



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Marta Luiza Suleiman Pignatari

**Um estudo sobre as equações de agregação em espaços de
Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey**

São José do Rio Preto
2018

Marta Luiza Suleiman Pignatari

**Um estudo sobre as equações de agregação em espaços de
Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof^a. Dr^a. Juliana Conceição
Precioso Pereira

Coorientador: Prof^a. Dr^a. Andréa Cristina
Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto
2018

Suleiman-Pignatari, Marta Luiza.

Um estudo sobre as equações de agregação em espaços de Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov- Morrey / Marta Luiza Suleiman Pignatari. -- São José do Rio Preto, 2018
88 f. : il., tabs.

Orientador: Juliana Conceição Precioso Pereira

Coorientador: Andrea Cristina Pczyk Arita

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Espaços de funções. 4. Equações de agregação. 5. Boa colocação global. 6. Autossimilaridade. 7. Comportamento assintótico de soluções. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.944

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Marta Luiza Suleiman Pignatari

**Um estudo sobre as equações de agregação em espaços de
Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Juliana Conceição Precioso Pereira
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira
UNICAMP – Campinas

Prof^a. Dr^a. Lidiane dos Santos Monteiro Lima
UFG – Câmpus de Goiânia

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
14 de junho de 2018

“Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino.”

(Leonardo da Vinci)

AGRADECIMENTOS

A benção de viver é uma graça, por isso agradeço a Deus eternamente.

Agradeço imensamente à minha orientadora, Professora Doutora Juliana Conceição Precioso Pereira, pela confiança depositada, pela disponibilidade, pela paciência, pelos ensinamentos transmitidos e por todas as discussões imprescindíveis, que tornaram possíveis a realização deste trabalho.

Agradeço com muito carinho à minha coorientadora, Professora Doutora Andréa Cristina Prokopczyk Arita, sempre disposta a contribuir com inúmeras sugestões valiosas, que só fizeram engrandecer e enriquecer esta produção.

Agradeço a todos que acreditaram em mim, em especial ao Professor Doutor Paulo Ricardo da Silva.

Agradeço à minha família, principalmente a meus pais, Carolina e William, por terem me ensinado todos os valores para viver com dignidade e felicidade.

Agradeço ao meu esposo, Carlos, por estar sempre comigo, encorajando-me, apoiando-me e incentivando-me em todos os momentos.

Agradeço à minha querida tia, Amal, por me ouvir e amparar em muitas horas difíceis.

Agradeço aos meus amigos inesquecíveis, João Pitot, Letícia Sanches Silva e Robson Trevizan, pelo companheirismo e por toda a ajuda durante o doutorado.

Agradeço aos membros da Comissão Examinadora Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira, Prof^a. Dr^a. Lidiane dos Santos Monteiro Lima, Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos e Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves, por aceitarem o convite e pelos apontamentos sugeridos.

Agradeço também à CAPES pelo auxílio financeiro.

À minha família.
Dedico.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos condições para obter boa colocação global no tempo para uma classe de equações de transporte viscoso não-linear descrevendo fenômenos de agregação em biologia com dados iniciais em espaços de Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey. Estudamos também auto-similaridade e estabilidade assintótica em grandes tempos.

Palavras-chave: Equações de transporte viscoso não linear, Quimiotaxia, Espaços de Morrey, Espaços de Besov-Morrey, Espaços de Fourier-Besov-Morrey, Comportamento assintótico.

ABSTRACT

In this work we present conditions to obtain global-in-time well-posedness to a class of nonlinear viscous transport equations describing aggregation phenomena in biology with initial data in Morrey, Besov-Morrey and Fourier-Besov-Morrey spaces. We also study the self-similarity and asymptotic stability of solutions at large times.

Keywords: Nonlinear viscous transport equations, Chemotaxis, Morrey spaces, Besov-Morrey spaces, Fourier-Besov-Morrey spaces, Asymptotic behavior.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	14
1.1 O Espaço das Distribuições	14
1.2 O Espaço de Schwartz e a Transformada de Fourier	16
1.3 Decomposição de Littlewood-Paley e Paraproduto de Bony	19
1.4 Variação Total de uma Medida	20
1.5 Propriedades Gerais de Espaços de Interpolação	21
1.6 Um Lema de Ponto Fixo	23
1.7 As Funções Beta e Gama	23
2 Espaços Homogêneos	25
2.1 Espaços de Morrey e de Sobolev-Morrey Homogêneos	25
2.2 Espaços de Besov e de Besov-Morrey Homogêneos	31
2.3 Espaços de Fourier-Besov-Morrey Homogêneos	36
3 Boa Colocação em Espaços de Morrey	38
3.1 Formulação Integral de (1) – (2)	38
3.2 <i>Scaling</i> das Equações de Agregação	39
3.3 Espaços Funcionais	41
3.4 Resultados	41
3.5 Estimativas	42
3.5.1 Estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ em Espaços de Morrey	43
3.5.2 Estimativas Bilineares	47
3.6 Demonstração dos Resultados	48
3.6.1 Demonstração do Teorema 3.4.1	49
3.6.2 Demonstração do Teorema 3.4.2	53

3.6.3	Demonstração do Teorema 3.4.3	55
4	Boa Colocação em Espaços de Besov-Morrey	57
4.1	Espaços Funcionais	57
4.2	Resultados	58
4.3	Estimativas	59
4.3.1	Estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$	59
4.3.2	Estimativas Lineares	63
4.3.3	Estimativas Bilineares	63
4.4	Demonstração dos Resultados	64
4.4.1	Demonstração do Teorema 4.2.1	65
4.4.2	Demonstração do Teorema 4.2.2	68
5	Boa colocação em espaços de Fourier-Besov-Morrey	71
5.1	Resultados	72
5.2	Exemplo 5.2.1	72
5.3	Estimativas	74
5.3.1	Estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ em Espaços de Fourier-Besov-Morrey	74
5.3.2	Estimativas Lineares	75
5.3.3	Estimativas Bilineares	75
5.4	Demonstração dos Resultados	78
5.4.1	Demonstração do Teorema 5.1.1	78
5.4.2	Demonstração do Teorema 5.1.2	81

Introdução

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy para a equação do calor corrigida pelo termo de transporte não-local e não-linear

$$u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u(\nabla K * u)), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Este modelo tem sido usado para descrever movimentos coletivos e fenômenos de agregação em biologia e mecânica de meios contínuos, em que a função incógnita $u = u(x, t)$ representa a densidade populacional de uma espécie ou a densidade de partículas em um meio granular. Aqui, $n \geq 2$ e o núcleo K é uma função conhecida que depende somente da posição x . O símbolo Δu indica o Laplaciano de u , “ $*$ ” denota o operador convolução na variável x e $\nabla \cdot$ representa o operador divergente.

Na literatura, as equações de agregação têm sido muito estudadas. Para o caso de (1) sem o termo de difusão, Laurent [35] fornece vários resultados de existência locais e globais para uma classe de núcleos com diferentes regularidades. Ao leitor interessado, indicamos [6, 7, 8, 37] e as referências nelas contidas para resultados sobre existência e blowup de soluções para o PVI das equações de agregação invíscidas.

Também indicamos ao leitor os trabalhos [10, 11, 20, 27, 28, 38, 39, 40, 45], para o caso de (1) e suas generalizações, consideradas em todo o espaço ou num domínio limitado. Vale ressaltar que (1) – (2) contém, como um caso particular, o sistema parabólico-elíptico de quimiotaxia, cuja forma simplificada é dada por

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (3)$$

$$0 = \Delta v - \alpha v + u, x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

em que α é uma constante positiva dada. De fato, tomando o núcleo $K = K(x)$ como solução fundamental do operador $-\Delta + \alpha Id$, podemos reescrever a equação (4) como $v = K * u$.

Então, substituindo esta última expressão em (3), obtemos (1). Indicamos ao leitor os trabalhos [13, 14, 31, 36, 44], e suas referências, para resultados matemáticos sobre sistemas que modelam quimiotaxia. Em particular, em [9] foi obtida existência global de soluções para o sistema parabólico-elíptico de quimiotaxia na estrutura de espaços de Morrey. Além disso, outros trabalhos apareceram na literatura considerando equações em diferentes tipos de espaços de funções singulares, por exemplo, [2, 29, 32, 33, 41, 42].

Vale ainda citar o trabalho [27], onde Karch estudou a existência de soluções locais e globais no tempo para (1) – (2), com dados iniciais em espaços de Lebesgue, para uma classe de núcleos $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fortemente singulares, isto é, $\nabla K \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ para algum $q' \in [1, n]$ e $\nabla K \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p > n$. Observa-se que qualquer função ∇K satisfazendo $|\nabla K| \sim |x|^{1-n}$ quando $|x| \rightarrow 0$ e rapidamente decrescente se $|x| \rightarrow \infty$ é fortemente singular quando $n \geq 2$. Portanto, assumindo que $\nabla K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, estes tipos de funções são exemplos de núcleos, K , admissíveis para o nosso modelo.

Neste trabalho consideramos, inicialmente, o problema de Cauchy (1) – (2) e mostramos existência de solução global no tempo com dados iniciais em espaços de Morrey (ver Capítulo 3), o que torna nosso estudo mais geral do que aqueles existentes na literatura até o presente momento.

Ainda em conexão com esse tipo de problema, destacamos o trabalho [26], em que Karch desenvolveu a teoria geral para o estudo do problema de Cauchy para a equação parabólica

$$u_t = \Delta u + B(u, u), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (6)$$

que engloba uma grande quantidade de modelos. Para este caso, ele mostrou a existência de solução global no tempo assumindo algumas propriedades do scaling da equação, como também da norma em espaços de Banach, onde as soluções são construídas. Contudo, a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ de (5) tem ordem de escala menor do que 2 (veja [26], página 535 para mais detalhes). Em nosso trabalho, obtemos um resultado de existência em que a forma bilinear não precisa ser homogênea, já que a única suposição feita para o operador K é que seu gradiente seja uma medida de Radon ou esteja em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, nossas condições iniciais pertencem a espaços maiores do que os considerados por Karch.

No Capítulo 4, melhoramos o resultado obtido no Capítulo 3, obtendo boa colocação global da solução de (1) – (2), tomando o dado inicial em espaços de Besov-Morrey $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}$. Estes espaços contêm funções fortemente singulares e, uma vez que temos as inclusões contínuas $\mathcal{M}_{p,\lambda} \subset \mathcal{N}_{p,\mu,\infty}^\sigma$, para $p > 1$, $\lambda = n - \frac{2p}{\rho-1}$, $\mu = n - \frac{2}{\rho-1}$, $\sigma = \frac{n-\mu}{p} - \frac{2}{\rho-1}$ e $\rho > 1 + \frac{2}{n}$, essa

nova classe de dados iniciais é maior do que a considerada no Capítulo 3. Vale ressaltar que os espaços de Besov-Morrey foram introduzidos inicialmente por Kozono e Yamazaki, em [32], para estudar as equações de Navier-Stokes por meio da abordagem de Kato envolvendo duas normas.

No Capítulo 5, o problema (1) – (2) foi estudado considerando o dado inicial em espaços de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}_{r,\lambda,\infty}^s$ e com $\nabla K \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Um espaço naturalmente relacionado a $\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s$ é o espaço de Fourier-Besov $\mathcal{FB}_{p,\infty}^s$, que foi introduzido por Konieczny-Yoneda [30] com o intuito de estudar o sistema de Carioles-Navier-Stokes em $\mathbb{R}^3$ com $s = 1 - \frac{3}{p}$ e $p > 3$. Inspirado por [30], Ferreira-Lima [1, 19, 41] introduziram o espaço $\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s$ com a finalidade de estudar o problema de valor inicial para uma família de equações dissipativas do tipo escalar ativo com campos de velocidades acoplados através de multiplicadores de Fourier. Para estabelecer existência e unicidade de solução global no tempo para (1) – (2), seguimos as ideias contidas em [41]. No entanto, apresentamos um exemplo (ver (5.2.1)) para justificar que nosso modelo não é um caso particular do modelo estudado em [41].

Nos Capítulos 3, 4 e 5, além dos resultados de boa-colocação, foram obtidos resultados de auto-similaridade e de estabilidade assintótica. Aspectos qualitativos, como simetria de soluções, também foram estudados.

Vale ressaltar que os Capítulos 1 e 2 constituem os alicerces deste trabalho. No Capítulo 1, foram fixadas notações, recordamos definições e resultados utilizados no decorrer dos capítulos subsequentes. No Capítulo 2, definimos as versões homogêneas dos espaços de Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey, bem como as suas propriedades fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem por objetivo estruturar a presente tese. Nele, iremos fixar notações, relembrar definições e resultados sobre medidas de Radon, os espaços de distribuições e os espaços de Schwartz. Também recordaremos as propriedades da transformada de Fourier e definiremos a decomposição de Littlewood-Paley, bem como o paraproduto de Bony. Encerraremos este capítulo com um teorema de ponto fixo e com uma revisão sobre as funções Beta e Gamma. Todas estas noções básicas serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

1.1 O Espaço das Distribuições

Iniciaremos esta seção definindo o espaço de distribuições. Porém, primeiramente é necessário introduzirmos algumas notações que serão aqui utilizadas.

Sejam U um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $u : U \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos:

- $C^0(U) = \{u : u \text{ é contínua e limitada}\};$
- $C^k(U) = \{u : u \text{ tem derivadas parciais contínuas até a ordem } k\};$
- $C^\infty(U) = \{u : u \text{ é infinitamente diferenciável}\};$
- $C_c^\infty(U) = \{u \in C^\infty(U) : \text{supp}(u) \text{ é compacto}\},$ em que $\text{supp}(u) = \{x \in U : u(x) \neq 0\};$
- $L^p(U) = \{u : u \text{ é mensurável e } \int_U |u(x)|^p dx < \infty\},$ para $1 \leq p < \infty$. A norma em $L^p(U)$ será representada por $\|\cdot\|_p$.
- $L^\infty(U) = \{u : u \text{ é mensurável e } \|u\|_\infty < \infty\},$ onde $\|u\|_\infty := \text{ess sup}_{x \in U} |u(x)| = \inf \{a \geq 0 : \mu\{x : |u(x)| > a\} = 0\};$

- $L_{loc}^p(U) = \{u : u\chi_A \in L^p(U), \forall A \subset U \text{ compacto}\}$, com $1 \leq p \leq \infty$, em que χ_A denota a função característica do conjunto A .

Os elementos do conjunto $C_c^\infty(U)$, mencionado acima, são chamados funções teste de U . Um exemplo clássico de função teste é fornecido por $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que a diferenciabilidade de φ segue da diferenciabilidade da função $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$, quando $t < 0$, e de $f(t) = 0$, para $t \geq 0$. Além disso, todas as derivadas de $f(t)$ existem se $t \neq 0$ e convergem a zero quando $t \rightarrow 0$. Portanto, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

Definição 1.1.1 Dizemos que uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $C_c^\infty(U)$ converge para zero quando as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) Existe um compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{supp}(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Para cada multi-índice α , a sequência $(D^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero uniformemente em A .

Se $u \in C_c^\infty(U)$, dizemos que a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $C_c^\infty(U)$ converge para u em $C_c^\infty(U)$ quando a sequência $(u_n - u)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero no sentido dado acima.

O espaço vetorial $C_c^\infty(U)$ com esta noção de convergência é representado por $D(U)$ e é denominado *espaço das funções testes* em U .

Definição 1.1.2 Dizemos que uma forma linear $T : D(U) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma distribuição sobre U se T é contínua com relação a convergência estabelecida na Definição 1.1.1, isto é, se para toda sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(U)$ que converge para zero, tivermos a convergência da sequência $(\langle T, u_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ para zero em $\mathbb{R}$.

O conjunto de todas as distribuições sobre U é um espaço vetorial, o qual representaremos por $D'(U)$. Além disso, se $v \in L_{loc}^1(U)$, então a forma linear $T_v : D(U) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle T_v, u \rangle = \int_U v(x)u(x)dx, \forall u \in D(U),$$

é um exemplo de distribuição sobre U .

Definição 1.1.3 Dizemos que uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $D'(U)$ converge para zero em $D'(U)$ quando, para toda função teste $u \in D(U)$, a sequência $(\langle T_n, u \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{R}$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0 \text{ em } D'(U).$$

Dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \text{ em } D'(U)$$

quando $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n - T) = 0$ em $D'(U)$.

Observamos ainda que, para $1 \leq p < \infty$, temos a seguinte cadeia de imersões contínuas

$$D(U) \subset L^p_{loc}(U) \subset D'(U).$$

Para encerrar esta seção iremos enunciar algumas propriedades elementares dos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.1.1 *Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então $L^q(U) \subset L^p(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ limitado, e, além disso, esta inclusão é contínua, isto é,*

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q, \quad (1.1)$$

para toda $f \in L^q(U)$.

Proposição 1.1.2 *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Assuma que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $fg \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.2)$$

Proposição 1.1.3 *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Assuma que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad (1.3)$$

onde o símbolo “ $*$ ” denota o operador de convolução

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

1.2 O Espaço de Schwartz e a Transformada de Fourier

Nesta seção, vamos introduzir o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o espaço das funções cujas derivadas decrescem no infinito mais rapidamente que qualquer potência negativa de $|x|$. Recordaremos também a transformada de Fourier de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e suas principais propriedades. Além disso, definiremos a transformada de Fourier inversa para uma função em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.2.1 O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é definido como o conjunto de todas as funções $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que a semi-norma $\|u\|_{k,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^k)(|\partial^\alpha u(x)|)$ é finita, para todo inteiro não negativo k e qualquer multi-índice α .

No espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ consideraremos a seguinte noção de convergência: uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para uma função $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se a sequência $(\|u_n - u\|_{k,\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e α multi-índice.

Definição 1.2.2 Uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$.

O dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ será designado pela notação $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se:

- (i) $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ é linear;
- (ii) Se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $T(u_n) \rightarrow T(u)$ em $\mathbb{R}$.

Vale lembrar que, para $1 \leq p \leq \infty$, tem-se

$$D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n).$$

A seguir recordaremos a transformada de Fourier.

Definição 1.2.3 Dada uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sua transformada de Fourier, denotada por $\mathcal{F}(u)$, é a função $\mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 1.2.1 Alguns autores definem a transformada de Fourier de maneiras diferentes porém, todas são casos particulares da fórmula

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ib\xi x} u(x) dx$$

para diferentes valores das constantes a e b . No nosso caso, estaremos considerando $(a, b) = (0, -2\pi)$. Outra definição bastante usada é com $(a, b) = (0, -1)$.

Definição 1.2.4 Dada uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier inversa de u é a função $\bar{\mathcal{F}}(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\bar{\mathcal{F}}(u)(x) = \mathcal{F}(u)(-x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades básicas da transformada de Fourier.

Proposição 1.2.1 *Considere $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i) $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$.
- (ii) Se $u^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq k$, então $\mathcal{F}(u) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(\mathcal{F}(u)) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha u)$.
- (iii) Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq k$, e $D^\alpha u$ é contínua com $\lim_{|x| \rightarrow \infty} D^\alpha u(x) = 0$, para $|\alpha| \leq k - 1$, então $\mathcal{F}(D^\alpha(u))(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}(u)(\xi)$.
- (iv) Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\|\mathcal{F}(u)\|_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|u\|_1$.

Observação 1.2.2 *Uma vez que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, as funções $\mathcal{F}(u)$ e $\bar{\mathcal{F}}(u)$ estão bem definidas e, além disso, pode-se mostrar que elas são rapidamente decrescentes no infinito. Mais ainda, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\bar{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são isomorfismos contínuos e $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$.*

Proposição 1.2.2 *Seja $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\|\mathcal{F}(u)\|_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|u\|_1$ e $\|u\|_\infty \leq \|\mathcal{F}(u)\|_1$.*

Proposição 1.2.3 *Sejam $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \bar{v}(x) dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}(u))(x) (\overline{\mathcal{F}(v)})(x) dx.$$

Para encerrar esta seção, vamos relembrar a definição de operadores multiplicadores de Fourier.

Definição 1.2.5 *Sejam m uma função mensurável e $X \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Suponha que $m\mathcal{F}(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para toda $u \in X$. O operador multiplicador de Fourier associado a m é o operador $F_m : X \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dado por*

$$(F_m u)(x) = \mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}(u))(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.4)$$

A função $m(\xi) = m(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, é denominada o símbolo do multiplicador de Fourier F_m .

A seguir definiremos o operador laplaceano fracionário, que é um exemplo de um operador multiplicador de Fourier, cujo símbolo é dado por $m(\xi) = |\xi|^z$.

Definição 1.2.6 *Seja $z \in \mathbb{C}$. O operador laplaceano fracionário é definido por*

$$(-\Delta)^{\frac{z}{2}} u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^z \mathcal{F}(u))(x), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

1.3 Decomposição de Littlewood-Paley e Paraproduto de Bony

A decomposição de Littlewood-Paley e o paraproduto de Bony, que apresentaremos nesta seção, serão ferramentas úteis para o estudo do problema (1) – (2) nos espaços de Fourier-Besov-Morrey que trataremos no Capítulo 5.

Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uma função radialmente simétrica tal que $\text{supp}(\varphi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\}$ e

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k(\xi) = 1, \text{ para todo } \xi \neq 0,$$

onde $\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos o k -ésimo bloco diádico Δ_k e o operador soma parcial S_k , respectivamente, por

$$\mathcal{F}(\Delta_k f) = \varphi_k \mathcal{F}(f) \text{ e } S_k f = \sum_{j \leq k-1} \Delta_j f, \text{ para } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (1.5)$$

Os operadores em (1.5) satisfazem as seguintes propriedades

$$\Delta_k \Delta_j f = 0, \text{ se } |k - j| \geq 2, \text{ e } \Delta_k[(S_{j-1}f)(\Delta_j g)] = 0, \text{ se } |k - j| \geq 5. \quad (1.6)$$

Definição 1.3.1 A decomposição de Littlewood-Paley de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\Delta_k f). \quad (1.7)$$

Dadas $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever fg como

$$fg = T_f(g) + T_g(f) + R(f, g), \quad (1.8)$$

onde T_f é o operador paraproduto de Bony, isto é

$$T_f(g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (S_{k-1}f)(\Delta_k g), \quad (1.9)$$

e

$$R(f, g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\Delta_k f)(\tilde{\Delta}_k g), \text{ com } (\tilde{\Delta}_k g) = \sum_{|k' - k| \leq 1} (\Delta_{k'} g). \quad (1.10)$$

Além disso, considerando as identidades em (1.6), para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos

$$\Delta_j(fg) = \sum_{|k-j| \leq 4} \Delta_j[(S_{k-1}f)(\Delta_k g)] + \sum_{|k-j| \leq 4} \Delta_j[(S_{k-1}g)(\Delta_k f)] + \sum_{k \geq j-2} \Delta_j[(\Delta_k f)(\tilde{\Delta}_k g)]. \quad (1.11)$$

Para maiores detalhes sobre a decomposição de Littlewood-Paley e o paraproduto de Bony, o leitor poderá consultar [3, 15, 34].

1.4 Variação Total de uma Medida

Nos Capítulos 3 e 4, uma das hipóteses consideradas nos Teoremas 3.4.1 e 4.2.1 é que a função vetorial ∇K é uma medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ tal que a sua variação total é finita. Assim, nesta seção iremos definir a variação total de uma medida sobre uma σ -álgebra.

Seja $\mathbf{X}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de X e λ uma carga, isto é, uma função real definida em $\mathbf{X}$ tal que $\lambda(\emptyset) = 0$ e λ é aditiva contável no sentido que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n),$$

para qualquer sequência disjunta $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X .

