



Ilha Solteira

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Câmpus de Ilha Solteira

MARIANA APARECIDA DE MORAES

**Controlador H_{∞} Chaveado para Sistemas Incertos Aplicado ao Sistema 2
DOF Ball Balancer com D-estabilidade**

Ilha Solteira - SP

2020



Ilha Solteira

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Câmpus de Ilha Solteira

MARIANA APARECIDA DE MORAES

**Controlador H_{∞} Chaveado para Sistemas Incertos Aplicado ao Sistema 2
DOF Ball Balancer com D-estabilidade**

Dissertação de Mestrado apresentado à
Faculdade de Engenharia – UNESP –
Câmpus de Ilha Solteira, como requisito
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Jean Marcos de Souza Ribeiro

Ilha Solteira - SP

2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

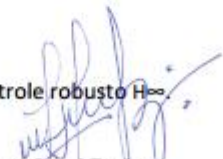
M827c Moraes, Mariana Aparecida de.
Controlador H_∞ -chaveado para sistemas incertos aplicado ao sistema 2 DOF
ball balancer com D-estabilidade / Mariana Aparecida de Moraes. -- Ilha
Solteira: [s.n.], 2020
52 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2020

Orientador: Jean Marcos de Souza Ribeiro

Inclui bibliografia

1. D-estabilidade. 2. Incertezas. 3. Perturbação. 4. Controle robusto H_∞ .
Controle chaveado.


João Josué Barbosa
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

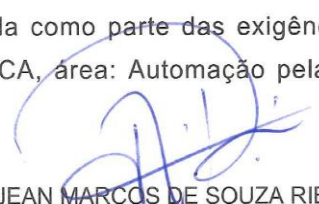
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Controlador Hinf chaveado para sistemas incertos, aplicado ao sistema 2 DOF Ball Balancer com D-estabilidade

AUTORA: MARIANA APARECIDA DE MORAES

ORIENTADOR: JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. JOSÉ HENRIQUE GALETI
Departamento de Engenharia Elétrica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS


Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Ilha Solteira, 07 de fevereiro de 2020

Aos meus pais,

Selma e Mario,

pelo exemplo.

As minhas queridas irmãs,

Marcela e Mayara,

DEDICO.

Aos meus avós,

pelo apoio e carinho,

ao Cristian

por estar sempre ao meu lado

em todos os momentos.

OFEREÇO.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela presença constante em nossas vidas.

Ao professor Dr. Jean Marcos de Souza Ribeiro pela orientação e dedicação neste trabalho.

À Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista, pela oportunidade de realização da pós-graduação.

Ao prof. Dr. Falcondes José Mendes de Seixas por ter sempre me apoiado durante o curso e trazido minha primeira experiência no ramo científico.

Aos professores Jean, Marcelo, Rodrigo e Edvaldo por possibilitar o uso do laboratório.

Aos funcionários da FEIS/UNESP do Departamento de Engenharia Elétrica.

Aos docentes do Curso de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica pelos ensinamentos recebidos.

À minha família, pelo amor e incentivo.

Ao meu primo Ariel e aos demais colegas de laboratório, pela amizade e apoio neste trabalho.

Ao meu namorado Cristian Starke, por estar sempre ao meu lado nos momentos mais difíceis, me apoiando e sempre me dando forças para seguir em frente.

Aos meus amigos: Marina Cristan, Gabriela Gallego, Luiz Porfírio, Priscila Otoboni e Isabella Amais, pela antiga amizade que dura até hoje.

Enfim, a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O estudo, simulação e implementação de um controlador H_∞ aplicado em uma planta naturalmente instável com incertezas politópicas contínuas no tempo é discutido neste trabalho. Estas incertezas estão relacionadas a falha de medição dos sensores, que se apresentam recorrentemente nas implementações práticas da engenharia. A planta consiste em um módulo baseado em uma mesa, articulada por dois servos motores, com a intenção de posicionar uma esfera em determinado local do plano cartesiano (X,Y) da mesa. Além dos politopos, o controlador H_∞ trabalha com uma entrada exógena, que foi implementada na forma de vento para perturbar a posição da bola. Assim, o controlador projetado deve garantir alta robustez para tais condições. A lei de controle chaveada escolhe o ganho do controlador que faz a realimentação de estados de forma a minimizar a derivada da função de Lyapunov do tipo quadrática no caso de uma matriz B incerta, garantindo um desempenho de custo reduzido, sendo o projeto baseado em desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities* – *LMIs*. Ainda é agregada, ao projeto dos controladores, a teoria da D-estabilidade, que garante, se o sistema for controlável, a alocação dos autovalores em uma região pré-definida. As teorias abordadas nesse tema prometem alta confiabilidade e eficiência, que são confirmadas com a implementação em bancada do controle do sistema 2 *DOF Ball Balancer*.

Palavras-chave: D-Estabilidade. Incertezas. Perturbação. Controle Robusto H_∞ . Controle chaveado.

ABSTRACT

The study, simulation and implementation of an H_∞ control are applied in an unstable plant with time-continuous polytopic uncertainties are discussed in this work. These uncertainties are related to measurement failure of the sensors, which are recurrent in practical implementations of engineering. The plant consists of a table-based module, articulated by two servo motors, with the intention of placing a sphere in a specific place of the cartesian plane (X, Y) of the table. In addition to the polytopes, the controller H_∞ works with an exogenous input, from which it was implemented in the form of wind to disturb the position of the system. Thus, the designed controller should ensure high reliability for such conditions. The switched control law chooses the gain of the controller that does the state feedback in order to minimize the derivative of the Lyapunov function of the quadratic type in the case of an uncertain matrix B, guaranteeing a low-cost performance, being the project based on inequalities Linear Matrix Inequalities (LMIs). The D-stability theory, which guarantees the allocation of the poles in a predefined region, is still added to the controller design. The theories addressed in this topic promises high reliability and efficiency, that are confirmed with bench implementation in a 2 DOF Ball Balancer system.

Keywords: D-Stability. Uncertainties. Perturbation. H_∞ Robust Control. Switch control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Fotografia do Sistema 2 DOF Ball Balancer.....	17
Figura 2	- Planta esquemática do sistema Ball Balancer do eixo X.....	18
Figura 3	- Diagrama de forças sobre a esfera com uma entrada exógena.....	19
Figura 4	- Vértices do politopo do sistema 2 DOF Ball Balancer.....	22
Figura 5	- Diagrama de Blocos do controle chaveado.....	27
Figura 6	- Região de D-estabilidade $S(\partial, r, \beta)$	30
Figura 7	- Autovalores dos controladores chaveados.....	33
Figura 8	- Eixo X: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $Hw(t)$ e $\sigma(x_m)$	34
Figura 9	- Eixo Y: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $Hw(t)$ e $\sigma(x_m)$; referência quadrada.....	35
Figura 10	- Eixo Y: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $Hw(t)$ e $\sigma(x_m)$; referência circular.....	35
Figura 11	- Região de factibilidade do controle não chaveado e chaveado.....	36
Figura 12	- Eixo X: chaveamento, posição x , sinal de controle $u(t)$, falha 30%.....	38
Figura 13	- Eixo X: chaveamento, posição x , sinal de controle $u(t)$, falha 40%.....	39
Figura 14	- Eixo Y: chaveamento, posição y , sinal de controle $u(t)$, falha 30%.....	39
Figura 15	- Eixo Y: chaveamento, posição y , sinal de controle $u(t)$, falha 40%.....	40
Figura 16	- Eixo X com integrador e entrada exógena sem falhas.....	41
Figura 17	- Eixo Y com uma entrada exógena.....	41
Figura 18	- Eixo Y: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $Hw(t)$ e $\sigma(x_m)$; referência quadrada.....	42
Figura 19	- Eixo X: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , e $\sigma(x_m)$; referência quadrada.....	43
Figura 20	- Posição da esfera na trajetória quadrada.....	43
Figura 21	- Eixo Y: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} e $\sigma(x_m)$	44
Figura 22	- Eixo X: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , σ	44
Figura 23	- Posição da esfera no plano XY, para referência circular.....	45
Figura 24	- Eixo Y: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} e $\sigma(x_m)$	45
Figura 25	- Eixo X: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , e $\sigma(x_m)$	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Descrição sumária dos capítulos.....	13
2	DEFINIÇÕES DA FALHA EM UM SISTEMA LINEAR.....	15
3	SISTEMA 2 DOF BALL BALANCER SUJEITO A FALHAS	17
3.1	Entrada exógena	19
3.2	Falha nos sensores	20
4	PROJETO DO CONTROLADOR ROBUSTO H^∞ CHAVEADO	23
4.1	Controlador Robusto H^∞	23
4.1.1	LMI do sistema com uma entrada exógena com falha.....	24
4.2	Projeto do controle Robusto Chaveado H^∞	25
4.3	Alocação de autovalores por D-estabilidade	29
5	RESULTADOS TEÓRICOS – SIMULAÇÕES	31
5.1	Factibilidade dos controladores chaveados e de ganho constante	36
6	RESULTADOS PRÁTICOS	38
6.1	Entrada exógena $w(t)$	38
6.2	Resultados práticos com trajetórias.	42
7	CONCLUSÕES.....	47
	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas chaveados representam uma subclasse de sistemas híbridos caracterizada por ter uma lei de chaveamento que seleciona, a cada instante de tempo, um dos subsistemas disponíveis. Essa lei de chaveamento pode ser arbitrária, como em Mahmoud *et al.* (2009), ou uma variável de controle que deve ser projetada para garantir estabilidade e bom desempenho para um dado sistema em malha fechada.

Observa-se um crescente interesse da comunidade científica no estudo da estabilidade de sistemas lineares chaveados em projetos de controle (SILVA, *et al.*, 2019; GEROMEL; COLANERI, 2006; WICKS *et al.*, 1994; ZHAI *et al.*, 2003). A motivação por esta área advém do fato da comutação de subsistemas poder melhorar o desempenho global, criar novas propriedades de interesse e ampliar a região de factibilidade dos controladores que são inexistentes nos subsistemas isolados. Assim, aumenta-se o número de aplicações em diferentes sistemas na prática, como sistemas mecânicos, sistemas elétricos de potência, controle aeronáutico, indústria automotiva, eletrônica de potência, entre outros (CARDIM *et al.*, 2009; DEAECTO; GEROMEL, 2008; MAZUMDER *et al.*, 2002).

Devido ao surgimento de problemas práticos, o estudo de controladores chaveados para sistemas não lineares também obteve grande interesse no meio acadêmico, observando-se o grande volume de trabalhos publicados sobre o tema, como em sistemas não lineares chaveados. Este interesse pode ser notado pelo crescente número de trabalhos que foram publicados sobre o tema: (TANAKA *et al.*, 2000b; TANAKA *et al.*, 2000a; FENG, 2004; YANG *et al.*, 2006; ARRIFANO *et al.*, 2006; DONG ; YANG, 2008b; DONG ; YANG, 2008a; YAN ; SUN, 2010; YANG ; DONG, 2010; JABRI *et al.*, 2012; CHEN *et al.*, 2012; SOUZA *et al.*, 2013; SOUZA *et al.*, 2014a; SOUZA *et al.*, 2014b).

A alta confiabilidade dos controladores nas aplicações da engenharia é um critério importante, especialmente em sistemas críticos para a segurança humana, tais como sistemas de aeronaves e sistemas médicos (DONG ; YANG, 2015). Em várias aplicações de controladores realimentados, a planta pode estar submetida às condições ambientais desfavoráveis, incertezas paramétricas, ou ainda com falhas nos sensores ou saturação dos dispositivos. Com isso, a estabilidade e desempenho do sistema controlado podem ficar comprometidos. Dessa forma, é necessário considerar as possíveis falhas na planta e

incertezas politópicas, para contornar o problema de estabilidade e manter o bom desempenho desejado até que seja feita a manutenção nos sensores.

Para tornar o sistema mais robusto, diante a sinais exógenos, com energia limitada de características determinísticas e/ou desconhecidas, o controlador H_∞ é muito utilizado na literatura para o caso de sistema lineares (PERES *et al.*, 1993; IWASAKI ; SKELTON, 1994; GAHINET ; APKARIAN, 1994; CHILALI ; GAHINET, 1996; KIM ; PARK, 1999; JI *et al.*, 2006; DEAECTO ; GEROMEL, 2010; SILVA *et al.*, 2012; OLIVEIRA *et al.*, 2014) e para sistemas não lineares (CAO *et al.*, 2000; TUAN *et al.*, 2001; LIU ; ZHANG, 2003; FENG, 2004; XU ; LAM, 2005; DELMOTTE *et al.*, 2007; MONTAGNER *et al.*, 2009).

Até a década de 80 era utilizado apenas o domínio da frequência para resolver o problema do controlador H_∞ , mas com os trabalhos de Glover ; Doyle (1988) e de Doyle *et al.* (1989), foi possível encontrar soluções no domínio tempo, por meio de descrições em espaço de estado. Estas soluções possibilitaram a popularização deste controle e contribuíram para a formulação do problema de controle H_∞ em modelos não lineares e variantes no tempo. Van Der Schaft (1991) estabeleceu a generalização do controle H_∞ para sistemas não lineares invariantes no tempo, garantindo que o ganho entre o distúrbio e a saída do sistema fossem limitados por um coeficiente de atenuação δ de norma $\sqrt{\delta}$.

O problema de controle H_∞ foi caracterizado como um problema convexo, proposto por Packard ; Doyle (1993) e assim estabelecido, por exemplo, por Peres *et al.* (1993), Lu ; Doyle (1993) e Lu ; Doyle (1995), criou-se um procedimento baseado em desigualdades matriciais lineares, para o problema de controle H_∞ de sistemas não lineares. Tal metodologia foi aprimorada e aplicada em projetos de controle de sistemas não lineares, descritos por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, como pode ser visto, por exemplo, em (TUAN *et al.*, 2001; LIU ; ZHANG, 2003; DELMOTTE *et al.*, 2007; MONTAGNER *et al.*, 2009).

Um sistema de controle projetado para trabalhar com as incertezas politópicas é denominado de controlador robusto, que é projetado para tolerar falhas de atuadores ou sensores dentro de um subconjunto já especificado, mantendo as propriedades do sistema dentro das especificações desejadas (VEILLETTE *et al.*, 1992; MINQING, 2009), como em Silva *et al.* (2017) que estuda o caso de falhas em um drone quadrimotor. Em geral, os sensores são propensos a apresentar falhas mais frequentemente do que atuadores ou compensadores (YANG ; YE, 2008). As características dos sensores podem mudar ao longo do tempo, de modo que possa haver uma falha parcial ou total (LIU *et al.*, 2013), o que pode degradar o desempenho ou até mesmo desestabilizar os sistemas controlados.

Dessa forma, o estudo do controle tolerante a falhas é de grande importância, uma vez que garante a segurança e confiabilidade ao sistema realimentado submetido à ocorrência de falhas. Em Zhang ; Jiang (2008) tem-se uma revisão bibliográfica de sistemas de controle tolerantes a falhas, abordando aplicações práticas das técnicas com ênfase nas falhas. Há diversos trabalhos que desenvolvem técnicas de controle robusto, modelando as incertezas como funções incertas parametrizadas (YANG *et al.*, 2000; YANG *et al.*, 2001; MINQING, 2009; WANG *et al.*, 2011; DONG ; YANG. 2015). Nesses trabalhos a realimentação é realizada com o vetor de estados sujeito a incertezas. Dessa forma, utilizam a dinâmica do vetor de estados $x(t)$ com manipulações algébricas de forma a atender as condições necessárias para manter o sistema com os parâmetros de eficiência e estabilidade desejados.

O objetivo desse trabalho é garantir a estabilidade e eficiência em malha fechada de um sistema não linear descrito por modelo em espaço de estados, sujeito à falhas com representação das incertezas politópicas, a partir do estudo e implementação do controlador H_∞ chaveado com o método de alocação da D-estabilidade. O sistema *2 DOF Ball Balancer* foi linearizado em torno do ponto de operação.

Em Souza *et al.* (2013), Oliveira *et al.* (2014a) e Souza *et al.* (2014b) os ganhos que as LMIs trazem para o controle chaveado são menos conservadores que aqueles propostos pelo clássico em Boyd *et al.* (1994). Para realizar o projeto de controle via LMIs, foram utilizados o *software* MatLab com a linguagem Yalmip (LOFBERG, 2004) e o *solver* SeDuMi.

1.1 Descrição sumária dos capítulos

Este trabalho está dividido em capítulos sumariamente descritos a seguir:

- Capítulo 1: É a introdução do trabalho, em que aborda brevemente sobre os controladores chaveados, controladores robustos e o controlador H_∞ , assim como a definição do problema e objetivo do trabalho.
- Capítulo 2: Apresenta-se algumas definições para a compreensão do método adotado para representar as falhas com efeito multiplicativo, associadas aos sensores do sistema linear de forma invariante no tempo.
- Capítulo 3: Neste capítulo é apresentado o sistema *2 DOF Ball Balancer* para o qual o controlador foi projetado e implementado. Este sistema é naturalmente instável e não linear, sujeito a falhas nos sensores do ângulo de carga e consequentemente na estimativa

de sua derivada. Assim, o capítulo faz a modelagem matemática da planta linearizada considerando a entrada exógena e o método adotado para representar as falhas.

