

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

SLINKY FIELD: UMA NOVA VISÃO QUALITATIVA DE
QUANTIZAÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO

Vitor Ribeiro dos Santos Oliveira

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro (SP)

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

VITOR RIBEIRO DOS SANTOS OLIVEIRA

SLINKY FIELD: UMA NOVA VISÃO QUALITATIVA DE
QUANTIZAÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2025

O48s

Oliveira, Vitor Ribeiro dos Santos

Slinky Field : uma nova visão qualitativa de quantização do espaço-tempo / Vitor Ribeiro dos Santos Oliveira. -- Rio Claro, 2025
112 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e
Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Gravitação Quântica. 2. Teoria da Relatividade Geral. 3. Teoria
Quântica de Campos. 4. Espaço-tempo. 5. Slinky Field. I. Título.

VITOR RIBEIRO DOS SANTOS OLIVEIRA

SLINKY FIELD: UMA NOVA VISÃO QUALITATIVA DE
QUANTIZAÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Prof. Dr. Everton Santos Medeiros

Prof. Dr. Alexandre Mesquita

Rio Claro, 12 de novembro de 2025.



Assinatura do aluno



Assinatura do orientador

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processo nº 2024/10884-8. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

Primeiramente, gostaria de agradecer à Unesp de Rio Claro, ao seu Departamento de Física e ao corpo docente/técnico por terem me proporcionado a oportunidade de realizar o curso de bacharelado em Física, e também agradecer à Biblioteca do campus, cujo espaço agradável e tranquilo sempre me proporcionou bons momentos de estudos e escrita, e aos bibliotecários pelas instruções de formatação do presente TCC, pelo seu acolhimento no acervo e pelas boas conversas diárias. Em seguida, gostaria de agradecer ao meu orientador, Luiz Antonio Barreiro, que vem me orientando no campo da Física Teórica desde o início de realização do meu projeto de iniciação científica na área de Física de Partículas. Por fim, meus agradecimentos vão à minha família, à minha namorada e a meus companheiros de quatro patas por todo o apoio e afeto que tive não somente durante a escrita deste trabalho, mas durante a graduação como um todo.

"O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano."

- Isaac Newton

RESUMO

A busca por uma teoria de gravitação quântica é um problema de quase um século da Física. Algumas teorias atuais no tema, como a Teoria de Cordas e a Gravidade Quântica em Loop, têm mostrado avanços, porém nenhuma ainda foi confirmada ser uma solução válida devido a dificuldades em realizar experimentos que possam comprová-las. Sendo assim, o objetivo deste trabalho foi explicar a construção matemática da Teoria da Relatividade, desde sua forma restrita até sua forma geral, e apresentar a Teoria Quântica de Campos para então propor, ao final, uma nova visão autoral qualitativa de quantização do espaço-tempo. Tal visão é baseada em “blocos” de construção chamados estruturas *slinky*. Essas estruturas podem acoplar-se tanto umas às outras, formando o campo *slinky* oscilante, como acoplar-se a campos quânticos para interagir com eles transportando matéria e energia das partículas para pontos de acoplamento, que representam posições quantizadas no espaço-tempo em que as partículas podem ocupar. Mostrou-se ainda como o campo dos fótons é responsável pela expansão do campo *slinky* e, conseqüentemente, do Universo, através de sua perda de energia devido ao *redshift* cosmológico. Ou seja, foi proposta a manutenção da conservação de energia em regime global, que é originalmente válida somente de forma local devido à simetria temporal, conforme explica o Teorema de Noether.

Palavras-chave: Gravitação Quântica; Teoria da Relatividade Geral; Teoria Quântica de Campos; Espaço-tempo; Campo *slinky*.

ABSTRACT

The search for a theory of quantum gravity is a nearly century-old problem in Physics. Some current theories on the topic, such as String Theory and Loop Quantum Gravity, have shown progress, but none has yet been confirmed as a valid solution due to difficulties in performing experiments that can prove them. Thus, the objective of this work was to explain the mathematical construction of the Theory of Relativity, from its restricted to its general form, and to present Quantum Field Theory, to then propose, in the end, a new, qualitative, authorial vision of the quantization of spacetime. This vision is based on building "blocks" called slinky structures. These structures can couple both to each other, forming the oscillating slinky field, and to quantum fields to interact with them, transporting matter and energy from particles to coupling points, which represent quantized positions in spacetime that the particles can occupy. It was also shown how the photon field is responsible for the expansion of the slinky field and, consequently, the Universe, through its energy loss due to cosmological redshift. That is, the maintenance of energy conservation in a global regime was proposed, which was originally valid only locally due to temporal symmetry, as explained by Noether's Theorem.

Keywords: Quantum Gravitation; General Theory of Relativity; Quantum Field Theory; Space-time; Slinky field.

Title: Slinky Field: a new qualitative view for the quantization of spacetime

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	REFERENCIAL TEÓRICO	8
2.1	Breve introdução aos tensores	8
2.1.1	<i>Índices, rank e dimensão de um tensor</i>	8
2.1.2	<i>Convenção do somatório de Einstein</i>	8
2.1.3	<i>Contravariância e Covariância</i>	9
2.1.4	<i>Tensor métrico</i>	10
2.1.5	<i>Operadores diferenciais</i>	10
2.2	Equações de Euler-Lagrange.....	11
3	TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA.....	13
3.1	Introdução.....	13
3.2	Dilatação Temporal.....	13
3.3	Contração Espacial.....	15
3.4	Transformações de Lorentz.....	17
3.5	Diagramas de Minkowski.....	21
3.6	Métrica de Minkowski (Intervalo de espaço-tempo).....	26
3.7	Regiões do diagrama de Minkowski e Causalidade	30
3.8	Relatividade da simultaneidade.....	31
3.9	Relatividade das velocidades	32
3.10	Intervalo de Tempo Próprio	33
4	FORMULAÇÃO RELATIVÍSTICA DA MECÂNICA NEWTONIANA.....	35
4.1	Lei Fundamental da Dinâmica na forma covariante	35
4.2	Quadrimento e equivalência massa-energia	36
5	FORMULAÇÃO DA ELETRODINÂMICA RELATIVÍSTICA.....	39
5.1	Densidades de carga e corrente	39
5.2	Potenciais escalar e vetorial magnético	40
5.3	Tensor de Faraday	44
6	NOÇÕES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL.....	46
6.1	Introdução.....	46
6.2	Curvas.....	46
6.2.1	<i>Introdução</i>	46
6.2.2	<i>Triedro de Frenet.....</i>	47
6.3	Superfícies Regulares.....	48
6.3.1	<i>Definição.....</i>	48
6.3.2	<i>Planos tangentes</i>	49
6.3.3	<i>Primeira forma fundamental.....</i>	50
6.4	Aplicação de Gauss e Curvatura Gaussiana.....	52
6.5	O Teorema Egregium de Gauss	55

6.6	Derivada covariante e transporte paralelo	56
6.7	Geodésicas	59
6.8	Variedades Riemannianas	60
7	NOÇÕES DE CÁLCULO TENSORIAL	62
7.1	Tensores	62
7.1.1	<i>Tensores de rank 0: Escalares</i>	62
7.1.2	<i>Tensores de rank 1: Vetores</i>	62
7.1.3	<i>Tensores de rank 2</i>	63
7.1.3.1	<i>Tensor métrico</i>	63
7.1.4	<i>Tensor de rank (m,n)</i>	64
7.2	Operações básicas com tensores	64
7.2.1	<i>Soma e subtração</i>	64
7.2.2	<i>Produto tensorial</i>	64
7.2.3	<i>Contração de um tensor</i>	65
7.2.4	<i>Divergente de um Tensor</i>	65
7.3	Derivada covariante	65
7.3.1	<i>Definição</i>	65
7.3.2	<i>Derivada dos vetores de base e Símbolos de Christoffel</i>	66
7.3.3	<i>Derivada covariante de tensores</i>	69
7.4	Espaços de Riemann	70
7.4.1	<i>Introdução</i>	70
7.4.2	<i>Tensor de Curvatura</i>	71
7.4.3	<i>Identidades de Bianchi</i>	73
7.4.4	<i>Tensor de Ricci e Tensor Escalar</i>	74
7.4.5	<i>Tensor de Einstein</i>	76
7.5	Geodésicas	77
7.5.1	<i>Equação da geodésica</i>	77
8	TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	82
8.1	Introdução	82
8.2	Gravitação Newtoniana	82
8.3	Tensor Stress-Energia-Momento	84
8.4	Equações de Campo de Einstein	87
8.5	Métrica de Schwarzschild	89
9	BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	90
9.1	Introdução	90
9.2	Equações de Euler Lagrange para campos	90
9.3	Fórmulas de Einstein e De Broglie	91
9.4	Equações de Schrödinger, Klein-Gordon e Dirac	91
9.5	Densidades Lagrangianas	94
9.5.1	<i>Análise da simetria da Lagrangiana de Dirac por transformação de fase</i>	94

9.5.2	<i>Eletromagnetismo como uma teoria de gauge do grupo $U(1)$</i>	96
10	TEORIAS DE GRAVITAÇÃO QUÂNTICA: ASPECTOS GERAIS	98
10.1	Teoria de Cordas	98
10.2	Gravidade Quântica em <i>Loop</i>	99
11	SLINKY FIELD	100
11.1	Introdução	100
11.2	A estrutura <i>slinky</i>	100
11.3	O tecido do espaço-tempo como um campo <i>slinky</i>	101
11.4	Curvatura do espaço-tempo como curvatura do campo <i>slinky</i>	103
11.5	Acoplamento dos campos da TQC ao campo <i>slinky</i>	103
11.6	Criação de estruturas <i>slinky</i> e a expansão do Universo	105
11.7	Ondas Gravitacionais	109
11.8	O tempo como oscilações intrínsecas do campo <i>slinky</i>	109
12	CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
	REFERÊNCIAS	112

1 INTRODUÇÃO

Conforme a Física foi avançando ao longo dos últimos séculos, descobriu-se a existência de quatro forças fundamentais da natureza: força eletromagnética, força nuclear fraca, força nuclear forte e força gravitacional. Acredita-se que, até certo momento na idade do Universo, elas eram unificadas em uma única força capaz de explicar todas as interações entre as partículas existentes. A união entre eletricidade e magnetismo e sua posterior unificação à força nuclear fraca na chamada Teoria Eletrofraca, por exemplo, parecem corroborar tal ideia, e já existem tentativas de ainda fundir essa teoria à força nuclear forte, embora ainda não consolidadas. Entretanto, um dos maiores problemas da Física surge quando tentamos unificar a gravidade às outras forças: o problema da gravitação quântica. Se resolvido, seremos capazes de explicar quase quaisquer fenômenos/mistérios da Física, tal como o problema da singularidade em buracos negros.

O problema em realizar essa grande unificação reside na diferença entre as duas maiores teorias da Física. A primeira delas, apresentada em 1915 por Albert Einstein, é a Teoria da Relatividade Geral, que descreve deterministicamente, através do formalismo do Cálculo Tensorial, a gravidade não como uma força, mas como um fenômeno causado pela curvatura da geometria do espaço-tempo devido a presença de grandes densidades de matéria e energia. A outra, cujos primórdios datam há exatamente 100 anos do presente trabalho com o surgimento da Mecânica Quântica, é a Teoria Quântica de Campos, uma teoria que herda o caráter probabilístico da Mecânica Quântica e descreve perfeitamente as outras três forças fundamentais como interações entre campos de bósons com campos de férmions, sendo um campo algo capaz de criar e aniquilar partículas, as quais aparecem como excitações. Algumas teorias, tais como a Teoria de Cordas e a Gravidade Quântica em *Loop*, tentam solucionar esse problema, mas nenhuma delas ainda foi confirmada.

Dito isso, o objetivo deste trabalho é apresentar de forma relativamente detalhada a matemática por trás da Teoria da Relatividade e sua formulação e apresentar brevemente a Teoria Quântica de Campos para, no final, propor uma visão autoral qualitativa de quantização do espaço-tempo, o *Slinky Field*, haja vista que tal quantização é uma das formas de formular uma teoria de gravitação quântica.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Breve introdução aos tensores

Por definição, tensores são objetos matemáticos invariantes por mudanças de sistemas de coordenadas. Essa é uma propriedade bastante útil para a Física, pois espera-se que os fenômenos físicos e as leis da Física devam ser as mesmas para quaisquer sistemas de coordenadas. Os tensores serão utilizados do início ao fim durante os desenvolvimentos da Teoria da Relatividade, desde sua forma restrita até sua forma geral. Por isso, cabe agora apresentar conceitos iniciais básicos necessários para lidarmos com a TRR e, mais a frente, lidarmos com um formalismo e descrição maiores acerca dos tensores no estudo do Cálculo Tensorial.

2.1.1 Índices, rank e dimensão de um tensor

Tensores possuem índices, que podem ser contravariantes ou covariantes (como veremos em breve), para representar suas componentes. Por exemplo, temos os tensores A^i , B_j , C_j^i , D_i^{jk} , onde os sobreíndices representam índices contravariantes e os subíndices representam índices covariantes. O rank de um tensor é determinado pelo seu número total de índices, sendo expresso da forma (p, q) , onde p é o número de índices contravariantes e q o número de índices covariantes. Assim, o tensor T_{klm}^{ij} é de rank $(2,3)$, por exemplo. A dimensão N de um tensor é dada pelo número de coordenadas que descrevem o espaço E_N ao qual ele pertence. Na Teoria da Relatividade, por exemplo, onde lidamos com três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal, trabalhamos com coordenadas da forma (ct, x, y, z) , que possuem quatro dimensões, de maneira que nossos tensores descritos nesse espaço são tensores de dimensão 4, chamados quadritensores.

2.1.2 Convenção do somatório de Einstein

A convenção do somatório de Einstein define que, em termos nos quais aparece no máximo duas vezes um mesmo índice, sendo geralmente um na forma contravariante e outro na forma covariante, devemos fazer a soma desses termos ao longo de toda a dimensão do tensor. Isto é, seja um espaço de dimensão 4, por exemplo, temos o seguinte:

$$A^{ij}B_{kj} = A^{i1}B_{k1} + A^{i2}B_{k2} + A^{i3}B_{k3} + A^{i4}B_{k4} \quad (2.1)$$

Ou seja, é como se deixássemos o somatório seguinte implícito:

$$\sum_{j=1}^4 A^{ij} B_{kj} = A^{ij} B_{kj} \quad (2.2)$$

Índices dessa forma duplamente repetidos em termos são chamados de índices *dummy*. Os índices que aparecem uma única vez em um termo, por outro lado, são chamados de índices reais. Numa equação, ambos os membros devem possuir o mesmo número de índices reais, ou seja, os índices reais do lado esquerdo devem aparecer do lado direito ainda como índices reais, não podendo ser transformados em índices *dummy*.

2.1.3 Contravariância e Covariância

O conceito de contravariância e covariância é central no estudo inicial dos tensores. Para compreender isso melhor, faremos uma abordagem voltada aos vetores, que são ditos tensores de rank 1.

Seja um vetor \mathbf{v} dado na base \mathbf{e}_i por

$$\mathbf{v} = \sum_i v^i \mathbf{e}_i = v^i \mathbf{e}_i \quad (2.3)$$

Temos que as componentes v^i desse vetor representam componentes contravariantes se, dada uma expansão ou contração dos vetores de base, os valores das componentes diminuem ou aumentam, respectivamente. Ou seja, a variação das componentes ocorre de forma contrária à variação dos vetores de base. Exemplos de vetores contravariantes são os vetores posição e velocidade.

Agora, seja um vetor \mathbf{v} dado na base \mathbf{e}^i por

$$\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}^i = v_i \mathbf{e}^i \quad (2.4)$$

Temos que as componentes v_i desse vetor representam componentes covariantes se, dada uma expansão ou contração dos vetores de base, os valores das componentes aumentam ou diminuem na mesma proporção, respectivamente. Ou seja, a variação das componentes ocorre de forma conjunta à variação dos vetores de base. Exemplos de vetores covariantes, que são chamados de covetores, é o gradiente de uma função escalar.

Em tensores de rank quaisquer, temos que os índices contravariantes são escritos como sob índices, tal como em T^{ij} , e os índices covariantes são escritos como subíndices, como em T_{ij} .

2.1.4 Tensor métrico

Dado um espaço E_N , o tensor métrico \mathbf{g} de rank 2 e ordem N dita como realizar medidas de comprimento nesse espaço em dada localização. Em sua forma covariante, é dado por g_{ij} , e em sua forma contravariante é dado por g^{ij} , sendo que as componentes de ambas as formas são o inverso uma da outra, isto é, $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$. Ademais, o tensor métrico é um tensor simétrico, ou seja, $g_{ij} = g_{ji}$.

A propriedade mais interessante do tensor métrico é que ele pode ser usado para tornar índices contravariantes de um outro tensor em índices covariantes, e vice-versa, através das chamadas operações de subida/descida de índices. Por exemplo, seja um tensor T^i de dimensão 3, temos que suas componentes covariantes são dadas por:

$$T_j = g_{ij}T^i = g_{1j}T^1 + g_{2j}T^2 + g_{3j}T^3 \quad (2.5)$$

2.1.5 Operadores diferenciais

Os operadores diferenciais básicos do Cálculo são o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano, os quais possuem de semelhança o fato de serem diferentes formas de aplicação do operador nabla (∇) a funções escalares ou vetoriais, o qual é dado em coordenadas cartesianas, por exemplo, como

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.6)$$

O nabla é generalizado para o espaço-tempo quadridimensional ao escrevê-lo como um quadrivetor cujas componentes são a derivada parcial em relação às coordenadas da quadriposição. É fácil mostrar, como feito em NOLTING (2017, p. 41), que tal quadrivetor é covariante ao tomarmos as derivadas parciais em relação às coordenadas contravariantes e é contravariante ao tomarmos as derivadas parciais em relação às coordenadas covariantes. Desse modo, temos que o nabla generalizado, que chamaremos de operador diferencial, é dado em sua forma covariante na notação relativística por:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.7)$$

onde temos que $x^\mu = (ct, x, y, z)$ é a chamada quadriposição. Se quisermos sua forma contravariante, devemos tomar a derivada em relação a $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$. Como ficará mais claro na seção 3.6, x_μ depende da convenção de sinais adotada ao tensor métrico:

$(+1, -1, -1, -1)$ ou $(-1, +1, +1, +1)$. Se utilizarmos a convenção $(+1, -1, -1, -1)$, teremos que

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.8)$$

Assim, com o operador ∂_μ aplicado a um escalar temos a generalização do gradiente, e aplicado a um tensor (ao realizar a operação de contração, como será visto na seção 7.2) temos a generalização do divergente, o quadridivergente. Podemos ainda realizar uma generalização do operador Laplaciano ao fazer o produto escalar entre os operadores ∂_μ e ∂^μ :

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.9)$$

a qual damos o nome de **operador d'Alembertiano** [1]:

$$-\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.10)$$

Se a convenção utilizada fosse a $(-1, +1, +1, +1)$, teríamos que o operador d'Alembertiano seria:

$$-\square = \partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad (2.11)$$

A questão do sinal negativo aparecendo nessas duas últimas equações é de convenção e é necessário para as formulações futuras de modo correto.

2.2 Equações de Euler-Lagrange

Uma das maneiras de formular a Mecânica Lagrangiana é através do chamado Princípio da Mínima Ação (chamado por alguns autores como Princípio da Ação Estacionária), o qual define uma quantidade chamada ação, que deve ser minimizada e é dada por:

$$S = \int_a^b L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (2.12)$$

em que $L = T - U$ é a Lagrangiana do sistema (sendo T a energia cinética e U a energia potencial), q_i são as coordenadas generalizadas, t é o parâmetro e a integral é realizada entre os pontos a e b .

De modo a minimizar a ação, utilizamos o Cálculo Variacional, passando a ação a ser tratada como um funcional a ser minimizado, isto é, queremos obter a função L tal que:

$$\delta S = \delta \int_a^b L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt = 0 \quad (2.13)$$

Desenvolvendo essa equação, temos que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_a^b \delta L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right) dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta S = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \left(\frac{dq_i(t)}{dt} \right) \right) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

Podemos intercambiar a variação δ com a derivada temporal de $q_i(t)$ e separar o integrando em duas integrais, obtendo:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i(t))}{dt} \right) dt = \\ &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) dt + \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i(t))}{dt} \right) dt \end{aligned} \quad (2.15)$$

Utilizando integração por partes na segunda integral, temos que:

$$\delta S = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right)_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \left(\delta q_i(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) dt \quad (2.16)$$

Como a função é fixa para $t = a$ e $t = b$, temos que $\delta q_i(a) = \delta q_i(b) = 0$. Assim, voltando a igualar δS a zero, ficamos com:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) dt - \int_a^b \left(\delta q_i(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) dt = \\ &= \int_a^b \delta q_i(t) \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Uma solução sem interesse para que a integral acima seja nula é que $\delta q_i(t) = 0$, de modo que igualamos o fator entre parênteses a zero para obter as chamadas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (2.18)$$

3 TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

3.1 Introdução

A Teoria da Relatividade Restrita foi apresentada por Einstein em 1905, no seu ano miraculoso, através do artigo *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento, em tradução livre). Anos antes da publicação desse artigo, o físico Hendrik Lorentz, que foi como um mentor de Einstein durante sua formulação da Teoria da Relatividade Geral, chegou a equações de transformação de medidas entre diferentes referenciais ao estudar o eletromagnetismo, conhecidas como transformações de Lorentz, tal como posteriormente fez Einstein de forma independente ao partir de dois simples, porém bastante significativos, postulados, que podem ser descritos como:

- 1) A velocidade da luz é a mesma para quaisquer referenciais inerciais, e nenhum corpo pode viajar a uma velocidade maior ou igual à da luz.
- 2) As leis da Física devem ser as mesmas para quaisquer referenciais inerciais.

Com esses postulados, e chamando a velocidade da luz no vácuo de c , veremos a seguir como surgem dois fenômenos relacionados a medidas realizadas em referenciais inerciais distintos a velocidades constantes: a dilatação temporal e a contração espacial.

3.2 Dilatação Temporal

A maneira com a qual Einstein desenvolveu muitas de suas ideias da Teoria da Relatividade está centrada na formulação de seus famosos *gedankenexperiments* (experimentos mentais). Como o interesse da TRR é a descrição de eventos que ocorrem em referenciais inerciais, Einstein sugeriu o uso de estações de trens para tratar de seus experimentos mentais. Assim, considere o seguinte:

- a) Sejam os observadores A e B , em que A está em repouso numa estação ferroviária (referencial R) e B está em repouso dentro de/em relação a um trem que se move com velocidade constante v (referencial R') paralelamente à estação, da esquerda para a direita.
- b) Seja uma fonte de luz instalada no chão do vagão e um espelho plano instalado no teto logo acima da fonte, de modo que ambos distem entre si por uma altura h .
- c) Ambos os observadores carregam cronômetros consigo, sendo os valores de tempo medidos por A dados por t e por B dados por t' .

Num instante de tempo $t_0 = t'_0$, a fonte de luz produz um pulso orthogonal em relação ao chão do vagão e, a partir desse instante, ambos os observadores disparam seus cronômetros. O pulso de luz será refletido, também orthogonalmente, pelo espelho, de modo a retornar à fonte. Cabe, assim, a tarefa de obter os intervalos de tempo Δt (segundo o observador A) e $\Delta t'$ (segundo o observador B) para que a luz complete seu percurso de ida e volta. Entretanto, a distância percorrida pela luz é medida de forma diferente de acordo com cada referencial.

No referencial R' , o observador B enxerga a luz realizando um trajeto orthogonal de subida e descida somente, enquanto, no referencial R , o observador A percebe a luz percorrendo trajetos diagonais, conforme é ilustrado pela Fig. 1.

No caso do observador A , através do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo com catetos L e h , obtemos a distância d percorrida pela luz de acordo com o referencial R :

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = L^2 + h^2 \Leftrightarrow d = 2\sqrt{L^2 + h^2} \quad (3.1)$$

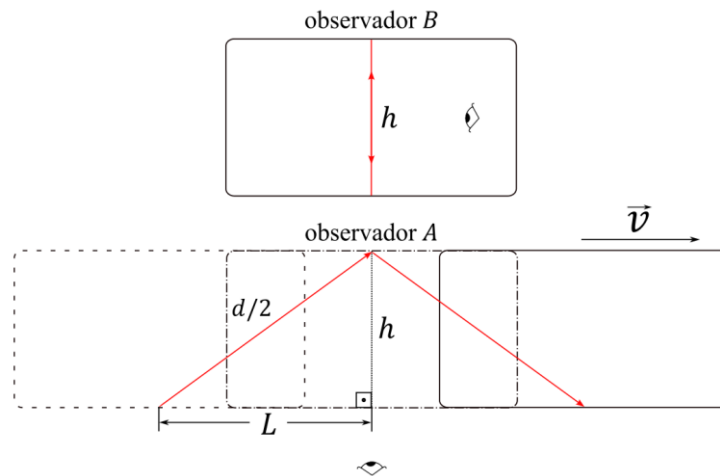


Figura 1: Trajetória do feixe de luz disparado orthogonalmente em relação ao chão do vagão conforme vista pelos observadores A e B. Fonte: autoria própria.

Contudo, temos que $L = v\Delta t/2$. Desse modo, segundo A :

$$c = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{L^2 + h^2}}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + h^2}}{\Delta t} \quad (3.2)$$

Isolando Δt na eq. (3.2), obtemos:

$$\Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2h}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.3)$$

De modo semelhante, temos que a distância d' percorrida pela luz segundo o observador B é dada por $d' = 2h$, e assim:

$$c = \frac{d'}{\Delta t'} = \frac{2h}{\Delta t'} \Leftrightarrow h = \frac{c\Delta t'}{2} \quad (3.4)$$

Substituindo a equação (3.4) na (3), obtemos que

$$\Delta t = \frac{2}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{c\Delta t'}{2} \quad (3.5)$$

e por fim:

$$\Delta t = \gamma\Delta t' \quad (3.6)$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ é o chamado **fator de Lorentz** e $\Delta t'$ o **tempo próprio**, que é o tempo medido entre dois eventos (no exemplo dado, seriam os eventos de emissão e retorno da luz) de acordo com um observador no mesmo referencial em que tais eventos ocorrem.

Como v é sempre menor que c , temos que a eq. (3.6) significa algo bastante profundo na natureza do tempo: a manutenção da invariância da velocidade da luz sob mudanças de referenciais inerciais acarreta o intervalo de tempo observado por A ser maior que aquele observado por B , de modo que ocorre uma dilatação temporal.

3.3 Contração Espacial

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, sejam os mesmos observadores A e B em seus respectivos referenciais R e R' . Dessa vez, porém, seja uma fonte de luz presa à parede esquerda do vagão, o qual possui um comprimento L como medido no referencial R , e seja um espelho preso à parede direita do mesmo vagão e à mesma altura da fonte, de modo que um pulso de luz emitido em um instante $t_0 = t'_0$ possa ser refletido e retornar à fonte após um intervalo de tempo Δt (segundo o observador A) e $\Delta t'$ (segundo o observador B). O esquema dessa situação está na Fig. 2.

O objetivo, novamente, é comparar os intervalos de tempo registrados por cada observador para chegar a alguma relação até então desconhecida. Segundo B :

$$\Delta t' = \frac{2L'}{c} \quad (3.7)$$

onde L' é o comprimento do vagão conforme medido por B .

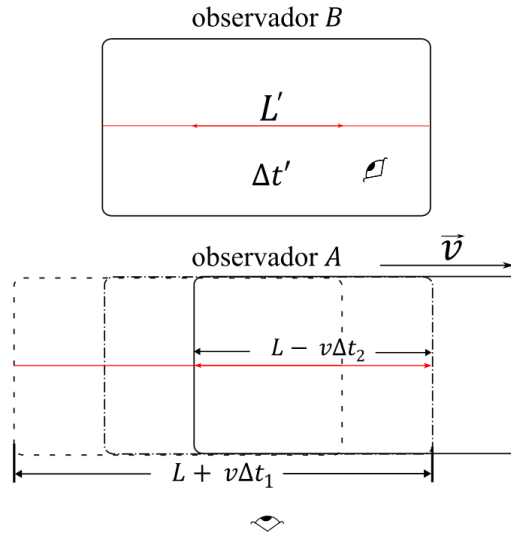


Figura 2: Trajetória do feixe de luz disparado ortogonalmente à parede esquerda do vagão conforme vista pelos observadores A e B . Fonte: autoria própria.

Porém, segundo o observador A , devido à locomoção do trem, que ocorre da esquerda para a direita, o tempo de ida da luz até o espelho é dado por

$$\Delta t_1 = \frac{(L + v\Delta t_1)}{c} \Leftrightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c - v} \quad (3.8)$$

e o tempo de volta por

$$\Delta t_2 = \frac{(L - v\Delta t_2)}{c} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c + v}, \quad (3.9)$$

de modo que o tempo total é a soma de Δt_1 e Δt_2 :

$$\Delta t = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2} \quad (3.10)$$

Se usarmos a eq. (3.6) na eq. (3.7), teremos o seguinte:

$$\frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{2L'}{c} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{2L'}{c} \gamma \quad (3.11)$$

Desse modo, igualando as equações (3.10) e (3.11), teremos que:

$$\frac{2cL}{c^2 - v^2} = \frac{2L'}{c} \gamma \Leftrightarrow \frac{c^2 L}{c^2 - v^2} \frac{1}{\gamma} = L' \Leftrightarrow \frac{L}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L' \quad (3.12)$$

e após agrupar os termos semelhantes, obtemos finalmente:

$$L = \frac{L'}{\gamma} \quad (3.13)$$

Ou seja, da mesma forma que exposto anteriormente no caso da dilatação temporal, o que a eq. (3.13) significa é que a manutenção da invariância da velocidade da luz sob mudanças de referenciais inerciais acarreta comprimentos medidos por A ao longo da direção de movimento do referencial R' serem menores que aqueles medidos por B , de modo que ocorre uma contração espacial do ponto de vista de A .

3.4 Transformações de Lorentz

Uma vez que sabemos como relacionar intervalos de tempo e espaço entre referenciais inerciais distintos, podemos agora criar uma transformação entre coordenadas de cada referencial. Para isso, considere dois referenciais R e R' em \mathbb{R}^3 cujas origens e cujos eixos coordenados estão todos inicialmente sobrepostos um ao outro, como mostra a Fig. 3. Os quadrivetores de posição nos referenciais R e R' são dados respectivamente por (ct, x, y, z) e (ct', x', y', z') .

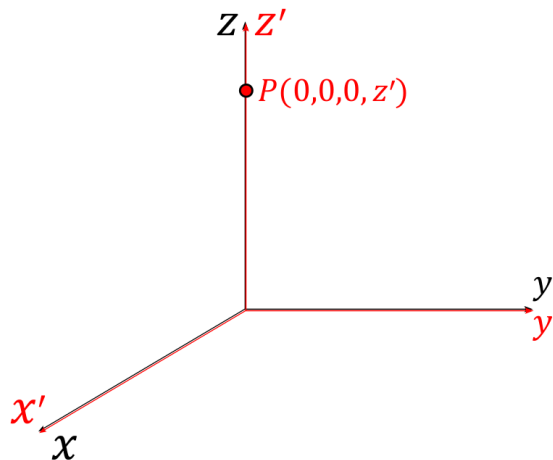


Figura 3: Referenciais R e R' em \mathbb{R}^3 inicialmente sobrepostos; há um corpo no ponto P . Fonte: autoria própria.

Seja um corpo localizado inicialmente no ponto $(0,0,0, z')$ e em repouso em relação a R' , referencial este que, a partir de um instante $t_0 = t'_0 = 0$, passa a se mover com velocidade v no sentido positivo do eixo z sem realizar rotações, conforme mostra a Fig. 4. O objetivo é, então, analisar o movimento do corpo conforme observado em cada referencial de modo a obter uma correspondência entre suas duas coordenadas.

