



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

---

John Frank Matos Ascona

*Condições de Otimalidade para Problemas de  
Controle Ótimo com Condições de Contorno  
Funcionais*

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas  
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000  
São José do Rio Preto - SP - Brasil  
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

John Frank Matos Ascona

*Condições de Otimalidade para Problemas  
de Controle Ótimo com Condições de  
Contorno Funcionais*

Orientador:  
Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS  
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto  
20 de fevereiro de 2015

Matos Ascona, John Frank.

Condições de Otimalidade para Problemas de Controle Ótimo com Condições de Contorno Funcionais / John Frank Matos Ascona. - - São José do Rio Preto, 2015.

51 f.

Orientador: Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Matemática. 2. Teoria do controle. 3. Otimização matemática. 4. Espaços de funções. I. Oliveira, Valeriano Antunes de. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas III. Título.

CDU - 517.91.01

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

**John Frank Matos Ascona**

*Condições de Otimidade para Problemas de Controle Ótimo com  
Condições de Contorno Funcionais*

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área Matemática Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientador

---

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas-Medar  
Universidad del Bío-Bío - Chile

---

Profª.Dra. Heloisa Helena Marino Silva  
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 20 de fevereiro de 2015.

A minha mãe, Rosa.  
A minha irmã, Maryori.  
*Dedico.*

# *Agradecimentos*

Primeiramente à Deus, sempre, pela vida, oportunidades e logros.

Ao meu professor Valeriano Antunes de Oliveira pela orientação, dedicação e conselhos durante toda a elaboração deste trabalho e de outros que possivelmente virão.

Aos meus pais, Rosa e Guillermo, minha irmã Maryori, José, Segundo e toda minha família pelo apoio, compreensão e carinho em todos os momentos difíceis, que não foram poucos, e por me incentivarem a chegar onde estou, grande parte disso devo a vocês.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro.

Eu seria injusto em apontar somente alguns amigos, dentre tantos que me apoiam incondicionalmente. Um grande abraço a todos e o meu muito obrigado.

Quando o caminho está  
cheio de espinhos,  
Deus deu ao homem três presentes:  
sorriso, um sonho e esperança.  
Immanuel Kant

# *Resumo*

Neste trabalho consideramos o problema de controle ótimo com restrições de contorno funcionais. O propósito deste trabalho é propor condições de otimalidade para problemas com condições de contorno funcionais envolvendo funções continuamente diferenciáveis, considerando a classe dos problemas de controle ótimo *MP – pseudo – invexos*. Nossos resultados mostram que a *MP – pseudo – invexidade* é uma condição suficiente de otimalidade para tais problemas.

**Palavras-chave:** Controle Ótimo Suave, Condições de Otimalidade, MP-pseudo-invexidade.

# *Abstract*

In this work we consider the optimal control problem with functional boundary constraints. The purpose of this work is to propose optimality conditions for problems with functional boundary conditions involving continuously differentiable functions, considering the class of MP-pseudoinvex optimal control problems. Our results show that MP-pseudoinvexity is a sufficient condition of optimality for such problems.

**Keywords:** Smooth optimal control, Optimality conditions, MP-pseudoinvexity.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 10
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	p. 13
2.1	Continuidade . . . . .	p. 13
2.2	Multifunção Mensurável . . . . .	p. 13
2.3	Cones Normais . . . . .	p. 15
2.4	Cones Tangente de Clarke . . . . .	p. 16
2.5	Subdiferenciais proximal, estrita, limite. . . . .	p. 18
2.6	Derivada Direcional Generalizada e Subdiferencial de Clarke . . . . .	p. 19
2.7	Propriedades de Subdiferenciais . . . . .	p. 20
<b>3</b>	<b>Princípio do Máximo</b>	p. 22
3.1	O Princípio do Máximo . . . . .	p. 23
<b>4</b>	<b>Condições de Otimalidade</b>	p. 39
	<b>Conclusões</b>	p. 49
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 50

# Capítulo 1

## Introdução

Em diversos campos, tais como controle de epidemias [19], economia [6], ecologia [13], engenharia química [1], produção de energia elétrica [3], robótica [14], etc., surge a necessidade de resolver problemas que podem ser modelados como controle ótimo, via modelos matemáticos. Nesses modelos deseja-se minimizar (ou maximizar) uma função (às vezes linear, quadrática, convexa, etc.), denominada função objetivo, de várias variáveis escolhidas dentro de alguma região factível (região definida por condições impostas às variáveis do problema). Problemas matemáticos do tipo cuja função a ser otimizada envolve variáveis em função do tempo (variável de estado - descreve o estado do sistema em função do tempo, e variável de controle - descreve alguma “entrada” para o sistema) sujeitas a algumas restrições, são chamados problemas de controle ótimo.

Os trabalhos de Hanson e Craven foram muito importantes na teoria de otimização global e inspiraram uma grande quantidade de trabalhos subsequentes. Em meados da década de oitenta temos os trabalhos de Craven e Glover [7] e Ben-Israel e Mond [2] que são referências importantes para quem quer se iniciar no estudo do conceito de invexidade no caso de funções diferenciáveis. Um resultado importante que aparece nestes trabalhos é a seguinte caracterização de funções invexas diferenciáveis: Uma função é invexa se e somente se todo ponto estacionário é mínimo global. Em [8], Craven estendeu o conceito de invexidade para funções Lipschitz e em [17], Reiland introduz o conceito de invexidade para funções localmente Lipschitz. Em [16] Phuong, Sach e Yen, introduzem um novo conceito de invexidade para funções localmente Lipschitz definidas num espaço finito dimensional e que generaliza todos os anteriores. A seguinte definição é a extensão natural da definição de Phuong, Sach e Yen para o caso infinito dimensional:

**Definição 1.1.** *Seja  $C \subset \omega$  um conjunto não vazio. Uma função localmente Lipschitz  $g : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita invexa em  $x_1 \in C$  se, para todo  $x_2 \in C$ , existe  $\eta(x_1, x_2) \in T_C(x_1)$ , tal*

que,

$$g(x_2) - g(x_1) \geq f^\circ(x_1; \eta(x_1, x_2)).$$

Dizemos que  $g$  é *invexa* em  $C$  se  $g$  é *invexa* em todo ponto  $x \in C$ .

Phuong, Sach e Yen [16] obtiveram tal caracterização para funções localmente Lipschitz *invexas* no caso em que o espaço é finito dimensional. Este resultado é uma extensão para o caso não diferenciável da caracterização obtida em [2] para o caso diferenciável. Um outro tipo de convexidade generalizada é o conceito de função pré-*invexa* introduzido por Ben-Israel e Mond em [2].

Em [15], Martin introduziu o conceito de *KT-invexidade* e mostrou que vale a propriedade de que todo ponto estacionário (ou ponto de Kuhn-Tucker) é minimizador global se e somente se o problema é *KT-invexo*. O resultado de Martin diz que a *KT-invexidade* é também uma condição suficiente para valer esta propriedade. O resultado de Martin mostra que a maior classe de problemas onde é válida esta propriedade é a classe dos problemas *KT-invexos*.

A *invexidade*, assim como a *convexidade*, desempenha um papel importante quanto a condições suficientes de otimalidade. É bem conhecido na teoria de otimização que em problemas *convexos* vale a propriedade de que todo ponto estacionário é minimizador global. Esta propriedade também é válida para problemas *invexos*.

Em de Oliveira et al.[9], [10] foi introduzido a classe de problemas *MP – pseudo – invexos*. Foi mostrado que em um problema *MP – pseudo – invexo*, todo *MP – processo* é um processo ótimo. Ademais, foi mostrado que se tal propriedade é verdadeira, isto é, se todo *MP*-processo de um determinado problema é um processo ótimo, então tal problema é (necessariamente) um problema *MP – pseudo – invexo*. Tais resultados foram obtidos para problemas de controle com condições de contorno do tipo abstratos, i.e., do tipo  $(x(S), x(T)) \in C$ , onde  $C$  é um conjunto fechado de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Considere o seguinte problema de controle ótimo com restrições de contorno funcionais:

$$(PCF) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(x(S), x(T)) \\ \text{sobre } x \in W^{1,1}([S, T], \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis} \\ \quad u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad q.s. \\ u(t) \in U(t). \quad q.s \\ \phi_i(x(S), x(T)) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1. \\ \psi_j(x(S), x(T)) = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k_2, \end{array} \right.$$

onde  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $i = 1, 2, \dots, k_1$  e  $\psi_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $j = 1, 2, \dots, k_2$ ,  $U : [S, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  é uma multifunção. Sendo  $q.s.$  = quase sempre e os tempos  $S$  e  $T$  são fixados. A variável de estado  $x$  é uma função absolutamente contínua de  $[S, T]$  em  $\mathbb{R}^n$  e a variável de controle  $u$  é uma função mensurável de  $[S, T]$  em  $\mathbb{R}^m$ . Dizemos que  $(x, u) \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n) \times L^\infty[S, T]$  é um processo de controle factível se as restrições de (PCF) são satisfeitas. Dizemos que um processo de controle factível  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um processo de controle ótimo se  $g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \leq g(x(S), x(T))$  para todos processos factíveis  $(x, u)$ .

O principal resultado da teoria de controle ótimo é o Princípio do Máximo de Pontryagin, que é um conjunto de condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo o qual pode ser encontrado em [18],[4].

Nesta dissertação estudamos condições de otimalidade para problemas com condições de contorno funcionais, considerando a classe dos problemas de controle ótimo *MP – pseudo – invexos*. Tais condições serão obtidas sob as hipóteses de que a função objetivo e as funções que definem as condições de contorno (i.e.,  $g, \phi_1, \dots, \phi_{k_1}, \psi_1, \dots, \psi_{k_2}$ ) sejam continuamente diferenciáveis e que  $f(t, x, u)$  é continuamente diferenciável na variável  $x$ .

Assim, a dissertação está organizada em 3 capítulos. No Capítulo 2, são dados definições e teoremas que serão utilizados no texto. No Capítulo 3, estudamos alguns resultados do livro do Vinter [18], tais como O Princípio do Máximo de Pontryagin para problemas com condições de contorno funcionais, tanto para o caso não diferenciável como diferenciável, os quais são provados com mais detalhe. No Capítulo 4, definimos *MP – pseudo – invexidade* para problemas de contorno funcionais. Apresentamos condições de otimalidade para tais problemas, incluímos também um exemplo ilustrativo. Tais resultados são adaptações de teoremas do artigo de Oliveira [9], [10] porém novos, originais.

## Capítulo 2

### Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar definições e teoremas de Continuidade, Multifunções, Cones e Subdiferenciais, os quais serão utilizados ao longo deste trabalho. Para aqueles interessados em aprofundar no assunto sugerimos consultar (Vinter [18]) e (Clarke [4]).

