





IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

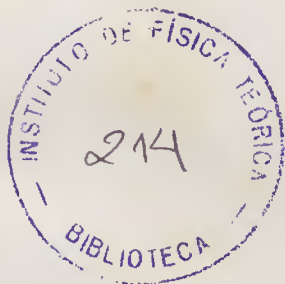
IFT-T.007/93

O Universo de Einstein-de Sitter Perturbado

Francisco Eugênio Mendonça da Silveira

Orientador

Hélio Vasconcelos Fagundes



IFT/TE
M.104

Novembro 1993

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

À Ana Paula, a primeira.

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Ao Instituto de Física Teórica (UNESP) pela acolhida amistosa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Helio Vasconcelos Fagundes, pela condução firme e segura.

Ao Coordenador da Pós-Graduação, Prof. Dr. Alfredo Pio Noronha Rodrigues Galeão, pelo auxílio burocrático.

Ao Prof. Dr. Antônio José Accioly pelo estímulo e entusiasmo.

Aos professores, pesquisadores, colegas e funcionários do IFT pela contribuição para a minha formação.

Aos amigos.

“... assim como seria um mal que este espaço não fosse pleno, isto é, que este mundo não existisse, não o seria menos, em virtude de sua igualdade, que todo o espaço não fosse pleno, e, por consequência, o universo será de dimensão infinita e os mundos serão inumeráveis.” (Giordano Bruno, in: *Sobre o Infinito, o Universo e os Mundos*, ed. Victor Civita, Abril Cultural, São Paulo, 1973)

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema das perturbações de densidade, relacionado com a inomogeneidade do universo. Primeiro, exibimos, analiticamente, o contraste na densidade, numa aproximação linear, independentemente de perturbações na métrica, para o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter. Depois, construímos um modelo cosmológico não homogêneo, dotado de um campo local de velocidades, baseados no modelo cosmológico de Einstein-de Sitter, que é homogêneo e desprovido de qualquer campo local de velocidades. Obtemos, numericamente, a densidade perturbada, a partir de perturbações na métrica. Nossos resultados concordam qualitativamente com as observações usuais.

Palavras-chave: cosmologia, equações de Einstein, métodos numéricos.

Áreas de Conhecimento: 1.04.04.04-0 1.05.01.03-7

Abstract

In this work, we study the density perturbations problem, related to the inhomogeneity of the universe. First, we exhibit, analytically, the density contrast, in a linear approximation, independently of the metric perturbations, for the Einstein-de Sitter cosmological model. After, we construct an inhomogeneous cosmological model, provided with a local field of velocities, based on the Einstein-de Sitter cosmological model, which is homogeneous and doesn't have any local field of velocities. We obtain, numerically, the perturbed density, from the metric perturbations. Our results agree qualitatively with the usual observations.

Key-words: cosmology, Einstein equations, numerical methods.

Índice

I	Introdução	8
II	Modelos Cosmológicos	10
II.1	O Modelo Cosmológico Padrão	10
II.2	O Modelo Cosmológico de Einstein-de Sitter	13
III	Perturbações de Densidade em Modelos Cosmológicos	14
III.1	Perturbações de Densidade num Universo de Friedmann	14
III.2	Perturbações de Densidade no Universo de Einstein-de Sitter	17
IV	Perturbações na Métrica do Universo de Einstein-de Sitter	20
IV.1	Um Universo não Homogêneo com Campo Local de Velocidades	20
IV.2	Solução Numérica das Equações de Einstein	23
V	Conclusão	32
A	Os símbolos de Christoffel	35
B	O tensor de Ricci	37
C	As equações de Einstein	38
D	O método das diferenças finitas aplicado a duas variáveis	40
E	O método de Lax-Wendroff aplicado a duas variáveis	41
	Referências Bibliográficas	43