- Capítulo 4: Neste capítulo é apresentado inicialmente o conceito de sistema robusto, isto é, sujeito a incertezas politópicas. Posteriormente introduz-se a norma H_∞ e o critério de estabilidade de Lyapunov para sistemas lineares e invariantes no tempo. Em seguida, é apresentado o modelo de controle chaveado e uma técnica de relaxamento das LMIs. Por fim, têm-se uma teoria de alocação dos autovalores, denominada D-estabilidade, que permite que o controlador atenda algumas características desejadas pelo projeto, como estabilidade, tempo de estabelecimento, *overshoot* e limites ao valor de ganho.
- Capítulo 5: Este capítulo apresenta as simulações e resultados teóricos do controlador projetado sujeito a falhas de 50% e uma entrada exógena de $w(t) = 0,003 N$, seguindo uma trajetória pré-determinada como referência. Os valores da norma e do ganho dos controladores, que foram projetados e utilizados na implementação, também são apresentados nesse capítulo.
- Capítulo 6: Apresenta-se os resultados dos ensaios práticos do controlador projetado no sistema *2 DOF Ball Balancer*, em que o sistema estava sob falhas de 50% e 30%, lidando com uma entrada exógena advinda de um soprador, que perturbava a posição da esfera. Foi introduzido um integrador no ramo de controle em um dos eixos do sistema, para levar o erro de rastreamento a zero.

2 DEFINIÇÕES DA FALHA EM UM SISTEMA LINEAR

Nesta seção será apresentado algumas definições para a compreensão do método adotado para representar as falhas com efeito multiplicativo (ACKERMANN, 1984), associadas aos sensores de sistemas lineares e invariantes no tempo.

Considere as definições em (1).

$$\rho \in \mathbb{R}^j, \rho_k \geq 0, \sum_{k=1}^j \rho_k = 1; \lambda \in \mathbb{R}^j, \lambda_l \geq 0, \sum_{l=1}^j \lambda_l = 1. \quad (1)$$

Os elementos ρ_k e λ_l são constantes e incertos, $j = 2^f =$ número de vértices do politopo e $f =$ número de termos que possuem incertezas. Define-se também (2), em que $s = j^2$.

$$\alpha \in \mathbb{R}^s, \sum_{i=1}^s \alpha_i = \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j \rho_k \lambda_l = 1, \alpha_i \geq 0. \quad (2)$$

Os valores medidos são obtidos pelos sensores sujeitos às falhas, assim, o sinal de cada sensor possui um ganho $\gamma \in \mathbb{R}^n$, variante no tempo, dado que $n =$ número de estados, que pertencem a um conjunto representado em (3).

$$\gamma = [\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n]', 0 < \gamma_{min} \leq \gamma \leq \gamma_{max}. \quad (3)$$

O valor máximo e mínimo do ganho são, respectivamente, $\gamma_{max} = \gamma(1)$ e $\gamma_{min} = \gamma(0)$ em que, para todo estado sem incerteza $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$.

Dessa forma, tem-se que o vetor de estados $x_m(t)$ medidos pelos sensores se relaciona com o vetor de estados $x(t)$ em (4) por uma matriz diagonal de ganhos (5).

$$x_m(t) = \Psi_z x(t) \quad (4)$$

$$\Psi_z = \sum_{k=1}^j \rho_k \Psi_{ak} = \sum_{k=1}^j \rho_k \text{diag}[\gamma_{a1} \gamma_{a2} \dots \gamma_{an}]. \quad (5)$$

Para o projeto dos politopos, define-se Ψ_z^{-1} em (6), pois em alguns vértices $\Psi_z \neq \Psi_z^{-1}$.

$$\Psi_z^{-1} = \sum_{l=1}^j \lambda_l \Psi_{bl}^{-1} = \sum_{l=1}^j \lambda_l \text{diag}[\gamma_{b1} \gamma_{b2} \dots \gamma_{bn}]. \quad (6)$$

O projeto do controlador considera todos os possíveis cenários de falhas máximas e ausência de falhas, utilizando as combinações do arranjo com repetição em (7).

$$AR_n^2 = n^2. \quad (7)$$

Para um sistema com $n = 4$ estados, com a medição de todos os estados com sensores sujeitos a falhas, tem-se: $AR_4^2 = 16$.

$$\Psi_{k=1} = \text{diag}[\gamma_{min} \gamma_{min} \gamma_{min} \gamma_{min}]; \Psi_{k=2} = \text{diag}[\gamma_{max} \gamma_{min} \gamma_{min} \gamma_{min}];$$

$$\Psi_{k=3} = \text{diag}[\gamma_{\min} \gamma_{\max} \gamma_{\min} \gamma_{\min}]; \Psi_{k=4} = \text{diag}[\gamma_{\min} \gamma_{\min} \gamma_{\max} \gamma_{\min}]; \dots$$

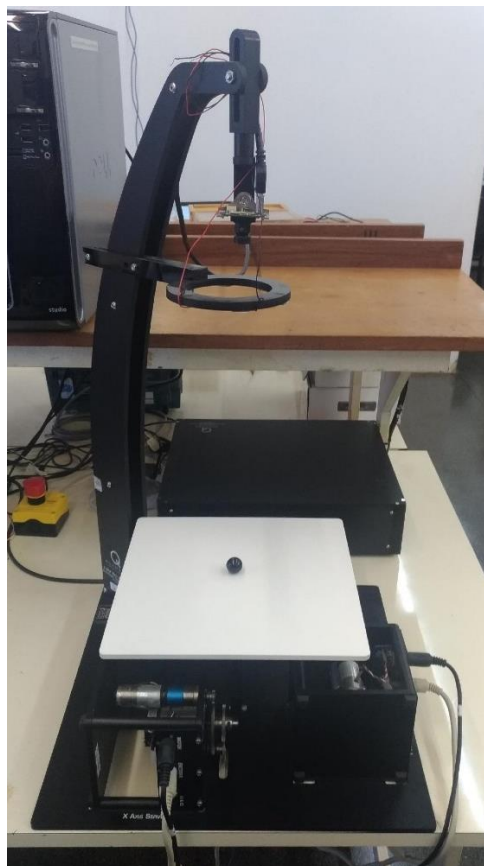
$$\Psi_{k=n^2-1} = \text{diag}[\gamma_{\max} \gamma_{\max} \gamma_{\max} \gamma_{\min}]; \Psi_{k=n^2=16} = \text{diag}[\gamma_{\max} \gamma_{\max} \gamma_{\max} \gamma_{\max}].$$

3 SISTEMA 2 DOF BALL BALANCER SUJEITO A FALHAS

A proposta deste trabalho é construir uma lei de controle chaveada utilizando os fundamentos que serão apresentados nos capítulos seguintes, e assim fazer a sua implementação prática no sistema 2 DOF Ball Balancer fabricado pela empresa canadense *Quanser Consulting* (QUANSER, 2008). Este módulo didático é baseado em uma mesa, articulada por dois servos motores que ao controlar a posição das engrenagens, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola na posição plana desejada, com a intenção de posicionar uma esfera em determinado local do plano cartesiano (X,Y) da mesa.

A planta possui uma câmera digital montada no alto, que captura imagens bidimensionais da placa e rastreia as coordenadas da bola em tempo real. Na Figura 1 o sistema é apresentado.

Figura 1: Fotografia do Sistema 2 DOF Ball Balancer.



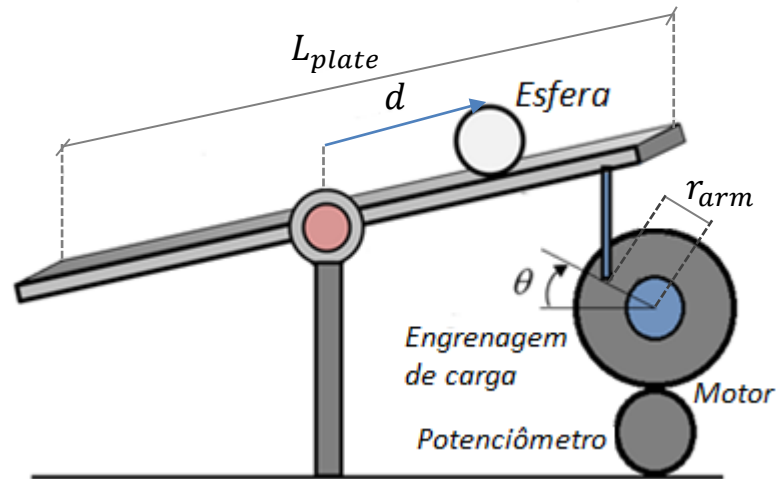
Fonte: Própria do autor.

Este sistema é muito útil para validação e aplicação de novas técnicas de controle, visto que é naturalmente instável e não linear. Também, é importante salientar que este

equipamento é parte integrante do Laboratório de Pesquisa em Controle da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (LPC-FEIS/UNESP).

A planta esquemática do *Ball Balancer* em uma dimensão é ilustrada pela Figura 2.

Figura 2: Planta esquemática do sistema *Ball Balancer* do eixo X.



Fonte: Própria do autor.

No manual fornecido pelo fabricante são dados os valores dos parâmetros da planta, os quais são listados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros do sistema

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa da esfera	m	0,01 [kg]
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra	r_{arm}	2,54 [cm]
Raio da esfera	r_b	1,00 [cm]
Comprimento da mesa	L_{plate}	27,5 [cm]
Constante do motor	$\mathcal{M}$	1,76 [rad/sV]
Constante de tempo	τ	0,0285 [s]
Momento de inércia da esfera oca	J	0,0067 [kgcm ²]
Aceleração da gravidade	g	9,80 [m/s ²]

Fonte: Adaptado de Quanser, 2008.

O processo de linearização do sistema pode ser visto em Quanser (2008), representado em (8).

$$\ddot{d}(t) = K_{bb}\theta(t), \quad \ddot{\theta}(t) = (\mathcal{M}u(t) - \dot{\theta}(t))/\tau. \quad (8)$$

Das quais $K_{bb} = 2mgr_{arm}r_b^2/(L_{place}(mr_b^2 + J))$ e $u(t)$ representa o sinal de entrada. Obtêm-se assim, o sistema em variáveis de estado representado em (9).

$$\begin{bmatrix} \dot{d}(t) \\ \ddot{d}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{M}/\tau \end{bmatrix} u(t). \quad (9)$$

Os estados representados são: posição da esfera " $d(t)$ ", ângulo de carga " $\theta(t)$ " e suas velocidades linear e angular. Tem-se que $u(t)$ é a entrada de controle do sistema.

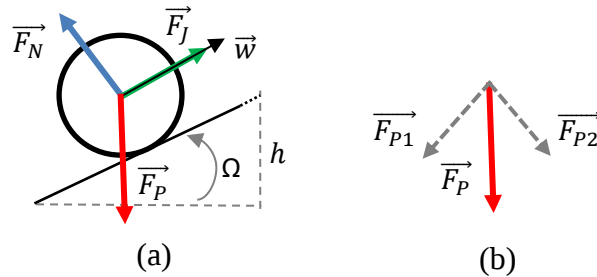
O *Ball Balancer* possui dois sensores para a medição da posição da esfera $d(t)$ e do ângulo de carga $\theta(t)$ da mesa fazendo-se necessário a estimação dos estados $\dot{d}(t)$ e $\dot{\theta}(t)$. Entretanto, na simulação e implementação do controlador, a derivada direta não é usada para estimar as velocidades, pois a medida obtida pelos sensores pode possuir algum ruído inerente e sua derivada pode resultar em um sinal de alta frequência amplificado que pode prejudicar o controle do sistema. Assim, os estados de velocidade $\dot{d}(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ foram estimados através de um filtro passa-alta de primeira ordem da forma $G(s) = 20s/(s + 20)$.

3.1 Entrada exógena

Considerando uma força externa $w(t)$ atuando sobre a esfera no sentido oposto ao movimento conforme a Figura 3, obtêm-se um novo equacionamento para o modelo matemático, descrito em (10), tal que:

$$\ddot{d}(t) = K_{bb}\theta(t) + r_b^2 w(t)/(mr_b^2 + J). \quad (10)$$

Figura 3: Diagrama de forças sobre a esfera com uma entrada exógena.



Fonte: Própria do autor.

Prova: Fazendo-se a análise de forças atuantes na esfera da Figura 3 e aplicando-se a Segunda Lei de Newton, têm-se (11).

$$\overrightarrow{m\ddot{d}} = \overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_J} + \overrightarrow{w}. \quad (11)$$

As forças atuantes são: Força Peso $\overrightarrow{F_p} = m\vec{g}$, Força Normal $\overrightarrow{F_N}$, Força Inercial $\overrightarrow{F_J} = J \frac{\ddot{d}}{r_b^2}$.

A Figura 3 (b) representa a decomposição vetorial da Força Peso das quais $F_{p1} = mg \sin \Omega$ e $F_{p2} = -F_N$. Tem-se a relação entre os ângulos θ e Ω em (12).

$$\sin \theta = h/r_{arm}; \sin \Omega = h/L_{plate} = 2 \sin \theta r_{arm}/L_{plate}. \quad (12)$$

Para ângulos pequenos $\sin \theta \cong \theta$, dessa forma é feita a linearização do sistema podendo ser reescrita por (13).

$$m\ddot{d} = \frac{2mg\theta r_{arm}}{L_{plate}} - \frac{J\ddot{d}}{r_b^2} - w(t) \rightarrow \ddot{d} = \frac{2mgr_{arm}r_b^2\theta}{L_{plate}(mr^2+J)} - \frac{w(t)r_b^2}{mr^2+J}, \quad (13)$$

Substitui-se K_{bb} e a prova está concluída. ■

Dessa forma, verifica-se que o sistema em variáveis de estado (9) pode ser reescrito como (14).

$$\begin{bmatrix} \dot{d}(t) \\ \ddot{d}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{M}/\tau \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -r_b^2/(mr^2+J) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t). \quad (14)$$

Foi realizado uma comparação destas equações com as respostas do modelo real.

3.2 Falha nos sensores

Neste trabalho será considerado uma falha na medição das variáveis de estado $d(t)$ e $\theta(t)$, manifestando-se com um efeito multiplicativo, assim como em Buzetti *et al.* (2016), da qual o ganho do sensor pode ser reduzido, variando a partir do seu valor nominal para um valor incerto, porém maior que zero.

Considere o sistema linear descrito em espaço de estados dado por (15).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Hw(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (15)$$

O acesso aos estados é dado pela leitura dos sensores da planta, dessa forma o controle se baseia no estado medido $x_m(t)$, e considera-se as incertezas como as falhas definidas na Seção 2. Assim, o trabalho irá considerar o sistema na forma (16).

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \bar{A}x_m(t) + \bar{B}u(t) + \bar{H}w(t), \\ y(t) &= Cx. \end{aligned} \quad (16)$$

Os politopos são calculados como sugere (17) para um sinal de controle (18).

$$\bar{A} = \Psi_z A \Psi_z^{-1}; \bar{B} = \Psi_z B; \bar{H} = \Psi_z H. \quad (17)$$

$$u(t) = -Kx_m(t). \quad (18)$$

Prova: Em (4) verifica-se que $x(t) = \Psi_z^{-1}x_m(t)$, assim, (16) pode ser reescrito como (19).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BKx_m(t) + Hw(t) \rightarrow \Psi_z^{-1}\dot{x}_m(t) = A\Psi_z^{-1}x_m(t) - BKx_m(t) + Hw(t) \rightarrow \\ \dot{x}_m(t) &= \Psi_z A \Psi_z^{-1}x_m(t) - \Psi_z BKx_m(t) + \Psi_z Hw(t). \end{aligned} \quad (19)$$

sendo $\bar{A} = \Psi_z A \Psi_z^{-1}$, $\bar{B} = \Psi_z B$ e $\bar{H} = \Psi_z H$ a prova está concluída. ■

Com definições em (5) e (6), $\bar{A}$, $\bar{B}$ e $\bar{H}$ podem ser entendidas como (20), (21) e (22) respectivamente.

$$\bar{A} = \Psi_z A \Psi_z^{-1} = \sum_{i=1}^s \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i \Psi_{ai} A \Psi_{bi}^{-1} = \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j \rho_k \lambda_l \Psi_{ak} A \Psi_{bl}^{-1}, \quad (20)$$

$$\bar{B} = \Psi_z B = \sum_{i=1}^s \alpha_i B_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i \Psi_{ai} B = \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j \rho_k \lambda_l \Psi_{ak} B, \quad (21)$$

$$\bar{H} = \Psi_z H = \sum_{i=1}^s \alpha_i H_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i \Psi_{ai} H = \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j \rho_k \lambda_l \Psi_{ak} H. \quad (22)$$

Para implementação e simulação do controlador, uma falha de até 50% foi inserida via *software* no sensor do ângulo de carga θ , que ocorre simultaneamente em $\dot{\theta}$ uma vez que esta medição ocorre a partir do mesmo sensor.