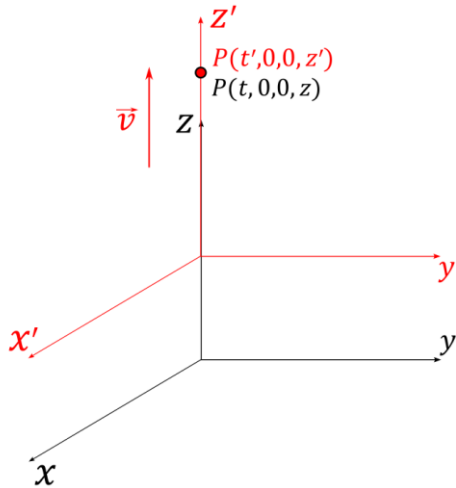


Figura 4: Referenciais R e R' quando R' passa a se mover com velocidade v na direção positiva de z . A posição de um corpo é dada pelo ponto P em dado instante para cada referencial.

Fonte: autoria própria.

Em R , a coordenada em z do corpo é dada por

$$z = vt + z'/\gamma \quad (3.14)$$

em que vt expressa a distância entre as origens e z'/γ a distância entre o corpo e a origem de R' , conforme medidos por R .

Por outro lado, a coordenada para a posição z' do corpo pode ser dada por

$$z' = z/\gamma - vt \quad (3.15)$$

conforme observado do referencial R' . Assim, isolando z' na equação (3.14), obtemos:

$$z' = \gamma(z - vt) \quad (3.16)$$

a qual, se substituída na equação (3.15), resulta em:

$$\gamma(z - vt) = z/\gamma - vt' \quad (3.17)$$

para a qual, isolando t' , obtemos:

$$t' = -\frac{\gamma z}{v} + \frac{z}{\gamma v} + \gamma t = \gamma \left(\frac{z}{\gamma^2 v} - \frac{z}{v} + t \right) = \gamma \left[\left(\frac{z}{v} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{z}{v} + t \right] \quad (3.18)$$

e terminando de desenvolver essa expressão, chegamos a:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vz}{c^2} \right) \quad (3.19)$$

Utilizando ainda a definição de $\beta = v/c$, podemos reescrever as equações (3.16) e (3.19) como:

$$z' = \gamma(z - \beta ct) \quad (3.20)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} z \right) \quad (3.21)$$

as quais são chamadas **transformações de Lorentz**.

Como o movimento somente ocorreu na direção do eixo z , devemos ter que as coordenadas em x e y para ambos os referenciais devem ser as mesmas, isto é, $x = x'$ e $y = y'$. Escrevendo a equação (3.21) do seguinte modo:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} z \right) = \gamma \frac{ct - \beta z}{c} \Leftrightarrow ct' = \gamma(ct - \beta z) \quad (3.22)$$

podemos obter uma expressão de transformação entre as coordenadas x^0 dos quadrivetores de posição (ct', x', y', z') e (ct, x, y, z) . Assim, utilizando as equações (3.20) e (3.22) e uma notação matricial, podemos facilmente escrever a transformação de coordenadas como:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

onde

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

é chamada a **matriz de transformação de Lorentz**. Se quisermos obter a transformação inversa de coordenadas, isto é, do referencial R' para o R , basta tomarmos a matriz inversa de Lorentz, a qual é obtida ao mudarmos o sinal da velocidade $v \rightarrow -v$ (de modo que $\beta \rightarrow -\beta$), de ambos os lados da equação (3.23). Desse modo, obtemos:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

A realização de uma transformação de Lorentz num sistema é geralmente chamada de um *boost*. Cabe observar que a matriz de transformação de Lorentz dada acima não é única, pois esta foi definida para um referencial que se move paralelamente ao eixo z , mas poderíamos ter definido outras para as quais o referencial se move paralelamente aos eixos x ou y .

Entretanto, a matriz de transformação de Lorentz implicitamente possui uma descrição matemática fascinante a respeito do espaço-tempo. Se repararmos bem, temos que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \gamma^2(1-\beta^2) = 1 \Leftrightarrow \gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1, \quad (3.26)$$

mas duas funções que satisfazem essa mesma relação são as funções hiperbólicas \cosh e \sinh , isto é, $\cosh^2\chi - \sinh^2\chi = 1$. Assim, grosso modo, podemos representar os fatores γ e $\beta\gamma$, respectivamente, pelas funções $\cosh\chi$ e $\sinh\chi$. Tal fato pode ser demonstrado mais formalmente como outro caminho a ser seguido para encontrar a matriz de transformação de Lorentz e, conseqüentemente, as equações (3.20) e (3.21), mas isso não será desenvolvido aqui a fim de evitar repetições do assunto. Portanto, a matriz de transformação de Lorentz pode ser dada por:

$$\begin{pmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & -\sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

em que $\gamma = \cosh\chi$ e $\beta\gamma = \sinh\chi$. Logo, surpreendentemente, temos que a matriz de transformação de Lorentz representa uma rotação hiperbólica do sistema de coordenadas, o que é análogo a uma rotação usual em \mathbb{R}^2 , se percebermos que somente as coordenadas x^0 e x^3 sofrem uma transformação de fato, dada pela seguinte matriz de rotação:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Devemos ainda, contudo, analisar o significado da variável χ . Isso pode ser obtido ao calcularmos a tangente hiperbólica de χ :

$$\tanh\chi = \frac{\sinh\chi}{\cosh\chi} = \frac{\beta\gamma}{\gamma} = \beta \quad (3.29)$$

de modo que:

$$\chi = \tanh^{-1}\beta = \tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) \quad (3.30)$$

Temos que χ é chamado de **rapidez**, sendo uma grandeza que serve como uma espécie de **ângulo hiperbólico**, que dita a rotação hiperbólica das coordenadas de modo análogo ao que o ângulo θ faz na matriz da expressão (3.28).

3.5 Diagramas de Minkowski

Com o intuito de representar a ocorrência de eventos de modo semelhante como posições são representadas no plano cartesiano, é criado o chamado diagrama de Minkowski, o qual consiste em um eixo vertical representante da coordenada $x^0 = ct$ e até outros dois eixos representantes de coordenadas espaciais, todos os três ortogonais entre si. Para simplificação das representações, usaremos o diagrama consistindo no eixo $x^3 = z$ como abscissa e o eixo $x^0 = ct$ como ordenada.

Em um diagrama de Minkowski, eventos são representados por pontos, que em nosso caso terão coordenadas (ct, z) . Desse modo, se considerarmos, por exemplo, um corpo movendo-se na direção do eixo z ao longo do tempo, poderemos traçar uma curva ligando os infinitos pontos que descrevem sua trajetória no espaço-tempo. Uma tal curva é chamada *worldline* (ou linha de universo). Assim, um corpo em repouso é descrito por uma linha vertical, outro sob velocidade constante é descrito por uma linha diagonal, e outro em movimento acelerado é descrito por uma linha curva, tal como ilustra a Fig. 3.2.

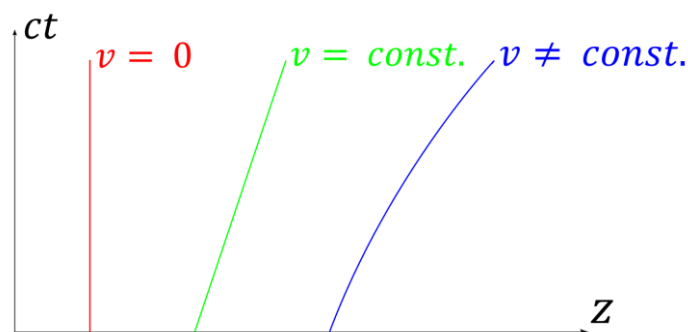


Figura 3.2: Exemplos de *worldlines* para corpos em repouso (à esquerda), a velocidade constante (no centro) e acelerados (à direita). Fonte: autoria própria.

Para efeitos práticos, ao considerarmos movimentos de corpos, teremos o evento de sua posição inicial na origem, ou seja, $(ct = 0, z = 0)$.

Agora, seja um corpo inicialmente em $(0,0)$ que se move com velocidade constante v ao longo da direção do eixo z . Sua *worldline* forma um ângulo ϕ com o eixo temporal, de modo que, a priori, podemos dizer que $\tan(\phi) = z_1/ct_1 = v/c$ para um ponto (ct_1, z_1) sobre a reta. Disso extraímos um fato interessante: somente a luz é descrita por uma linha diagonal a 45° , pois $\tan(\phi) = c/c = 1 \Leftrightarrow \phi = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$. Tal linha recebe, assim, o nome de *lightline* (ou linha de luz). Esse esquema é representado na Fig. 3.3.

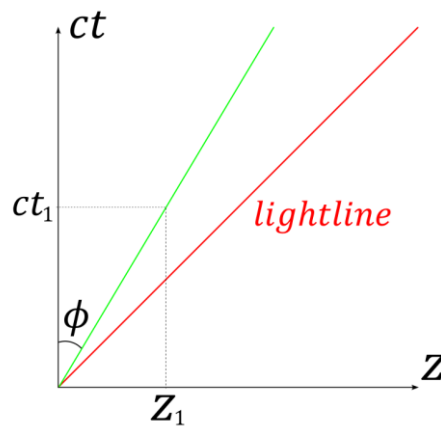


Figura 3.3: Exemplo da *worldline* de um corpo a velocidade constante e representação da *lightline*. Fonte: autoria própria.

Portanto, se considerarmos um diagrama de Minkowski para a descrição de um movimento no plano, ou seja, com dois eixos espaciais, teremos o chamado cone de luz, o qual é formado por infinitas *lightlines* de feixes de luz que se movem em qualquer direção no plano yz , conforme ilustra a Fig. 3.4.

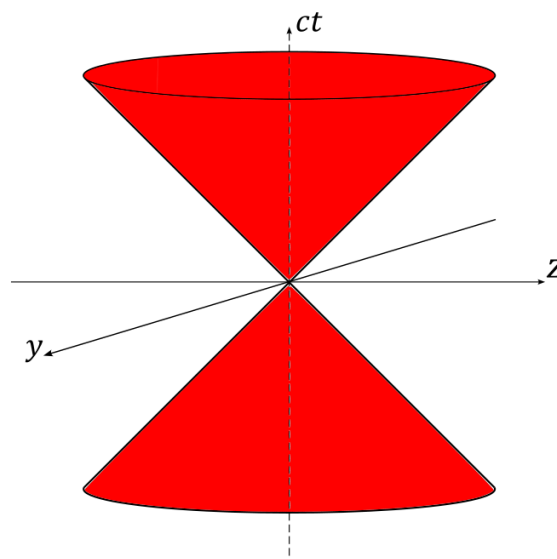


Figura 3.4: Cone de luz em um diagrama de Minkowski. Fonte: autoria própria.

Isso significa que a *worldline* de qualquer corpo deve estar contida dentro do cone luz (no caso do movimento unidimensional no espaço, a *worldline* deve estar na região formada entre o eixo temporal e as *lightlines* para feixes de luz movendo-se nos sentidos positivo e negativo do eixo z) pois, caso contrário, os corpos estariam viajando a uma velocidade maior ou igual à da luz e, conseqüentemente, violando os postulados de Einstein acerca da TRR.

Porém, o intuito maior de Minkowski ao criar tais diagramas foi de mostrar como os eixos temporais e espaciais de referenciais inerciais rotacionam hiperbolicamente de acordo com a velocidade v de um referencial R' em relação a um referencial R devido à matriz de transformação de Lorentz, a qual, como mostrada na eq. (3.27), possui tal característica. Para compreender melhor como isso ocorre, devemos recorrer a duas hipérbolas centradas nos eixos temporal e espacial do diagrama de Minkowski, para as quais as *lightlines* são as linhas assintóticas, e considerar os referenciais R e R' inicialmente sobrepostos, como mostra a Fig. 3.5.

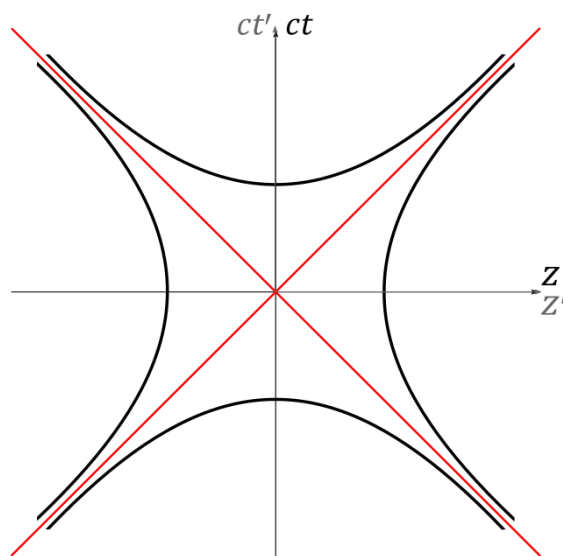


Figura 3.5: Hipérbolas no diagrama de Minkowski servindo de orientação para a rotação hiperbólica dos eixos coordenados. Os referenciais R e R' estão sobrepostos. Fonte: autoria própria.

Como descrito na seção anterior, na matriz de transformação de Lorentz dada pela eq. (3.27), a variável χ é análoga ao ângulo θ , o qual é responsável pela rotação usual de um referencial em R^2 , conforme mostra a Fig. 3.6.

Assim, de modo totalmente análogo, rotacionamos cada eixo coordenado de R' em um ângulo hiperbólico χ em torno de sua respectiva hipérbole. Como χ é um valor positivo, tal

rotação ocorre no sentido positivo de z para o eixo temporal e no sentido positivo de ct para o eixo espacial de R' , de modo que obtemos a rotação hiperbólica ilustrada na Fig. 3.7.

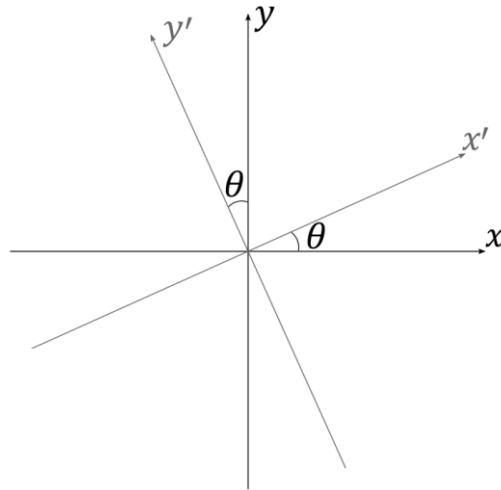


Figura 3.6: Rotação de um referencial em R^2 . Fonte: autoria própria.

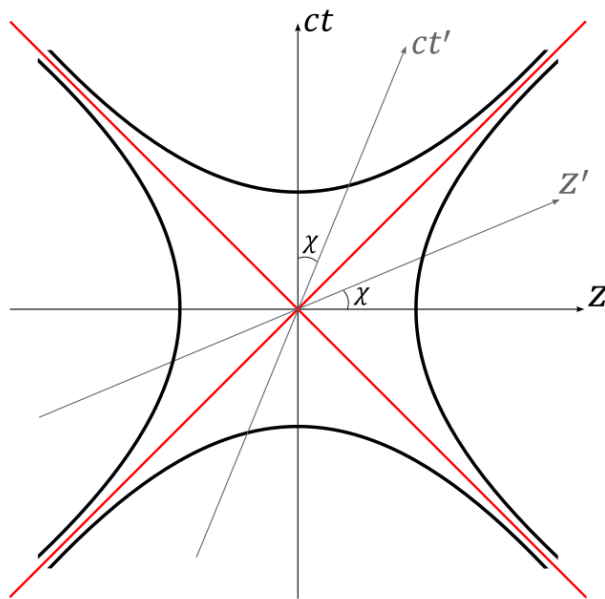


Figura 3.7: Rotação hiperbólica dos eixos coordenados. Fonte: autoria própria.

Como $\chi = \tanh^{-1}(v/c)$, temos que

$$\lim_{v \rightarrow c} \chi = \lim_{v \rightarrow c} \tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) = \infty \quad (31)$$

o que faz sentido, tendo em vista que χ é uma medida do dobro da área formada entre o eixo coordenado, a hipérbole e o vetor posição de um ponto sobre a hipérbole, analogamente como ocorre com um ângulo θ do círculo trigonométrico, como mostra a Fig. 3.8. Isso implica que,

conforme o referencial aproxima-se da velocidade da luz, cada vez mais os eixos coordenados vão tender a sobrepor a *lightline*, mas nunca o farão, o que está de acordo com o postulado de que nenhum corpo viaja a uma velocidade maior ou igual à da luz.

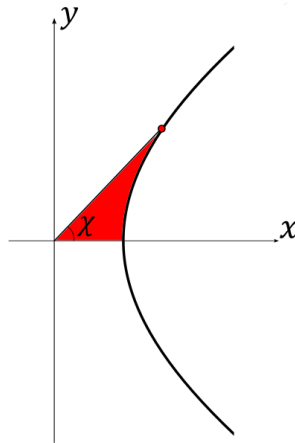


Figura 3.8: Ponto numa hipérbole para ilustrar a definição geométrica do ângulo hiperbólico χ como o dobro da área por ele coberta. Fonte: autoria própria.

A este ponto, é natural que surja a seguinte dúvida: qual a diferença entre o ângulo hiperbólico χ e o ângulo ϕ que foi definido anteriormente? Como visto, temos que $\chi = \tanh^{-1}(v/c)$ e $\phi = \tan^{-1}(v/c)$, e assim a única diferença seria que este é definido através da bem conhecida trigonometria circular e aquele através da chamada trigonometria hiperbólica. Porém, eis o grande triunfo de Minkowski: por conta da forma hiperbólica das transformações de Lorentz, a geometria que descreve o espaço de Minkowski é a **geometria hiperbólica**, de modo que a geometria euclidiana deve ser deixada de lado. Assim, o ângulo ϕ não está definido no nosso diagrama de Minkowski, tendo servido apenas para introduzir o assunto de forma mais clara, pois é definido a partir de um triângulo retângulo cuja métrica está embutida na geometria euclidiana tradicional, enquanto χ é o ângulo hiperbólico de um triângulo retângulo cuja métrica é condizente com a do espaço de Minkowski. Uma discussão mais detalhada acerca de tal “métrica” será dada na próxima seção.

Para finalizar essa seção, um exemplo de como os fenômenos de dilatação temporal e contração espacial aparecem nos diagramas de Minkowski para um referencial R' movendo-se paralelamente ao eixo z com velocidade v em relação a um referencial R pode ser visualizado na Fig. 3.9. A medição temporal deve ser a projeção de um evento sobre o eixo temporal; no caso do evento T , por exemplo, temos as medidas ct_1 (comprimento do segmento \overline{OQ}) dada pelo referencial R e ct'_1 (comprimento do segmento \overline{OT}) dada pelo referencial R' . Como

explicado anteriormente, pontos sobre uma hipérbole têm o mesmo “comprimento” de intervalo de espaço-tempo em relação à origem no espaço de Minkowski, de maneira que o comprimento de \overline{OT} é igual ao de \overline{OP} , o qual é claramente menor que o de \overline{OQ} , de modo que $ct_1 > ct'_1 \Leftrightarrow t_1 > t'_1$, mostrando o fenômeno da dilatação temporal. A medição de comprimentos, por outro lado, deve ser realizada medindo-se a posição entre dois extremos de um objeto ao mesmo tempo num dado referencial; assim, sobre uma mesma hipérbole, podemos escolher os pontos U e V de modo que os eventos O e U ocorrem num mesmo tempo $t' = 0$ para o referencial R' e os eventos O e V ocorrem num mesmo tempo $t = 0$ para o referencial R . Desse modo, se fossemos transpor o segmento \overline{OU} para o segmento \overline{OV} deslocando U ao longo da hipérbole de modo a manter inalterado o intervalo de espaço-tempo, o comprimento de \overline{OU} diminui, o que mostra que, no referencial R , o comprimento de um objeto medido por R' é visto como menor, o que evidencia a contração espacial.

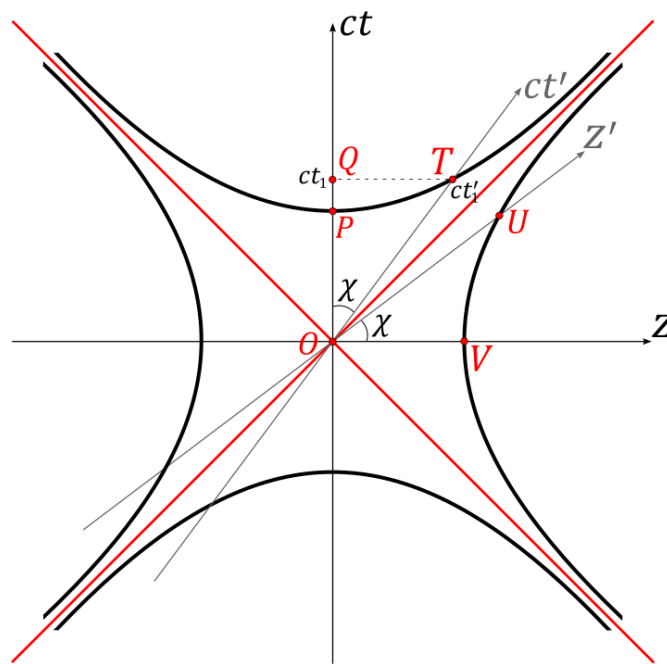


Figura 3.9: Diagrama de Minkowski destacando os fenômenos de dilatação temporal e contração espacial para medidas entre eventos. Fonte: autoria própria.

3.6 Métrica de Minkowski (Intervalo de espaço-tempo)

Como visto na seção anterior, o espaço de Minkowski não segue a métrica do espaço euclidiano usual. Uma métrica pode ser entendida como uma função de calcular distâncias entre dois pontos pertencentes ao espaço. Se tal métrica obedecer aos seguintes axiomas:

- a) a distância entre dois pontos é sempre maior ou igual a zero;

- b) sejam dois pontos A e B , temos que $d(A, B) = d(B, A)$, isto é, a distância de A a B é igual à distância medida de B a A ;
- c) $d(A, B) + d(A, C) \geq d(C, B)$ (desigualdade triangular), em que A , B e C são pontos distintos pertencentes ao espaço,

então dizemos que tal métrica define um espaço métrico. Assim, o espaço euclidiano do \mathbb{R}^3 é um espaço métrico, pois a distância entre dois pontos (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) é definida pelo Teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, que satisfaz a todos os três axiomas. Uma propriedade importante é que a distância entre dois pontos, um escalar, é a mesma para qualquer referencial que tenha sofrido rotação, ou seja, ela é invariante sob rotações de referencial, de modo que a casca esférica é o conjunto de pontos para os quais a distância entre qualquer um deles e a origem é a mesma, e da mesma forma ocorre com uma circunferência no plano.

Dito isso, qual seria a métrica do espaço de Minkowski? Para tal, façamos uma analogia com o espaço euclidiano e a ideia de invariância discutida há pouco. Sejam dois referenciais bidimensionais R e R' sobrepostos no plano cartesiano xy e seja um ponto qualquer P localizado sobre o eixo y e seus vetores de posição \vec{r} (como visto por R) e \vec{r}' (como visto por R') em relação à origem, de modo que inicialmente $\vec{r} = \vec{r}'$. Ao rotacionar em 360° o vetor \vec{r}' e o referencial R' com uma mesma frequência, de modo que \vec{r}' seja constante em relação a R' , e traçarmos o trajeto descrito pelo ponto P em R , teremos ao final uma circunferência, que representa o conjunto de todos os pontos equidistantes da origem e cujo raio é uma medida, invariante sob rotações, da distância entre P e a origem. Esse processo é ilustrado na Fig. 3.10.

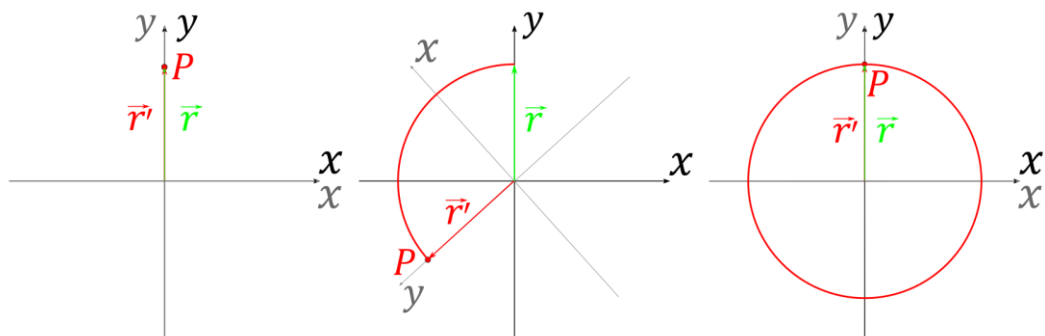


Figura 3.10: Exemplo de invariância sob rotações da distância entre um ponto P e a origem num plano cartesiano. Fonte: autoria própria.

Esse exemplo parece bastante trivial, mas serve de analogia para chegar onde queremos: seja um diagrama de Minkowski em que dois referenciais R e R' estão inicialmente sobrepostos

e seja um ponto P sobre o eixo temporal e seus quadrivetores de posição \vec{r} (segundo R) e \vec{r}' (segundo R') em relação à origem; se realizarmos uma rotação hiperbólica de P em um ângulo hiperbólico crescente χ juntamente com o referencial R' e traçarmos o trajeto descrito por P em R , teremos o delineamento de meia hipérbole; porém, P nunca irá coincidir com sua posição inicial em R novamente, embora tenha mantido sua mesma posição \vec{r}' segundo R' (poderíamos ter feito o mesmo procedimento para um ponto P sobre o eixo espacial), conforme mostra a Fig. 3.11.

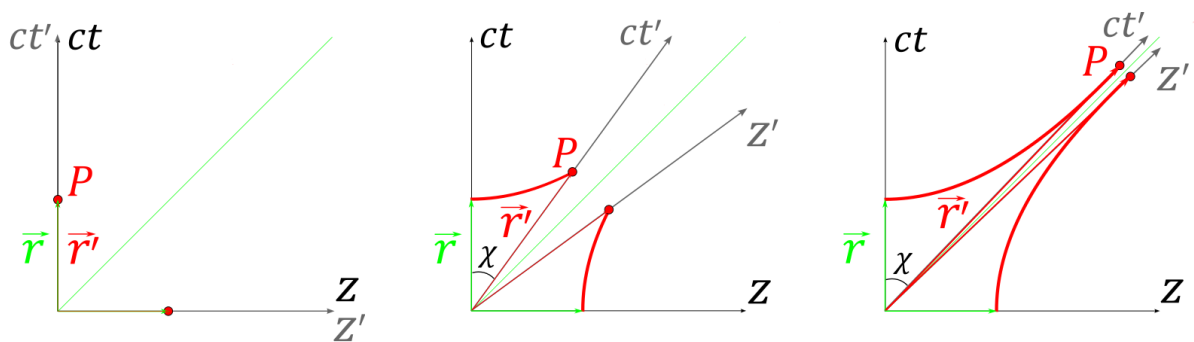


Figura 3.11: Rotação hiperbólica de um ponto P juntamente com o referencial R' com o intuito de apresentar o invariante escalar do espaço de Minkowski. Fonte: autoria própria.

Contudo, da mesma forma que o raio da circunferência, a norma de \vec{r}' deve ser igual à norma de \vec{r} durante qualquer instante, pois inicialmente eram as mesmas e assim continua sendo segundo um observador em R' . Isso de fato acontece se considerarmos que a equação de uma hipérbole é dada por $x^2 - y^2 = r^2$ no plano cartesiano. Assim, de modo análogo, temos que $z^2 - (ct)^2 = r^2$, mas como r deve ser igual a r' , então: $r^2 = z^2 - (ct)^2 = (z')^2 - (ct')^2 = r'^2$ (de modo visual como ilustrado na Fig. 11, isso não parece ser verdade; contudo, devemos lembrar que \vec{r} e \vec{r}' são quadrivetores no espaço de Minkowski, e não vetores usuais do espaço euclidiano). Podemos ainda incluir as outras coordenadas espaciais sem perda de generalidade, pois elas não sofrem transformação de fato, de modo que $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$. Portanto, definindo $r = r' = \Delta s$, chegamos a um invariante sob transformações de Lorentz para o espaço de Minkowski, o chamado **intervalo de espaço-tempo**, que seria o análogo ao cálculo da distância entre dois pontos no espaço euclidiano. Assim, podemos definir o quadrado do intervalo de espaço-tempo entre dois eventos $E_1(ct_1, x_1, y_1, z_1)$ e $E_2(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ como:

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (3.32)$$

em que $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta z = z_2 - z_1$. Geralmente, usamos o quadrado do intervalo de espaço-tempo pois o lado direito da eq. (3.32) pode assumir valores negativos e, portanto, Δs seria um valor imaginário. Ademais, tomando valores diferenciais da eq. (3.32), podemos definir o intervalo de espaço-tempo como:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (3.33)$$

Como o quadrado da “distância” entre dois eventos pode assumir valores negativos, temos que o espaço de Minkowski não é um espaço métrico por definição estrita dada pelos axiomas mostrados anteriormente, mas isso mesmo assim não o impede de possuir uma métrica, que é o intervalo de espaço-tempo, o qual representa uma generalização do teorema de Pitágoras para o espaço de Minkowski.

Com o intuito de resumir e esclarecer melhor os fatos apresentados até agora, são apresentadas algumas comparações entre o espaço euclidiano e o espaço de Minkowski na Tabela 1 abaixo.

Tabela 1: Comparações entre o espaço euclidiano e o espaço de Minkowski.

-----	Espaço euclidiano	Espaço de Minkowski
Métrica	$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$	$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$
Pontos equidistantes à origem	Pontos numa circunferência	Eventos numa hipérbole
Vetor nulo	$\vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$	Quadrivetores sobre o cone de luz

Na notação quadrivetorial, podemos ainda definir, de acordo com a métrica dada pelo intervalo de espaço-tempo da eq. (3.33), o chamado tensor métrico do espaço de Minkowski $\eta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$, com $i, j = 0, 1, 2, 3$, em que \hat{e}_i são os vetores unitários da base do espaço de Minkowski, sendo que os seguintes produtos escalares modificados entre eles é necessário para respeitar a métrica: $\hat{e}_0 \cdot \hat{e}_0 = -1$ e $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1$. Assim, o tensor é dado por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

de modo que a equação (3.33) pode ser escrita na forma matricial por:

$$(ds)^2 = (cdt \quad dx \quad dy \quad dz) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

ou ainda, de forma mais compacta utilizando a convenção de notação de Einstein, como:

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.36)$$

em que $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Cabe ressaltar que temos ainda outra possibilidade de definir o intervalo de espaço-tempo, que seria dado pela troca de sinais entre a parte temporal e a parte espacial, isto é, $(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$, pois esse valor é o oposto daquele definido pela eq. (3.33) e, assim, ainda continua sendo um invariante, de modo que podemos definir um tensor métrico para ele como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Assim que surgem as convenções de sinais $(-1, +1, +1, +1)$ e $(+1, -1, -1, -1)$ comentadas na seção 2.1.5. Salvo dito o contrário, utilizaremos a convenção de sinais $(+1, -1, -1, -1)$ durante as discussões futuras.

3.7 Regiões do diagrama de Minkowski e Causalidade

Uma das consequências da definição do intervalo de espaço-tempo dado pela eq. (3.33) é que podemos definir, conforme mostra a Fig. 3.12, três tipos de separação entre dois eventos:

- Eventos *timelike* separados: são aqueles para os quais $(\Delta s)^2 < 0$, ou seja, o comprimento temporal entre os eventos é maior que a distância espacial. São representados dentro do cone de luz.
- Eventos *lightlike* separados: são aqueles para os quais $(\Delta s)^2 = 0$, ou seja, o comprimento temporal e a distância espacial entre dois eventos são iguais. São representados sobre o cone de luz.
- Eventos *spacelike* separados: são aqueles para os quais $(\Delta s)^2 > 0$, de modo que a distância espacial entre os eventos é maior que o comprimento temporal. São representados fora do cone de luz.