Capítulo I

Introdução

A observação de fenômenos naturais diversos, e a posterior associação entre eles, conduziu o homem, desde há muito tempo atrás, às primeiras tentativas de compreensão da natureza, a partir de um número mínimo de princípios. Isto se deu, no início, de uma maneira animista, remetendo o homem, imediatamente, ao conceito de universo, i.e., à busca de um princípio único, que explicasse tudo o que ele observava. Com o advento da religião, e, posteriormente, da filosofia, surgiram as primeiras cosmogonias, i.e., as primeiras tentativas de uma compreensão ordenada da origem do universo. À medida em que a ciência progrediu, entretanto, resolveu ela tomar, também, para si, o problema cosmogônico, surgindo, assim, a cosmologia, que é a tentativa de compreensão da evolução e da estrutura do universo, a partir da aplicação do método científico ao problema cosmogônico.

Do ponto de vista da física, a cosmologia se realiza quando constroem-se os assim chamados modelos cosmológicos. Os modelos cosmológicos são teorias físicas, baseadas em princípios lógicos e científicos e em observações, em geral, de natureza astronômica ou astrofísica. Existem diversos modelos cosmológicos, como o modelo cosmológico padrão [Weinberg], o modelo cosmológico estacionário [Bondi & Gold], o modelo cosmológico inflacionário [Guth] etc. Todos estes modelos cosmológicos descrevem, com maior ou menor sucesso, o assim chamado universo observável. Entretanto, como é de se esperar, estas descrições são parciais, na medida em que todos os modelos científicos apresentam imperfeições.

Neste trabalho, vamos focalizar nossa atenção sobre um problema, em particular, que ainda não é bem compreendido, através da utilização de qualquer modelo cosmológico atual, a saber, o problema das perturbações de densidade (ver, por exemplo, [Fagundes & Kwok]). Para tanto, por um lado, seguindo [Olson], vamos exibir, analiticamente, o contraste na densidade, numa aproximação linear, independentemente de perturbações na métrica, para o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter [EdS]. Por outro lado, vamos construir um modelo cosmológico não homogêneo, dotado de um campo local de velocidades, a partir do modelo cosmológico de Einstein-de Sitter, que é homogêneo e desprovido de qualquer campo local de velocidades. Uma vez de posse de nosso modelo cosmológico não homogêneo, obtemos, numericamente, perturbações de densidade, a partir de perturbações na métrica, e notamos que os resultados concordam qualitativamente com as observações usuais [Geller & Huchra].

Capítulo II

Modelos Cosmológicos

II.1 O Modelo Cosmológico Padrão

O modelo cosmológico de maior sucesso, até os dias atuais, é, sem dúvida, o assim chamado modelo cosmológico padrão (big bang). Ele é baseado no princípio cosmológico [Weinberg], que, por sua vez, está fundamentado nas hipóteses de homogeneidade e de isotropia do universo. Segue daí que a medida das distâncias, em larga escala, é independente da direção (o que fornece a métrica de Friedmann-Robertson-Walker), e que os únicos campos de velocidade que têm sentido físico, também, em larga escala, são os de contração ou os de expansão. Da segunda consequência, decorre a assim chamada expansão Hubble do universo, para a qual a velocidade relativa de dois observadores, digamos, v , depende apenas da distância entre eles, digamos, r , a saber

$$v = Hr, \tag{II.1}$$

onde H é a constante de Hubble ($H = 67 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [Peebles et al.]).

O sucesso do modelo cosmológico padrão é baseado, principalmente, na observação da radiação de fundo [Penzias & Wilson], e na concordância com as observações da abundância dos elementos primordiais [$\alpha\beta\gamma$]. A temperatura relacionada à radiação de fundo é conhecida, hoje em dia, com boa precisão, a saber [Mather et al.]

$$T = 2.735 \pm 0.060 \text{ K.} \quad (\text{II.2})$$

A interpretação desta radiação de fundo é que ela é composta de fótons remanescentes de uma época em que o universo tinha uma idade de, aproximadamente, 10^5 anos, e uma temperatura de, aproximadamente, 4000 K. Medidas da radiação de fundo também indicam um alto grau de isotropia para o universo, em larga escala. Após a subtração da anisotropia dipolar, cujo desvio relativo, $\Delta T/T$, tem magnitude de cerca de 10^{-3} , devida ao nosso movimento com relação ao fundo, praticamente, nenhuma outra anisotropia é observada. As anisotropias na radiação de fundo, eventualmente observadas, são de natureza perturbativa.