Definição 1.4.1 *Sejam λ uma carga sobre $\mathbf{X}$ e E um subconjunto qualquer de X . Um conjunto $P \in \mathbf{X}$ é dito ser positivo com respeito a λ se $\lambda(E \cap P) \geq 0$. Um conjunto $N \in \mathbf{X}$ é dito ser negativo com respeito a λ se $\lambda(E \cap N) \leq 0$. Um conjunto $M \in \mathbf{X}$ é dito ser nulo sobre λ se $\lambda(E \cap M) = 0$.*

Teorema 1.4.1 *(Teorema da Decomposição de Hahn) Seja λ uma carga sobre $\mathbf{X}$. Então existem $P, N \in \mathbf{X}$, com $X = P \cup N$ e $P \cap N = \emptyset$, tais que P é positivo e N é negativo com respeito a λ .*

Definição 1.4.2 *O par (P, N) de conjuntos mensuráveis satisfazendo as conclusões do Teorema 1.4.1 é dito uma decomposição de Hahn de X com respeito a λ .*

Definição 1.4.3 *Sejam λ uma carga sobre $\mathbf{X}$ e (P, N) uma decomposição de Hahn com respeito a λ . As variações positivas e negativas em relação a λ são as medidas finitas λ^+ e λ^- definidas para $E \in \mathbf{X}$ por*

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P), \quad \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N).$$

A variação total de λ é a medida $|\lambda|$ definida para $E \in \mathbf{X}$ por

$$|\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E).$$

Se uma função u é integrável em relação a uma medida μ sobre $\mathbf{X}$ e se λ é definida para $E \in \mathbf{X}$ por

$$\lambda(E) = \int_E u d\mu,$$

então λ é uma carga. Além disso, λ^+ , λ^- e $|\lambda|$ são dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E u^+ d\mu, \quad \lambda^-(E) = \int_E u^- d\mu \quad e \quad |\lambda|(E) = \int_E |u| d\mu,$$

em que $u^+(x) = \sup\{0, u(x)\}$ e $u^-(x) = \sup\{0, -u(x)\}$.

Definição 1.4.4 *Uma medida λ sobre $\mathbf{X}$ é dita ser absolutamente contínua em relação a uma medida μ sobre $\mathbf{X}$ se, dado $E \in \mathbf{X}$ com $\mu(E) = 0$, tivermos $\lambda(E) = 0$. Dizemos que a carga λ é absolutamente contínua em relação a uma carga μ se a variação total $|\lambda|$ de λ é absolutamente contínua com relação a $|\mu|$.*

1.5 Propriedades Gerais de Espaços de Interpolação

A fim de demonstrar as desigualdades (4.7) e (4.8), do Capítulo 4, que estimam a parte linear de nossa equação, usaremos as propriedades de interpolação (2.37) e (2.38), respectivamente. Então, nesta seção, faremos uma breve introdução aos espaços de interpolação, apresentando algumas noções básicas e definições. Observamos que existem vários métodos de interpolação, que podem ser classificados em duas categorias distintas: os métodos de interpolação real e os complexos. Aqui estamos interessados apenas em um método de interpolação real, conhecido como método K . Maiores detalhes sobre este assunto poderão ser encontrados em [5].

Definição 1.5.1 *Sejam X_0 e X_1 espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$. O par (X_0, X_1) é chamado admissível, compatível ou par de interpolação se existir um espaço vetorial topológico de Hausdorff Z tal que $X_0, X_1 \subset Z$, com a inclusão contínua.*

Lema 1.5.1 *Seja (X_0, X_1) um par admissível de espaços de Banach. Então $X_0 \cap X_1$, munido da norma*

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}, \quad x \in X_0 \cap X_1,$$

e $X_0 + X_1$, munido da norma

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_0 \in X_0, x_1 \in X_1}} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}), \quad x \in X_0 + X_1,$$

são espaços de Banach.

Usaremos a notação $T \in \mathcal{L}(X_j, Y_j)$, $j = 0, 1$, para dizer que $T : X_j \rightarrow Y_j$, $j = 0, 1$, é um operador linear limitado.

Definição 1.5.2 *Sejam (X_0, X_1) e (Y_0, Y_1) pares admissíveis de espaços de Banach e sejam X, Y espaços de Banach.*

- (i) *X é chamado de espaço intermediário com respeito a (X_0, X_1) se $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, com as inclusões contínuas.*
- (ii) *X e Y são chamados espaços de interpolação com respeito a (X_0, X_1) e (Y_0, Y_1) se X e Y são espaços intermediários com respeito a (X_0, X_1) e (Y_0, Y_1) , respectivamente, e se para toda $T \in \mathcal{L}(X_j, Y_j)$, $j = 0, 1$, tivermos $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
- (iii) *X é chamado de espaço de interpolação com respeito a (X_0, X_1) se as condições anteriores se mantiverem com $X = Y$, $(X_0, X_1) = (Y_0, Y_1)$.*
- (iv) *Os espaços de interpolação X e Y com respeito a (X_0, X_1) e (Y_0, Y_1) são ditos ser de expoente $\theta \in [0, 1]$, se existe algum $C > 0$ tal que*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq C \|T\|_{\mathcal{L}(X_0, Y_0)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(X_1, Y_1)}^{\theta},$$

para toda $T \in \mathcal{L}(X_j, Y_j)$, $j = 0, 1$. Se $C = 1$, então X e Y são chamados espaços de interpolação exatos de expoente θ . Analogamente, X é uma espaço de interpolação exato de expoente θ se as condições anteriores se mantiverem para $X = Y$, $(X_0, X_1) = (Y_0, Y_1)$.

Exemplo 1.5.1 *Sejam $0 < \alpha < 1$ e k um inteiro positivo, e considere os espaços:*

$$C^0(\mathbb{R}^n) = \{u : u \text{ é contínua e limitada}\}, \text{ com } \|u\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|;$$

$$C^k(\mathbb{R}^n) = \{u : u \text{ tem derivadas parciais contínuas e limitadas até a ordem } k\}, \text{ com}$$

$$\|u\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq k} |\partial_x^\alpha u(x)|;$$

$$C^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u : \|u\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} < \infty\}, \text{ com } \|u\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Então $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ é um espaço intermediário com respeito a $C^0(\mathbb{R}^n)$ e $C^1(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, existe algum $C > 0$ com

$$\|u\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha} \|u\|_{C^1(\mathbb{R}^n)}^\alpha, \text{ para toda } u \in C^1(\mathbb{R}^n).$$

O método de interpolação K começa pela definição do funcional K : Dados X_0 e X_1 espaços de Banach contidos em um espaço de Hausdorff Z , para $0 < t < \infty$, definimos o funcional $K : X_0 + X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$K(x, t) \equiv K(t, x, X_0, X_1) = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_0 \in X_0, x_1 \in X_1}} (\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}).$$

Desse modo, para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$, consideremos o espaço

$$\begin{aligned} (X_0, X_1)_{\theta, q} &= \{x \in X_0 + X_1 : \\ \|x\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q}} &= \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, x)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \text{ se } q < \infty, \text{ e} \\ \|x\|_{(X_0, X_1)_{\theta, \infty}} &= \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t, x) < \infty, \text{ se } q = \infty \}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Assim, temos que o espaço $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ é um espaço de interpolação de expoente θ , ver [5].

1.6 Um Lema de Ponto Fixo

Nesta seção apresentaremos um resultado de ponto fixo que será utilizado para garantir a existência e a unicidade da solução *mild* do problema (1) – (2).

Lema 1.6.1 *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $B : X \times X \rightarrow X$ uma aplicação bilinear contínua, ou seja,*

$$\|B(x_1, x_2)\|_X \leq N\|x_1\|_X\|x_2\|_X, \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

e algum $N > 0$. Dado $y \in X$ tal que $y \neq 0$ e $\|y\|_X \leq \varepsilon$, se $4N\varepsilon < 1$, então existe uma única solução $u \in X$ para a equação $x = y + B(x, x)$, satisfazendo $\|u\|_X \leq 2\varepsilon$. Essa solução é o limite em X da sequência iterada $x_1 = y$ e $x_{n+1} = y + B(x_n, x_n)$, $n \geq 1$.

A demonstração do Lema 1.6.1 pode ser vista em [34], pg. 124, e é baseada no fato de que, se $\|y\|_X \leq \varepsilon < \frac{1}{4N}$, então a aplicação $x \mapsto y + B(x, x)$ é uma contração na bola fechada $\bar{B}_{\varepsilon(0)} = \{x \in X : \|x\|_X \leq \varepsilon\}$. Assim, a solução da equação $x = y + B(x, x)$ pode ser obtida como limite da sequência iterada $x_1 = y$ e $x_{n+1} = y + B(x_n, x_n)$, $n \geq 1$. Além disso, $\|x_n\|_X \leq 2\varepsilon$.

1.7 As Funções Beta e Gama

Encerraremos este capítulo lembrando uma propriedade da função Beta que usaremos com frequência para garantir que o operador bilinear $B(u, v)$, definido em (3.4), é contínuo em cada

um dos espaços funcionais considerados. Na sequência, aproveitaremos para definir a função Gamma, que se relaciona com a função Beta e também aparece neste texto.

Definição 1.7.1 A função Beta, $\beta(\cdot, \cdot) : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Proposição 1.7.1 A função Beta é sempre finita.

Demonstração: Sejam $x, y \in (0, \infty)$ e tomemos $0 < \delta < 1$. Então

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \int_0^\delta t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_\delta^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &\leq \max\{1, (1-\delta)^{y-1}\} \int_0^\delta t^{x-1} dt + \max\{1, \delta^{x-1}\} \int_\delta^1 (1-t)^{y-1} dt \\ &= \max\{1, (1-\delta)^{y-1}\} \frac{\delta^x}{x} + \max\{1, \delta^{x-1}\} \frac{(1-\delta)^y}{y} < \infty. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Observação 1.7.1 Note que, pela mudança de variável $s = tz$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^t s^{x-1} (t-s)^{y-1} ds &= \int_0^1 (tz)^{x-1} (t-tz)^{y-1} t dz \\ &= \int_0^1 t^{x+y-1} z^{x-1} (1-z)^{y-1} dz. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Definição 1.7.2 A função Gamma, $\Gamma(\cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt : \Re(z) > 0.$$

Sua propriedade mais importante é que $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$. Além disso, a função Beta também pode ser definida como a seguinte combinação de funções Gammas

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, a, b > 0.$$

Capítulo 2

Espaços Homogêneos

Nos Capítulos 3, 4 e 5 iremos considerar o problema de Cauchy para a equação de agregação de modo a garantir existência de solução *mild* global, quando a condição inicial pertence, respectivamente, aos espaços de Morrey, Besov-Morrey e Fourier-Besov-Morrey. Dessa forma, nosso objetivo no presente capítulo é definir tais espaços e apresentar algumas de suas propriedades. Ressaltamos ainda que vamos considerar a versão homogênea desses espaços, pois, neste caso, teremos uma propriedade fundamental para o estudo das equações diferenciais parciais por meio de técnicas de *scaling*, o que é nosso propósito.

2.1 Espaços de Morrey e de Sobolev-Morrey Homogêneos

Nesta seção definiremos os espaços de Morrey e de Sobolev-Morrey e apresentaremos algumas propriedades desses espaços em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1.1 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda < n$. O espaço de Morrey homogêneo $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ é definido por*

$$\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{p,\lambda} < \infty\}, \quad (2.1)$$

em que

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))}\} \quad (2.2)$$

e $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ representa a bola fechada de centro x_0 e raio R .

A função $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ é uma norma em $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, na próxima proposição mostraremos que $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ munido com esta norma é um espaço de Banach. Em particular, para $p \geq 1$,

$\mathcal{M}_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Observamos ainda que na Definição 2.1.1 podemos tomar $p = \infty$ ou $\lambda = n$, porém, nestes casos, obteremos o espaço $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.1.1 *O espaço $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \lambda \leq n$, munido da norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Para garantirmos que $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach, provaremos que toda série absolutamente convergente em $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ é convergente neste espaço. Para isso, sejam $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência tal que a série $S = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p,\lambda}$ é convergente. Definimos $G = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$. Observe primeiramente que, sendo $m \in \mathbb{N}$, $R > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} R^{-\frac{\lambda}{p}} \left\| \sum_{k=1}^m |f_k| \right\|_{L^p(B_R(x_0))} &\leq R^{-\frac{\lambda}{p}} \sum_{k=1}^m \|f_k\|_{L^p(B_R(x_0))} = \sum_{k=1}^m R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f_k\|_{L^p(B_R(x_0))} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sup_{x \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f_k\|_{L^p(B_R(x))}\} = \sum_{k=1}^m \|f_k\|_{p,\lambda} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p,\lambda} = S. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Assim, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.3), obtemos

$$R^{-\frac{\lambda}{p}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_{L^p(B_R(x_0))} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p,\lambda},$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \|G\|_{p,\lambda} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_{L^p(B_R(x_0))} \right\} \\ &\leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p,\lambda} \right\} = S, \end{aligned} \tag{2.4}$$

ou seja, $G \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Agora, seja $F = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Verifiquemos que F converge na norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $|F(x)| \leq G(x)$ e assim, $\|F\|_{L^p(B_R(x_0))} \leq \|G\|_{L^p(B_R(x_0))}$, para todo $R > 0$ e todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\|F\|_{p,\lambda} \leq \|G\|_{p,\lambda} \leq S.$$

Logo, $F \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, isto é, a série F convergente em $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, como queríamos. ■

Outro espaço considerado na literatura é o espaço de medida do tipo Morrey $\mathcal{M}_\lambda(\mathbb{R}^n)$, com $0 \leq \lambda < n$, introduzido por Giga e Miyakawa in [23]. Esse espaço define o conjunto das medidas de Radon μ sobre $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\|\mu\|_\lambda = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\lambda} |\mu|_{B_R(x_0)}\} < \infty, \quad (2.5)$$

onde $|\mu|$ denota a variação total de medida μ (ver Seção 1.4). Em particular, tomando $\lambda = 0$, o espaço $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ coincide com o espaço das medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ de variação total finita. Destacamos também que os espaços $\mathcal{M}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ são subespaços fechados de $\mathcal{M}_\lambda(\mathbb{R}^n)$, consistindo das medidas absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue, identificando uma função localmente integrável $u(x)$ com a medida de Radon $u(x)dx$. Portanto, $L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Para maiores detalhes sobre esta observação, consultar [32], seção 1, página 970.

Neste trabalho também introduziremos os espaços de Sobolev-Morrey homogêneos, que definiremos a seguir.

Definição 2.1.2 *Sejam $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ e $s \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev-Morrey homogêneo $\mathcal{M}_{p,\lambda}^s(\mathbb{R}^n)$ é definido por*

$$\mathcal{M}_{p,\lambda}^s(\mathbb{R}^n) = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

e sua norma é dada por

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{p,\lambda}.$$

Assim como os espaços de Morrey, $(\mathcal{M}_{p,\lambda}^s(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s})$ também é um espaço de Banach.

A norma do espaço de Morrey homogêneo satisfaz a seguinte propriedade de escala

$$\|f(\alpha \cdot)\|_{p,\lambda} = \alpha^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda}, \text{ para todo } \alpha > 0, \quad (2.6)$$

onde a função $f(\alpha \cdot)$ representa a função $x \mapsto f(\alpha x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} \|f(\alpha \cdot)\|_{p,\lambda}^p &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \left\{ R^{-\lambda} \int_{B_R(x_0)} |f(\alpha x)|^p dx \right\} \\ &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \left\{ \alpha^{-(n-\lambda)} (\alpha R)^{-\lambda} \int_{B_{\alpha R}(\alpha x_0)} |f(x)|^p dx \right\} \\ &= \alpha^{-(n-\lambda)} \|f\|_{p,\lambda}^p. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Semelhanamente, o espaço de Sobolev-Morrey homogêneo satisfaz a seguinte relação de escala

$$\|f(\alpha \cdot)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s} = \alpha^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s}, \text{ para todo } \alpha > 0. \quad (2.8)$$

Neste caso, para justificarmos a igualdade acima, mostraremos primeiramente que, dados $\alpha > 0$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(\alpha x) = \alpha^s ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} f)(\alpha x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

Uma vez que a transformada de Fourier de uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$ satisfaz a propriedade

$$\mathcal{F}[f(\alpha \cdot)](\xi) = \alpha^{-n} \mathcal{F}[f](\alpha^{-1} \xi), \quad (2.10)$$

segue da Definição 1.2.6 e da propriedade (2.10), que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(\alpha \cdot)](\xi) &= |\xi|^s \mathcal{F}[f(\alpha \cdot)](\xi) = |\xi|^s \alpha^{-n} \mathcal{F}[f](\alpha^{-1} \xi) \\ &= \alpha^{-n} \alpha^s |\alpha^{-1} \xi|^s \mathcal{F}[f](\alpha^{-1} \xi) = \alpha^{-n} \alpha^s \mathcal{F}[(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f](\alpha^{-1} \xi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Agora, usando (2.10) em (2.11), com $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f$ no lugar de f , e aplicando a transformada inversa, obtemos (2.9).

Por fim, utilizando (2.9) e a propriedade de escala em espaços de Morrey, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(\alpha \cdot)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s} &= \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(\alpha \cdot)\|_{p,\lambda} = \|\alpha^s ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} f)(\alpha \cdot)\|_{p,\lambda} \\ &= \alpha^s \alpha^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{p,\lambda} = \alpha^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

No próximo resultado, vamos listar algumas propriedades dos espaços de Morrey homogêneos envolvendo inclusões e desigualdades que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Os resultados em (i), (ii) e (iii) podem ser encontrados em [29], no entanto, apresentaremos aqui suas demonstrações. Já o item (iv) pode ser visto em [41] e, devido a grande quantidade de detalhes técnicos, não faremos sua demonstração.

Lema 2.1.1 (i) (*Inclusão contínua*) Sejam $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < n$. Se $\frac{n-\lambda_1}{p_1} = \frac{n-\lambda_2}{p_2}$, então

$$\mathcal{M}_{p_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n). \quad (2.13)$$

(ii) (*Desigualdade de Hölder*) Sejam $1 \leq p_i \leq \infty$ e $0 \leq \lambda_i < n$, $i = 1, 2, 3$. Se $f \in \mathcal{M}_{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{M}_{p_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{\lambda_3}{p_3} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}$, então $fg \in \mathcal{M}_{p_3,\lambda_3}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|fg\|_{p_3,\lambda_3} \leq \|f\|_{p_1,\lambda_1} \|g\|_{p_2,\lambda_2}. \quad (2.14)$$

(iii) (Desigualdade de Young) Para $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, temos

$$\|g * f\|_{p,\lambda} \leq \|g\|_1 \|f\|_{p,\lambda}, \quad (2.15)$$

para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

(iv) (Desigualdade tipo Bernstein) Sejam $1 \leq p_2 \leq p_1 \leq \infty$ e $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < n$ tais que $\frac{n-\lambda_1}{p_1} \leq \frac{n-\lambda_2}{p_2}$. Se $A > 0$ e $\text{supp}(\mathcal{F}(f)) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq A2^j\}$, então existe uma constante $c > 0$, independente de f e j , tal que

$$\|(i\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)\|_{p_2,\lambda_2} \leq C 2^{j|\alpha|+j(\frac{n-\lambda_2}{p_2}-\frac{n-\lambda_1}{p_1})} \|\mathcal{F}(f)\|_{p_1,\lambda_1}, \quad (2.16)$$

onde α é um multi-índice e $j \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: (i) Dada $f \in \mathcal{M}_{p_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$, por definição, segue que $f \in L^{p_2}(B_R(x_0))$, para todo $R > 0$ e todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sendo $p_1 \leq p_2$, existe $r \geq 1$ tal que $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r}$ e então, pela Propriedade 1.1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_{B_R(x_0)} |1|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \tilde{C}^{\frac{1}{r}} R^{\frac{n}{r}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= CR^{\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que $\tilde{C}R^n$ é o volume de $B_R(x_0)$. Assim,

$$\begin{aligned} R^{-\frac{\lambda_1}{p_1}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq CR^{\frac{n-\lambda_1}{p_1}-\frac{n}{p_2}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &\leq CR^{-\frac{\lambda_2}{p_2}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Tomando o supremo em (2.18) quando variamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, concluímos que

$$\|f\|_{p_1,\lambda_1} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \{R^{-\frac{\lambda_1}{p_1}} \|f\|_{L^{p_1}(B_R(x_0))}\} \leq C \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \{R^{-\frac{\lambda_2}{p_2}} \|f\|_{L^{p_2}(B_R(x_0))}\} = C \|f\|_{p_2,\lambda_2}.$$

Portanto, $f \in \mathcal{M}_{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ e a inclusão $\mathcal{M}_{p_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ é contínua.

(ii) Sejam $f \in \mathcal{M}_{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{M}_{p_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$. Assim, $f \in L^{p_1}(B_R(x_0))$ e $g \in L^{p_2}(B_R(x_0))$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e todo $R > 0$, e, pela Propriedade 1.1.2, temos

$$\|fg\|_{L^{p_3}(B_R(x_0))} \leq \|f\|_{L^{p_1}(B_R(x_0))} \|g\|_{L^{p_2}(B_R(x_0))}. \quad (2.19)$$

Além disso, por hipótese, $\frac{\lambda_3}{p_3} = \frac{\lambda_2}{p_2} + \frac{\lambda_1}{p_1}$ e então

$$R^{-\frac{\lambda_3}{p_3}} \|fg\|_{L^{p_3}(B_R(x_0))} \leq R^{-\frac{\lambda_1}{p_1}} \|f\|_{L^{p_1}(B_R(x_0))} R^{-\frac{\lambda_2}{p_2}} \|g\|_{L^{p_2}(B_R(x_0))}. \quad (2.20)$$

Logo, tomando o supremo em (2.20) para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, concluímos que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{p_3, \lambda_3} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda_3}{p_3}} \|fg\|_{L^{p_3}(B_R(x_0))}\} \\ &\leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda_1}{p_1}} \|f\|_{L^{p_1}(B_R(x_0))}\} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda_2}{p_2}} \|g\|_{L^{p_2}(B_R(x_0))}\} \\ &= \|f\|_{p_1, \lambda_1} \|g\|_{p_2, \lambda_2}. \end{aligned}$$

(iii) Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dada $f \in \mathcal{M}_{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$, então $f \in L^p(B_R(x_0))$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e todo $R > 0$. Logo, pela Propriedade 1.1.3, com $r = p$ e $q = 1$, temos

$$\|g * f\|_{L^p(B_R(x_0))} \leq \|g\|_{L^1(B_R(x_0))} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))} \leq \|g\|_1 \|f\|_{L^p(B_R(x_0))}. \quad (2.21)$$

Assim, multiplicando (2.21) por $R^{-\frac{\lambda}{p}}$ e tomando o supremo para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e todo $R > 0$, obtemos

$$\|g * f\|_{p, \lambda} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda}{p}} \|g * f\|_{L^p(B_R(x_0))}\} \leq \|g\|_1 \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0} \{R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B_R(x_0))}\} = \|g\|_1 \|f\|_{p, \lambda}.$$

■

O próximo lema é uma versão da Desigualdade de Young (2.15) no caso em que $g = \mu$ é uma medida de Radon e sua demonstração pode ser encontrada em [32].

Lema 2.1.2 *Seja μ uma medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ tal que sua variação total sobre $\mathbb{R}^n$ é $A < \infty$. Se $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, então*

$$\|\mu * f\|_{p, \lambda} \leq A \|f\|_{p, \lambda}, \quad (2.22)$$

para toda $f \in \mathcal{M}_{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Para encerrar esta seção, enunciaremos em seguida um resultado sobre os espaços de Sobolev-Morrey que fornece estimativas de um certo operador multiplicador em $\mathcal{M}_{p, \lambda}^s(\mathbb{R}^n)$, cuja demonstração pode ser vista em [18].

