. Outro ponto é que a transformação (3.12) possibilita obter a mesma estrutura de grupo dos modelos em questão, porém não é suficiente para inclusão dos termos de segunda ordem e superiores. Acreditamos que essa inconsistência venha do termo aditivo à ação $WZNW$, como mostra

(2.40), e que se consideramos isso possamos obter modelos equivalentes.

Outro ponto de bastante interesse é o fato de que essas superálgebras, $\mathfrak{sl}(2,1)$ e $\mathfrak{sl}(2,2)$, tem a propriedade de serem espaços simétricos sobre a decomposição em Kernel e Image do operador $E^{(n)}$. Entendemos por espaço simétrico as seguinte propriedades

$$[\mathcal{K}\,,\mathcal{K}] \in \mathcal{K}, \quad [\mathcal{K}\,,\mathcal{M}] \in \mathcal{M}, \quad [\mathcal{M}\,,\mathcal{M}] \in \mathcal{K}$$

De fato, pela identidade da Jacobi, as duas primeiras relações são automaticamente satisfeitas, porém a comutação entre elementos da Image pertencer ao Kernel (ultima das propriedade mostrada acima) é uma propriedade bem específica das superálgebra $\mathfrak{sl}(2,1)$ e $\mathfrak{sl}(2,2)$. Mesmo para álgebras de Lie semi simples, como por exemplo $\mathfrak{sl}(3)$ essa propriedade não se verifica. A implicação direta em nossos modelos é que para álgebras que não são espaço simétrico os operadores $Q_{\pm}^{(0)}$ não estão inteiramente no Kernel, mas ainda não encontramos indícios suficientes de implicações em integrabilidade e supersimetria. O interesse na decomposição $\mathfrak{sl}(m,n)$ é sustentada pela possibilidade de escolha de base que possibilita modelos com campos realmente efetivos, que estão presentes nas equações de movimento.

Como se percebe o operador $E^{(n)}$ desempenha um papel fundamental, e sua definição é bastante categórica. Para uma álgebra de rank r definimos

$$E^{(n)} = \sum_{\alpha_i \in \Delta} E_{\alpha_i}^{(n)} + E_{-\eta}^{(n+1)} + \lambda_n \cdot H^{(n+1/a)} \tag{3.23}$$

onde Δ é o conjunto de todas as raízes simples e bosônicas da álgebra. O elemento $-\eta$ no subíndice de $E_{-\eta}^{(n+1)}$ denota a raiz mais baixa da álgebra[1]. Também estamos denotando

$$\lambda_n \cdot H = \lambda_n^1 H_1 + \lambda_n^2 H_2 + \cdots \lambda_n^n H_n$$

onde λ_n é um vetor do espaço espaço dos pesos. Também conhecido como espaço recíproco, o espaço dos pesos é um espaço vetorial de mesma dimensão do espaço das raízes onde, para cada raiz β_j da álgebra exite um vetor λ_i que satisfaz $\lambda_i \beta_j = \delta_{ij}$. A adição do termo $\lambda_n \cdot H$ apareceu pela primeira vez no trabalho [9] e isso permitiu a existência de um Kernel fermiônico, uma vez que a Image e o Kernel bosônico não são alterados, pois λ_n é escolhido de tal forma que $\left[\lambda_n \cdot H\,, \sum_{\alpha_i \in \Delta} E_{\alpha_i} + E_{-\eta}\right] = 0$. Uma extensão que necessariamente deve ser feita é a inclusão do termos $\frac{1}{a}$ na gradação de H, com a ajustável, de maneira que $\left[Q\,, H^{(n+1/a)}\right] = nH^{(n+1/a)}$ para garantir que esse termo tenha grau n.

[1] É comum na literatura denotar a raiz mais baixa e mais alta como $\pm\psi$, porém mudamos a notação para não haver confusão com outras definições previamente feita.