Uma consequência bastante interessante de eventos *spacelike* separados é que podemos ter um referencial inercial para o qual o intervalo de tempo entre dois eventos é nulo, isto é: sejam dois eventos E e F *spacelike* separados; se num referencial R eles possuem um intervalo de tempo entre eles não-nulo, de modo que é possível distinguir qual ocorreu antes que o outro, existe um outro referencial R' no qual os eventos são vistos como tendo ocorrido ao mesmo tempo, de maneira que é impossível distinguir qual ocorreu primeiro. Isso significa uma quebra de causalidade, pois não poderíamos estabelecer uma relação de causa e consequência entre E e F se tal relação existisse. Esse é um exemplo que mostra que a simultaneidade entre eventos também é algo relativo.

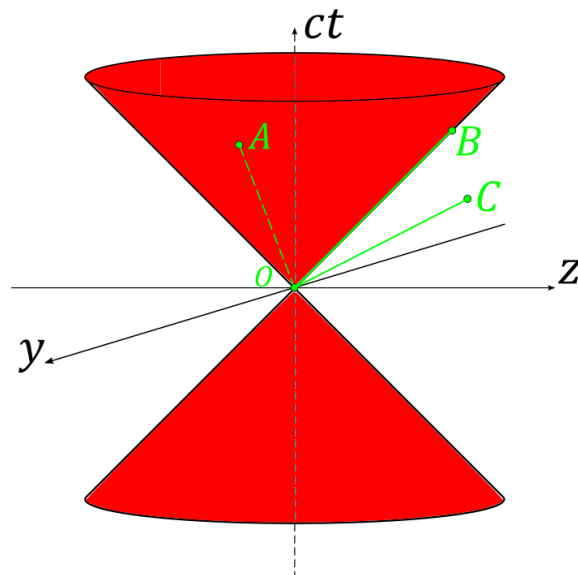


Figura 3.12: Regiões definidas pelo cone de luz num diagrama de Minkowski. Em relação a um evento na origem, eventos dentro do cone (A), sobre o cone (B) e fora do cone (C) possuem separação *timelike*, *lightlike* e *spacelike*. Fonte: autoria própria.

3.8 Relatividade da simultaneidade

Como visto, a métrica do espaço de Minkowski permite que dois eventos possam ser vistos como simultâneos para um referencial, mas ocorridos em momentos distintos para outro. Assim, será mostrado um exemplo clássico de um *gedankenexperiment* que mostra a relatividade da simultaneidade.

Sejam novamente os observadores A e B em repouso, respectivamente, em relação aos referenciais R , cujas coordenadas são dadas por (ct, x, y, z) , e R' , cujas coordenadas são dadas por (ct', x', y', z') , em que R' é o referencial de um vagão de trem que se move paralelamente a uma estação (referencial R) com velocidade v para a direita na direção horizontal. Considere

que B está a uma mesma distância d das extremidades esquerda e direita do vagão. Então, suponha que, no momento instantâneo em que os observadores estão na mesma posição em z , dois relâmpagos atingem ao mesmo tempo, conforme observado por A , cada uma das extremidades do vagão, como ilustra a Fig. 3.13.

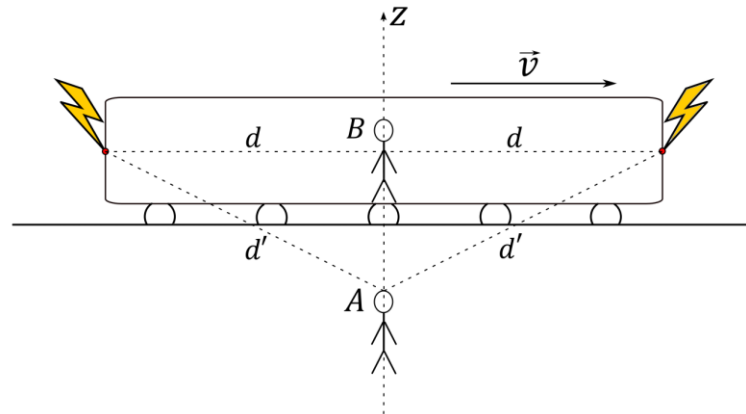


Fig. 3.13: *Gedankenexperiment* no qual dois observadores A e B em uma estação de trem e num vagão a velocidade v , respectivamente, observam dois relâmpagos atingindo as extremidades do vagão.

Fonte: autoria própria.

Assim, de acordo com A , os eventos D do raio atingindo a extremidade direita e E do raio atingindo a extremidade esquerda do vagão ocorreram simultaneamente. Contudo, no referencial de B , a distância que a luz vinda de D irá percorrer para chegar ao centro do vagão é menor que aquela vinda de E por conta que o vagão está viajando para a direita, de modo que, para B , o evento D ocorreu antes que o evento E .

3.9 Relatividade das velocidades

Por fim, uma vez que já sabemos como transformar coordenadas de espaço e tempo entre referenciais inerciais, podemos usar isso para chegar a transformações de velocidades. Para tal, sejam os referenciais R , R' e R'' inicialmente sobrepostos num instante $t = t' = t'' = 0$, sendo que R' move-se com velocidade v ao longo do eixo z e R'' representa o referencial próprio de um corpo que se move com velocidade $u_z > v$ (também na direção do eixo z) em relação a R e u'_z em relação a R' . Se representarmos essa situação em um diagrama de Minkowski, teremos a Fig. 3.14.

Na figura, temos os ângulos hiperbólicos χ e ξ , os quais descrevem a rotação hiperbólica dos referenciais R' e R'' , respectivamente. Assim, de modo a obter u_z em função de v e u'_z ,

podemos considerar o triângulo retângulo em destaque na figura e usar a trigonometria hiperbólica, como segue:

$$\tanh(\chi + \xi) = \frac{\tanh(\chi) + \tanh(\xi)}{1 + \tanh(\chi) \cdot \tanh(\xi)} \Leftrightarrow \frac{u_z}{c} = \frac{v/c + u'_z/c}{1 + \frac{v}{c} \cdot \frac{u'_z}{c}} \quad (3.38)$$

e logo

$$u_z = \frac{v + u'_z}{1 + \frac{vu'_z}{c^2}} \quad (3.39)$$

No entanto, caso o corpo possua componentes nas três coordenadas espaciais, podemos usar as transformações de Lorentz e mostrar que as componentes em x e y são dadas por:

$$u_x = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_x}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \quad (3.40)$$

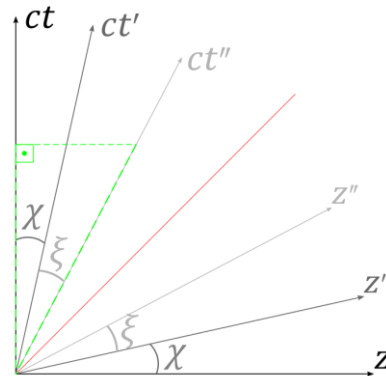


Figura 3.14: Diagrama de Minkowski para os referenciais R , R' e R'' .

3.10 Intervalo de Tempo Próprio

Como visto anteriormente, o intervalo de tempo Δt medido entre a ocorrência de dois eventos é relativa ao referencial no qual as medidas de tempo são realizadas, de modo que Δt não é um invariante de Lorentz. Porém, a partir do intervalo de espaço-tempo Δs , podemos propor a grandeza intervalo de tempo próprio:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c} \quad (3.41)$$

Na forma diferencial, podemos escrevê-lo ainda como:

$$d\tau = \frac{ds}{c} \quad (3.42)$$

Como $d\tau$ é formado por dois invariantes de Lorentz, o intervalo de espaço-tempo e a velocidade da luz, temos que é também um invariante de Lorentz.

4 FORMULAÇÃO RELATIVÍSTICA DA MECÂNICA NEWTONIANA

4.1 Lei Fundamental da Dinâmica na forma covariante

A mecânica newtoniana, cuja base é a lei fundamental da dinâmica, expressa por

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (4.1)$$

não é invariante sob transformações de Lorentz, de modo que ela é válida somente para baixas velocidades. Devemos, portanto, criar uma formulação na chamada forma covariante para a mecânica de Newton. Para tal, devemos buscar escrever a eq. (4.1) através de escalares de Lorentz e quadrivetores.

Primeiramente, até onde sabemos por hora, a massa m de um corpo é um invariante de Lorentz. O vetor posição de um corpo no espaço euclidiano, como já visto, é generalizado para o espaço de Minkowski como sendo $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, e o tempo próprio τ (intervalo de tempo próprio para o qual o tempo próprio inicial é nulo) constitui um escalar de Lorentz. Portanto, faz sentido em definir um quadrivetor de velocidade u^μ como segue:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(ct, x, y, z) \quad (4.2)$$

Como $\tau = \tau(t)$, podemos usar a regra da cadeia nas derivadas da equação anterior:

$$u^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt}(ct, x, y, z) = \frac{dt}{d\tau} \left(c \frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \frac{dt}{d\tau} (c, v_x, v_y, v_z) \quad (4.3)$$

Por fim, utilizando a equação da dilatação temporal na forma diferencial, temos que $dt = \gamma d\tau \Leftrightarrow dt/d\tau = \gamma$, de modo que a **quadrivelocidade** é dada por:

$$u^\mu = (u^0, \vec{u}) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma(c, \vec{v}) \quad (4.4)$$

Agora, basta substituírmos a derivada temporal na eq. (4.1) pela derivada em relação ao tempo próprio e a força \vec{F} por um quadrivetor de força $K^\mu = (K^0, \vec{K})$ que ainda desconhecemos para estabelecer o seguinte *ansatz*:

$$K^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (4.5)$$

Vamos analisar as componentes espaciais dessa equação, isto é, para $\mu = 1, 2, 3$:

$$\vec{K} = m \frac{d\vec{u}}{d\tau} = m \frac{d(\gamma\vec{v})}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt} = \gamma \frac{d(\gamma\vec{p})}{dt} = \gamma \frac{d\vec{p}_r}{dt} = \gamma \vec{F}_r \quad (4.6)$$

onde foi sugestivo definirmos o vetor de momento relativístico $\vec{p}_r = \gamma\vec{p}$ e a força relativística $\vec{F}_r = d\vec{p}_r/dt$. Por hora, então, temos que $K^\mu = (K^0, \gamma\vec{F}_r)$. Para obter a componente temporal de K^μ , podemos fazer o seguinte produto escalar:

$$K^\mu u_\mu = K^0 u_0 - \vec{K} \cdot \vec{u} = K^0 \gamma c - \gamma \vec{F} \cdot \gamma \vec{v}, \quad (4.7)$$

mas ao mesmo tempo, temos que:

$$\begin{aligned} K^\mu u_\mu &= K^0 u_0 - \vec{K} \cdot \vec{u} = \left(m \frac{du_0}{d\tau} \right) u_0 - \left(m \frac{d\vec{u}}{d\tau} \right) \cdot \vec{u} = \\ &= \left(m \frac{d(\gamma c)}{d\tau} \right) (\gamma c) - \left(m \frac{d\vec{u}}{d\tau} \right) \cdot \vec{u} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como γ e c são constantes, então $d(\gamma c)/d\tau = 0$, de modo que:

$$K^\mu u_\mu = - \left(m \frac{d\vec{u}}{d\tau} \right) \cdot \vec{u} = - \frac{m}{2} \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{d\tau} = - \frac{m}{2} \frac{d(\gamma v^2)}{d\tau} = 0 \quad (4.9)$$

pois o termo γv^2 é um escalar e, portanto, sua derivada em relação a τ é nula. Assim, igualando a eq. (4.7) a zero, temos que:

$$K^0 \gamma c - \gamma \vec{F} \cdot \gamma \vec{v} = 0 \Leftrightarrow K^0 = \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} \quad (4.10)$$

Portanto, o quadrivetor K^μ , chamado **força de Minkowski**, é definido por:

$$K^\mu = \gamma \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F}_r \right) \quad (4.11)$$

4.2 Quadrimento e equivalência massa-energia

A eq. (4.5) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$K^\mu = \frac{d(mu^\mu)}{d\tau} \quad (4.12)$$

de maneira que, em analogia a $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, faz sentido em definirmos um quadrivetor de momento dado por

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma(c, \vec{v}) = (\gamma mc, \vec{p}_r) = (p^0, \vec{p}_r) \quad (4.13)$$

onde $\vec{p}_r = \gamma\vec{p}$ é o momento relativístico que definimos anteriormente, de modo que

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (4.14)$$

Contudo, podemos explorar melhor o significado da componente p^0 do quadrimomento utilizando $\mu = 0$ na eq. (4.14) e utilizando a equação (4.10) para a componente K^0 , de modo que:

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} \Leftrightarrow \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} = \frac{dp^0}{d\tau}, \quad (4.15)$$

onde, a fim de isolar p^0 como uma integral, aplicamos a regra da cadeia para a derivada em relação a τ e lembramos que $dt/d\tau = \gamma$:

$$\gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dp^0}{dt} \Leftrightarrow \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} = \gamma \frac{dp^0}{dt} \Leftrightarrow p^0 = \frac{1}{c} \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (4.16)$$

Agora, se prestarmos atenção, temos que a integral da equação (4.16) representa o trabalho realizado sobre um corpo. Pelo teorema do trabalho-energia cinética da mecânica clássica, temos que, em teoria, esse trabalho é transferido integralmente como uma energia cinética E ao corpo, de modo que:

$$p^0 = \frac{E}{c} \quad (4.17)$$

Assim, podemos escrever o quadripotencial como:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}_r \right) \quad (4.18)$$

Agora, como sabemos também da eq. (4.13) que $p^0 = \gamma mc$, podemos substituir esse valor na eq. (4.17) e chegarmos a uma das expressões mais importantes e famosas de Einstein que emerge da TRR:

$$E = \gamma mc^2 \quad (4.19)$$

A massa m conforme aparece na eq. (4.19) geralmente é substituída pelo termo m_0 para o que seria a chamada “massa de repouso” de um corpo, mas isso é algo mal interpretado, conforme comenta Nolting (2017, p. 47), pois a massa m é entendida como um invariante de Lorentz, de modo que não faria sentido referenciais inerciais distintos obterem medidas

diferentes de massa para um mesmo corpo. Sendo assim, sempre que utilizarmos m estaremos nos referindo à “massa de repouso” do corpo.

Para entender melhor o que representa a equação (4.19), podemos substituir γ por sua expressão em função de v e realizar uma expansão em série de Taylor, como segue:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} mc^2 = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) \quad (4.20)$$

Com isso, vemos que mc^2 surge como um termo independente da velocidade do corpo. Assim, atribuímos a esse termo o nome **energia de repouso**, da qual conclui-se a famosa **equivalência entre massa e energia**, isto é, podemos transformar certa quantidade de massa em energia e vice-versa. Os demais termos da equação (4.20) correspondem à sua energia cinética, de maneira que o termo dado por $K = 1/2 (mv^2)$ em mecânica clássica é uma mera aproximação da energia cinética do corpo, sendo válida somente para baixas velocidades. Dessa maneira, o que inicialmente supusemos ser puramente a energia cinética (E) é, na verdade, a energia total presente no corpo, dada pela soma entre sua energia cinética e uma energia “intrínseca” à matéria.

Retornando ao assunto do quadrimomento, como em todo quadrivetor, temos que a “norma” de p^μ é um invariante de Lorentz. Partindo disso, obtemos o seguinte:

$$p^\mu p_\mu = p^0 p_0 - \vec{p}_r \cdot \vec{p}_r = \frac{E^2}{c^2} - p_r^2 \quad (4.21)$$

Porém, se utilizarmos $p^0 = \gamma mc$ e $\vec{p}_r = \gamma m \vec{v}$, calcularmos $p^\mu p_\mu$ novamente e desenvolvermos a expressão resultante escrevendo γ em função de v , teremos então:

$$p^\mu p_\mu = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 v^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} m^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2 \quad (4.22)$$

Portanto, igualando as equações (4.21) e (4.22), obtemos:

$$\frac{E^2}{c^2} - p_r^2 = m^2 c^2 \Leftrightarrow E^2 = p_r^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4.23)$$

e como, a nosso ver até o momento, a energia deve ser positiva, temos enfim a seguinte equação (bastante importante para a formulação da Teoria Quântica de Campos, como ainda veremos) que representa a energia de um corpo em função de seu momento relativístico e sua massa:

$$E = \sqrt{p_r^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (4.24)$$

5 FORMULAÇÃO DA ELETRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

De modo semelhante ao que acabamos de fazer com a dinâmica newtoniana e sua lei fundamental, queremos escrever as equações de Maxwell na forma covariante. Entretanto, eis aqui uma grande diferença: as equações de Maxwell, do modo como foram inicialmente formuladas, já são implicitamente invariantes sob transformações de Lorentz, de modo que basta buscarmos uma maneira de representá-las a partir de tensores numa forma covariante explícita.

Para darmos início, vamos ver como o fenômeno da contração espacial implica diferentes medidas de densidade de carga e como isso afeta a densidade de corrente.

5.1 Densidades de carga e corrente

Da eletrodinâmica clássica, são definidas as densidades de carga (ρ) e corrente (\vec{J}) conforme, respectivamente, as equações abaixo:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (5.1)$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}_q \quad (5.2)$$

onde q representa carga, V representa volume e \vec{v}_q representa a velocidade de um volume de cargas com densidade ρ . Essas grandezas possuem a seguinte relação dada pela equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (5.3)$$

Se considerarmos agora dois referenciais R_0 e R inicialmente sobrepostos, em que R move-se com velocidade \vec{v} na direção do eixo z , temos que um diferencial de volume em R_0 é dado por $dV_0 = dx_0 dy_0 dz_0$ (volume próprio), enquanto que em R é dado por $dV = dx dy dz$. Contudo, devido ao fenômeno da contração espacial, do ponto de vista do referencial R , temos que $dz = dz_0/\gamma$, de modo que $dV = dx dy dz_0/\gamma$. Como as medidas em x e y são as mesmas devido à matriz de transformação de Lorentz dada pela eq. (3.23), temos que $dx = dx_0$ e $dy = dy_0$ e, assim, $dV = dx_0 dy_0 dz_0/\gamma = dV_0/\gamma$.

A carga q é experimentalmente verificada ser um invariante de Lorentz. Assim, os referenciais R_0 e R possuem a mesma medida dq de diferencial de carga, de maneira que suas medidas de densidade de carga são dadas, respectivamente, por:

$$\rho_0 = \frac{dq}{dV_0} \quad (5.4)$$

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (5.5)$$

Porém, substituindo dV por dV_0/γ na eq. (5.5), temos então que:

$$\rho = \gamma\rho_0, \quad (5.6)$$

de maneira que a densidade de corrente no referencial R é dada por $\vec{J} = \gamma\rho_0\vec{v}_q = \rho_0\vec{u}$, onde $\gamma\vec{v}_q = \vec{u}$ é a componente espacial da quadrivelocidade do volume de cargas. Assim, com o propósito de chegar a um quadrivetor de densidade de corrente, basta definirmos a componente $J^0 = \rho_0u^0$, de modo que:

$$J^\mu = \rho_0u^\mu = (\gamma\rho_0c, \gamma\rho_0\vec{v}_q) = (\rho c, \vec{J}) = (J^0, \vec{J}) \quad (5.7)$$

onde usamos a eq. (5.6). Assim, podemos reescrever a equação da continuidade como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c) + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \cdot (\rho c, \vec{J}) = 0 \quad (5.8)$$

que acaba se tornando um quadridivergente da densidade de quadricorrente:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (5.9)$$

Isso implica que temos conservação da densidade de quadricorrente.

5.2 Potenciais escalar e vetorial magnético

Para começarmos, vamos relembrar as equações de Maxwell escritas na forma diferencial com os campos elétrico (\vec{E}) e magnético (\vec{B}):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.10)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.12)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.13)$$

das quais temos que as equações (5.10) e (5.11) são as homogêneas e as equações (5.12) e (5.13) as não-homogêneas.

Da forma como estão, as equações de Maxwell representam um sistema de quatro equações diferenciais para as quais queremos obter duas funções somente (\vec{E} e \vec{B}). Para contornar essa situação, faremos o que segue.

Na equação (5.10), se utilizarmos as propriedades dos operadores diferenciais de que o divergente de qualquer rotacional é nulo, podemos reescrever o campo magnético como:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.14)$$

em que \vec{A} é o chamado potencial vetorial magnético, que acaba sendo o responsável por interagir com as partículas de fato, como mostra o experimento de Aharonov-Bohm. Agora, substituindo a eq. (5.14) na eq. (5.11):

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.15)$$

Agora, utilizando do fato de que o rotacional de qualquer gradiente é o vetor nulo, podemos escrever a expressão entre parênteses da eq. (5.15) como o negativo (por convenção de sinais) do gradiente de um campo escalar φ ao qual é dado o nome de potencial escalar:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Leftrightarrow \vec{E} = -\left(\nabla\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (5.16)$$

Ademais, poderíamos ainda aplicar um chamado *gauge* ao potencial vetorial magnético adicionando outro gradiente de um campo escalar a ele:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\xi \quad (5.17)$$

de modo que não teríamos alteração da eq. (5.15) nem da eq. (5.14), pois $\nabla \times \nabla\xi = 0$. Porém, será dada maior importância a esse fato somente quando falarmos sobre a Teoria Quântica de Campos e avaliarmos a simetria sob imposição de transformação de fase local à densidade Lagrangiana de Dirac.

Com o resultado obtido na eq. (5.16), podemos reescrever a eq. (5.12) como:

$$\nabla \cdot \left[-\left(\nabla\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla^2\varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.18)$$

Agora, substituindo as equações (5.14) e (5.16) na eq. (5.13), obtemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\left(\nabla\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right] \quad (5.19)$$

Utilizando a identidade do rotacional de um rotacional advinda dos operadores diferenciais, podemos escrever a eq. (5.19) como:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial(\nabla \varphi)}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}, \quad (5.20)$$

onde podemos inverter a ordem da derivada parcial temporal e do gradiente no segundo termo à direita para agrupá-lo com o primeiro termo à esquerda, obtendo:

$$\nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.21)$$

Do eletromagnetismo clássico, sabemos que $c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$, ou seja, $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, e assim a equação (5.21) torna-se:

$$\nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.22)$$

de forma que agora torna-se evidente a presença do operador d'Alembertiano, definido na eq. (2.10), agindo sobre \vec{A} , e assim temos que:

$$\nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \square \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.23)$$

Desse modo, transformamos as quatro equações de Maxwell em um sistema de duas equações diferenciais acopladas, as equações (5.18) e (5.23). Com o intuito de desacoplá-las, aplicamos a chamada condição de Lorenz (cabe observar a semelhança desse nome com o de Lorentz a fim de evitar confusões):

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (5.24)$$

de maneira que a eq. (5.23) é agora dada por:

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (5.25)$$

e a eq. (5.18) por:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde usamos a equação (5.24) para obter o divergente de \vec{A} em termos de φ e onde, novamente, percebe-se o operador d'Alembertiano agindo, mas desta vez sobre φ :

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.27)$$

Logo, a partir das equações de Maxwell e da aplicação da condição de Lorenz, obtemos as chamadas equações de onda para os potenciais vetorial magnético e escalar, dadas respectivamente pelas equações (5.25) e (5.27). Contudo, algo interessante surge a partir da seguinte manipulação algébrica na equação (5.27):

$$\begin{aligned} \square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} &\Leftrightarrow \frac{1}{c} \square \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \square \frac{\varphi}{c} = -\frac{1}{c^2} \frac{\rho c}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \square \frac{\varphi}{c} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\rho c}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \square \frac{\varphi}{c} = -\mu_0 \rho c \end{aligned} \quad (5.28)$$

Mas vimos anteriormente, conforme na eq. (5.7), que ρc é a componente J^0 de J^μ . Assim, da equação anterior, temos que:

$$\square \frac{\varphi}{c} = -\mu_0 J^0 \quad (5.29)$$

O fato é que, se repararmos bem nas equações (5.25) e (5.29), temos que ambas representam D'alembertianas de potenciais que resultam nas componentes da densidade de quadricorrente. Isto sugere, então, que podemos juntar essas equações numa só ao definirmos o chamado **quadripotencial**, dado por:

$$A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right) \quad (5.30)$$

de modo que obtemos:

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu \quad (5.31)$$

Por fim, podemos ainda reescrever a condição de Lorenz, dada pela eq. (5.24), como um invariante de Lorentz dado pelo seguinte quadridivergente:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi}{c} \right) = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (5.32)$$

5.3 Tensor de Faraday

Relembrando, nosso objetivo inicial era escrever as equações de Maxwell na forma de quadrivetores. Entretanto, ocorre que não é possível escrever os campos \vec{E} e \vec{B} como tais, mas podemos criar, por outro lado, um quadri-tensor de ordem 2 que, de certa forma, “acopla” esses campos em algo único. Para tal, vamos utilizar as equações (5.14) e (5.16) para descrever as componentes dos campos em função das componentes da densidade de quadricorrente. Começemos com o campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, de modo que, de acordo com as coordenadas cartesianas, suas componentes são:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 \quad (5.33)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) \quad (5.34)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 \quad (5.35)$$

onde usamos o fato, devido à convenção $(+1, -1, -1, -1)$, de que $\partial_i = -\partial^i$ para $i = 1, 2, 3$.

Para o campo elétrico, antes precisaremos reescrever a equação (5.16) em função das componentes de A^μ :

$$\vec{E} = -\left(\nabla\varphi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -(c\nabla A^0 + c\partial_0\vec{A}) = -c(\nabla A^0 + \partial_0\vec{A}) \quad (5.36)$$

onde foi usado que $\varphi/c = A^0$ e $(1/c)\partial/\partial t = \partial_0$. Assim, as componentes são:

$$E_x = -c(\partial_1 A^0 + \partial_0 A^1) = -c(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \quad (5.37)$$

$$E_y = -c(\partial_2 A^0 + \partial_0 A^2) = -c(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0) \quad (5.38)$$

$$E_z = -c(\partial_3 A^0 + \partial_0 A^3) = -c(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0) \quad (5.39)$$

onde usamos que $\partial_0 = \partial^0$. De acordo com essas equações das componentes de \vec{B} e \vec{E} , podemos então perceber o seguinte padrão: cada termo é da forma $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, sendo que, para $\mu = \nu$, o termo se anula. Portanto, podemos definir um tensor contravariante de rank 2 cujas componentes representem os campos, o chamado tensor de Faraday:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (5.40)$$

Se realizarmos a troca mútua de índices $\mu \leftrightarrow \nu$ nessa equação, teremos o seguinte: $F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -F^{\mu\nu}$. Ou seja, o tensor de Faraday é um tensor

antissimétrico, de modo que podemos obter as componentes que faltam tomando o oposto das componentes que já temos. Desse modo, a forma matricial desse tensor é dada por:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Com este tensor, pode-se mostrar, como é feito em Nolting (2017, p. 68), que as equações homogêneas de Maxwell podem ser escritas de forma compacta como

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.42)$$

e que as equações não homogêneas podem ser escritas como:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta \quad (5.43)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$.

6 NOÇÕES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

6.1 Introdução

Com o advento e os aperfeiçoamentos do Cálculo, diversas áreas novas de estudo da matemática puderam ser criadas, tais como as equações diferenciais e seus métodos de resolução, o Cálculo Variacional, entre outras. Essas áreas mencionadas são importantes para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral. Contudo, a base a partir da qual podemos mostrar que vivemos em um espaço-tempo curvo quadridimensional surgiu a partir dos estudos de uma área que foi formulada por matemáticos como Monge, Euler, Gauss e Bonnet: a Geometria Diferencial.

A Geometria Diferencial é de certa forma o desenvolvimento da geometria a partir do formalismo do Cálculo, e representou uma revolução na geometria ao mostrar a existência de geometrias não-euclidianas, tal como a geometria de Lobachevsky, que define um plano hiperbólico sobre o qual existem infinitas retas paralelas a uma dada reta, o que não inclui o quinto postulado de Euclides, segundo o qual, dado um ponto exterior P a uma reta r pertencente a um plano, existe somente uma reta r' que passa por tal ponto e não intersecta r . A Geometria Diferencial lida com a descrição de curvas e superfícies, tal como a formulação de propriedades locais e teoremas globais para elas.

A partir de meados do século XIX, o estudo da Geometria Diferencial recebeu grande aprofundamento e generalizações para espaços N -dimensionais com as contribuições do matemático Bernhard Riemann, o qual formulou sua Geometria Riemanniana. Ademais, entram em cena Gregorio Ricci-Curbastro e Tulio Levi-Civita com uma inserção algébrica à Geometria Diferencial, o chamado Cálculo Tensorial, que será o próximo tema de análise após este.

6.2 Curvas

6.2.1 Introdução

Antes de adentrarmos ao estudo das superfícies, devemos voltar a atenção para as curvas. Uma curva em \mathbb{R}^3 pode ser definida como um conjunto de pontos (x, y, z) que definem um traço (a grosso modo, o desenho da curva). Cada coordenada dos pontos da curva pode ainda ser dado em função de um parâmetro t , de modo que tenhamos uma **curva parametrizada** $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Se derivarmos a curva em relação ao parâmetro, obteremos um vetor que pode ser entendido como a “velocidade da curva” num ponto, isto é, obteremos $\vec{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Como o parâmetro t pertence a um intervalo que chamaremos de $I \subset \mathbb{R}$, podemos também interpretar uma curva como uma aplicação $\alpha(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Uma aplicação pode ser entendida como um mapeamento de pontos de um conjunto para pontos de outro conjunto, de forma análoga a funções.

Além de uma curva parametrizada, convém tratar de **curvas regulares**, que são definidas como curvas α para as quais $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0} \forall t \in I \subset \mathbb{R}$ [2]. Se existe um ponto p pertencente à curva para o qual $\vec{\alpha}'(t) = 0$, este ponto é chamado de singular.

Como se é estudado em Cálculo Vetorial, podemos calcular o comprimento de arco s de uma curva parametrizada ao tomarmos a integral da norma de seus vetores tangentes. Nesse caso, tomamos o intervalo de integração de $t' = t_0$ a $t' = t$:

$$s = \int_{t_0}^t \|\vec{\alpha}'(t')\| dt' \quad (6.1)$$

na qual $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \right]^{1/2}$.

Desse modo, podemos parametrizar uma curva também pelo seu comprimento de arco, isto é, $\alpha(t) \rightarrow \alpha(s)$, o que geralmente é feito para analisar melhor as curvas e suas propriedades.

6.2.2 *Triedro de Frenet*

Ao analisar as derivadas de uma curva, podemos obter alguns valores de interesse para o estudo de seu comportamento em \mathbb{R}^3 . Seja então a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ parametrizada pelo comprimento de arco. Vamos calcular a derivada primeira da curva: $\vec{\alpha}'(s) = \vec{t}$, sendo \vec{t} o vetor tangente à curva e que define uma reta tangente a esta. Se calcularmos a derivada segunda, teremos que: $\vec{\alpha}''(s) = \vec{t}'(s) = k(s)\hat{n}(s)$, onde $k(s)$ é a chamada curvatura, que pode ser entendida como uma medida de quão rápido uma reta tangente se afasta da curva, e \hat{n} é o versor normal ao vetor tangente. Podemos definir também o versor $\hat{t} = \vec{t}/\|\vec{t}\|$, de maneira que podemos tomar o produto vetorial entre esses versores e definir o chamado vetor binormal:

$$\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n} \quad (6.2)$$

onde usaremos o símbolo \wedge para representar o produto vetorial. Portanto, obtemos uma base de vetores ortonormais $\{\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}\}$ que varia de acordo com o parâmetro do comprimento de arco s , conforme mostra a Fig. 6.1. Essa base forma um referencial móvel, o qual chamamos de **Triedro de Frenet**.