Proposição 2.1.2 *Sejam m, s números reais, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ e $F \in C^{[\frac{n}{2}] + 1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Suponha que existe $A > 0$ tal que*

$$\left| \frac{\partial^\alpha F}{\partial \xi^\alpha}(\xi) \right| \leq A |\xi|^{m - |\alpha|}$$

para todo $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}] + 1$ e $\xi \neq 0$. Então o operador multiplicador de Fourier $F(D)$ sobre $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ é limitado de $\mathcal{M}_{p,\lambda}^s(\mathbb{R}^n)$ para $\mathcal{M}_{p,\lambda}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\|F(D)f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^{s-m}} \leq CA\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}^s}, \quad (2.23)$$

para alguma constante $C > 0$.

2.2 Espaços de Besov e de Besov-Morrey Homogêneos

Denotemos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os polinômios com n variáveis. Seja $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi(\xi) \leq 1$, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, de modo que $\text{supp}(\varphi) \subset D_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} < |\xi| < 2\}$ e

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k(\xi) = 1, \text{ para toda } \xi \neq 0,$$

onde $\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}$.

Defina $\phi(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x)$ e $\phi_k(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_k)(x) = 2^{kn}\phi(2^kx)$, $k \in \mathbb{Z}$. Além disso, para $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda < n$ e $s \in \mathbb{R}$, dada f no espaço quociente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F}(f)) \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, defina o número real $\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s}$ por

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{ks} \|\phi_k * f\|_{p,\lambda} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{ks} \|\phi_k * f\|_{p,\lambda} \right) & q = \infty. \end{cases}$$

Definição 2.2.1 O espaço de Besov-Morrey homogêneo em $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n)$, é o conjunto das classes de equivalência, denotadas por f , em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} < \infty$.

Observação 2.2.1 Em particular, colocando $\lambda = 0$ na definição acima, obtem-se o espaço de Besov homogêneo $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. De acordo com a nossa notação, temos ainda que $\mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$, já que identificamos $\mathcal{M}_{\infty,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ com $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.2.1 Os pares $(\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s})$ e $(\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s})$ são espaços de Banach.

Demonstração: Como o espaço de Besov é um caso particular do espaço de Besov-Morrey, faremos a demonstração apenas para $(\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s})$.

Iniciaremos a prova considerando primeiramente o caso $1 \leq q < \infty$ e, assim como na demonstração da Proposição 2.1.1, vamos mostrar que toda série absolutamente convergente

em $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n)$ é também convergente neste espaço. Para isso, seja $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ uma série absolutamente convergente em $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} [2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda}]^q \right)^{\frac{1}{q}} = S < \infty. \quad (2.24)$$

Definimos $S_N = \sum_{i=1}^N f_i$, $N \in \mathbb{N}$. Por hipótese $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = S$ e portanto, $\left(\sum_{i=1}^N \|f_i\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Logo, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, se $N > M \geq N_0$, então $\left| \sum_{i=M+1}^N \|f_i\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} \right| < \varepsilon$. Consequentemente, ainda para $N > M \geq N_0$, temos

$$\|S_N - S_M\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = \left\| \sum_{i=M+1}^N f_i \right\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} \leq \sum_{i=M+1}^N \|f_i\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} < \varepsilon. \quad (2.25)$$

Desse modo, $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Em particular, como $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, sendo este último espaço um espaço completo, temos a existência de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} f_i = f$. Verifiquemos que $\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} < \infty$.

Observemos que, como $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} < \infty$ e $\|f_i\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = \left(\sum_{K \in \mathbb{Z}} (2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda})^q \right)^{\frac{1}{q}}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda}$ também é convergente. Logo, visto que $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach, existe $g_k \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ de modo que $g_k = \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_k * f_i)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Agora, estimemos $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} [2^{ks} \|g_k\|_{p,\lambda}]^q \right)^{\frac{1}{q}}$. Para isso, dados $M, N \in \mathbb{N}$ arbitrários, utilizando a Desigualdade de Minkowski (caso discreto), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=-N}^N \left[2^{ks} \sum_{i=1}^M \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{k=-N}^N \left| \sum_{i=1}^M 2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=-N}^N |2^{ks} \|\phi_k * f_1\|_{p,\lambda} + \dots + 2^{ks} \|\phi_k * f_M\|_{p,\lambda}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{k=-N}^N |2^{ks} \|\phi_k * f_1\|_{p,\lambda}|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \dots \\ &\quad + \left(\sum_{k=-N}^N |2^{ks} \|\phi_k * f_M\|_{p,\lambda}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{i=1}^M \left(\sum_{k=-N}^N [2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda}]^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Assim, como M, N são arbitrários e suas séries envolvidas são convergentes, podemos tomar o limite quando M e N tendem ao infinito, o que nos garante que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} [2^{ks} \|g_k\|_{p,\lambda}]^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[2^{ks} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_k * f_i) \right\|_{p,\lambda} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[2^{ks} \sum_{i=1}^{\infty} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} [2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda}]^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Notemos também que para qualquer $N \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \phi_k * \left(\sum_{i=1}^N f_i \right) \right\|_{p,\lambda} &= \left\| \sum_{i=1}^N (\phi_k * f_i) \right\|_{p,\lambda} \leq \sum_{i=1}^N \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Assim, fazendo $N \rightarrow \infty$ em (2.28), obtemos $\left\| \phi_k * \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) \right\|_{p,\lambda} \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_k * f_i) \right\|_{p,\lambda}$.

Por fim, mostraremos que $\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} < \infty$. Neste caso, usando a definição da norma em $\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s$ e os resultados acima, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_i \right\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[2^{ks} \left\| \phi_k * \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) \right\|_{p,\lambda} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[2^{ks} \sum_{i=1}^{\infty} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} [2^{ks} \|g_k\|_{p,\lambda}]^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

por conta da estimativa em (2.27).

Portanto, $f \in \mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n)$ quando $1 \leq q < \infty$.

Para a prova do caso $q = \infty$ basta seguir os passos da demonstração do caso anterior, levando em conta a desigualdade a seguir, isto é,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda}, \tag{2.30}$$

cuja validade se dá pois, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^N 2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} &\leq \sum_{i=1}^N \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\phi_k * f_i\|_{p,\lambda} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s} = S < \infty. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Assim, fazendo $N \rightarrow \infty$ em (2.31) obtemos (2.30). ■

Observação 2.2.2 *É possível fazer a seguinte identificação nos espaço de Besov-Morrey*

$$\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n) = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \mathcal{N}_{p,\lambda,q}^0(\mathbb{R}^n), \quad (2.32)$$

com norma correspondente igual a $\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^0}$.

Os resultados a seguir fornecem propriedades dos espaços de Besov e Besov-Morrey homogêneos que serão úteis nesta tese. Enunciamos primeiramente um lema de imersão de Sobolev entre espaços de Besov-Morrey, cujos detalhes podem ser encontrados em [20], [32], [42].

Lema 2.2.1 *Sejam $1 \leq p \leq r \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s, \nu \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \lambda < n$. Então, a inclusão*

$$\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_{r,\lambda,q}^\nu(\mathbb{R}^n) \quad (2.33)$$

é contínua se $s - \frac{n-\lambda}{p} = \nu - \frac{n-\lambda}{r}$.

Proposição 2.2.2 (i) *(Inclusões contínuas) Suponha que $1 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \lambda < n$, então*

$$\mathcal{N}_{p,\lambda,1}^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0(\mathbb{R}^n), \quad (2.34)$$

$$\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}_{\infty,\infty}^{s-\frac{n-\lambda}{p}}(\mathbb{R}^n). \quad (2.35)$$

(ii) *(Propriedade de escala) A norma do espaço de Besov-Morrey homogêneo satisfaz a seguinte propriedade de escala*

$$\|f(\alpha \cdot)\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s} = \alpha^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s}, \text{ para todo } \alpha > 0. \quad (2.36)$$

(iii) *(Interpolação real - método K) Sejam $1 \leq q, q_1, q_2 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ e $s_1 \neq s_2$ tais que $s = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2$. Então*

$$(\mathcal{M}_{p,\lambda}^{s_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}_{p,\lambda}^{s_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = \mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad (2.37)$$

e

$$(\mathcal{N}_{p,\lambda,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}_{p,\lambda,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = \mathcal{N}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n). \quad (2.38)$$

Demonstração:

(i) Iniciaremos demonstrando (2.34), isto é, mostraremos que $\mathcal{N}_{p,\lambda,1}^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $f \in \mathcal{N}_{p,\lambda,1}^0(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\lambda} &= \|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)\|_{p,\lambda} = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k \right] \mathcal{F}(f) \right) \right\|_{p,\lambda} \\ &= \left\| \left[\mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k \right) \right] * f \right\|_{p,\lambda} \end{aligned} \quad (2.39)$$

e, para qualquer $N \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \left[\mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k=-N}^N \varphi_k \right) \right] * f \right\|_{p,\lambda} &= \left\| \left(\left[\mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \right) \right] * f \right) + ([\mathcal{F}^{-1}(\varphi_0)] * f) \right. \\ &\quad \left. + \left(\left[\mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \varphi_{-k} \right) \right] * f \right) \right\|_{p,\lambda} \\ &\leq \left\| \left(\left[\mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \right) \right] * f \right) \right\|_{p,\lambda} + \|([\mathcal{F}^{-1}(\varphi_0)] * f)\|_{p,\lambda} \\ &\quad + \left\| \left(\left[\mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \varphi_{-k} \right) \right] * f \right) \right\|_{p,\lambda} \\ &\leq \sum_{k=1}^N \|[\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k)] * f\|_{p,\lambda} + \|[\mathcal{F}^{-1}(\varphi_0)] * f\|_{p,\lambda} \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \|[\mathcal{F}^{-1}(\varphi_{-k})] * f\|_{p,\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^N \|\phi_k * f\|_{p,\lambda} + \|\phi_0 * f\|_{p,\lambda} + \sum_{k=1}^N \|\phi_{-k} * f\|_{p,\lambda} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\phi_k * f\|_{p,\lambda} = \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,1}^0}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Desse modo, fazendo $N \rightarrow \infty$ em (2.40) e usando (2.39), obtemos

$$\|f\|_{p,\lambda} = \left\| \left[\mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k \right) \right] * f \right\|_{p,\lambda} \leq \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,1}^0} < \infty.$$

Portanto, $\mathcal{N}_{p,\lambda,1}^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, com a inclusão contínua.

Mostremos agora que a inclusão $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0(\mathbb{R}^n)$ também é contínua. Antes porém, observe que, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_k \in D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 \leq p \leq \infty$, e assim, pelas Proposições 1.1.1 e 1.2.2, obtemos

$$\|\phi_k\|_1 \leq C_1 \|\phi_k\|_\infty \leq C_1 \|\mathcal{F}(\phi_k)\|_1 \leq C_2 \|\mathcal{F}(\phi_k)\|_\infty = C_2 \|\varphi_k\|_\infty,$$

com C_1, C_2 constantes positivas. Desse modo, dada $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, pela desigualdade em (2.15), temos

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\phi_k * f\|_{p,\lambda} \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\phi_k\|_1 \|f\|_{p,\lambda}. \quad (2.41)$$

Além disso, como $0 \leq \varphi_k(\xi) \leq 1$, para toda $\xi \in \mathbb{R}^n$ e todo $k \in \mathbb{Z}$, então $\|\varphi_k\|_\infty \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0} \leq C_2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\varphi_k\|_\infty \|f\|_{p,\lambda} \leq C_2 \|f\|_{p,\lambda}.$$

Portanto, $f \in \mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0$ e a inclusão $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0(\mathbb{R}^n)$ é contínua.

Já a inclusão em (2.35) segue como consequência de (2.33), pelo fato de $\mathcal{N}_{\infty,\lambda,\infty}^{s-\frac{n-\lambda}{p}}(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_{\infty,\infty}^{s-\frac{n-\lambda}{p}}(\mathbb{R}^n)$, como visto na Observação 2.2.1.

(ii) Demonstraremos (2.36) apenas para $q = \infty$, já que para $1 \leq q < \infty$ a demonstração é análoga.

Pela Observação 2.2.2, temos $\|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0}$. Logo, de (2.9) e da relação de escala em $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(\alpha \cdot)\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s} &= \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} [f(\alpha \cdot)]\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0} = \|\alpha^s [(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f](\alpha \cdot)\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0} \\ &= \alpha^s \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\phi_k * [(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(\alpha \cdot)]\|_{p,\lambda} = \alpha^s \sup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|\phi_k * [(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f]\|_{p,\lambda} \\ &= \alpha^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\phi_k * [(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f]\|_{p,\lambda} = \alpha^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^0} \\ &= \alpha^{s-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

(iii) Para a demonstração deste item indicamos a referência [32], Proposição 2.12. ■

2.3 Espaços de Fourier-Besov-Morrey Homogêneos

Nesta seção definiremos os espaços homogêneos de Fourier-Besov-Morrey. Estes espaços se relacionam com os espaços homogêneos de Besov-Morrey substituindo a função $\phi_k * f = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F}(f))$ por $\mathcal{F}(\phi_k * f) = \varphi_k \mathcal{F}(f)$ na definição da norma de $\mathcal{N}_{p,\lambda,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uma função radialmente simétrica satisfazendo $\text{supp}(\varphi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\}$, tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k(\xi) = 1, \text{ para todo } \xi \neq 0,$$

onde $\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)$, para $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{Z}$. Dada f no espaço quociente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\varphi_k \mathcal{F}(f) \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, dados $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda < n$ e $s \in \mathbb{R}$, definimos

$$\|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^s} = \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{ks} \|\varphi_k \mathcal{F}(f)\|_{p,\lambda} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{ks} \|\varphi_k \mathcal{F}(f)\|_{p,\lambda} \right), & q = \infty. \end{cases}$$

O espaço de Fourier-Besov-Morrey homogêneo $\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das classes de equivalência de funções $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^s} < \infty$.

Enunciaremos a seguir um resultado importante sobre os espaços de Fourier-Besov-Morrey, cuja demonstração pode ser encontrada em [41], Proposição 4.1.3.

Proposição 2.3.1 *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 \leq \lambda < n$ e $s < n - \frac{n-\lambda}{p}$.*

(i) *Considere $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ com a topologia forte. Então, temos as seguintes inclusões de Sobolev*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n). \quad (2.43)$$

(ii) *O par*

$$(\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^s}) \quad (2.44)$$

é um espaço de Banach.

A norma $\|\cdot\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^s}$ apresenta a seguinte relação de escala

$$\|f(\alpha \cdot)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^s} = \alpha^{s-n+\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^s}, \text{ para todo } \alpha > 0. \quad (2.45)$$

Capítulo 3

Boa Colocação em Espaços de Morrey

Este capítulo é dedicado ao estudo de existência, estabilidade assintótica e simetria para soluções do problema

$$u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u(\nabla K * u)), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

para $n \geq 2$, com dado inicial em espaços de Morrey. Ressaltamos que, tanto no presente capítulo como no Capítulo 4, iremos supor que ∇K é uma medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$, o que nos fornecerá também um resultado de auto-similaridade para a solução.

Além disso, analisaremos a existência de solução seguindo o procedimento padrão da área de equações diferenciais, isto é, através do uso de teoremas de ponto fixo, reescrevendo o problema (1) – (2) em sua forma integral e então, buscando uma solução de (1) – (2) no sentido mais fraco, a qual será chamada de solução *mild* ou branda.

3.1 Formulação Integral de (1) – (2)

Nesta seção apresentaremos a formulação integral para o problema de Cauchy (1) – (2), proveniente do Princípio de Duhamel. Para isso, recordemos que o semigrupo do calor $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ é uma família de operadores de convolução cujo núcleo é dado por $g(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, ou seja, $(G(t)f)(\cdot) = g(\cdot, t) * f(\cdot)$. Vale a pena lembrar que a função $g(x, t)$ tem transformada de Fourier, com relação a primeira variável, dada por $\mathcal{F}(g)(\xi, t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$.

O problema linear associado a (1) – (2) é o problema de Cauchy para a equação do calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.1)$$

cuja solução, já conhecida na literatura, é dada por

$$u(x, t) = G(t)u_0(x) = g(x, t) * u_0(x). \quad (3.2)$$

Dessa forma, de acordo com o Princípio de Duhamel, obtemos a seguinte equação integral para o problema (1) – (2)

$$u(x, t) = G(t)u_0(x) + B(u, u)(t), \quad (3.3)$$

em que

$$B(u, v)(t) = - \int_0^t \nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * v))(s) ds. \quad (3.4)$$

Como veremos adiante, a solução que satisfaz a equação integral (3.3), em um sentido adequado, é chamada de solução *mild* (ou branda) do problema (1) – (2).

3.2 *Scaling* das Equações de Agregação

Para obtermos resultados de boa colocação, buscaremos por espaços funcionais escolhendo-se “índices” adequados de modo que as normas destes espaços sejam invariantes pela relação de escala associada ao problema (1) – (2). Estes espaços são conhecidos como espaços críticos.

Para determinarmos a relação de escala de (1) – (2), precisamos assumir que ∇K é homogêneo de grau $-n$, conforme a definição a seguir.

Definição 3.2.1 *Uma função u é chamada homogênea de grau ρ se $u(\lambda x) = \lambda^\rho u(x)$, para todo $\lambda > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.*

Vale a pena lembrar que uma distribuição $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ é homogênea de grau ρ se satisfaz a definição acima. Como exemplo, podemos citar a função delta Dirac $\delta(x)$, que é homogênea de grau $-n$. Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}^n$ é um multi-índice, $D^k \delta(x)$ é homogênea de grau $\rho = -n - |k|$.

Observação 3.2.1 *Note que uma medida de Radon em $\mathbb{R}^n$ define uma distribuição em $D'(\mathbb{R}^n)$. Assim, visto que a função delta de Dirac $\delta(x - y)$ é uma medida de Radon, ela é um exemplo de uma medida de Radon homogênea de grau $-n$. Para mais detalhes sobre esta discussão indicamos a referência [17].*

Voltando a nossa equação, suponha que $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, seja uma solução de (1) – (2) e defina $u_\alpha(x, t) = \alpha u(\alpha x, \alpha^2 t)$, com $\alpha > 0$. Assim, assumindo que ∇K é uma função homogênea de grau $-n$, para todo $\alpha > 0$, u_α também satisfaz (1) – (2). De fato, uma vez que u é solução de (1) – (2), segue que

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial}{\partial t}(u(\alpha x, \alpha^2 t)) = \alpha^3 \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha x, \alpha^2 t), \quad (3.5)$$

$$-(\Delta u_\alpha)(x, t) = -\alpha \Delta(u(\alpha x, \alpha^2 t)) = -\alpha^3 (\Delta u)(\alpha x, \alpha^2 t), \quad (3.6)$$

e

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot (u_\alpha (\nabla K * u_\alpha)))(x, t) &= u_\alpha(x, t) (\nabla \cdot (\nabla K * u_\alpha))(x, t) + (\nabla u_\alpha)(x, t) \cdot (\nabla K * u_\alpha)(x, t) \\ &= \alpha u(\alpha x, \alpha^2 t) \alpha (\nabla \cdot [(\nabla K * u)(\alpha x, \alpha^2 t)]) \\ &\quad + \alpha^2 \nabla(u(\alpha x, \alpha^2 t)) \cdot [(\alpha \nabla K * u)(\alpha x, \alpha^2 t)] \\ &= \alpha^3 u(\alpha x, \alpha^2 t) (\nabla \cdot (\nabla K * u))(\alpha x, \alpha^2 t) \\ &\quad + \alpha^3 (\nabla u)(\alpha x, \alpha^2 t) \cdot (\nabla K * u)(\alpha x, \alpha^2 t) \\ &= \alpha^3 \nabla \cdot (u(\nabla K * u))(\alpha x, \alpha^2 t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Logo, como $u(x, t)$ é solução de (1) – (2), de (3.5), (3.6) e (3.7) segue que

$$\left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \Delta u_\alpha + (\nabla \cdot (u_\alpha (\nabla K * u_\alpha))) \right] (x, t) = \alpha^3 \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla \cdot (u(\nabla K * u)) \right] (\alpha x, \alpha^2 t) = 0,$$

ou seja, $u_\alpha = u_\alpha(x, t)$ é também solução de (1) – (2).

Definição 3.2.2 Considere u uma solução clássica de (1) – (2) e u_α a função dada por

$$u_\alpha(x, t) := \alpha u(\alpha x, \alpha^2 t), \text{ para todo } \alpha > 0. \quad (3.8)$$

A aplicação

$$u \mapsto u_\alpha \quad (3.9)$$

é chamada de relação de escala de (1) – (2).

Vale ressaltar que, fazendo $t \rightarrow 0^+$ formalmente em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &\mapsto \alpha u(\alpha x, \alpha^2 t) \\ D' \downarrow \quad D' \downarrow \\ u_0(x) &\mapsto \alpha u_0(\alpha x). \end{aligned}$$

3.3 Espaços Funcionais

Nosso objetivo é construir soluções *mild*, através de um argumento de ponto fixo, em um espaço dependente do tempo t , cuja norma é invariante pela relação de escala (3.9).

Assim, devemos tomar a condição inicial u_0 em espaços de Morrey de forma que a sua norma seja invariante por (3.9), isto é, tal que $\|u_0(\cdot)\|_{p,\lambda} = \|\alpha u_0(\alpha \cdot)\|_{p,\lambda}$. Desse modo, escolhemos o espaço $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, com $p = n - \lambda$.

A seguir, definiremos o espaço crítico no qual encontraremos a solução global no tempo $u = u(x, t)$. A notação $BC((0, \infty), X)$ representa o conjunto das funções contínuas e limitadas do intervalo $(0, \infty)$ para um espaço de Banach X .

Definição 3.3.1 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $0 \leq \lambda < n - 1$, $1 < p < q < \infty$ e $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Consideremos os parâmetros $p = n - \lambda$ e $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$. Definimos*

$$E_q = \{u \in BC((0, \infty), \mathcal{M}_{p,\lambda}); t^\eta u \in BC((0, \infty), \mathcal{M}_{q,\lambda})\}, \quad (3.10)$$

munido da norma

$$\|u\|_{E_q} = \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{p,\lambda} + \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda}. \quad (3.11)$$

O espaço $(E_q, \|\cdot\|_{E_q})$ é um espaço de Banach pois os espaços de Morrey o são.

Observação 3.3.1 *Note que (3.11) é invariante pela aplicação escala (3.9). Com efeito, pela relação de escala em espaços de Morrey, temos*

$$\begin{aligned} \|u_\alpha\|_{E_q} &= \sup_{t>0} \|\alpha u(\alpha \cdot, \alpha^2 t)\|_{p,\lambda} + \sup_{t>0} t^\eta \|\alpha u(\alpha \cdot, \alpha^2 t)\|_{q,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} \alpha \alpha^{-\frac{n-\lambda}{p}} \|u(\cdot, \alpha^2 t)\|_{p,\lambda} + \sup_{t>0} t^\eta \alpha \alpha^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, \alpha^2 t)\|_{q,\lambda} \\ &= \sup_{s>0} \alpha^{1-\frac{n-\lambda}{p}} \|u(\cdot, s)\|_{p,\lambda} + \sup_{s>0} s^\eta \alpha^{1-2\eta-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logo, sendo $p = n - \lambda$ e $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$, concluímos que $\|u_\alpha\|_{E_q} = \|u\|_{E_q}$.

3.4 Resultados

Nesta seção apresentaremos nossos resultados de boa colocação global no tempo para o problema (1) – (2) com a condição inicial $u_0 \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, uma vez que ∇K é uma medida de Radon, será possível obter uma propriedade de auto-similaridade. Antes de enunciarmos os principais teoremas deste capítulo, recordaremos o conceito de soluções auto-similares.