Apêndice A

Invariância da ação WZNW calibrada

Neste apêndice vamos nos ater em demonstrar a invariância da ação mostrada em (2.40)

$$
\begin{aligned}
S[g, A_{\pm}] = & S_{WZNW}[g] - \\
& - \frac{k}{2\pi} \int \left\langle A_{-} \left(\partial_{+} g g^{-1} - E^{(1)} \right) + A_{+} \left(g^{-1} \partial_{-} g - E^{(-1)} \right) + A_{-} g A_{+} g^{-1} \right\rangle d^2x
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

sobre as seguintes transformações de gauge

$$
\begin{aligned}
g \rightarrow & \quad \alpha g \beta, \quad \alpha \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_{\leq -1}\right) \quad \text{e} \quad \beta \in \exp\left(\hat{\mathfrak{g}}_{\geq 1}\right) \\
A_{+} \rightarrow & \quad \beta^{-1} A_{+} \beta - \beta^{-1} \partial_{+} \beta \\
A_{-} \rightarrow & \quad \alpha A_{-} \alpha^{-1} - \partial_{-} \alpha \alpha^{-1}
\end{aligned}
$$

Aplicando as transformações obtemos

$$
\begin{aligned}
S[g, A_{\pm}] \rightarrow & S_{WZNW}[\alpha g \beta] + \\
& - \frac{k}{2\pi} \int \left\langle \left(\alpha A_{-} \alpha^{-1} - \partial_{-} \alpha \alpha^{-1} \right) \left(\partial_{+} \alpha \alpha^{-1} + \alpha \partial_{+} g g^{-1} \alpha^{-1} + \alpha g \partial_{+} \beta \beta^{-1} g^{-1} \alpha^{-1} - E^{(1)} \right) \right\rangle d^2x \\
& - \frac{k}{2\pi} \int \left\langle \left(\beta^{-1} A_{+} \beta - \beta^{-1} \partial_{+} \beta \right) \left(\beta^{-1} g^{-1} \alpha^{-1} \partial_{-} \alpha g \beta + \beta^{-1} g^{-1} \partial_{-} g \beta + \beta^{-1} \partial_{-} \beta - E^{(-1)} \right) \right\rangle d^2x \\
& - \frac{k}{2\pi} \int \left\langle \left(\alpha A_{-} \alpha^{-1} - \partial_{-} \alpha \alpha^{-1} \right) \alpha g \beta \left(\beta^{-1} A_{+} \beta - \beta^{-1} \partial_{+} \beta \right) \beta^{-1} g^{-1} \alpha^{-1} \right\rangle d^2x
\end{aligned}
$$

Abrindo os demais termos e usando as propriedades do traço (3.5) e usando a identidade de Polyakov-Wiegmann para a ação $S_{WZNW}[\alpha g \beta]$, obtemos

$$
\begin{aligned}
S[g', A'_\pm] =& S_{WZNW}[\alpha] + S_{WZNW}[g] + S_{WZNW}[\beta] + \\
& -\frac{k}{2\pi}\int \left\langle \alpha^{-1}\partial_-\alpha\partial_+ g g^{-1} + g^{-1}\partial_- g\partial_+\beta\beta^{-1} + \alpha^{-1}\partial_-\alpha g\partial_+\beta\beta^{-1}g^{-1}\right\rangle dx^2 \\
& -\frac{k}{2\pi}\int \left\langle A_-\partial_+ g g^{-1} - \alpha A_- E^{(1)}\alpha^{-1} + A_+ g^{-1}\partial_- g - \beta_+^{-1}E^{(-1)}\beta\right\rangle d^2x \\
& -\frac{k}{2\pi}\int \left\langle A_-\alpha^{-1}\partial_+\alpha + A_+\partial_-\beta\beta^{-1} + A_- g\partial_+\beta\beta^{-1}g^{-1} + A_+ g^{-1}\alpha^{-1}\partial_-\alpha g\right\rangle dx^2 \\
& +\frac{k}{2\pi}\int \left\langle \partial_-\alpha\alpha^{-1}\partial_+\alpha\alpha^{-1} + \beta^{-1}\partial_+\beta\beta^{-1}\partial_-\beta^{-1}\right\rangle dx^2 \\
& -\frac{k}{2\pi}\int \left\langle -\alpha^{-1}\partial_-\alpha\partial_+ g g^{-1} - \partial_+\beta\beta^{-1}g^{-1}\partial_- g - \alpha^{-1}\partial_-\alpha g\partial_+\beta\beta^{-1}g^{-1}\right\rangle dx^2 \\
& -\frac{k}{2\pi}\int \left\langle -\partial_+\beta\beta^{-1}g^{-1}\alpha^{-1}\partial_-\alpha g + \alpha^{-1}\partial_-\alpha E^{(1)} + \partial_+\beta\beta^{-1}E^{(-1)}\right\rangle dx^2 \\
& -\frac{k}{2\pi}\int \left\langle -\alpha^{-1}\partial_-\alpha g A_+ g^{-1} - g^{-1}A_- g\partial_+\beta\beta^{-1} + \alpha^{-1}\partial_-\alpha g\partial_+\beta\beta^{-1}g^{-1} + A_- g A_+ g^{-1}\right\rangle dx^2
\end{aligned}
$$