A nucleosíntese do big bang é o modelo para a produção dos elementos primordiais, principalmente, Deutério (D), Hélio (He^3 e He^4) e Lítio (Li) $[\alpha\beta\gamma]$. A nucleosíntese se dá quando a temperatura do universo é de cerca de 10^9 K ou quando a idade do universo é de cerca de 2 minutos. A nucleosíntese pode ser considerada um grande sucesso do modelo cosmológico padrão.

Supondo homogeneidade e isotropia, o espaço-tempo pode ser descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker, ds^2 , em coordenadas comóveis, t, r, θ, ϕ , a saber

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (\text{II.3})$$

onde a velocidade da luz no vácuo é igual a um, $R(t)$ é o fator de escala cosmológico (às vezes, chamado de raio do universo) e k é o parâmetro de curvatura espacial ($k = 0, +1, -1$ para um universo espacialmente chato, fechado ou aberto, respectivamente). Um modelo cosmológico descrito por uma métrica do tipo daquela que figura na equação (II.3) é chamado de um modelo cosmológico de Friedmann. Supondo, também, que o tensor de energia-momento, $T_{\mu\nu}$, descreva um fluido perfeito, escrevemos

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu, \quad (\text{II.4})$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica espaço-temporal descrita pela equação (II.3), $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ é a quadrivelocidade para o fluido cosmológico, p é a pressão isotrópica e ρ é a densidade

de energia, com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. As equações de Einstein (utilizando a convenção $R_{\mu\nu} = R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\sigma_{\sigma\mu,\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}$, onde a vírgula denota derivação parcial), são escritas da seguinte maneira

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (\text{II.5})$$

onde $R = R^\mu_\mu$ é o escalar de curvatura e Λ é a constante cosmológica (não entraremos em detalhes com respeito à conceituação de Λ , na medida em que a mesma irá se anular brevemente). A partir da componente com $\mu = \nu = 0$ da equação (II.5), obtemos a equação de Friedmann, a saber

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{1}{3}8\pi\rho - \frac{k}{R^2} + \frac{1}{3}\Lambda, \quad (\text{II.6})$$

onde o ponto denota derivação com relação ao tempo comóvel. Também, a partir das componentes com $\mu = \nu = 1, 2, 3$ da equação (II.5), juntamente com a equação (II.6), obtemos

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{1}{3}\Lambda - \frac{1}{6}8\pi(\rho + 3p). \quad (\text{II.7})$$

A partir das equações (II.6) e (II.7), ou, ainda, a partir do princípio de conservação de energia, a saber, $T^\mu_{;\nu} = 0$, onde o ponto e vírgula denota derivação covariante, podemos escrever a assim chamada equação da continuidade, a saber

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0, \quad (\text{II.8})$$

onde

$$\theta \equiv u^\mu_{;\mu} = 3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) \quad (\text{II.9})$$

é a taxa logarítmica de expansão do fator de escala cosmológico. Estas equações, desde (II.3) até (II.9), formam a base do modelo cosmológico padrão.

II.2 O Modelo Cosmológico de Einstein-de Sitter

Em modelos cosmológicos não estáticos, consideramos que o fator de escala cosmológico possui uma dependência temporal, i.e., $R = R(t)$. No caso em que $k = 0$, podemos reescrever a equação (II.3) da seguinte maneira

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (\text{II.10})$$

Além disto, em princípio, temos a liberdade de tomar a constante cosmológica igual ou diferente de zero, i.e., $\Lambda = 0$ ou $\Lambda \neq 0$. No caso em que $\Lambda = 0$ [Weinberg], o fator de escala cosmológico é dado por

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad (\text{II.11})$$

onde $t_0 = (3\sqrt{D_0}/2)^{-1}$ é a idade do universo, com $D_0 = 2(4\pi R_0^3 \rho_0/3)$; R_0 e ρ_0 são o fator de escala cosmológico e a densidade de energia, na época atual, respectivamente.