Com estas considerações, as matrizes Ψ_{ak} e Ψ_{bl}^{-1} para o sistema 2 *DOF Ball Balancer* são dadas por (23) e (24)

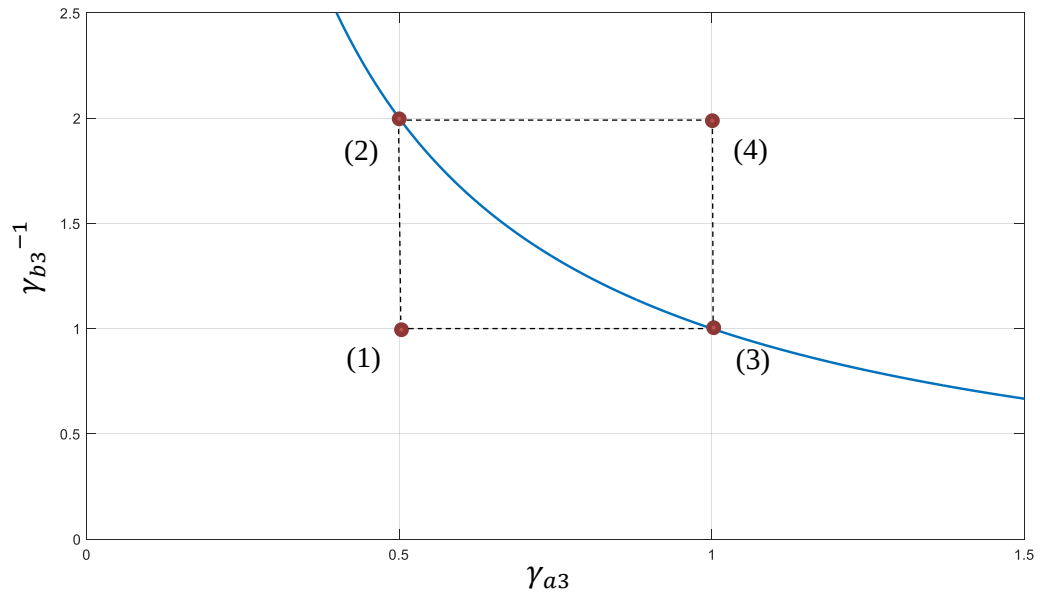
$$\Psi_{ak} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_{a3} \ \gamma_{a4}]; \gamma_{a4} = \gamma_{a3}; 0,5 \leq \gamma_{a3} \leq 1. \quad (23)$$

$$\Psi_{bl}^{-1} = \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_{b3}^{-1} \ \gamma_{b4}^{-1}]; 1 \leq \gamma_{b3}^{-1} = \gamma_{b4}^{-1} \leq 2. \quad (24)$$

Verifica-se um ganho mínimo $\gamma_{amin} = 0,5$ para representar a falha de 50% e um ganho máximo de $\gamma_{amax} = 1$ que representa ausência de falha.

Há dois estados com falhas, dessa forma, têm-se que o $AR_2^2 = 4$ é o número de possíveis combinações de falhas no *Ball Balancer*, descrevendo-se assim $j = 4$ vértices do politopo, ilustrados na Figura 4.

Figura 4: Vértices do politopo do sistema 2 DOF Ball Balancer



Fonte: Própria do autor.

Para o projeto do controlador, construiu-se o politopo conforme as combinações na Tabela 2.

Tabela 2: Valores dos ganhos das matrizes Ψ_z e Ψ_z^{-1} conforme vértices do politopo.

α	γ_{a3}	γ_{b3}^{-1}	Ψ_z	Ψ_z^{-1}
1	<i>min</i>	<i>min</i>	$diag[1 \ 1 \ 0,5 \ 0,5]$	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$
2	<i>min</i>	<i>max</i>	$diag[1 \ 1 \ 0,5 \ 0,5]$	$diag[1 \ 1 \ 2 \ 2]$
3	<i>max</i>	<i>min</i>	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$
4	<i>max</i>	<i>max</i>	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$	$diag[1 \ 1 \ 2 \ 2]$

Fonte: Própria do autor.

4 PROJETO DO CONTROLADOR ROBUSTO H_∞ CHAVEADO

Neste capítulo é apresentado a metodologia utilizada para projetar o controlador robusto H_∞ chaveado. A lei de chaveamento busca a minimização da função quadrática de Lyapunov para o caso de incertezas na matriz A e B do sistema. Garante-se no projeto um custo H_∞ que minimiza o efeito de uma entrada exógena no sistema, aplica-se também, uma técnica de alocação de polos denominada D-estabilidade.

4.1 Controlador Robusto H_∞

Considere o sistema linear invariante no tempo, descrito em espaço de estados, com a entrada nula, isto é $u(t) = 0$, em (25).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Hw(t), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{25}$$

A matriz função transferência entre $x(s)$ e $y(s)$ é dada por (26).

$$R(s) = C(sI - A)^{-1}H.\tag{26}$$

A entrada exógena $w(t)$, considerada não nula e finita, pode ser transmitida por um canal de comunicação, neste contexto pode representar ruídos aditivos no sinal de controle ou perturbações como a influência do vento na posição da esfera. Dessa forma, suponha que $w(t)$ é um sinal de energia limitado representado em (27).

$$\int_0^{+\infty} w(\varepsilon)'w(\varepsilon)d\varepsilon < +\infty \leftrightarrow w(t) \in \mathcal{L}_2.\tag{27}$$

A norma H_∞ pode ser caracterizada pelo menor valor de δ , tal que (28).

$$\int_0^t y(t)'y(t)dt \leq \int_0^t w(t)'w(t)dt \rightarrow \|y(t)\|_2 \leq \delta \|w(t)\|_2.\tag{28}$$

De maneira similar, estabelece-se (29)

$$\|R(s)\|_\infty < \delta \leftrightarrow y(t)'y(t) < \delta^2 w(t)'w(t) \rightarrow y(t)'y(t) - \delta^2 w(t)'w(t) < 0.\tag{29}$$

As matrizes que descrevem o sistema *2 DOF Ball Balancer* estão em função das incertezas descritas em (20), (21) e (22), e pertencem a um politopo $\mathcal{D}$ dado por (30).

$$\mathcal{D} = \{(\bar{A}, \bar{B}, C, D) = \sum_{i=1}^s \alpha_i (A_i, B_i, C, D); \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0\}.\tag{30}$$

O custo garantido H_∞ é um critério importante para analisar o desempenho e robustez de sistemas dinâmicos tal que $\|R(s)\|_\infty < \delta, \forall (A_i, B_i, C, D) \in \mathcal{D}$. Neste trabalho a planta utilizada não possui matriz D .

Para sistemas SISO (*Single Input-Single Output*) a norma H_∞ corresponde ao máximo valor do diagrama de magnitude de Bode. Para sistemas MIMO (*Multiple Input - Multiple Output*) é o máximo valor atingido pelo diagrama de valores singulares (BOYD *et al.*, 1994; ZHOU *et al.*, 1996).

Para que o sistema (25) seja estável, considere a candidata à função de Lyapunov dada em (31). Verifique que a matriz P é simétrica, positiva definida.

$$\begin{aligned} v(x) &= x(t)'Px(t); P = P' > 0, \\ \dot{v}(x) &= \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) < 0. \end{aligned} \quad (31)$$

De (29) e (31), observa-se que (32).

$$\dot{v}(x) + y(t)'y(t) - \delta^2 w(t)'w(t) < 0. \quad (32)$$

A equação (32) é conhecida na literatura como *Bounded real lemma*.

4.1.1 LMI do sistema com uma entrada exógena com falha

Para projetar o controlador robusto H_∞ chaveado, é necessário realizar manipulações matemáticas para que as considerações estejam na forma de LMIs. Para isso, faz-se a substituição de $\dot{x}(t)$ e $\dot{v}(x)$ dados em (25) e (31) respectivamente, e aplica-se o complemento de Schur, obtendo-se a LMI (33).

$$\begin{bmatrix} \bar{A}P + P\bar{A}' & \bullet & \bullet \\ \bar{H}'P & -\mu I & \bullet \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

sendo que $\mu = \delta^2$ é adotado para que a matriz seja linear e o símbolo $\bullet$ representa o bloco simétrico transposto. Se a condição (33) for satisfeita para $P = P' > 0$, o sistema é assintoticamente estável.

Prova: Considere o sistema descrito em (34), com $u(t) = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{H}w(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (34)$$

com a substituição de $\dot{x}(t)$ e $\dot{v}(x)$ em (32), têm-se (35):

$$(x_m' \bar{A}' + w' \bar{H}') Px_m + x_m' P (\bar{A}x_m + \bar{H}w) + x_m' C' Cx_m - \delta^2 w' w < 0. \quad (35)$$

Agrupa-se os termos, obtêm-se (36) e (37).

$$x_m' (\bar{A}' P + P \bar{A} + C' C) x_m + w' \bar{H}' P x_m + x_m' P \bar{H} w - w' \delta^2 I w < 0 \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} x_m' & w' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}' P + P \bar{A} + C' C & P \bar{H} \\ \bar{H}' P & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ w \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

$$-\begin{bmatrix} \bar{A}' P + P \bar{A} & P \bar{H} \\ \bar{H}' P & -\mu I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -C' \\ 0 \end{bmatrix} I [-C \quad 0] > 0. \quad (38)$$

A equação (38) é obtida aplicando-se o complemento de Schur em (37), e multiplicando por (-1), concluindo-se a prova. ■

4.2 Projeto do controle Robusto Chaveado H_∞

Nesta seção será estudado o controlador H_∞ chaveado para sistemas lineares e invariantes no tempo na forma (16), com o vetor de estados medido x_m sujeito a falhas e uma entrada exógena $w(t)$.

A lei de controle utilizada é dada por (38)

$$u(t) = u_\sigma(t) = -K_\sigma x_m(t). \quad (38)$$

A estratégia de chaveamento de malha fechada guia trajetórias de qualquer condição inicial $x(0) = x_0$ até um ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{X}_e$ desejado, sendo $\mathbb{X}_e$ um conjunto de pontos de equilíbrio a ser determinado.

Em Buzetti *et al.* (2016), o argumento σ deverá ser responsável pelo chaveamento entre os controladores, que tende a selecionar o valor que minimiza a derivada temporal da função de Lyapunov (31), seguindo a lei (39).

$$\sigma(x) = \operatorname{argmin}_{r \in \mathcal{K}_r} \{x_m(t)' P Q_r P x_m(t)\}. \quad (39)$$

Assim, $\sigma(x)$ possui o valor do índice r que resulta no menor valor de $x_m(t)' P Q_r P x_m(t)$. Caso dois ou mais $P Q_r P$ produzirem o menor valor de $x_m(t)' P Q_r P x_m(t)$, então, $\sigma(x)$ assumirá o valor de menor índice r entre eles.

Teorema 1 (Souza *et al.* 2014) Suponha a existência de uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $M_r, Q_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Z_r \in \mathbb{R}^{m \times n}$ para $m =$ número de entradas, e um escalar $\partial \geq 0$ para todo i e $r \in \mathcal{K}$ tais que.

$$-B_i Z_r - Z_r' B_i' - M_i - Q_r < 0, \quad (40)$$

$$X A_i' + A_i X + M_i + Q_r + 2\partial X < 0. \quad (41)$$

Em que $X = P^{-1}$ e os controladores K_r são obtidos por $K_r = Z_r X^{-1}$.

Prova: Em Boyd *et al.* (1994) utiliza-se a função de Lyapunov quadrática (31) para estabelecer um valor mínimo para a taxa de decaimento em um sistema como (16) acrescentando uma condição em que $\dot{v}(x_m) \leq -2\partial v(x_m)$. Dessa forma, para uma entrada exógena nula $w(t) = 0$ e substituindo-se o valor de $\dot{x}_m$ obtém-se (42).

$$\dot{v}(x_m) + 2\partial v(x_m) = x_m'(\bar{A}'P + P\bar{A} - K_\sigma'\bar{B}'P - P\bar{B}K_\sigma)x_m \quad (42)$$

Considere (43).

$$-(P\bar{B}K_r + K_r'\bar{B}'P) < PM_iP + PQ_rP. \quad (43)$$

Então, de (43) tem-se (44).

$$-x_m'(P\bar{B}K_\sigma + K_\sigma'\bar{B}'P)x_m = -\sum_{i=1}^s \alpha_i x_m'(PB_iK_\sigma + K_\sigma'B_i'P)x_m \leq \sum_{i=1}^s \alpha_i x_m'PM_iPx_m + x_m'PQ_rPx_m. \quad (44)$$

O mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual a toda combinação convexa dos elementos deste conjunto. Em (2) e (39), verifica-se que $x_m(t)'PQ_rPx_m(t) = \min_{r \in \mathcal{K}_r} \{x(t)'PQ_rPx(t)\} \leq \sum_{i=1}^s \alpha_i x_m(t)'PQ_iPx_m(t)$.

Então de (44), tem-se (45).

$$-x_m'(P\bar{B}K_\sigma + K_\sigma'\bar{B}'P)x_m \leq \sum_{i=1}^s \alpha_i x_m'(PM_iP + PQ_rP)x_m. \quad (45)$$

Como $\sum \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$, obtém-se (46).

$$\dot{v}(x_m) + 2\partial v(x_m) < 0 \quad (46)$$

Se (47) for verdade.

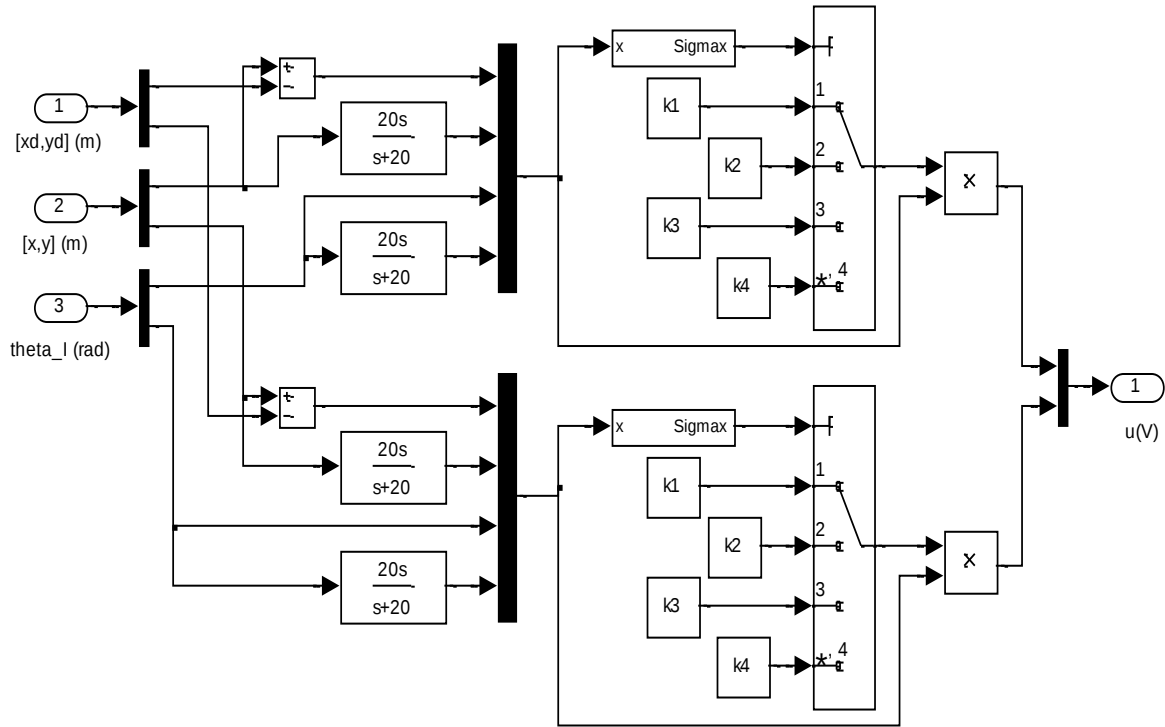
$$A_i'P + PA_i + PM_iP + PQ_rP + 2\partial P < 0. \quad (47)$$

Pré multiplicando (43) e (47) por $X = P^{-1}$ e pós multiplicando pelo mesmo, as LMIs (40) e (41) são obtidas. ■

A estratégia de chaveamento de malha fechada $\overline{\sigma(x)}_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}_r$ tem o intuito de guiar trajetórias de qualquer condição inicial $x(0) = x_0$ até um ponto de referência $x_{ref} \in \mathbb{X}_{ref}$ desejado, sendo $\mathbb{X}_{ref}$ um conjunto de pontos pré-determinados. Todavia, o controlador deve levar em conta o índice de desempenho H_∞ definido anteriormente.

A Figura 5 representa o diagrama de blocos do funcionamento desta lei de chaveamento.

Figura 5: Diagrama de Blocos do controle chaveado



Fonte: Própria do autor.

O sistema realimentado que será trabalhado, por fim, é formulado substituindo (38) em (16), conforme apresentado em (48).