Definição 3.4.1 *Seja u uma solução clássica de (1) – (2). Dizemos que u é auto-similar se*

$$u(x, t) = u_\alpha(x, t), \text{ para todo } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha > 0. \quad (3.13)$$

Teorema 3.4.1 *Assuma que $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $0 \leq \lambda < n - 1$, $1 < p < q < \infty$, com $1 < \frac{q}{2}$, $p = n - \lambda$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$ e seja ∇K uma medida de Radon em $\mathbb{R}^n$ tal que a sua variação total é $A < \infty$. Suponha que $u_0 \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Sejam M_1, M_2 constantes positivas dadas no Lema 3.5.2, $M = \max\{M_1, M_2\}$ e $0 < \varepsilon < \frac{1}{4M}$.*

- (i) (Existência e unicidade) Existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que (1) – (2) possui uma solução global $u \in E_q$, desde que $\|u_0\|_{p,\lambda} \leq \delta$. Além disso, essa solução é a única satisfazendo $\|u\|_{E_q} \leq 2\varepsilon$.*
- (ii) (Dependência contínua) A solução u , obtida em (i), depende continuamente da condição inicial u_0 . Mais ainda, $u(\cdot, t) \rightharpoonup u_0(\cdot)$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \rightarrow 0^+$.*
- (iii) (Auto-similaridade) Se u_0 é uma função homogênea de grau -1 e se ∇K é homogêneo de grau $-n$, então a solução u é auto-similar.*

Segue abaixo um resultado de estabilidade assintótica para a solução *mild* obtida no Teorema 3.4.1.

Teorema 3.4.2 *Nas condições do Teorema 3.4.1, se u e v são duas soluções do problema (1) – (2), obtidas no item (i) do referido teorema, com dados iniciais $u_0, v_0 \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\eta \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} = 0 \quad (3.14)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{p,\lambda} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} = 0. \quad (3.15)$$

Em seguida, enunciaremos nosso resultado de simetria para a solução do problema (1) – (2).

Teorema 3.4.3 *Nas condições do Teorema 3.4.1, se u é uma solução de (1) – (2), então:*

- (i) u é uma função ímpar para todo $t > 0$, desde que u_0 e K sejam ambas funções ímpares.*
- (ii) u é uma função par para todo $t > 0$, desde que u_0 e K sejam ambas funções pares.*

3.5 Estimativas

Nesta seção iremos estimar o operador bilinear definido em (3.4) referente a formulação integral (3.3) do problema (1) – (2). Para isso, usaremos o Lema 3.5.1, que será enunciado a seguir, e estabelece estimativas para o semigrupo do calor.

3.5.1 Estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ em Espaços de Morrey

O lema a seguir fornecerá estimativas para o semigrupo do calor em espaços de Morrey. Para conveniência do leitor, apresentaremos a demonstração deste resultado que pode ser encontrada em [29].

Lema 3.5.1 *Se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, então existe uma constante positiva $C = C(p_1, p_2, \lambda, n)$, tal que*

$$\|G(t)f\|_{p_2, \lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1} - \frac{n-\lambda}{p_2}\right)} \|f\|_{p_1, \lambda}, \quad (3.16)$$

e

$$\|\nabla_x G(t)f\|_{p_2, \lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{n-\lambda}{p_1} - \frac{n-\lambda}{p_2}\right)} \|f\|_{p_1, \lambda}, \quad (3.17)$$

para todo $f \in \mathcal{M}_{p_1, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ e todo $t > 0$. Quando $p_1 = p_2$ em (3.16), temos $C = 1$.

Demonstração: Esta prova será dividida em duas partes, uma referente a estimativa (3.16) e a outra referente a estimativa (3.17). Para cada uma das partes serão considerados três casos: $p_1 = p_2 = p$, $p_2 = \infty$ e o caso geral.

Parte (i) (Prova da estimativa (3.16)): Caso $p_1 = p_2 = p$.

Devemos provar que $\|G(t)f\|_{p, \lambda} \leq \|f\|_{p, \lambda}$. Para isso, visto que $g(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, com $\|g(\cdot, t)\|_1 = 1$, basta usarmos a Desigualdade de Young 2.15 para $f \in \mathcal{M}_{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\|G(t)f\|_{p, \lambda} = \|g(\cdot, t) * f\|_{p, \lambda} \leq \|g(\cdot, t)\|_1 \|f\|_{p, \lambda} = \|f\|_{p, \lambda}. \quad (3.18)$$

Caso $p_2 = \infty$.

Agora vamos provar que $\|G(t)f\|_{\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\lambda}{p_1}\right)} \|f\|_{p_1, \lambda}$. Antes, porém, note que, para $f \in \mathcal{M}_{p_2, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, fazendo $g(y, t)dy = du$, temos

$$\begin{aligned} |(G(t)f)(x)|^{p_1} &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(y, t)f(x-y)dy \right|^{p_1} = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)du \right|^{p_1} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{p_1} du \right)^{p_1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, se $p'_1 > 0$ é tal que $\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p_1} = 1$, pela Desigualdade de Hölder e pelo fato de $\|g\|_1 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{p_1} du \right)^{p_1} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{p_1} du \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |1|^{p_1'} du \right)^{\frac{p_1}{p_1'}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y,t) |f(x-y)|^{p_1} dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y,t) dy \right)^{\frac{p_1}{p_1'}} \\
&= (G(t)|f|^{p_1})(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y,t)| dy \right)^{\frac{p_1}{p_1'}} = (G(t)|f|^{p_1})(x). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|(G(t)f)(x)|^{p_1} \leq (G(t)|f|^{p_1})(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.21)$$

Além disso, denotaremos $g(y,t) = \bar{g}(|y|,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$, para cada $t > 0$. Observe que, para $x \in \mathbb{R}^n$ fixo e $r > 0$, se

$$\rho(r) := \int_{|x-y|<r} |f(y)|^{p_1} dy, \quad \text{então} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(|x-y|,t) |f(y)|^{p_1} dy = \int_0^\infty \bar{g}(r,t) d\rho(r).$$

De fato,

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{|x-y|<r} |f(y)|^{p_1} dy \right) = \int_{|x-y|=r} |f(y)|^{p_1} dS,$$

ou seja, $d\rho(r) = \left(\int_{|x-y|=r} |f(y)|^{p_1} dS \right) dr$ e portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(|x-y|,t) |f(y)|^{p_1} dy &= \int_0^\infty \left(\int_{|x-y|=r} \bar{g}(|x-y|,t) |f(y)|^{p_1} dS \right) dr \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{|x-y|=r} \bar{g}(r,t) |f(y)|^{p_1} dS \right) dr = \int_0^\infty \bar{g}(r,t) d\rho(r).
\end{aligned}$$

Logo, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(|x-y|,t) |f(y)|^{p_1} dy &= \int_0^\infty \bar{g}(r,t) d\rho(r) \\
&= \bar{g}(r,t) \rho(r) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \bar{g}'(r,t) \rho(r) dr \\
&\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{g}(r,t)}{r^{-\lambda}} r^{-\lambda} \rho(r) + \int_0^\infty |\bar{g}'(r,t)| (\|f\|_{p_1,\lambda})^{p_1} r^\lambda dr \\
&\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{g}(r,t)}{r^{-\lambda}} (\|f\|_{p_1,\lambda})^{p_1} + \int_0^\infty |\bar{g}'(r,t)| (\|f\|_{p_1,\lambda})^{p_1} r^\lambda dr \\
&= (\|f\|_{p_1,\lambda})^{p_1} \int_0^\infty |\bar{g}'(r,t)| r^\lambda dr. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Por (3.21) e (3.22), temos

$$\begin{aligned}
|(G(t)f)(x)|^{p_1} &\leq (G(t)|f|^{p_1})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y, t)|f(y)|^{p_1} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(|x-y|, t)|f(y)|^{p_1} dy \\
&\leq \|f\|_{p_1, \lambda}^{p_1} \int_0^\infty |\bar{g}'(r, t)| r^\lambda dr \\
&= C \|f\|_{p_1, \lambda}^{p_1} \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}-1} r^{\lambda+1} e^{-\frac{r^2}{4t}} dr \\
&= C \|f\|_{p_1, \lambda}^{p_1} t^{-\frac{n}{2}-1} \int_0^\infty \left(\frac{r^2}{4t}\right)^{\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)-1+\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} (4t)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}} dr \\
&= C \|f\|_{p_1, \lambda}^{p_1} t^{-\frac{n}{2}-1} \int_0^\infty \left(\frac{r^2}{4t}\right)^{\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)-1} e^{-\frac{r^2}{4t}} (4t)^{\frac{\lambda}{2}} r dr \\
&= C \|f\|_{p_1, \lambda}^{p_1} t^{-\frac{n}{2}-1} \int_0^\infty z^{\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)-1} e^{-z} (4t)^{\frac{\lambda}{2}+1} 2^{-1} dz \\
&= C \|f\|_{p_1, \lambda}^{p_1} t^{-\frac{n-\lambda}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right), \tag{3.23}
\end{aligned}$$

ou seja, $|(G(t)f)(x)| \leq C \|f\|_{p_1, \lambda} t^{-\frac{n-\lambda}{2}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, usando a definição de $\|\cdot\|_\infty$, obtemos a desigualdade desejada.

Caso geral $p_1 < p_2$.

Para demonstrar o caso geral usaremos as duas estimativas provadas anteriormente. Para isso, sejam $f \in \mathcal{M}_{p_1, \lambda}(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, então temos

$$\begin{aligned}
\|(G(t)f)(x)\|_{L^{p_2}(B_R(x_0))} &= \left(\int_{B_R(x_0)} |(G(t)f)(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= \left(\int_{B_R(x_0)} |(G(t)f)(x)|^{p_2-p_1} |(G(t)f)(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&\leq \|G(t)f\|_\infty^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} \left(\int_{B_R(x_0)} |(G(t)f)(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= \|G(t)f\|_\infty^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} (\|G(t)f\|_{L^{p_1}(B_R(x_0))})^{\frac{p_1}{p_2}} \\
&\leq \|G(t)f\|_\infty^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} (\|G(t)f\|_{p_1, \lambda})^{\frac{p_1}{p_2}} R^{\frac{\lambda}{p_2}}. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados de (3.24) por $R^{-\frac{\lambda}{p_2}}$, tomando o supremo quando variamos x_0 em $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$, usando que $\|G(t)f\|_{p_1, \lambda} \leq \|f\|_{p_1, \lambda}$ (obtida no caso em que $p_1 = p_2 = p$) e que $\|G(t)f\|_\infty \leq C t^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_1})} \|f\|_{p_1, \lambda}$ (desigualdade obtida no caso em que $p_2 = \infty$), segue que

$$\begin{aligned}
\|G(t)f\|_{p_2, \lambda} &\leq \|G(t)f\|_\infty^{1-\frac{p_1}{p_2}} \|G(t)f\|_{p_1, \lambda}^{\frac{p_1}{p_2}} \\
&\leq C(t^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_1})} \|f\|_{p_1, \lambda})^{1-\frac{p_1}{p_2}} \|f\|_{p_1, \lambda}^{\frac{p_1}{p_2}} \\
&= C t^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_1} - \frac{n-\lambda}{p_2})} \|f\|_{p_1, \lambda}. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Parte (ii) (Prova da estimativa (3.17)): Caso $p_1 = p_2 = p$.

Vamos mostrar que $\|\nabla_x G(t)f\|_{p,\lambda} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{p,\lambda}$. Com efeito, observe que $g(x, 2t) = e^{\frac{|x|^2}{8t}} 2^{-\frac{n}{2}} g(x, t)$ e que $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x, t) = -\frac{x_i}{2t} g(x, t)$, para $i = 1, \dots, n$. Então

$$\left| t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, t) \frac{1}{g(x, 2t)} \right| = t^{-\frac{1}{2}} |x_i| 2^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

quando $t \rightarrow \infty$, para $i = 1, \dots, n$. Desse modo, existe uma constante $C > 0$ tal que $t^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, t) \right| \leq Cg(x, 2t)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, ou seja,

$$t^{\frac{1}{2}} |\nabla_x G(t)f| \leq CG(2t)|f|. \quad (3.27)$$

Além disso, como $|G(2t)f|^p \leq G(2t)|f|^p$, por (3.21), e $\|g(x, 2t)\|_1 = 1$, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|t^{\frac{1}{2}}(\nabla_x G(t)f)\|_{L^p(B_R(x_0))}^p &= \int_{B_R(x_0)} |t^{\frac{1}{2}}(\nabla_x G(t)f)(x)|^p dx \leq C \int_{B_R(x_0)} |(G(2t)|f|)(x)|^p dx \\ &\leq C \int_{B_R(x_0)} (G(2t)|f|^p)(x) dx = C \int_{B_R(x_0)} \int_{\mathbb{R}^n} g(y, 2t) |f(x-y)|^p dy dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} |g(y, 2t)| \int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^p dx dy \leq CR^\lambda \|f\|_{p,\lambda}^p. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por fim, elevando ambos os lados de (3.28) por $\frac{1}{p}$, multiplicando por $R^{-\frac{\lambda}{p}}$ e tomando o supremo quando variamos x_0 em $\mathbb{R}^n$ e R em $(0, \infty)$, obtemos a desigualdade desejada.

Caso $p_2 = \infty$.

Devemos provar que $\|\nabla_x G(t)f\|_\infty \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{p_1})}\|f\|_{p_1,\lambda}$. Para isso, consideremos (3.27) e (3.23) para obter

$$\begin{aligned} |t^{\frac{1}{2}}(\nabla_x G(t)f)(x)|^{p_1} &\leq C|(G(2t)|f|)(x)|^{p_1} \leq C\|f\|_{p_1,\lambda}^{p_1} (2t)^{-\frac{n-\lambda}{2}} \\ &\leq Ct^{-\frac{n-\lambda}{2}} \|f\|_{p_1,\lambda}^{p_1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim, multiplicando ambos os lados de (3.29) por $\frac{1}{p_1}$, segue que

$$\|\nabla_x G(t)f\|_\infty \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{p_1})}\|f\|_{p_1,\lambda}.$$

Caso geral $p_1 < p_2$.

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, de (3.27), temos

$$\begin{aligned} \|t^{\frac{1}{2}}(\nabla_x G(t)f)\|_{L^{p_2}(B_R(x_0))}^{p_2} &\leq C\|(G(2t)|f|)\|_{L^{p_2}(B_R(x_0))}^{p_2} \\ &\leq C\|G(2t)|f|\|_\infty^{(p_2-p_1)} (\|G(2t)|f|\|_{p_1,\lambda})^{p_1} R^\lambda, \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde a última desigualdade é obtida como em (3.24). Logo, multiplicando ambos os lados de (3.30) por $R^{-\lambda}$ e em seguida elevando por $\frac{1}{p_2}$, segue que

$$R^{-\frac{\lambda}{p_2}} \|t^{\frac{1}{2}} (\nabla_x G(t)f)\|_{L^{p_2}(B_R(x_0))} \leq C \|G(2t)|f|\|_{\infty}^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} (\|G(2t)|f|\|_{p_1, \lambda})^{\frac{p_1}{p_2}}. \quad (3.31)$$

Agora, multiplicando ambos os lados de (3.31) por $t^{-\frac{1}{2}}$, tomando o supremo para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ e, em seguida, procedendo como em (3.25), obtemos (3.17). ■

3.5.2 Estimativas Bilineares

O resultado a seguir garante que o operador bilinear definido em (3.4) por

$$B(u, v)(t) = - \int_0^t \nabla_x G(t-s) (u(\nabla K * v))(s) ds$$

é contínuo no espaço E_q , definido em (3.10).

Lema 3.5.2 *Considerando as hipóteses do Teorema 3.4.1 e $r > 1$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, existem constantes $M_1, M_2 > 0$ tais que*

$$\sup_{t>0} \|B(u, v)(t)\|_{p, \lambda} \leq M_1 \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} \|v(\cdot, t)\|_{p, \lambda} \quad (3.32)$$

e

$$\sup_{t>0} t^\eta \|B(u, v)(t)\|_{q, \lambda} \leq M_2 \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q, \lambda}, \quad (3.33)$$

para todo $u, v \in E_q$.

Demonstração: Aplicando o Lema 3.5.1, com $p_1 = r$ e $p_2 = p$, de (3.17), temos

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t)\|_{p, \lambda} &\leq \int_0^t \|\nabla_x G(t-s) (u(\nabla K * v))(\cdot, s)\|_{p, \lambda} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{p})} \|(u(\nabla K * v))(\cdot, s)\|_{r, \lambda} ds. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Por (2.14) e pelo Lema 2.1.2, obtemos que

$$\begin{aligned} \|(u(\nabla K * v))(\cdot, s)\|_{r, \lambda} &\leq \|u(\cdot, s)\|_{q, \lambda} \|(\nabla K * v)(\cdot, s)\|_{p, \lambda} \\ &\leq \|u(\cdot, s)\|_{q, \lambda} A \|v(\cdot, s)\|_{p, \lambda}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Assim, substituindo (3.35) em (3.34) e observando que $\frac{n-\lambda}{p} + \frac{n-\lambda}{q} = \frac{n-\lambda}{r}$, segue que

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t)\|_{p, \lambda} &\leq C A \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, s)\|_{q, \lambda} \|v(\cdot, s)\|_{p, \lambda} ds \\ &\leq C A \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} \|v(\cdot, t)\|_{p, \lambda} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} s^{-\eta} ds. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por hipótese $q > p > 1$, ou seja, $\frac{1}{2} > \frac{p}{2q}$ e, lembrando que $p = n - \lambda$, então $\frac{1}{2} > \frac{n-\lambda}{2q}$, isto é, $-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q} + 1 > 0$. Além disso, como também temos $-\eta + 1 > 0$, fazendo a mudança de variável como na Observação 1.7.1, obtemos

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} s^{-\eta} ds = \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} (s')^{-\frac{1}{2}+\frac{n-\lambda}{2q}} ds', \quad (3.37)$$

e então, pela Proposição 1.7.1 concluímos que a integral acima é convergente. Desse modo, existe uma constante positiva

$$M_1 = CA \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} (s')^{-\frac{1}{2}+\frac{n-\lambda}{2q}} ds' \quad (3.38)$$

tal que

$$\|B(u, v)(t)\|_{p,\lambda} \leq M_1 \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \sup_{t>0} \|v(\cdot, t)\|_{p,\lambda}. \quad (3.39)$$

Portanto, tomando o supremo para $t > 0$ em (3.39), obtemos (3.32).

A estimativa (3.33) segue de (3.17), com $p_1 = \frac{q}{2}$ e $p_2 = q$, da desigualdade (2.14) e do Lema 2.1.2. De fato,

$$\begin{aligned} t^\eta \|B(u, v)(t)\|_{q,\lambda} &\leq t^\eta \int_0^t \|\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * v))(\cdot, s)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq Ct^\eta \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n-\lambda}{2}-\frac{n-\lambda}{q})} \|(u(\nabla K * v))(\cdot, s)\|_{\frac{q}{2},\lambda} ds \\ &\leq Ct^\eta \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \|(\nabla K * v)(\cdot, s)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq CA t^\eta \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \|v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq CA t^\eta \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} s^{-2\eta} ds \\ &= CA t^\eta \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} t^{-\eta} \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} (s')^{-1+\frac{n-\lambda}{q}} ds' \\ &= M_2 \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q,\lambda}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $M_2 = CA \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} (s')^{-1+\frac{n-\lambda}{q}} ds' < \infty$, pois, como $-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q} + 1 > 0$ e $\frac{n-\lambda}{q} > 0$, podemos usar a Proposição 1.7.1.

Por fim, tomando o supremo para $t > 0$ em (3.40), obtemos (3.33). ■

3.6 Demonstração dos Resultados

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema 3.4.1 e, para isto, usaremos o Lema 1.6.1 e as estimativas obtidas no Lema 3.5.2.

3.6.1 Demonstração do Teorema 3.4.1

Parte (i) (Existência e unicidade):

Tomemos $X = E_q$ definido em (3.10). Denotemos $M = \max\{M_1, M_2\}$, em que M_1 e M_2 são as constantes obtidas no Lema 3.5.2, e seja $y = G(\cdot)u_0$. Para $u, v \in E_q$, recordando a norma deste espaço, definida em (3.11), e aplicando o Lema 3.5.2, segue que

$$\begin{aligned} \|B(u, v)\|_{E_q} &\leq M \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda} (\sup_{t>0} \|v(\cdot, t)\|_{p,\lambda} + \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q,\lambda}) \\ &= M \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \|v\|_{E_q} \leq M \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_q}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

ou seja, a aplicação bilinear é contínua.

Por outro lado, usando (3.16) e observando que $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$ e que $n - \lambda = p$, obtemos

$$\begin{aligned} \|y\|_{E_q} &= \sup_{t>0} \|G(t)u_0\|_{p,\lambda} + \sup_{t>0} t^\eta \|G(t)u_0\|_{q,\lambda} \\ &\leq C_1 \|u_0\|_{p,\lambda} + C_2 \sup_{t>0} t^\eta t^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p} - \frac{n-\lambda}{q})} \|u_0\|_{p,\lambda} \\ &\leq C_3 \|u_0\|_{p,\lambda} \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.42)$$

desde que $\|u_0\|_{p,\lambda} \leq \delta := \frac{\varepsilon}{C_3}$ (hipótese de pequenez do dado inicial). Sendo $0 < \varepsilon < \frac{1}{4M}$, então, pelo Lema 1.6.1, existe uma solução $u \in E_q$ de (3.3) que é a única satisfazendo $\|u\|_{E_q} \leq 2\varepsilon$.

Parte (ii) (Dependência contínua):

Sejam u e v duas soluções de (1) – (2) como em (i), com condições iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. De (3.41), temos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{E_q} &= \|G(\cdot)u_0 + B(u - v, u) - G(\cdot)v_0 + B(v, u - v)\|_{E_q} \\ &\leq \|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_{E_q} + M \|u - v\|_{E_q} (\|u\|_{E_q} + \|v\|_{E_q}) \\ &\leq \|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_{E_q} + 4M\varepsilon \|u - v\|_{E_q}, \end{aligned}$$

isto é,

$$(1 - 4M\varepsilon) \|u - v\|_{E_q} \leq \|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_{E_q}.$$

Além disso, de (3.42), temos que $\|G(\cdot)u_0\|_{E_q} \leq C_3 \|u_0\|_{p,\lambda}$. Portanto,

$$(1 - 4M\varepsilon) \|u - v\|_{E_q} \leq C_3 \|u_0 - v_0\|_{p,\lambda},$$

o que completa a prova da dependência contínua.

Agora provemos que $u(x, t) \rightharpoonup u_0(x)$ quando $t \rightarrow 0^+$ em $D'(\mathbb{R}^n)$.

Primeiro vamos mostrar que $G(t)u_0 \rightharpoonup u_0$ quando $t \rightarrow 0^+$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $w \in D(\mathbb{R}^n)$. Como $g(x-z, t) = g(z-x, t)$, temos

$$\begin{aligned}\langle G(t)u_0(x), w(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y, t) u_0(y) dy \right) w(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y-x, t) w(x) dx \right) u_0(y) dy \\ &= \langle G(t)w(x), u_0(x) \rangle.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Note também que $\langle u_0, w \rangle = \langle w, u_0 \rangle$, e assim, para todo $w \in D(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}G(t)u_0 \rightharpoonup u_0 &\Leftrightarrow \langle G(t)u_0, w \rangle \rightarrow \langle u_0, w \rangle \Leftrightarrow \langle G(t)w, u_0 \rangle \rightarrow \langle w, u_0 \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle G(t)w - w, u_0 \rangle \rightarrow 0.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Dada $w \in D(\mathbb{R}^n)$, sejam $R > 0$ tal que $\text{supp}(w) \subset B_R(0)$ e $p' > 0$ tal que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}R^{-\lambda} \langle G(t)w - w, u_0 \rangle &\leq R^{-\lambda} \int_{B_R(0)} |(G(t)w - w)(x)u_0(x)| dx \\ &\leq R^{\frac{-\lambda}{p'}} \left(\int_{B_R(0)} |(G(t)w - w)(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} R^{\frac{-\lambda}{p}} \left(\int_{B_R(0)} |u_0(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|G(t)w - w\|_{p', \lambda} \|u_0\|_{p, \lambda}.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Mais ainda, por (2.13), dado p' acima, é possível obter s satisfazendo $\frac{n}{s} = \frac{n-\lambda}{p'}$, tal que $L^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_{p', \lambda}(\mathbb{R}^n)$. Então, $\|G(t)w - w\|_{p', \lambda} \leq \|G(t)w - w\|_s$.