onde todos os termos com cor mais suave se cancelam. Dado que o traço generalizado leva em conta a gradação $\langle \mathfrak{g}_i \mathfrak{g}_j\rangle \propto \delta_{i+j,0}$, escolhemos $\alpha = \chi_<^{-1}$ e $\beta = \chi_>^{-1}$ e isso implica em

$$
\int \left\langle A_-\alpha^{-1}\partial_+\alpha\right\rangle = 0, \qquad \int \left\langle \partial_+\beta\beta^{-1}A_+\right\rangle = 0
$$

Também, devido a gradação, os termos a partir da primeira ordem da expansão se cancelam como mostra abaixo

$$
\begin{aligned}
\left\langle A_-\alpha^{-1}E^{(1)}\alpha\right\rangle &= \left\langle A_-\left(E^{(1)} + \left[E^{(1)}, W^{(-1)}\right] + \cdots\right)\right\rangle = \left\langle A_- E^{(1)}\right\rangle \\
\left\langle A_+\beta E^{(-1)}\beta^{-1}\alpha\right\rangle &= \left\langle A_+\left(E^{(-1)} + \left[W^{(1)}, E^{(-1)}\right] + \cdots\right)\right\rangle = \left\langle A_+ E^{(-1)}\right\rangle
\end{aligned}
$$

pois $A_- \in \mathfrak{g}_{\leq 1}$ e $A_+ \in \mathfrak{g}_{\geq 1}$. Como as equações de movimento não alteram se na ação é acrecido um termo correspondente a uma derivada total, logo o seguinte terno

$$
\int \left\langle \alpha^{-1}\partial_-\alpha E^{(1)} + \partial_+\beta\beta^{-1}E^{(-1)}\right\rangle dx^2
$$

pode ser desprezado. Com todos esses cancelamentos obtemos novamente a ação (A.1) e fica assim demonstrada a invariância.

Apêndice B

Base para o modelo $\mathfrak{sl}(2,1)$

Para realização dos nossos modelos é importante uma escolha específica de subálgebra com o objetivo de eliminar campos redundantes. Como dito no Capítulo 1, há uma diferença entre uma *loop* álgebra e uma álgebra de Kac-Moody. Essa diferença, em nível de relações de comutação, é um termo central que aparece porém ambas são construídas como uma generalização da álgebra de Lie. Aqui mostraremos a base específica usada em nossos modelos tal como as relações de comutação incluindo o termo central, no entanto esse termo não é necessário para derivação das nossas equações.

Primeiro iniciamos com a base de Cartan-Weyl de uma álgebra de Lie semisimples

$$\mathfrak{sl}(2,1) = \left\{ h_1 = \frac{2\alpha_1 \cdot H}{\alpha_1^2},\, h_2 = \lambda_2 \cdot H,\, E_{\pm\alpha_1},\, E_{\pm\alpha_2},\, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)} \right\}$$

Onde $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$ $\pm$ $(\alpha_1 + \alpha_2)$ são as raízes da superálgebra. Uma boa introdução sobre álgebra de Lie, raízes, base de Cartan-Weyl é encontrada em [5]. Também os índices que contém a raiz α_2 estão associadas ao setor fermiônico.