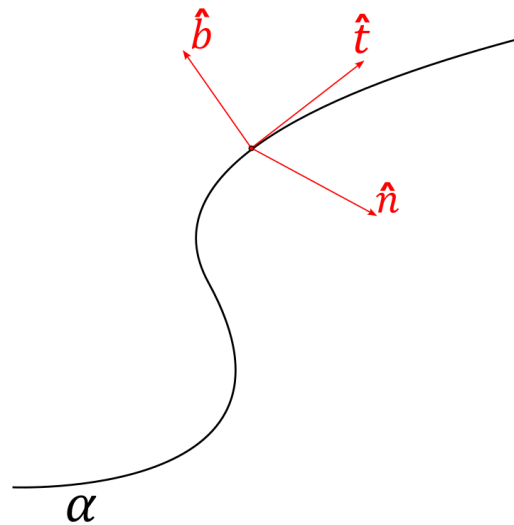


Figura 6.1: Triedro de Frenet formado pelos vetores ortonormais \hat{t} , \hat{n} e \hat{b} ao longo de uma curva α . Fonte: autoria própria.

Ainda, se tomarmos a derivada do versor binormal e tomarmos sua norma, obtemos que $\|\hat{b}'(s)\| = \tau(s)$, onde $\tau(s)$ é uma grandeza chamada **torção**, e que pode ser entendido como uma medida de quão rápido o plano que contém os versores \hat{t} e \hat{n} em s , chamado plano osculador, muda a direção de seu vetor normal ($\hat{b}(s)$) em relação aos planos osculadores vizinhos.

6.3 Superfícies Regulares

6.3.1 Definição

O estudo das superfícies regulares, suas propriedades locais e como tais propriedades influenciam o comportamento global da superfície é o tema central da Geometria Diferencial. Uma superfície regular em \mathbb{R}^3 , de maneira simples, é uma superfície que não apresenta “quebras”, “pontas” ou auto-intersecções e que é suficientemente suave, de tal modo que possamos aplicar o Cálculo Diferencial sobre ela e, assim, aplicar diferenciações em quaisquer pontos [2]. De um modo mais formal, uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é um conjunto de pontos $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que, para todo ponto $p \in S$, existe uma vizinhança V a tal ponto e uma aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que X : i) é uma aplicação diferenciável; ii) possui uma inversa $X^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ contínua (de modo que a superfície S não terá auto-intersecções); iii) para todo ponto $q \in U$, os vetores obtidos da derivada de X em relação às coordenadas de q sejam ortogonais entre si, o que garante a existência de um plano tangente a S em qualquer ponto p [2]. A Fig. 6.2 ilustra como uma superfície regular é formada a partir da aplicação de um tal X (que

satisfaça as condições estabelecidas) sobre um conjunto U . Dizemos que tal aplicação é uma parametrização da superfície.

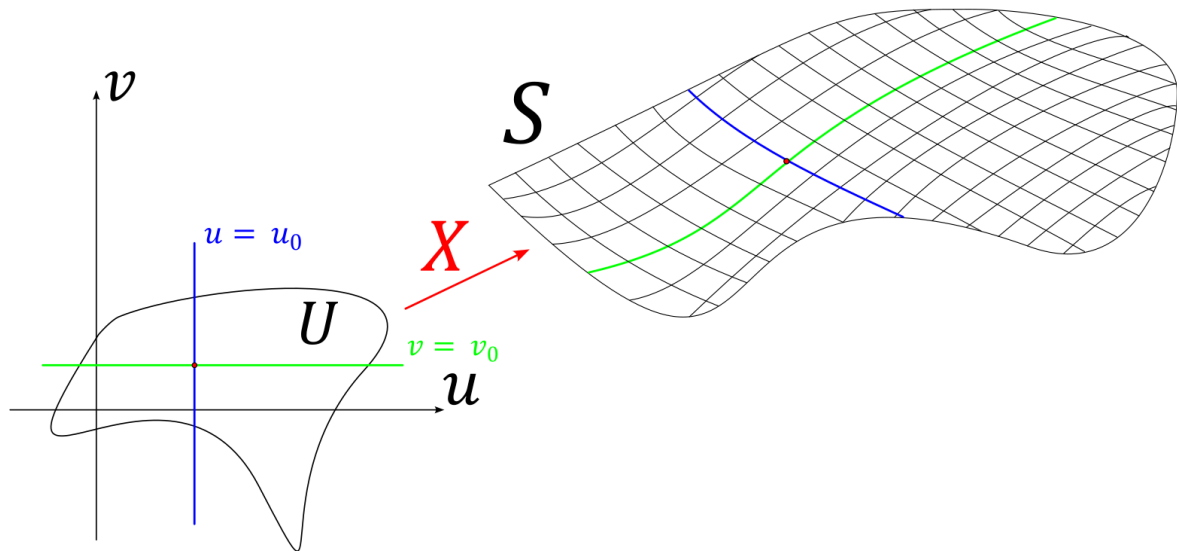


Figura 6.2: Exemplo genérico de uma superfície regular S obtida de uma aplicação $X(u, v)$ sobre um conjunto U . Fonte: autoria própria.

As linhas sobre a superfície na Fig. 6.2 representam curvas coordenadas, que são obtidas ao tomarmos uma das coordenadas no sistema do conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ como constante e assim obtermos retas em U . Como exemplo, sejam as coordenadas u e v , de modo que temos uma aplicação $X(u, v)$. Se tomarmos $v = v_0$ em U , teremos uma reta em U sobre a qual, se aplicarmos X , obteremos uma curva coordenada sobre S , como mostram as curvas em destaque na Fig. 6.2.

6.3.2 Planos tangentes

Para trabalharmos com diferenciações sobre a superfície S , é de suma importância a existência de um plano tangente a cada ponto $p \in S$, o que é garantido pela última condição imposta à aplicação X comentada anteriormente. Assim, dado um ponto $p \in S$, existe um plano tangente a S em p , denotado por $T_p S$, o qual contém todos os vetores tangentes a S em p . Dada uma parametrização $X(u, v)$ e um ponto $q \in U$, obtemos uma base de vetores ortogonais (devido à condição iii imposta a X) em $p = X(q)$ dada por $\{\partial X(q)/\partial u, \partial X(q)/\partial v\} = \{\vec{X}_u(q), \vec{X}_v(q)\}$, onde foi utilizada a notação \vec{X}_u e \vec{X}_v para representar a derivada parcial em relação a u e v , respectivamente. Tal base é chamada de **base associada a X** . Assim, um vetor $\vec{w}(t) = \vec{\beta}'(t)$ tangente a S em um ponto $X(q)$, onde $\beta(t) = (u(t), v(t))$ é uma curva regular

pertencente a S , pode ser representado nessa base por $\vec{w}(t) = u'(t)\vec{X}_u + v'(t)\vec{X}_v$. Um exemplo disso é mostrado na Fig. 6.3 abaixo.

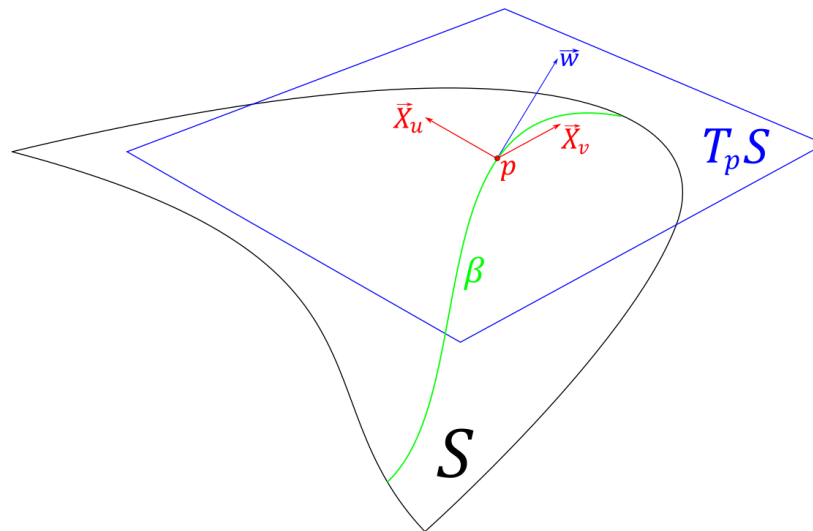


Figura 6.3: Plano tangente T_pS num ponto p de uma superfície S e um vetor tangente qualquer \vec{w} em p . Fonte: autoria própria.

Por fim, através do produto vetorial entre os vetores da base associada num ponto $p \in S$, podemos definir um vetor unitário normal (\hat{N}) ao plano tangente:

$$\hat{N} = \frac{\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\|} \quad (6.3)$$

6.3.3 Primeira forma fundamental

Após definido o plano tangente, é natural definirmos um produto interno sobre ele, o qual é induzido pelo produto interno do \mathbb{R}^3 e denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Assim, dados dois vetores $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in T_pS$, o produto interno entre eles é dado por $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle_p$. Com isso, dado um vetor $\vec{w} \in T_pS$, definimos uma forma quadrática chamada primeira forma fundamental $I_p: T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$I_p(\vec{w}) = \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle_p = \|\vec{w}\|^2 \quad (6.4)$$

A primeira forma fundamental é uma forma de mostrar como o produto interno natural do \mathbb{R}^3 é extraído pela superfície S . Ademais, o significado de sua importância vem do fato de que podemos realizar medidas de comprimentos, ângulos e áreas sem nos referenciar ao \mathbb{R}^3 , mas somente à superfície em si.

Reescrevendo o vetor \vec{w} na base associada a X , podemos escrever a primeira forma fundamental num ponto $p = X(u_0, v_0)$ como:

$$\begin{aligned}
I_p(\vec{w}) &= \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle_p = \langle u'(t)\vec{X}_u + v'(t)\vec{X}_v, u'(t)\vec{X}_u + v'(t)\vec{X}_v \rangle_p = \\
&= (u'(t))^2 \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle_p + 2u'(t)v'(t) \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle_p + (v'(t))^2 \langle \vec{X}_v, \vec{X}_v \rangle_p
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Assim, dessa equação, definimos os chamados coeficientes da primeira forma fundamental:

$$E(u_0, v_0) = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle_p \tag{6.6}$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle_p \tag{6.7}$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \vec{X}_v, \vec{X}_v \rangle_p \tag{6.8}$$

e com eles podemos reescrever a eq. (6.5) como:

$$I_p(\vec{w}(t)) = \|\vec{w}(t)\|^2 = E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2 \tag{6.9}$$

Se tornamos o ponto p variável, então os coeficientes tornam-se funções das coordenadas u e v : $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$ e $G = G(u, v)$.

Com os coeficientes da primeira forma fundamental, podemos agora determinar algumas grandezas sem fazer referência ao \mathbb{R}^3 . Começemos com o **comprimento de arco** de uma curva $\alpha(t)$ dado pela eq. (6.1):

$$\begin{aligned}
s &= \int_{t_0}^t \|\vec{\alpha}'(t)\| dt = \int_{t_0}^t \|\vec{w}'(t)\| dt = \\
&= \int_{t_0}^t \sqrt{E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} dt
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Agora, sejam os vetores \vec{X}_u e \vec{X}_v que formam a base associada de X . Por meio da definição do produto escalar entre dois vetores, podemos calcular o **ângulo** ϕ entre eles como segue:

$$\cos(\phi) = \frac{\langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle}{\|\vec{X}_u\| \|\vec{X}_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \Leftrightarrow \phi = \cos^{-1}\left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right) \tag{6.11}$$

Logo, o ângulo entre os vetores da base é igual a 90° (de modo que temos uma base ortonormal) somente quando $F = 0$ (quando isso ocorre para todo ponto $X(q) \in S$, temos que X é uma parametrização ortogonal). Por último, sabemos do Cálculo Vetorial que a área da superfície de uma função $f(x, y)$ numa região $U \subset D(f)$ é dado por:

$$A = \iint \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} \right\| dx dy \tag{6.12}$$

Assim, de modo análogo, podemos calcular a **área** $A(S_1)$ de uma região $S_1 \subset S$ de uma superfície regular S através do produto vetorial entre os vetores da base associada de $X(u, v)$:

$$A(S_1) = \iint \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| dudv \quad (6.13)$$

Porém, utilizando a identidade $\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\|^2 = \|\vec{X}_u\|^2 \|\vec{X}_v\|^2 - \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle^2$, reescrevemos a eq. (6.13) como:

$$A(S_1) = \iint \sqrt{\|\vec{X}_u\|^2 \|\vec{X}_v\|^2 - \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle^2} dudv = \iint \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (6.14)$$

6.4 Aplicação de Gauss e Curvatura Gaussiana

De modo análogo ao que foi feito para curvas, onde encontramos a grandeza de curvatura definida a partir de $\|\vec{\alpha}''(s)\| = k(s)$ para uma curva $\alpha(s)$, será deduzida uma grandeza que representa o quanto o vetor normal de um plano tangente $T_p S$ varia em relação a planos tangentes vizinhos. Para tal, fazemos uso de uma importante aplicação que leva em conta tais vetores normais: a **Aplicação de Gauss**. Antes de apresentá-la, devemos saber em quais superfícies ela é definida.

Seja uma superfície regular S . Se podemos calcular um vetor normal unitário \hat{N} a ela para todo ponto $p \in S$, então a aplicação $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada ponto p da superfície um vetor normal unitário em p , e assim \hat{N} é dito ser um campo diferenciável de vetores normais unitários em S . Ademais, se uma superfície S admite um tal campo que seja ainda definido $\forall p \in S$ e contínuo em toda a superfície, dizemos que essa é uma **superfície orientável** [2]. Um exemplo de superfície não-orientável é a faixa de Möbius pois, para um mesmo ponto p contido numa curva fechada da superfície, se definirmos em p um vetor normal num dado sentido e percorrermos tal vetor ao longo da curva até retornar a p novamente, temos que esse vetor normal acaba sendo oposto ao primeiro.

Podemos, então, definir a Aplicação de Gauss: seja S uma superfície com orientação \hat{N} e S^2 a superfície de uma esfera unitária; a aplicação $N: S \rightarrow S^2$ toma os vetores normais de S em S^2 , conforme ilustra a Fig. 6.4 (cabe se atentar que N representa a aplicação e que \hat{N} representa o campo de versores normais à superfície e também sua orientação).

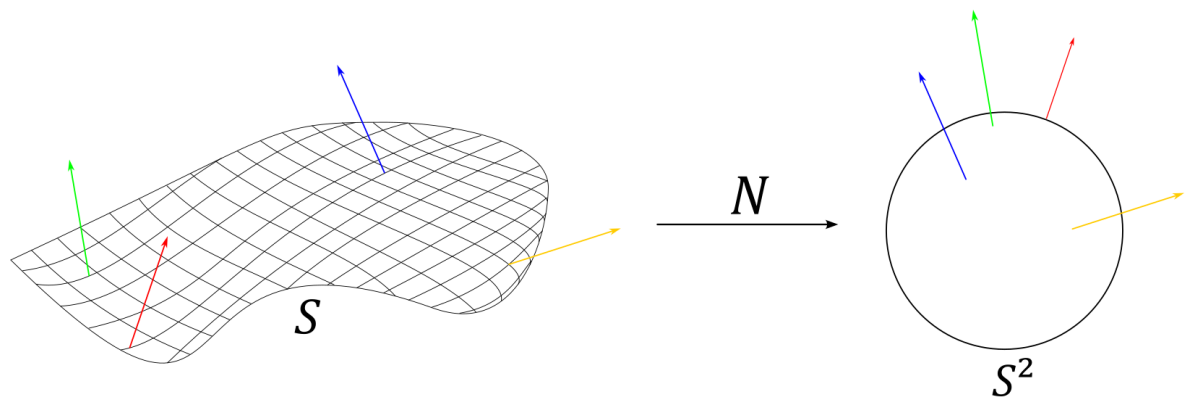


Figura 6.4: Exemplo da Aplicação de Gauss N sobre uma superfície S . Perceba que cada vetor normal correspondente mantém a direção em ambas as superfícies e que, em S^2 , todos são colineares a retas que interceptam a origem da esfera. Fonte: autoria própria.

Agora, pensando numa curva $\alpha \subset S$ que possui curvatura k num ponto p , e seja o versor \hat{N} normal à superfície em p , podemos definir a chamada curvatura normal k_n da curva α em p como sendo a projeção do vetor $k\hat{n}$ sobre o versor \hat{N} . Isto é, se \hat{N} e $k\hat{n}$ formam um ângulo θ entre si, temos que $k_n = k \cos(\theta)$, como ilustra a Fig. 6.5.

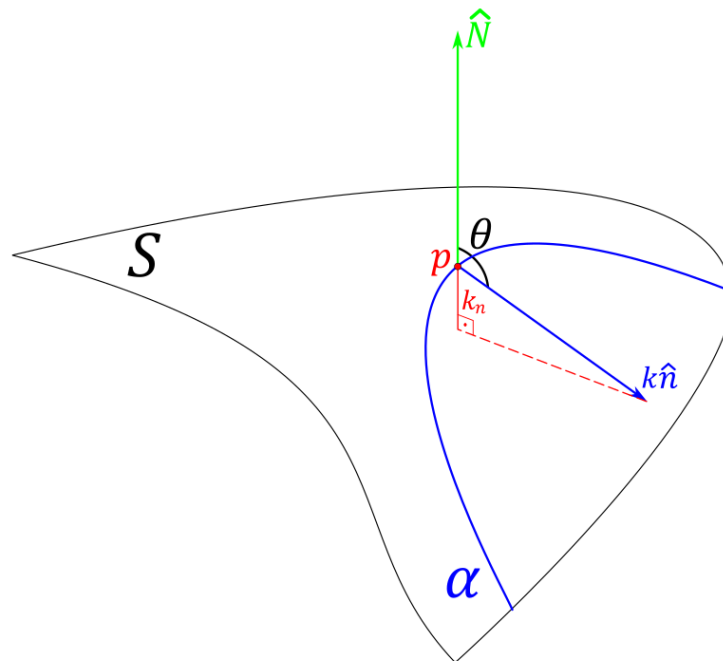


Figura 6.5: Curvatura normal de uma curva $\alpha \subset S$ num ponto p como o produto escalar entre \hat{N} e $k\hat{n}$. Fonte: autoria própria.

Ademais, podemos definir uma outra forma quadrática relacionada ao diferencial do vetor normal \hat{N} numa dada direção e que, como veremos, resulta na curvatura normal. Assim,

seja um vetor tangente à superfície S num ponto p , dado por $\vec{v} \in T_p S$, e $d\hat{N}_p$ o diferencial de \hat{N} no ponto p . Defini-se a chamada segunda forma fundamental como:

$$II_p = -\langle d\hat{N}_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle \quad (6.15)$$

Se tomarmos uma curva $\alpha(s)$ e tomarmos $\hat{N}(s)$ restrito a ela, teremos que $\hat{N} \perp \vec{\alpha}'$, pois $\vec{\alpha}'(s)$ é o vetor tangente e \hat{N} o vetor normal à curva. Assim, podemos obter o seguinte ao tomarmos a derivada do produto escalar entre \hat{N} e $\vec{\alpha}'(s)$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{ds} \langle \hat{N}(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \hat{N}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle + \\ &+ \langle \hat{N}(s), \vec{\alpha}''(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \hat{N}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle = -\langle \hat{N}(s), \vec{\alpha}''(s) \rangle \end{aligned} \quad (6.16)$$

Assim, seja o vetor $\vec{v} = \vec{\alpha}'(0)$, em que α é uma curva $\alpha(s): (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, temos que:

$$\begin{aligned} II_p(\vec{v}) &= -\langle d\hat{N}_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle = -\langle d\hat{N}_p(\vec{\alpha}'(0)), \vec{\alpha}'(0) \rangle = \\ &= -\langle \hat{N}'(0), \vec{\alpha}'(0) \rangle_p = \langle \hat{N}(s), \vec{\alpha}''(s) \rangle_p \end{aligned} \quad (6.17)$$

Agora, utilizando o fato que $\vec{\alpha}''(s) = k(s)\hat{n}(s)$, chegamos enfim à seguinte conclusão:

$$II_p(\vec{v}) = \langle \hat{N}(s), k(s)\hat{n}(s) \rangle_p = k(s)\langle \hat{N}(s), \hat{n}(s) \rangle = k_n \quad (6.18)$$

Portanto, a segunda forma fundamental possibilita uma maneira de medir a curvatura normal de uma curva α tangente a um vetor $\vec{v} \in T_p S$ num ponto p da superfície. Logo, dado um ponto $p \in S$, falamos que podemos obter a curvatura normal para uma dada direção em p . Assim, num ponto p de uma superfície regular, é possível obtermos valores extremos para a curvatura normal ao longo de uma dada direção. Chamaremos o valor máximo de k_1 e o mínimo de k_2 , cujas direções ao longo das quais eles aparecem são dadas pelos versores $\hat{e}_1 \in T_p S$ e $\hat{e}_2 \in T_p S$, respectivamente, sendo chamadas de direções principais em p [2].

Agora, cabe mencionar que o diferencial $d\hat{N}_p$ pode ser visto como uma aplicação linear que, aplicada a um vetor, obedece a uma equação de autovalor-autovetor. Isto é, seja um vetor $\vec{v} \in T_p S$, temos que $d\hat{N}_p(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, pois aplicando a segunda forma fundamental a $d\hat{N}_p$, temos que $II_p(\vec{v}) = -\langle d\hat{N}_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle = -\langle \lambda\vec{v}, \vec{v} \rangle = -\lambda\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = -\lambda$, de modo que $-\lambda = k_n$ conforme a eq. (6.18). Com isso, é possível mostrar que existe uma base ortonormal de autovetores $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ que diagonaliza $d\hat{N}_p$ em autovalores que são os extremos da curvatura normal em p , ou seja, tal que $d\hat{N}_p(\hat{e}_1) = -k_1\hat{e}_1$ e $d\hat{N}_p(\hat{e}_2) = -k_2\hat{e}_2$. Desse modo, temos que:

$$d\hat{N}_p = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Assim, finalmente podemos apresentar a curvatura Gaussiana K de uma superfície num ponto p . Por definição, é dada como:

$$K = \det(d\hat{N}_p) = k_1 k_2 \quad (6.20)$$

Ademais, definimos a curvatura média H num ponto $p \in S$ como:

$$H = -\frac{1}{2} \text{Tr}(d\hat{N}_p) = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (6.21)$$

6.5 O Teorema Egregium de Gauss

Neste tópico, falaremos sobre um dos mais notáveis e importantes teoremas da Geometria Diferencial: o Teorema Egregium de Gauss. Para tal, devemos antes fazer uma primeira introdução básica aos chamados símbolos de Christoffel.

Por hora, devemos entender que, para os nossos propósitos nesta seção, um símbolo de Christoffel do tipo Γ_{jk}^i significará a componente em i da derivada de um vetor de base \hat{e}_j em relação à coordenada x^k do sistema de coordenadas. Desse modo, para todo ponto p pertencente a uma superfície regular S parametrizada pela aplicação $X(u, v): U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, definiremos um Triedro de Frenet composto pelos vetores de base $\{\vec{X}_u, \vec{X}_v, \hat{N}\}$ em p , e poderemos calcular as derivadas desses vetores de base em relação às coordenadas u e v em função dos símbolos de Christoffel como segue:

$$\vec{X}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{X}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{X}_v + L_1 \hat{N} \quad (6.22)$$

$$\vec{X}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{X}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{X}_v + L_2 \hat{N} \quad (6.23)$$

$$\vec{X}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{X}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{X}_v + L_3 \hat{N} \quad (6.24)$$

$$\vec{X}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \vec{X}_u + \Gamma_{21}^2 \vec{X}_v + \bar{L}_3 \hat{N} \quad (6.25)$$

$$\vec{N}_u = a_{11} \vec{X}_u + a_{21} \vec{X}_v \quad (6.26)$$

$$\vec{N}_v = a_{12} \vec{X}_u + a_{22} \vec{X}_v \quad (6.27)$$

onde L_1, L_2, L_3 e \bar{L}_3 são constantes. Ocorre que os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices covariantes, ou seja, $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, de modo que as equações (6.24) e (6.25) são iguais. Queremos agora isolar os símbolos de Christoffel. Para isso, podemos tomar o produto interno das equações (6.22), (6.23) e (6.24) em relação a \vec{X}_u e \vec{X}_v . Cabe antes observar que

$$\frac{d}{du} \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle = E_u \Leftrightarrow \langle \vec{X}_{uu}, \vec{X}_u \rangle + \langle \vec{X}_u, \vec{X}_{uu} \rangle = E_u \Leftrightarrow 2 \langle \vec{X}_{uu}, \vec{X}_u \rangle = E_u, \quad (6.28)$$

como exemplo, pois o produto interno é comutativo. Agora sim, realizando os produtos internos mencionados, obteremos os três sistemas lineares seguintes:

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \vec{X}_{uu}, \vec{X}_u \rangle = E_u/2 \quad (6.29)$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \vec{X}_{uu}, \vec{X}_v \rangle = F_u - E_v/2 \quad (6.30)$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \vec{X}_{uv}, \vec{X}_u \rangle = E_v/2 \quad (6.31)$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \vec{X}_{uv}, \vec{X}_v \rangle = G_u/2 \quad (6.32)$$

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \vec{X}_{vv}, \vec{X}_u \rangle = F_v - G_u/2 \quad (6.33)$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \vec{X}_{vv}, \vec{X}_v \rangle = G_v/2 \quad (6.34)$$

Logo, é possível encontrar os símbolos de Christoffel conhecendo somente os coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas.

Uma vez obtidos os símbolos de Christoffel, pode-se demonstrar, como feito em Carmo (2012, p. 280), que a curvatura Gaussiana pode ser calculada através dos símbolos de Christoffel na chamada fórmula de Gauss:

$$K = \frac{1}{E} [(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2] \quad (6.35)$$

Essa fórmula possui um significado profundo dentro da Geometria Diferencial, sendo uma prova do **Teorema Egregium de Gauss**, segundo o qual a curvatura Gaussiana K de uma superfície é uma propriedade intrínseca à superfície. Ou seja, podemos calcular K somente com os coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas, que culminam nos símbolos de Christoffel, e assim não há necessidade de fazer menção ao espaço do \mathbb{R}^3 . Isso representa um marco do que podemos chamar de geometria intrínseca.

6.6 Derivada covariante e transporte paralelo

Os assuntos tratados agora serão brevemente apresentados sob uma perspectiva geométrica, mas serão retomados mais a frente sob uma perspectiva algébrica através do Cálculo Tensorial.

Começemos então com a ideia de derivada covariante. A derivada covariante de um vetor tangente a uma superfície S pode ser pensada como a taxa de variação de tal vetor como

“vista por alguém inserido em S ”, isto é, de maneira intrínseca à superfície, de modo que devemos tomar somente vetores tangentes à superfície (essa idéia poderá ficar mais clara ao retomarmos o assunto em Cálculo Tensorial). Assim, seja uma curva $\alpha(t)$ e seja um vetor tangente a ela $\vec{w}(t) \in T_p S$ num ponto p de S . A derivada covariante de $\vec{w}(t)$, geometricamente, é definida como a projeção da derivada desse vetor em relação ao parâmetro t sobre o plano tangente $T_p S$, e é denotada por $D\vec{w}(t)/dt$. A Fig. 6.6 ilustra esse caso.

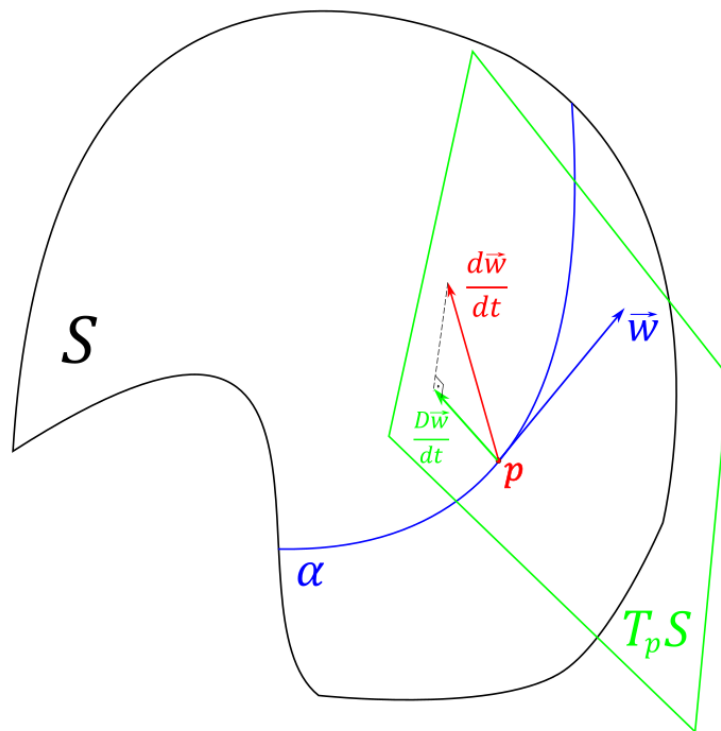


Figura 6.6: Exemplo de derivada covariante de um vetor $\vec{w}(t) \in T_p S$ numa superfície S .

Fonte: autoria própria.

Se tomarmos um campo de vetores restrito a uma curva $\alpha(t)$ e tangentes à superfície S dado por $\vec{w}(t)$ e escrevê-lo na base associada a $X(u, v)$, teremos que $\vec{w}(t) = a(t)\vec{X}_u + b(t)\vec{X}_v$, onde a e b são as componentes em função de t . Desse modo, tomando a derivada em relação a t , obtemos:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = a(\vec{X}_{uu}u' + \vec{X}_{uv}v') + b(\vec{X}_{vu}u' + \vec{X}_{vv}v') + a'\vec{X}_u + b'\vec{X}_v \quad (6.36)$$

Como $D\vec{w}/dt$ é a projeção de $d\vec{w}/dt$ sobre o plano tangente $T_p S$, temos que, para realizar tal projeção, basta escrever X_{uu} , X_{vv} e X_{vu} na eq. (6.36) utilizando as equações (6.22), (6.23) e (6.25), respectivamente, mas desconsiderando a componente normal \hat{N} . Assim, podemos obter a derivada covariante também em função dos símbolos de Christoffel [2]:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{w}}{dt} = & (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')\vec{X}_u + \\ & + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')\vec{X}_v \end{aligned} \quad (6.37)$$

Agora, para definirmos o conceito de transporte paralelo, vejamos primeiramente o conceito de paralelo: seja uma curva parametrizada $\gamma(t)$; se um campo de vetores $\vec{w}(t)$ composto a essa curva for tal que $D\vec{w}(t)/dt = 0$ para todo t , temos que $\vec{w}(t)$ representa um paralelo, ou um **campo de vetores paralelos**. Um exemplo disso pode ser visto na Fig. 6.7 abaixo.

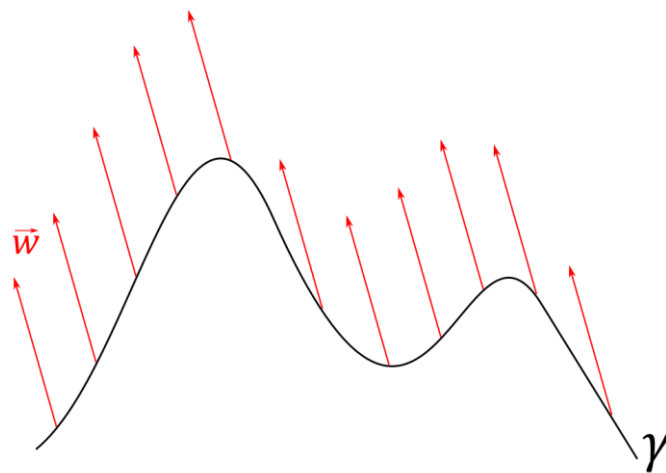


Fig. 6.7: Exemplo de um campo de vetores paralelos \vec{w} numa curva plana γ . Fonte: autoria própria.