#### 2.1 Continuidade

**Definição 2.1.** Uma função  $x(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é absolutamente contínua, se pode ser expressa sob a forma:

$$x(t) = x_0 + \int_a^t v(s) ds$$

para alguma função integrável  $v$ ; temos então  $\dot{x} := \frac{dx(t)}{dt} = v(t)$  q.s. O conjunto de todas as funções absolutamente contínuas é denotado por  $W^{1,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$ , com norma

$$\|x\|_{W^{1,1}} = \|x(a)\| + \int_a^b |x'(t)| dt.$$

**Teorema 2.1.** Suponhamos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável e que  $v \in \mathbb{R}^n$ . Então

$$f(x + tv) = f(x) + \nabla f(x + tv)^T v, \quad \text{para algum } t \in (0, 1).$$

#### 2.2 Multifunção Mensurável

**Definição 2.2.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $V : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  é uma multifunção, se para cada  $t \in \Omega$  tem-se  $V(t) \subset \mathbb{R}^m$ , ou seja,  $V(t)$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^m$ .

**Definição 2.3.** Considere uma multifunção  $V : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ .

(i) O domínio efetivo de uma multifunção  $V$  é o conjunto

$$\text{dom}(V) := \{t \in \Omega : V(t) \neq \emptyset\}.$$

(ii) O gráfico de uma multifunção  $V$ , é o subconjunto de  $\Omega \times \mathbb{R}^m$  definido por

$$\text{Gr}(V) := \{(t, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^m : y \in V(t)\}.$$

**Definição 2.4.** Uma multifunção  $V : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  é chamada multifunção convexa, se o seu gráfico é convexo.

**Definição 2.5.** Seja  $V : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  uma multifunção.  $V$  diz-se fechada em  $t \in \Omega$ , se o seu gráfico é fechado.

**Definição 2.6.** Uma multifunção  $V : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  é chamada mensurável se o conjunto

$$\{t \in \mathbb{R}^m : V(t) \cap G \neq \emptyset\}$$

é mensurável para cada subconjunto aberto  $G \subset \mathbb{R}^m$ .

**Observação 2.1.** Seja  $E$  um subconjunto de Lebesgue de  $I \subset \mathbb{R}$ . Denote  $\mathfrak{L}$  como a família dos subconjuntos Lebesgue de  $I$ . Se  $\Omega$  é o conjunto  $I$  então  $V : I \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  é mensurável. Dizemos que a multifunção  $V$  é  $\mathfrak{L}$  mensurável.

Denote por  $\mathfrak{B}^m$  os sub-conjuntos de Borel de  $\mathbb{R}^m$  e por  $\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}^m$  a  $\sigma$ -álgebra produto de  $I \times \mathbb{R}^m$  (isto é, a menor  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $I \times \mathbb{R}^m$  que contém todos os conjuntos de produtos  $A \times B$  com  $A \in \mathfrak{L}$  e  $B \in \mathfrak{B}^m$ ).

**Definição 2.7.** Seja  $V : I \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  uma multifunção. Dizemos que a função  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma seleção mensurável para  $V$  se:

- $x$  é Lebesgue mensurável,
- $x(t) \in V(t)$  q.s.

**Teorema 2.2** (Seleção Mensurável de Aumann). Seja  $V : I \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  uma multifunção não-vazia. Suponha que  $\text{Gr}(V)$  é  $\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}^m$  mensurável. Então  $V$  tem uma seleção mensurável.

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Teorema 2.3.12).

## 2.3 Cones Normais

**Definição 2.8.** Dizemos que um conjunto não vazio  $K \subset \mathbb{R}^n$  é um cone em  $\mathbb{R}^n$  se, dado  $\xi \in K$ , vale que  $\lambda\xi \in K$ , para todo  $\lambda \geq 0$ .

**Definição 2.9.** Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e  $\bar{x} \in C$ . O vetor  $\xi \in \mathbb{R}^k$  é chamado de vetor normal proximal a  $C$  em  $\bar{x}$ , se existir  $M \geq 0$  tal que

$$\xi \cdot (y - \bar{x}) \leq M\|y - \bar{x}\|^2 \quad \forall y \in C. \quad (2.1)$$

O conjunto de todos os vetores normais proximais a  $C$  em  $\bar{x}$  é chamado de cone normal proximal a  $C$  em  $\bar{x}$ , denotado por  $N_C^P(\bar{x})$ , e é representado pelo conjunto

$$N_C^P(\bar{x}) := \{\xi \in \mathbb{R}^k : \exists M > 0 \text{ tal que a condição 2.1 é satisfeita}\}.$$

**Proposição 2.1.** Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e pontos  $\bar{x} \in C$  e  $\xi \in \mathbb{R}^k$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $\xi$  pertence ao cone normal proximal a  $C$  em  $\bar{x}$ ,
- (ii) existe um ponto  $z \in \mathbb{R}^k$  e um fator escalar  $r > 0$  tal que

$$\|z - \bar{x}\| = \min\{\|z - y\| : y \in C\} \quad \text{e} \quad \xi = r(z - \bar{x}).$$

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Proposição 4.2.2).

**Definição 2.10.** Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e um ponto  $\bar{x} \in C$ . O cone normal limite a  $C$  em  $\bar{x}$  é o conjunto.

$$N_C(\bar{x}) := \{\xi \in \mathbb{R}^k : \text{existem } x_i \xrightarrow{C} \bar{x} \text{ e } \xi_i \rightarrow \xi \text{ tais que } \xi_i \in N_C^P(x_i), \forall i\}.$$

Os vetores  $\xi \in N_C(\bar{x})$  são chamados de vetores normais limites a  $C$  em  $\bar{x}$ .

**Definição 2.11.** Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e um ponto  $\bar{x} \in C$ . O cone normal estrito a  $C$  em  $\bar{x}$  é o conjunto

$$\hat{N}_C(\bar{x}) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^k : \limsup_{y \xrightarrow{C} \bar{x}} \frac{\xi \cdot (y - \bar{x})}{\|y - \bar{x}\|} \leq 0 \right\}$$

Os vetores  $\xi \in \hat{N}_C(\bar{x})$  são chamados de vetores normais estritos a  $C$  em  $\bar{x}$ .

**Observação 2.2.** A notação  $y_i \xrightarrow{C} \bar{x}$ , significa que  $y_i \rightarrow \bar{x}$  e  $y_i \in C$ .

**Proposição 2.2.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e um ponto  $\bar{x} \in C$ . Então,*

(i)  $N_C^P(\bar{x})$ ,  $N_C(\bar{x})$  e  $\hat{N}_C(\bar{x})$ , são cones em  $\mathbb{R}^k$  e

$$N_C^P(\bar{x}) \subset \hat{N}_C^P(\bar{x}) \subset N_C(\bar{x}).$$

(ii)  $N_C^P(\bar{x})$  é convexo;

(iii)  $\hat{N}_C^P(\bar{x})$  é convexo e fechado;

(vi) A multifunção que associa cada  $y \in C$  ao subconjunto  $N_C(y)$  tem gráfico fechado, isto é, para quaisquer sequências  $y_i \xrightarrow{C} \mathbf{y}$  e  $p_i \xrightarrow{C} p$  tais que  $p_i \in N_C(y_i) \forall i$ , então  $p \in N_C(\mathbf{y})$ .

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Proposição 4.2.6).

**Proposição 2.3.** *Sejam  $C_1 \in \mathbb{R}^m$  e  $C_2 \in \mathbb{R}^n$  subconjuntos fechados, e  $(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$ . Então,*

- $N_{C_1 \times C_2}^P(x_1, x_2) = N_{C_1}^P(x_1) \times N_{C_2}^P(x_2)$ ;
- $\hat{N}_{C_1 \times C_2}^P(x_1, x_2) = \hat{N}_{C_1}^P(x_1) \times \hat{N}_{C_2}^P(x_2)$ ;
- $N_{C_1 \times C_2}(x_1, x_2) = N_{C_1}(x_1) \times N_{C_2}(x_2)$ .

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Proposição 4.2.8).

## 2.4 Cones Tangente de Clarke

**Definição 2.12.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e um ponto  $\bar{x} \in C$ .*

(i) *O Cone Tangente de Bouligand a  $C$  em  $\bar{x}$ , denotado por  $T_C(\bar{x})$ , é o conjunto*

$$T_C(\bar{x}) = \limsup_{x \downarrow 0} t^{-1}(C - \bar{x}).$$

*Uma caracterização do Cone tangente de Bouligand por meio de sequências é dada por*

$$T_C(\bar{x}) = \{\xi \in \mathbb{R}^k : \exists \{c_i\} \subset C \text{ e } \exists t_i \downarrow 0 \text{ tais que } t_i^{-1}(c_i - \bar{x}) \rightarrow \xi\}.$$

(ii) O Cone Tangente de Clarke a  $C$  em  $\bar{x}$ , denotado por  $\bar{T}_C(\bar{x})$ , é o conjunto

$$\bar{T}_C(\bar{x}) = \liminf_{t \downarrow 0} t^{-1}(C - y) \quad y \xrightarrow{C} \bar{x}$$

Uma caracterização do Cone Tangente de Clarke através de seqüências é dada por

$$\bar{T}_C(\bar{x}) = \{\xi \in \mathbb{R}^k : \forall x_i \xrightarrow{C} \bar{x} \text{ e } \forall t_i \downarrow 0, \text{ existe } \{c_i\} \subset C \text{ tal que } t_i^{-1}(c_i - x_i) \rightarrow \xi\}.$$

**Proposição 2.4.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e um ponto  $\bar{x} \in C$ . Então,  $T_C(\bar{x})$  e  $\bar{T}_C(\bar{x})$  são cones fechados contendo a origem e  $\bar{T}_C(\bar{x}) \subset T_C(\bar{x})$ .*

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Proposição 4.10.2).

**Proposição 2.5.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e um ponto  $\bar{x} \in C$ . Então,  $\bar{T}_C(\bar{x})$  é um conjunto convexo.*

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Proposição 4.10.3).

Denotemos por  $S^*$  o cone polar de um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^k$ , isto é,

$$S^* := \{\xi : \xi \cdot x \leq 0 \quad \forall x \in S\}.$$

**Teorema 2.3.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e um ponto  $\bar{x} \in C$ . Então, o envol-  
tório convexo fechado do cone tangente de Bouligand  $T_C(\bar{x})$ , denotado por  $\overline{\text{co}}T_C(\bar{x})$ , e o  
cone tangente de Clarke  $\bar{T}_C(\bar{x})$  estão relacionados da seguinte forma.*

$$\liminf_{y \xrightarrow{C} \bar{x}} \overline{\text{co}}T_C(y) = \liminf_{y \xrightarrow{C} \bar{x}} T_C(y) = \bar{T}_C(\bar{x}).$$

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Teorema 4.10.5).

**Lema 2.1.** *Sejam uma multifunção  $S : \mathbb{R}^k \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ , um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^k$ , e um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$ . Se  $S(y)$  é um cone convexo fechado para cada  $y \in \mathbb{R}^n$ , então*

$$\liminf_{y \xrightarrow{C} \bar{x}} S(y) = [\limsup_{y \xrightarrow{C} \bar{x}} S(y)^*]^*.$$

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Lema 4.10.6).