Fazemos então a extensão para a superálgebra de Kac-Moody $\hat{\mathfrak{sl}}(2,1)$ incluindo um operador gradação d que satisfaz $\left[d\,, T_a^{(n)}\right] = nT_a^{(n)}$. Para a escolha específica de nossa base precisamos definir os seguintes operadores

$$E^{(n)} = h_1^{(n)} + 2h_n^{(n)} - \left(E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{-\alpha_1}^{(n)}\right), \quad Q = 2d + \frac{1}{2}h_1$$

O operador $E^{(n)}$, que é o objeto fundamental da construção dos nossos modelos, permite separar á superálgebra em dois conjuntos disjuntos, Kernel e Image. O operador Q permite uma escolha específica de subálgebra em nível de gradação. Com isso separamos a nossa superálgebra em dois conjuntos

- O conjunto bosônico separados em Kernel $\mathcal{K}_B$ e Image $\mathcal{M}_B$

$$\mathcal{K}_B = \left\{ K_1^{(2n+1)} = -(E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{-\alpha_1}^{(n+1)}),\ K^{(2n+1)} = \lambda_2 \cdot H^{(n+1/2)} \right\}$$
$$\mathcal{M}_B = \left\{ M_1^{(2n+1)} = -E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{-\alpha_1}^{(n+1)},\ M^{(2n)} = h_1^{(n)} \right\}$$

- O conjunto fermiônico também separados em Kernel $\mathcal{K}_F$ e Image $\mathcal{M}_F$

$$\mathcal{K}_F = \left\{ \begin{array}{rl} F_1^{(2n+3/2)} &= (E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/2)} - E_{\alpha_2}^{(n+1)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)} - E_{-\alpha_2}^{(n+1/2)}), \\ F_2^{(2n+1/2)} &= -(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} - E_{\alpha_2}^{(n+1/2)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1/2)} - E_{-\alpha_2}^{(n)}) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{M}_F = \left\{ \begin{array}{rl} G_1^{(2n+3/2)} &= (E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} + E_{\alpha_2}^{(n+1/2)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1/2)} + E_{-\alpha_2}^{(n)}) \\ G_2^{(2n+1/2)} &= -(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/2)} + E_{\alpha_2}^{(n+1)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1/2)}) \end{array} \right\}$$

As relações de comutação que esses novos geradores estão são

Entre operadores do setor bosônico

$$\begin{aligned} [K_1^{(2m+1)}, K_1^{(2n+1)}] &= \hat{c}(m-n)\delta_{m+n+1,0} \\ [K_1^{(2m+1)}, M_1^{(2n+1)}] &= -2M_2^{(m+n+1)} - \hat{c}(m+n)\delta_{m+n+1,0} \\ [M_2^{(2m)}, K_1^{(2n+1)}] &= 2M_1^{(2m+2n+1)} \\ [M_2^{(2m)}, M_2^{(2n)}] &= \hat{c}(m-n)\delta_{m+n,0} \\ [M_1^{(2m+1)}, M_1^{(2n+1)}] &= \hat{c}(n-m)\delta_{m+n+1,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_1^{(2m+1)}, K_2^{(2n+1)}] &= 0 \\ [K_2^{(2m+1)}, M_1^{(2n+1)}] &= 0 \\ [M_2^{(2m)}, K_2^{(2n+1)}] &= 0 \\ [M_2^{(2m)}, M_1^{(2n+1)}] &= 2K_1^{(2m+2n+1)} \\ [K_2^{(2m+1)}, K_2^{(2n+1)}] &= \hat{c}(n-m)\delta_{m+n+1,0} \end{aligned}$$