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= (\bar{A} - \bar{B}K_\sigma)x_m(t) + Hw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (48)$$

Reformulando (33) para o sistema (48), tem-se o Teorema 2.

Teorema 2. O sistema (48) é assintoticamente estável se, dado um escalar $\mu > 0$, existirem matrizes $X = X' > 0$ e $Z_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$, de dimensões adequadas, satisfazendo o seguinte problema de otimização (BOYD *et al.* 1994).

$$\min \mu$$

$$\begin{bmatrix} He\{\bar{A}X\} - Z_r' \bar{B}' - \bar{B}Z_r & \bar{H} & XC' \\ \bullet & -\mu I & 0 \\ \bullet & \bullet & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (49)$$

sendo que $He\{\}$ representa o operador hermitiano. Considere que $X = P^{-1}$ e os controladores K_r são obtidos por $K_r = Z_r X^{-1}$.

Prova: Substituindo $\dot{x}_m(t)$ de (48) e $\dot{v}(x_m)$ de (31) em (32), obtém-se (50). Considere $\sigma = r$.

$$(x_m(t)'(\bar{A}' - K_\sigma' \bar{B}') + w(t)' H') P x_m(t) + x_m(t)' P ((\bar{A} - \bar{B} K_\sigma) x_m(t) + H w(t)) + (x_m(t)' (C - D K_\sigma)) (C - D K_\sigma) - \gamma^2 w(t)' w(t) < 0. \quad (50)$$

Agrupar-se os termos de (50), obtêm-se (51).

$$\begin{aligned} & x_m(t)' ((\bar{A}' - K_\sigma' \bar{B}') P + P(\bar{A} - \bar{B} K_\sigma) + (C' - K_\sigma' D')(C - D K_\sigma)) x_m(t) + w(t)' H' x(t) + \\ & x_m(t)' (P \bar{H}) w(t) + w(t)' (-\gamma^2 I) w(t) < 0 \rightarrow \\ & [x_m(t)' \quad w(t)'] \begin{bmatrix} \bar{A}' P - K_\sigma' \bar{B}' P + P \bar{A} - P \bar{B} K_\sigma + (C' - K_\sigma' D')(C - D K_\sigma) & P \bar{H} \\ \bar{H}' P & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (51) \end{aligned}$$

Aplica-se o complemento de Schur em (51), têm-se (52).

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} \bar{A}' P - K_\sigma' \bar{B}' P + P \bar{A} - P \bar{B} K_\sigma & P \bar{H} \\ \bar{H}' P & -\mu I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(C' - K_\sigma' D') \\ 0 \end{bmatrix} I [(C - D K_\sigma) \quad 0] > 0 \rightarrow \\ & \begin{bmatrix} \bar{A}' P - K_\sigma' \bar{B}' P + P \bar{A} - P \bar{B} K_\sigma & \bullet & \bullet \\ \bar{H}' P & -\mu I & \bullet \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (52) \end{aligned}$$

Em (52), fez-se a transformação de congruência e substituiu-se $X = P^{-1}$ e $Z_r = K_r X$, obtendo (53).

$$\begin{bmatrix} X \bar{A}' - Z_i' \bar{B}' + \bar{A} X - \bar{B} Z_i & \bullet & \bullet \\ \bar{H}' & -\mu I & \bullet \\ C X & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (53)$$

Assim, a prova está concluída. ■

Pelo Teorema 1, a parcela da primeira linha e coluna pôde ser substituída como ilustra (54)

$$\begin{bmatrix} He\{\bar{A} X\} + M_j + Q_j & \bullet & \bullet \\ \bar{H}' & -\mu I & \bullet \\ C X' & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (54)$$

Entretanto, o valor muito alto na matriz H , deste trabalho, exige muito dos controladores. Assim, foi considerado, no projeto dos controladores, o problema de saturação em controladores chaveados, reduzindo-se a norma de controle, utilizando o Teorema 3.

Teorema 3: Em Buzetti (2017), definiu-se que, dada uma constante $\mu_0 > 0$, então a norma dos controladores K_r , pode ser descrita utilizando a minimização de η , $\eta > 0$, tal que $K_j K_j' < \eta I / \mu_0^2$. O valor ótimo de η pode ser obtido solucionando o problema de otimização (55) em conjunto com as LMIs de estabilidade.

$$\min(\eta)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I & Z_r \\ Z_r' & I \end{bmatrix} > 0; \quad (55)$$

$$X > \mu_0 I. \quad (56)$$

Prova: Utilizando o complemento de Schur em (55) tem-se (57), e pré-multiplicando e pós multiplicando (56) por $\sqrt{X}$, obtém-se (58).

$$Z_r Z_r' < \eta I. \quad (57)$$

$$\sqrt{X} X \sqrt{X} > \sqrt{X} \mu_0 I \sqrt{X} \rightarrow X X > \mu_0 X \rightarrow X < X X / \mu_0. \quad (58)$$

Pré-multiplicando (58) por K_r e pós multiplicando por K_r' , lembrando que $K_r = Z_r X^{-1}$ obtém-se (59).

$$\eta I / \mu_0 > Z_i Z_i' / \mu_0 = K_j X X K_j' / \mu_0 > K_j X K_j' > K_j \mu_0 I K_j'. \quad (59)$$

Conclui-se que $Z_r Z_r' < \eta I$, e a prova está finalizada. ■

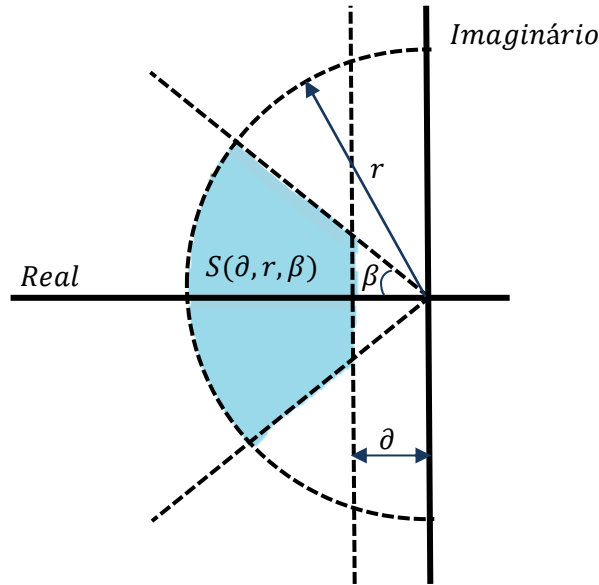
Estas LMIs foram consideradas na obtenção dos controladores K_r deste trabalho.

O projeto de controladores H_∞ está relacionado com aspectos no domínio da frequência e fornece pouco controle sobre o comportamento do transitório e a localização dos autovalores de malha fechada. Todavia, o tempo de resposta satisfatório muitas vezes pode ser alcançado, forçando os pólos de malha fechada em uma sub-região adequada no semiplano esquerdo.

4.3 Alocação de autovalores por D-estabilidade

Em Chilali ; Gahinet (1996) é proposta uma região $S(\partial, r, \beta)$, chamada de critério de D-estabilidade, que restringe os autovalores de cada vértice do politopo em malha fechada como é ilustrado na Figura 6. Há uma grande motivação em agrupar os polos s em regiões específicas, uma vez que a resposta transitória de um sistema linear está relacionada à localização destes, como o tempo de estabelecimento e *overshoot*.

Figura 6: Região de D-estabilidade $S(\partial, r, \beta)$.



Fonte: Adaptado de Chilali ; Gahinet (1996).

A região $S(\partial, r, \beta)$ é definida por uma taxa de decaimento $Re(s) \leq -\partial$, um setor cônico que garante uma relação de amortecimento mínimo $\zeta = \cos\beta$ e um disco de raio r para uma frequência não amortecida máxima de $\omega_d = r \sin\beta$, como é mostrado na Figura 4.

Após uma extensão do teorema de Lyapunov para estas regiões com uma caracterização baseada em LMI, é obtido o Teorema 4 que restringe todos os autovalores de $\bar{A} - \bar{B}K_\sigma$ na região pré-definida $S(\partial, r, \beta)$.

Teorema 4. O sistema em malha fechada (48), com lei de controle (38) possui polos na região $S(\partial, r, \beta)$ se existir uma matriz simétrica positiva X e um conjunto de matrizes Z_j que satisfazem as LMIs em (60), (61) e (62) (CHILALI ; GAHINET, 1996).

$$\bar{A}X + X\bar{A}' - Z_r'\bar{B}' - \bar{B}Z_r + 2\partial X < 0 \rightarrow \bar{A}X + X\bar{A}' + M_i + Q_r + 2\partial X < 0, \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & \bar{A}X - \bar{B}Z_r \\ \bullet & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad (61)$$

$$\begin{bmatrix} \phi & \cos(\beta)(\bar{A}X - X\bar{A}' - \bar{B}Z_r + Z_r'\bar{B}') \\ \bullet & \phi \end{bmatrix} < 0, \quad (62)$$

sendo $\phi = \sin(\beta)(\bar{A}X + X\bar{A}' - \bar{B}Z_r - Z_r'\bar{B}')$.

A prova deste teorema está em (CHILALI ; GAHINET, 1996).

Observação: A LMI (60) foi adaptada considerando-se o Teorema 1.

5 RESULTADOS TEÓRICOS – SIMULAÇÕES

Nesta seção será verificado as simulações e resultados teóricos obtidos neste trabalho.

Primeiramente, foi estudado a representação em espaço de estados medidos como segue (63), por meio de (14), (17) e os valores de Ψ_{ak} e Ψ_{bl}^{-1} fornecidos pela Tabela 2.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m = & \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_{a3} \ \gamma_{a3}] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_{b3}^{-1} \ \gamma_{b3}^{-1}] x_m \\ & - \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_{a3} \ \gamma_{a3}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\mathcal{M}}{\tau} \end{bmatrix} K_{\sigma} x_m + \text{diag}[1 \ 1 \ \gamma_{a3} \ \gamma_{a3}] \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{r_b^2}{(mr^2 + J)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w; \\ \dot{x}_m = & \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb}\gamma_{b3}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{a3}\gamma_{b3}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\gamma_{a3}\gamma_{b3}^{-1}}{\tau} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\mathcal{M}\gamma_{a3}}{\tau} \end{bmatrix} K_{\sigma} \right) x_m - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r_b^2}{(mr^2 + J)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w. \end{aligned} \quad (63)$$

Fazendo-se as considerações de Buzetti (2017), tem-se que, embora as matrizes Ψ_{ak} e Ψ_{bl}^{-1} tenham sido utilizadas de forma independente, neste caso particular elas são dependentes da mesma falha, dessa forma $\gamma_{a3}\gamma_{b3}^{-1} = 1$, portanto, verifica-se (64).

$$\dot{x}_m = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb}\gamma_{b3}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_m\gamma_{a3}}{\tau} \end{bmatrix} K_{\sigma} \right) x_m - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r_b^2}{(mr^2 + J)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w. \quad (64)$$

Observa-se também que, no caso do sistema *2 DOF Ball Balancer* com perturbação na esfera, as falhas nos ângulos de carga e sua derivada não alteram a matriz H .

Substituindo-se os valores de Ψ_{ak} e Ψ_{bl}^{-1} conforme Tabela 2, obtêm-se os vértices do politopo utilizados no projeto do controlador, para ambos eixos X e eixo Y como segue (65).

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}; A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix};$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{0,5\mathcal{M}}{\tau} \end{bmatrix}'; B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\mathcal{M}}{\tau} \end{bmatrix}'; \quad (65)$$

Por fim, substituindo-se os valores da Tabela 1, obtêm-se os vértices utilizados no projeto do controlador (65).

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0862 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,8772 \end{bmatrix}; A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1724 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,8772 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = B_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 31,4035]'; B_3 = B_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 62,8070]';$$

$$H = [0 \ 60 \ 0 \ 0].$$

Os controladores dados em (67), a norma H_∞ e o coeficiente η (66) foram calculados utilizando as LMIs apresentadas em (40), (54), (55), (60), (61) e (62); considerou-se os valores $\partial = 1,2$, $r = 35$ e $\beta = 1,5 \text{ rad}$.

$$\mu = 3,8837 \times 10^2; \eta = 9,7428 \times 10^4 \quad (66)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= [90,4893 \ 87,9213 \ 30,0382 \ 0,6662], \\ K_2 &= [70,7875 \ 69,7416 \ 28,4539 \ 0,5566], \\ K_3 &= [45,2582 \ 43,9713 \ 15,0231 \ 0,3330], \\ K_4 &= [35,3929 \ 34,8699 \ 14,2263 \ 0,2783]. \end{aligned} \quad (67)$$

Verifica-se, na Figura 7, que todos os autovalores de malha fechada se encontram dentro da região $S(\partial, r, \beta)$ estabelecida. Os autovalores φ_i de $\bar{A} - K_\sigma \bar{B}$ foram calculados pela função “*eig()*” no *Matlab*.

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} -25,9541 + 7,4200i \\ -25,9541 - 7,4200i \\ -1,8750 + 0,8057i \\ -1,8750 - 0,8057i \end{bmatrix}, \quad (68)$$

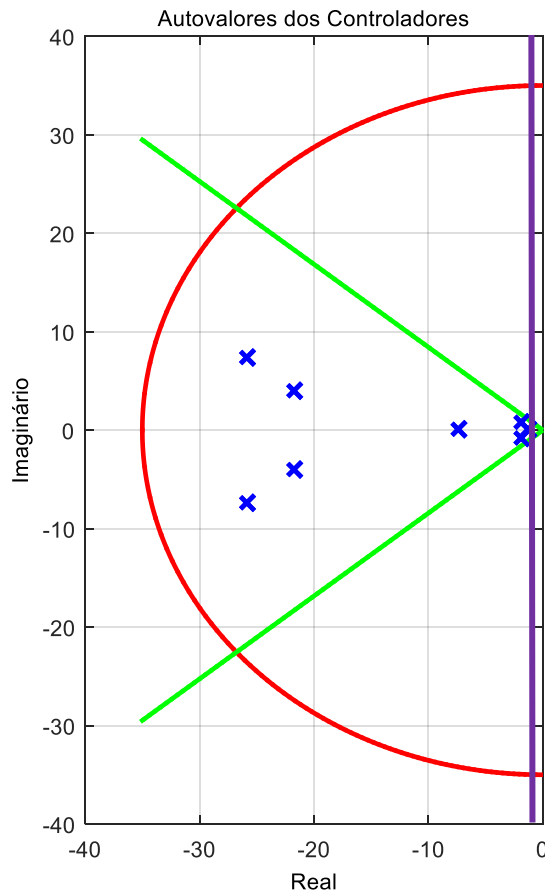
$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} -21,8007 + 3,9302i \\ -21,8007 - 3,9302i \\ -7,3584 \\ -1,3149 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} -25,9524 + 7,4451i \\ -25,9524 - 7,4451i \\ -1,8748 + 0,8060i \\ -1,8748 - 0,8060i \end{bmatrix}, \quad (70)$$

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} -21,7997 + 3,9358i \\ -21,7997 - 3,9358i \\ -7,3583 \\ -1,3149 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Verifica-se que $\varphi_1 \cong \varphi_3$ e $\varphi_2 \cong \varphi_4$, isto se deve ao fato de que $A_1 = A_3$ e $A_2 = A_4$.

Figura 7. Autovalores dos controladores chaveados.

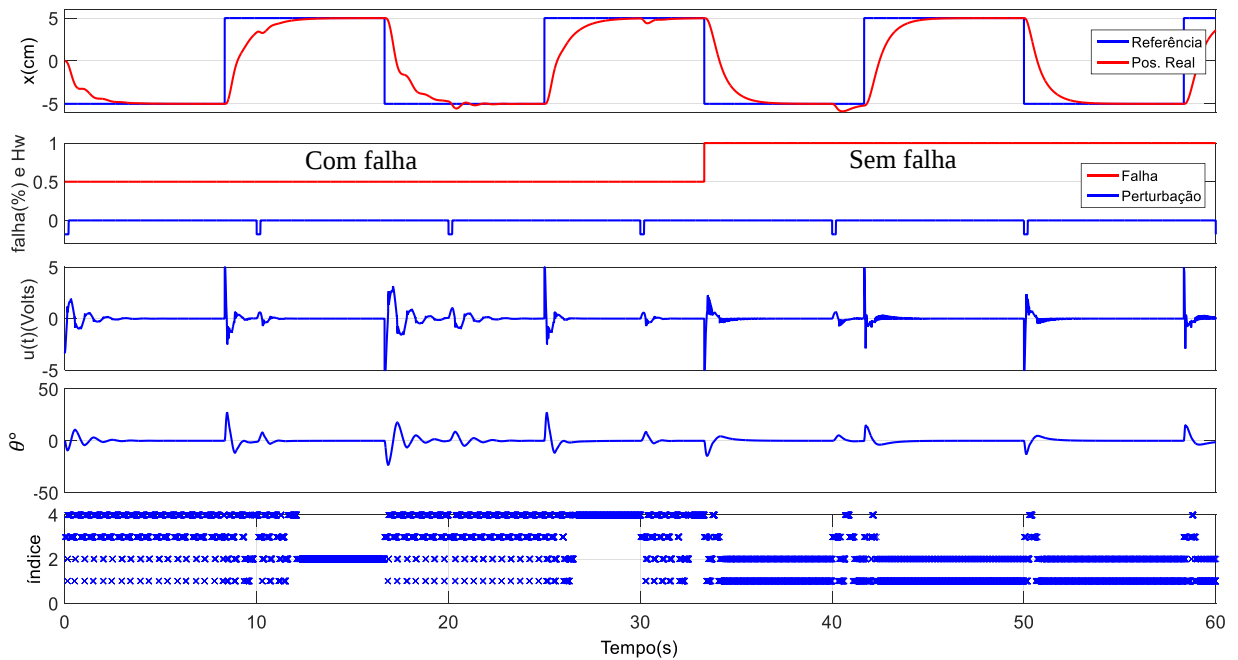


Fonte: Própria do autor.