**Proposição 2.6.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto fechado e um ponto  $\bar{x} \in C$ . Então,*

$$\bar{T}_C(\bar{x}) = N_C(\bar{x})^*.$$

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Teorema 4.10.7).

## 2.5 Subdiferenciais proximal, estrita, limite.

**Definição 2.13.** Considere uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

(i) O domínio efetivo da função  $f$  é o conjunto

$$\text{dom}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}.$$

(ii) O epígrafo da função  $f$  é o conjunto

$$\text{epi}(f) := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

(ii) O gráfico da função  $f$  é o conjunto

$$\text{Gr}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \text{dom}(f)\}.$$

**Definição 2.14.** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Dizemos que  $f$  é *semicontínua inferior* em  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  se, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $x \in B(\bar{x}, \delta)$  tem-se que  $f(\bar{x}) \leq f(x) + \epsilon$ . Se  $f$  é *semicontínua inferior* em todos os pontos  $y \in \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $f$  é *semicontínua inferior*.

**Definição 2.15.** Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função *semicontínua inferior* e  $\bar{x} \in \text{dom}(f)$  um ponto. Então:

(i) A *subdiferencial proximal* de  $f$  em  $\bar{x}$ , denotado por  $\partial^P f(\bar{x})$ , é o conjunto

$$\partial^P f(\bar{x}) := \{\xi : (\xi, -1) \in N_{\text{epi}(f)}^P(\bar{x}, f(\bar{x}))\}.$$

Os elementos em  $\partial^P f(\bar{x})$  são chamados de *subgradientes proximais*.

(ii) A *subdiferencial estrita* de  $f$  em  $\bar{x}$ , denotado por  $\hat{\partial} f(\bar{x})$ , é o conjunto

$$\hat{\partial} f(\bar{x}) := \{\xi : (\xi, -1) \in \hat{N}_{\text{epi}(f)}(\bar{x}, f(\bar{x}))\}.$$

Os elementos em  $\hat{\partial} f(\bar{x})$  são chamados de *subgradientes estritos*.

(iii) A *subdiferencial limite* de  $f$  em  $\bar{x}$ , denotado por  $\partial f(\bar{x})$ , é o conjunto

$$\partial f(\bar{x}) := \{\xi : (\xi, -1) \in N_{\text{epi}(f)}(\bar{x}, f(\bar{x}))\}.$$

Os elementos em  $\partial f(\bar{x})$  são chamados de *subgradientes limites*.

## 2.6 Derivada Direcional Generalizada e Subdiferencial de Clarke

**Definição 2.16.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $f$  é Lipschitz (ou lipschitziana) se, dados arbitrariamente  $x_1, x_2 \in S$ , existe  $k > 0$  tal que*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k \|x_1 - x_2\|.$$

A constante  $k$  é chamada constante Lipschitz da função  $f$ .

**Definição 2.17.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lipschitz na vizinhança de  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . A derivada direcional generalizada de Clarke de  $f$  em  $\bar{x}$  na direção  $v \in \mathbb{R}^n$ , denotada por  $f^\circ(\bar{x}, v)$  é definida por*

$$f^\circ(\bar{x}, v) = \limsup_{y \rightarrow \bar{x}, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}$$

**Proposição 2.7.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lipschitz na vizinhança de  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  com constante Lipschitz igual a  $k$ . Então, a função  $v \rightarrow f^\circ(\bar{x}, v)$  com domínio  $\mathbb{R}^n$  tem as seguintes propriedades.*

- (i)  $f^\circ(\bar{x}, v)$  é limitada;
- (ii)  $f^\circ(\bar{x}, v)$  é Lipschitz com constante Lipschitz igual a  $k$ ;
- (iii)  $f^\circ(\bar{x}, v)$  é positiva homogênea, isto é,

$$f^\circ(\bar{x}, \alpha v) = \alpha f^\circ(\bar{x}, v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 0;$$

- (iv)  $f^\circ(\bar{x}, \alpha v)$  é sublinear, isto é,

$$f^\circ(\bar{x}, u + v) \leq f^\circ(\bar{x}, u) + f^\circ(\bar{x}, v), \quad \text{para quaisquer } u, v \in \mathbb{R}^n;$$

- (v)  $f^\circ(\bar{x}, -v) = (-f)^\circ(\bar{x}, v)$ ;

- (vi)  $f^\circ(\bar{x}, u + v)$  é convexa.

**Demonstração:** consultar referência (Clarke [4], Proposição 2.1.1).

**Definição 2.18.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lipschitz na vizinhança de  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Chamamos de Subdiferencial de Clarke de  $f$  em  $\bar{x}$  e denotamos por  $\bar{\partial}f(\bar{x})$  o conjunto*

$$\bar{\partial}f(\bar{x}) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi \cdot v \leq f^\circ(\bar{x}, v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Também, os elementos de  $\bar{\partial}f(\bar{x})$  são chamados de gradientes generalizados de Clarke de  $f$  em  $\bar{x}$ .

**Proposição 2.8.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lipschitz em uma vizinhança de  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Então,*

- (i) *Se a função  $f$  é diferenciável em  $\bar{x}$ , então  $\{\nabla f(\bar{x})\} \in \bar{\partial}f(\bar{x})$ .*
- (ii) *Se a função  $f$  é continuamente diferenciável em  $\bar{x}$ , então  $\{\nabla f(\bar{x})\} = \bar{\partial}f(\bar{x})$ .*

**Demonstração:** consultar referência (Clarke [4], Proposição 3.1).

**Proposição 2.9.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função semicontínua inferior e  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  é uma função localmente Lipschitz contínua em  $\bar{x}$ , então  $\bar{\partial}f(\bar{x}) = \text{co}(\partial f(\bar{x}))$ .*

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Teorema 4.7.6).

## 2.7 Propriedades de Subdiferenciais

**Lema 2.2.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função semicontínua inferior e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  na vizinhança de  $\bar{x}$ , um subconjunto fechado  $C \in \mathbb{R}^n$ , e um ponto  $\bar{x} \in (\text{int}C) \cap (\text{dom}f)$ . Então,*

- (i)  $\partial^P(f + g + \Psi_C)(\bar{x}) = \partial^P f(\bar{x}) + \{\nabla g(\bar{x})\};$
- (ii)  $\partial(f + g + \Psi_C)(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + \{\nabla g(\bar{x})\};$

onde  $\Psi_C$  denota a função indicadora do conjunto  $C$ .

**Demonstração:** consultar referência [Vinter [18](Lema 5.1.2)]

**Teorema 2.4** (Regra da Soma). *Sejam  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  funções semicontínuas inferiores,  $i = 1, \dots, m$ , e  $\bar{x} \in \bigcap_i \text{dom}f_i$ . Defina a função  $f(\bar{x}) := f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) + \dots + f_m(\bar{x})$ . Então*

$$\partial f(\bar{x}) \subset \partial f_1(\bar{x}) + \partial f_2(\bar{x}) + \dots + \partial f_m(\bar{x}).$$

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Teorema 5.4.1).

**Proposição 2.10.** *Sejam  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação semicontínua inferior e um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Se  $G$  é localmente Lipschitz contínua na vizinhança de  $\bar{x}$ , então,*

$$N_{Gr(G)}(\bar{x}, G(\bar{x})) \subset \{(\xi, -\eta) : \xi \in \partial(\eta \cdot G)(\bar{x}), \eta \in \mathbb{R}^m\}.$$

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Proposição 5.4.2).

## Capítulo 3

### Princípio do Máximo

Neste capítulo, estudamos com detalhes o Princípio do Máximo para problemas de controle ótimo com condições de contorno funcionais envolvendo funções não-diferenciáveis e diferenciáveis. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em (Vinter [18]).

Considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(x(S), x(T)) \\ \text{sobre } x \in W^{1,1}([S, T], \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis} \\ u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad q.s. \\ u(t) \in U(t) \quad q.s. \\ (x(S), x(T)) \in C, \end{array} \right.$$

onde  $[S, T]$  é um intervalo,  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , são funções dadas,  $U : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma multifunção e  $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  é um conjunto fechado.

Uma função mensurável  $u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  que satisfaz  $u(t) \in U(t) \quad q.s.$  é chamada função de controle. O conjunto de todas as funções de controle é denotado como  $\mathfrak{U}$ . Um processo  $(x, u)$  compreende uma função de controle  $u$  junto com um arco  $x \in W^{1,1}([S, T], \mathbb{R}^n)$  que é uma solução da equação diferencial.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad q.s.$$

Uma trajetória de estado  $x$  é a primeira componente de algum processo  $(x, u)$ . Um processo  $(x, u)$  é chamado factível para  $(P1)$ , se a trajetória de estado  $x$  satisfaz a relação final

$$(x(S), x(T)) \in C.$$

**Definição 3.1.** Um processo factível  $(\bar{x}, \bar{u})$ , é um minimizador global se,

$$g(x(S), x(T)) \geq g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)),$$

para todo processo factível  $(x, u)$ .

**Definição 3.2.** Um processo factível  $(\bar{x}, \bar{u})$ , é um minimizador local em  $W^{1,1}$ , se existe um  $\delta > 0$  tal que

$$g(x(S), x(T)) \geq g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)),$$

para todo processo factível  $(x, u)$  que satisfaz

$$\|x - \bar{x}\|_{W^{1,1}} \leq \delta.$$

**Definição 3.3.** Um processo factível  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um minimizador local forte, se existe um  $\delta > 0$  tal que

$$g(x(S), x(T)) \geq g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)),$$

para todo processo factível  $(x, u)$  que satisfaz

$$\|x - \bar{x}\|_{L^\infty} \leq \delta.$$

## 3.1 O Princípio do Máximo

Vamos denotar a função hamiltoniana por  $H : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(t, x, p, u) = p \cdot f(t, x, u).$$

**Teorema 3.1** ( O Princípio do Máximo). *Seja  $(\bar{x}, \bar{u})$  um minimizador local em  $W^{1,1}$  para (P1). Suponha que, para algum  $\delta > 0$ , as seguintes hipóteses são satisfeitas:*

**(H1)** *Para  $x$  fixo,  $f(\cdot, x, \cdot)$  é  $\mathcal{L} \times \mathfrak{B}^m$  mensurável, existe uma função  $\mathcal{L} \times \mathfrak{B}$  mensurável  $k : [S, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $t \rightarrow k(t, \bar{u}(t))$  é integrável, para q.s.  $t \in [S, T]$ ,*

$$|f(t, x, u) - f(t, x', u)| \leq k(t, u)|x - x'|.$$

*para todo  $x, x' \in \bar{x}(t) + \delta B$  e  $u \in U(t)$ .*

**(H2)**  *$Gr(U)$  é um conjunto  $\mathcal{L} \times \mathfrak{B}^m$  mensurável.*

**(H3)**  *$g$  é localmente Lipschitz contínua.*

Então existem  $p \in W^{1,1}([S, T], \mathbb{R}^n)$  e  $\lambda \geq 0$  tais que:

- (i)  $(p, \lambda) \neq (0, 0)$ ;
- (ii)  $-\dot{p}(t) \in \text{co}\partial_x H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))$  q.s.;
- (iii)  $H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), p(t), u)$  q.s.;
- (iv)  $(p(S), -p(T)) \in \lambda \partial g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ .

Além disso, suponhamos que  $f(t, x, u)$  e  $U(t)$  são independentes de  $t$ . Então, além das condições acima mencionadas, existe uma constante “ $r$ ” tal que

- (v)  $H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r$  q.s.  
 $(\partial_x H$  denota a subdiferencial limite de  $H(t, \cdot, p, u)$  para  $(t, p, u)$ ).

Os elementos  $(\lambda, p)$  são chamados multiplicadores para (P1), onde  $\lambda$  é chamado multiplicador custo e  $p$  é chamado arco adjunto.

**Demonstração:** consultar referência (Vinter [18], Teorema 6.2.1)

Problemas de controle ótimo, em que as restrições finais são especificadas como restrições funcionais, são frequentemente encontrados:

$$(P2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(x(S), x(T)) \\ \text{sobre } x \in W^{1,1}([S, T], \mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis} \\ \quad u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.s.} \\ u(t) \in U(t). \quad \text{q.s.} \\ \phi_i(x(S), x(T)) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1. \\ \psi_j(x(S), x(T)) = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k_2, \end{array} \right.$$

onde  $\phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k_1$ , e  $\psi_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k_2$ ,

Permitimos os casos  $k_1 = 0$  (sem restrições de desigualdade) e  $k_2 = 0$  (sem restrições de igualdade). É claro que as condições necessárias do Teorema 3.1 permitem tais restrições, mas pode ser complicado de aplicá-las, uma vez que isto envolve a construção de um cone normal a um conjunto de restrições finais definido implicitamente como uma região

viável para uma coleção de restrições de igualdades e de desigualdades funcionais. É conveniente, então, ter em mãos condições necessárias expressas diretamente em termos das restrições funcionais por meio de multiplicadores de Lagrange adicionais. Tais condições são fornecidas pelo próximo teorema.

**Definição 3.4.** *Seja  $(\bar{x}, \bar{u})$  um processo factível de P2. Dizemos que a restrição de desigualdade é ativa no ponto  $(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$  quando  $\phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = 0$ , i.e., quando a desigualdade é satisfeita como igualdade.*

O conjunto dos índices das restrições ativas no ponto  $(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$  será denotado por

$$I(\bar{x}, \bar{u}) = \{i = 1, \dots, k_1 : \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = 0\}.$$

Não incluímos nesta definição as restrições de igualdade por que todas elas sempre são ativas em todo ponto factível.

**Teorema 3.2** (O Princípio do Máximo para problemas com condições de contorno funcionais). *Suponha que  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para (P2).*

*Suponhamos que (H1) e (H2) do Teorema 3.1 são satisfeitas e que  $g, \phi_1, \dots, \phi_{k_1}, \psi_1, \dots, \psi_{k_2}$  são localmente Lipschitz contínuas. Então existem  $p \in W^{1,1}$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, k_1$  e números  $\beta_j$  para  $j = 1, 2, \dots, k_2$  tais que:*

$$(i) \quad \lambda + \|p\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i + \sum_{j=1}^{k_2} |\beta_j| \neq 0;$$

$$(ii) \quad -\dot{p}(t) \in \text{co}\partial_x H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \quad q.s.;$$

$$(iii) \quad H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), p(t), u) \quad q.s.;$$

$$(iv) \quad (p(S), -p(T)) \in \partial(\lambda g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \psi_j(\bar{x}(S), \bar{x}(T))),$$

*e  $\alpha_i = 0$  para todo  $i \in 1, \dots, k_1$  tais que  $\phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) < 0$  (na relação precedente,  $\sum_{i=1}^k$  é interpretada como 0 se  $k = 0$ ).*

$$(v) \quad \text{Se, além disso, } f(t, x, u) \text{ e } U(t) \text{ são independentes de } t, \text{ então existe uma constante } r \text{ tais que: } H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r \quad q.s.$$

**Demonstração:** Suponhamos, momentaneamente, que todas as restrições são ativas em  $(\bar{x}, \bar{u})$ , i.e.:

$$\phi_i(x(S), x(T)) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1,$$

$\psi_j(x(S), x(T)) = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, k_2$ , e que  $k_1 \geq 1$  e  $k_2 \geq 1$ .

Defina  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$  por

$$G(x_0, x_1) := (g(x_0, x_1) - g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \phi_1(x_0, x_1), \phi_2(x_0, x_1), \dots, \phi_{k_1}(x_0, x_1), \psi_1(x_0, x_1), \psi_2(x_0, x_1), \dots, \psi_{k_2}(x_0, x_1)).$$

Seja o problema de controle ótimo ( $P3$ ), com vetor de estado  $(x, y = (y_0, y_1, \dots, y_{k_1+k_2}))$  :

$$(P3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } y_0(T) \\ \text{sobre } x \in W^{1,1}, (y_0, y_1, \dots, y_{k_1+k_2}) \in W^{1,1} \text{ e funções mensuráveis} \\ u \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad q.s. \quad \dot{y}_0 = 0, \dots, \dot{y}_{k_1+k_2} = 0. \quad q.s., \\ u(t) \in U(t) \quad q.s., \\ (x(S), x(T), y(S)) \in Gr(G), \\ y_i(T) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1, \\ y_j(T) = 0 \quad \text{para } j = k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_1 + k_2. \end{array} \right.$$

Observe que  $(\bar{x}, \bar{y} \equiv 0, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para ( $P3$ ).

De fato:

**Passo 1:** Mostremos que  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$  é um processo factível de ( $P3$ ) (i.e., satisfaz as condições de ( $P3$ )). Por hipótese sabemos que  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para ( $P2$ ), então vale o seguinte:

$$\dot{\bar{x}} = f(t, x(t), u(t)) \quad q.s., \quad (3.1)$$

$$\bar{u}(t) \in U(t) \quad q.s., \quad (3.2)$$

$$\phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1, \quad (3.3)$$

$$\psi_j(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k_2. \quad (3.4)$$

Além disso sabemos que:

$$\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{k_1+k_2}) = 0, \quad \text{de modo que } \dot{\bar{y}}_0 = 0, \dots, \dot{\bar{y}}_{k_1+k_2} = 0 \quad q.s. \quad (3.5)$$

Agora mostraremos que

$$(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S)) \in Gr(G),$$

onde

$$Gr(G) = \{(x_0, x_1, G(x_0, x_1)) : (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}.$$

Temos que  $G(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = (g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) - g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \phi_1(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \dots,$

$\phi_{k_1}(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \psi_1(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \dots, \psi_{k_2}(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ , de modo que  $G(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = (0, \dots, 0)$  e como  $\bar{y}(S) = (\bar{y}_0(S), \bar{y}_1(S), \dots, \bar{y}_{k_1+k_2}(S)) = (0, \dots, 0)$ , tem-se que  $\bar{y}(S) = G(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$  e, conclui-se que

$$(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S)) \in Gr(G). \quad (3.6)$$

Como

$$\bar{y}(T) = (\bar{y}_0(T), \bar{y}_1(T), \dots, \bar{y}_{k_1+k_2}(T)) = (0, 0, \dots, 0),$$

se cumpre que:

$$\begin{aligned} \bar{y}_i(T) &\leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1, \\ \bar{y}_j(T) &= 0 \quad \text{para } j = k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_1 + k_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De (3.1) a (3.7) tem-se que  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$  é um processo factível para (P3).

**Passo 2:** Mostraremos que  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para (P3).

Seja  $(x, y, u)$  um processo factível arbitrário para (P3). Então as condições de (P3) se verificam:

- (i)  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad q.s. \quad \dot{y}_0 = 0, \dots, \dot{y}_{k_1+k_2} = 0. \quad q.s.,$
- (ii)  $u(t) \in U(t) \quad q.s.;$
- (iii)  $(x(S), x(T), y(S)) \in Gr G;$
- (iv)  $y_i(T) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1, \quad y_j(T) = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k_2.$

Então  $y(S) = G(x(S), x(T))$ , de onde

$$\begin{aligned} (y_0(S), y_1(S), \dots, y_{k_1+k_2}(S)) &= (g(x(S), x(T)) - g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \phi_1(x(S), x(T)), \dots, \\ &\quad \phi_{k_1}(x(S), x(T)), \psi_1(x(S), x(T)), \dots, \psi_{k_2}(x(S), x(T))) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Temos que  $\dot{y}_0 = 0, \dots, \dot{y}_{k_1+k_2} = 0$ , então  $y_i$  são constantes para  $i = 1, 2, \dots, k_1 + k_2$ , isto é,

$$y_i(S) = y_i(T),$$

e como

$$\begin{aligned} y_i(T) &\leq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1, \\ y_i(T) &= 0, \quad \text{para } i = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

então de (3.8) e (3.9) tem-se que:

$$\phi_i(x(S), x(T)) \leq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1, \quad (3.10)$$

$$\psi_i(x(S), x(T)) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_2, \quad (3.11)$$

Logo, de **(i)**, **(ii)**, (3.10) e (3.11) tem-se que  $(x, u)$  é um processo factível para  $(P2)$ . Além disso, da otimalidade de  $(\bar{x}, \bar{u})$  para  $(P2)$  e de (3.8), tem-se que  $g(x(S), x(T)) \geq g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \iff y_0(S) = y_0(T) \geq 0$  sempre que  $\|x - \bar{x}\|_{W^{1,1}} \leq \delta'$ . Seja  $(x, y, u)$  um processo admissível de  $(P3)$  tal que  $\|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| \leq \delta'$ . Então,

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| &= \|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\| \leq \delta' \\ &\Rightarrow \|x - \bar{x}\| \leq \delta'. \end{aligned}$$

Conclui-se que  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$  é minimizador local de  $(P3)$  em  $W^{1,1}$ .

Portanto temos que  $(\bar{x}, \bar{y} \equiv 0, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para  $(P3)$ . Como as hipóteses  $(H1)$  e  $(H2)$  do Teorema 3.1 são satisfeitas e  $g, \phi_1, \dots, \phi_{k_1}, \psi_1, \dots, \psi_{k_2}$  são Lipchitz contínuas, existem  $\tilde{p} \in W^{1,1}$  e  $\lambda \geq 0$  tais que as condições **(i)**-**(v)** do Teorema 3.1 são válidas.

Primeiro mostraremos a condição **(ii)** do Teorema 3.1.

$$\text{(ii)} \quad -(\dot{p}, \dot{q}) \in \text{co}\partial_{(x,y)} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)).$$

Sabemos que :

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) &= (p, q) \cdot \tilde{f}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t)) \\ &= (p, q) \cdot (\dot{\bar{x}}(t), \dot{\bar{y}}(t)) \\ &= p\dot{\bar{x}}(t) + q\dot{\bar{y}}(t). \end{aligned}$$

Temos que  $\dot{\bar{y}}(t) = (0, \dots, 0)$  pois  $\bar{y} \equiv 0$ , e  $H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = p\dot{\bar{x}}(t)$ .