Por outro lado, a família $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, indexada em t , é uma aproximação da identidade em $L^s(\mathbb{R}^n)$. Logo, quando $t \rightarrow 0^+$, $\|G(t)w - w\|_s \rightarrow 0$ e, portanto, $\|G(t)w - w\|_{p', \lambda} \|u_0\|_{p, \lambda} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$. Lembrando que R está fixado, obtemos que $G(t)u_0 \rightharpoonup u_0$.

Para concluirmos a prova, precisamos mostrar que $B(u, u)(t) \rightharpoonup 0$, quando $t \rightarrow 0^+$, em $D'(\mathbb{R}^n)$.

Com efeito, para todo $w \in D(\mathbb{R}^n)$, seja $R > 0$ tal que $\text{supp}(w) \subset B_R(0)$. Então,

$$\begin{aligned}R^{-\lambda} |\langle B(u, u)(t), w \rangle| &\leq \int_0^t R^{-\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * u))(x, s)w(x)| dx ds \\ &= \int_0^t R^{-\lambda} \int_{B_R(0)} |\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * u))(x, s)w(x)| dx ds.\end{aligned}\tag{3.46}$$

Além disso, seja $l' > 0$ tal que $\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = 1$, com $1 < l = \frac{p}{\gamma+1}$ e $0 < \gamma < \frac{p}{q}$. Assim, pela

Desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
R^{-\lambda} |\langle B(u, u)(t), w \rangle| &\leq \int_0^t R^{-\frac{\lambda}{l}} \left(\int_{B_R(0)} |\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * u))(x, s)|^l dx \right)^{\frac{1}{l}} \\
&\quad R^{-\frac{\lambda}{l'}} \left(\int_{B_R(0)} |w(x)|^{l'} dx \right)^{\frac{1}{l'}} ds \\
&\leq \int_0^t \|\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * u))(\cdot, s)\|_{l, \lambda} \|w\|_{l', \lambda} ds. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Por hipótese, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ com $r > 1$ e, como $0 < \gamma < \frac{p}{q}$, segue que $1 < r < l$. Logo, por (3.17), (2.14) e pelo Lema 2.1.2, temos

$$\|\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * u))(\cdot, s)\|_{l, \lambda} \leq C(t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2r} + \frac{n-\lambda}{2l}} \|u(\cdot, s)\|_{q, \lambda} A \|u(\cdot, s)\|_{p, \lambda}. \tag{3.48}$$

Por fim, substituindo (3.48) em (3.47), segue que

$$R^{-\lambda} |\langle B(u, u)(t), w \rangle| \leq LI \|w\|_{l', \lambda},$$

em que $L = CA \sup_{t>0} t^\eta \|u\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} \|u\|_{p, \lambda}$ e

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2r} + \frac{n-\lambda}{2l}} s^{-\eta} ds \\
&= t^{-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2r} + \frac{n-\lambda}{2l}} \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2r} + \frac{n-\lambda}{2l}} (ts')^{-\eta} t ds' \\
&= Ct^{\frac{n-\lambda}{2l} - \frac{n-\lambda}{2p}},
\end{aligned}$$

pois, como $\gamma > 0$ e $\frac{1}{l} = \frac{\gamma+1}{p} > \frac{1}{p}$, temos $\frac{n-\lambda}{2l} > \frac{n-\lambda}{2p}$ e assim $1 - \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2r} + \frac{n-\lambda}{2l} = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2p} - \frac{n-\lambda}{2q} + \frac{n-\lambda}{2l} > \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2p} - \frac{n-\lambda}{2q} + \frac{n-\lambda}{2p} = \eta > 0$, de onde segue que $I < \infty$. Desse modo, visto que $\frac{n-\lambda}{2l} - \frac{n-\lambda}{2p} > 0$ e lembrando que R está fixado, concluímos que $B(u, u)(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$ em $D'(\mathbb{R}^n)$.

Parte (iii) (Auto-similaridade): Recordemos que a solução u obtida na Parte (i) é o limite da sequência iterada: $u_1 = G(\cdot)u_0$ e $u_{k+1} = u_1 + B(u_k, u_k)(t)$, $k \geq 1$. Além disso, temos que $g(x, t)$ é homogênea de grau $-n$, isto é, $g(\alpha x, \alpha^2 t) = \alpha^{-n} g(x, t)$, $\forall t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$. Mostraremos, então, pelo Princípio de indução finita, que u_k é uma função homogênea de grau -1 para todo $k \geq 1$. Com efeito, para $k = 1$, temos

$$\begin{aligned}
u_1(\alpha x, \alpha^2 t) &= G(\alpha^2 t)u_0(\alpha x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\alpha x - y, \alpha^2 t) u_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(\alpha(x - z), \alpha^2 t) u_0(\alpha z) \alpha^n dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{-n} g(x - z, t) \alpha^{-1} u_0(z) \alpha^n dz \\
&= \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - z, t) u_0(z) dz = \alpha^{-1} u_1(x, t).
\end{aligned}$$

Logo, u_1 é homogênea de grau -1 .

Supondo agora que $u_k(\alpha x, \alpha^2 t) = \alpha^{-1} u_k(x, t)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, mostraremos que u_{k+1} é homogênea de grau -1 . De fato,

$$u_{k+1}(\alpha x, \alpha^2 t) = u_1(\alpha x, \alpha^2 t) + B(u_k, u_k)(\alpha x, \alpha^2 t) = \alpha^{-1} u_1(x, t) + B(u_k, u_k)(\alpha x, \alpha^2 t). \quad (3.49)$$

Em particular, note que,

$$B(u_k, u_k)(\alpha x, \alpha^2 t) = - \int_0^{\alpha^2 t} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x g(\alpha x - y, \alpha^2 t - s) (u_k(\nabla K * u_k))(y, s) dy ds. \quad (3.50)$$

Como g é homogênea de grau $-n$ e $\nabla_x g(x, t) = -\frac{x}{2t} g(x, t)$, segue que $\nabla_x g(x, t)$ é homogênea de grau $-n - 1$, e assim, temos

$$\nabla_x g(\alpha x - y, \alpha^2 t - s) = \alpha^{-n-1} \nabla_x g(x - \alpha^{-1} y, t - \alpha^{-2} s). \quad (3.51)$$

Substituindo (3.51) em (3.50) e considerando as mudanças de variáveis $\alpha^{-1} y = z$ e $\alpha^{-2} s = r$, obtemos que

$$B(u_k, u_k)(\alpha x, \alpha^2 t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{-n-1} \nabla_x g(x - z, t - r) (u_k(\nabla K * u_k))(\alpha z, \alpha^2 r) \alpha^n dz \alpha^2 dr. \quad (3.52)$$

Agora, pela hipótese de indução e considerando que ∇K é homogêneo de grau $-n$, obtemos

$$\begin{aligned} (u_k(\nabla K * u_k))(\alpha z, \alpha^2 r) &= u_k(\alpha z, \alpha^2 r) \int_{\mathbb{R}^n} \nabla K(\alpha z - y) u_k(y, \alpha^2 r) dy \\ &= \alpha^{-1} u_k(z, r) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{-n} \nabla K(z - \alpha^{-1} y) u_k(y, \alpha^2 r) dy \\ &= \alpha^{-1} u_k(z, r) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{-n} \nabla K(z - x) u_k(\alpha x, \alpha^2 r) \alpha^n dx \\ &= \alpha^{-2} u_k(\nabla K * u_k)(z, r). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Substituindo (3.53) em (3.52), segue que

$$\begin{aligned} B(u_k, u_k)(\alpha x, \alpha^2 t) &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{-n-1} \nabla_x g(x - z, t - r) \alpha^{-2} (u_k(\nabla K * u_k))(z, r) \alpha^n dz \alpha^2 dr \\ &= - \alpha^{-1} \int_0^t \nabla_x g(x, t - r) * (u_k(\nabla K * u_k))(x, r) dr \\ &= \alpha^{-1} B(u_k, u_k)(x, t). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Portanto, substituindo (3.54) em (3.49), temos que $u_{k+1}(\alpha x, \alpha^2 t) = \alpha^{-1} u_{k+1}(x, t)$. Logo, pelo PIF, u_k é homogênea de grau -1 para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por fim, aplicando o Lema 1.6.1, e em seguida usando que u_k é uma função homogênea de grau -1 e novamente o Lema 1.6.1, temos

$$u(\alpha x, \alpha^2 t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\alpha x, \alpha^2 t) = \alpha^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = \alpha^{-1} u(x, t).$$

Dessa forma, pela unicidade do limite, concluímos que u é uma função homogênea de grau -1 , ou seja, u é uma solução auto-similar de (1) – (2). ■

3.6.2 Demonstração do Teorema 3.4.2

Sejam u e v duas soluções *mild* do problema de valor inicial (1) – (2) em E_q , com dados iniciais u_0 e v_0 , respectivamente, então

$$u(t) = G(t)u_0 + B(u, u)(t) \quad (3.55)$$

e

$$v(t) = G(t)v_0 + B(v, v)(t). \quad (3.56)$$

Subtraindo as equações (3.56) e (3.55) e tomando as quantidades $t^\eta \|\cdot\|_{q,\lambda}$ e $\|\cdot\|_{p,\lambda}$, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} &\leq t^\eta \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} + t^\eta \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \\ &:= H_0(t) + H_1(t) \end{aligned} \quad (3.57)$$

e

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{p,\lambda} &\leq \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} + \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\ &:= H_2(t) + H_3(t). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Procedendo como em (3.40) e (3.36), os termos H_1 e H_3 podem ser estimados, respectivamente, da seguinte forma

$$\begin{aligned} H_1(t) &\leq CA \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} t^\eta \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} (\|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} + \|v(\cdot, s)\|_{q,\lambda}) ds \\ &\leq 4\varepsilon AC \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} t^\eta \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} s^{-\eta} ds \\ &= 4\varepsilon AC \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} (s')^{-2\eta} (ts')^\eta \|u(\cdot, ts') - v(\cdot, ts')\|_{q,\lambda} ds' \end{aligned} \quad (3.59)$$

e

$$\begin{aligned}
H_3(t) &\leq CA \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{p,\lambda} (\|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} + \|v(\cdot, s)\|_{q,\lambda}) ds \\
&\leq 4\varepsilon AC \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{p,\lambda} s^{-\eta} ds \\
&= 4\varepsilon AC \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, ts') - v(\cdot, ts')\|_{p,\lambda} (s')^{-\eta} ds', \tag{3.60}
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
s^\eta \|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} &\leq \sup_{s>0} s^\eta \|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} + \sup_{s>0} \|u(\cdot, s)\|_{p,\lambda} \\
&= \|u\|_{E_q} \leq 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

isto é, $\|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \leq 2\varepsilon s^{-\eta}$. Analogamente, $\|v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \leq 2\varepsilon s^{-\eta}$. Considere

$$P = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \text{ e } Q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{p,\lambda}.$$

Note que, P e Q são finitos, pois $\|u\|_{E_q}, \|v\|_{E_q} < 2\varepsilon$.

Assim, computando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (3.57) e em (3.58), e usando como hipótese (3.14), segue que

$$\begin{aligned}
P &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} H_0(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_1(t) \\
&\leq 0 + 4\varepsilon ACP \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} s^{-2\eta} ds = 4\varepsilon PM_2 \leq 4\varepsilon PM,
\end{aligned}$$

onde M_2 é a mesma constante obtida em (3.40) e $M = \max\{M_1, M_2\}$, e

$$\begin{aligned}
Q &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} H_2(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_3(t) \\
&\leq 0 + 4\varepsilon ACQ \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} s^{-\eta} ds \leq 4\varepsilon QM_1 \leq 4\varepsilon QM,
\end{aligned}$$

com M_1 a constante em (3.38).

Além disso, como estamos com as hipóteses do Teorema 3.4.1, temos $4\varepsilon M < 1$ e então, visto que $P, Q \geq 0$, concluímos que $P = Q = 0$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{p,\lambda} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} = 0$.

Provaremos agora a recíproca, isto é, assumiremos como hipótese (3.15) e mostraremos que vale (3.14). Das equações (3.55) e (3.56), obtemos

$$\begin{aligned}
&t^\eta \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} + \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} \\
&\leq t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} + t^\eta \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \\
&+ \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{p,\lambda} + \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&= t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} + \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{p,\lambda} + H_1(t) + H_3(t). \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Desse modo, usando a mesma notação para P e Q , tomando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (3.61) e usando a hipótese (3.15), segue dos mesmos argumentos utilizados anteriormente que

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} t^\eta \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} + \limsup_{t \rightarrow \infty} \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} \\ & \leq 0 + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_1(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_3(t) \\ & \leq 4\varepsilon PM + 4\varepsilon QM. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Logo, como, por hipótese, $P = Q = 0$, segue que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\eta \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} = 0$, o que conclui a demonstração do teorema. ■

3.6.3 Demonstração do Teorema 3.4.3

(i) Consideremos, inicialmente, que u_0 e K sejam funções ímpares. Note ainda que, por definição, $g(\cdot, t)$ é uma função par. Seja u a solução de (1) – (2) obtida pelo Teorema 3.4.1, então, pelo Lema 1.6.1, u é o limite da sequência iterada $u_1 = G(t)u_0$ e $u_{k+1} = u_1 + B(u_k, u_k)$, $k \geq 1$. Desse modo, mostraremos, pelo Princípio de indução finita, que u_k é uma função ímpar, para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato,

$$u_1(-x, t) = G(t)u_0(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y, t)u_0(-x - y)dy. \quad (3.63)$$

Fazendo a mudança de variável $-y = z$ e usando que $g(\cdot, t)$ é par, obtemos

$$u_1(-x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(-z, t)u_0(-x + z)dz = \int_{\mathbb{R}^n} g(z, t)u_0(-(x - z))dz. \quad (3.64)$$

Mais ainda, por hipótese, u_0 é uma função ímpar e assim,

$$u_1(-x, t) = - \int_{\mathbb{R}^n} g(z, t)u_0(x - z)dz = -G(t)u_0(x) = -u_1(x, t). \quad (3.65)$$

Supondo agora que $u_k(-x, t) = -u_k(x, t)$, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, provaremos que $u_{k+1}(-x, t) = -u_{k+1}(x, t)$. Para isso, note que

$$u_{k+1}(-x, t) = u_1(-x, t) + B(u_k, u_k)(-x, t) = -u_1(x, t) + B(u_k, u_k)(-x, t). \quad (3.66)$$

Agora, fazendo novamente a mudança $-y = z$, temos

$$\begin{aligned} B(u_k, u_k)(-x, t) &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x g(-x - y, t - s)(u_k(\nabla K * u_k))(y, s)dyds \\ &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x g(-x + z, t - s)(u_k(\nabla K * u_k))(-z, s)dzds. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Observe também que, como $g(\cdot, t)$ é uma função par e $\nabla_x g(x, t) = -\frac{x}{2t}g(x, t)$, então, para todo $t > 0$, $\nabla_x g(\cdot, t)$ é uma função ímpar, e assim,

$$\nabla_x g(-x + z, t - s) = -\nabla_x g(x - z, t - s). \quad (3.68)$$

Por outro lado, pela mudança de variável $y = -x$, pela hipótese de indução sobre k e usando que $\nabla_z K(-z + x) = \nabla_z K(z - x)$ pois, por hipótese, K é uma função ímpar, segue que

$$\begin{aligned} (u_k(\nabla K * u_k))(-z, s) &= u_k(-z, s) \int_{\mathbb{R}^n} \nabla K(-z - y) u_k(y, s) dy \\ &= -u_k(z, s) \int_{\mathbb{R}^n} \nabla K(-z + x) u_k(-x, s) dx \\ &= u_k(z, s) \int_{\mathbb{R}^n} \nabla K(z - x) u_k(x, s) dx \\ &= (u_k(\nabla K * u_k))(z, s). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Logo, substituindo (3.68) e (3.69) em (3.67), obtemos que

$$\begin{aligned} B(u_k, u_k)(-x, t) &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (-\nabla_x g(x - z, t - s)) (u_k(\nabla K * u_k))(z, s) dz ds \\ &= \int_0^t \nabla_x G(t - s) (u_k(\nabla K * u_k))(x, s) ds = -B(u_k, u_k)(x, t), \end{aligned} \quad (3.70)$$

e, portanto, $u_{k+1}(-x, t) = -u_{k+1}(x, t)$. Logo, pelo PIF, $u_k(-x, t) = -u_k(x, t)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, u_k é ímpar para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por fim, aplicando o Lema 1.6.1, em seguida usando que u_k é uma função ímpar e novamente o Lema 1.6.1, temos

$$u(-x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(-x, t) = - \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = -u(x, t).$$

Desse modo, pela unicidade do limite, u é uma função ímpar.

(ii) A demonstração do item (ii), quando assumimos que u_0 e K são funções pares, segue de modo análogo a prova do caso (i) e por isso será omitida. ■

Capítulo 4

Boa Colocação em Espaços de Besov-Morrey

Neste capítulo iremos estudar existência global de solução para o problema (1) – (2), com dado inicial no espaço de Besov-Morrey e suficientemente pequeno. Mostraremos também que se o dado inicial é homogêneo, as soluções são auto-similares. Além disso, obteremos um resultado de estabilidade assintótica que fornece um critério para dissipação de pequenas perturbações do dado inicial quando $t \rightarrow \infty$ (ver Teorema 4.2.2).

4.1 Espaços Funcionais

Nesta etapa do trabalho, tomaremos a condição inicial u_0 em um espaço de Besov-Morrey tal que a sua norma seja invariante pela relação de escala (3.9). Para isto escolheremos o espaço $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}(\mathbb{R}^n)$, com $1 - \theta = \frac{n-\lambda}{r} - 1$.

Iniciaremos esta seção definindo o espaço funcional no qual estudaremos a equação integral (3.3), este espaço terá índices adequados para que sua norma seja invariante pela relação escala (3.9).

Definição 4.1.1 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $0 \leq \lambda < n$, $1 \leq r, q < \infty$, $1 - \theta = \frac{n-\lambda}{r} - 1$ e $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$. Definimos*

$$E_q = \{u \in BC((0, \infty), \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}); t^\eta u \in BC((0, \infty), \mathcal{M}_{q,\lambda})\}, \quad (4.1)$$

com norma dada por

$$\|u\|_{E_q} = \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} + \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda}. \quad (4.2)$$

A solução global no tempo $u = u(x, t)$ será procurada no espaço crítico E_q . Como os espaços de Morrey e de Besov-Morrey são espaços de Banach, então $(E_q, \|\cdot\|_{E_q})$ também o é.

Observação 4.1.1 *Note que (4.2) é invariante pela relação de escala (3.9) do sistema (1)–(2). De fato, pela relação de escala em espaços de Besov Morrey e em espaços de Morrey, temos*

$$\begin{aligned} \|u_\alpha\|_{E_q} &= \sup_{t>0} \|\alpha u(\alpha \cdot, \alpha^2 t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} + \sup_{t>0} t^\eta \|\alpha u(\alpha \cdot, \alpha^2 t)\|_{q,\lambda} \\ &= \sup_{t>0} \alpha \alpha^{(1-\theta)-\frac{n-\lambda}{r}} \|u(\cdot, \alpha^2 t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} + \sup_{t>0} t^\eta \alpha \alpha^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, \alpha^2 t)\|_{q,\lambda} \\ &= \sup_{s>0} \alpha^{(1-\theta)-\frac{n-\lambda}{r}+1} \|u(\cdot, s)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} + \sup_{s>0} s^\eta \alpha^{1-2\eta-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Logo, como $1 - \theta = \frac{n-\lambda}{r} - 1$, e $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$, concluímos que $\|u_\alpha\|_{E_q} = \|u\|_{E_q}$.

4.2 Resultados

Considerando $u_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}(\mathbb{R}^n)$, iniciaremos esta seção apresentando o nosso teorema de boa colocação e daremos as condições necessárias para obtermos auto-similaridade da solução para o problema (1) – (2). Em seguida enunciaremos um resultado de estabilidade assintótica da solução *mild*.

Teorema 4.2.1 *Assuma que $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $0 \leq \lambda < n$, $1 \leq n - \lambda < r \leq q < 2(n - \lambda)$, $\frac{q}{2} \geq 1$, $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n-\lambda}{2q}$, $1 - \theta = \frac{n-\lambda}{r} - 1$ e seja ∇K uma medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ tal que a sua variação total sobre $\mathbb{R}^n$ é $A < \infty$. Suponha que $u_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}(\mathbb{R}^n)$. Seja M dada em (4.33) e $0 < \varepsilon < \frac{1}{4M}$.*

(i) *(Existência e unicidade) Existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de modo que, se $\|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} \leq \delta$, então (1)–(2) possui uma solução mild global $u \in E_q$. Além disso, essa solução é a única satisfazendo $\|u\|_{E_q} \leq 2\varepsilon$.*

(ii) *(Dependência contínua) A solução u , obtida em (i), depende continuamente da condição inicial u_0 . Mais ainda, $u(x, t) \rightharpoonup u_0(x)$ na topologia fraco- $*$ de $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ quando $t \rightarrow 0^+$.*

(iii) *(Auto-similaridade) Se u_0 é uma função homogênea de grau -1 e se ∇K é homogênea de grau $-n$, então a solução u é auto-similar.*

Teorema 4.2.2 *Nas condições do Teorema 4.2.1, se u e v são duas soluções do problema (1) – (2), obtidas no item (i) do referido teorema, com dados iniciais $u_0, v_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\eta \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} = 0 \quad (4.4)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q, \lambda} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}} = 0. \quad (4.5)$$

Observação 4.2.1 Nas condições do Teorema 4.2.1, se u é uma solução de (1) – (2), então:

- (i) u é uma função ímpar para todo $t > 0$, desde que u_0 e K sejam ambas funções ímpares.
- (ii) u é uma função par para todo $t > 0$, desde que u_0 e K sejam ambas funções pares.

A demonstração desse resultado é análoga a do Teorema 3.4.3, trocando-se a convergência pontual pela convergência no sentido de distribuições.

4.3 Estimativas

4.3.1 Estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$

O lema a seguir fornecerá estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ em espaços de Sobolev-Morrey e em espaços de Besov-Morrey. Incluiremos a demonstração deste resultado, que também poderá ser encontrada em [20].

Lema 4.3.1 Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \leq s_2$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < n$. Defina $\tau_{p_i, \lambda} = \frac{n-\lambda}{p_i}$, $i=1, 2$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_2, \lambda}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{(s_2-s_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1, \lambda}-\tau_{p_2, \lambda})} \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1, \lambda}^{s_1}}, \quad (4.6)$$

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2, \lambda, q}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{(s_2-s_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1, \lambda}-\tau_{p_2, \lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1, \lambda, q}^{s_1}}, \quad (4.7)$$

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2, \lambda, 1}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{(s_2-s_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1, \lambda}-\tau_{p_2, \lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1, \lambda, \infty}^{s_1}}, \text{ se } s_1 \neq s_2, \quad (4.8)$$

para todo $f \in \mathcal{S}'$ e todo $t > 0$.

Demonstração: Para provar (4.6) vamos considerar três casos: $s_1 = s_2 = 0$, $s_1 = s_2 = s$ e o caso geral $s_2 - s_1 = \delta > 0$. Nas demonstrações de (4.7) e (4.8), utilizaremos um argumento de interpolação.