Para realizar a simulação, foi inserida uma entrada exógena de $w(t) = 0,003N$ subtraindo a posição da esfera no eixo X e Y, um trem de pulsos com período de 10 s e largura de pulso de 2%. Uma onda quadrada que varia de 1 a $\gamma_{a3} = 0,5$, isto é, do estado sem falha para de uma falha de 50%, foi utilizada para a simulação.

Dessa forma, foi obtida a simulação via *Matlab/Simulink* presente na Figura 8 para o eixo X e a Figura 9 representando o eixo Y em que a esfera deve seguir uma trajetória quadrada com dois sinais de onda quadrada de frequência $F_{Ref} = 0,06 \text{ hz}$ com um atraso entre eixo X e eixo Y de $4,1667 \text{ s}$. A Figura 10 representa a mesma simulação, mas com uma trajetória circular que é menos brusca, sendo a referência criada a partir de sinais senoidais com $F_{Ref} = 0,06 \text{ hz}$ com atraso entre os eixos de também. Devido à similaridade, a simulação demonstra apenas o eixo Y. Tem-se que x representa o valor do estado d no eixo X e y no eixo Y.

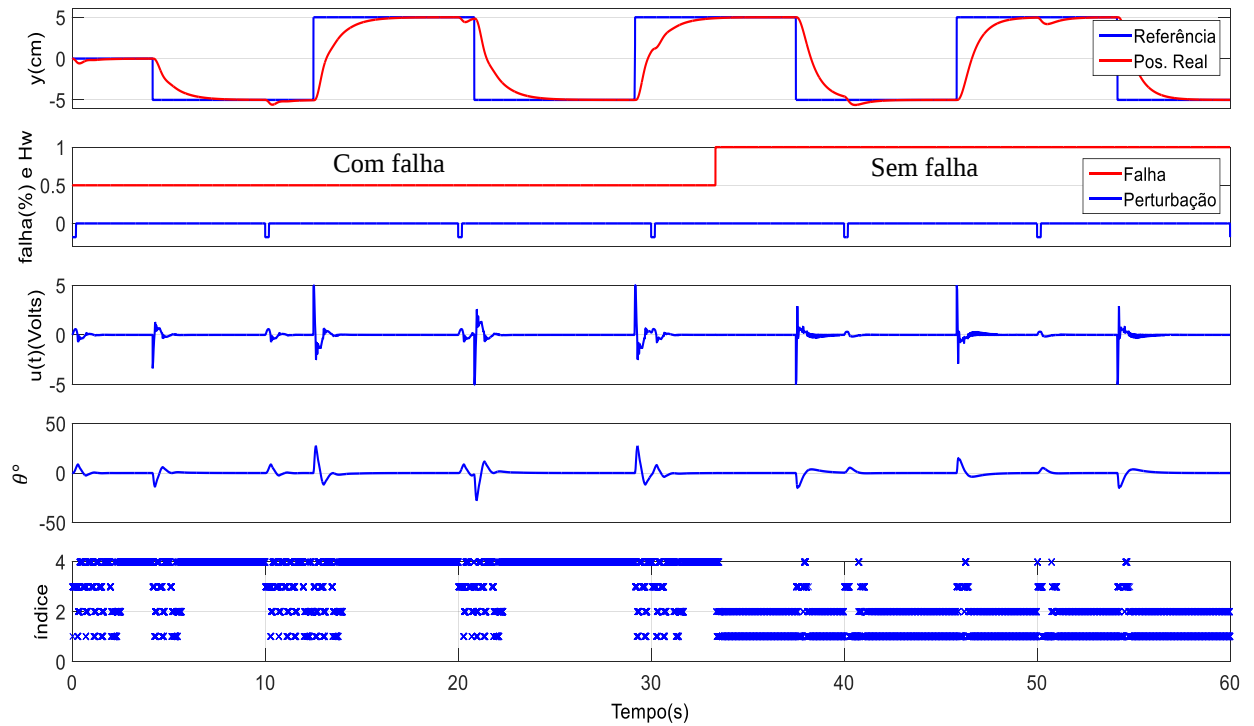
Figura 8. Eixo X: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $Hw(t)$ e $\sigma(x_m)$.



Fonte: Próprio do autor.

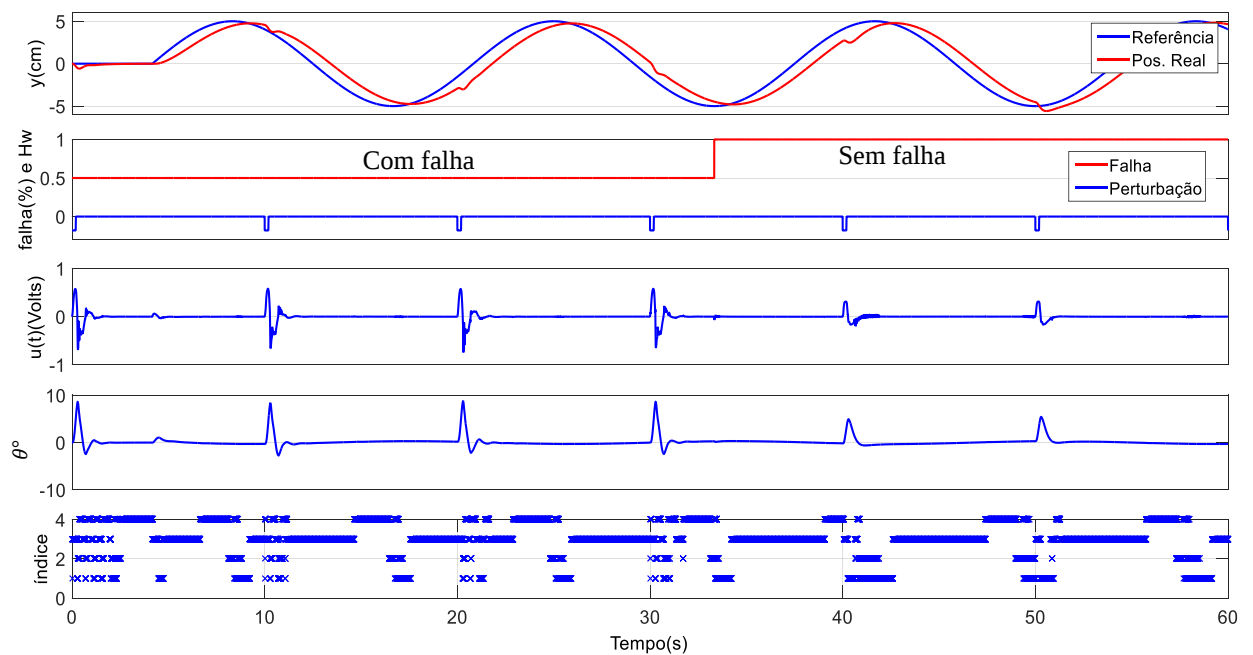
Em condições de falha nula e $w(t) = 0$, verifica-se que os controladores se alteram com maior frequência entre as chaves $\sigma = 1, 2$ na condição de estabilidade, porém há perturbação ou a referência sofre um degrau, as chaves 3 e 4 são selecionadas. O sistema entra em regime em aproximadamente $2,5 \text{ s}$. Observa-se também que, com a entrada exógena e as falhas no sistema, este entra em regime com uma duração muito próxima da primeira situação, viabilizando o uso deste controlador para ambos os eixos.

Figura 9. Eixo Y: Posição $y(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $Hw(t)$ e $\sigma(x_m)$; referência quadrada.



Fonte: Próprio do autor

Figura 10. Eixo Y: Posição $y(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $Hw(t)$ e $\sigma(x_m)$; referência circular.



Fonte: Próprio do autor

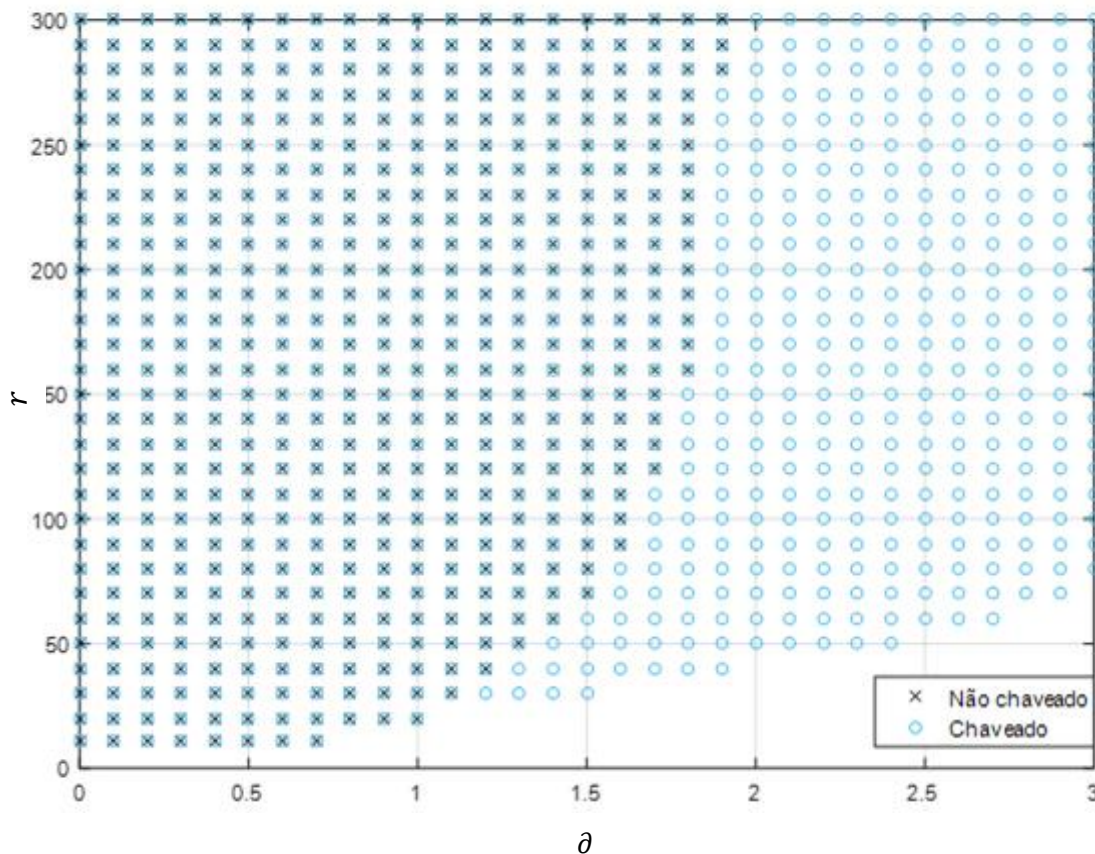
As falhas não prejudicaram o sistema para cumprir sua trajetória e houve alternância em todas as chaves, entretanto observa-se que há uma oscilação no sinal de controle, assim como a entrada exógena provoca um pico de energia neste, porém é um pico de baixa voltagem.

O Teorema 1 não garante a estabilidade do sistema quando ocorre a falha uma vez que se definiu a falha invariante no tempo. Mas optou-se por manter os resultados do sistema sem e com falha em um único gráfico para facilitar a visualização do seu comportamento.

5.1 Factibilidade dos controladores chaveados e de ganho constante

O controlador chaveado apresenta uma região de factibilidade maior ou igual do que a região referente ao controlador com ganho constante. Os resultados comprovam que o controlador chaveado pode apresentar uma área factível maior do que a obtida com um ganho constante, isto é, um valor fixo para o controlador K . Utilizando o sistema *2 DOF Ball Balancer*, como exemplo, as áreas de factibilidade estão contidas na Figura 11.

Figura 11: Região de factibilidade do controle não chaveado e chaveado



Fonte: Próprio do autor.

A grande vantagem do uso dos controladores chaveados está em sua região de factibilidade. Na programação, foi calculado o controlador H_∞ sem chaveamento, ou seja, com apenas uma matriz Z para fins de comparação.

A região analisada foi de $0 < \vartheta < 3$; $0 < r < 300$. A análise das figuras deixa evidente a relaxação das LMIs causadas pelas variáveis Z_r , verificando-se a região de factibilidade superior ao controle clássico.

6 RESULTADOS PRÁTICOS

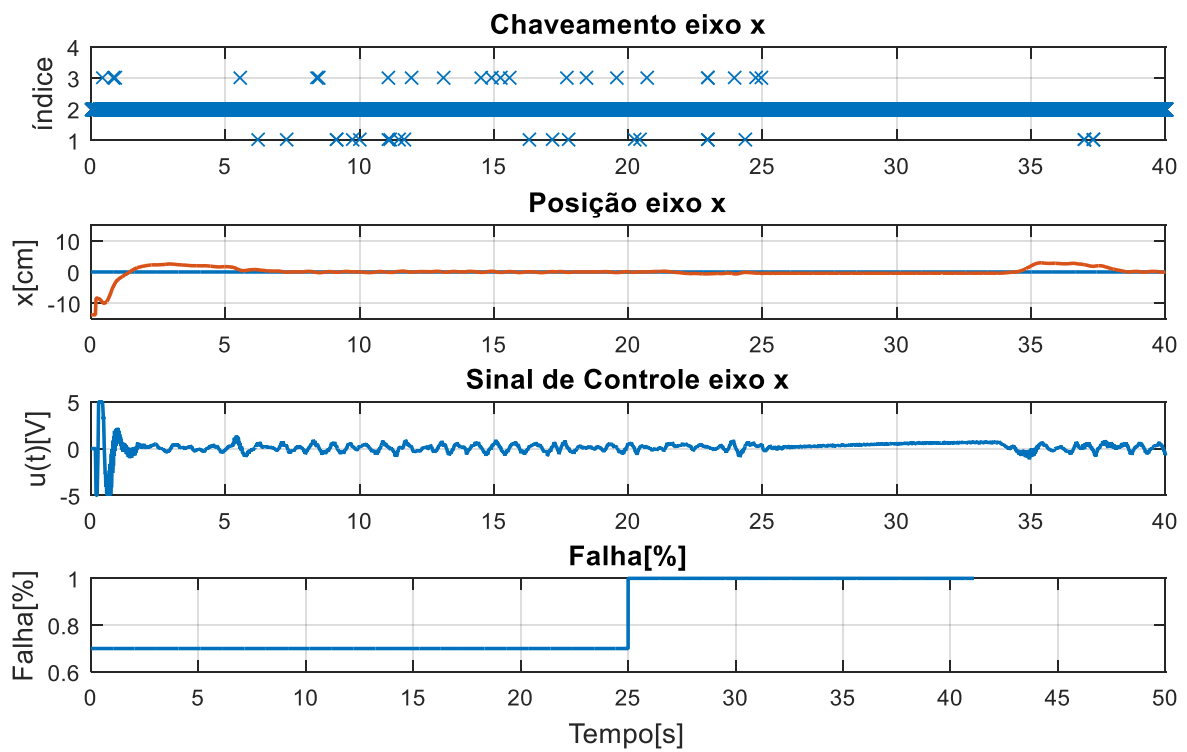
A implementação é feita para verificação da eficácia do controlador e foi realizada no sistema *2 DOF Ball Balancer* apresentado na da Seção 3.

6.1 Entrada exógena $w(t)$

O propósito aqui é checar a validade do método proposto, para o controle da posição da esfera no *Ball Balancer* com um soprador criando uma entrada exógena em direção à essa em vários ângulos.