Assim

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{x}(t)) = H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))$$

, logo,

$$\begin{aligned} (-\dot{p}(t), -\dot{q}(t)) &\in \text{co}\partial_{(x,y)} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) \\ &\subset \text{co}[\partial_x \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) \\ &\quad \times \partial_y \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t))]. \end{aligned}$$

Como

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) = H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)),$$

segue que

$$\partial_y \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) = 0,$$

pois  $\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t))$  não depende de  $y$ .

Portanto :

$$(-\dot{p}(t), -\dot{q}(t)) \in \text{co}[\partial_x H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \times \{0\}]$$

$$\Rightarrow -\dot{p}(t) \in \text{co}(\partial_x H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)))$$

$$\text{e } -\dot{q}(t) = 0,$$

de modo que  $q(t)$  é constante.

(iii)

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), u) \quad (3.12)$$

Em (ii) vimos que:

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) = H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)). \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.12) tem-se que

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), p(t), u).$$

(iv)

$$(p(S), -p(T), q(S), -q(T)) \in \lambda \partial \tilde{g}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S), \bar{y}(T)) + N_{\tilde{C}}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S), \bar{y}(T)),$$

onde

$$\tilde{C} = GrG \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^{k_1} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}.$$

Aplicando a Propriedade 2.3

$$\begin{aligned} N_{\tilde{C}}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S), \bar{y}(T)) &= N_{GrG}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S)) \times N_{\mathbb{R}} \bar{y}_0(T) \\ &\quad \times N_{\mathbb{R}_-^{k_1}}(\bar{y}_1(T), \dots, \bar{y}_{k_1}(T)) \times N_{\{0\}}(\bar{y}_{k_1+1}(T), \dots, \bar{y}_{k_1+k_2}(T)). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_{\tilde{C}}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S), \bar{y}(T)) = N_{GrG}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S)) \times \{0\} \times \mathbb{R}_+^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}.$$

Sabemos que

$$\tilde{g}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S), \bar{y}(T)) = y_0(T),$$

então

$$\lambda \partial \tilde{g}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S), \bar{y}(T)) = \lambda \{(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{1+k_1+k_2} \times \mathbb{R}^{1+k_1+k_2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (p(S), -p(T), q(S), -q(T)) &\in \{(0, 0, 0, \lambda, 0, \dots, 0)\} + N_{GrG}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S)) \times \{0\} \\ &\quad \times \mathbb{R}_+^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (p(S), -p(T), q(S), -q(T)) \in N_{GrG}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S)) \times \{\lambda\} \times \mathbb{R}_+^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}.$$

Conclui-se que

$$(p(S), -p(T), q(S)) \in N_{GrG}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S)),$$

e

$$-q(T) \in \{\lambda\} \times \mathbb{R}_+^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}.$$

Então

$$-q(T) = -(q_0(T), q_1(T), \dots, q_{k_1}(T), q_{k_1+1}(T), \dots, q_{k_1+k_2}(T)) \in \{\lambda\} \times \mathbb{R}_+^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2},$$

de onde:

$$\begin{aligned} -q_0(T) &= \lambda, \\ -q_i(T) &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k_1, \\ -q_i(T) &\in \mathbb{R} \quad \forall i = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2. \end{aligned}$$

Denotemos

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -q_0(T), \\ \alpha_i &= -q_i(T) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k_1, \\ \beta_j &= -q_{k_1+j}(T) \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \dots, k_2. \end{aligned}$$

Da condição **(ii)** temos que  $q$  é constante, logo

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -q_0(T) = -q_0(S), \\ \alpha_i &= -q_i(T) = -q_i(S) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k_1, \\ \beta_j &= -q_{k_1+j}(T) = -q_{k_1+j}(S) \quad \forall j = 1, \dots, k_2. \end{aligned}$$

Portanto

$$(p(S), -p(T), -\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{k_1}, \beta_1, \dots, -\beta_{k_2}) \in N_{GrG}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{y}(S)).$$

Como  $\bar{y} \equiv 0$  então  $\bar{y}(S) = 0$ , conclui-se que:

$$(p(S), -p(T), -\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{k_1}, -\beta_1, \dots, -\beta_{k_2}) \in N_{GrG}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), 0, \dots, 0),$$

com  $\alpha_0 = \lambda$ ,  $\alpha_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, k_1$ ;  $\beta_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, k_2$ . Aplicando a Propriedade (2.10) temos que

$$(p(S), -p(T)) \in \partial((\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}, \beta_1, \dots, \beta_{k_2}) \cdot G)(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$$

Como

$$G(x_0, x_1) = (g(x_0, x_1) - g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \phi_1(x_0, x_1), \dots, \phi_{k_1}(x_0, x_1), \psi_1(x_0, x_1), \dots, \psi_{k_2}(x_0, x_1)),$$

$$(p(S), -p(T)) \in \partial[\lambda(g(x_0, x_1) - g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))) + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \phi_i(x_0, x_1) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \psi_i(x_0, x_1)](\bar{x}(S), \bar{x}(T)).$$

Portanto

$$(p(S), -p(T)) \in \partial(\lambda g + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \phi_i + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \psi_i)(\bar{x}(S), \bar{x}(T)).$$

(v)

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) = r. \quad (3.14)$$

De (ii) se sabe que:

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) = H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)).$$

De (3.14) tem-se então que

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r.$$

Agora mostraremos a condição primeira do Teorema:

(i)  $(\tilde{p}, \lambda) \neq 0$ , onde:  $\tilde{p} = (p, q = -(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}, \beta_1, \dots, \beta_{k_2}))$ . Daí  $\|\tilde{p}\|_{L^\infty} + \lambda \neq 0$ , isto é,

$$\begin{aligned} & \| (p, -\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{k_1}, -\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_{k_2}) \|_{L^\infty} + \lambda \neq 0 \\ & \Rightarrow \| p \|_{L^\infty} + \| (\alpha_0, \dots, \beta_{k_2}) \|_{L^\infty} + \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Como  $(\alpha_0, \dots, \beta_{k_2})$  são constantes, a norma  $L^\infty$  coincide com a norma da soma, logo,

$$|\alpha_0| + \| p \|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k_1} |\alpha_i| + \sum_{i=1}^{k_2} |\beta_i| + \lambda \neq 0. \quad (3.15)$$

Lembrado da condição (ii) que  $\alpha_0 = \lambda \geq 0, \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k_1, \beta_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, k_2$ , então em (3.15) tem-se

$$\begin{aligned} & \lambda + \lambda + \| p \|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k_2} |\beta_i| \neq 0 \\ & \Rightarrow 2\lambda + \| p \|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k_2} |\beta_i| \neq 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Supondo agora que

$$\lambda + \|p\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k_2} |\beta_i| = 0, \quad (3.17)$$

de (3.17) em (3.16) conclui-se que  $\lambda \neq 0$ , mas de 3.17 tem-se que  $\lambda = 0$  (absurdo).

Portanto,

$$\lambda + \|p\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k_2} |\beta_i| \neq 0.$$

Agora mostremos que de fato não há perda da generalidade, em nossa hipótese inicial de que  $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$  e que todas as restrições de contorno funcionais são ativas.

Consideremos o seguinte problema de controle

$$(P4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \bar{g}(x(S), x(T), z_0(S), z_0(T), z_1(S), z_1(T)) \\ \text{sobre } x \in W^{1,1}([S, T], \mathbb{R}^n) \text{ e } z_0, z_1 \in W^{1,1}([S, T], \mathbb{R}) \\ \text{e funções mensuráveis } u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ satisfazendo} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \dot{z}_0(t) = 0, \dot{z}_1(t) = 0 \\ u(t) \in U(t) \\ \bar{\phi}_i(x(S), x(T), z_0(S), z_0(T), z_1(S), z_1(T)) = 0, \quad i \in 0 \cup I(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{\psi}_i(x(S), x(T), z_0(S), z_0(T), z_1(S), z_1(T)) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k_2 \end{array} \right.$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_0(x(S), x(T), z_0(S), z_0(T), z_1(S), z_1(T)) &= z_0(T) \\ \bar{\phi}_i(x(S), x(T), z_0(S), z_0(T), z_1(S), z_1(T)) &= \phi_i(x(S), x(T)), i \in I(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{\psi}_0(x(S), x(T), z_0(S), z_0(T), z_1(S), z_1(T)) &= z_1(T) \\ \bar{\psi}_i(x(S), x(T), z_0(S), z_0(T), z_1(S), z_1(T)) &= \psi_i(x(S), x(T)) \\ \bar{g}(x(S), x(T), z_0(S), z_0(T), z_1(S), z_1(T)) &= g(x(S), x(T)). \end{aligned}$$

Observe que todas as restrições são ativas.

De fato. Considerando  $\bar{z}_0 \equiv 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) &= \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{\phi}_0(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) &= \bar{z}_0(T) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_2. \end{aligned}$$

Conclui-se que todas as restrições são ativas, além disso existem pelo menos uma restrição de desigualdade e uma restrição de igualdade

Agora, mostraremos que  $(\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para (P4).

**Passo 1:** Mostraremos que  $(\bar{x}, \bar{z}_0 \equiv 0, \bar{z}_1 \equiv 0, \bar{u})$  é um processo factível de (P4), i.e.,

$$(i) \quad \dot{\bar{x}}(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)), \quad \dot{\bar{z}}_0(t) = 0, \dot{\bar{z}}_1(t) = 0$$

$$(ii) \quad \bar{u}(t) \in U(t)$$

$$(iii) \quad \bar{\phi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) = 0, \quad i \in I(\bar{x}, \bar{u})$$

$$(iv) \quad \bar{\psi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k_2$$

$$(v) \quad \bar{z}_0(T) \leq 0, \quad \bar{z}_1(T) = 0.$$

De fato:

Por hipótese, tem-se que  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para (P2), então:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) \tag{3.18}$$

$$\dot{\bar{u}}(t) \in U(t) \tag{3.19}$$

$$\phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k_1 \tag{3.20}$$

$$\psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k_2 \tag{3.21}$$

Além disso temos, para todo  $t \in [S, T]$ , que:

$$\bar{z}_0(t) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{z}_1(t) = 0 \implies \dot{\bar{z}}_0(t) = 0, \dot{\bar{z}}_1(t) = 0. \tag{3.22}$$

Obviamente as condições de (P4) são satisfeitas, pois:

- Por (3.18) e (3.22) se cumpre (i);
- Por (3.19) se cumpre (ii);
- Por (3.20) e (3.21) e como

$$\bar{\phi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) = \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = 0, \quad i \in I(\bar{x}, \bar{u}),$$

e

$$\bar{\psi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) = \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \quad i = 1, 2, \dots, k_2,$$

(iii) e (iv) são verificadas;

- Como  $\bar{z}_0 \equiv 0$  e  $\bar{z}_1 \equiv 0$ , é claro que se cumpre (v).