Com isso, seja um campo de vetores paralelos $\vec{w}(t)$ composto com uma curva parametrizada $\alpha(t): I \rightarrow S$ e sejam os vetores $\vec{w}_0 = \vec{w}(t_0) \in T_{\alpha(t_0)}S$ e $\vec{w}_1 = \vec{w}(t_1) \in T_{\alpha(t_1)}S$. Dizemos que o vetor \vec{w}_1 é o **transporte paralelo** de \vec{w}_0 ao longo de α no ponto $\alpha(t_1)$. O transporte paralelo é de grande significância para definir se uma dada superfície possui curvatura e para comparar vetores num espaço curvo. Como exemplo, podemos tomar a superfície S^2 de uma esfera unitária e um vetor \vec{w}_0 localizado num dos pólos e pertencente à superfície tangente à S no pólo; se tomarmos uma curva fechada $\alpha(t): I \rightarrow S^2$, com $t \in [t_0, t_1]$, regular por partes tal que ela seja composta por 1/4 de grande círculo, 1/4 de equador e 1/4 de outro grande círculo, como mostra a Fig. 6.8, e quisermos fazer o transporte paralelo do vetor \vec{w}_0 ao longo de toda a curva, mantendo o mesmo ângulo θ entre \vec{w}_0 e os vetores tangentes à curva $\alpha(t)$ em cada ponto, obteremos ao final o vetor \vec{w}_1 , que acaba sendo diferente do vetor inicial \vec{w}_0 . A curvatura pode ser então entendida como um efeito que provoca essa diferença de direção entre os vetores \vec{w}_0 e \vec{w}_1 após realizado o transporte paralelo.

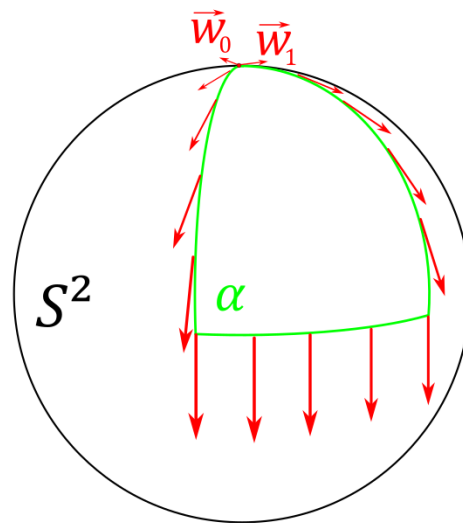


Figura 6.8: Exemplo de transporte paralelo ao longo de uma curva $\alpha(t)$ numa superfície S^2 . Fonte: autoria própria.

6.7 Geodésicas

Num plano, a curva de comprimento mínimo que conecta dois pontos é dada por uma reta que intersecta tais pontos. Assim, numa superfície regular qualquer, é natural se perguntar qual curva cumpriria o mesmo papel de uma reta no plano. Tal curva é chamada geodésica. Como exemplo, podemos tomar novamente a superfície S^2 de uma esfera unitária. Temos que quaisquer dois pontos dessa superfície podem ser conectados com distância mínima por uma curva que pertence ao grande círculo que intersecta tais pontos, ou seja, os grandes círculos são as geodésicas da superfície esférica, como ilustra a Fig. 6.9.

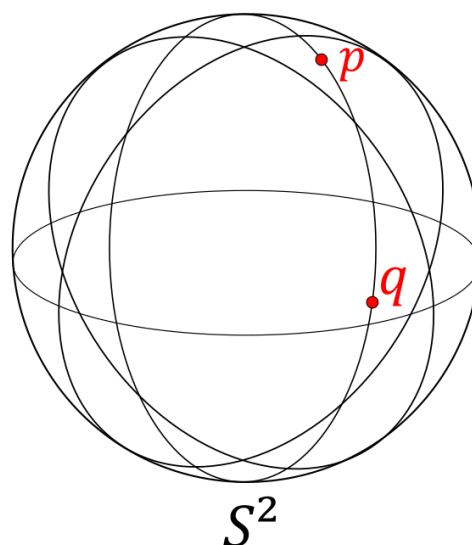


Figura 6.9: Geodésicas numa superfície esférica. Fonte: autoria própria.

Utilizando o conceito de derivada covariante, pode-se mostrar que uma curva $\gamma(t): I \rightarrow S$ é uma geodésica se seu campo de vetores tangente é um campo de vetores paralelos, ou seja, se a derivada covariante de seu campo de vetores tangentes é nula: $D\gamma'(t)/dt = 0$.

Um tratamento algébrico será dado mais a frente às geodésicas quando falarmos sobre Cálculo Tensorial.

6.8 Variedades Riemannianas

As superfícies e os estudos que fizemos sobre elas até o momento, se prestado atenção, dependem basicamente da possibilidade de realizarmos diferenciação e definirmos um produto interno no nosso conjunto S , que é a superfície. Assim, assegurando a diferenciabilidade e o produto interno a um dado conjunto, podemos deixar de fazer menção ao espaço do \mathbb{R}^3 para definirmos as chamadas superfícies abstratas. Algo interessante sobre tais superfícies é que, quando tentamos fazer a imagem delas no \mathbb{R}^3 através de uma operação chamada imersão, elas geralmente possuem auto-interseções, tal como ocorre com a Garrafa de Klein, por exemplo.

Contudo, um conjunto particular das superfícies abstratas nos chama maior atenção: as variedades Riemannianas de dimensão 2. Elas são definidas como superfícies abstratas S para as quais há a definição de uma métrica Riemanniana, que é basicamente a definição de um produto interno diferenciável nos planos tangentes à S em qualquer ponto $p \in S$. Isto é, seja uma parametrização $X: U(u, v) \rightarrow S$, definimos as funções:

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle \quad (6.38)$$

$$F(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \quad (6.39)$$

$$G(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \quad (6.40)$$

que são análogas aos coeficientes da primeira forma fundamental que estudamos e onde as derivadas parciais em relação às variáveis u e v são vistas como operadores que serão aplicados a uma parametrização X e retornarão vetores. Podemos aplicar todos os conceitos estudados até agora em superfícies regulares, tais como Curvatura Gaussiana, derivadas covariantes, transporte paralelo e geodésicas às variedades Riemannianas bidimensionais.

Porém, algo ainda mais interessante, e que é de fato utilizado na Teoria da Relatividade Geral, é uma generalização dessas superfícies Riemannianas para N dimensões, a chamada variedade Riemanniana N -dimensional M . De modo semelhante ao que fizemos para 2

dimensões, dizemos que M é munida de um produto interno diferenciável em cada espaço tangente $T_p M$, para todo $p \in M$, de modo que temos o chamado tensor métrico, definido por:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle \quad (6.41)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, N$.

As ideias desenvolvidas no estudo das superfícies regulares anteriormente, embora sirvam de importante base teórica, não são tão aplicáveis diretamente às variedades Riemannianas N -dimensionais M , para $N > 3$, necessitando de uma formulação mais rigorosa obtida através do Cálculo Tensorial, como veremos ao longo das seções seguintes.

7 NOÇÕES DE CÁLCULO TENSORIAL

Como visto na seção 2.1, tensores são objetos matemáticos invariantes por mudanças de sistemas de coordenadas. Eles são objeto de estudo do chamado Cálculo Tensorial, área da matemática desenvolvida por matemáticos como Riemann, Ricci e Levi-Civita [3]. Agora, iremos explorar o formalismo do Cálculo Tensorial mais a fundo.

7.1 Tensores

7.1.1 Tensores de rank 0: Escalares

Escalares são grandezas por si só invariantes sob mudanças de sistemas de coordenadas num mesmo referencial, independentemente da base vetorial utilizada para descrever o sistema de coordenadas, haja vista que a temperatura num ponto do espaço deva ser a mesma medida para qualquer sistema de coordenadas, por exemplo. Cabe destacar que isso é válido para um mesmo referencial pois, no caso de referenciais inerciais a diferentes velocidades um em relação ao outro, por exemplo, devemos usar as transformações de Lorentz para descrever escalares como intervalo de tempo e comprimento, de modo que tais escalares possuem diferentes valores para diferentes referenciais.

7.1.2 Tensores de rank 1: Vetores

Um vetor é um tensor de ordem 1, pois é definido por um único índice. Como exemplo, um vetor do plano cartesiano pode ser representado por $V^i = (V^1, V^2)$, sendo V^1 e V^2 as componentes de V sobre os eixos coordenados. Tais componentes, num sistema cartesiano, são obtidas ao projetar o vetor sobre os eixos. Porém, não precisamos sempre trabalhar com um sistema cartesiano ortogonal como este. Podemos utilizar, ao invés, sistemas cujas bases são vetores não ortogonais entre si que formam um sistema oblíquo de coordenadas. Um vetor V pode ser representado por $V = V^i e_i$, com suas componentes contravariantes, ou por $V = V_i e^i$, com suas componentes covariantes. Sejam os sistemas de coordenadas $X(x^i)$ e $\bar{X}(\bar{x}^i)$, as leis de transformação desse vetor em sua forma contravariante e covariante são dadas, respectivamente, por

$$\bar{V}^i = V^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \quad (7.1)$$

e por

$$\bar{V}_i = V_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \quad (7.2)$$

7.1.3 Tensores de rank 2

Um tensor de rank 2 pode ter seus dois índices contravariantes, covariantes ou um de cada, isto é, ele pode ter os ranks (2,0), (0,2) ou (1,1), sendo assim representado, respectivamente, por T^{ij} , T_{ij} ou T_j^i num sistema de coordenadas $X(x^i)$. O tensor da forma T_j^i é um exemplo de tensor misto, pois possui índices tanto contravariantes como covariantes. Sejam os sistemas de coordenadas $X(x^i)$ e $\bar{X}(\bar{x}^i)$, a lei de transformação desses tensores é dada, respectivamente, por:

$$\bar{T}^{ij} = T^{pq} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \quad (7.3)$$

$$\bar{T}_{ij} = T_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \quad (7.4)$$

$$\bar{T}_j^i = T_q^p \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \quad (7.5)$$

7.1.3.1 Tensor métrico

O tensor métrico, já apresentado brevemente na seção 2.1.4, possui informações sobre como realizar medidas de comprimento num dado sistema de coordenadas adotado num dado espaço. No caso do tensor métrico covariante g_{ij} , cada componente sua é calculada a partir do produto escalar entre os vetores de base \mathbf{g}_i de um dado sistema de coordenadas, isto é:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (7.6)$$

O tensor métrico contravariante g^{ij} é obtido da mesma forma ao realizar o produto escalar entre seus vetores de base \mathbf{g}^i . Ocorre que podemos obter as componentes do tensor métrico contravariante ao tomar o inverso das componentes do tensor métrico covariante, isto é: $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$.

Como o produto escalar é comutativo, temos que o tensor métrico é simétrico, isto é:

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (7.7)$$

Se o sistema de coordenadas adotado é ortogonal, temos que o tensor métrico é diagonal, tendo em vista que, nesse caso, $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_{ij}$. Como exemplo, seja o espaço euclidiano E_3 ;

temos então que os tensores métricos para coordenadas cartesianas (x, y, z) , cilíndricas (r, θ, z) e esféricas (r, θ, ϕ) , onde ϕ é o ângulo azimutal, são dados, respectivamente, por:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

7.1.4 Tensor de rank (m, n)

Seja um tensor $\mathbf{T} = [T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m}]$ representado num sistema de coordenadas $X(x^i)$. Se quisermos representá-lo num sistema de coordenadas $\bar{X}(\bar{x}^i)$, sua lei de transformação é dada por:

$$\bar{T}_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = T_{q_1 q_2 \dots q_n}^{p_1 p_2 \dots p_m} \frac{\bar{x}^{i_1}}{x^{p_1}} \frac{\bar{x}^{i_2}}{x^{p_2}} \dots \frac{\bar{x}^{i_{m-1}}}{x^{p_{m-1}}} \frac{\bar{x}^{i_m}}{x^{p_m}} \frac{x^{q_1}}{\bar{x}^{j_1}} \frac{x^{q_2}}{\bar{x}^{j_2}} \dots \frac{x^{q_{n-1}}}{\bar{x}^{j_{n-1}}} \frac{x^{q_n}}{\bar{x}^{j_n}} \quad (7.11)$$

7.2 Operações básicas com tensores

7.2.1 Soma e subtração

Sejam os tensores $\mathbf{A} = [A_{lmn\dots}^{ijk\dots}]$ e $\mathbf{B} = [B_{xyz\dots}^{uvw\dots}]$ de mesmo rank (a, b) . Temos que a soma ou subtração entre eles resulta num tensor de mesmo rank cujos componentes são obtidos ao somar ou subtrair os componentes de cada tensor com mesmos índices, isto é:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = [A_{\mu\nu\xi\dots}^{\alpha\beta\gamma\dots} \pm B_{\mu\nu\xi\dots}^{\alpha\beta\gamma\dots}] = [C_{\mu\nu\xi\dots}^{\alpha\beta\gamma\dots}] \quad (7.12)$$

7.2.2 Produto tensorial

Sejam os tensores $\mathbf{A} = [A_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m}]$ e $\mathbf{B} = [B_{q_1 q_2 \dots q_s}^{p_1 p_2 \dots p_r}]$ de ordem (m, n) e (r, s) , respectivamente. O produto tensorial entre eles é obtido ao realizar todas as combinações possíveis de produto entre as componentes de \mathbf{A} e \mathbf{B} , de modo que obtemos o seguinte tensor de ordem $(m + r, n + s)$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [A_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} B_{q_1 q_2 \dots q_s}^{p_1 p_2 \dots p_r}] = [C_{j_1 j_2 \dots j_n q_1 q_2 \dots q_s}^{i_1 i_2 \dots i_m p_1 p_2 \dots p_r}] \quad (7.13)$$

7.2.3 Contração de um tensor

Seja um tensor $\mathbf{A} = [A_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m}]$ de rank (m, n) . Sua contração é obtida ao tomarmos dois índices, um contravariante e um covariante, como iguais, isto é, $i_p = j_p = k$. Assim, devemos utilizar a convenção do somatório de Einstein e somar os N termos ao longo de $i_p = j_p = 1, 2, 3, \dots, N$, onde N é a dimensão do tensor. Desse modo, obtemos o seguinte tensor de rank $(m - 1, n - 1)$ como resultado dessa contração:

$$\mathbf{T} = [A_{j_1 j_2 \dots k \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots k \dots i_m}] = A_{j_1 j_2 \dots 1 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots 1 \dots i_m} + A_{j_1 j_2 \dots 2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots 2 \dots i_m} + \dots + A_{j_1 j_2 \dots N \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots N \dots i_m} = [T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m}] \quad (7.14)$$

7.2.4 Divergente de um Tensor

Seja um tensor $\mathbf{A} = [A_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m}]$ de rank (m, n) e o operador diferencial ∂_p . O divergente de \mathbf{A} em relação ao índice p é obtido ao realizar a contração de um dos índices de \mathbf{A} com o índice p de ∂_p , de modo que obtemos um tensor de rank $(m - 1, n)$ ou $(m, n - 1)$. O mesmo ocorre para o operador D_p , que será apresentado na seção 7.3.3.

7.3 Derivada covariante

7.3.1 Definição

Como visto anteriormente quando foi tratado da Geometria Diferencial, a derivada covariante de um vetor pertencente ao plano tangente de uma superfície num ponto era a projeção da derivada desse vetor sobre o plano tangente, ou seja, é a derivada “como vista da superfície” sem que seja necessário sair dessa superfície ou de seu plano tangente para descrever tal derivada. Porém, dependendo do sistema de coordenadas utilizado para descrever tal vetor, podemos obter diferentes derivadas para ele. Como exemplo, seja os campos de vetores $\vec{u}(t) = u\hat{x}(t)$ e $\vec{v}(t) = v\hat{r}(t)$ definidos em R^2 , dados em coordenadas polares e ilustrados na Fig. 7.1.

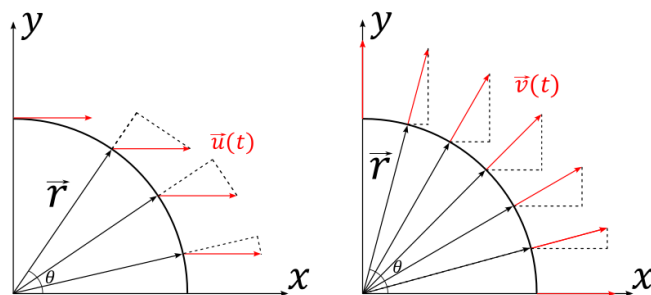


Figura 7.1: Campos de vetores $\vec{u}(t)$ e $\vec{v}(t)$ descritos em coordenadas polares como exemplo de variância da derivada em relação a diferentes sistemas de coordenadas. Fonte: autoria própria.

Conforme mostra a figura, temos que o vetor $\vec{u} = u\hat{x}(t)$ é constante em módulo e direção, mas é variável segundo as coordenadas polares, pois sua componente radial muda. Por outro lado, o vetor $\vec{v} = v\hat{r}(t)$ possui módulo constante e direções radiais diferentes, sendo visto como constante pelas coordenadas polares, mas variando de acordo com as coordenadas cartesianas. Assim, a derivada desses vetores está diretamente relacionada ao sistema de coordenadas utilizado para descrevê-los. Isso mostra a necessidade da formulação de uma derivada que seja igual para quaisquer sistemas de coordenadas, que é o objetivo da formulação de uma derivada covariante.

7.3.2 Derivada dos vetores de base e Símbolos de Christoffel

Sejam o sistema de coordenadas cartesiano $X^i(x^i)$ e o sistema de coordenadas curvilíneas $\bar{X}^i(\bar{x}^i)$ cujos vetores unitários de base são \mathbf{e}_i e \mathbf{g}_i , com $i = 1, 2, 3$, respectivamente. Sendo vetores unitários, podemos dizer que \mathbf{g}_i são a expressão dos vetores \mathbf{e}_i na base \bar{X}^i , de maneira que, aplicando a lei de transformação dos vetores, temos que:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \mathbf{e}_j \quad (7.15)$$

e de modo contrário para expressar \mathbf{e}_i em termos dos vetores da base curvilínea:

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \mathbf{g}_k \quad (7.16)$$

Derivando \mathbf{g}_i em relação a \bar{x}^l , temos que:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^l} \mathbf{e}_j \quad (7.17)$$

na qual podemos substituir \mathbf{e}_j por sua expressão na eq. (7.16) e obter:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^l} \mathbf{g}_k \quad (7.18)$$

Ou seja, podemos escrever a derivada de um vetor de base em coordenadas curvilíneas em função dos vetores de base desse mesmo sistema, de modo que isso representa uma derivada covariante. Definimos então os símbolos de Christoffel [3]:

$$\Gamma_{il}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^l} \quad (7.19)$$

com os quais podemos reescrever a eq. (7.18) na seguinte forma linear:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \bar{x}^l} = \Gamma_{il}^k \mathbf{g}_k \quad (7.20)$$

Cabe observar que, devido ao teorema de Schwartz, ao realizarmos a troca mútua de índices $i \leftrightarrow j$ na eq. (7.19), teremos o mesmo resultado, isto é:

$$\Gamma_{il}^k = \Gamma_{li}^k \quad (7.21)$$

pois a ordem da derivação em relação a \bar{x}^i ou \bar{x}^l não altera o resultado.

De modo semelhante, pode-se mostrar que a derivada covariante de um vetor de base contravariante é dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial \bar{x}^l} = -\Gamma_{kl}^i \mathbf{g}^k \quad (7.22)$$

onde os símbolos de Christoffel Γ_{kl}^i podem ser obtidos da eq. (7.19) ao realizar a troca mútua de índices $i \leftrightarrow k$.

Para explorarmos melhor os símbolos de Christoffel, consideremos escrever os vetores de base do sistema de coordenadas curvilíneas em sua forma contravariante: $\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j$. Derivando ambos os lados dessa equação em relação a \bar{x}^l , temos que:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} (g_{ij} \mathbf{g}^j) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^l} \mathbf{g}^j + g_{ij} \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial \bar{x}^l} \quad (7.23)$$

Aplicando as equações (7.20) e (7.22) aos termos dessa equação, obtemos:

$$\Gamma_{il}^k \hat{\mathbf{g}}_k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^l} \mathbf{g}^j - g_{ij} \Gamma_{kl}^j \mathbf{g}^k \quad (7.24)$$

Aplicando o produto escalar com \mathbf{g}^m de ambos os lados dessa equação, ficamos com:

$$\Gamma_{il}^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^m = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^l} \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}^m - g_{ij} \Gamma_{kl}^j \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^m \quad (7.25)$$

onde podemos utilizar o fato de que $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$ e $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ij}$ e escrever

$$\Gamma_{il}^k \delta_k^m = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^l} g^{jm} - g_{ij} \Gamma_{kl}^j g^{km} \Leftrightarrow \Gamma_{il}^m = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^l} g^{jm} - g_{ij} \Gamma_{kl}^j g^{km} \quad (7.26)$$

Multiplicando essa expressão por g_{mp} :

$$\begin{aligned} g_{mp} \Gamma_{il}^m &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^l} g_{mp} g^{jm} - g_{ij} \Gamma_{kl}^j g_{mp} g^{km} \\ g_{mp} \Gamma_{il}^m &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^l} \delta_p^j - g_{ij} \Gamma_{kl}^j \delta_p^k \end{aligned}$$

$$g_{mp}\Gamma_{il}^m = \frac{\partial g_{ip}}{\partial \bar{x}^l} - g_{ij}\Gamma_{pl}^j$$

$$g_{mp}\Gamma_{il}^m + g_{ij}\Gamma_{pl}^j = \frac{\partial g_{ip}}{\partial \bar{x}^l} \quad (7.27)$$

Agora, realizando duas vezes de forma consecutiva a permutação cíclica dos índices p , i e l na eq. (7.27), obtemos as duas expressões seguintes:

$$g_{mi}\Gamma_{lp}^m + g_{lj}\Gamma_{ip}^j = \frac{\partial g_{li}}{\partial \bar{x}^p} \quad (7.28)$$

$$g_{mi}\Gamma_{pi}^m + g_{pj}\Gamma_{li}^j = \frac{\partial g_{pl}}{\partial \bar{x}^i} \quad (7.29)$$

Multiplicando a eq. (7.27) por $-1/2$ e as equações (7.28) e (7.29) por $1/2$ e somando, temos:

$$-\frac{1}{2}(g_{mp}\Gamma_{il}^m + g_{ij}\Gamma_{pl}^j) + \frac{1}{2}(g_{mi}\Gamma_{lp}^m + g_{lj}\Gamma_{ip}^j) + \frac{1}{2}(g_{mi}\Gamma_{pi}^m + g_{pj}\Gamma_{li}^j) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ip}}{\partial \bar{x}^l} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{li}}{\partial \bar{x}^p} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pl}}{\partial \bar{x}^i} \quad (7.30)$$

Realizando a troca de índice *dummy* $j \rightarrow m$ e utilizando as simetrias do tensor métrico e dos símbolos de Christoffel dados pelas equações (7.7) e (7.21), respectivamente, obtemos:

$$-\frac{1}{2}(g_{mp}\Gamma_{il}^m + g_{im}\Gamma_{pl}^m) + \frac{1}{2}(g_{im}\Gamma_{pl}^m + g_{lm}\Gamma_{ip}^m) + \frac{1}{2}(g_{lm}\Gamma_{ip}^m + g_{mp}\Gamma_{il}^m) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pl}}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial \bar{x}^p} - \frac{\partial g_{ip}}{\partial \bar{x}^l}\right) \quad (7.31)$$

onde podemos cancelar maioria dos termos do lado esquerdo da equação, resultando em:

$$g_{lm}\Gamma_{ip}^m = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pl}}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial \bar{x}^p} - \frac{\partial g_{ip}}{\partial \bar{x}^l}\right) \quad (7.32)$$

Por fim, podemos multiplicar ambos os lados dessa equação por g^{lk} e, assim, tomar o delta de Kronecker δ_m^k resultante no lado esquerdo da equação, obtendo então:

$$\Gamma_{ip}^k = \frac{g^{lk}}{2}\left(\frac{\partial g_{pl}}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial \bar{x}^p} - \frac{\partial g_{ip}}{\partial \bar{x}^l}\right) \quad (7.33)$$

Por fim, realizando as trocas de índices $p \rightarrow j$ e $k \leftrightarrow l$ somente para uma disposição mais ordenada dos índices, temos:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{g^{kl}}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^k} \right) \quad (7.34)$$

a qual representa os símbolos de Christoffel do 2º tipo em termos das componentes do tensor métrico e suas derivadas. Temos ainda que o termo em parênteses representa os chamados símbolos de Christoffel do 1º tipo:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^k} \right) \quad (7.35)$$

7.3.3 Derivada covariante de tensores

Agora que vimos como surgem os símbolos de Christoffel, podemos usá-los para chegar a expressões para a derivada covariante de tensores. Como feito na seção 6.6, representaremos a derivada covariante pelo operador $D/dx^k = D_k$, onde x^k é uma coordenada qualquer.

Primeiramente, temos que a derivada covariante de um escalar é igual à derivada parcial desse escalar, pois um escalar independe do sistema de coordenadas utilizado. Assim, vamos calcular então a derivada covariante de um vetor contravariante $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i$. Derivando em relação a uma coordenada x^k , temos o seguinte:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (u^i \mathbf{g}_i) = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \mathbf{g}_i + u^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^k} \quad (7.36)$$

Utilizando a eq. (7.20), onde trocamos \bar{x} por x , nessa equação, temos que:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \mathbf{g}_i + u^i \Gamma_{ik}^j \mathbf{g}_j \quad (7.37)$$

e realizando a troca mútua de índices *dummy* $i \leftrightarrow j$ do segundo termo a direita, podemos colocar \mathbf{g}_i em evidência:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + u^j \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{g}_i \quad (7.38)$$

onde o termo entre parênteses, que difere da derivada parcial dos componentes u^i somente, é a derivada covariante das componentes u^i :

$$D_k u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + u^j \Gamma_{jk}^i \quad (7.39)$$

Realizando o mesmo passo-a-passo para o vetor covariante $\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i$, mas utilizando a eq. (7.22) ao invés da eq. (7.20) para denotar a derivada parcial de \mathbf{g}^i em relação a x^k , é possível mostrar que:

$$D_k u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - u_j \Gamma_{ik}^j \quad (7.40)$$

Seja o tensor \mathbf{T} , dado em sua forma contravariante por $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ e sua forma covariante $\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$. Do mesmo modo que fizemos para o vetor \mathbf{u} , pode-se mostrar que a derivada covariante de seus componentes contravariantes e covariantes são dados, respectivamente, por:

$$D_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + T^{mj} \Gamma_{mk}^i + T^{im} \Gamma_{mk}^j \quad (7.41)$$

$$D_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - T_{mj} \Gamma_{ik}^m - T_{im} \Gamma_{jk}^m \quad (7.42)$$

Assim, com as equações (7.39), (7.40), (7.41) e (7.42), percebemos um padrão na expressão da derivada covariante de um tensor em relação a índices contravariantes e covariantes. Podemos utilizar tal padrão, como feito em FILHO (2016, p. 106) para expressar a derivada covariante de tensores mistos de rank qualquer. Como exemplo, que será importante para a seção 7.4, pode-se mostrar que a derivada covariante de um tensor T_{ijk}^m de rank (1,3) é dada por:

$$D_p T_{ijk}^m = \frac{\partial T_{ijk}^m}{\partial x^p} + T_{ijk}^l \Gamma_{lp}^m - T_{ijk}^m \Gamma_{ip}^l - T_{ilk}^m \Gamma_{jp}^l - T_{ijl}^m \Gamma_{kp}^l \quad (7.43)$$

Por fim, voltando ao assunto do tensor métrico, pode-se verificar que sua derivada covariante é nula, algo que é chamado de compatibilidade da métrica, de maneira que, a partir da eq. (7.42), temos que:

$$D_k g_{ij} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{mj} \Gamma_{ik}^m + g_{im} \Gamma_{jk}^m \quad (7.44)$$

7.4 Espaços de Riemann

7.4.1 Introdução

Como vimos na seção 6.8, um espaço de Riemann E_N é um espaço N -dimensional dotado de um tensor métrico cujas componentes são obtidas ao realizar o produto escalar entre operadores de derivação parcial em relação a dadas coordenadas, os quais operam sobre uma dada parametrização X . De modo análogo, para tratarmos das variedades Riemannianas com o formalismo do Cálculo Tensorial, definimos o espaço dotado de vetores de base covariante \mathbf{g}_i

e vetores de base contravariante \mathbf{g}^i , os quais definem as componentes do tensor métrico covariante como sendo $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ e do contravariante como sendo $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$. Com isso, nessa seção, será explorada principalmente a generalização da ideia de curvatura Gaussiana de superfícies à curvatura das variedades Riemannianas, que ocorre a partir da definição do tensor de curvatura.

7.4.2 Tensor de Curvatura

A obtenção do chamado Tensor de Curvatura é de suma importância para o desenvolvimento das equações de campo de Einstein. A partir dele, temos uma forma de generalizar a curvatura intrínseca de uma superfície, a Curvatura Gaussiana, para um espaço de Riemann. Há várias formas de obter esse tensor, tal com o formalismo como fizeram Ricci, Levi-Civita e Christoffel [3]. Para a demonstração aqui apresentada, partiremos de um teorema bastante conhecido do Cálculo Diferencial, o teorema de Schwartz, segundo o qual, seja uma função $f(x, y)$ de classe C^2 , temos que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y \partial x} \quad (7.45)$$

Esse teorema é verificado para funções escalares definidas num sistema de coordenadas cartesiano. Entretanto, para sistemas de coordenadas curvilíneas, isso geralmente não ocorre. Assim, não devemos pensar que o teorema de Schwartz possa ser estendido para derivadas covariantes de tensores de um modo geral. Para verificar a possível diferença que resulta ao mudarmos a ordem de diferenciação de um tensor, comecemos com a derivada covariante das componentes covariantes de um vetor \mathbf{u} :

$$D_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_m \Gamma_{ij}^m = T_{ij} \quad (7.46)$$

onde escrevemos a derivada covariante como um tensor T_{ij} para facilitar os cálculos subsequentes. Derivando novamente, agora com relação à variável x^k , obtemos:

$$D_k D_j u_i = D_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - T_{nj} \Gamma_{ik}^n - T_{in} \Gamma_{jk}^n \quad (7.47)$$

na qual podemos substituir utilizar a eq. (7.46) para reescrever as componentes do tensor \mathbf{T} como segue:

$$D_k D_j u_i = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_m \Gamma_{ij}^m \right) - \left(\frac{\partial u_n}{\partial x^j} - u_m \Gamma_{nj}^m \right) \Gamma_{ik}^n - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^n} - u_m \Gamma_{in}^m \right) \Gamma_{jk}^n \quad (7.48)$$

Desenvolvendo melhor essa expressão, obtemos:

$$D_k D_j u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial u_m}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^m - u_m \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} - \frac{\partial u_n}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^n + u_m \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ik}^n + \frac{\partial u_i}{\partial x^n} \Gamma_{jk}^n + u_m \Gamma_{in}^m \Gamma_{jk}^n \quad (7.49)$$

Porém, suponhamos que tivéssemos primeiro tomado a derivada covariante das componentes de \mathbf{u} em relação à variável x^k e depois em relação à variável x^j . Podemos facilmente obter esse resultado simplesmente realizando a troca mútua de índices $j \leftrightarrow k$ na eq. (7.49), obtendo:

$$D_j D_k u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial u_m}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^m - u_m \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial u_n}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^n + u_m \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ij}^n + \frac{\partial u_i}{\partial x^n} \Gamma_{kj}^n + u_m \Gamma_{in}^m \Gamma_{kj}^n \quad (7.50)$$

De modo a comparar a diferença entre os resultados para as duas ordens de diferenciação em relação a x^j e x^k , podemos subtrair a eq. (7.50) da eq. (7.49), obtendo assim:

$$\begin{aligned} D_k D_j u_i - D_j D_k u_i &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial u_m}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^m - u_m \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} - \frac{\partial u_n}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^n + \\ &+ u_m \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ik}^n - \frac{\partial u_i}{\partial x^n} \Gamma_{jk}^n + u_m \Gamma_{in}^m \Gamma_{jk}^n - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j \partial x^k} + \\ &+ \frac{\partial u_m}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^m + u_m \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} + \frac{\partial u_n}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^n - u_m \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ij}^n + \\ &+ \frac{\partial u_i}{\partial x^n} \Gamma_{kj}^n - u_m \Gamma_{in}^m \Gamma_{kj}^n \end{aligned} \quad (7.51)$$

Para as derivadas parciais segundas, é válido o teorema de Schwartz, de modo que elas se cancelam na eq. (7.51). Realizando trocas de índice *dummy* $n \rightarrow m$ em alguns termos da eq. (7.51) e utilizando a simetria dos símbolos de Christoffel dada pela eq. (7.21), podemos simplificar essa equação como:

$$D_k D_j u_i - D_j D_k u_i = u_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} + \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ik}^n - \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ij}^n \right) \quad (7.52)$$

Com essa expressão, o termo entre parênteses é então definido como o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel:

$$R_{ijk}^m = \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} + \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ik}^n - \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ij}^n \quad (7.53)$$

que acaba por ser um tensor misto de rank 4. A importância desse tensor está no fato de que, caso ele seja nulo, o teorema de Schwartz é válido para a derivada covariante, de modo que o espaço no qual ele foi calculado é plano; caso contrário, ele é curvo.