Entre operadores bosônicos e fermiônicos

$$\begin{aligned} [K_1^{(2m+1)}, F_1^{(2n+3/2)}] &= -F_2^{(2(m+n+1)+1/2)} \\ [K_1^{(2m+1)}, F_2^{(2n+1/2)}] &= -F_1^{(2(m+n)+3/2)} \\ [K_2^{(2m+1)}, F_1^{(2n+3/2)}] &= F_2^{(2(m+n+1)+1/2)} \\ [K_2^{(2m+1)}, F_2^{(2n+1/2)}] &= F_1^{(2(m+n)+3/2)} \\ [M_1^{(2m+1)}, F_1^{(2n+3/2)}] &= G_1^{(2(m+n+1)+1/2)} \\ [M_1^{(2m+1)}, F_2^{(2n+1/2)}] &= G_2^{(2(m+n)+3/2)} \\ [M_2^{(2m)}, F_1^{(2n+3/2)}] &= -G_2^{(2(m+n)+3/2)} \\ [M_2^{(2m)}, F_2^{(2n+1/2)}] &= -G_1^{(2(m+n)+1/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_1^{(2m+1)}, G_1^{(2n+1/2)}] &= G_2^{(2(m+n)+3/2)} \\ [K_1^{(2m+1)}, G_2^{(2n+3/2)}] &= G_1^{(2(m+n+1)+1/2)} \\ [K_2^{(2m+1)}, G_1^{(2n+1/2)}] &= G_2^{(2(m+n)+3/2)} \\ [K_2^{(2m+1)}, G_2^{(2n+3/2)}] &= G_1^{(2(m+n+1)+1/2)} \\ [M_1^{(2m+1)}, G_1^{(2n+1/2)}] &= -F_1^{(2(m+n)+3/2)} \\ [M_1^{(2m+1)}, G_2^{(2n+3/2)}] &= -F_2^{(2(m+n+1)+1/2)} \\ [M_2^{(2m)}, G_1^{(2n+1/2)}] &= -F_2^{(2(m+n)+1/2)} \\ [M_2^{(2m)}, G_2^{(2n+3/2)}] &= -F_1^{(2(m+n)+3/2)} \end{aligned}$$

Entre operadores do setor fermiônico

$$
\begin{aligned}
[F_1^{(2m+3/2)}, F_1^{(2n+3/2)}] &= 2(K_2^{(2(m+n+1)+1)} + K_1^{(2(m+n+1)+1)}),\\
[F_1^{(2m+3/2)}, F_2^{(2n+1/2)}] &= \hat{c}(2m-2n+1)\delta_{m+n+1,0}\\
[F_1^{(2m+3/2)}, G_1^{(2n+1/2)}] &= M_2^{(2(m+n+1)} + \hat{c}(2m+2n+1)\delta_{m+n+1,0}\\
[F_1^{(2m+3/2)}, G_2^{(2n+3/2)}] &= -2M_1^{(2m+2n+3)}\\
[F_2^{(2m+1/2)}, F_2^{(2n+1/2)}] &= -2(K_2^{(2m+2n+1)} + K_1^{(2m+2n+1)})\\
[F_2^{(2m+1/2)}, G_1^{(2n+1/2)}] &= 2M_1^{(2m+2n+1)}\\
[F_2^{(2m+1/2)}, G_2^{(2n+3/2)}] &= -2M_2^{(2m+2n+2)} - \hat{c}(2m+2n+1)\delta_{m+n+1,0}\\
[G_1^{(2m+1/2)}, G_1^{(2n+1/2)}] &= 2(K_2^{(2m+2n+1)} - K_1^{(2m+2n+1)})\\
[G_1^{(2m+1/2)}, G_2^{(2n+3/2)}] &= \hat{c}(2m-2n-1)\delta_{m+n+1,0}\\
[G_2^{(2m+3/2)}, G_2^{(2n+3/2)}] &= -2(K_2^{(2m+2n+3)} - K_1^{(2m+2n+3)})
\end{aligned}
$$

Vale notar que a operação de $[\,,]$ é na verdade o super-comutador definido na página 10, logo a operação entre operadores fermiônicos é na verdade uma anticomutação.

Apêndice C

Supersimetria

Este apêndice destina-se a demonstrar a invariância das equações por transformações de supersimetria. Entendemos por supersimetrias, transformações que estabelece relações entre campos bosônicos e fermiônicos que mantém as equações de movimento invariantes. As transformações supersimétricas que definimos foram derivadas a partir da solução da curvatura nula para operadores de Lax associados a *flows* semi-inteiros, vide equações (2.34) e (2.35), nos levando a

$$
\begin{aligned}
\delta j_{-1/2} &= \left[E^{(-1)}\,, B^{-1}D^{(1/2)}B\right] \\
\partial_t(\delta B B^{-1}) &= \left[B j_{-1/2} B^{-1}\,, D^{(1/2)}\right] \\
\delta A_{1/2} &= \left[\delta B B^{-1}\,, A_{1/2}\right] - \left[\partial_x B B^{-1}\,, D^{(1/2)}\right] \\
\left[E^{(1)}\,, \delta B B^{-1}\right] &= \left[A_{1/2}\,, D^{(1/2)}\right]
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

Importante notar que o elemento $D^{(1/2)}$ pertence ao Kernel fermiônico (i.e $\left[E^{(\pm 1)}\,, D^{(1/2)}\right] = 0$) além de ser infinitesimal.