Portanto  $(\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{u})$  é um processo factível.

**Passo 2:**  $(\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para (P4).

De fato, seja  $(x, z_0, z_1, u)$  um processo factível qualquer de (P4) em uma vizinhança de  $(\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{u})$ .

a) Verificamos primeiro que  $(x, u)$  é um processo factível para  $(P2)$ , isto é:

- (i)  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad q.s.$
- (ii)  $u(t) \in U(t) \quad q.s.$
- (iii)  $\phi_i(x(S), x(T)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k_1,$
- (iv)  $\psi_i(x(S), x(T)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k_2.$

De fato, como  $(x, z_0, z_1, u)$  é um processo factível para  $(P4)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \quad q.s. \\ u(t) &\in U(t) \quad q.s. \\ \phi_i(x(S), x(T)) &\leq 0, \quad i \in I(\bar{x}, \bar{u}) \\ \psi_i(x(S), x(T)) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, k_2. \end{aligned}$$

Falta verificar que  $\phi_i(x(S), x(T)) \leq 0$  para  $i \notin I(\bar{x}, \bar{u})$ . Sabemos que, neste caso,

$$\phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) < 0,$$

de modo que, pela continuidade de  $\phi_i$ ,  $\phi_i(x(S), x(T)) < 0$  quando  $\| (x(S), x(T)) - (\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \| < \bar{\delta}$  para algum  $\bar{\delta} > 0$ , o que de fato ocorre, uma vez que tomamos  $(x, z_0, z_1, u)$  na vizinhança de  $(\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{u})$ .

Portanto  $(x, u)$  é um processo factível para  $(P2)$ .

b) Por hipótese,  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um minimizador para  $(P2)$ , então se cumpre que  $\exists \delta' > 0$  tal que  $g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \leq g(x(S), x(T))$ , para todo processo factível  $(x, u)$  que satisfaz  $\| x - \bar{x} \|_{W^{1,1}} \leq \delta'$ .

c) Mostraremos que  $(\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para  $(P4)$ , i.e.,  $\exists \delta > 0$  tal que :

$$\bar{g}(\bar{x}(S), x(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) \leq \bar{g}(x(S), x(T), z_0(S), z_0(T), z_1(S), z_1(T))$$

para todo processo factível  $(x, z_0, z_1, x)$  tal que

$$\| (x, z_0, z_1) - (\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1) \|_{W^{1,1}} < \delta.$$

De fato, tomemos a vizinhança de  $(\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{u})$  mencionada acima com raio  $\delta'$ . Temos que

$$\begin{aligned} \| (x, z_0, z_1) - (\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1) \|_{W^{1,1}} &= \| x - \bar{x} \|_{W^{1,1}} + \| z_0 - \bar{z}_0 \|_{W^{1,1}} + \| z_1 - \bar{z}_1 \|_{W^{1,1}} \\ &\leq \delta' \\ &\Rightarrow \| x - \bar{x} \| \leq \delta' \end{aligned}$$

Conclui-se que  $(\bar{x}, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para (P4).

Conforme vimos na primeira parte desta demonstração, segue que existem  $(p, q_0, q_1) \in W^{1,1}$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  para  $i \in \{0\} \cup I(\bar{x}, \bar{u})$ , e  $\beta_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, k_2$  tais que as condições **(i)**-**(v)** do teorema são válidas. Temos que

**(ii)**

$$(-\dot{p}(t), -\dot{q}_0(t), -\dot{q}_1(t)) \in \text{cod}_{x, z_0, z_1} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t)) \quad \text{q.s.}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t)) &= (p(t), q_0(t), q_1(t)) \cdot (\dot{\bar{x}}(t), \dot{\bar{z}}_0(t), \dot{\bar{z}}_1(t)) \\ &= p(t) \cdot \dot{\bar{x}}(t) + q_0 \cdot \dot{\bar{z}}_0(t) + q_1 \cdot \dot{\bar{z}}_1(t) \\ &= H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (-\dot{p}(t), -\dot{q}_0(t), -\dot{q}_1(t)) &\in \text{cod}_{(x, y, z_0, z_1)} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t)) \\ &\subset \text{co}[\partial_x \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t)) \\ &\quad \times \partial_{z_0} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t)) \\ &\quad \times \partial_{z_1} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t))] \quad \text{q.s.} \end{aligned}$$

Como:  $\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t)) = H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))$

e como  $\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t))$  não depende de  $z_0$  e  $z_1$  então tem-se que:

$$(-\dot{p}(t), -\dot{q}_0(t), -\dot{q}_1(t)) \in \text{cod}_x H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \times \{0\} \times \{0\} \quad \text{q.s.},$$

de onde obtemos:

$$\begin{aligned} -\dot{p}(t) &\in \text{cod}_x H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \quad \text{q.s.}, \\ -\dot{q}_0(t) &\in \{0\} \quad \text{q.s.}, \\ -\dot{q}_1(t) &\in \{0\} \quad \text{q.s.} \end{aligned}$$

Portanto  $q_0(t)$  e  $q_1(t)$  são constantes.

**(iii)**

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}) \quad (3.23)$$

Em (ii) vimos que:

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)) = H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)). \quad (3.24)$$

Substituindo (3.23) em (3.24) tem-se que

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), p(t), u).$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad & (p(S), -p(T), q_0(S), -q_0(T), q_1(S), -q_1(T)) \\ & \in \partial[\lambda \bar{g}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) \\ & + \sum_{i \in I(\bar{x}, \bar{u})} \alpha_i \bar{\phi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) \\ & + \sum_{i=0}^{k_2} \beta_i \bar{\psi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T))]. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_0(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) &= 0 = \bar{z}_0(T) \\ \bar{\phi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) &= \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), i \in I(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{\psi}_0(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) &= \bar{z}_1(T) \\ \bar{\psi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) &= \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \\ \bar{g}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) &= g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)). \end{aligned}$$

aplicando o subdiferencial em cada coordenada tem-se:

$$\begin{aligned} (p(S), -p(T), q_0(S), -q_0(T), q_1(S), -q_1(T)) \in & \partial[\lambda \bar{g}(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) \\ & + \alpha_0 \bar{\phi}_0(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) \\ & + \sum_{i \in I(\bar{x}, \bar{u})} \alpha_i \bar{\phi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) \\ & + \beta_0 \bar{\psi}_0(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T)) \\ & + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \bar{\psi}_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T), \bar{z}_0(S), \bar{z}_0(T), \bar{z}_1(S), \bar{z}_1(T))]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (p(S), -p(T), q_0(S), -q_0(T), q_1(S), -q_1(T)) \in & [\partial \lambda g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \\ & \{0\}] + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \psi_j(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) (\{0\} \times \{0\} \times \\ & \{0\} \times \{0\}). \end{aligned}$$

Portanto:

$$(p(S), -p(T)) \in \partial(\lambda g + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \phi_i + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \psi_j)(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$$

e

$$q_0(S) \in \{0\} \implies q_0(S) = 0,$$

$$q_1(S) \in \{0\} \implies q_1(S) = 0.$$

Logo, como  $q_0$  e  $q_1$  são constantes tem-se que  $q_0 \equiv 0$  e  $q_1 \equiv 0$ .

(v)

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t)) = r \quad (3.25)$$

de (ii) segue que

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{z}_0(t), \bar{z}_1(t), p(t), q_0(t), q_1(t), \bar{u}(t)) = H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))$$

de (3.25) tem-se então que

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r$$

Agora mostraremos a primeira condição do Teorema:

(i)  $(p, q_0, q_1, \lambda) \neq 0$ . Daí  $\|(p, q_0, q_1)\|_{L^\infty} + \lambda \neq 0$ ,

$$\implies \|p\|_{L^\infty} + \|(q_0, q_1)\|_{L^\infty} \neq 0.$$

Como  $q_0, q_1$  são constantes, a norma  $L^\infty$  coincide com a norma da soma, logo,  $|q_0| + |q_1| + \|p\|_{L^\infty} + \lambda \neq 0$ . Lembrando da condição (iv) que  $q_0 \equiv q_1 \equiv 0$ .

Portanto

$$\|p\|_{L^\infty} + \lambda \neq 0$$

**Corolário 3.1.** *Suponha que  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um minimizador local em  $W^{1,1}$  para (P2).*

*Suponhamos que (H1) e (H2) do Teorema 3.1 são satisfeitas, que  $g, \phi_1, \dots, \phi_{k_1}, \psi_1, \dots, \psi_{k_2}$  são continuamente diferenciáveis e que  $f(t, x, u)$  é continuamente diferenciável na variável  $x$ . Então existem  $p \in W^{1,1}$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, k_1$  e números  $\beta_j$  para*

$j = 1, 2, \dots, k_2$  tais que:

$$-\dot{p}(t) = H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \quad q.s., \quad (3.26)$$

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), p(t), u) \quad q.s., \quad (3.27)$$

$$(p(S), -p(T)) = \lambda \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \quad (3.28)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)),$$

$$\lambda + \|p\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k_2} |\beta_i| \neq 0. \quad (3.29)$$

Quando existem  $\lambda$  e  $p$  satisfazendo (3.23) – (3.26) dizemos que  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um *MP-processo* de (PCF). Se  $\lambda = 1$ , dizemos que  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um *MP-processo normal* e (PCF) diz-se ser *normal* em  $(\bar{x}, \bar{u})$ . Dizemos que (PCF) é *normal*, se é *normal* em qualquer *MP-processo*  $(\bar{x}, \bar{u})$ , caso contrário é *anormal*. 988

## Capítulo 4

### Condições de Otimalidade

Neste capítulo daremos algumas definições de *MP – pseudo – invexidade* para problemas de controle ótimo com condições de contorno funcionais, que serão de fundamental importância para obter condições de otimalidade para tais problemas. Incluímos também um exemplo ilustrativo.