Prova da estimativa (4.6):

Caso (i): $s_1 = s_2 = 0$.

Neste caso, $\mathcal{M}_{p, \lambda}^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ e a desigualdade já foi provada em (3.16).

Caso (ii): $s_1 = s_2 = s$.

Pela definição da norma nos espaços de Sobolev-Morrey e da estimativa (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}\|G(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_2,\lambda}^s} &= \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}G(t)f\|_{p_2,\lambda} = \|G(t)(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_{p_2,\lambda} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})}\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_{p_1,\lambda} = Ct^{-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})}\|f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^s},\end{aligned}\quad (4.9)$$

pois o operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ comuta com $G(t)$.

Caso (iii): $s_2 - s_1 = \delta > 0$.

Seja $h(x, t)$ tal que $\mathcal{F}(h)(\xi, t) = |\xi|^\delta e^{-4\pi^2 t |\xi|^2}$, isto é, $\mathcal{F}(h(\cdot, t)) = |\cdot|^\delta \mathcal{F}(g(\cdot, t))$. Consideremos também o multiplicador de Fourier dado por

$$\mathcal{F}(F(D)f) = \mathcal{F}\left(\left[(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}G\left(\frac{1}{2}\right)\right]f\right) = |\cdot|^\delta \mathcal{F}\left(g\left(\cdot, \frac{1}{2}\right) * f\right) = \mathcal{F}\left(h\left(\cdot, \frac{1}{2}\right)\right) \mathcal{F}(f), \quad (4.10)$$

ou seja, $\mathcal{F}(F(D)f) = \mathcal{F}(h(\cdot, \frac{1}{2})) \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(h(\cdot, \frac{1}{2}) * f)$, em que $\left[(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}G\left(\frac{1}{2}\right)\right]f$ denota o operador $(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}$ aplicado em $G\left(\frac{1}{2}\right)f$, isto é, $(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\left[G\left(\frac{1}{2}\right)f\right]$, e o símbolo de $F(D)$ é $F(\xi) = \mathcal{F}(h)(\xi, \frac{1}{2}) = |\xi|^\delta e^{-4\pi^2 \frac{1}{2} |\xi|^2}$.

Aplicando (4.10) e lembrando que $\mathcal{F}(f_\alpha)(\xi) = \alpha^{-n} \mathcal{F}(f)(\alpha^{-1}\xi)$, para $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$, obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\left[(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}G\left(\frac{t}{2}\right)\right]f\right)(\xi) &= |\xi|^\delta \mathcal{F}\left(g\left(\cdot, \frac{t}{2}\right) * f\right)(\xi) \\ &= t^{-\frac{\delta}{2}} |t^{\frac{1}{2}} \xi|^\delta e^{-4\pi^2 |\xi t^{\frac{1}{2}}|^2 \frac{1}{2}} \mathcal{F}(f)(t^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \xi) \\ &= t^{-\frac{\delta}{2} + \frac{n}{2}} \mathcal{F}(h)\left(t^{\frac{1}{2}} \xi, \frac{1}{2}\right) \mathcal{F}\left(f_{t^{\frac{1}{2}}}\right)\left(t^{\frac{1}{2}} \xi\right) \\ &= t^{-\frac{\delta}{2} + \frac{n}{2}} \mathcal{F}\left(h\left(\cdot, \frac{1}{2}\right) * f_{t^{\frac{1}{2}}}\right)\left(t^{\frac{1}{2}} \xi\right) \\ &= t^{-\frac{\delta}{2}} \mathcal{F}\left[\left(h\left(\cdot, \frac{1}{2}\right) * f_{t^{\frac{1}{2}}}\right)_{t^{-\frac{1}{2}}}\right](\xi) \\ &= t^{-\frac{\delta}{2}} \mathcal{F}\left[F(D)\left(f_{t^{\frac{1}{2}}}\right)\right]_{t^{-\frac{1}{2}}}(\xi).\end{aligned}\quad (4.11)$$

Assim, tendo em vista (2.8), como $F(\xi)$ satisfaz a Proposição 2.1.2 com $m = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\|(F(D)(f_{t^{\frac{1}{2}}}))_{t^{-\frac{1}{2}}}\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1}} &= t^{-\frac{1}{2}(s_1 - \frac{n-\lambda}{p_1})} \|F(D)(f_{t^{\frac{1}{2}}})\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1}} \\ &\leq Ct^{-\frac{s_1}{2} + \frac{n-\lambda}{2p_1}} \|f_{t^{\frac{1}{2}}}\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1}} \\ &= Ct^{-\frac{s_1}{2} + \frac{n-\lambda}{2p_1}} t^{\frac{s_1}{2} - \frac{n-\lambda}{2p_1}} \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1}} \\ &= C \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1}}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Observe agora que, como $\mathcal{F}(g * g)(\cdot, t/2) = (e^{-4\pi^2 \frac{t}{2} |\cdot|^2})^2 = \mathcal{F}(g)(\cdot, t)$, então podemos escrever $G(t)f = (G(t/2)G(t/2))f = G(t/2)(G(t/2)f)$. Dessa forma, usando (4.6) para índices iguais,

Caso (ii) que acabamos de provar, segue de (4.11) e de (4.12) que

$$\begin{aligned}
\|(G(t)f)\|_{\mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{s_2}} &= \|G(t/2)(G(t/2)f)\|_{\mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{s_2}} \\
&\leq \tilde{C} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|G(t/2)f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_2}} \\
&= \hat{C} t^{-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|G(t/2)f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1+\delta}} \\
&= \hat{C} t^{-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}[G(t/2)f]\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1}} \\
&= \hat{C} t^{-\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|[F(D)(f_{\frac{1}{2}})]_{t^{-\frac{1}{2}}}\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1}} \\
&\leq C t^{-\frac{(s_2-s_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{s_1}}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Prova da estimativa (4.7):

Sejam $z_1, z_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $z_1 \neq z_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $z_1 \leq \beta_1$ e $z_2 \leq \beta_2$ tais que $s_1 = (1-\theta)z_1 + \theta z_2$ e $s_2 = (1-\theta)\beta_1 + \theta\beta_2$, com $0 < \theta < 1$. Dado $1 \leq q \leq \infty$, pela propriedade de interpolação (2.37), escrevemos

$$(\mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = \mathcal{N}_{p_2,\lambda,q}^{s_2}(\mathbb{R}^n) \tag{4.14}$$

e

$$(\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = \mathcal{N}_{p_1,\lambda,q}^{s_1}(\mathbb{R}^n). \tag{4.15}$$

Ainda com relação a esses espaços, por (4.6), temos

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_1}} \leq C t^{-\frac{(\beta_1-z_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_1}} \tag{4.16}$$

e

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_2}} \leq C t^{-\frac{(\beta_2-z_2)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_2}}. \tag{4.17}$$

Agora, para cada $t \geq 0$ fixado, considere

$$G(t) : \mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_1}(\mathbb{R}^n) \text{ e } G(t) : \mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_2}(\mathbb{R}^n).$$

Temos, em ambos os casos, que $G(t)$ é um operador linear e além disso, por (4.16) e (4.17), obtemos que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_1}} \leq C_1 \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_1}} \tag{4.18}$$

e

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_2}} \leq C_2 \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_2}}, \tag{4.19}$$

em que $C_1 = Ct^{-\frac{(\beta_1-z_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})}$ e $C_2 = t^{-\frac{(\beta_2-z_2)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})}$, ou seja,

$$G(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_1}(\mathbb{R}^n)) \text{ e } G(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_2}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_2}(\mathbb{R}^n)).$$

Logo, por (4.14), (4.15) e pela Definição 1.5.2, concluímos que

$$G(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_{p_1,\lambda,q}^{s_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}_{p_2,\lambda,q}^{s_2}(\mathbb{R}^n)).$$

Mais ainda, como $\mathcal{N}_{p_1,\lambda,q}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{N}_{p_2,\lambda,q}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ são espaços de interpolação de expoente θ , existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{N}_{p_1,\lambda,q}^{s_1}, \mathcal{N}_{p_2,\lambda,q}^{s_2})} &\leq C \|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_1}, \mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_1})}^{1-\theta} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_{p_1,\lambda}^{z_2}, \mathcal{M}_{p_2,\lambda}^{\beta_2})}^{\theta} \\ &\leq C \left[t^{-\frac{(\beta_1-z_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \right]^{1-\theta} \left[t^{-\frac{(\beta_2-z_2)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \right]^{\theta} \\ &= Ct^{-\frac{(s_2-s_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\text{Portanto, } \|G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2,\lambda,q}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{(s_2-s_1)}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1,\lambda,q}^{s_1}}.$$

Prova da estimativa (4.8):

Note primeiramente que $s_2 = (1-\frac{1}{2})(2s_2-s_1) + \frac{1}{2}s_1$. Então, usando (2.38) com $q_1 = q_2 = \infty$, $q = 1$ e $\theta = \frac{1}{2}$, obtemos

$$(\mathcal{N}_{p_2,\lambda,\infty}^{2s_2-s_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}_{p_2,\lambda,\infty}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\frac{1}{2},1} = \mathcal{N}_{p_2,\lambda,1}^{s_2}(\mathbb{R}^n). \quad (4.21)$$

Além disso, pela Definição 1.5.2, temos

$$(\mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\frac{1}{2},\infty} = \mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}(\mathbb{R}^n). \quad (4.22)$$

Por hipótese $s_2 > s_1$, logo $2s_2 - s_1 > s_1$. Desse modo, por (4.7), segue que

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2,\lambda,\infty}^{2s_2-s_1}} \leq Ct^{-\frac{(2s_2-s_1)-s_1}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}} \quad (4.23)$$

e

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2,\lambda,\infty}^{s_1}} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})} \|f\|_{\mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}}. \quad (4.24)$$

Observando que $G(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}_{p_2,\lambda,\infty}^{2s_2-s_1}(\mathbb{R}^n))$ e $G(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}_{p_2,\lambda,\infty}^{s_1}(\mathbb{R}^n))$, e utilizando os mesmos argumentos da prova de (4.7), obtemos que

$$\begin{aligned} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}, \mathcal{N}_{p_2,\lambda,1}^{s_2})} &\leq C \|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}, \mathcal{N}_{p_2,\lambda,\infty}^{2s_2-s_1})}^{\frac{1}{2}} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{N}_{p_1,\lambda,\infty}^{s_1}, \mathcal{N}_{p_2,\lambda,\infty}^{s_1})}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C (t^{-(s_2-s_1)-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})})^{\frac{1}{2}} (t^{-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})})^{\frac{1}{2}} \\ &= Ct^{-\frac{s_2-s_1}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1,\lambda}-\tau_{p_2,\lambda})}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Portanto, $\|G(t)f\|_{\mathcal{N}_{p_2, \lambda, 1}^{s_2}} \leq Ct^{-\frac{s_2-s_1}{2}-\frac{1}{2}(\tau_{p_1, \lambda}-\tau_{p_2, \lambda})}\|f\|_{\mathcal{N}_{p_1, \lambda, \infty}^{s_1}}$.

■

Apresentaremos nas próximas subseções as estimativas fundamentais da parte linear da equação (3.3) e do operador bilinear (3.4). Para provarmos tais estimativas, utilizaremos o Lema 3.5.1.

4.3.2 Estimativas Lineares

Iniciaremos apresentando as estimativas da parte linear da equação (3.3).

Lema 4.3.2 *Sob as hipóteses do Teorema 4.2.1, existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$\|G(\cdot)u_0\|_{E_q} \leq L\|u_0\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}}, \forall u_0 \in \mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}. \quad (4.26)$$

Demonstração: De (2.34) e (4.8), com $s_1 = 1 - \theta$, $s_2 = 0$, $p_1 = r$ e $p_2 = q$, obtemos

$$\begin{aligned} t^\eta \|G(t)u_0\|_{q, \lambda} &\leq Ct^\eta \|G(t)u_0\|_{\mathcal{N}_{q, \lambda, 1}^0} \leq L_1 t^\eta t^{\frac{1-\theta}{2}-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{r}-\frac{n-\lambda}{q})} \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}} \\ &\leq L_1 \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}}, \forall t > 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por outro lado, segue de (4.7), com $s_1 = s_2 = 1 - \theta$ e $p_1 = p_2 = r$, que

$$\|G(t)u_0\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}} \leq L_2 \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}}, \forall t > 0. \quad (4.28)$$

Agora, tomando o supremo para $t > 0$ em (4.27) e (4.28), recordando (4.2) e considerando $L = L_1 + L_2$, concluímos a prova de (4.26).

■

4.3.3 Estimativas Bilineares

Passaremos agora a estimar o operador bilinear

$$B(u, v)(t) = - \int_0^t \nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * v))(s) ds,$$

proveniente da equação integral (3.3).

Lema 4.3.3 *Sob as hipóteses do Teorema 4.2.1, existem constantes positivas M_1 e M_2 tais que*

$$\sup_{t>0} t^\eta \|B(u, v)(t)\|_{q, \lambda} \leq M_1 \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \quad (4.29)$$

e

$$\sup_{t>0} \|B(u, v)(t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}} \leq M_2 \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q, \lambda}, \quad (4.30)$$

para todo $u, v \in E_q$.

Demonstração: A estimativa (4.29) segue de (3.17), com $p_1 = \frac{q}{2}$ e $p_2 = q$, de (2.14) e do Lema 2.1.2, respectivamente. De fato, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned}
t^\eta \|B(u, v)(t)\|_{q, \lambda} &\leq t^\eta \int_0^t \|\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * v))(\cdot, s)\|_{q, \lambda} ds \\
&\leq \widetilde{M}_1 t^\eta \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|(u(\nabla K * v))(\cdot, s)\|_{\frac{q}{2}, \lambda} ds \\
&\leq \widetilde{M}_1 A t^\eta \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, s)\|_{q, \lambda} \|v(\cdot, s)\|_{q, \lambda} ds \\
&\leq \widetilde{M}_1 A \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} (s')^{-2\eta} ds' \\
&= M_1 \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q, \lambda}, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

onde $M_1 = \widetilde{M}_1 A \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} (s')^{-2\eta} ds' < \infty$, pois $-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q} + 1 > 0$ e $-2\eta + 1 > 0$ (ver a Proposição 1.7.1). Logo, tomando o supremo para $t > 0$ em (4.31), obtemos (4.29).

Agora, para mostrarmos a desigualdade (4.30), observe inicialmente que, de (2.33) e (2.34), obtemos a seguinte cadeia de inclusões contínuas

$$\mathcal{M}_{n-\lambda, \lambda}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_{n-\lambda, \lambda, \infty}^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}(\mathbb{R}^n).$$

Assim, de (3.17), com $p_1 = \frac{q}{2}$ e $p_2 = n - \lambda$, de (2.14) e do Lema 2.1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)(t)\|_{\mathcal{N}_{r, \lambda, \infty}^{1-\theta}} &\leq C \|B(u, v)(t)\|_{n-\lambda, \lambda} \leq C \int_0^t \|\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * v))(\cdot, s)\|_{n-\lambda, \lambda} ds \\
&\leq \widetilde{M}_2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|(u(\nabla K * v))(\cdot, s)\|_{\frac{q}{2}, \lambda} ds \\
&\leq \widetilde{M}_2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, s)\|_{q, \lambda} A \|v(\cdot, s)\|_{q, \lambda} ds \\
&\leq \widetilde{M}_2 A \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \int_0^1 (1-s')^{-\frac{n-\lambda}{q}} (s')^{-2\eta} ds' \\
&= M_2 \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q, \lambda}, \tag{4.32}
\end{aligned}$$

onde $M_2 = \widetilde{M}_2 A \int_0^1 (1-s')^{-\frac{n-\lambda}{q}} (s')^{-2\eta} ds' < \infty$, pois $-\frac{n-\lambda}{q} + 1 > 0$ e $-2\eta + 1 > 0$ (ver a Proposição 1.7.1).

Dessa forma, obtemos (4.30) tomando o supremo para $t > 0$ em (4.32). ■

4.4 Demonstração dos Resultados

Nesta seção apresentaremos as demonstrações dos resultados enunciados na Seção 4.2 para o problema (1) – (2), com dado inicial em espaços de Besov-Morrey.

4.4.1 Demonstração do Teorema 4.2.1

Parte (i) (Existência e unicidade): Tomemos $X = E_q$ definido em (4.1) e $u_0 \in \mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} \leq \delta := \frac{\varepsilon}{L}$, em que L é a constante obtida no Lema 4.3.2. Denotemos $M = M_1 + M_2$, onde M_i , $i = 1, 2$, são as constantes obtidas no Lema 4.3.3 e seja $y = G(\cdot)u_0$. Dados $u, v \in E_q$, recordando a norma deste espaço, definida em (4.2), e usando o Lema 4.3.3, temos

$$\|B(u, v)\|_{E_q} \leq (M_1 + M_2) \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \leq M \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_q}. \quad (4.33)$$

Por outro lado, pelo Lema 4.3.2, segue que

$$\|y\|_{E_q} \leq L \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} \leq \varepsilon.$$

Dessa forma, como $\varepsilon < \frac{1}{4M}$, ou seja, $4M\varepsilon < 1$, o Lema 1.6.1 garante que existe uma única solução $u \in E_q$ de (3.3) satisfazendo $\|u\|_{E_q} \leq 2\varepsilon$.

Parte (ii) (Dependência contínua): Sejam u e v duas soluções obtidas na *Parte (i)*, com dados iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. De (4.33), obtemos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{E_q} &= \|G(\cdot)u_0 + B(u - v, u) - G(\cdot)v_0 + B(v, u - v)\|_{E_q} \\ &\leq \|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_{E_q} + M \|u - v\|_{E_q} (\|u\|_{E_q} + \|v\|_{E_q}) \\ &\leq \|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_{E_q} + M \|u - v\|_{E_q} (2\varepsilon + 2\varepsilon), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$(1 - 4\varepsilon M) \|u - v\|_{E_q} \leq \|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_{E_q}.$$

De (4.26) sabemos que existe $L > 0$ tal que $\|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_{E_q} \leq L \|u_0 - v_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}}$. Logo,

$$(1 - 4\varepsilon M) \|u - v\|_{E_q} \leq L \|u_0 - v_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}},$$

completando a prova da dependência contínua.

A seguir, vamos demonstrar que $u(\cdot, t) \rightharpoonup u_0(\cdot)$ na topologia fraco- $*$ de $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^n)$, quando $t \rightarrow 0^+$. Primeiramente, vamos mostrar que $G(t)u_0 \rightharpoonup u_0$, quando $t \rightarrow 0^+$.

Para isto, seja $w \in \dot{B}_{1,1}^1(\mathbb{R}^n)$. Como $g(x-z, t) = g(z-x, t)$, então $\langle G(t)u_0, w \rangle = \langle G(t)w, u_0 \rangle$. Também $\langle u_0, w \rangle = \langle w, u_0 \rangle$ e portanto, $G(t)u_0 \rightharpoonup u_0$ se, e somente se, $|\langle G(t)w - w, u_0 \rangle| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$.

Logo, usando (2.35), obtemos

$$\begin{aligned}
|\langle G(t)w - w, u_0 \rangle| &\leq \|G(t)w - w\|_{\dot{B}_{1,1}^1} \|u_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}} \\
&\leq C \|G(t)w - w\|_{\dot{B}_{1,1}^1} \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} \\
&\leq C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F}(G(t)w - w))\|_1 \right) \|u_0\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}}. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F}(G(t)w - w))\|_1 &= \|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k e^{-4\pi^2|\cdot|^2 t} - 1) \mathcal{F}(w)\|_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k (e^{-4\pi^2|\cdot|^2 t} - 1) \mathcal{F}(w))(\xi)| d\xi \quad (4.35)
\end{aligned}$$

e então, como $|e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} - 1| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, pelo Teorema da convergência dominada segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k (e^{-4\pi^2|\cdot|^2 t} - 1) \mathcal{F}(w))(\xi)| d\xi = 0, \quad (4.36)$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Logo $G(t)u_0 \rightharpoonup u_0$, quando $t \rightarrow 0^+$.

Para concluirmos a prova, basta mostrar que $B(u, u)(t) \rightharpoonup 0$ quando $t \rightarrow 0^+$ na topologia fraco- $*$ de $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\dot{B}_{1,1}^1(\mathbb{R}^n)$ (veja [46], Seção 2.3.3, com adaptações adequadas), para todo $\varepsilon > 0$, existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|w - \varphi\|_{\dot{B}_{1,1}^1} < \varepsilon$. Então a convergência fraco- $*$ pode ser obtida por meio da estimativa

$$\begin{aligned}
|\langle B(u, u)(t), w \rangle| &\leq |\langle B(u, u)(t), \varphi \rangle| + |\langle B(u, u)(t), w - \varphi \rangle| \\
&\leq |\langle B(u, u)(t), \varphi \rangle| + \|B(u, u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}} \|w - \varphi\|_{\dot{B}_{1,1}^1}. \quad (4.37)
\end{aligned}$$

De fato, por (2.35) e (4.32), obtemos

$$\begin{aligned}
\|B(u, u)(t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}} \|w - \varphi\|_{\dot{B}_{1,1}^1} &\leq \|B(u, u)(t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} \varepsilon \\
&\leq M_2 \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Além disso, como $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe $R > 0$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset B_R(0)$ e, dado $\frac{q}{2}$, existe q' de modo que $(\frac{q}{2})^{-1} + (q')^{-1} = 1$. Dessa forma, usando (3.17) com $p_1 = p_2 = 1$ e $\lambda = 0$, e a

Desigualdade de Holder, segue que

$$\begin{aligned}
|\langle B(u, u)(t), \varphi \rangle| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * u))(x, s) \varphi(x)| dx ds \\
&= \int_0^t \int_{B_R(0)} |\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * u))(x, s) \varphi(x)| dx ds \\
&= \int_0^t \|\nabla_x G(t-s)(u(\nabla K * u))(\cdot, s) \varphi(\cdot)\|_{L^1(B_R(0))} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(\nabla K * u)(\cdot, s) \varphi(\cdot)\|_{L^1(B_R(0))} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(\nabla K * u)(\cdot, s)\|_{L^{\frac{q}{2}}(B_R(0))} \|\varphi\|_{L^{q'}(B_R(0))} ds.
\end{aligned}$$

Logo, de (2.14) e do Lema 2.1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
R^{-\lambda} |\langle B(u, u)(t), \varphi \rangle| &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(\nabla K * u)(\cdot, s)\|_{\frac{q}{2}, \lambda} \|\varphi\|_{q', \lambda} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(\cdot, s)\|_{q, \lambda} \|(\nabla K * u)(\cdot, s)\|_{q, \lambda} ds \\
&\leq CA \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(\cdot, s)\|_{q, \lambda} \|u(\cdot, s)\|_{q, \lambda} ds \\
&\leq CA (\sup_{t>0} t^\eta \|u(\cdot, t)\|_{q, \lambda})^2 t^{\frac{n-\lambda}{q}-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}} (s')^{-2\eta} ds'. \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Uma vez que $q < 2(n - \lambda)$, R está fixado e $\int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}} (s')^{-2\eta} ds' = \beta \left(\frac{n-\lambda}{q}, \frac{1}{2} \right)$, $|\langle B(u, u)(t), \varphi \rangle| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$, o que completa a demonstração.

Parte (iii) (Auto-similaridade): A demonstração segue as mesmas ideias da prova de (iii) do Teorema 3.4.1, onde usamos o PIF para concluir que u_k é uma função homogênea de grau -1 para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $u_k(x, t) \equiv u_{k, \alpha}(x, t)$, em que $u_{k, \alpha}(x, t) := \alpha u_k(\alpha x, \alpha^2 t)$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha > 0$.