7.4.3 Identidades de Bianchi

Desenvolveremos agora duas identidades importantes envolvendo o tensor de curvatura, as chamadas identidades de Bianchi. A primeira delas é obtida de forma bastante direta ao utilizarmos a eq. (7.53) e realizar a permutação cíclica dos índices i , j e k , obtendo as duas expressões seguintes:

$$R_{jki}^m = \frac{\partial \Gamma_{ji}^m}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i} + \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ji}^n - \Gamma_{ni}^m \Gamma_{jk}^n \quad (7.54)$$

$$R_{jki}^m = \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial x^j} + \Gamma_{ni}^m \Gamma_{kj}^n - \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ki}^n \quad (7.55)$$

e então somando as equações (7.53), (7.54) e (7.55):

$$\begin{aligned} R_{ijk}^m + R_{jki}^m + R_{jki}^m &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} + \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ik}^n - \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ij}^n + \frac{\partial \Gamma_{ji}^m}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i} + \\ &+ \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ji}^n - \Gamma_{ni}^m \Gamma_{jk}^n + \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial x^j} + \Gamma_{ni}^m \Gamma_{kj}^n - \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ki}^n \end{aligned} \quad (7.56)$$

Prestando atenção agora aos símbolos de Christoffel, podemos utilizar suas propriedades de simetria dadas pela eq. (7.21) e reescrever alguns termos da eq. (7.56):

$$\begin{aligned} R_{ijk}^m + R_{jki}^m + R_{jki}^m &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} + \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ik}^n - \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ij}^n + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i} + \\ &+ \Gamma_{nk}^m \Gamma_{ij}^n - \Gamma_{ni}^m \Gamma_{jk}^n + \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} + \Gamma_{ni}^m \Gamma_{jk}^n - \Gamma_{nj}^m \Gamma_{ik}^n \end{aligned} \quad (7.57)$$

e assim cada termo do lado direito da equação tem um termo oposto, de maneira que a **primeira identidade de Bianchi** é obtida:

$$R_{ijk}^m + R_{jki}^m + R_{jki}^m = 0 \quad (7.58)$$

A obtenção da segunda identidade de Bianchi, entretanto, é mais trabalhosa, mas parte de um modo semelhante ao que acabamos de fazer. Utilizando a eq. (7.43) para tomar a derivada covariante da eq. (7.53) em relação a x^p , temos que:

$$D_p R_{ijk}^m = \frac{\partial R_{ijk}^m}{\partial x^p} + R_{ijk}^l \Gamma_{lp}^m - R_{ljk}^m \Gamma_{ip}^l - R_{ilk}^m \Gamma_{jp}^l - R_{ijl}^m \Gamma_{kp}^l \quad (7.59)$$

Realizando a permutação cíclica dos índices j , k e p , obtemos as duas expressões seguintes:

$$D_j R_{ikp}^m = \frac{\partial R_{ikp}^m}{\partial x^j} + R_{ikp}^l \Gamma_{lj}^m - R_{lkp}^m \Gamma_{ij}^l - R_{ilp}^m \Gamma_{kj}^l - R_{ikl}^m \Gamma_{pj}^l \quad (7.60)$$

$$D_k R_{ipj}^m = \frac{\partial R_{ipj}^m}{\partial x^k} + R_{ipj}^l \Gamma_{lk}^m - R_{lpj}^m \Gamma_{ik}^l - R_{ilj}^m \Gamma_{pk}^l - R_{ipl}^m \Gamma_{jk}^l \quad (7.61)$$

Somando as equações (7.59), (7.60) e (7.61), obtemos:

$$\begin{aligned} D_p R_{ijk}^m + D_j R_{ikp}^m + D_k R_{ipj}^m &= \frac{\partial R_{ijk}^m}{\partial x^p} + R_{ijk}^l \Gamma_{lp}^m - R_{ljk}^m \Gamma_{ip}^l - R_{ilk}^m \Gamma_{jp}^l + \\ &\quad - R_{ijl}^m \Gamma_{kp}^l + \frac{\partial R_{ikp}^m}{\partial x^j} + R_{ikp}^l \Gamma_{lj}^m - R_{lkp}^m \Gamma_{ij}^l + \\ &\quad - R_{ilp}^m \Gamma_{kj}^l - R_{ikl}^m \Gamma_{pj}^l + \frac{\partial R_{ipj}^m}{\partial x^k} + R_{ipj}^l \Gamma_{lk}^m + \\ &\quad - R_{lpj}^m \Gamma_{ik}^l - R_{ilj}^m \Gamma_{pk}^l - R_{ipl}^m \Gamma_{jk}^l \end{aligned} \quad (7.62)$$

Escrevendo cada tensor de curvatura que aparece nessa equação em termos dos símbolos de Christoffel conforme a equação (7.53) e desenvolvendo a expressão resultante utilizando ainda as propriedades de simetria do tensor de curvatura e dos símbolos de Christoffel, pode-se mostrar, como feito em FILHO (2016, p. 235), que a expressão resultante é a seguinte:

$$D_p R_{ijk}^m + D_j R_{ikp}^m + D_k R_{ipj}^m = 0 \quad (7.63)$$

a qual é chamada **segunda identidade de Bianchi**.

7.4.4 Tensor de Ricci e Tensor Escalar

Neste momento, serão definidos dois tensores de suma importância para a formulação do tensor de Einstein, como será visto posteriormente. O primeiro deles é o **tensor de Ricci**, que é obtido simplesmente ao realizar a contração do tensor de curvatura entre seu índice contravariante e um dos dois últimos índices covariantes, de modo que obtemos:

$$R_{ij}^m = R_{ij} \quad (7.64)$$

onde continuamos usando a letra R para representar o tensor de Ricci, sendo um abuso de notação. Utilizando a eq. (7.53), podemos escrever então o tensor de Ricci em termos dos símbolos de Christoffel como:

$$R_{ij} = R_{ijm}^m = \frac{\partial \Gamma_{im}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^m} + \Gamma_{nj}^m \Gamma_{im}^n - \Gamma_{nm}^m \Gamma_{ij}^n \quad (7.65)$$

Agora, realizando o produto do tensor de Ricci com o tensor métrico contravariante de mesmos índices, podemos obter o **tensor escalar**, também chamado curvatura escalar:

$$g^{ij} R_{ij} = R \quad (7.66)$$

onde novamente foi feito abuso de notação com o intuito de que a letra que representa o tensor continuar sendo a inicial de seu formulador.

Escrevendo o tensor de Ricci na forma de rank (1,1) através da subida de um de seus índices covariantes, temos:

$$g^{jk} R_{ij} = R_i^k \quad (7.67)$$

A partir disso, utilizando a segunda identidade de Bianchi, podemos obter uma relação interessante entre o divergente de R_i^k e o tensor escalar, que servirá como base para construção do tensor de Einstein. Assim, utilizando a antissimetria do tensor de curvatura ($R_{ikp}^m = -R_{ipk}^m$ e $R_{ipj}^m = -R_{ijp}^m$), podemos reescrever a eq. (7.63) como:

$$D_p R_{ijk}^m - D_j R_{ipk}^m - D_k R_{ijp}^m = 0 \quad (7.68)$$

Realizando a contração do tensor de curvatura entre os índices m e k na eq. (7.68), temos que:

$$D_p R_{ijm}^m - D_j R_{ipm}^m - D_m R_{ijp}^m = 0 \Leftrightarrow D_p R_{ij} - D_j R_{ip} - D_m R_{ijp}^m = 0 \quad (7.69)$$

Multiplicando essa expressão pelas componentes do tensor métrico g^{ij} de modo a termos o tensor de Ricci de rank (1,1) e o tensor escalar na expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} g^{ij} D_p R_{ij} - g^{ij} D_j R_{ip} - g^{ij} D_m R_{ijp}^m &= 0 \\ D_p R - D_j R_p^j - D_m R_p^m &= 0 \end{aligned} \quad (7.70)$$

Por meio da mudança de índice *dummy* $j \rightarrow m$, temos:

$$D_p R - D_m R_p^m - D_m R_p^m = 0 \Leftrightarrow D_p R - 2D_m R_p^m = 0 \quad (7.71)$$

Como o tensor R é um escalar, como o próprio nome diz, ocorre que sua derivada covariante em relação a x^p é igual à sua derivada parcial. Logo, isolando o termo do divergente do tensor de Ricci na eq. (7.71), obtemos a seguinte relação:

$$D_m R_p^m = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^p} \quad (7.72)$$

7.4.5 Tensor de Einstein

Chegamos finalmente a um dos tensores mais importantes na Relatividade Geral: o tensor de Einstein, o qual rege a geometria do espaço-tempo nas equações de campo, como veremos mais à frente. Para formulá-lo, utilizamos a eq. (7.72) e reescrevemos a derivada parcial de R como sua derivada covariante:

$$D_m R_p^m = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^p} \Leftrightarrow D_m R_p^m = \frac{1}{2} D_p R \Leftrightarrow D_m R_p^m - \frac{1}{2} D_p R = 0 \quad (7.73)$$

Podemos escrever a derivada covariante em relação a x^p utilizando o delta de Kronecker do seguinte modo: $D_p = D_m \delta_p^m$. Feito isso, é possível colocar a derivada covariante em relação a x^m em evidência:

$$D_m R_p^m - \frac{1}{2} D_m \delta_p^m R = 0 \Leftrightarrow D_m \left(R_p^m - \frac{1}{2} \delta_p^m R \right) = 0 \quad (7.74)$$

Chamamos então o termo entre parênteses de tensor de Einstein de rank (1,1), dado por:

$$G_p^m = R_p^m - \frac{1}{2} \delta_p^m R \quad (7.75)$$

cujos divergente é nulo, conforme a eq. (7.74). Nas equações de campo, entretanto, usamos ele com rank (0,2), de modo que podemos obtê-lo descendo o índice contravariante através do tensor métrico g_{mq} , como segue:

$$g_{mq} G_p^m = g_{mq} R_p^m - \frac{1}{2} g_{mq} \delta_p^m R \Leftrightarrow G_{pq} = R_{pq} - \frac{1}{2} \delta_{pq} R \quad (7.76)$$

O delta de Kronecker δ_{pq} , porém, é igual ao tensor métrico diagonal g_{pq} cujos termos são iguais a 1 para $p = q$. Tendo isso em vista e realizando a troca de índices $p \rightarrow \mu$ e $q \rightarrow \nu$ para obtermos o tensor de Einstein em sua forma mais convencional, temos:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \quad (7.77)$$

7.5 Geodésicas

Como visto na seção 6.7, as geodésicas definem caminhos de distância mais curta entre dois pontos numa dada superfície. Agora, expandiremos esse conceito para o espaço de Riemann utilizando o Cálculo Tensorial para obter uma expressão que nos dê as componentes parametrizadas da curva geodésica.

7.5.1 Equação da geodésica

Como a geodésica é uma curva que representa o caminho de menor distância entre dois pontos, podemos usar os métodos do Cálculo Variacional para obtê-la. Seja um sistema de coordenadas $X(x^i)$ num espaço de Riemann E_N e seja uma curva $\gamma(t)$ parametrizada por $t \in [t_A, t_B]$ entre dois pontos A e B , conforme a Fig. 7.1 ilustra de forma simplificada essa curva N -dimensional.

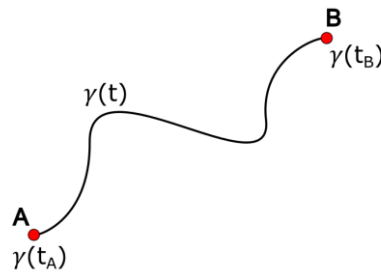


Fig. 7.1: Curva parametrizada entre dois pontos A e B .

Temos que a métrica para medidas de comprimento de arco nesse espaço é dada por:

$$(ds)^2 = g_{ij}dx^i dx^j \Rightarrow ds = \sqrt{|g_{ij}dx^i dx^j|} \quad (7.78)$$

Considerando que o tensor métrico g_{ij} é tal que $g_{ij}dx^i dx^j > 0$, de modo que podemos eliminar o módulo da eq. (7.77) (caso contrário, poderíamos tomar $|g_{ij}dx^i dx^j| = -g_{ij}dx^i dx^j$) para simplificar o desenvolvimento dos cálculos, obtemos:

$$ds = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j} \quad (7.79)$$

Como queremos medidas ao longo da nossa curva $\gamma(t)$, temos que $x^i = x^i(t)$, de maneira que $dx^i = (dx^i/dt)dt$, e o mesmo ocorre para dx^j . Logo, a eq. (7.79) torna-se:

$$ds = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} (dt)^2} \Leftrightarrow ds = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \quad (7.80)$$

Portanto, para obtermos a medida de distância entre os pontos A e B , basta integrarmos essa equação em ambos os lados de A a B , sendo $s' = 0$ para $t = t_A$ e $s' = s$ para $t = t_B$ (mudamos a variável muda $s \rightarrow s'$ no integrando para evitar confusão com o comprimento total s do limite de integração):

$$\int_0^s ds' = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \Leftrightarrow s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \quad (7.81)$$

Logo, podemos definir a função

$$F = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \quad (7.82)$$

que deve ser uma tal que minimize o comprimento de arco s , que nesse caso torna-se um funcional. Assim, fixando os pontos extremos da curva, A e B , devemos variar a curva $\gamma(t)$ tal que tenhamos aquela para a qual $\delta s = 0$, ou seja:

$$\delta s = \delta \int_{t_A}^{t_B} F dt = 0 \quad (7.83)$$

Usando o Cálculo Variacional, sabemos que a solução para F é tal que ela satisfaça as N equações de Euler Lagrange seguintes (a demonstração disso pode ser vista na seção 2.2):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^p} = 0 \quad (7.84)$$

onde \dot{x}^i representa a derivada de x^i em relação ao parâmetro t . Assim, vamos primeiro calcular cada termo dessas equações separadamente. Para $\partial F / \partial \dot{x}^p$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^p} \left(\sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \right) = \frac{1}{2F} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^p} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) = \\ &= \frac{g_{ij}}{2F} \left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{x}^p} \dot{x}^j + \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{x}^p} \right) = \frac{g_{ij}}{2F} (\delta_p^i \dot{x}^j + \dot{x}^i \delta_p^j) = \frac{1}{2F} (g_{ij} \delta_p^i \dot{x}^j + \dot{x}^i g_{ij} \delta_p^j) \end{aligned} \quad (7.85)$$

onde usamos o fato de que g_{ij} não é função de \dot{x}^p , além de que \dot{x}^i também não é função de \dot{x}^p e assim pudemos expressar o delta de Kronecker. Utilizando que $g_{ij}\delta_p^i = \delta_{jp} = g_{jp}$ e $g_{ij}\delta_p^j = \delta_{ip} = g_{ip}$, temos então o seguinte:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p} = \frac{1}{2F} (g_{jp}\dot{x}^j + g_{ip}\dot{x}^i) \quad (7.86)$$

Dessa maneira, derivando essa expressão em relação a t , obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2F} (g_{jp}\dot{x}^j + g_{ip}\dot{x}^i) \right] \quad (7.87)$$

que pela regra do produto, fica como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p} \right) &= -\frac{1}{2F^2} \frac{dF}{dt} (g_{jp}\dot{x}^j + g_{ip}\dot{x}^i) + \\ &+ \frac{1}{2F} \left(\frac{dg_{jp}}{dt} \dot{x}^j + g_{jp} \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial t} + \frac{dg_{ip}}{dt} \dot{x}^i + g_{ip} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (7.88)$$

Mas como $g_{ij} = g_{ij}(x^i(t))$, devemos usar a regra da cadeia para derivar os tensores métricos dessa equação, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p} \right) &= -\frac{1}{2F^2} \frac{dF}{dt} (g_{jp}\dot{x}^j + g_{ip}\dot{x}^i) + \\ &+ \frac{1}{2F} \left(\frac{dg_{jp}}{dx^m} \frac{dx^m}{dt} \dot{x}^j + g_{jp} \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial t} + \frac{dg_{ip}}{dx^m} \frac{dx^m}{dt} \dot{x}^i + g_{ip} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (7.89)$$

Utilizando o resultado advindo do fato de que a derivada covariante do tensor métrico é nula, exibido na eq. (7.44), e sendo $dx^m/dt = d\dot{x}^m$ e $\partial \dot{x}^j/\partial t = \ddot{x}^j$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p} \right) &= -\frac{1}{2F^2} \frac{dF}{dt} (g_{jp}\dot{x}^j + g_{ip}\dot{x}^i) + \\ &+ \frac{1}{2F} \left((g_{rp}\Gamma_{jm}^r + g_{jr}\Gamma_{pm}^r) \dot{x}^m \dot{x}^j + g_{jp}\ddot{x}^j \right. \\ &\left. + (g_{rp}\Gamma_{im}^r + g_{ir}\Gamma_{pm}^r) \dot{x}^m \dot{x}^i + g_{ip}\ddot{x}^i \right) \end{aligned} \quad (7.90)$$

Realizando a mudança de índices $j \rightarrow i$, podemos somar termos comuns, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p} \right) &= -\frac{1}{2F^2} \frac{dF}{dt} (2g_{ip}\dot{x}^i) + \\ &+ \frac{1}{2F} (2(g_{rp}\Gamma_{im}^r + g_{ir}\Gamma_{pm}^r) \dot{x}^m \dot{x}^i + 2g_{ip}\ddot{x}^i) \end{aligned} \quad (7.91)$$

Colocando o fator $1/F$ em evidência:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p} \right) = \frac{1}{F} \left(-\frac{1}{F} \frac{dF}{dt} g_{ip} \dot{x}^i + (g_{rp} \Gamma_{im}^r + g_{ir} \Gamma_{pm}^r) \dot{x}^m \dot{x}^i + g_{ip} \ddot{x}^i \right) \quad (7.92)$$

Agora, vamos calcular o último termo que resta da equação (7.84):

$$\frac{\partial F}{\partial x^p} = \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \right) = \frac{1}{2F} \frac{g_{ij}}{\partial x^p} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2F} (g_{rj} \Gamma_{ip}^r + g_{ir} \Gamma_{jp}^r) \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (7.93)$$

pois somente g_{ij} é função de x^p , sendo \dot{x}^i e \dot{x}^j considerados como constantes em relação à derivada parcial, e usamos novamente a identidade de Ricci. Realizando a mudança de índice $j \rightarrow m$, temos então que:

$$\frac{\partial F}{\partial x^p} = \frac{1}{2F} (g_{rm} \Gamma_{ip}^r + g_{ir} \Gamma_{mp}^r) \dot{x}^i \dot{x}^m \quad (7.94)$$

Assim, substituindo as equações (7.92) e (7.94) na eq. (7.84), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{F} \left(-\frac{1}{F} \frac{dF}{dt} g_{ip} \dot{x}^i + (g_{rp} \Gamma_{im}^r + g_{ir} \Gamma_{pm}^r) \dot{x}^m \dot{x}^i + g_{ip} \ddot{x}^i \right) + \\ & - \frac{1}{2F} (g_{rm} \Gamma_{ip}^r + g_{ir} \Gamma_{mp}^r) \dot{x}^i \dot{x}^m = 0 \end{aligned} \quad (7.95)$$

onde podemos colocar o fator $1/2F$ em evidência:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2F} \left(-\frac{2}{F} \frac{dF}{dt} g_{ip} \dot{x}^i + (2g_{rp} \Gamma_{im}^r + 2g_{ir} \Gamma_{pm}^r - g_{rm} \Gamma_{ip}^r - g_{ir} \Gamma_{mp}^r) \dot{x}^m \dot{x}^i \right. \\ & \left. + 2g_{ip} \ddot{x}^i \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2F} (2g_{rp} \Gamma_{im}^r \dot{x}^m \dot{x}^i + g_{ir} \Gamma_{pm}^r \dot{x}^m \dot{x}^i + \\ & - g_{rm} \Gamma_{ip}^r \dot{x}^m \dot{x}^i + 2g_{ip} \ddot{x}^i) = \frac{1}{F^2} \frac{dF}{dt} g_{ip} \dot{x}^i \end{aligned} \quad (7.96)$$

onde usamos a simetria $\Gamma_{mp}^r = \Gamma_{pm}^r$ dos símbolos de Christoffel. Realizando a troca mútua de índices *dummy* $i \leftrightarrow m$ no termo $g_{ir} \Gamma_{pm}^r \dot{x}^m \dot{x}^i$, podemos cancelá-lo com o termo $-g_{rm} \Gamma_{ip}^r \dot{x}^m \dot{x}^i$ ao considerar as simetrias $g_{mr} = g_{rm}$ e $\Gamma_{pi}^r = \Gamma_{ip}^r$, ficando com:

$$g_{rp} \Gamma_{im}^r \dot{x}^m \dot{x}^i + g_{ip} \ddot{x}^i = \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} g_{ip} \dot{x}^i \quad (7.97)$$

Multiplicando ambos os lados por g^{lp} :

$$g_{rp} g^{lp} \Gamma_{im}^r \dot{x}^m \dot{x}^i + g_{ip} g^{lp} \ddot{x}^i = \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} g_{ip} g^{lp} \dot{x}^i$$

$$\begin{aligned}\delta_r^l \Gamma_{im}^r \dot{x}^m \dot{x}^i + \delta_i^l \ddot{x}^i &= \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} \delta_i^l \dot{x}^i \\ \Gamma_{im}^l \dot{x}^m \dot{x}^i + \ddot{x}^l &= \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} \dot{x}^l\end{aligned}\quad (7.98)$$

Temos então que a eq. (7.98) representa as equações da geodésica parametrizada por um parâmetro arbitrário $t \in [t_A, t_B]$. Porém, como visto anteriormente quando tratamos de curvas em geometria diferencial, geralmente é útil parametrizarmos uma curva pelo seu comprimento de arco s . Fazendo isso com nossa geodésica, $\gamma(t) \rightarrow \gamma(s)$, de modo que $F(x^i(t)) \rightarrow F(x^i(s))$ e ocorre, da eq. (7.81), que:

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \rightarrow s = \int_0^s \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds \quad (7.99)$$

a qual implica o seguinte:

$$F = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} = 1 \quad (7.100)$$

e assim $dF/dt \rightarrow dF/ds = 0$, de modo que a eq. (7.98) se torna $\Gamma_{im}^l \dot{x}^m \dot{x}^i + \ddot{x}^l = 0$. Realizando as trocas de índices $l \rightarrow k$ e $m \rightarrow j$ e escrevendo as derivadas de forma explícita, temos então a forma final usual das equações da geodésica parametrizada pelo comprimento de arco:

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (7.101)$$

Assim, a eq. (7.101) representa um conjunto de N equações diferenciais de segunda ordem com as quais podemos obter as N componentes x^k que descrevem a geodésica.

8 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

8.1 Introdução

Uma vez obtida a Teoria da Relatividade Restrita, válida somente para referenciais inerciais, Einstein sabia que era necessário generalizar essa teoria para referenciais acelerados. Através de um *gedankenexperiment* no qual se imaginava num elevador, Einstein percebeu que a aceleração provocada por este enquanto subia não poderia ser distinguida da força da gravidade naquele meio, pois o observador, enclausurado no elevador, não tem acesso ao que está ocorrendo do lado de fora. Sendo tal distinção impossível de ser feita, deve ser verdade que a 2ª lei de Newton, que descreve a resistência de um corpo de massa inercial m_i à aceleração, e a lei da gravitação, que descreve a força gravitacional que age sobre um corpo de massa gravitacional m_g , devem ser iguais para tal observador, de maneira que $F = m_i a = m_g g = F_g$; mas a indistinguibilidade entre as situações de aceleração devido a uma força que puxa o elevador para cima ou a ação da gravidade para baixo implica que $a = g$, de maneira então que $m_i = m_g$. Esse resultado, que mostra de forma lógica a razão pela qual a massa inercial e a massa gravitacional de um corpo devem ser iguais (algo que até então era simplesmente assumido como verdade) é o famoso **Princípio da Equivalência** de Einstein. Assim, Einstein enxergou a gravidade não como uma força, mas como um efeito de aceleração, e então generalizar a TRR para referenciais acelerados seria incluir a gravidade à teoria. Desse modo, corpos sob velocidade constante que trafegam em linha reta na dinâmica Newtoniana são enxergados como corpos que seguem geodésicas na TRG, obtidas a partir da eq. (7.101) uma vez obtido o tensor métrico, as quais obedecem às curvaturas do espaço-tempo causadas por densidades de matéria, energia e momentum num lugar do espaço.

8.2 Gravitação Newtoniana

A teoria da gravitação Newtoniana, amplamente conhecida, é formulada a partir de um campo gravitacional \vec{g} de simetria esférica criado por corpos massivos e que é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o centro do corpo e um dado ponto no espaço. Isto é, sejam M a massa do corpo e seja \vec{r} o vetor posição de um ponto no espaço em relação ao centro do corpo, temos que:

$$\vec{g} = \frac{GM}{r^2} \hat{r} \quad (8.1)$$

onde $\hat{r} = \vec{r}/\|\vec{r}\|$ e $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ é a Constante de Gravitação Universal. Esse campo é responsável por criar uma força atrativa entre o corpo provedor do campo e um corpo de prova m , sendo a força sentida por este dada por:

$$\vec{F} = -m\vec{g} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \quad (8.2)$$

ou seja, os vetores de força e campo gravitacional são antiparalelos entre si para um corpo de prova.

Pode ser verificado que o rotacional do campo gravitacional é $\vec{0}$, de modo que a força \vec{F} é uma força conservativa. Desse modo, utilizando a propriedade de que o rotacional de qualquer gradiente é o vetor nulo, podemos escrever o campo em função de um potencial gravitacional φ :

$$\vec{g} = \nabla\varphi \quad (8.3)$$

de modo que $\vec{F} = -m\nabla\varphi$ e o potencial pode ser calculado como:

$$\begin{aligned} \varphi(\infty) - \varphi(r) &= \int_r^{+\infty} \vec{g} \cdot \hat{r}' dr' = \int_r^{+\infty} \frac{GM}{(r')^2} \hat{r}' \cdot \hat{r}' dr' = -\left(\frac{GM}{r'}\right)_r^{+\infty} \\ &= -\left(0 - \frac{GM}{r}\right) = \frac{GM}{r} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Se definirmos $\varphi(\infty) \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$, temos que:

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (8.5)$$

De modo semelhante à lei de Gauss para o eletromagnetismo, a partir da qual chegamos, utilizando o teorema do divergente, que $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, onde ρ representa densidade de carga, temos a lei de Gauss para o campo gravitacional. Se considerarmos uma superfície Gaussiana de área S cuja origem coincide com o centro de massa de um corpo de massa M ou de um conjunto de corpos (cuja massa total também é M) internos à superfície, temos que:

$$\oiint \vec{g} \cdot \hat{r} dS = 4\pi GM \quad (8.6)$$

Utilizando o teorema do divergente e reescrevendo a massa em função da integral de volume sobre a densidade de massa $\rho(\vec{r})$ como

$$M = \iiint \rho dV \quad (8.7)$$

Temos que a eq. (8.6) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \iiint (\nabla \cdot \vec{g}) dV &= 4\pi G \iiint \rho dV \\ \iiint (\nabla \cdot \vec{g}) dV &= \iiint 4\pi G \rho dV \end{aligned} \quad (8.8)$$

Comparando ambos os lados dessa equação, os integrandos devem ser iguais, de maneira que:

$$\nabla \cdot \vec{g} = 4\pi G \rho \quad (8.9)$$

Substituindo \vec{g} pela eq. (8.3) nessa equação, temos então a equação de Poisson para o potencial gravitacional:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho \quad (8.10)$$

pois $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi$.

8.3 Tensor Stress-Energia-Momento

Para relacionar a geometria curva do espaço-tempo com a quantidade de matéria e energia presente numa região, como almeja a Teoria da Relatividade Geral, necessitamos formular um tensor que contenha tais quantidades. Para tal, consideremos primeiramente o seguinte exemplo motivacional: no espaço euclidiano, considere um sistema de coordenadas cartesianas R cujos eixos coordenados interceptam ortogonalmente as faces de um volume dado por um cubo de arestas $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ cujo centro coincide com a origem do sistema; suponha ainda que tenhamos sistemas de coordenadas (x, y, z) nos centros das faces das quais os eixos coordenados x , y e z de R “emergem” após interceptarem, faces essas que falaremos estarem voltadas no sentido positivo de x , y e z , respectivamente. Sejam um conjunto de partículas de momento total $\vec{p} = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z$ que atravessam esse cubo. Esse esquema está ilustrado na Fig. 8.1.

Considere que queremos informar a quantidade de momento por unidade de área, ou seja, a densidade de momento, que emerge de dada superfície numa dada direção. Para tal, podemos utilizar dois índices, i e j , onde $i = x, y, z$ irá representar a direção do momento e $j = x, y, z$ a face voltada para o sentido positivo de j (que denominaremos simplesmente de face j) pela qual passa tal vetor, de modo que teremos componentes da forma p_{ij} ; para calcular a densidade de momento para cada p_{ij} , devemos dividir esse termo pela área da face j , que denominaremos

por A_j , sendo $A_x = \Delta y \Delta z$, $A_y = \Delta x \Delta z$ e $A_z = \Delta x \Delta y$. Assim, temos 9 componentes p_{ij}/A_j , os quais podem ser agrupados numa matriz P como segue:

$$P = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{p_{xx}}{A_x} & \frac{p_{xy}}{A_y} & \frac{p_{xz}}{A_z} \\ \frac{p_{yx}}{A_x} & \frac{p_{yy}}{A_y} & \frac{p_{yz}}{A_z} \\ \frac{p_{zx}}{A_x} & \frac{p_{zy}}{A_y} & \frac{p_{zz}}{A_z} \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

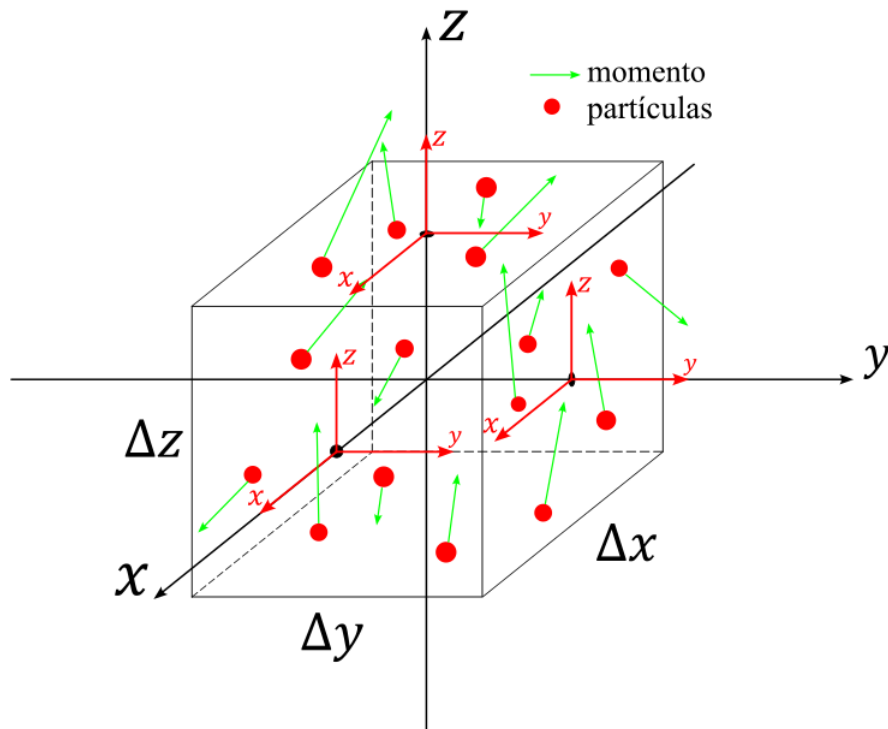


Figura 8.1: Volume cúbico centrado na origem de um sistema de coordenadas com várias partículas atravessando-o. Fonte: autoria própria.