**Definição 4.1.** Dizemos que (PCF) é *MP – pseudo – invexo* se dado um par de processos factíveis  $(x, u), (\bar{x}, \bar{u})$  com  $g(x(S), x(T)) < g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ , existem funções  $\eta : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\xi : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfazendo, para todo  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) < 0, \quad (4.1)$$

$$\dot{\eta}(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) \quad q.s., \quad (4.2)$$

$$\bar{u}(t) + \alpha\xi(t) \in U(t) \quad q.s., \quad (4.3)$$

$$(\eta(S), \eta(T)) \in Q(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \quad (4.4)$$

onde:

$$\Delta_\alpha f(t, x, u)(\xi) := \frac{f(t, x, u + \alpha\xi) - f(t, x, u)}{\alpha},$$

$$Q(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = \{v : \nabla\phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot v \leq 0 \quad i \in I(\bar{x}), \nabla\psi_j(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot v = 0 \quad j \in J\}.$$

$$I(\bar{x}) := \{i \in I : \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) = 0\}, \quad I := \{1, \dots, k_1\}, \quad J := \{1, \dots, k_2\}.$$

**Teorema 4.1.** Se (PCF) é *MP – pseudo – invexo*, então cada *MP – processo normal* é um processo ótimo.

**Demonstração:** De fato:

Seja  $(\bar{x}, \bar{u})$  um *MP – processo normal*. Por (3.23) e (3.25) tem-se que

$$\begin{aligned} & -(p(S), -p(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) - \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt - \int_S^T H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \cdot \eta(t) dt \\ & + [\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T))] \cdot (\eta(S), \eta(T)) = 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} & (p(S), -p(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt + \int_S^T H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \cdot \eta(t) dt \\ & - [\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T))] \cdot (\eta(S), \eta(T)) \\ & = [\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))] \cdot (\eta(S), \eta(T)). \end{aligned}$$

Suponhamos que existe um processo factível  $(x, u)$  de (*PCF*) tal que  $g(x(S), x(T)) < g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ . Por (4.1) e da igualdade acima tem-se que

$$\begin{aligned} & (p(S), -p(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt + \int_S^T H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \cdot \eta(t) dt \\ & - [\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T))] \cdot (\eta(S), \eta(T)) < 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por outro lado

$$(p(S), -p(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt = -[p(T) \cdot \eta(T) - p(S) \cdot \eta(S) - \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt].$$

Utilizando integração por partes tem-se que

$$(p(S), -p(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt = - \int_S^T p(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt. \quad (4.6)$$

Logo, por (4.2) tem-se que

$$-p(t) \cdot \dot{\eta}(t) = -H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \cdot \eta(t) + (1/\alpha) [H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) - H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi(t))]. \quad (4.7)$$

Assim, temos por (4.6) – (4.7) que

$$\begin{aligned}
& (p(S), -p(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt + \int_S^T H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \cdot \eta(t) dt \\
& - \left[ \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \right] \cdot (\eta(S), \eta(T)) \\
& = \int_S^T (1/\alpha) [H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) - H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi(t))] \\
& - \left[ \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \right] \cdot (\eta(S), \eta(T)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \int_S^T (1/\alpha) [H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) - H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t) + \alpha \xi(t))] \\
& - \left[ \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \right] \cdot (\eta(S), \eta(T)) \geq 0,
\end{aligned}$$

contradizendo (4.5). Portanto  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um processo ótimo.

**Definição 4.2.** *Sejam  $(\bar{x}, \bar{u})$  um processo factível de (PCF) e  $\alpha \in (0, 1)$  um escalar. Definimos o conjunto das “direções  $\alpha$ -factíveis” como sendo o conjunto de todos os pares  $(\eta, \xi) : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tais que*

$$\dot{\eta}(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) \quad q.s., \quad (4.8)$$

$$(\eta(S), \eta(T)) \in Q(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \quad (4.9)$$

$$\bar{u}(t) + \alpha \xi(t) \in U(t) \quad q.s. \quad (4.10)$$

Denotamos por  $\mathfrak{F}_\alpha(\bar{x}, \bar{u})$  o conjunto de todas as “direções  $\alpha$ -factíveis”.

Agora podemos definir a *MP – pseudo – invexidade* em termos de direções  $\alpha$ -factíveis.

**Definição 4.3.** *Dizemos que (PCF) é MP – pseudo – invexo se dado um par de processos factíveis  $(x, u)$ ,  $(\bar{x}, \bar{u})$  com  $g(x(S), x(T)) < g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ , existem  $(\eta, \xi) \in \mathfrak{F}_\alpha(\bar{x}, \bar{u})$  satisfazendo:*

$$\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) < 0, \quad (4.11)$$

para todo  $\alpha \in (0, 1)$

**Lema 4.1.** *Sejam  $(\bar{x}, \bar{u})$  um processo factível de (PCF) e um escalar  $\alpha \in (0, 1)$ . Se para todo par  $(\eta, \xi) \in \mathfrak{F}_\alpha(\bar{x}, \bar{u})$  tem-se que  $\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) \geq 0$  então  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um*

$MP$  – processo de (PCF).

**Demonstração:** Consideremos o problema auxiliar abaixo.

$$(PA) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \varphi(\eta(S), \eta(T)) = \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) \\ \text{s.a.} \\ \dot{\eta}(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot \xi(t) \quad \text{q.s } t \in [S, T], \\ \xi(t) \in V(t) \quad \text{q.s } t \in [S, T], \\ \tilde{\phi}_i(\eta(S), \eta(T)) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k_1, \\ \tilde{\psi}_j(\eta(S), \eta(T)) = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k_2, \end{array} \right.$$

considerando:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i(\eta(S), \eta(T)) &= \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)), \\ \tilde{\psi}_j(\eta(S), \eta(T)) &= \nabla \psi_j(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)), \\ V(t) &:= \{\xi : \bar{u}(t) + \alpha\xi \in U(t)\}. \end{aligned}$$

É fácil ver que  $(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = (0, 0)$  é um processo factível de (PA) com  $\varphi(\bar{\eta}(S), \bar{\eta}(T)) = 0$ .

Suponha que exista um processo factível  $(\eta, \xi)$  de (PA) tal que  $\varphi(\eta(S), \eta(T)) < \varphi(\bar{\eta}(S), \bar{\eta}(T))$ .

Observe que  $(\eta, \xi)$  é uma direção  $\alpha$ -factível. Neste caso  $\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) < 0$ , o que contradiz a hipótese, pois  $\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) \geq 0$ . Assim  $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$  é um processo ótimo de (PA). Logo, pelo Corolário 3.1, existem  $(\lambda, p) \in \{0, 1\} \times W^{1,1}([S, T] \times \mathbb{R}^n)$  e  $\alpha_i \geq 0, \beta_j \in \mathbb{R}, i \in I = \{1, \dots, k_1\}, j \in J = \{1, \dots, k_2\}$ , tais que para quase todo  $t \in [S, T]$  tem-se:

$$\dot{p}(t) = \nabla_\eta [p(t) \cdot (f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\bar{\eta}(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi(t))), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} &\max_{\xi \in V(t)} \{p(t) \cdot [f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\bar{\eta}(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi)]\} \\ &= p(t) \cdot [f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\bar{\eta}(t) + \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\bar{\xi}(t))], \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$(p(S), -p(T)) = \lambda \nabla \varphi(\bar{\eta}(S), \bar{\eta}(T)) + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \tilde{\phi}_i(\bar{\eta}(S), \bar{\eta}(T)) + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \nabla \tilde{\psi}_j(\bar{\eta}(S), \bar{\eta}(T)), \quad (4.14)$$

$$\lambda + \|p\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k_2} |\beta_i| \neq 0. \quad (4.15)$$

De (4.12) tem-se que

$$-\dot{p}(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top p(t) = H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)).$$

Agora, em (4.13), tendo em conta que  $(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = (0, 0)$ , temos que

$$p(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi) \leq 0 \quad \text{q.s.} \quad (4.16)$$

para todo  $\xi \in V(t)$ , de modo que

$$\Delta_\alpha H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in V(t) \quad \text{q.s.} \quad (4.17)$$

Mostraremos que

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), p(t), u) \quad \text{q.s.} \quad (4.18)$$

Suponha que (4.18) não se cumpre, isto é, existe  $\epsilon > 0$  e  $A \subset [S, T]$  com medida positiva tais que

$$\sup_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), p(t), u) - \epsilon > H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \quad \forall t \in A.$$

Definamos a multifunção  $V'(t) := \{u \in U(t) : \omega(t, u) > 0\}$  onde

$$\omega(t, u) = \begin{cases} H(t, \bar{x}(t), p(t), u) - \epsilon - H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)), & \text{para } t \in A \\ 1 & \text{para } t \in [S, T] \setminus A. \end{cases}$$

Então  $Gr(V') = \omega^{-1}((0, \infty)) \cap Gr(U)$ . De (H1) e (H2), vemos que  $Gr(V')$  é  $\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}^m$  mensurável. Aplicando o Teorema da Seleção Mensurável de Aumann (Teorema 2.2) segue que  $V'$  tem uma seleção mensurável, ou seja, existe uma função mensurável  $\tilde{u}$  tal que  $\tilde{u}(t) \in U(t)$  q.s.  $t \in [S, T]$  e

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), \tilde{u}(t)) - \epsilon > H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \quad t \in A. \quad (4.19)$$

Integrando (4.19), temos que

$$\int_A [H(t, \bar{x}(t), p(t), \tilde{u}(t)) - H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] dt > 0. \quad (4.20)$$

Seja

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{\tilde{u}(t) + \bar{u}(t)}{\alpha} & \text{para } t \in A \\ 0 & \text{para } t \in [S, T] \setminus A. \end{cases}$$

Então

$$\bar{u}(t) + \alpha\xi(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t) & \forall t \in A. \\ \bar{u}(t) & \forall t \in [S, T] \setminus A. \end{cases}$$

Assim  $\bar{u}(t) + \alpha\xi(t) \in U(t)$  q.s  $t \in [S, T]$  e

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) &= \alpha^{-1}[H(t, \bar{x}(t), p(t), \tilde{u}(t)) - H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))] \quad \forall t \in A \\ \Delta_\alpha H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi) &= 0 \quad \forall t \in [S, T] \setminus A. \end{aligned}$$

Assim, aplicando integral em (4.17) temos que

$$0 \geq \int_S^T \Delta_\alpha H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt \geq \int_A \Delta_\alpha H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t))(\xi(t)) dt,$$

contradizendo (4.20). Portanto (4.18) se cumpre.

Logo, em (4.14) e tendo em conta

$$\begin{aligned} \varphi(\eta(S), \eta(T)) &= \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)), \\ \tilde{\phi}_i(\eta(S), \eta(T)) &= \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)), \\ \tilde{\psi}_j(\eta(S), \eta(T)) &= \nabla \psi_j(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)), \end{aligned}$$

tem-se que

$$(p(S), -p(T)) = \lambda \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)). \quad (4.21)$$

Assim, de (4.15), (4.16), (4.18) e (4.21) tem-se que  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um *MP-processo* de (PCF).

**Teorema 4.2.** *Se (PCF) é tal que cada MP-processo normal é um processo ótimo, então (PCF) é um problema MP-pseudo-inverso.*

**Demonstração:** De fato:

Suponhamos que  $(PCF)$  não é  $MP$  – *pseudo* – *inverso*. Então existe um par de processos factíveis tais que  $g(x(S), x(T)) < g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ , um escalar  $\alpha \in (0, 1)$ , para todo par  $(\eta, \xi) \in F_\alpha(\bar{x}, \bar{u})$  tem-se  $\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) \geq 0$ . Utilizando o Lema 4.1 tem-se que  $(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$  é um  $MP$  – *processo* de (PFC). Então, por hipótese, é um processo ótimo, mas isto contradiz o fato que  $g(x(S), x(T)) < g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ . Assim  $(PCF)$  é  $MP$  – *pseudo* – *inverso*.