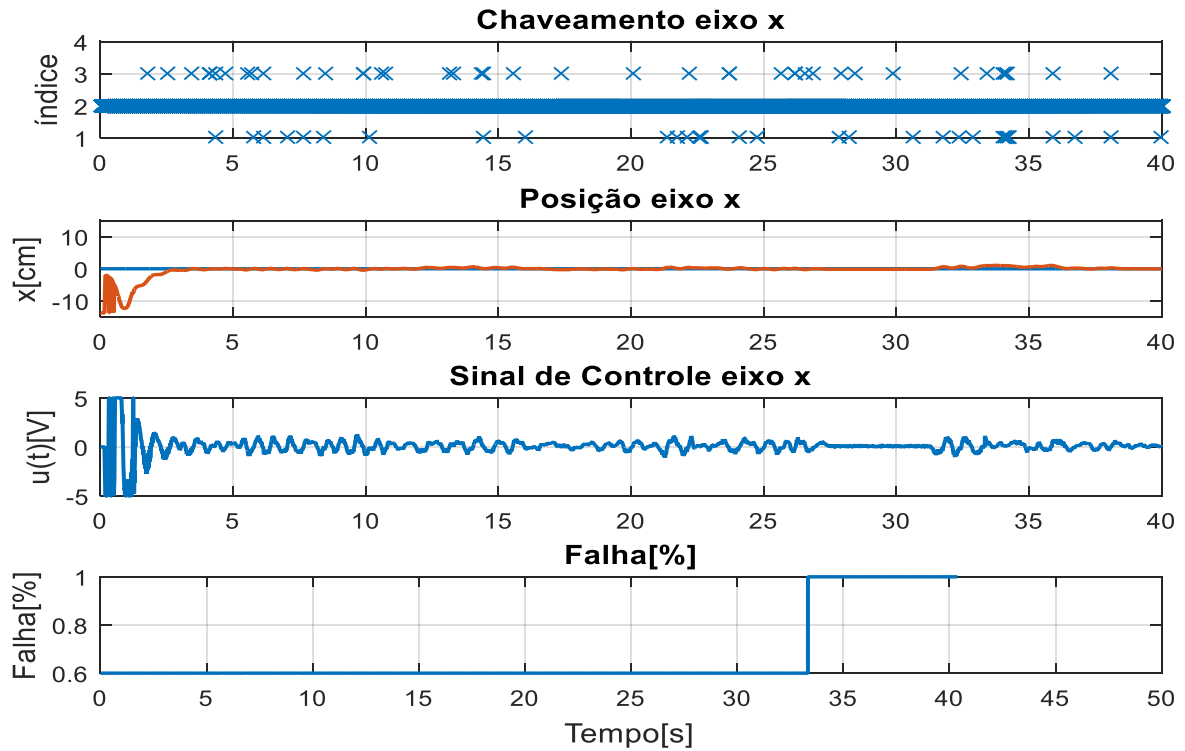
Para analisar os resultados práticos, a referência inserida foi $(0, 0)$ com falhas de 30% e 40%, ilustrado nas Figuras 12 e 13 o eixo X e nas Figuras 14 e 15 o eixo Y.

Figura 12. Eixo X: chaveamento, posição x , sinal de controle $u(t)$, falha 30%.



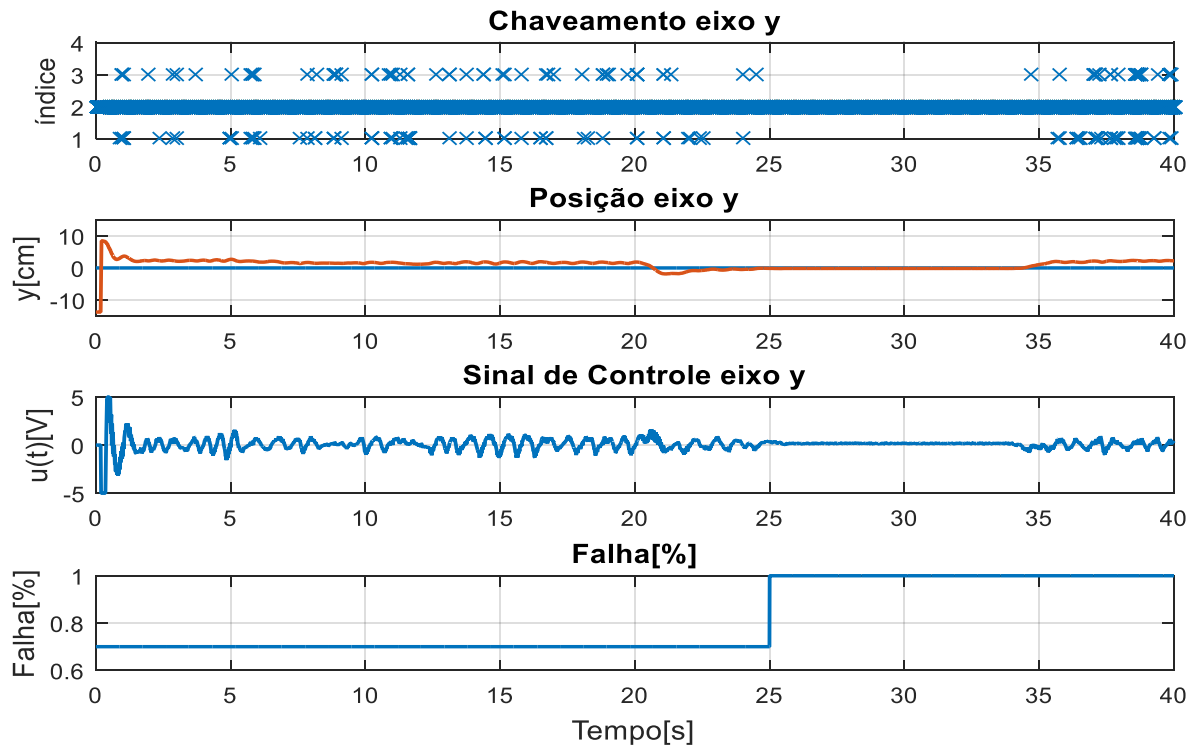
Fonte: Própria do autor.

Figura 13. Eixo X: chaveamento, posição x , sinal de controle $u(t)$, falha 40%.



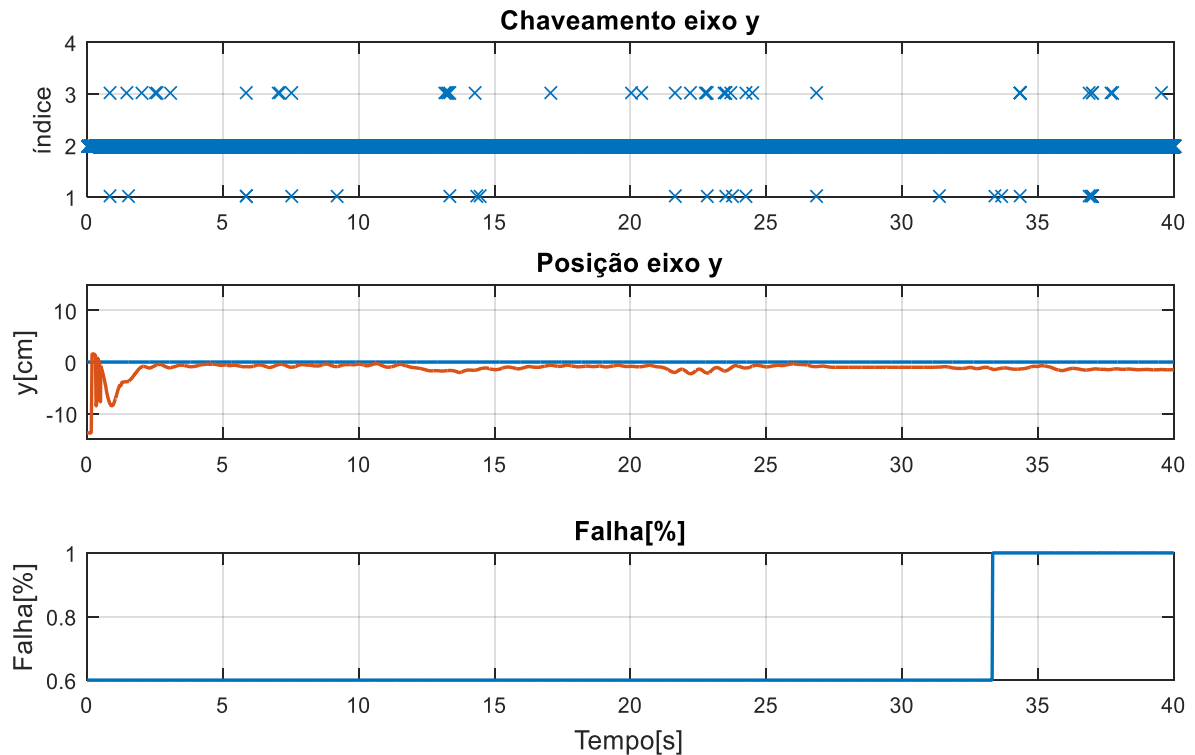
Fonte: Própria do autor.

Figura 14. Eixo Y: chaveamento, posição y , sinal de controle $u(t)$, falha 30%.



Fonte: Própria do autor.

Figura 15: Eixo Y: chaveamento, posição y, sinal de controle $u(t)$, falha 40%.



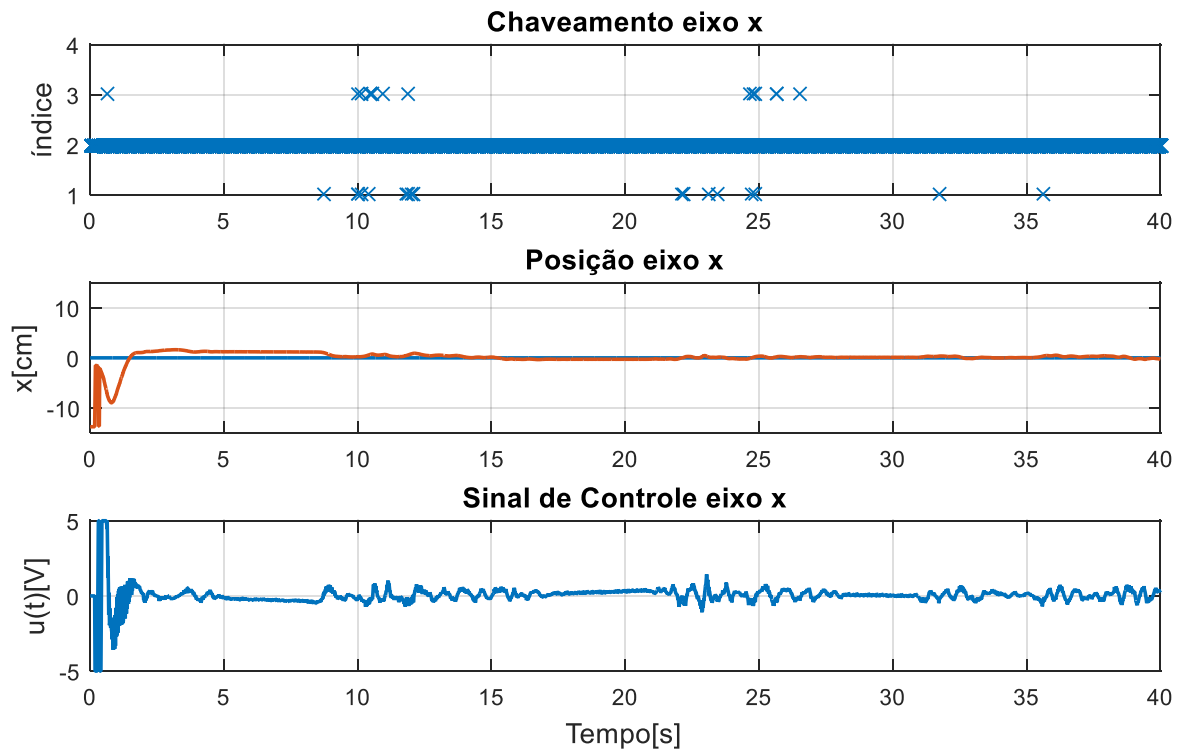
Fonte: Própria do autor.

Verifica-se que, quando o sistema não percorre uma trajetória dinâmica, o controlador não utiliza a chave de índice 4, que apresenta valores bem inferiores aos de índice 1 e 2 e muito parecido com a chave de índice 3. O controle atuou e manteve a esfera na trajetória quando foi inserida a entrada exógena nos instantes $t = 10s$, $20s$ e $35s$ com um aumento no sinal de controle menor que $0,5$ V. Isto é, a eficiência do controlador em rejeitar a entrada exógena foi verificada em ambos os eixos mesmo com falhas.

Ainda que o sistema se estabiliza, a posição marca um pequeno erro de até 1 cm como pode ser observado. Isso motivou à introdução de um integrador com ganho de valor 27 na saída do erro $e = x_{ref} - x$ para o eixo x em que $u(t) = -K(\sigma)x_m(t) - \int e$. O eixo y manteve-se sem o integrador.

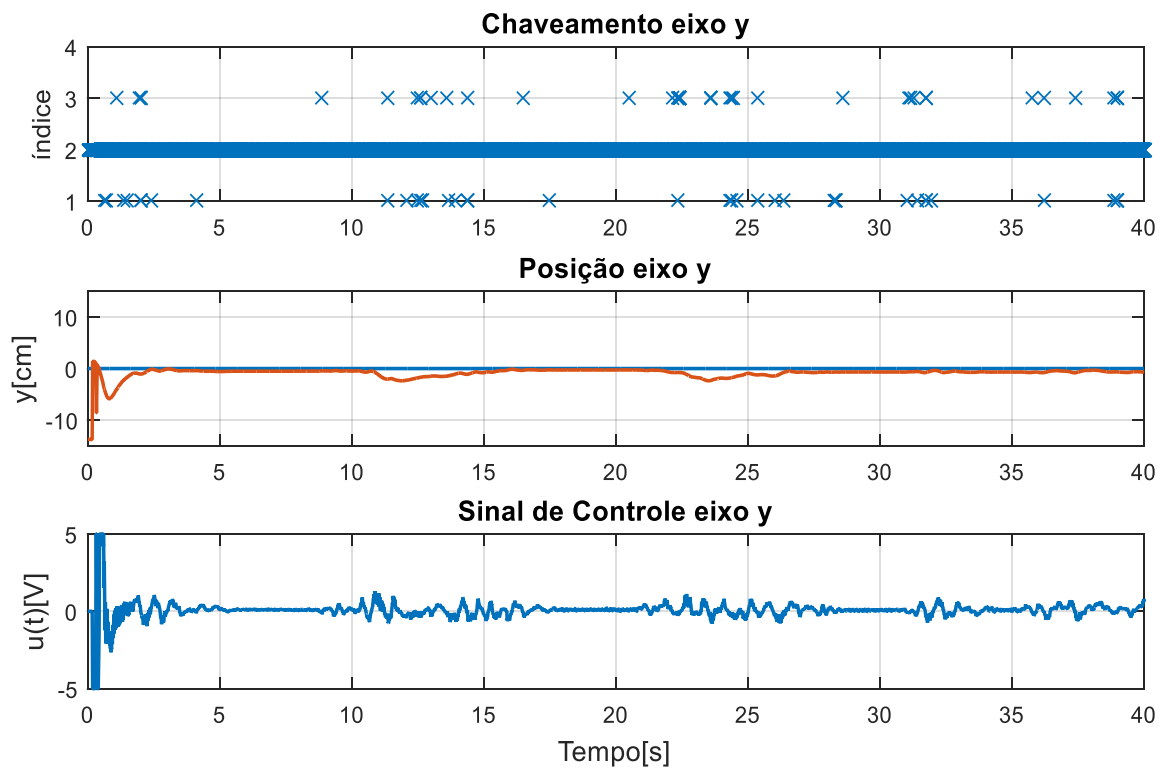
Dessa forma, foi feito um ensaio para ambos os eixos com a entrada exógena, sem falhas, verificado nas Figuras 16 e 17.

Figura 16: Eixo X com integrador e entrada exógena sem falhas.



Fonte: Própria do autor.

Figura 17: Eixo Y com uma entrada exógena.



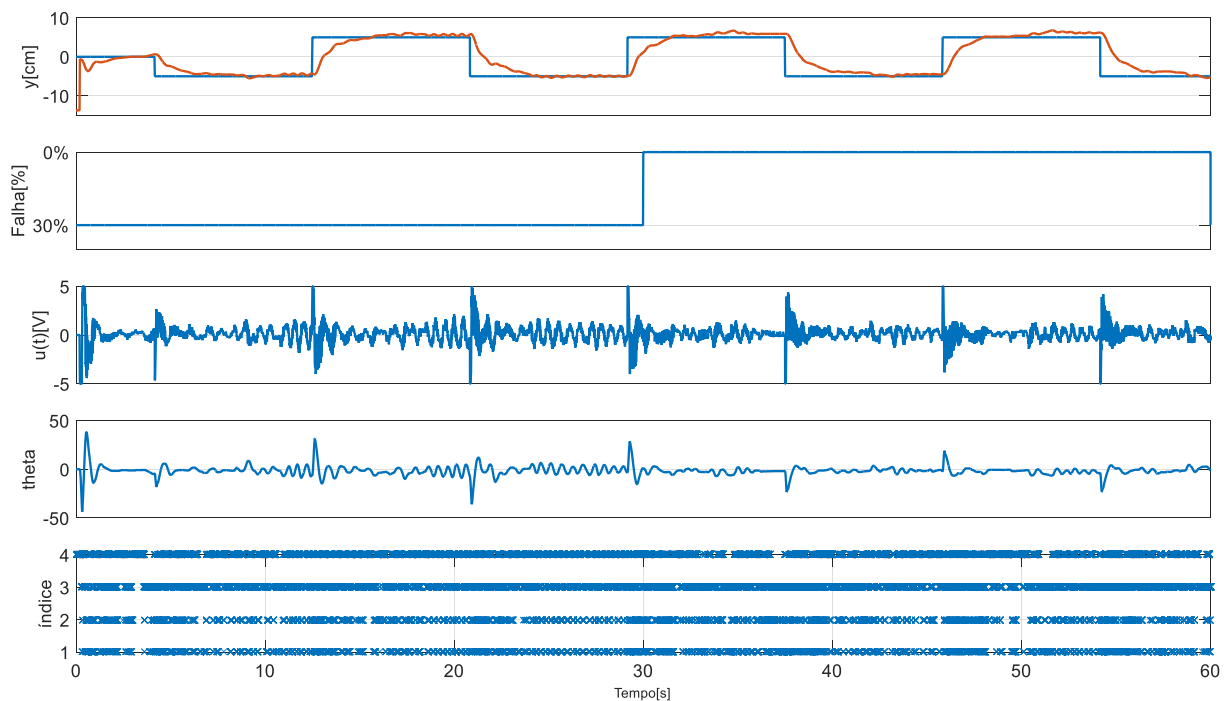
Fonte: Própria do autor.