De modo análogo, porém de certo modo mais abstrato devido à dificuldade de ilustração, podemos construir algo semelhante para o espaço-tempo quadridimensional. Utilizaremos $c = 1$ das unidades naturais para melhor compreensão. Assim, seja um hipervolume de espaço-tempo $\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$ através do qual passa um conjunto de partículas com quadrimomento total p^μ . Sejam os volumes V_ν , com $\nu = t, x, y, z$, orientados na direção positiva dos eixos coordenados ct, x, y e z dados respectivamente por $V_t = \Delta x \Delta y \Delta z$, $V_x = \Delta t \Delta y \Delta z$, $V_y = \Delta t \Delta x \Delta z$ e $V_z = \Delta t \Delta x \Delta y$, que farão o mesmo papel que as áreas das faces do cubo do exemplo anterior. Considere que queremos informar a quantidade de quadrimomento por

unidade de volume, ou seja, a densidade de quadrimomento, que emerge de dado volume do hipervolume numa dada direção, seja ela temporal ou espacial. Para tal, podemos utilizar dois índices, μ e ν , onde $\mu = t, x, y, z$ irá representar a direção do quadrimomento (sua componente) e $\nu = t, x, y, z$ o volume voltado para o sentido positivo de ν (que denominaremos simplesmente de volume ν) pelo qual passa tal quadrivetor, de modo que teremos componentes da forma p^μ/V^ν . Assim, temos 16 componentes p^μ/V^ν , que chamaremos de componentes $T^{\mu\nu}$, os quais podem ser agrupados num tensor, por conta de ser formado pelo quadrimomento (um tensor), como segue:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{tt} & T^{tx} & T^{ty} & T^{tz} \\ T^{xt} & T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yt} & T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zt} & T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

Da eq. (4.18), sabemos que p^0 representa energia e p^i , com $i = 1, 2, 3$, representa as componentes do momento de fato. Desse modo, uma vez entendida a analogia, faremos a troca dos índices dados por t, x, y e z pelos índices usuais $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, de maneira que os termos $p^0/V^\nu = T^{0\nu}$ representam energia e os outros termos restantes representam momento. Portanto, temos a forma final usual do chamado tensor stress-energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

Para elucidar o porquê de aparecer o termo “stress” em seu nome, devemos voltar a analisar cada componente desse tensor. Seja $i, j = 1, 2, 3$. A primeira linha, como dito, representa a energia; o termo T^{00} representa $p^0/V^0 = E/(\Delta x \Delta y \Delta z)$ (usamos $c = 1$ das unidades naturais), ou seja, a densidade de energia num volume do espaço; os termos T^{0i} representam densidade de fluxo de energia. Os termos T^{i0} representam densidade de momento num volume do espaço. Os termos T^{ii} representam pressão pois, por exemplo: $T^{11} = p^1/V^1 = p_{r_x}/(\Delta t \Delta y \Delta z) \cong F_{r_x}/A = P$, onde F_{r_x} é a componente em x da força relativística (que atua no volume voltado à direção em x), $A = \Delta y \Delta z$ é a área de uma face do volume $\Delta t \Delta y \Delta z$ e P é a pressão exercida; as componentes restantes são componentes de stress pois, do mesmo modo, atuam como pressões sendo aplicadas através de um volume, mas nesse caso num sentido “paralelo ao volume”, de maneira a agir como uma pressão de cisalhamento. As componentes T^{ij} , representadas pelos dois últimos casos analisados, representam o fluxo de momento.

Através do tensor métrico, podemos obter o tensor de stress-energia-momento em sua forma covariante: $T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}T^{\rho\sigma}$. Além disso, esse tensor é simétrico, ou seja:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (8.14)$$

Ainda, pelo Teorema de Noether, sabemos que energia e momento devem localmente ser conservados, de modo que o quadridivergente covariante do tensor stress-energia-momento deve ser nulo:

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (8.15)$$

8.4 Equações de Campo de Einstein

A ideia de Einstein era relacionar a geometria do espaço-tempo com a densidade de energia e momento presente no espaço. Para tal, podemos partir da teoria de Gravitação de Newton, segundo a qual $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$, como vimos na eq. (8.10). O lado esquerdo dessa equação tem o potencial gravitacional, o qual está relacionado ao campo gravitacional, enquanto o lado direito possui informação acerca da densidade de massa presente e como ela rege o potencial e, conseqüentemente, o campo gravitacional. Portanto, através de um *ansatz*, poderíamos sugerir o seguinte: $R_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu}$, onde k é uma constante, pois assim teríamos o lado esquerdo dado pelo tensor de Ricci, o qual está diretamente relacionado à métrica do espaço-tempo, e o lado direito dado pelo tensor stress-energia-momento, que possui toda informação acerca de densidade de energia e momento num dado espaço. Essa foi a sugestão inicial de Einstein. Porém, assim como ele posteriormente percebeu, existe um problema com essa formulação, que reside no fato de que o quadridivergente de $T_{\mu\nu}$ é nulo, enquanto sabemos, pela eq. (7.50), que o tensor de Ricci possui quadridivergência diferente de zero.

Contudo, obtemos um tensor na seção 7.5.5 a partir da segunda identidade de Bianchi que de fato possui quadridivergência nula e está relacionado ao tensor de Ricci e ao tensor escalar e, conseqüentemente, ao tensor métrico: o Tensor de Einstein, que viria a receber tal nome posteriormente a sua utilização na TRG. Assim, Einstein propôs o seguinte:

$$G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \quad (8.16)$$

onde o sinal negativo acompanhando k depende das convenções de sinais utilizadas durante a formulação dos tensores métrico e de Ricci. Com o intuito de obter a constante k , devemos considerar que, para regiões locais de gravidade fraca e no limite de baixas velocidades, devemos retornar à gravitação Newtoniana, ou seja, nessas condições, deve ser válida a

utilização da eq. (8.10). Fazendo isso, o que não será demonstrado aqui devido ao grande número de passos e aproximações para tal, chega-se ao seguinte valor:

$$-k = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (8.17)$$

que acaba sendo igual à constante presente na eq. (8.10) a menos de um fator $2/c^4$. Assim, utilizando as equações (7.77) e (8.17) na eq. (8.16), chegamos, enfim, às **equações de campo de Einstein**:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (8.18)$$

A eq. (8.18), à primeira vista, representa um conjunto de 16 equações diferenciais parciais de segunda ordem, acopladas e não-lineares (o que as tornam extremamente difíceis de serem resolvidas de forma exata, até para casos mais simples), para as quais queremos obter as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ a partir das informações de energia e momento contidas no tensor $T_{\mu\nu}$. Contudo, pelo menos, devido à simetria do tensor métrico, precisamos obter somente os termos de sua diagonal principal e os termos acima ou abaixo desta, de maneira que temos, na verdade, um conjunto de 10 equações efetivas.

A visão da cosmologia até o final dos anos 1920 era a de que o Universo era estático, mas as equações de Einstein previam um Universo em expansão ou contração. Assim, para adequar suas equações às concepções da época, Einstein introduziu um termo às equações de campo que seria responsável por exercer uma pressão negativa sobre o Universo de forma a contrabalancear o efeito de contração provocado pela gravidade e assim manter o Universo estático. Tal termo é chamado Constante Cosmológica (Λ), e as equações de campo se tornam

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (8.19)$$

Contudo, em 1929, através de observações astronômicas de galáxias distantes, Edwin Hubble constatou que o Universo não é estático, mas sim que está em expansão, o que invalidaria a presença da Constante Cosmológica. Assim, Einstein posteriormente chamaria a inclusão da Constante Cosmológica às equações de campo do maior erro de sua vida e deixaria de incluí-la, voltando a utilizar a equação original. Porém, observações das últimas décadas, que culminaram na descoberta da energia escura (uma energia responsável pela expansão acelerada do Universo), mostram que a Constante Cosmológica possui um efeito semelhante à energia escura, e assim é válida a utilização da eq. (8.19).

8.5 Métrica de Schwarzschild

A obtenção da métrica do espaço-tempo como solução da eq. (8.19) é algo bastante complicado de se realizar. Porém, como em muitos casos na Física, podemos idealizar nosso sistema com uma série de aproximações e obter uma solução, ainda assim, bastante acurada. Assim, a primeira solução exata das equações de campo de Einstein ocorreu em 1916, um ano após a publicação da TRG por Einstein, e é atribuída a Karl Schwarzschild. Sua solução descreve a curvatura do espaço-tempo numa região no vácuo com a presença de um corpo massivo esférico, estático (que não rotaciona) e neutro (sem carga elétrica). A métrica de Schwazchild, em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , é dada por:

$$(ds)^2 = c^2 \left(-1 + \frac{2GM}{rc^2} \right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} (dr)^2 + r^2 (d\Omega)^2 \quad (8.20)$$

onde M é a massa do corpo, r é a distância do ponto considerado ao centro do corpo e $(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + \text{sen}^2\theta (d\phi)^2$ é o ângulo sólido. Logo, está implícito que o tensor métrico em tal região do espaço-tempo é o seguinte:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

Entretanto, uma das maiores previsões advindas da TRG ocorre quando consideramos simplesmente a situação para a qual a contribuição temporal para a métrica é nula, isto é, quando: $-1 + 2GM/rc^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2GM/c^2$. Essa seria a distância necessária do centro do corpo para a qual o tempo não flui. Porém, podemos pensar, de outra forma, que esse é o raio necessário que um corpo esférico estático de massa M deve ter para que o tempo não flua em sua superfície. Contudo, sabemos da eq. (3.6) que o intervalo de tempo medido entre dois eventos num referencial em relação àquele medido num referencial exterior é dado por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t. \quad (8.22)$$

Assim, sabendo que existem referenciais externos para os quais $\Delta t \neq 0$ para eventos nessa superfície, para que $\Delta t' = 0$, deve ser verdadeiro que $v = c$. Ou seja, a luz não escapa dessa superfície, à qual foi dado o nome de **horizonte de eventos**, e ao corpo de **buraco negro**.

9 BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

9.1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos, que representa a união entre a Teoria da Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica, e a consequente formulação do Modelo Padrão da Física de Partículas, é de longe a teoria mais precisa já formulada na história da Física, com previsões que são confirmadas experimentalmente com altíssima exatidão. Um campo é entendido como um conjunto infinito de osciladores harmônicos quânticos acoplados e independentes, sendo uma partícula dada como uma excitação do campo e possuindo momento $p = \hbar k$ e energia $E = \hbar\omega_k$, podendo ser criada ou aniquilada pelos chamados operadores criação e aniquilação, respectivamente.

O Modelo Padrão contém a descrição das partículas fundamentais e suas antipartículas: a família dos quarks (*down, up, strange, charm, bottom, top*) e suas antipartículas, a família dos léptons (elétron, múon, tau e seus respectivos neutrinos) e suas antipartículas, os bósons de *gauge* (glúon, fóton, bósons W e Z) e o bóson escalar (Higgs). Assim, nessa seção será dada uma breve introdução ao assunto com uma demonstração da formulação da eletrodinâmica quântica, regida pelo campo dos fótons.

9.2 Equações de Euler Lagrange para campos

Considerando as equações de Euler-Lagrange dadas pela eq. (2.18) formuladas para corpos e partículas, vamos mudar as coordenadas generalizadas $q_i(t)$ por um campo φ , a derivada temporal por ∂_μ e a Lagrangiana L pela densidade Lagrangiana $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$, definida de forma que [5]:

$$L = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) d^3x \quad (9.1)$$

onde d^3x representa um diferencial de volume das coordenadas espaciais x^i . Portanto:

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) d^4x \quad (9.2)$$

em que $d^4x = dt(d^3x)$ é um hiper volume espaço-temporal. Assim, temos que as equações de Euler-Lagrange para um campo são dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0 \quad (9.3)$$

9.3 Fórmulas de Einstein e De Broglie

As equações quânticas (equações de Schrödinger, Klein-Gordon e Dirac) são formuladas através de duas relações de grande importância na Mecânica Quântica. A primeira delas é a relação entre a energia E de um fóton e sua frequência ν , desenvolvida por Einstein em sua formulação do Efeito Fotoelétrico:

$$E = h\nu \quad (9.4)$$

em que h é a constante de Planck. A segunda é a relação de De Broglie acerca do comprimento de onda para uma partícula com momentum p , dada por:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (9.5)$$

Utilizando a relação $\nu = \omega/2\pi$, sendo ω a frequência angular, na equação (9.4), isolando p na equação (9.5) e usando a relação $\lambda = 2\pi/k$, onde k é o número de onda, obtemos as seguintes relações:

$$E = \hbar\omega \quad (9.6)$$

$$p = \hbar k \quad (9.7)$$

em que $\hbar = h/2\pi$ é a constante reduzida de Planck.

9.4 Equações de Schrödinger, Klein-Gordon e Dirac

A equação de Schrödinger é uma equação que tenta prever o comportamento das partículas em um nível quântico através da obtenção da função de onda complexa ψ , cujo módulo ao quadrado representa uma densidade de probabilidade, sendo

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 \quad (9.8)$$

para uma $\psi = \psi(x, y, z)$. A formulação da equação de Schrödinger tem como ponto de partida as equações (9.4) e (9.5) e é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \quad (9.9)$$

Durante a formulação dessa equação, chega-se à conclusão de que energia e momento linear podem ser descritos como os seguintes operadores:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (9.10)$$

$$p \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (9.11)$$

Contudo, a equação de Schrödinger falha ao descrever partículas em regime relativístico, isto é, a velocidades significativamente próximas à da luz. Isto pode ser já notado na forma como espaço e tempo são tratados de formas distintas na equação; isto é, enquanto temos uma derivada segunda espacial, representada pelo laplaciano ∇^2 , temos uma derivada primeira para o tempo, sendo que espaço e tempo são tratados de forma semelhante na TRR. Além disso, devemos considerar que partículas livres relativísticas têm energia dada pela eq. (4.24). Assim, a primeira tentativa de relativizar a equação de Schrödinger surgiu através da equação de Klein-Gordon. Sua proposta foi de que a derivada temporal também deveria ser uma derivada segunda. Dessa maneira, através da equação (4.24), utilizando $c = 1$ das unidades naturais e utilizando as equações (9.10) e (9.11), temos o seguinte:

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \Leftrightarrow E^2 = p^2 + m^2 \Leftrightarrow \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = (-i\hbar \nabla)^2 + m^2 \quad (9.12)$$

onde usamos simplesmente $p_r = p$ para descrever o momento relativístico. Utilizando $\hbar = 1$ também das unidades naturais e resumindo os operadores diferenciais através do operador d'Alembertiano, temos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow \square + m^2 = 0 \quad (9.13)$$

Por fim, aplicando o campo escalar de Klein-Gordon φ , temos sua equação:

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \quad (9.14)$$

Entretanto, a equação de Klein-Gordon foi descartada durante anos por conta que ela podia dar valores positivos ou negativos de energia devido ao termo quadrático para E na equação (9.12). Para tentar contornar esse problema, Paul Dirac propôs, contrariamente ao que havia sido feito, trazer a derivada segunda espacial do laplaciano para uma derivada primeira, tal como é a derivada temporal na equação de Schrödinger. Assim, ele propôs a seguinte linearização para a energia de uma partícula livre relativística dada pela equação (4.24):

$$E = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \Leftrightarrow \sqrt{p^2 + m^2} = \alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + \beta m \quad (9.15)$$

Elevando ambos os membros dessa equação ao quadrado e comparando termo a termo, ele chegou ao resultado de que os coeficientes α e β devem obedecer às seguintes relações:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta^2 = 1 \quad (9.16)$$

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 0 \quad (9.17)$$

Ele logo percebeu que, para que tais relações pudessem ser satisfeitas, esses coeficientes deveriam ser, na verdade, matrizes. Dirac achou um tal conjunto de matrizes, e as apelidou de matrizes gama:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.18)$$

onde $\gamma^0 = \beta$ e $\alpha_i = \gamma^0 \gamma^i$, com $i = 1, 2, 3$. Uma consequência de os coeficientes serem matrizes é que a função de onda passa a ser algo chamado bispinor, que possui quatro componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

Utilizando a eq. (9.10) para aplicar o operador de energia a ψ e substituindo a energia pela sua expressão em função dos coeficientes α e β conforme a eq. (9.15), os quais serão dados em função das matrizes gama, temos que:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi = (\gamma^0 \gamma^i \cdot (-i\hbar \nabla) + \gamma^0 m)\psi \quad (9.20)$$

Como a matriz inversa de γ^0 é ela própria, como pode facilmente ser verificado, podemos multiplicar ambos os membros da equação anterior pela sua inversa e obter:

$$i\hbar \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar \gamma^i \cdot \nabla + m)\psi \Leftrightarrow i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^i \cdot \nabla \right) \psi - m\psi = 0 \quad (9.21)$$

Como estamos utilizando o sistema natural de unidades, $\hbar = 1$. Ademais, levando em conta que $c = 1$, percebemos que o termo entre parênteses da equação anterior é simplesmente o produto escalar entre γ^μ e ∂_μ . Dessa forma, obtemos a forma final da equação de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (9.22)$$

No final, chega-se à conclusão de que, na verdade, as equações de Klein-Gordon e Dirac não expressam simplesmente tentativas distintas de relativizar a equação de Schrödinger, mas elas são complementares no sentido em que a equação de Klein-Gordon rege bósons, onde φ é um campo escalar, enquanto a equação de Dirac rege férmions, onde ψ passa a ser interpretado como um campo spinorial.

9.5 Densidades Lagrangianas

Às equações de Klein-Gordon e Dirac, devem existir Lagrangianas tais que, quando substituídas na equação de Euler-Lagrange para campos, resultem nas suas respectivas equações associadas. Através de um *ansatz*, chega-se que as Lagrangianas de Klein-Gordon e Dirac são, respectivamente:

$$\mathcal{L}_{KG}(\varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu(\varphi) \partial^\mu(\varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (9.23)$$

$$\mathcal{L}_D(\psi) = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (9.24)$$

pois, se substituirmos elas nas equações de Euler-Lagrange para campos, dadas pela equação (9.3), retornamos às suas respectivas equações. Temos que $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

9.5.1 Análise da simetria da Lagrangiana de Dirac por transformação de fase

As simetrias são de grande importância na Física. Um exemplo onde isso pode ser visto é no Teorema de Noether, o qual diz que, para cada simetria na natureza, existe uma quantidade conservada. Isto é, simetria de translação implica a conservação do momento linear, simetria de rotação implica a conservação do momento angular e simetria temporal implica a conservação da energia. Nas densidades Lagrangianas, dizemos que elas são simétricas em relação a uma transformação de seus campos se suas Lagrangianas modificadas permanecem inalteradas. Assim, como exemplo, veremos agora como a densidade Lagrangiana de Dirac se comporta sob uma transformação de fase.

Como estamos trabalhando com funções complexas, uma transformação de fase global é dada ao multiplicar o campo pelo fator exponencial $e^{-i\alpha}$, isto é, para o campo spinorial de Dirac, teremos que:

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\alpha} \quad (9.25)$$

Substituindo ψ por esse ψ' na eq. (9.24) teremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D(\psi') &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' = \bar{\psi}e^{i\alpha}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi e^{-i\alpha} = \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_D(\psi)\end{aligned}\quad (9.26)$$

Portanto, chegamos ao resultado de que a Lagrangiana de Dirac é invariante, ou seja, simétrica sob uma transformação de fase global. Assim, de acordo com o Teorema de Noether, existe uma corrente que é conservada. Como estamos lidando com um campo fermiônico, tal como o elétron, se voltarmos à eq. (5.9), sabemos que a densidade de quadricorrente é conservada. Isto sugere então que J^μ é a densidade de corrente conservada conforme o Teorema de Noether, segundo o qual:

$$J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \quad (9.27)$$

onde ϕ_i são os campos da Lagrangiana, que nesse caso são ψ e $\bar{\psi}$. Desenvolvendo a eq. (9.27), obtemos o seguinte:

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (9.28)$$

Entretanto, se a transformação de fase for local, isto é, se a mudança de fase for da forma

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\alpha(x^\nu)} \quad (9.29)$$

onde $\alpha(x^\nu)$ passa a ser uma fase numa dada coordenada x^ν , veremos que ocorre quebra de simetria. Assim, substituindo esse ψ' na densidade Lagrangiana, obteremos o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D(\psi') &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' \\ &= \bar{\psi}e^{i\alpha(x^\nu)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi e^{-i\alpha(x^\nu)} \\ &= \bar{\psi}e^{i\alpha(x^\nu)}i\gamma^\mu\partial_\mu(\psi e^{-i\alpha(x^\nu)}) - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}e^{i\alpha(x^\nu)}i\gamma^\mu[e^{-i\alpha(x^\nu)}\partial_\mu\psi - i\psi e^{-i\alpha(x^\nu)}\partial_\mu(\alpha(x^\nu))] - m\bar{\psi}\psi \quad (9.30) \\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu(\alpha(x^\nu)) - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu(\alpha(x^\nu)) \\ &= \mathcal{L}_D(\psi) + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu(\alpha(x^\nu))\end{aligned}$$

Assim, como dito anteriormente, a Lagrangiana de Dirac não é invariante sob uma transformação de fase local, pois, além da Lagrangiana original $\mathcal{L}_D(\psi)$, surge o termo adicional

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu(\alpha(x^\nu)). \quad (9.31)$$

O contorno dessa assimetria é explorado dentro da formulação da densidade Lagrangiana total para o eletromagnetismo através de um campo de *gauge*, isto é, através de um campo de calibre, como será visto a seguir.

9.5.2 Eletromagnetismo como uma teoria de gauge do grupo $U(1)$

Como visto anteriormente, o desenvolvimento das equações de Maxwell na forma covariante explícita resulta no desenvolvimento do tensor de Faraday, dado pela eq. (5.41). Como a energia de um campo eletromagnético é diretamente proporcional a E^2 e B^2 , por um *ansatz*, justifica-se que um termo quadrático em F , isto é, um termo da forma $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ deve contribuir como um termo cinético à densidade Lagrangiana, de modo que definimos a densidade Lagrangiana do eletromagnetismo:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (9.32)$$

em que o coeficiente $-1/4$ é dado de acordo com o sistema de unidades adotado [5].

Da eletrodinâmica clássica, sabemos que a densidade de energia potencial associada a uma densidade de cargas ρ em um campo eletromagnético é dada por

$$u = \rho\varphi - \vec{j} \cdot \vec{A} = -(\rho, \vec{j}) \cdot (-\varphi, \vec{A}) = -J^\mu A_\mu, \quad (9.33)$$

onde $A_\mu = (-\varphi, \vec{A})$ devido à convenção de sinais do tensor métrico $(-1, +1, +1, +1)$ que estamos utilizando para subir e descer os índices. Substituindo a equação (9.28) na equação (9.33) e multiplicando pelo fator de acoplamento para o eletromagnetismo ($-e$), obtemos a Lagrangiana de interação [5]:

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (9.34)$$

Assim, juntamente com a equação (9.30) da Lagrangiana de Dirac para a transformação de fase local, podemos escrever a Lagrangiana total como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi', A_\mu) &= \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{int}(A_\mu) + \mathcal{L}_D(\psi') = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu(\alpha(v)) \end{aligned} \quad (9.35)$$

Podemos colocar em evidência o fator $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ para os dois últimos termos dessa equação e obter o seguinte:

$$\mathcal{L}(\psi', A_\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu(\alpha(v)) \right) \quad (9.36)$$

Agora entra em cena a formulação do campo de *gauge*. Da eq. (5.17), sabemos que podemos transformar \vec{A} através do seguinte *gauge*, sem alterar as equações de Maxwell e, conseqüentemente, sem alterar o tensor de Faraday: $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' + \nabla\xi$. É possível mostrar que isso é válido também para a componente A_0 do quadripotencial, de modo que podemos realizar o seguinte *gauge*: $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi$. Então, a eq. (9.36) sugere, com o intuito de eliminar o termo adicional que surge na Lagrangiana de Dirac ao impor a transformação de fase local, que tomemos

$$\chi = -\frac{1}{e}\alpha(x^\nu), \quad (9.37)$$

de maneira que:

$$\mathcal{L}(\psi', A'_\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \mathcal{L}(\psi, A_\mu) \quad (9.38)$$

Portanto, transformamos a densidade Lagrangiana total invariante por uma transformação de fase local de ψ , a qual é chamada de uma transformação $U(1)$, ao impor um *gauge* ao quadripotencial A_μ , que surge como um campo de interação para o eletromagnetismo, o campo dos fótons. Por isso, dizemos que o eletromagnetismo foi formulado como uma teoria de *gauge* do grupo $U(1)$.

Escolhemos esse caso para a formulação quântica do eletromagnetismo como um exemplo para mostrar como surgem as teorias quânticas de campos para as forças fundamentais da natureza (exceto a gravidade): através da quebra de simetria da Lagrangiana de Dirac devido à ação de um grupo e a conseqüente inserção natural de um campo de *gauge* para a manutenção da simetria. Pode-se mostrar que o mesmo ocorre para a força nuclear fraca ao impor a ação de um grupo de simetria $SU(2)$ e o conseqüente surgimento do campo dos bósons W^+ , W^- e Z^0 para reger a interação, que acaba sendo unificada ao eletromagnetismo e dando origem à Teoria Eletrofraca, que é uma teoria de *gauge* do grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Por fim, a força nuclear forte é obtida como uma teoria de *gauge* do grupo de simetria $SU(3)$, onde surge o campo dos glúons como mediador da força, sendo tal força explicada pela Cromodinâmica Quântica. Ademais, há propostas, ainda não consolidadas, de unificar a Teoria Eletrofraca à força nuclear forte. Contudo, nada parece sugerir que a gravidade também possa ser formulada como uma teoria de *gauge*, sendo ainda o formalismo do Cálculo Tensorial incompatível com o formalismo da Teoria Quântica de Campos, o que torna a tarefa de unificar as quatro forças fundamentais da natureza algo extremamente complexo.

10 TEORIAS DE GRAVITAÇÃO QUÂNTICA: ASPECTOS GERAIS

Como tentativa de conciliar as duas maiores teorias da Física, a Teoria da Relatividade Geral e a Teoria Quântica de Campos, em busca de uma Teoria de Tudo, muitas teorias e ideias foram desenvolvidas durante as últimas décadas. Realizar essa conciliação mostrou ser uma tarefa bastante complicada, pois enquanto a TRG é uma teoria determinística com a qual encontramos a métrica do espaço-tempo em dado local, a Teoria Quântica de Campos, fruto da união entre a TRR e a Mecânica Quântica, é uma teoria probabilística, e as matemáticas por trás dessas duas teorias são bastante diferentes.

Assim, será feita uma breve introdução conceitual a duas das teorias mais promissoras e estudadas quando o assunto é teorias de gravitação quântica: a Teoria de Cordas e a Gravidade Quântica em Loop.

10.1 Teoria de Cordas

A Teoria de Cordas (*String Theory*) é uma teoria que vem sendo desenvolvida há décadas, desde meados de 1960. Ela nasceu sendo uma tentativa de descrever a força nuclear forte, mas assim que os físicos mostraram que ela previa a existência de uma partícula sem massa de spin 2, que possui as características da partícula que teoricamente seria a mediadora da força gravitacional (o gráviton), essa teoria passou a ser uma proposta de teoria de gravitação quântica de fato, e desde então foram formuladas diferentes versões dela, tal como a Teoria de Supercordas, todas as quais são teorias subjacentes de uma teoria maior chamada Teoria-M.

A Teoria de Cordas afirma que as partículas fundamentais descritas pelo Modelo Padrão não são pontos, mas sim estados vibracionais de uma corda fundamental. Uma analogia é feita com as cordas de um violão: cada nota (dó, ré, mi, ...), que corresponde a uma dada frequência de vibração da corda, seria uma partícula fundamental, tal como os quarks ou os elétrons. Ela é uma teoria mais ambiciosa, pois tenta descrever todas as forças fundamentais de forma unificada. Porém, um ponto talvez não muito adequado dessa teoria é que, para que seu desenvolvimento matemático tenha consistência, é necessário um total de 10 dimensões, isto é, 6 dimensões a mais do que as 4 que experienciamos naturalmente. Segundo a teoria, essas dimensões extras estariam de certo modo “escondidas” às nossas vistas tais como um fio de cabelo parece ser unidimensional a olho nu, mas acaba revelando sua tridimensionalidade ao microscópio.

10.2 Gravidade Quântica em *Loop*

A Gravidade Quântica em *Loop* (*Loop Quantum Gravity*), diferentemente da Teoria de Cordas, busca a unificação da TRG com a Teoria Quântica de Campos por meio da quantização do espaço-tempo. A proposta é a de que o espaço não é contínuo, sendo formado pelo que seriam “átomos de espaço” que o torna discreto na escala de Planck (na ordem de 10^{-35} metros).

A estrutura que tais “átomos de espaço” formam é descrita pela chamada rede de *loops*, ou rede de spin, que é um grafo matemático construído pelo matemático e físico Roger Penrose que representa o estado quântico do espaço em dado instante. Nessa rede, linhas representam áreas, e os nodos formados pelas intersecções dessas linhas representam volumes, sendo áreas e volumes quantizados nessa teoria. Às linhas são atribuídos números de spin ($j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$).

Acontece que a rede de spin é uma generalização dos chamados *loops* de Wilson, um conceito advindo da Teoria Quântica de Campos que descreve as linhas de força, de modo a permitir interconexões e cruzamentos e formar nodos, e sua evolução temporal é a chamada “espuma de spin”.

11 SLINKY FIELD

11.1 Introdução

Uma das tentativas para se chegar a uma teoria de gravitação quântica, tal como faz a teoria da Gravidade Quântica em *Loop*, é quantizar o espaço-tempo de Einstein, transformando-o de contínuo em discreto. Assim, iremos agora propor uma nova visão qualitativa de quantização do espaço-tempo dinâmico construído pela Relatividade Geral. Tal quantização ocorre pela definição de uma estrutura que age como um bloco de construção do espaço-tempo, que será chamada de estrutura *slinky*, cuja descrição será dada seguir.