Agora, observe que a convergência $u_k \rightarrow u$ em E_q implica na convergência $u_k \rightharpoonup u$ em $D'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Além disso, usando mudança de variáveis pode-se mostrar que $u_{k, \alpha} \rightharpoonup u_\alpha$ em $D'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, para cada $\alpha > 0$. De fato, seja $\alpha > 0$ fixado e $w \in D(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Então

$$\begin{aligned}
\langle u_{k, \alpha}, w \rangle &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_{k, \alpha}(x, t) w(x, t) dx dt \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \alpha u_k(\alpha x, \alpha^2 t) w(x, t) dx dt \\
&= \alpha^{-1-n} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_k(z, r) w(\alpha^{-1} z, \alpha^{-2} r) dz dr. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Daí, fazendo $k \rightarrow \infty$ em (4.40), usando o fato que $u_k \rightharpoonup u$ em $D'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e realizando

novamente mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
\langle u_{k,\alpha}, w \rangle &\rightarrow \alpha^{-1-n} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(z, r) w(\alpha^{-1}z, \alpha^{-2}r) dz dr \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha(x, t) w(x, t) dx dt \\
&= \langle u_\alpha, w \rangle,
\end{aligned}$$

donde segue $u_{k,\alpha} \rightharpoonup u_\alpha$ em $D'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

Uma vez que o limite no sentido de distribuições é único, $u_k \rightharpoonup u$ em $D'(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e $u_{k,\alpha} = u_k$, segue que $u \equiv u_\alpha$, para cada $\alpha > 0$ fixado, como queríamos. ■

4.4.2 Demonstração do Teorema 4.2.2

Sejam u e v soluções do problema (1) – (2), com dados iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. Então

$$u(t) = G(t)u_0 + B(u, u)(t) \quad (4.41)$$

e

$$v(t) = G(t)v_0 + B(v, v)(t). \quad (4.42)$$

Subtraindo a equação (4.42) de (4.41) e tomando as quantidades $t^\eta \|\cdot\|_{q,\lambda}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}}$, obtemos as respectivas desigualdades

$$\begin{aligned}
t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} &\leq t^\eta \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} + t^\eta \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \\
&:= H_0(t) + H_1(t)
\end{aligned} \quad (4.43)$$

e

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} &\leq \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} + \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} \\
&:= H_2(t) + H_3(t).
\end{aligned} \quad (4.44)$$

Procedendo como em (4.31) e (4.32), os termos H_1 e H_3 podem ser estimados, respectivamente, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
H_1(t) &\leq \widetilde{M}_1 t^\eta A \left[\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \|v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} ds \right] \\
&\leq 4\varepsilon A \widetilde{M}_1 t^\eta \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} s^{-\eta} ds \\
&= 4\varepsilon A \widetilde{M}_1 \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{2q}} (s')^{-2\eta} (ts')^\eta \|u(\cdot, ts') - v(\cdot, ts')\|_{q,\lambda} ds' \quad (4.45)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
H_3(t) &\leq \widetilde{M}_2 A \left[\int_0^t (t-s)^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (t-s)^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \|v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} ds \right] \\
&\leq 4\varepsilon A \widetilde{M}_2 \left[\int_0^t (t-s)^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} s^{-\eta} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (t-s)^{-\frac{n-\lambda}{q}} \|v(\cdot, s) - u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} s^{-\eta} ds \right] \\
&= 4\varepsilon A \widetilde{M}_2 \int_0^1 (1-s')^{-\frac{n-\lambda}{q}} s'^{-2\eta} (ts')^\eta \|u(\cdot, ts') - v(\cdot, ts')\|_{q,\lambda} ds', \quad (4.46)
\end{aligned}$$

devido ao fato de $s^\eta \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \leq \|u\|_{E_q} \leq 2\varepsilon$, isto é, $\|u(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \leq 2\varepsilon s^{-\eta}$ e analogamente, $\|v(\cdot, s)\|_{q,\lambda} \leq 2\varepsilon s^{-\eta}$. Definamos

$$P = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \text{ e } Q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}}.$$

Note que $P, Q < \infty$, pois $\|u\|_{E_q}, \|v\|_{E_q} < 2\varepsilon$. Desse modo, computando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (4.43) e considerando a hipótese que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\eta \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
P &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} H_0(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_1(t) \\
&\leq 0 + 4\varepsilon A P \widetilde{M}_1 \int_0^1 (1-s')^{-\frac{1}{2}-\frac{n-\lambda}{q}} (s')^{-2\eta} ds' \\
&= 4\varepsilon P M_1 \leq 4\varepsilon P M,
\end{aligned}$$

onde M_1 é a mesma constante obtida em (4.31) e $M = M_1 + M_2$. Além disso, de acordo com o Teorema 4.2.1, $4M\varepsilon < 1$, e assim, como $P \geq 0$, a desigualdade acima resulta em $P = 0$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} = 0.$$

Agora, tomando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (4.44) e usando que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
Q &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} H_2(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_3(t) \\
&\leq 0 + 4\varepsilon P A \widetilde{M}_2 \int_0^1 (1-s')^{-\frac{n-\lambda}{q}} (s')^{-2\eta} ds' \\
&= 4\varepsilon P M_2,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde M_2 é a mesma constante obtida em (4.32). Logo, como $P = 0$ e $Q \geq 0$, então $Q = 0$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} = 0$.

Para a recíproca, subtraindo a equação (4.42) de (4.41), de mesmo modo como feito inicialmente, obtemos

$$\begin{aligned}
&t^\eta \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} + \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} \\
&\leq t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} + t^\eta \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{q,\lambda} \\
&+ \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} + \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} \\
&= t^\eta \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{q,\lambda} + \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{1-\theta}} + H_1(t) + H_3(t).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Assim, tendo em vista (4.45) e (4.46), obtemos (4.4) tomando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (4.48) e considerando a hipótese (4.5).

■

Capítulo 5

Boa colocação em espaços de Fourier-Besov-Morrey

Neste capítulo iremos tomar o dado inicial u_0 do problema (1) – (2) nos espaços Fourier-Besov-Morrey, de tal forma que sua norma seja invariante pela relação de escala (3.9). Além disso, vamos definir um espaço funcional E de modo que a sua norma também seja invariante por (3.9). Assim, levando em conta estas observações, trabalharemos no espaço $\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda < n$ e $s = n - \frac{n-\lambda}{p} - 1$. Note que, neste caso, s satisfaz a Proposição 2.3.1, o que implica que $\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach. Dessa forma, o espaço $E = BC((0, \infty), \mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s)$, com norma definida por

$$\|u\|_E = \sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}, \quad (5.1)$$

é também um espaço de Banach.

Observamos que, através de um cálculo simples, obtemos a transformada de Fourier da equação integral (3.3), que é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u)(\xi, t) &= \mathcal{F}(G(t)u_0)(\xi) + \mathcal{F}(B(u, u))(\xi, t) \\ &= e^{-|\xi|^2 t} \mathcal{F}(u_0)(\xi) - \int_0^t i\xi e^{-|\xi|^2(t-s)} \mathcal{F}(u(\nabla K * u))(\xi, s) ds. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para isso utilizamos a Observação 1.2.1, escolhendo $(a, b) = (0, -1)$ de modo a simplificar os cálculos, obtendo que $\mathcal{F}(g)(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t}$.

Recordemos ainda que, se $\nabla K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}(\nabla K) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e além disso, $\|\mathcal{F}(\nabla K)\|_\infty \leq C\|\nabla K\|_1$ (ver Proposição 1.2.1).

5.1 Resultados

Nesta seção apresentaremos nossos resultados de existência de solução e de estabilidade assintótica para o problema (1) – (2), com dado inicial em $\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s$.

Teorema 5.1.1 *Assuma que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $0 \leq \lambda < n$, $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{n-\lambda}{n-2} \leq p$, $s = n - \frac{n-\lambda}{p} - 1$ e $\nabla K \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Suponha que $u_0 \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s$. Sejam M tomado como em (5.11) e $0 < \varepsilon < \frac{1}{4M}$.*

(i) *(Existência e unicidade) Existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que (1)–(2) possui uma solução mild global $u \in E$, desde que $\|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \delta$. Além disso, essa solução é a única satisfazendo $\|u\|_E \leq 2\varepsilon$.*

(ii) *(Dependência contínua) A solução u obtida em (i) depende continuamente do dado inicial u_0 . Mais ainda, $u(\cdot, t) \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \rightarrow 0^+$.*

Observação 5.1.1 *Neste caso a solução u não é auto-similar, pois, caso contrário, deveríamos ter ∇K homogêneo de grau $-n$ o que é um absurdo já que $\nabla K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ não contém funções homogêneas de qualquer grau.*

Teorema 5.1.2 *Nas condições do Teorema 5.1.1, sejam u e v duas soluções obtidas no item (i) com respectivas condições iniciais u_0 e v_0 em $\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s$. Então,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} = 0 \quad (5.3)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} = 0. \quad (5.4)$$

Observação 5.1.2 *Nas condições do Teorema 5.1.1, seja u uma solução de (1) – (2), obtida no item (i). Então, temos:*

- (i) *u é uma função ímpar para todo $t > 0$, desde que u_0 e K sejam ambas funções ímpares.*
- (ii) *u é uma função par para todo $t > 0$, desde que u_0 e K sejam ambas funções pares.*

A demonstração desse resultado é análoga a do Teorema 3.4.3, trocando-se a convergência pontual pela convergência no sentido de distribuições.

5.2 Exemplo 5.2.1

As técnicas utilizadas neste capítulo para a demonstração da boa colocação são similares aquelas apresentadas em [41], com pequenas adaptações. Esta seção tem como objetivo justificar, através de um exemplo, que nosso modelo não é um caso particular do modelo estudado em [41]. Primeiro será necessário darmos algumas informações para o entendimento do exemplo.

A transformada de Fourier da formulação integral do problema de valor inicial apresentado em [41], quando $\beta = \gamma = 1$, é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u)(\xi, t) &= \mathcal{F}(G(t)u_0)(\xi) + \mathcal{F}(\tilde{B}(u, u))(\xi, t) \\ &= e^{-|\xi|^2 t} \mathcal{F}(u_0)(\xi) - \int_0^t i\xi e^{-|\xi|^2(t-s)} \mathcal{F}(P[u]u)(\xi, s) ds,\end{aligned}\quad (5.5)$$

em que $\mathcal{F}(P[u])(\xi) = P(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)$, com $P(\xi) = (\tilde{P}_1(\xi), \dots, \tilde{P}_n(\xi))$ e cada $\tilde{P}_k(\xi)$ satisfaz

$$\tilde{P}_k(\xi) = \sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} P_j(\xi), \quad (5.6)$$

para $k = 1, \dots, n$. Além disso, cada símbolo $P_j(\xi)$ é uma função mensurável tal que

$$|P_j(\xi)| \leq C|\xi|, \text{ q.t.p. em } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (5.7)$$

para todo $1 \leq j \leq n$.

Para que $\mathcal{F}(B(u, u))(\xi, t) = \mathcal{F}(\tilde{B}(u, u))(\xi, t)$ (ver (5.2) e (5.5)), devemos ter $P(\xi) = \mathcal{F}(\nabla K)(\xi)$.

Agora apresentaremos o exemplo para $n = 3$.

Exemplo 5.2.1 Defina $\nabla K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\nabla K(x_1, x_2, x_3) = (f(x_1, x_2, x_3), 0, 0)$, em que

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A transformada de Fourier de ∇K é dada por

$$\mathcal{F}(\nabla K)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 8(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{sen}\xi_1 \text{sen}\xi_2 \text{sen}\xi_3}{\xi_1 \xi_2 \xi_3}, 0, 0 \right).$$

Observemos que $\nabla K(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in (L^1(\mathbb{R}^3))^3$ e portanto, $\mathcal{F}(\nabla K) \in (L^\infty(\mathbb{R}^3))^3$.

Suponhamos que $P(\xi) = \mathcal{F}(\nabla K)(\xi)$, assim,

$$\sum_{j=1}^3 a_{j1} \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} P_j(\xi) = \tilde{P}_1(\xi) = 8(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\text{sen}\xi_1 \text{sen}\xi_2 \text{sen}\xi_3}{\xi_1 \xi_2 \xi_3}.$$

Além disso, podemos escrever

$$a_{11} \frac{i\xi_1}{|\xi|^2} P_1(\xi) = 4(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\cos(\xi_1 - \xi_2) \text{sen}\xi_3}{\xi_1 \xi_2 \xi_3},$$

$$a_{21} \frac{i\xi_2}{|\xi|^2} P_2(\xi) = -4(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\cos(\xi_1 + \xi_2) \text{sen}\xi_3}{\xi_1 \xi_2 \xi_3}$$

$$\text{e } a_{31} = 0.$$

Sabendo que a_{jk} são constantes e isolando, por exemplo, P_1 , obtemos

$$|P_1(\xi)| = \tilde{C} \frac{|\cos(\xi_1 - \xi_2)| |\sin \xi_3|}{|\xi_1|^2 |\xi_2| |\xi_3|} |\xi|^2.$$

Suponhamos também que para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\tilde{C} \frac{|\cos(\xi_1 - \xi_2)| |\sin \xi_3|}{|\xi_1|^2 |\xi_2| |\xi_3|} |\xi|^2 \leq C |\xi| \quad (\text{condição (5.7)}),$$

ou seja,

$$\frac{|\cos(\xi_1 - \xi_2)| |\sin \xi_3|}{|\xi_1|^2 |\xi_2| |\xi_3|} |\xi| \leq D, \quad \text{em que } D = C/\tilde{C} > 0.$$

Escolhendo $\xi_1 = \xi_2 = (D)^{-\frac{1}{3}}$ e $\xi_3 = \pi/2$, obtemos

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{2}{D^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{\pi^2}{4},$$

o que é um absurdo. Logo, nosso modelo não satisfaz a condição (5.7) e portanto, não estamos considerando um caso particular do modelo estudado em [41].

5.3 Estimativas

Nesta seção, apresentaremos as estimativas das partes linear e bilinear da equação integral (3.3) nos espaços $\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$.

5.3.1 Estimativas para $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ em Espaços de Fourier-Besov-Morrey

Para obtermos a estimativa da parte linear da equação (3.3), usaremos o lema a seguir.

Lema 5.3.1 *Sejam $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $0 < \lambda < n$ e $s \in \mathbb{R}$. Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|G(t)f\|_{\mathcal{FN}_{p_1,\lambda,\infty}^s} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_1} - \frac{n-\lambda}{p_2})} \|f\|_{\mathcal{FN}_{p_2,\lambda,\infty}^s}, \quad (5.8)$$

para toda $f \in \mathcal{FN}_{p_2,\lambda,\infty}^s$.

Demonstração: Sendo $p_1 \leq p_2$, então existe $r \geq 1$ tal que $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r}$. Desse modo, usando (2.14) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \|G(t)f\|_{\mathcal{FN}_{p_1,\lambda,\infty}^s} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\varphi_k \mathcal{F}(g(\cdot, t) * f)\|_{p_1,\lambda} \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\mathcal{F}(g)(\cdot, t)\|_{r,\lambda} \|\varphi_k \mathcal{F}(f)\|_{p_2,\lambda} \\ &\leq C \|\mathcal{F}(g)(t^{\frac{1}{2}} \cdot, 1)\|_{r,\lambda} \|f\|_{\mathcal{FN}_{p_2,\lambda,\infty}^s} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{r})} \|f\|_{\mathcal{FN}_{p_2,\lambda,\infty}^s} \\ &= Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{n-\lambda}{p_1} - \frac{n-\lambda}{p_2})} \|f\|_{\mathcal{FN}_{p_2,\lambda,\infty}^s}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

■

5.3.2 Estimativas Lineares

A seguir, vamos enunciar o lema que fornece a estimativa da parte linear, cuja demonstração é consequência imediata do Lema 5.3.1, com $p_1 = p_2 = p$.

Lema 5.3.2 *Considerando as hipóteses do Teorema 5.1.1, existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$\|G(\cdot)u_0\|_E \leq L\|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}, \forall u_0 \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s. \quad (5.10)$$

5.3.3 Estimativas Bilineares

Agora vamos estimar a forma bilinear definida em (3.4) nos espaços de Fourier-Besov-Morrey.

Lema 5.3.3 *Considerando as hipóteses do Teorema 5.1.1, existe uma constante positiva M tal que*

$$\|B(u, v)\|_E \leq M\|u\|_E\|v\|_E, \quad (5.11)$$

para todo $u, v \in E$.

Demonstração: Primeiramente provaremos que existe uma constante $\tilde{M}$ tal que

$$\sup_{t>0} \|B(u, v)(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \tilde{M} \sup_{t>0} \|(u(\nabla K * v))(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}}, \quad (5.12)$$

e então usaremos o paraproduto de Bony (1.8) em $\varphi_k \mathcal{F}(u(\nabla K * v))(\xi, t)$ para completar a demonstração.

Para obtermos (5.12), fixe $k \in \mathbb{Z}$. Como $\text{supp}(\varphi_k) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{2}2^{k-1} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}2^{k+1}\}$, obtemos

$$\begin{aligned} 2^{ks} \|\varphi_k \mathcal{F}(B(u, v)(t))\|_{p,\lambda} &\leq 2^{ks} |\xi| \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-r)} \|\varphi_k \mathcal{F}(u(\nabla K * v))(\cdot, r)\|_{p,\lambda} dr \\ &\leq \frac{4}{3} \int_0^t e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{(k+1)+ks} \|\varphi_k \mathcal{F}(u(\nabla K * v))(\cdot, r)\|_{p,\lambda} dr \\ &\leq \frac{4}{3} \int_0^t e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} 2^{k(s+1)+1-2(k-1)} \|\varphi_k \mathcal{F}(u(\nabla K * v))(\cdot, r)\|_{p,\lambda} dr \\ &\leq \frac{4}{3} 2^3 \int_0^t e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} 2^{k(s-1)} \|\varphi_k \mathcal{F}(u(\nabla K * v))(\cdot, r)\|_{p,\lambda} dr \\ &\leq \frac{2^5}{3} \sup_{t>0} \left(\|(u(\nabla K * v))(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} \int_0^t e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} dr \right) \\ &\leq \frac{2^5}{3} \sup_{t>0} \|(u(\nabla K * v))(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Tomando o supremo para $k \in \mathbb{Z}$, e depois para $t > 0$, em (5.13), obtemos (5.12) para $\tilde{M} = \frac{2^5}{3}$.

Agora, fixado $j \in \mathbb{Z}$ e usando (1.5) e (1.11), temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi_j \mathcal{F}(u(\nabla K * v))(\cdot, t)\|_{p,\lambda} &= \|\mathcal{F}(\Delta_j(u(\nabla K * v)))(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&= \left\| \sum_{|k-j| \leq 4} \mathcal{F}\{\Delta_j[(S_{k-1}(\nabla K * v))(\Delta_k u)]\}(\cdot, t) \right. \\
&\quad + \sum_{|k-j| \leq 4} \mathcal{F}\{\Delta_j[(S_{k-1}u)(\Delta_k(\nabla K * v))]\}(\cdot, t) \\
&\quad \left. + \sum_{k \geq j-2} \left(\mathcal{F}\{\Delta_j[(\Delta_k(\nabla K * v))]\} * \mathcal{F}\left(\sum_{|k'-k| \leq 1} (\Delta_{k'}u)\right) \right)(\cdot, t) \right\|_{p,\lambda},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\sum_{|k'-k| \leq 1} (\Delta_{k'}u)\right)(\cdot, t) &= \sum_{|k'-k| \leq 1} \mathcal{F}(\Delta_{k'}u)(\cdot, t) \\
&= \sum_{|k'-k| \leq 1} \varphi_{k'} \mathcal{F}(u)(\cdot, t) = \tilde{\varphi}_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t),
\end{aligned} \tag{5.14}$$

em que $\tilde{\varphi}_k = \sum_{|k'-k| \leq 1} \varphi_{k'}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_j \mathcal{F}(u(\nabla K * v))(\cdot, t)\|_{p,\lambda} &\leq \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_j[\mathcal{F}(S_{k-1}(\nabla K * v))(\cdot, t)] * [\varphi_k \mathcal{F}(u)](\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\quad + \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_j[\mathcal{F}(S_{k-1}u)](\cdot, t) * [\varphi_k(\mathcal{F}(\nabla K * v))](\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\quad + \sum_{k \geq j-2} \|\varphi_j[(\varphi_k \mathcal{F}(\nabla K * v))(\cdot, t)] * [\tilde{\varphi}_k \mathcal{F}(u)](\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Aplicando (2.15), a Proposição 1.1.2 e a Desigualdade tipo Bernstein com $|\alpha| = 0$, respectivamente, em J_1 , segue que

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_j[\mathcal{F}(S_{k-1}(\nabla K * v))](\cdot, t)\|_1 \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_j\|_\infty \|\mathcal{F}(S_{k-1}(\nabla K * v))(\cdot, t)\|_1 \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq \sum_{|k-j| \leq 4} \sum_{k' \leq k} \|\mathcal{F}(\Delta_{k'}(\nabla K * v))(\cdot, t)\|_1 \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C \sum_{|k-j| \leq 4} \sum_{k' \leq k} 2^{k'(n - \frac{n-\lambda}{p})} \|\varphi_{k'} \mathcal{F}(\nabla K * v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda},
\end{aligned} \tag{5.16}$$

onde C é a constante proveniente da Desigualdade tipo Bernstein, que independe da função em que se aplica a transformada.

Multiplicando J_1 por $2^{j(s-1)}$, recordando que $n - \frac{n-\lambda}{p} = s + 1$ e usando (2.14) e o item (iv) da Proposição 1.2.1, segue que

$$\begin{aligned}
2^{j(s-1)} J_1 &\leq C 2^{j(s-1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \sum_{k' \leq k} 2^{k'(s+1)} \|\varphi_{k'} \mathcal{F}(\nabla K) \mathcal{F}(v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C 2^{j(s-1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \sum_{k' \leq k} 2^{k'(s+1)} \|\mathcal{F}(\nabla K)\|_\infty \|\varphi_{k'} \mathcal{F}(v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C 2^{j(s-1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \sum_{k' \leq k} 2^{k'} \left(\sup_{k' \in \mathbb{Z}} 2^{k's} \|\varphi_{k'} \mathcal{F}(v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \right) \|\mathcal{F}(\nabla K)\|_\infty \\
&\leq C 2^{j(s-1)} \|\mathcal{F}(\nabla K)\|_\infty \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} 2^k \left(\sum_{k' \leq k} 2^{(k'-k)} \right) \\
&\leq 2C 2^{j(s-1)} \|\mathcal{F}(\nabla K)\|_\infty \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \sum_{|k-j| \leq 4} 2^k \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C \|\mathcal{F}(\nabla K)\|_\infty \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \left(\sum_{|k-j| \leq 4} 2^{j(s-1)} 2^{-k(s-1)} 2^{ks} \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \right) \\
&\leq C \|\nabla K\|_1 \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \sum_{|k-j| \leq 4} 2^{(j-k)(s-1)} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \|\varphi_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \right) \\
&\leq C \|\nabla K\|_1 \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} 2^{4(s-1)} \left(\sum_{|k-j| \leq 4} 1 \right) \\
&= 2^{4(s-1)} 9C \|\nabla K\|_1 \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
&\leq M_1 \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}, \tag{5.17}
\end{aligned}$$

onde M_1 é uma constante positiva que independe de j , t , u e v .