Como esperado, o erro se aproximou de zero no eixo x e no eixo y o erro continuou impertinente, porém ao verificar os 10 primeiros segundos houve uma grande perda referente ao tempo transitório.

6.2 Resultados práticos com trajetórias.

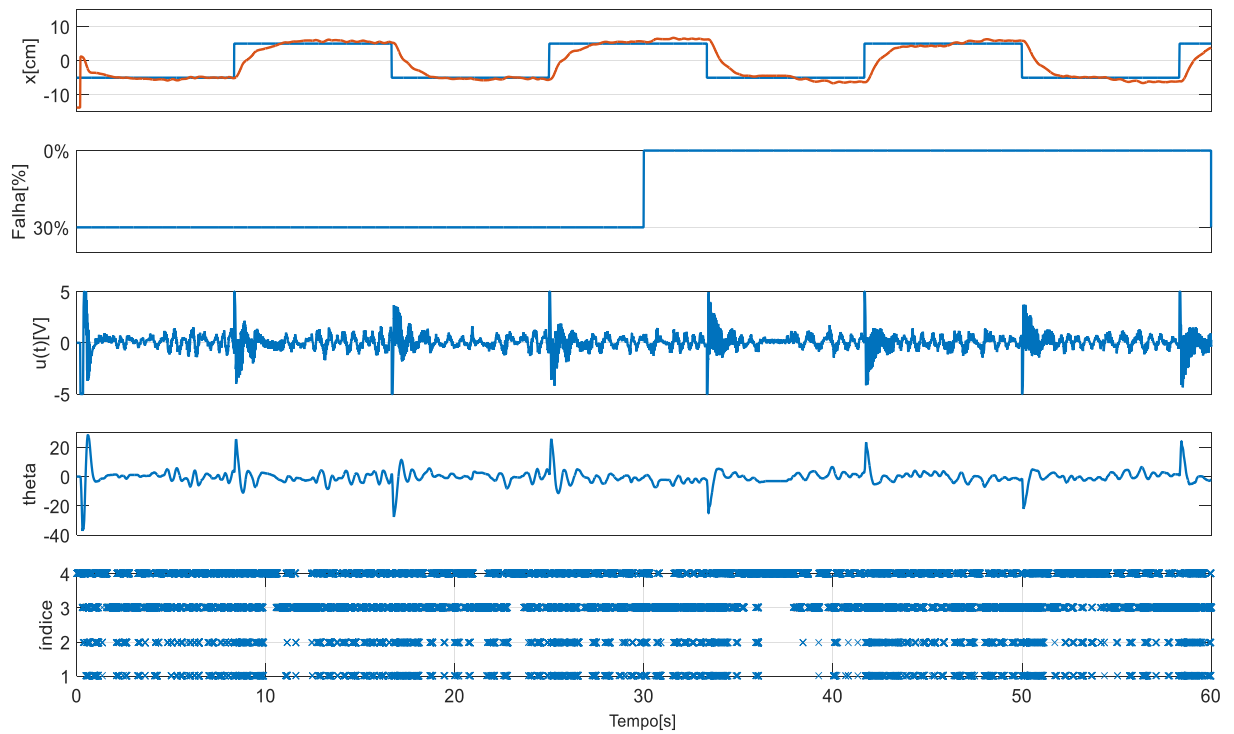
Os ensaios das Figuras 18, 19, 20, 21, 22 e 23 foram realizados de forma que a esfera deveria seguir uma referência, uma circunferência de raio 5 cm e um quadrado de lado 10 cm. Na implementação, foi inserida uma falha na posição angular e sua derivada que varia de 30% a 0%, isto é, um sinal com fator de atenuação de 0,7 a 1 que multiplica o sinal ilustrado nas Figura 18 e Figura 19.

Figura 18. Eixo Y: Posição $y(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $\sigma(x_m)$; referência quadrada.



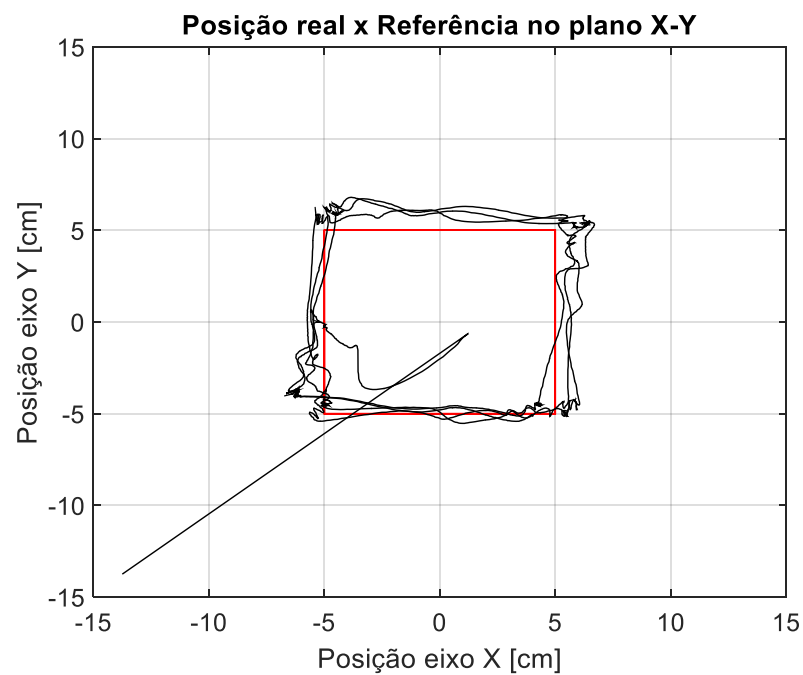
Fonte: Própria do autor

Figura 19. Eixo X: Posição $y(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $\sigma(x_m)$; referência quadrada.



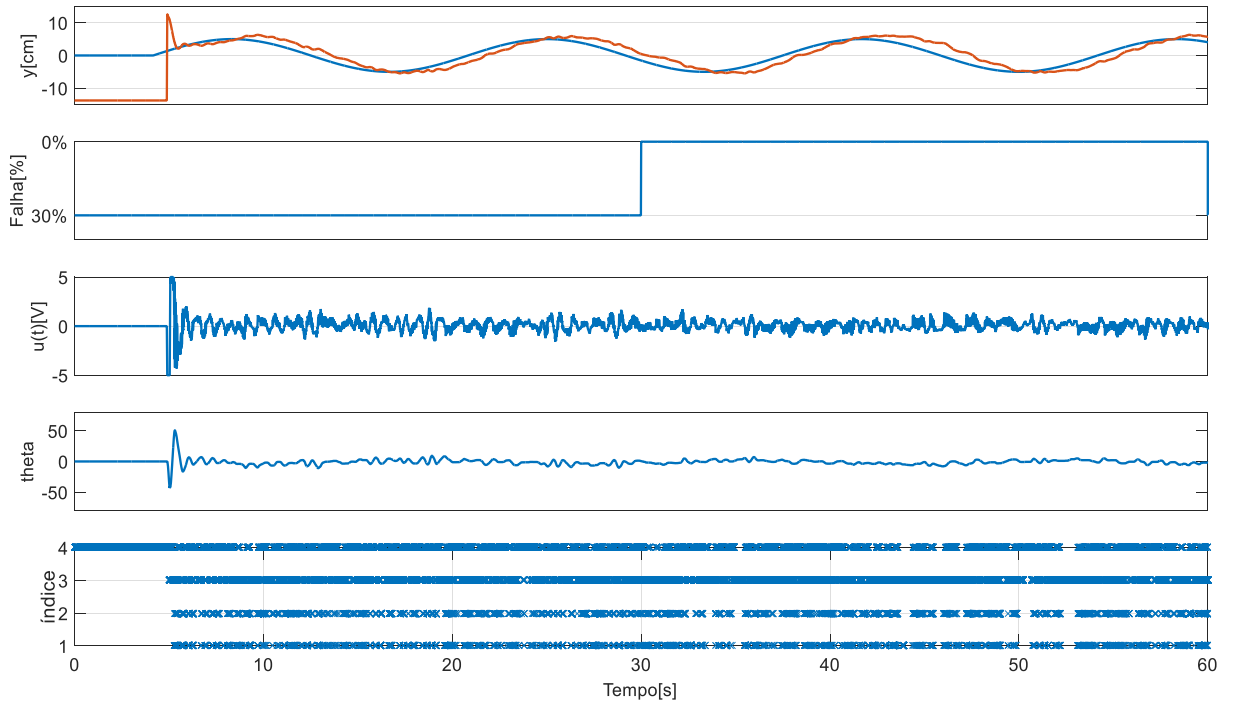
Fonte: Própria do autor.

Figura 20. Posição da esfera na trajetória quadrada.



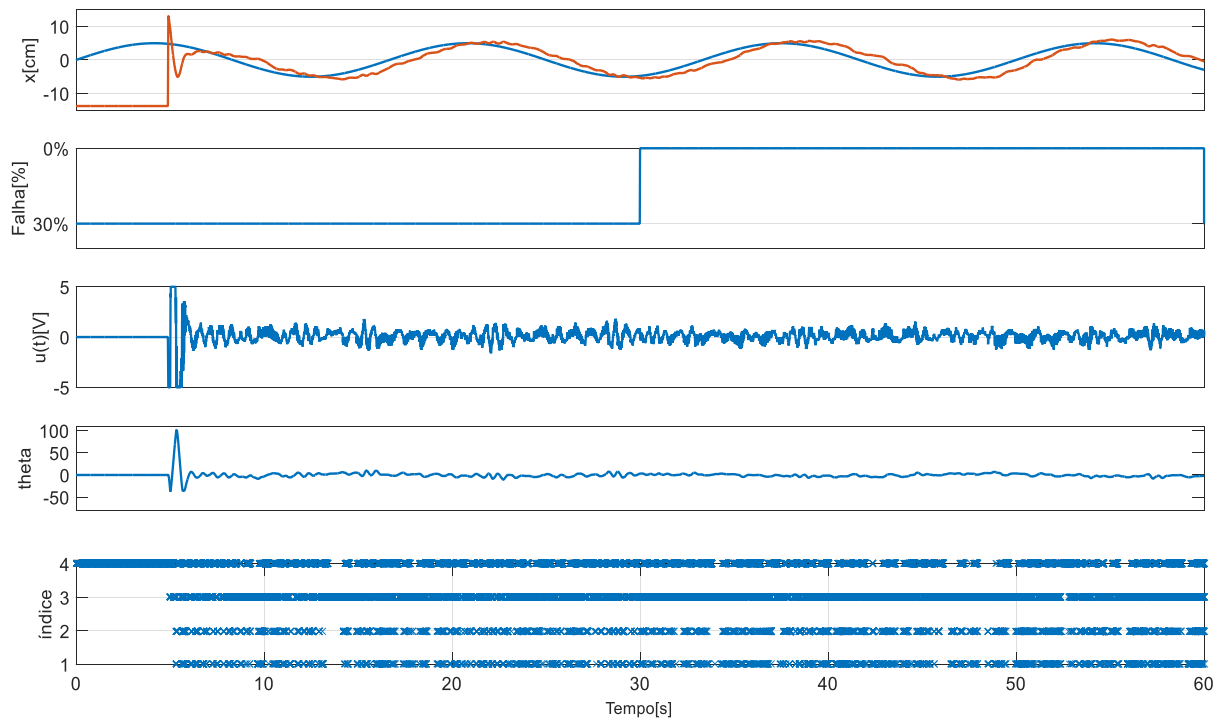
Fonte: Própria do autor.

Figura 21. Eixo Y: Posição $y(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $\sigma(x_m)$.



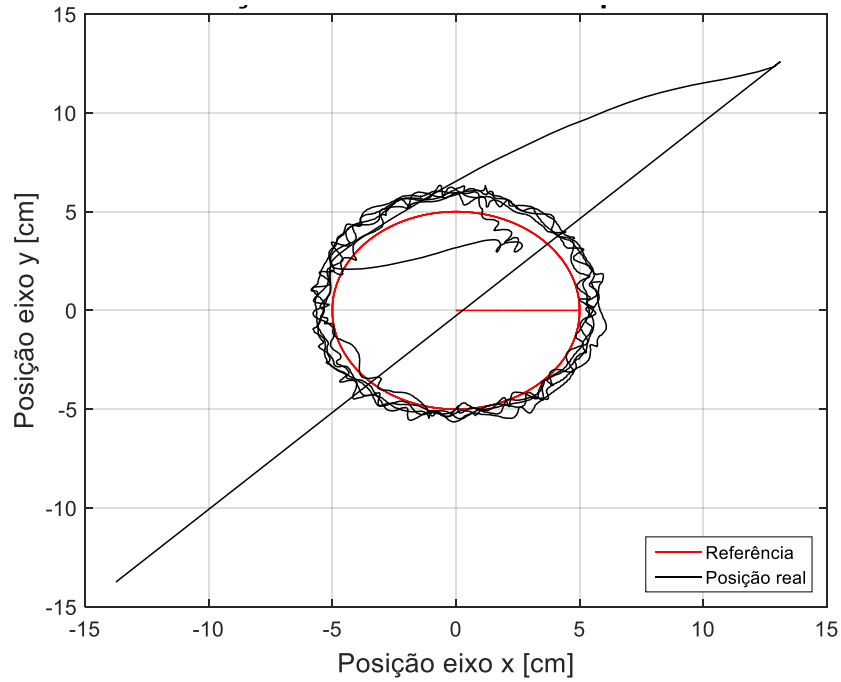
Fonte: Próprio do autor.

Figura 22. Eixo X: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $\sigma(x_m)$.



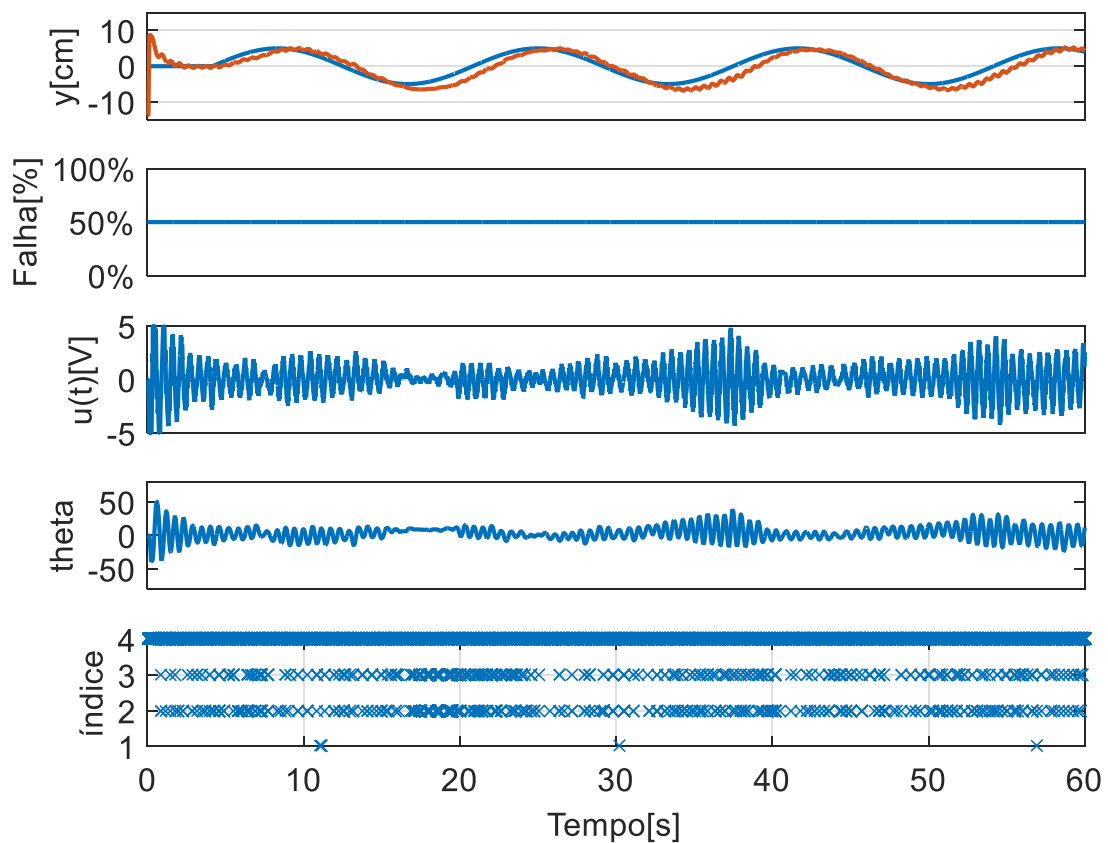
Fonte: Própria do autor.