As equações, a qual vamos testar a supersimetria, são

$$
\begin{aligned}
\partial_x j_{1/2} &= \left[E^{(-1)}\,, B^{-1}AB\right] \\
\partial_t(\partial_x B B^{-1}) &= \left[B E^{(-1)} B^{-1}\,, E^{(1)}\right] + \left[B j_{-1/2} B^{-1}\,, A_{1/2}\right] \\
\partial_t A_{1/2} &= \left[E^{(1)}\,, B j_{1/2} B^{-1}\right]
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

É fundamental para a demonstração a identidade de Jacobi

$$[A\,, [B\,, C]] = [[A\,, B]\,, C] + [[C\,, A]\,, B] \tag{C.3}$$

Equação de grau 1/2: Atuando com a variação δ na equação de grau 1/2, obtemos

$$\partial_- \delta A_{1/2} = \left[E^{(1)}\,, B\delta j_{-1/2}B^{-1}\right] + \left[E^{(1)}\,, \left[\delta BB^{-1}\,, Bj_{-1/2}B^{-1}\right]\right]$$

Substituindo a primeira e terceira equação de (C.1) e usando a identidade (C.3) no último termo, obtemos

$$\begin{aligned}\left[\partial_t(\delta BB^{-1})\,, A_{1/2}\right] + \left[\delta BB^{-1}\,, \partial_t A_{1/2}\right] - \partial_t \left[\partial_x BB^{-1}\,, D^{(1/2)}\right] = \\ \left[E^{(1)}\,, \left[BE^{(-1)}B^{-1}\,, D^{(1/2)}\right]\right] + \left[\left[A_{1/2}\,, D^{(1/2)}\right]\,, Bj_{-1/2}B^{-1}\right] + \left[\left[Bj_{-1/2}B^{-1}\,, E^{(1)}\right]\,, \delta BB^{-1}\right]\end{aligned}$$

Novamente substituindo de forma conveniente os termos $\partial_t(\delta BB^{-1})$ e $\partial_t A_{1/2}$ conforme mostram (C.1) e (C.2) e usando a identidade de (C.3) para os dois primeiros termos depois da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}\left[\left[Bj_{1/2}B^{-1}\,, D^{(1/2)}\right]\,, A_{1/2}\right] + \left[\delta BB^{-1}\,, \left[E^{(1)}\,, Bj_{-1/2}B^{-1}\right]\right] - \partial_t \left[\partial_x BB^{-1}\,, D^{(1/2)}\right] = \\ \left[\left[E^{(1)}\,, BE^{(-1)}B^{-1}\right]\,, D^{(1/2)}\right] + \left[\left[D^{(1/2)}\,, E^{(1)}\right]\,, BE^{(-1)}B^{-1}\right] - \left[\left[Bj_{-1/2}B^{-1}\,, A_{1/2}\right]\,, D^{(1/2)}\right] \\ - \left[\left[D^{(1/2)}\,, Bj_{-1/2}B^{-1}\right]\,, A_{1/2}\right] + \left[\delta BB^{-1}\,, \left[E^{(1)}\,, Bj_{1/2}B{-1}\right]\right]\end{aligned}$$

Os termos com cor mais suave se cancelam, nos levando a

$$\begin{aligned}\partial_t \left[\partial_x BB^{-1}\,, D^{(1/2)}\right] = \left[\left[BE^{(-1)}B^{-1}\,, E^{(1)}\right]\,, D^{(1/2)}\right] + \left[\left[Bj_{-1/2}B^{-1}\,, A_{1/2}\right]\,, D^{(1/2)}\right] + \\ \left[\left[D^{(1/2)}\,, E^{(1)}\right]\,, BE^{(-1)}B^{-1}\right]\end{aligned}$$

como $\left[D^{(1/2)}\,, E^{(1)}\right] = 0$, somo levados a concluir que

$$\partial_t(\partial_x BB^{-1}) = \left[BE^{(-1)}B^{-1}\,, E^{(1)}\right] + \left[Bj_{-1/2}B^{-1}\,, A_{1/2}\right]$$

que nada mais é do que uma das equações de movimento.