Não obstante, a densidade de energia é dada por

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi t^2}, \quad (\text{II.12})$$

ao passo que a pressão isotrópica é nula, i.e., $p = 0$.

A solução (II.11) descreve o assim chamado modelo cosmológico de Einstein-de Sitter (1932)[EdS]. Ela foi uma das primeiras soluções cosmológicas fisicamente aceitáveis das equações de Einstein, com $\Lambda = 0$.

Capítulo III

Perturbações de Densidade em Modelos Cosmológicos

III.1 Perturbações de Densidade num Universo de Friedmann

O estudo das perturbações de densidade linearizadas, em universos espacialmente homogêneos e isotrópicos, se inicia com Lifshitz [Lifshitz], em 1946. Posteriormente, o próprio Lifshitz, juntamente com Khalatnikov [Lifshitz & Khalatnikov], publica, em 1963, um review sobre as linhas de pesquisa atuais (na época), em cosmologia, que inclui uma seção sobre perturbações de densidade.

Entretanto, em todos os trabalhos relativos a perturbações de densidade, até meados dos anos '60, podemos notar uma grande dificuldade no que diz respeito à interpretação dos resultados obtidos. Isto se deve ao fato de que, por exemplo, para um universo de Friedmann perturbado, t , a coordenada temporal, pode ser escolhida convenientemente com o intuito de tornar $\delta\rho$, a perturbação na densidade ρ , identicamente nula, ao passo que, para um universo de Friedmann não perturbado, basta tomar t diferente do tempo comóvel, para que obtenhamos $\delta\rho \neq 0$. A razão disto acontecer é que, em geral, uma hipersuperfície para t constante não coincide com uma hipersuperfície para ρ constante. Em outras palavras, isto quer dizer que um observador, que possua somente informação local a respeito da evolução temporal do assim chamado contraste na densidade, i.e., $\delta\rho/\rho$, em geral, não distingue entre flutuações de densidade reais (que são efeitos físicos) e puros efeitos de sistemas de coordenadas (que são não físicos).

Neste capítulo, vamos exibir o contraste na densidade para o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter, numa aproximação linear, através de uma técnica independente do sistema de coordenadas, i.e., sem a introdução de perturbações no tensor métrico.

Seguindo [Olson], vamos utilizar um sistema de unidades no qual $8\pi G = c = 1$, onde G é a constante de gravitação universal e c é a velocidade da luz no vácuo. Também, vamos considerar uma equação de estado do tipo $p = p(\rho)$, onde p é a pressão isotrópica, o que conduz à expressão $v^2 = dp/d\rho$, com v representando a velocidade de propagação de perturbações no fluido cosmológico. Além disto, denotaremos a derivada covariante ao longo de uma linha do universo do fluido cosmológico por um ponto, por exemplo,

$$\dot{\rho} \equiv \frac{D\rho}{D\tau} = \rho_{;\mu} u^\mu, \quad (\text{III.1})$$

onde τ é o tempo próprio comóvel ao longo de uma linha do universo do fluido cosmológico e u^μ é a quadri-velocidade. Finalmente, vamos exprimir a quadri-aceleração, \dot{u}^μ , como sendo causada pelo gradiente da pressão isotrópica, através da introdução do assim chamado tensor de projeção ortogonal, $h^{\mu\nu}$, a saber

$$\dot{u}^\mu \equiv u^\mu_{;\nu} u^\nu = -\frac{h^{\mu\nu} p_{;\nu}}{\rho + p}, \quad (\text{III.2})$$

onde $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ (de fato, observemos que $h^{\mu\nu} u_\nu = g^{\mu\nu} u_\nu + u^\mu u^\nu u_\nu = u^\mu - u^\mu = 0$, onde usamos a propriedade do tensor métrico $g^{\mu\nu} u_\nu = u^\mu$ e a condição de normalização $u^\nu u_\nu = -1$).