Figura 23. Posição da esfera no plano X-Y para referência circular.



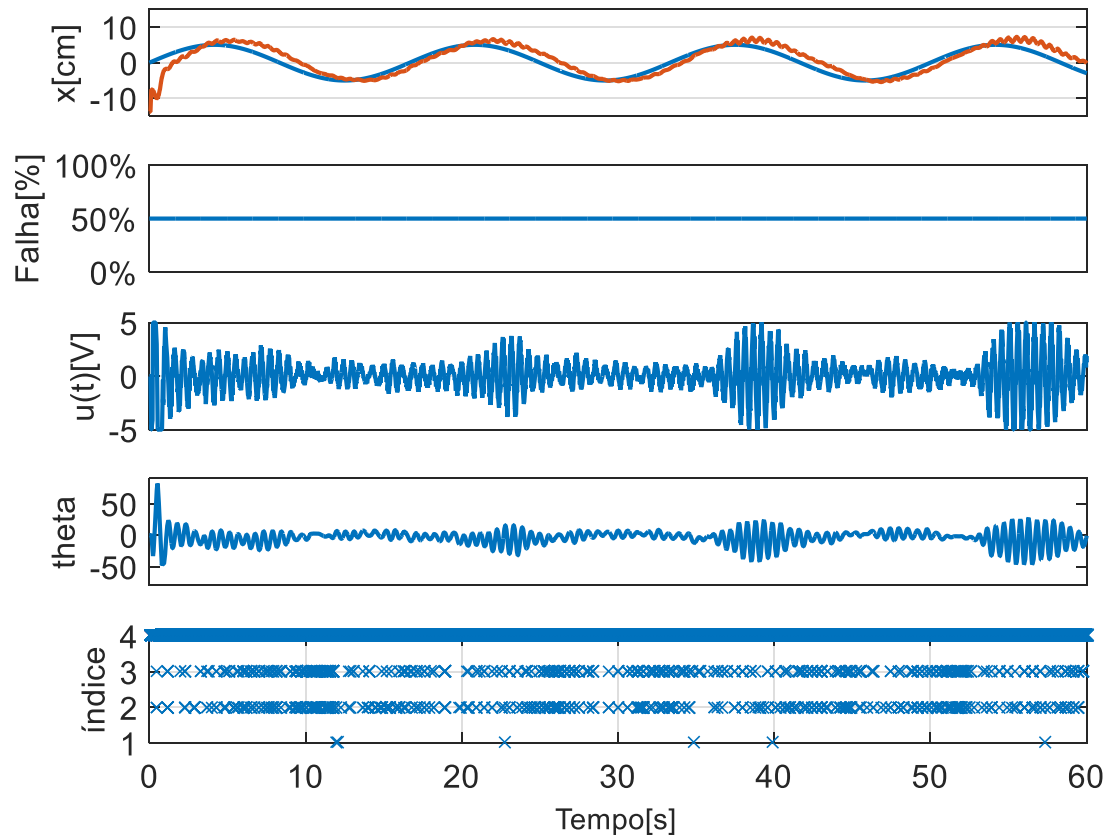
As Figuras 24 e 25 ilustram os resultados práticos com a inserção da falha máxima de 50% nos estados θ e $\dot{\theta}$ para os eixos X e Y na trajetória da circunferência.

Figura 24: Eixo Y: Posição $y(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $\sigma(x_m)$.



Fonte: Próprio do autor.

Figura 25: Eixo X: Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$, controle $u(t)$, falha γ_{a3} , $\sigma(x_m)$.



Fonte: Própria do autor.

O sinal de controle $u(t)$ apresentava um saturador de $\pm 5V$ inserido via *software Matlab/Simulink* para a proteção do atuador.

Verifica-se que, com o controlador apresentado, o sistema seguiu a trajetória desejada mantendo um sinal de controle relativamente baixo e tempo de estabilidade próxima a 3 s, como sugere a simulação. A implementação, portanto, confirma a eficiência do método para o sistema sujeito à falha de até 50%.

7 CONCLUSÕES

Os sistemas chaveados advêm de teorias contemporâneas que possuem algumas vantagens em relação aos sistemas clássicos, não chaveados, como a melhoria da factibilidade do sistema. As condições de robustez e rejeição de perturbações são consideradas no controle H_∞ que se faz um tema promissor na comunidade científica para implementações práticas de cunho industrial.

Este trabalho abordou uma situação recorrente na prática que são as falhas em sensores, utilizados como incertezas politópicas sujeitas à uma entrada exógena com formulações já consagradas na literatura e disponíveis para a comunidade. Utilizou-se o conceito de desigualdades matriciais lineares (LMIs) para a otimização do projeto.

Destaca-se a presença de incertezas na matriz B e o uso do método de alocação de pólos denominado de D-estabilidade, que mostrou-se muito eficiente na adequação do controlador às restrições necessárias à implementação, como uma entrada com voltagem de até 5 V, com um tempo de estabelecimento razoável e ainda eficiente na proposta de manter a robustez mesmo com falhas e perturbações.

Foi comprovado através dos ensaios que esta modelagem de chaveamento dos ganhos, oferece um desempenho melhor quando comparado com o controle robusto clássico.

A contribuição do trabalho foi a análise do controle robusto H_∞ chaveado com D-estabilidade de um sistema naturalmente instável linearizado, *Ball Balancer*, sujeito a falhas em até 50% e ainda com uma entrada exógena. O uso da D-estabilidade e das LMIs em função de η tornaram os ganhos dos controladores compatíveis com uma implementação prática, com esforço moderado do sinal de controle e bom desempenho ao sistema. Dessa forma, o método proposto demonstra robustez para o sistema, impedindo-o de deixar sua trajetória desejada, com grande área de factibilidade devido aos controladores chaveados.

REFERÊNCIAS

- ARRIFANO, N. S. D.; OLIVEIRA, V. A. ;COSSI, L. V. Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: a piecewise Lyapunov approach. **SBA: Controle ; Automação Sociedade Brasileira de Automática**, Campinas, v. 17, p. 213–225, 2006.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM – Soc. Ind. Appl. Math., 1994. Studies in Applied Mathematics, 15.
- BUZETTI, A. S.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; LAZARINI, A. Z. N.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Projeto de controle robusto para sistemas com sensores que apresentam falhas variantes no tempo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO – CBA, 21, 2016, Vitória. **Anais [...]**. Vitória: SBA, 2016. Disponível em: <https://plataforma.swge.com.br/PROCEEDINGS/PDF/CBA2016-0588.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2020.
- BUZETTI, A. S. **Projeto de controle robusto chaveado com falha nos sensores**. 2017. 87 f. (Dissertação em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148888/buzetti_as_me_ilha.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 19 fev. 2020.
- CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. H_∞ control of uncertain fuzzy continuous-time systems. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 115, n. 2, p. 171 – 190, 2000.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Piscataway, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, 2009.
- CHEN, Y. J.; OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, W. J.; WANG, H. O. Relaxed stabilization criterion for T-S fuzzy systems by minimum-type piecewise-Lyapunov function-based switching fuzzy controller. **IEEE Transactions Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 20, n. 6, p. 1166–1173, 2012.
- CHILALI, M. GAHINET, P. H_∞ Design with pole placement constraints: an LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 41, n. 3, p. 358-367, 1996.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Controle de sistemas lineares com comutação. **SBA Controle ; Automação: Revista da Sociedade Brasileira de Automática**, Campinas, v. 19, n. 4, p. 431–444, 2008.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. H_∞ control for continuous-time switched linear systems. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v. 132, n. 4, p. 7, 2010.

DELMOTTE, F.; GUERRA, T. M.; KSANTINI, M. Continuous Takagi-Sugeno's models: reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics. **IEEE Transactions Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 15, n. 3, p. 426–438, 2007.

DONG, J.; YANG, G. H. Dynamic output feedback control synthesis for continuous-time T-S fuzzy systems via a switched fuzzy control scheme. **IEEE Transactions Systems Man-Machine Cybernetics**, Piscataway, v. B 38, n. 4, p. 1166–1175, 2008a.

DONG, J.; YANG, G. H. Reliable state feedback controls T-S fuzzy systems with sensor faults. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 23, n. 2, p. 421–433, 2015.

DONG, J.; YANG, G. H. State feedback control of continuous-time T-S fuzzy systems via switched fuzzy controllers. **Information Sciences**, Philadelphia, v. 178, n. 6, p. 1680–1695, 2008b.

DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.

FENG, G. H_∞ controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions. **IEEE Transactions Systems Man-Machine Cybernetics**, Piscataway, V. B 34, n. 1, p. 283–292, 2004.

GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Oxford, v. 4, n. 4, p. 421–448, 1994.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.

GLOVER, K.; DOYLE, J. C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to relations to risk sensitivity. **Systems ; Control Letters**, Amsterdam, v. 11, n. 3, p. 167 – 172, 1998.

IWASAKI, T.; SKELTON, R. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. **Automatic**, Paris, v. 30, n. 8, p. 1307 – 1317, 1994.

JABRI, D.; GUELTON, K.; MANAMANNI, N.; JAADARI, A.; DUONG, C. C. Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law. **Journal Control Engineering and Applied Informatics**, Bucharest, v. 14, n. 2, p. 40–49, 2012.

JL, Z.; GUO, X.; WANG, L.; XIE, G. Robust H_∞ control and stabilization of uncertain switched linear systems: A multiple Lyapunov functions approach. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v. 128, n. 3, p. 696 – 700, 2006.

KIM, J. H; PARK, H. B. H_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system. **Automatic**, Paris, v. 35, n. 8, p. 1443 – 1451, 1999.

LIU, M.; CAO, X. Fuzzy-modelbased fault-tolerant design for nonlinear stochastic systems against simultaneous sensor and actuator faults. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 21, n. 5, p. 789–799, 2013.

LIU, X. D.; ZHANG, Q. New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. **Automatica**, Paris, v. 39, n. 9, p. 1571 – 1582, 2003.

LOFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in Matlab. *In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN*, 2004, Taiwan. **Proceedings of the [...]**. Taiwan: IEEE, 2004. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=1393890>. Acesso em: 19 fev. 2020.

LU, W. M.; DOYLE, J. C. H_∞ control of nonlinear systems: a convex characterization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 40, n. 9, p. 1668-1675, 1995.

MAHMOUND, M. S.; SHI, P.; SAIF, A. W. A. Stabilization of linear switched delay systems: H_2 and H_∞ methods. **Journal of Optimization Theory and Applications**, New York, v. 142, n. 3, p. 583-601. 2009.

MAZUMDER, S. K.; NAYFEH, A. H.; BOROJEVIC, A. Robust control of parallel dc-dc buck converters by combining integral-variable-structure and multiple-sliding-surface control schemes. **IEEE Transactions on Power Electronics**, Piscataway, v. 17, n. 3, p. 428–437, 2002.

MINQING, X. Reliable robust guaranteed cost control of delta operator linear uncertain systems with sensor failure. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT COMPUTATION TECHNOLOGY AND AUTOMATION*, 2, 2009, Changsha. **Proceedings of the [...]**. Changsha: IEEE, 2009. p. 834-837.

MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and H_∞ control of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 17, n. 4, p. 863–873, 2009.

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. Projeto de controle robusto H_∞ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. *In: ANAIS DO CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA*, 20, 2014, Belo Horizonte. **Anais [...]**. Belo Horizonte: SBA, 2014. p. 2194 – 2201, 2014. Disponível em: <http://www.swge.inf.br/CBA2014/anais/PDF/1569934845.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2020.

PACKARD, A.; DOYLE, J. The complex structured singular value. **Automatica**, Paris, v. 29, n. 1, p. 71 – 109, 1993.

PERES, P.; GEROMEL, J.; SOUZA, S. H_∞ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. **Systems ; Control Letters**, Amsterdam, v. 20, n. 6, p. 413 – 418, 1993.

QUANSER. 2 Ball Balancer control using Quarc: Instructor manual. Canadá: Quanser Inc., 2008.

SILVA, J. H. P.; JÚNIOR, E. M.; SOUZA, W.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. R. Controle H_∞ com chaveamento do ganho da realimentação do vetor de estado para sistemas lineares incertos. *In: ANAIS DO CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA CBA*, 19, 2012, Campina Grande. **Anais [...]**. Campina Grande: SBA, 2012.

SILVA, L. D. W.; TEIXEIRA, M. C. C.; ALVES, U. L. T.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Controle chaveado de sistemas lineares incertos sujeitos à saturação no atuador usando realimentação derivativa. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE – SBAI*, 14, 2019, Ouro Preto. **Anais [...]**. Ouro Preto: SBA, 2019.

SILVA, R. B; SOUZA, J; MAIA, R. D. Reconfiguração de Controle em um drone quadrimotor auxiliada por um classificador de falhas. **Revista de Informática Aplicada**, São Caetano do Sul, v. 13, n. 1. 2017.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. **Mathematical Problems in Engineering**, London, 11 f., 2014a. Disponível em: <http://downloads.hindawi.com/journals/mpe/2014/721537.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2020.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720-1727. 2014b.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**. London, 10 f, 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/75435/2-s2.0-84877937869.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 19 fev. 2020.

TANAKA, K.; IWASAKI, M. ;WANG, H. O. Stability and smoothness conditions for switching fuzzy systems. *In: PROCEEDING AMERICAN CONTROL CONFERENCE*, 2000, Chicago. **Proceedings of the [...]**. Chicago: IEEE, 2000a. p. 2474–2478.

TANAKA, K.; IWASAKI, M. ;WANG, H. O. Stable switching fuzzy control and its application to a hovercraft type vehicle. *In: FUZZ IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS*, 9, 2000, San Antonio. **Proceedings of the [...]**. San Antonio: IEEE, 2000b. p. 804–809.

TUAN, H.; APKARIAN, P.; NARIKIYO, T.; YAMAMOTO, Y. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 9, n. 2, p. 324–332, 2001.

VAN DER SCHAFT, A. On a state space approach to nonlinear H_∞ control. **Systems ; Control Letters**, Amsterdam, v. 16, n. 1, p. 1 – 8, 1991.

VEILLETTE, R.; MEDANIC, J; PERKINS, W. R. Design of reliable control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 37, n. 3, p. 290-304, 1992.

WANG, Z.; JIN, X.; WANG, Z. Adaptive controller design for linear time invariant systems with sensor failures. In: CHINESE CONTROL AND DECISION CONFERENCE, CCDC, 2011, Mianyang. **Proceedings of the [...]**. Mianyang: IEEE, 2011. p. 2459-2462, 2011.

WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33, 1994, Lake Buena Vista. **Proceedings of the [...]**. Piscataway: IEEE, 1994. v. 4, p. 3492–3497.

XU, S.; LAM, J. Robust H_∞ control for uncertain discrete-time-delay fuzzy systems via output feedback controllers. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 13, n. 1, p. 82–93, 2005.

YAN, S.; SUN, Z. Study on separation principles for T-S fuzzy system with switching controller and switching observer. **Neurocomputing**, Amsterdam, v. 73, n. 13/15, p. 2431–2438, 2010.

YANG, B.; YU, D.; FENG, G.; CHEN, C. Stabilisation of a class of nonlinear continuous time systems by a fuzzy control approach. **IEE Proceedings Control Theory Application**, New York, v. 153, n. 4, p. 427–436, 2006.

YANG, G. H.; DONG, J. Switching fuzzy dynamic output feedback H_∞ control for nonlinear systems. **IEEE Transactions Systems Man-Chinary Cybernetcs**, Piscataway, v. B 40, n. 2, p. 505–516, 2010.

YANG, G. H.; WANG, J. L.; SOH, Y. C. Reliable LQG control with sensor failures. **IEE Proceedings Control Theory and Applications**, New York, v. 147, n. 4, p. 433-439, 2000.

YANG, G. H.; WANG, J. L.; SOH, Y. C. Reliable H_∞ controller design for linear systems. **Automatica**, Paris, v. 37, n. 5, p. 717 – 725. 2001.

YANG, G. H. ;YE, D. Adaptive fault tolerant H_1 control against sensor failures. **IET Control Theory and Applications**, Stevenage, v. 2, n. 2, p. 95–107, 2008.

ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 76, n. 7, p. 747–753, 2003.

ZHANG, Y.; JIANG, J. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. **Annual Reviews in Control**, Oxford, v. 32, n. 2, p. 229-252. 2008.

ZHOU, K.; DOYLE, J.; GLOVER, K. **Robust and optimal control**. New York: Prentice Hall, 1996.