Analogamente, tem-se

$$\begin{aligned}
2^{j(s-1)} J_2 &\leq 2^{j(s-1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \|\mathcal{F}(S_{k-1}u)(\cdot, t)\|_1 \|\varphi_k \mathcal{F}(\nabla K * v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C 2^{j(s-1)} \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_k \mathcal{F}(\nabla K * v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \sum_{k' \leq k} 2^{k'(n - \frac{n-\lambda}{p})} \|\varphi_{k'} \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C 2^{j(s-1)} \|\mathcal{F}(\nabla K)\|_\infty \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \sum_{|k-j| \leq 4} \|\varphi_k \mathcal{F}(v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \sum_{k' \leq k} 2^{k'} \\
&\leq C \|\nabla K\|_1 \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \sum_{|k-j| \leq 4} 2^{(j-k)(s-1)} 2^{ks} \|\varphi_k \mathcal{F}(v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq M_2 \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}, \tag{5.18}
\end{aligned}$$

onde M_2 é uma constante positiva que independe de j , t , u e v .

Finalmente, vamos mostrar que $2^{j(s-1)}J_3 \leq C\|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}\|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}$ usando (2.15), (2.16) e (2.14), respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned}
2^{j(s-1)}J_3 &\leq 2^{j(s-1)} \sum_{k \geq j-2} \|\varphi_k \mathcal{F}(\nabla K * v)(\cdot, t)\|_1 \|\tilde{\varphi}_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C 2^{j(s-1)} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(s+1)} \|\varphi_k \mathcal{F}(\nabla K * v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \|\tilde{\varphi}_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C \|\mathcal{F}(\nabla K)\|_\infty \sum_{k \geq j-2} 2^{j(s-1)} 2^{k(s+1)} \|\varphi_k \mathcal{F}(v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \|\tilde{\varphi}_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} \\
&\leq C \|\nabla K\|_1 \sum_{k \geq j-2} 2^{ks} \|\varphi_k \mathcal{F}(v)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} 2^{ks} \|\tilde{\varphi}_k \mathcal{F}(u)(\cdot, t)\|_{p,\lambda} 2^{(s-1)(j-k)} \\
&\leq C \|\nabla K\|_1 \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \sum_{k \geq j-2} 2^{(s-1)(j-k)} \\
&\leq M_3 \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}, \tag{5.19}
\end{aligned}$$

onde M_3 é uma constante positiva que independe de j , t , u e v , pois, como $p > \frac{n-\lambda}{n-2}$, segue que $s-1 > 0$ e desse modo, $\sum_{k \geq j-2} 2^{(s-1)(j-k)} \leq \sum_{j'=-2}^{\infty} 2^{-(s-1)j'} < \infty$.

De (5.13), (5.15), (5.17), (5.18) e (5.19), obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} \|B(u, v)(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} &\leq \frac{2^5}{3} \sup_{t>0} \|(u(\nabla K * v))(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} \\
&\leq \frac{2^5}{3} \sup_{t>0} \sup_{j \in \mathbb{Z}} [2^{j(s-1)} [J_1 + J_2 + J_3]] \\
&\leq M \sup_{t>0} \sup_{j \in \mathbb{Z}} (\|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}) \\
&\leq M \sup_{t>0} (\|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}), \tag{5.20}
\end{aligned}$$

em que $M = 2^5 \max\{M_1, M_2, M_3\}$. Logo,

$$\|B(u, v)\|_E \leq M \|u\|_E \|v\|_E.$$

■

5.4 Demonstração dos Resultados

5.4.1 Demonstração do Teorema 5.1.1

Parte (i) (Existência e unicidade): Tome $X = E$ e $u_0 \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s$. Sejam M a constante positiva obtida no Lema 5.3.3 e $y = G(\cdot)u_0$. Pelo Lema 5.3.3, temos

$$\|B(u, v)\|_E \leq M \|u\|_E \|v\|_E, \quad \forall u, v \in E. \tag{5.21}$$

Por outro lado, supondo que $\|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \delta := \frac{\varepsilon}{L}$, pelo Lema 5.3.2, temos

$$\|y\|_E \leq L\|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \varepsilon.$$

Desse modo, como $0 < \varepsilon < \frac{1}{4M}$, pelo Lema 1.6.1 segue que existe uma única solução $u \in E$ de (3.3) tal que $\|u\|_E \leq 2\varepsilon$.

Parte (ii) (Dependência contínua): Sejam u e v duas soluções como na *Parte (i)*, com dados iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. Por (5.21), temos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_E &= \|G(\cdot)u_0 + B(u - v, u) - G(\cdot)v_0 + B(v, u - v)\|_E \\ &\leq \|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_E + M\|u - v\|_E(\|u\|_E + \|v\|_E) \\ &\leq \|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_E + M\|u - v\|_E(2\varepsilon + 2\varepsilon), \end{aligned}$$

e portanto,

$$(1 - 4\varepsilon M)\|u - v\|_E \leq \|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_E.$$

Além disso, por (5.10), existe $L > 0$ tal que $\|G(\cdot)(u_0 - v_0)\|_E \leq L\|u_0 - v_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}$. Logo, concluímos que

$$(1 - 4\varepsilon M)\|u - v\|_E \leq L\|u_0 - v_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s},$$

completando a prova da dependência contínua.

A seguir, mostraremos que $u(\cdot, t) \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, quando $t \rightarrow 0^+$. Primeiramente, verifiquemos que $G(t)u_0 \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, quando $t \rightarrow 0^+$.

Seja $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, pela Proposição 1.2.3,

$$\begin{aligned} |\langle G(t)u_0 - u_0, w \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(G(t)u_0 - u_0)(\xi) \mathcal{F}(w)(\xi) d\xi \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}(u_0) - \mathcal{F}(u_0))(\xi) \mathcal{F}(w)(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{1 - e^{-t|\xi|^2}}{t|\xi|^2} t \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\mathcal{F}(u_0)(\xi) \mathcal{F}(w)(\xi)| d\xi \\ &\leq t \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\mathcal{F}(u_0)(\xi) \mathcal{F}(w)(\xi)| d\xi. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Como $u_0 \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s$, podemos usar (1.7). Assim, de acordo com (2.16) e recordando que

$\text{supp}(\varphi_k) \subset D_k := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{2}2^{k-1} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}2^{k+1}\}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\mathcal{F}(u_0)(\xi) \mathcal{F}(w)(\xi)| d\xi &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{2(k+1)} |\varphi_k(\xi) \mathcal{F}(u_0)(\xi) \mathcal{F}(w)(\xi)| d\xi \\
&\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{2(k+1)} \|\varphi_k \mathcal{F}(u_0)\|_1 \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{2(k+1)} 2^{k(n-\frac{n-\lambda}{p})} \|\varphi_k \mathcal{F}(u_0)\|_{p,\lambda} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C \|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty, \tag{5.23}
\end{aligned}$$

pois $n - \frac{n-\lambda}{p} = s + 1$. Mais ainda, como $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$, $N > 3$, tal que

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty &= \sum_{k < 0} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty + \sum_{k \geq 0} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq \sum_{k < 0} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty + C \sum_{k \geq 0} 2^{3k} \sup_{2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}} ((1 + |\xi|^N)^{-1}) \\
&\leq C [\sum_{k < 0} 2^{3k} + \sum_{k \geq 0} 2^{k(3-N)}] < \infty. \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (5.24) em (5.23), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\mathcal{F}(u_0)(\xi) \mathcal{F}(w)(\xi)| d\xi \leq C \|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}, \tag{5.25}$$

e portanto, a estimativa (5.22) nos fornece

$$|\langle G(t)u_0 - u_0, w \rangle| \leq Ct \|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \tag{5.26}$$

Tendo (5.26), basta provarmos que $B(u, u)(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Isso ocorre pois, dado $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
|\langle B(u, u)(t), w \rangle| &= |\langle \mathcal{F}(B(u, u)(t)), \mathcal{F}(w) \rangle| \\
&\leq C \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[- \int_0^t i\xi e^{-|\xi|^2(t-r)} (\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\xi, r) dr \right] (\mathcal{F}(w))(\xi) d\xi \right| \\
&\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| e^{-|\xi|^2(t-r)} \left| \mathcal{F}(u(\nabla K * u))(\xi, r) (\mathcal{F}(w))(\xi) \right| d\xi dr \\
&\leq C \int_0^t \left\| e^{-|\xi|^2(t-r)} \right\|_\infty \left\| |\cdot| (\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r) \mathcal{F}(w) \right\|_1 dr \\
&= C \int_0^t \left\| |\cdot| (\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r) (\mathcal{F}(w))(\cdot) \right\|_1 dr. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Além disso, usando (1.7) e (2.16), segue que

$$\begin{aligned}
\| |\cdot| (\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r) \mathcal{F}(w) \|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| \left| (\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\xi, r) (\mathcal{F}(w))(\xi) \right| d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\xi| |\varphi_k(\xi) (\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\xi, r) (\mathcal{F}(w))(\xi)| \right| d\xi \\
&\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k+1} \|\varphi_k(\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r)\|_1 \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k 2^{k(s+1)} \|\varphi_k(\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r)\|_{p,\lambda} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&= C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(s-1)} \|\varphi_k(\mathcal{F}(u(\nabla K * u)))(\cdot, r)\|_{p,\lambda} 2^k 2^{2k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C \|u(\nabla K * u)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s})^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty \\
&\leq C (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s})^2,
\end{aligned} \tag{5.28}$$

pois, por (5.20) podemos concluir que $\|u(\nabla K * u)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} \leq C(\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s})^2$ e, por (5.24) temos $\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{3k} \|1_{D_k} \mathcal{F}(w)\|_\infty < \infty$. Desse modo, substituindo (5.28) em (5.27), concluímos que

$$\begin{aligned}
|\langle B(u, u)(t), w \rangle| &\leq C \int_0^t (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s})^2 dr \\
&\leq Ct \left(\sup_{t>0} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \right)^2 \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

■

5.4.2 Demonstração do Teorema 5.1.2

Por hipótese, u e v são soluções *mild* de (1) – (2) com condições iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. Então,

$$u(t) = G(t)u_0 + B(u, u)(t) \tag{5.30}$$

e

$$v(t) = G(t)v_0 + B(v, v)(t). \tag{5.31}$$

Subtraindo as equações (5.30) e (5.31), e em seguida tomando a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& + \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& \leq \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& + \left\| \int_0^t \nabla_x G(t-r)((u-v)(\nabla K * u))(\cdot, r) dr \right. \\
& + \left. \int_0^t \nabla_x G(t-r)(v(\nabla K * (u-v))) (\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& \leq \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& + \left\| \int_0^{\delta t} \nabla_x G(t-r) \left((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)) \right) (\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& + \left\| \int_{\delta t}^t \nabla_x G(t-r) \left((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)) \right) (\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\
& := H_0(t) + H_1(t) + H_2(t), \tag{5.32}
\end{aligned}$$

em que δ é um número positivo a ser escolhido posteriormente. Com o raciocínio análogo à demonstração do Lema 5.3.3, concluímos que

$$\begin{aligned}
& H_1(t) \\
& \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \left\| \varphi_k \int_0^{\delta t} |i\xi| e^{-|\xi|^2(t-r)} \mathcal{F} \left((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)) \right) (\cdot, r) dr \right\|_{p,\lambda} \\
& \leq \frac{2^5}{3} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} 2^{k(s-1)} \left\| \varphi_k \mathcal{F} \left((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)) \right) (\cdot, r) \right\|_{p,\lambda} dr \\
& \leq \frac{2^5}{3} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} \left\| [(u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v))] (\cdot, r) \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} dr. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Agora, procedendo como na obtenção de (5.20), temos

$$\begin{aligned}
& \left\| [(u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v))] (\cdot, r) \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^{s-1}} \\
& \leq 3 \max\{M_1, M_2, M_3\} \left[\|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \right. \\
& + \left. \|v(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \right]. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Então, como $\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \|u\|_E \leq 2\varepsilon$ e $\|v(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \|v\|_E \leq 2\varepsilon$, vem que

$$\begin{aligned}
& H_1(t) \\
& \leq M \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} + \|v(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}) dr \\
& \leq 4\varepsilon M \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\delta t} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} dr. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\frac{r}{t} = \tilde{r}$, e observado que

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2^{2(k-1)}t(1-\tilde{r})} 2^{2(k-1)} \leq \frac{C}{t(1-\tilde{r})}, \quad (5.36)$$

com C uma constante positiva, obtém-se

$$\begin{aligned} H_1(t) &\leq 4\varepsilon M \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\delta e^{-2^{2(k-1)}t(1-\tilde{r})} 2^{2(k-1)} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} t d\tilde{r} \\ &\leq 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (t(1-\tilde{r}))^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} t d\tilde{r}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde $C_1 = MC$.

Estimando $H_2(t)$ da mesma forma, temos

$$\begin{aligned} H_2(t) &\leq M \sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\delta t}^t e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} (\|u(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} + \|v(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}) dr \\ &\leq 4\varepsilon M \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\delta t}^t e^{-2^{2(k-1)}(t-r)} 2^{2(k-1)} dr \right) \left(\sup_{\delta t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \right) \\ &\leq 4\varepsilon M \sup_{\delta t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Desse modo, tomando

$$A = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s},$$

de (5.37) e do Teorema da convergência dominada, tem-se

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} H_1(t) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (1-\tilde{r})^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (1-\tilde{r})^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (1-\tilde{r})^{-1} \sup_{t \geq k} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &\leq 4\varepsilon C_1 \int_0^\delta (1-\tilde{r})^{-1} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &= 4\varepsilon C_1 \ln \left(\frac{1}{1-\delta} \right) A. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Mais ainda, de (5.38), obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} H_2(t) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon M \sup_{\delta t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} 4\varepsilon M \sup_{\delta t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &\leq 4\varepsilon M \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\delta k < r < \infty} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &= 4\varepsilon MA. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Por fim, aplicando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (5.32), usando (5.39), (5.40) e a hipótese que $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_0(t) = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned} A &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} H_0(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_1(t) + \limsup_{t \rightarrow \infty} H_2(t) \\ &\leq \left(4\varepsilon C_1 \ln \left(\frac{1}{1-\delta} \right) + 4\varepsilon M \right) A. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Visto que, por hipótese, que $4\varepsilon M < 1$, podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $4\varepsilon C_1 \ln \left(\frac{1}{1-\delta} \right) + 4\varepsilon M < 1$. Assim, como $A \geq 0$, então $A = 0$, isto é, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} = 0$.

Para provar a recíproca deste resultado, subtrai-se as equações (5.30) e (5.31) e utiliza-se um raciocínio similar ao anterior. Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} &\|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &+ \|B(u - v, u)(\cdot, t) + B(v, u - v)(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &\leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &+ \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} \nabla_x G(t-r)((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)))(\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &+ \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t \nabla_x G(t-r)((u-v)(\nabla K * u) + v(\nabla K * (u-v)))(\cdot, r) dr \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &\leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} + 4\varepsilon C_1 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-\tilde{r})^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &+ 4\varepsilon M \sup_{\frac{1}{2}t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Então, tomando o $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (5.42) e usando (5.4), obtemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|G(t)(u_0 - v_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &+ \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon C_1 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-\tilde{r})^{-1} \|(u-v)(\cdot, t\tilde{r})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} d\tilde{r} \\ &+ \limsup_{t \rightarrow \infty} 4\varepsilon M \sup_{\frac{1}{2}t < r < t} \|(u-v)(\cdot, r)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &\leq (1 + 4\varepsilon C_1 \ln(2) + 4\varepsilon M) \limsup_{t \rightarrow \infty} \|(u-v)(\cdot, t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,\infty}^s} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

de onde conclui-se a demonstração da estabilidade assintótica. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, M. F.; FERREIRA, L. C. F.; LIMA, L. S. M. *Uniform global well-posedness of the Navier-Stokes-Coriolis system in a new critical space*. Mathematische Zeitschrift, 287 (2017) 735–750.
- [2] ALMEIDA, M. F.; PRECIOSO, J. C. *Existence and symmetries of solutions in Besov Morrey spaces for a semi linear heat-wave type equation*. J. Math. Anal. Appl., 432 (1) (2015) 338–355.
- [3] BAHOURI, H.; CHEMIN, J.; DANCHIN, R. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*. Springer, 2011.
- [4] BEDROSSIAN, J.; MASMOUDI, N.; NADER, N. *Existence, uniqueness and Lipschitz dependence for Patlak-Keller-Segel and Navier-Stokes in R^2 with measure-valued initial data*. Arch. Ration. Mech. Anal., 214, No. 3, (2014) 717–801.
- [5] BERGH, J.; LÖFSTRÖM, J. *Interpolations spaces: an introduction.*, Springer-Verlag, 1976.
- [6] BERTOZZI, A. L.; BRANDMAN, J. *Finite-time blow-up of L^∞ - weak solutions of an aggregation equation*. Commun. Math. Sci., 8 (2010) 45–65.
- [7] BERTOZZI, A. L.; CARRILLO, J. A.; LAURENT, T. *Blowup in multidimensional aggregation equations with mildly singular interactions kernels*. Nonlinearity, 22 (2009) 683–710.
- [8] BERTOZZI, A. L.; LAURENT, T. *Finite-time blow-up of solutions of an aggregation equation in $\mathbb{R}^n$* . Commun. Math. Phys., 274 (2007) 717–735.
- [9] BILER, P. *The Cauchy problem and self-similar solutions for a nonlinear parabolic equation*. Stud. Math., 114 (1995) 181–205.

- [10] BILER, P.; KARCH, G. *Blowup of solutions to generalized Keller-Segel model*. J. Evol. Equ., (2010) 247–262.
- [11] BILER, P.; KARCH, G.; LAURENÇOT, P. *Blowup of solutions to a diffusive aggregation model*. Nonlinearity, 22 (2009) 1559–1568.
- [12] BILER, P.; KARCH, G.; ZIENKIEWICZ, J. *Optimal criteria for blowup of radial and N -symmetric solutions of chemotaxis systems*. Nonlinearity, 28 (2015) 4369–4387.
- [13] BLANCHET, A.; DOLBEAULT, J.; ESCOBEDO, M.; FERNÁNDEZ, J. *Asymptotic behaviour for small mass in the two-dimensional parabolic-elliptic Keller-Segel model*. J. Math. Anal. Appl., 361 (2010) 533–542.
- [14] BLANCHET, A.; DOLBEAULT, J.; PERTHAME, B. *Two dimensional Keller-Segel model: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions*. Electron. J. Diff. Eqns., 44 (2006) 1–33.
- [15] BONY, J. M. *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*. Ann. de l'Ecole Norm. Sup., 14 (2) (1981), 209–2461.
- [16] CELININSKI, R. *Stability of solutions to aggregation equation in bounded domains*. Appl. Math. Comput., 228 (2014) 49–58.
- [17] ESTRADA, R.; KANWAL, R. P. *A distributional approach to asymptotics: Theory and applications*. Hardcover, 2nd ed. 2002, ISBN 0-1876-4142-4.
- [18] FERREIRA, L. C. F. *A family of dissipative active scalar equations with singular velocity and measure initial data.*, Comput. Math. Appl., 64 No. 10, (2012) 3292–3301.
- [19] FERREIRA, L. C. F.; LIMA, L. S. M. *Self-similar solutions for active scalar equations in Fourier-Besov-Morrey spaces*. Monatsh. Math. 175 (4) (2014), 491–509.
- [20] FERREIRA, L. C. F.; PRECIOSO, J. C. *Existence and asymptotic behaviour for the parabolic-parabolic Keller-Segel system with singular data*. Nonlinearity, 24 (2011) 1433–1449.
- [21] FERREIRA, L. C. F.; VILLAMIZAR-ROA, E. J. *Self-similar solutions, uniqueness and long-time asymptotic behavior for semilinear heat equations*. Differential Integral Equations, 19 (2006) 1349–1370.

- [22] FOLLAND, G. B. *Real analysis: Modern techniques and their applications*. John Wiley Sons, 1999.
- [23] GIGA, Y.; MIYAKAWA, T. *Navier-Stokes flow in R^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces*. Comm. Partial Differential Equations 14 (5) (1989) 577–618.
- [24] HIEBER, M.; SAWADA, O. *The Navier-Stokes equations in R^n with linearly growing initial data.*, Arch. Ration. Mech. Anal., 175 (2) (2005) 269–285.
- [25] IWABUCHI, T. *Global well-posedness for Keller-Segel system in Besov type spaces*. J. Math. Anal. Appl., 379 (2011) 930–948.
- [26] KARCH, G. *Scaling in nonlinear parabolic equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 234 (1999) 534–558.
- [27] KARCH, G.; SUZUKI, K. *Blow-up versus global existence of solutions to aggregation equation*. Applicationes Mathematicae, 38 (3) (2011) 243–258.
- [28] KARCH, G.; SUZUKI, K. *Spikes and diffusion waves in one-dimensional model of chemotaxis*. Nonlinearity, 23 (2010) 3119–3137.
- [29] KATO, T. *Strong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces*. Bol. Sol. Mat., 22 (2) (1992) 127–155.
- [30] KONIECZNY, P.; YONEDA, T. *On dispersive effect of the coriolis force for the stationary Navier-Stokes equations*. J. Differential Equations, 250 (10) (2011) 3859–3873.
- [31] KOZONO, H.; SUGIYAMA, Y. *Local existence and finite time blow-up of solutions in the 2-D Keller- Segel system*. J. Evol. Equ., 8 (2008) 353–378.
- [32] KOZONO, H.; YAMAZAKI, M. *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*. Comm. Partial Differential Equations, 19 (5-6) (1994) 959–1014.
- [33] KOZONO, H.; YAMAZAKI, M. *The stability of small stationary solutions in Morrey spaces of the Navier-Stokes equation*. Indiana Univ. Math. J., 44 (4)(1995)1307–1336.
- [34] LAMARIE, P. G. *Recent developments in the Navier-Stokes equations*. Chapman and Hall, Research Notes in Maths, 2002.

- [35] LAURENT, T. *Local and Global existence for an aggregation*. Comm. in PDE, 32 (2007) 1941–1964.
- [36] LEMARIÉ-RIEUSSET, P. G. *Small data in an optimal Banach space for the parabolic-parabolic and parabolic-elliptic Keller-Segel equations in the whole space*. Adv. Diff. Eq. 18 (2013) 1189–1208.
- [37] LI, D.; RODRIGO, J. *Finite-time singularities of an aggregation equation in $\mathbb{R}^n$ with fractional dissipation*. Comm. Math. Phys., 287 (2) (2009) 687–703.
- [38] LI, D.; RODRIGO, J. *Refined blowup criteria and nonsymmetric blowup of an aggregation equation*. Advances in Mathematics, 220 (2009) 1717–1738.
- [39] LI, D.; RODRIGO, J. *Wellposedness and regularity of solutions of an aggregation equation*. Revista Matemática Iberoamericana, 26 (1) (2010) 261–294.
- [40] LI, D.; ZHANG, X. *On a nonlocal aggregation model with nonlinear diffusion*. Discrete Contin. Dyn. Syst., 27 (2010), 301–323.
- [41] LIMA, L. S. M. *Sobre uma família de EDP's do tipo escalar ativo em espaços críticos de Lebesgue e Fourier-Besov-Morrey*. PhD thesis. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2014.
- [42] MAZZUCATO, A. L. *Besov-Morrey spaces: Function space theory and applications to non-linear PDE*. Trans. Amer. Math. Soc., 355 (4) (2003), 1297–1364.
- [43] MIYAKAWA, T. *On Morrey spaces of measures: Basic properties and potential estimates*. Hiroshima Math. J., 20 No. 40 (1990) 213–222.
- [44] NAGAY, T. *Behavior of solutions to a parabolic-elliptic system modelling chemotaxis*. J. Korean Math. Soc., 37 (2000) 721–732.
- [45] TOPAZ, C. M.; BERTOZZI, A. L.; LEWIS M. A. *A nonlocal continuum model for biological aggregation*. Bull. Math. Biol., 68 (2006) 1601–1623.
- [46] TRIEBEL, H. *Theory of function spaces*. Monographs in Mathematics, 78. Birkhäuser, Basel, 1983, 3.2.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, ____/____/____

Assinatura do autor