Equação de grau 0: Atuando com a variação δ na equação de grau 0

$$\begin{aligned}\partial_x(\partial_t(\delta BB^{-1})) = \left[\left[\delta BB^{-1}\,, BE^{(-1)}B^{-1}\right]\,, E^{(1)}\right] + \left[\left[\delta BB^{-1}\,, Bj_{1/2}B^{-1}\right]\,, A_{1/2}\right] \\ + \left[B\delta j_{1/2}B^{-1}\,, A_{1/2}\right] + \left[Bj_{1/2}B^{-1}\,, \delta A_{1/2}\right]\end{aligned}$$

Usando a identidade (C.3) para os dois primeiros termos do lado direito, e substituindo os demais termos conforme (C.1), obtemos

$$\begin{aligned}\partial_x\left[Bj_{1/2}B^{-1}, D^{(1/2)}\right] &= \left[\delta BB^{-1}, \left[BE^{(-1)}B^{-1}, E^{(1)}\right]\right] + \left[\delta BB^{-1}, \left[Bj_{1/2}B^{-1}, A_{1/2}\right]\right]\\ &+ \left[BE^{(1)}B^{-1}, \left[E^{(1)}, \delta BB^{-1}\right]\right] + \left[Bj_{1/2}B^{-1}, \left[A_{1/2}, \delta BB^{-1}\right]\right]\\ &+ \left[B\left[E^{(-1)}, B^{-1}D^{(1/2)}B\right]B^{-1}, A_{1/2}\right] + \left[Bj_{1/2}B^{-1}, \delta A_{1/2}\right]\\ &= \left[\delta BB^{-1}, \partial_t(\partial_x BB^{-1})\right] + \left[BE^{(-1)}B^{-1}, \left[A_{1/2}, D^{(1/2)}\right]\right]\\ &-\left[Bj_{1/2}B^{-1}, \delta A_{1/2}\right] - \left[Bj_{1/2}B^{-1}, \left[\partial_+ BB^{-1}, D^{(1/2)}\right]\right]\\ &+ \left[\left[BE^{(-1)}B^{-1}, D^{(1/2)}\right], A_{1/2}\right] + \left[Bj_{1/2}B^{-1}, \delta A_{1/2}\right]\end{aligned}$$

Abrindo os termos do lado esquerdo da equação e aplicando novamente a (C.3) no lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned}\left[\left[\partial_x BB^{-1}, Bj_{1/2}B^{-1}\right], D^{(1/2)}\right] + \left[B\partial_x j_{1/2}B^{-1}, D^{(1/2)}\right] + \left[Bj_{1/2}B^{-1}, \partial_x D^{(1/2)}\right] =\\ \left[\delta BB^{-1}, \partial_t(\partial_x BB^{-1})\right] - \left[\left[BE^{(-1)}B^{-1}, D^{(1/2)}\right], A_{1/2}\right] - \left[\left[A_{1/2}, BE^{(-1)}B^{-1}\right], D^{(1/2)}\right]\\ + \left[\left[BE^{(-1)}B^{-1}, D^{(1/2)}\right], A_{1/2}\right] - \left[\left[Bj_{1/2}B^{-1}, \partial_x BB^{-1}\right], D^{(1/2)}\right] + \left[\left[D^{(1/2)}, Bj_{-1/2}B^{-1}\right], \partial_x BB^{-1}\right]\\ = \left[\left[BE^{(-1)}B^{-1}, A_{1/2}\right], D^{(1/2)}\right] + \left[\delta BB^{-1}, \partial_t(\partial_x BB^{-1})\right] + \left[\partial_t(\delta BB^{-1}), \partial_x BB^{-1}\right]\end{aligned}$$