11.2 A estrutura *slinky*

A estrutura *slinky*, cujo nome foi inspirado no do brinquedo *slinky*, mostrado na Fig. 11.1, é uma estrutura helicoidal em forma de mola, sem massa, de comprimento relaxado ℓ_s e que pode oscilar tanto longitudinalmente quanto transversalmente, pois é suficientemente flexível para ser deformada tal como um brinquedo *slinky*. Como sendo uma estrutura que não está inserida no espaço-tempo, mas sim que o constrói, não faz sentido em atribuir a ela grandezas como posição ou momento, de maneira que muitos conceitos da Mecânica Quântica também não fazem sentido serem aplicados a ela, tal como o Princípio da Incerteza de Heisenberg. Cada estrutura *slinky* possui duas extremidades com as quais pode se conectar a outras estruturas *slinky*. A Fig. 11.2 mostra uma representação de tal estrutura.



Figura 11.1: Exemplo de brinquedo Slinky. Fonte: domínio público.

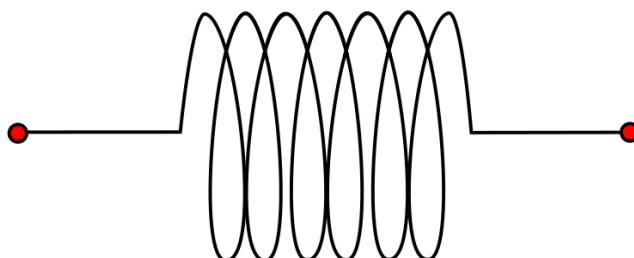


Figura 11.2: Representação do que se assemelharia a uma estrutura *slinky*. Fonte: autoria própria.

11.3 O tecido do espaço-tempo como um campo *slinky*

A quantização do tecido do espaço-tempo pode ser ilustrada como sendo semelhante a estruturas cristalinas estudadas em Física do Estado Sólido. Como exemplo, tomemos a estrutura de um cristal de cloreto de sódio (NaCl), ilustrado na Fig. 11.3.

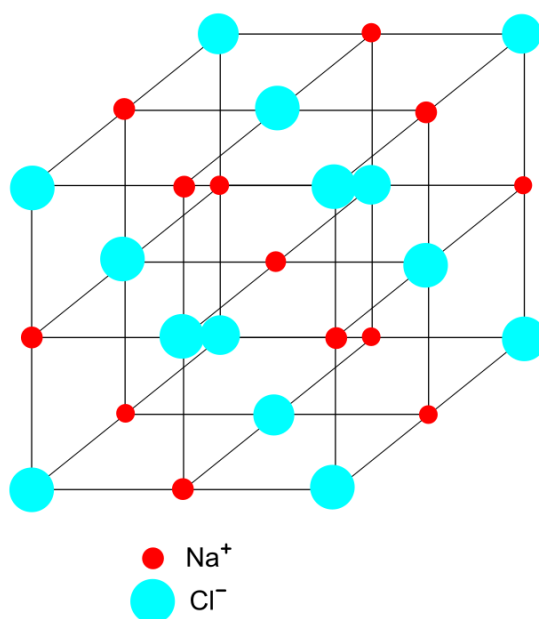


Figura 11.3: Esquema de um cristal de cloreto de sódio (NaCl).

Fonte: Autoria própria.

Devido a fatores tais como temperatura e forças de Coulomb entre os íons, cada um deles oscila na rede como se estivesse acoplado a molas.

No caso da quantização do espaço-tempo proposta, nos remetemos, primeiramente, a um espaço-tempo estático. Os lugares ocupados pelos íons seriam chamados de **pontos de acoplamento**, os quais representam pontos de conexão entre uma das extremidades de seis estruturas *slinky*. Assim, as estruturas *slinky* agiriam de fato como espécies de “molas” que formam uma rede *slinky* tridimensional. Tal rede será denominada de campo *slinky*, pois novas estruturas *slinky* podem ser criadas nesse campo dinâmico, o que dá o nome de *Slinky Field* a esta visão de quantização do espaço-tempo, e é ilustrado na Fig. 11.4. Inserindo a dimensão temporal, temos que o campo *slinky* passa a oscilar, formando uma rede quadridimensional.

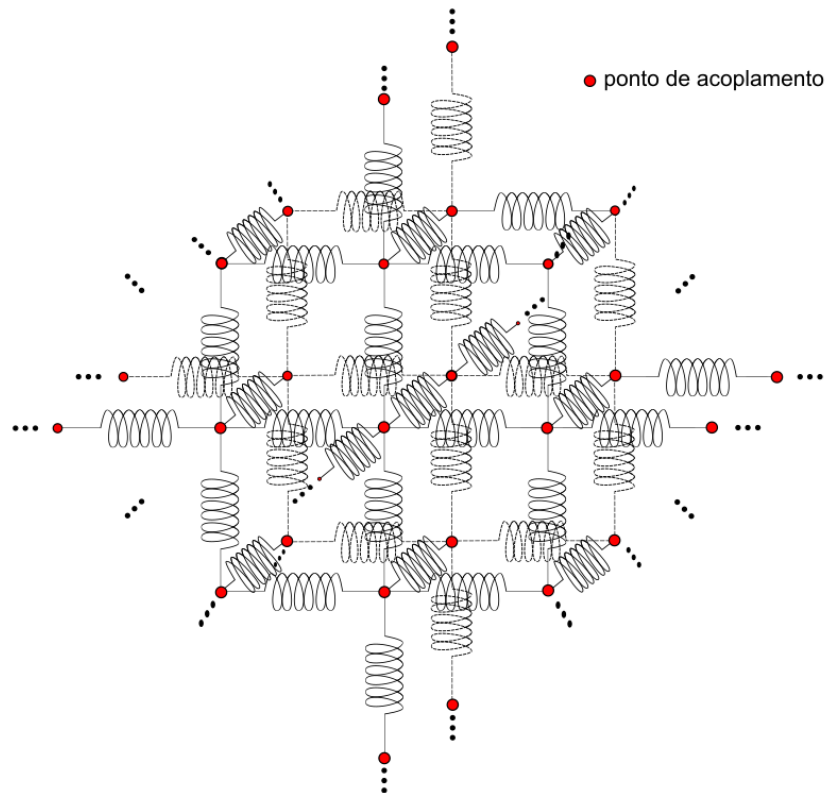


Figura 11.4: Representação do campo *slinky* estático, isto é, sem oscilações. Fonte: autoria própria.

Os pontos de acoplamento possuem esse nome pois representam as posições no espaço onde podemos de fato possuir partículas quaisquer, sejam elas férmions ou bósons, ocupando uma localização no espaço. Isto é, o espaço contínuo torna-se quantizado, sendo tal quantização dada pelo comprimento intrínseco ℓ_s das estruturas *slinky*, que dita a distância de separação entre dois pontos de acoplamento (essa distância pode variar minimamente de acordo com a oscilação das estruturas *slinky*). Assim, num nível quântico, a posição de uma dada partícula deixa de ser percebida como uma grandeza contínua e passa a ser discreta. A Fig. 11.5 mostra uma partícula localizada num ponto de acoplamento.

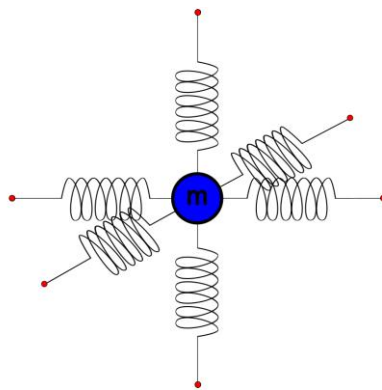


Figura 11.5: Exemplo de uma partícula de massa m acoplada a seis estruturas *slinky* num ponto de acoplamento. Fonte: autoria própria.

11.4 Curvatura do espaço-tempo como curvatura do campo *slinky*

Um campo *slinky* num espaço-tempo plano, ou seja, sem a presença de densidades de matéria, energia e momento, possui uma estrutura tal como a que foi mostrada na Fig. 11.4, que pode ser entendida como uma estrutura cúbica. Entretanto, se tivermos tais densidades presentes em grande escala, como num planeta, cujas partículas fundamentais constituintes de seus átomos estão todas ocupando pontos de acoplamento, teremos então a curvatura do campo *slinky* como a ideia de curvatura do tecido do espaço-tempo, conforme ilustra a Fig. 11.6 de forma bidimensional. Na figura, partículas ocupam os pontos de acoplamento, mas cabe ressaltar que elas podem estar deslocalizadas como ondas viajando nas estruturas *slinky*, estando de acordo com o Princípio da Incerteza.

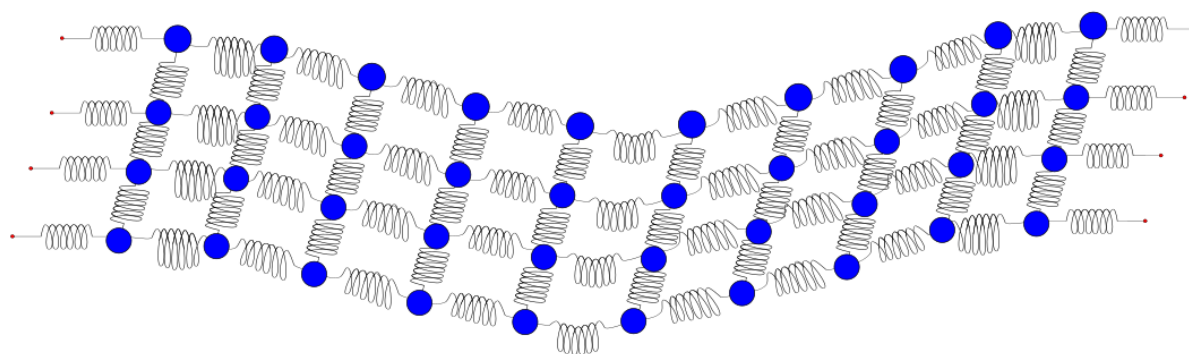


Figura 11.6: Deformação do campo *slinky* como a curvatura do espaço-tempo. Fonte: autoria própria.

11.5 Acoplamento dos campos da TQC ao campo *slinky*

Cada campo da Teoria Quântica de Campos (TQC) tem como plano de fundo o espaço-tempo e atua como um conjunto infinito de osciladores harmônicos quânticos. Assim, a ideia é que tais campos se acoplam ao campo *slinky* nos pontos de acoplamento, de modo que a criação e aniquilação de partículas não pode ocorrer num espaço-tempo contínuo, mas sim num discreto, somente nos pontos de acoplamento, o que acaba por limitar a quantidade de osciladores harmônicos quânticos de um dado campo. Dessa maneira, a função dos campos da TQC é criar e destruir partículas, e a função do campo *slinky* é discretizar as posições em que podem ocorrer tais criações e aniquilações e possibilitar a transmissão dessas partículas e suas energias para outros pontos de acoplamento. O acoplamento entre o campo *slinky* e um campo qualquer da TQC (como o campo do elétron, por exemplo), é ilustrado de forma simplificada na Fig. 11.7.

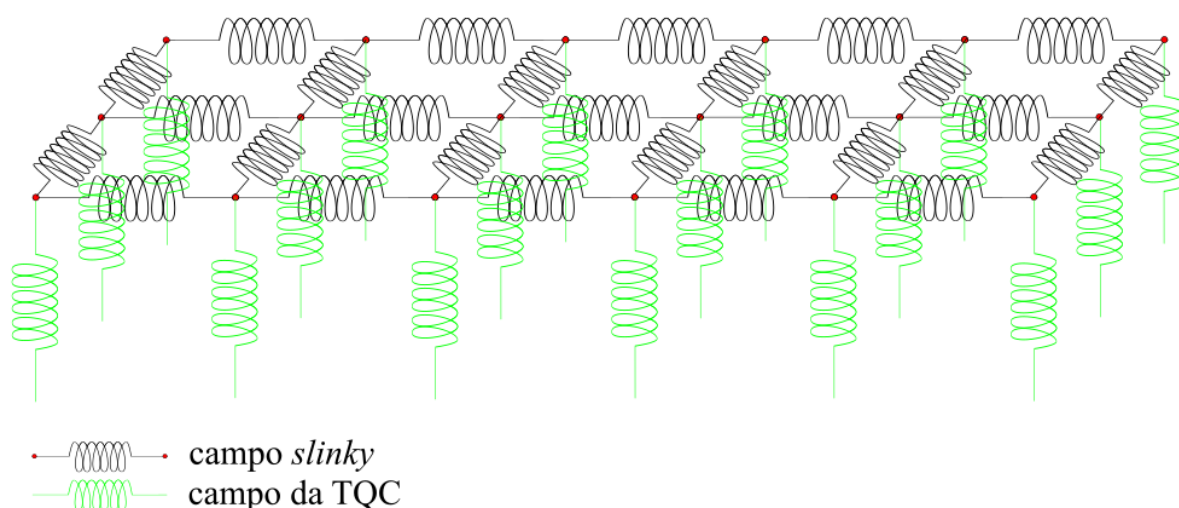


Figura 11.7: Acoplamento do campo *slinky* a um campo qualquer da TQC. Fonte: autoria própria.

Cabe esclarecer que a representação na Fig. 11.7 de um campo da TQC como molas é somente uma representação do campo devido à sua natureza de ser um oscilador harmônico quântico, não sendo, portanto, uma estrutura física tal como o campo *slinky*. Além disso, todos os campos estão acoplados ao campo *slinky* ao mesmo tempo, isto é, os campos dos quarks, dos léptons e dos bósons, mas, por questão de limitações, foi representado o acoplamento de um único campo qualquer somente. Dessa maneira, se uma dessas “molas” do campo da TQC for excitada com energias quantizadas, será criada uma partícula num dos pontos de acoplamento, a qual poderá ser transmitida para outros pontos através do campo *slinky*.

A transmissão através do campo *slinky* é possível devido à ideia de que as partículas podem ser descritas como *quanta* de energia. Assim, uma partícula de energia relativística $E = \hbar\omega_k$ criada pelo campo da TQC é transmitida por uma estrutura *slinky* de um ponto de acoplamento ao outro como um pulso longitudinal de energia E viajando pela estrutura, de modo análogo a um fônon numa estrutura cristalina. Um esquema dessa transmissão é ilustrado na Fig. 11.8.

Ademais, são nos pontos de acoplamento que a partícula pode interagir com o campo de Higgs e ganhar massa. Ou seja, durante o movimento de uma partícula, ela alterna entre suas formas de *quantum* de energia, que ocorre durante sua transmissão pela estrutura *slinky*, e matéria, que ocorre a cada ponto de acoplamento. Quanto mais massiva a partícula, maior será o tempo necessário de sua interação com o Higgs para que o quantum de energia se transforme em matéria, aumentando o tempo de transmissão entre dois pontos de acoplamento quaisquer, o que é uma forma de explicar a inércia da matéria provocada pelo grau de interação com o campo de Higgs. Como o fóton é uma partícula sem massa, ele não interage com o Higgs e,

portanto, sua transmissão pode ser feita de forma contínua pelo campo *slinky* sem precisar realizar “paradas” nos pontos de acoplamento.

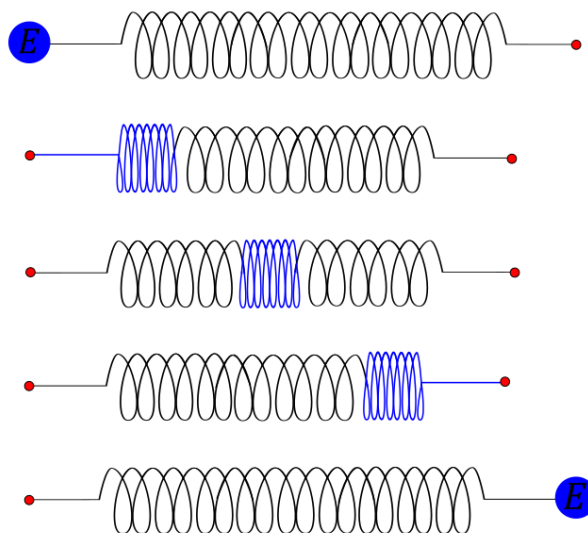


Figura 11.8: Instantes de transmissão, de cima para baixo, de uma partícula indo de um ponto de acoplamento a outro como uma onda viajando por uma estrutura *slinky*.

Fonte: autoria própria.

11.6 Criação de estruturas *slinky* e a expansão do Universo

É um resultado conhecido que a expansão do Universo causa um *redshift* do comprimento de onda λ de um feixe de luz de galáxias distantes que estão cada vez mais se afastando de nós. Entretanto, a diferença de comprimento de onda $\Delta\lambda$ não é acompanhada de transferência da variação de energia ΔE dos fótons do feixe para algum sistema (a energia associada a um fóton de comprimento de onda λ é dada por $E = hc/\lambda$). Do mesmo modo, se um corpo for lançado no espaço e percorrer uma distância grande o suficiente, comparável a distâncias entre galáxias, ele poderá eventualmente perder toda sua energia cinética e entrar “repouso”. Assim, a energia simplesmente é “perdida” para o campo gravitacional em expansão, o que seria uma clara violação da conservação de energia. Essa violação, contudo, é explicada com sendo parte de uma não-conservação da energia global devido à falta de simetria temporal no modelo cosmológico advindo da TRG, pois o Teorema de Noether foi construído com base em um espaço-tempo plano, sem a presença de curvatura causada por densidades de energia e massa e, assim, esse teorema implica em conservações locais somente.

Entretanto, talvez a ideia mais interessante do *Slinky Field* é, de modo análogo ao que vimos na formulação do eletromagnetismo como uma teoria de *gauge* do grupo $U(1)$, associar

o campo dos fótons ao campo *slinky* para a manutenção da simetria temporal no modelo cosmológico da TRG de forma a mantermos a conservação da energia global. Isto é, a perda de energia dos fótons devido ao *redshift* durante a expansão do Universo, assim como a perda de energia de quaisquer corpos em movimento (porém em menor parte), seria convertida em estruturas *slinky* que seriam prontamente acopladas ao campo *slinky*. O que isso significa é que a expansão do Universo não é a causa do *redshift* observado nos fótons, mas sim que o *redshift* é a causa de expansão do Universo, ao menos em parte.

Para explicar como o campo dos fótons entra em cena para causar a criação de estruturas *slinky*, devemos antes mostrar como a presença de grandes densidades de energia e matéria em separações da ordem de distâncias intergaláticas afeta o campo *slinky*. Para tal, consideremos primeiramente a seguinte analogia: sejam duas pessoas segurando as extremidades de uma mola de constante elástica k e comprimento natural ℓ e realizando forças de mesma norma $F_0/2$ (totalizando uma força total F_0 sobre a mola) em sentidos opostos de modo a expandi-la, sendo F_0 somente grande o suficiente para conseguir romper a mola; chegará um instante quando a mola terá atingido uma distensão de ruptura $\Delta\ell_r$ e irá romper-se em duas partes. Entretanto, imagine que, no momento exato em que isso ocorre, ambos os pedaços de mola se regeneram em duas molas idênticas à original e imediatamente se acoplam em série. Assim, temos agora uma associação de molas equivalente a uma única mola de constante elástica $k/2$, e as pessoas continuam aplicando as mesmas forças. O mesmo processo ocorre de modo sequencial, resultando em associações de molas cada vez maiores e com constantes elásticas equivalentes cada vez menores, iguais a $k/3, k/4, k/5, \dots, k/n$. Entretanto, devemos perceber que, não importa o número de molas nessa associação, podemos continuar sempre aplicando a mesma força inicial F_0 que conseguiremos distender cada mola individualmente (presumindo uma distensão homogênea a todas as molas) até a distensão de ruptura e assim continuar criando cada vez mais novas molas. Isto pois, para uma associação de n molas, para que possamos distender cada uma delas numa distensão de ruptura $\Delta\ell_r$, a força total aplicada sobre a associação deve ser

$$F = \frac{k}{n}(n\Delta\ell_r) = k\Delta\ell_r = F_0 \quad (11.1)$$

Essa analogia pode ser aplicada agora ao campo *slinky*. De modo a simplificar o nosso exemplo, considere duas galáxias cujas respectivas densidades de matéria e energia são quase que totalmente concentradas em seus respectivos buracos negros massivos localizados em seus centros. Assim, seguindo a analogia anterior, os buracos negros farão o papel das pessoas, o

campo *slinky* (que será representado bidimensionalmente) fara o papel da associação de molas e a curvatura do campo *slinky* causada pelos buracos negros fará o papel da força sobre a associação. Esse esquema está ilustrado na Fig. 11.9.

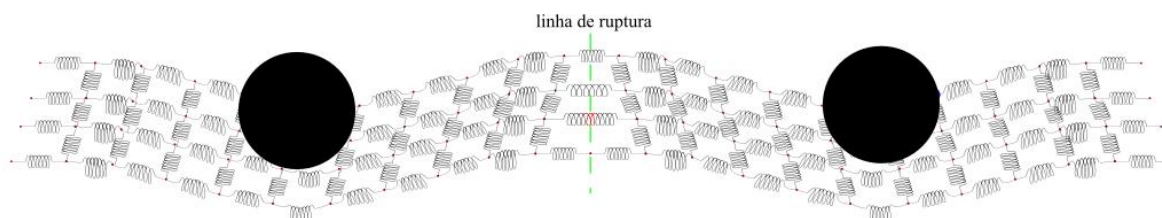


Figura 11.9: Esquema de dois buracos negros curvando o campo *slinky* e causando uma distensão das estruturas *slinky* a ponto de rompê-las. Fonte: autoria própria.

Nessa figura simplificada, a curvatura causada pelos buracos negros tende a distender o campo *slinky* na região entre eles de forma a causar a primeira ruptura das estruturas *slinky* que se encontram sobre a “linha de ruptura”, onde podemos observar (de cima para baixo) diferentes estruturas *slinky* em diferentes estágios de ruptura, sendo que a última mais abaixo já sofreu duplicação da estrutura. Daí em adiante, as novas estruturas *slinky* e as anteriores continuarão a chegar num ponto de ruptura onde serão prontamente duplicadas e acopladas ao campo *slinky*, e isso seguirá de forma contínua e exponencial, distanciando os buracos negros (ou seja, as galáxias) cada vez mais, sendo que a curvatura causada por cada buraco negro localmente continua sendo a mesma (tal como a força total aplicada pelas pessoas na analogia) e suficiente para distender as estruturas *slinky* a longas distâncias.

Agora, cabe mostrar como o campo dos fótons, principalmente, realiza a criação de novas estruturas *slinky*. Nesse caso, um fóton sendo transmitido como um quantum de energia ao longo de uma estrutura *slinky* prestes a ser rompida transfere parte de sua energia à essa estrutura. Tal interação é representada na Fig. 11.10, na qual um fóton de comprimento de onda no espectro visível do laranja, por exemplo, começa a ser transmitido por uma estrutura *slinky* que está prestes a entrar em ruptura, momento este em que perde parte de sua energia para a estrutura, aumentando seu comprimento de onda para o espectro do vermelho (*redshift*).

Assim, tendo como base principal a interação com a luz, o crescimento do campo *slinky* acarretado pela criação de estruturas *slinky* é uma nova visão do mecanismo de expansão do Universo de forma acelerada e que atualmente tem as estrelas como principais fontes de energia para essa expansão. Esse fato pode explicar ao menos em parte a Energia Escura que acarreta a expansão acelerada do Universo.

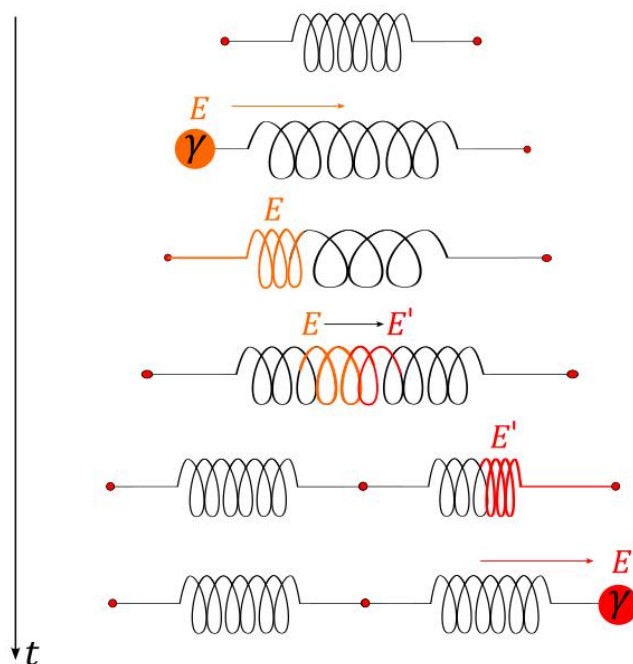


Figura 11.10: Exemplo de criação de estruturas *slinky* através da interação com fótons.

A sequência de etapas é mostrada de cima para baixo. Fonte: autoria própria.

Ademais, utilizando esse mecanismo de expansão, pode-se também inferir que a energia perdida pela radiação cósmica de fundo de micro-ondas durante seus mais de 13,8 bilhões de anos viajando até nós (aproximadamente 99,9 % de sua energia original) foi responsável por um enorme crescimento do campo *slinky* e, assim, foi responsável por grande parte da expansão do Universo. Essa radiação serve de informação a respeito do Universo ainda bastante jovem, quando tinha apenas cerca de 380 mil anos de idade, e pode ser utilizada para formar uma “imagem” dele nessa época conforme é visto o céu da Terra, como mostra a Fig. 11.11, onde a escala de cores do azul ao vermelho representa flutuações de temperatura que advêm de uma diferença de densidade entre regiões variadas do Universo jovem.

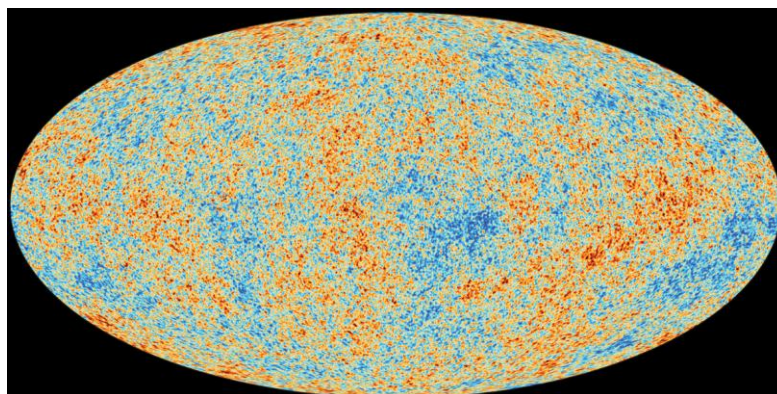


Figura 11.11: Radiação cósmica de fundo de micro-ondas.

Fonte: ESA/Planck Collaboration [7].

11.7 Ondas Gravitacionais

As ondas gravitacionais são perturbações no tecido do espaço-tempo causadas pelo movimento dos corpos sobre ele, que mudam constantemente a curvatura do espaço-tempo dinâmico. Elas são criadas principalmente durante grandes eventos cósmicos, tais como a colisão entre dois buracos negros, e são muito difíceis de serem detectadas. Porém, um experimento realizado em 2015 no LIGO (*Light Interferometer Gravitational Wave Observatory*) conseguiu pela primeira vez observar ondas gravitacionais causadas pela fusão de dois buracos negros massivos.

Então, considerando o espaço-tempo como sendo o campo *slinky*, as ondas gravitacionais são ondas longitudinais propagadas pelas estruturas *slinky*, como mostra a Fig. 11.12.

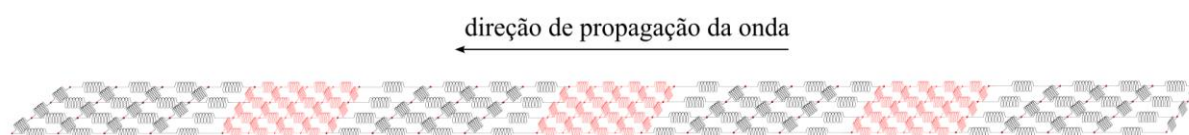


Figura 11.12: Onda gravitacional sendo transportada como uma onda longitudinal através do campo *slinky*. As estruturas *slinky* em vermelho estão comprimidas. Fonte: autoria própria.

11.8 O tempo como oscilações intrínsecas do campo *slinky*

A natureza do tempo é sem dúvida uma das maiores fontes de imaginação e mistério que existem. Einstein mesmo, durante sua formulação da Teoria da Relatividade, chegou a dizer que o tempo é uma ilusão. Mas então o que seria essa ilusão do tempo?

O tempo é fortemente associado à ideia de movimento. Por exemplo, se olharmos para uma fotografia, sentimos que vemos uma cena imóvel e congelada num instante exato do tempo, enquanto que uma sequência de fotografias tiradas sucessivamente dá a ideia de movimento e, juntamente, de tempo transcorrendo, que é o caso de uma filmagem.

Pensando no campo *slinky*, uma última tentativa de descrição da natureza do espaço-tempo, embora ainda rudimentar, seria dizer que o tempo está fortemente ligado à transmissão de partículas entre diferentes pontos de acoplamento, de onde surge a ideia de movimento. Como a transmissão de partículas ocorre como pulsos de energia através das estruturas, temos que uma oscilação longitudinal intrínseca das estruturas *slinky* que permite a propagação desses pulsos cria a ilusão do tempo ao criar a possibilidade de movimento através do espaço. Isto é, uma oscilação da estrutura *slinky* possui o mesmo período necessário para a transmissão de um

pulso de energia de um ponto de acoplamento ao outro, e é tal oscilação intrínseca que “diferencia um *frame* de outro na filmagem de uma partícula se movendo no espaço” mesmo que ela permaneça em repouso. O “período” dessa oscilação intrínseca é que define a quantização do tempo, e é dependente da quantidade de matéria presente no espaço, que está acoplada às estruturas *slinky* e atua de forma a aumentar o período de oscilação das estruturas *slinky*, de modo análogo a um sistema massa-mola, em que o período de oscilação é dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, onde m é a massa do corpo acoplado e k é a constante de elasticidade da mola. Restaria, contudo, investigar o fenômeno da dilatação temporal através dessa descrição do tempo.

12 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi apresentada a fundamentação teórica sobre a qual é construída a Teoria da Relatividade, desde as transformações de Lorentz até a Geometria Diferencial e o Cálculo Tensorial, de modo que foi possível explicar a Teoria da Relatividade Restrita e suas implicações na Mecânica e na Eletrodinâmica, assim como explicar o surgimento da Teoria da Relatividade Geral e as equações de campo de Einstein. Com o propósito de introduzir o tema da Gravitação Quântica, foi dada uma breve introdução à Teoria Quântica de Campos com posterior demonstração de como o eletromagnetismo é formulado como uma teoria de *gauge* com interação dada pelo campo dos fótons. Por fim, foi apresentada a proposta qualitativa de quantização do espaço-tempo como um campo *slinky*, chamado *Slinky Field*, com o qual foram propostos mecanismos de transmissão de partículas pelo espaço-tempo, acoplamento dos campos quânticos ao campo *slinky* e a expansão do Universo governada em partes pela perda de energia, devido ao *redshift*, de fótons viajando a distâncias intergaláticas, o que representa uma proposta de conservação global da energia. Trabalhos futuros devem incluir a descrição matemática do modelo para verificar sua compatibilidade com as teorias vigentes, o que se torna uma tarefa mais árdua.

REFERÊNCIAS

- [1] NOLTING, Wolfgang. **Theoretical Physics 4**. Suíça: Springer International Publishing, 2017.
- [2] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 5ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [3] FILHO, Emil de Souza Sánchez. **Tensor Calculus for Engineers and Physicists**. Suíça: Springer International Publishing, 2016.
- [4] CAROLL, Sean M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. San Francisco, CA: Pearson Education, 2004.
- [5] MCMAHON, David. **Quantum Field Theory Demystified**. Nova York: McGraw-Hill Companies, 2008.
- [6] ROLNICK, William B. **The Fundamental Particles and Their Interactions**. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [7] ESA/Planck Collaboration. **Planck's view of the cosmic microwave background**. 2018. Disponível em: https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Cosmic_Microwave_Background_CMB_radiation. Acesso em: 28 de outubro, 2025.