**Exemplo 4.1.** Considere o seguinte problema de controle:

$$(PC) \begin{cases} \text{Minimizar } g(x(0), x(1)) = \ln \sqrt{x(1) + 1} \\ \text{Sujeito a} \\ \dot{x}(t) = -x(t) + (u(t))^2 \quad q.s., \\ u(t) \in [0, 1] \quad q.s., \\ x(0) = 0, \\ -x(1) \leq 0. \end{cases}$$

Neste caso,

$$\psi(x_0, x_1) = x_0, \quad \phi(x_0, x_1) = -x_1, \quad f(t, x, u) = -x + u^2.$$

Temos que  $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$  é um processo ótimo. De fato, é fácil ver que  $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$  é um processo factível. Mostraremos que  $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$  é um minimizador global. Tome um processo factível  $(x, u)$  arbitrário. É claro que  $\ln \sqrt{x(1) + 1} \geq 0$ , uma vez que  $x(1) \geq 0$ . Portanto  $g(x(0), x(1)) \geq 0 = g(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$ , para todo processo factível  $(x, u)$ . Conclui-se que  $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$  é um minimizador global de  $(PC)$ .

Segundo o Princípio do Máximo  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um  $MP$  – *processo*. De fato, tome  $\lambda = 1$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_1 = \frac{-\exp(-1)}{4}$  e  $p(t) = \frac{-\exp(t-1)}{4}$ ,  $t \in [0, 1]$ .

(i) Começaremos mostrando a condição (3.26). Temos, para  $t \in [0, 1]$ ,

$$p(t) = \frac{-\exp(t-1)}{4} \Rightarrow \dot{p}(t) = \frac{-\exp(t-1)}{4} \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned} H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) &= p(t) \cdot f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ &= -p(t). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Assim, de (4.22) e (4.23) conclui-se que,

$$-\dot{p}(t) = H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \quad q.s.$$

(ii) Mostraremos a condição (3.27). Observe que

$$\begin{aligned} H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) &= p(t) \cdot (-\bar{x}(t) + (\bar{u}(t))^2) \\ &= p(t) \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$p(t) \leq 0, \quad t \in [0, 1], \quad e \quad H(t, \bar{x}(t), p(t), u) = p(t) \cdot (u)^2 \quad \forall u \in U(t).$$

Então

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), u) \leq 0 \quad \forall u \in U(t). \tag{4.25}$$

Logo de (4.24) e (4.25) conclui-se que,

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), p(t), u) \quad q.s.$$

(iii) Mostraremos a condição (3.28). Como  $p(t) = -\frac{\exp(t-1)}{4}$ ,  $t \in [0, 1]$ , tem-se que

$$(p(0), -p(1)) = \left( -\frac{\exp(-1)}{4}, \frac{1}{4} \right), \tag{4.26}$$

e disso tem-se que

$$\begin{aligned} \lambda \nabla g(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \alpha_1 \nabla \phi(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \beta_1 \nabla \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) &= \left( 0, \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} (0, -1) \\ &\quad - \frac{\exp(-1)}{4} (1, 0) \\ &= \left( -\frac{\exp(-1)}{4}, \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Portanto de (4.26) e (4.27) conclui-se que

$$(p(0), -p(1)) = \lambda \nabla g(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \alpha_1 \nabla \phi(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \beta_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(1)).$$

(iv) Da forma como foram escolhidos  $\lambda$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  e  $p(t)$  a condição (3.29) claramente satisfeita.

Verificaremos que o problema (PC) é MP – pseudo – invexo.

Sejam  $(x, u), (y, v)$  processos factíveis de (PC) tais que  $g(x(0), x(1)) < g(y(0), y(1))$ .

Temos que

$$\ln \sqrt{x(1) + 1} < \ln \sqrt{y(1) + 1} \Leftrightarrow x(1) < y(1).$$

Como  $x(1) \geq 0$ , segue então que  $y(1) > 0$ , ou seja, a restrição  $\phi(y(0), y(1)) \leq 0$  não é ativa no ponto  $(y(0), y(1))$ . Logo  $I(y, v) = \emptyset$ , assim,

$$\begin{aligned} Q(y(0), y(1)) &= \{\gamma : \nabla \psi(y(0), y(1)) \cdot \gamma = 0\} \\ &= \{\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (1, 0) \cdot (\gamma_1, \gamma_2) = 0\} \\ &= \{\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \gamma_1 = 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

De

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + (u(t))^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

segue que

$$x(t) = \int_0^t \exp(\tau - t) [u(\tau)]^2 d\tau \quad q.s..$$

De  $x(1) < y(1)$ , obtemos

$$\int_0^1 \exp(\tau - 1) [u(\tau)]^2 d\tau < \int_0^1 \exp(\tau - 1) [v(\tau)]^2 d\tau.$$

Logo, existe  $E \subset [0, 1]$ , com medida positiva, tal que  $u(t) < v(t)$ ,  $t \in E$ .

Tome

$$\xi(t) = \begin{cases} u(t) - v(t), & t \in E \\ 0, & t \in [0, 1] \setminus E. \end{cases}$$

Seja  $\alpha \in (0, 1)$  arbitrário. Temos que

$$v(t) + \alpha \xi(t) = \begin{cases} \alpha u(t) + (1 - \alpha)v(t), & t \in E \\ 0, & t \in [0, 1] \setminus E. \end{cases}$$

Daí,  $v(t) + \alpha \xi(t) \in U(t) = [0, 1]$  q.s. (observe que  $U(t)$  é convexo,  $u(t), v(t) \in U(t)$  e  $\alpha \in (0, 1)$ ).

Agora tome  $\eta(t)$  tal que

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = f_x(t, y(t), v(t))\eta(t) + \Delta_\alpha f(t, y(t), v(t))(\xi(t)) \quad q.s., \\ (\eta(0), \eta(1)) \in Q(y(0), y(1)), \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = -\eta(t) + (1/\alpha)[-y(t) + (v(t) + \alpha \xi(t))^2 + y(t) - (v(t))^2], \\ \eta(0) = 0 \quad e \quad \eta(1) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
\eta(t) &= \int_0^t \exp(\tau - t)[(v(\tau) + \alpha\xi(\tau))^2 - (v(\tau))^2]d\tau \\
&= \int_E \exp(\tau - t)[(\alpha u(\tau) + (1 - \alpha)v(\tau))^2 - (v(\tau))^2]d\tau \\
&\quad + \int_{[0,1] \setminus E} \exp(\tau - t)[(\alpha u(\tau) + (1 - \alpha)v(\tau))^2 - (v(\tau))^2]d\tau \\
&= \int_E \exp(\tau - t)[(\alpha u(\tau) + (1 - \alpha)v(\tau))^2 - (v(\tau))^2]d\tau
\end{aligned}$$

Como  $u(t) < v(t)$ ,  $t \in E$  e  $\alpha \in (0, 1)$ , temos que  $0 \leq u(t) < \alpha u(t) + (1 - \alpha)v(t) < v(t)$ ,  $t \in E$ . Portanto  $\eta(t) < 0$  q.s.. Em particular,  $\eta(1) < 0$ . Deste modo,

$$\nabla g(y(0), y(1)) \cdot (\eta(0), \eta(1)) = \left(0, \frac{1}{2(y(1) + 1)}\right) \cdot (0, \eta(1)) = \frac{\eta(1)}{2(y(1) + 1)} < 0,$$

pois  $\eta(1) < 0$  e  $y(1) > 0$ . Concluimos então que (PC) é MP - pseudo - invexo.

## *Conclusões*

Nossos resultados mostram que a *MP – pseudo – invexidade* é uma condição suficiente de otimalidade para *(PCF)*, no sentido de que se *(PCF)* satisfaz a Definição 4.1 , então todo *MP – processo* é um processo ótimo. Ademais, mostramos que se é verdadeira a propriedade de que todo *MP – processo* de *(PCF)* é um processo ótimo, então *(PCF)* é *MP – pseudo – invexo*. Portanto, concluímos que a classe dos problemas de controle *MP – pseudo – invexos* é a maior classe de problemas onde tal propriedade vale. Futuramente, iremos estudar a definição da MP-invexidade com multiplicadores, adequada para problemas anormais e também a generalização dos resultados para o caso não-diferenciável.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] Athans, M., and Falb, P., *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications.*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [2] Ben-Israel, A. e Mond, B., *What is invexity?.*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B. (1986) 1-9.
- [3] Christensen, G.S., El-Hawary, M.E., Soliman, S.A., *Optimal Control Applications in Electric Power Systems.* Plenum, New York, 1987.
- [4] Clarke, F.H., Ledyae, Y.S., Stern, R.J., Wolenski, P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 178, Springer Verlag, New York.
- [5] Clarke, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, , Classics in Applied Mathematics, Vol. 5, SIAM, Philadelphia (1990).
- [6] Clark, C. W., Clarke, F. H., and Munro, G. R., *The optimal exploitation of renewable resource stocks: Problems of irreversible investment.*, *Econometrica.* **47**, (2009) 25-48.
- [7] Craven, B. D. e Glover, M., *Invex functions and duality.*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A. **39**, (1981) 1-20.
- [8] Craven, B. D. , *Nondifferentiable Optimization by Smooth Approxirrnations. Optimization.*, **17**, (1986) 3-17.
- [9] de Oliveira, V.A., Silva, G.N., Rojas-Medar, M.A., *A class of multiobjective control problems.* *Optim, Control Appl. Meth.* **30**, 77-86 (2009).
- [10] de Oliveira, V.A., Silva, G.N., *New optimality conditions for nonsmooth control problems*, *J. Glob. Optim.* **57**, 1465-1484 (2013).
- [11] Holley, G. E., and Bryson, A. E., *Twind modelling and lateral control for automatic landing.* *Jour, Spacecraft and Aircraft* 14. **2**, (1977) 65-72.
- [12] Intriligator, M.D, *Mathematical Optimization and Economic Theory.* Prentice-Hall. Englewood Cliffs,1971.
- [13] Leitmann, G, *The Calculus of Variations and Optimal Control.* Plenum Press, New York, 1981.
- [14] Lin, F., and Brandt, R. D., *An optimal control approach to robust control of robot manipulators.*, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 14. **1**, (1998) 69-77.
- [15] Martin, D. H. ., *The essence of invexity*, *J. Optim. Theory Appl.*, **47**, (1985) 65-76.

- 
- [16] Phoung, T. D., Sach, P. H. Sach e Yen, N. D., *Strict lower semicontinuity of the level sets and invexity of a locally Lipschitz function.*, JOTA. **87**, (1990) 579-594.
- [17] Reiland, T. W., *Nonsmooth invexity.*, Bull. Austral. Math. Soc.. **42**, (1990) 437-446.
- [18] Vinter, R. B., *Optimal Control*, Birkhäuser, Boston, 2000.
- [19] Waltman, P, *Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics*. Springer, New York, 1974.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 20 de Janeiro de 2015.

---

John Frank Matos Ascona