Das equações (2.34) e (2.35) temos que $\partial_x D^{(1/2)} = 0$, o que nos leva a

$$\left[B\partial_x j_{-1/2}B^{-1}, D^{(1/2)}\right] = \left[\left[BE^{(-1)}B^{-1}, A_{1/2}\right], D^{(1/2)}\right] + \partial_t\left[\delta BB^{-1}, \partial_x BB^{-1}\right]$$

Claramente $\left[\delta BB^{-1}, \partial_x BB^{-1}\right] = 0$. Somos levados a concluir, a menos de uma conjugação por B, que

$$\partial_x j_{-1/2} = \left[E^{(-1)}, B^{-1}A_{1/2}B\right]$$

Equação de grau -1/2: Se atuarmos com δ na equação de grau -1/2 obtemos

$$\partial_x \delta j_{1/2} = \left[E^{(-1)}, \left[B^{-1}A_{1/2}B, B^{-1}\delta B\right]\right] + \left[E^{(-1)}, B^{-1}\delta A_{1/2}B\right]$$

Substituindo as variações conforme (C.1) e posteriormente conjugando toda equação por $B^{-1}(\cdots)B$, obtemos

$$\begin{aligned}\left[BE^{(-1)}B^{-1}, \left[D^{(1/2)}, \partial_x BB^{-1}\right]\right] = \left[BE^{(-1)}B^{-1}, \left[A_{1/2}, \delta BB^{-1}\right]\right] + \left[BE^{(-1)}B^{-1}, \left[\delta BB^{-1}, A_{1/2}\right]\right]\\ - \left[BE^{(-1)}B^{-1}, \left[\partial_x BB^{-1}, D^{(1/2)}\right]\right]\end{aligned}$$

onde todos os termos se cancelam. Diferentemente de $A_{1/2}$ e B, a variação da equação de

$j_{-1/2}$ não levou a outra equação de gral superior, no entanto é evidente que é invariante sobre a ação de δ. Vale notar que a equação de $j_{-1/2}$ não é equação de movimento propriamente dito, visto que temos uma derivada espacial.

Bibliografia

[1] J. F. Adams. *Lectures on exceptional Lie groups.* University of Chicago Press, 1996.

[2] H. Aratyn, L. Ferreira, J. Gomes, and A. Zimerman. Kac-moody construction of toda type field theories. *Physics Letters B*, 254(3-4):372–380, 1991.

[3] H. Aratyn, J. Gomes, and A. Zimerman. Supersymmetry and the kdv equations for integrable hierarchies with a half-integer gradation. *Nuclear Physics B*, 676(3):537–571, 2004.

[4] J. Balog, L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Forgacs, and A. Wipf. Toda theory and w-algebra from a gauged wznw point of view. *Annals of Physics*, 203(1):76–136, 1990.

[5] L. A. Ferreira. Lecture notes in lie algebras and lie grups. *IFT/UNESP*, 2000.

[6] L. Frappat, A. Sciarrino, and P. Sorba. *Dictionary on Lie algebras and superalgebras.* AP, 2000.

[7] R. Gilmore. *Lie groups, physics, and geometry: an introduction for physicists, engineers and chemists.* Cambridge University Press, 2008.

[8] J. Gomes, D. Schmidtt, and A. H. Zimerman. Super-wznw with reductions to supersymmetric and fermionic integrable models. *Nuclear Physics B*, 821(3):553–576, 2009.

[9] J. Gomes, L. Ymai, and A. Zimerman. Soliton solutions for the super mkdv and sinh-gordon hierarchy. *Physics Letters A*, 359(6):630–637, 2006.

[10] V. G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*, volume 44. Cambridge university press, 1994.

[11] A. N. Leznov. On the complete integrability of a nonlinear system of partial differential equations in two-dimensional space. *Theoretical and Mathematical Physics*, 42(3):225–229, 1980.

[12] G. Teschl. Almost everything you always wanted to know about the toda equation. 2001.

[13] M. Toda. Vibration of a chain with nonlinear interaction. *Journal of the Physical Society of Japan*, 22(2):431–436, 1967.