Uma vez de posse das convenções descritas no parágrafo anterior, e da equação da continuidade e da equação de Raychaudhuri, a saber

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0, \quad (\text{III.3})$$

$$\dot{\theta} = 2(\omega^2 - \sigma^2) - \frac{1}{3}\theta^2 - \frac{1}{2}(\rho + 3p) + \dot{u}^\mu_{;\mu}, \quad (\text{III.4})$$

respectivamente, onde $\theta = u^\mu_{;\mu}$ é a taxa de expansão logarítmica do fator de escala cosmológico, R , e ω e σ são os escalares de rotação e de cisalhamento, respectivamente (não entraremos em detalhes com respeito à conceituação de ω e de σ , na medida em que ambos irão se anular brevemente), vamos mostrar que podemos descrever a evolução temporal do contraste na densidade, medido por observadores comóveis com o fluido cosmológico.

III.2 Perturbações de Densidade no Universo de Einstein-de Sitter

Com o intuito de estudarmos perturbações de densidade linearizadas no universo de Einstein-de Sitter, podemos definir [Olson]

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho} \right), \quad (\text{III.5})$$

onde ρ_0 representa a densidade para o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter sem perturbação e ρ , a densidade para o mesmo modelo, porém, com perturbação, com o contraste na densidade, $\delta\rho/\rho$, suficientemente pequeno, i.e., $|\delta\rho/\rho| \ll 1$.

Entretanto, como a substituição pura e simples de ρ , a partir da equação (III.5), nas equações (III.3) e (III.4), resulta num sistema de equações diferenciais, ainda que linearizadas, i.e., desprezando termos de ordem igual ou superior a $O[(\delta\rho/\rho)^2]$, muito difícil de ser resolvido, vamos definir uma quantidade, digamos, S [Olson], também, suficientemente pequena, i.e., também, $|S| \ll 1$, porém, motivados, agora, pelas expressões

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2, \quad (\text{III.6})$$

$$\theta = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right), \quad (\text{III.7})$$

válidas para o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter sem perturbação (para o qual, $\omega = 0$ e $\sigma = 0$), e que fornecem imediatamente

$$\rho = \frac{1}{3} \theta^2. \quad (\text{III.8})$$

A partir da equação (III.8), podemos definir, então ,

$$\rho = \frac{1}{3}\theta^2 (1 + S), \quad (\text{III.9})$$

para o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter com perturbação . Substituindo a equação (III.9) nas equações (III.3) e (III.4), e linearizando-as, i.e., desprezando termos de ordem igual ou superior a $O(S^2)$, obtemos

$$\theta \dot{S} = (\rho + 3p) S - 2\dot{u}^\mu_{;\mu}, \quad (\text{III.10})$$

$$\dot{u}^\mu_{;\mu} = -\frac{v^2}{\rho + p} \text{div} X, \quad (\text{III.11})$$

onde $\text{div} X \equiv X^\mu_{;\mu}$, com $X^\mu \equiv h^{\mu\nu} \rho_{;\nu}$. Substituindo a equação (III.11) na equação (III.10), segue que

$$\theta \dot{S} = (\rho + 3p) S + 2\frac{v^2}{\rho + p} \text{div} X. \quad (\text{III.12})$$

Podemos, agora, resolver a equação (III.12), para S , no contexto do modelo cosmológico de Einstein-de Sitter com perturbação . Para tanto, vamos levar em conta que, no modelo cosmológico de Einstein-de Sitter sem perturbação , o fator de escala cosmológico apresenta uma dependência com o tempo próprio comóvel ao longo de uma linha do universo do fluido cosmológico do tipo $R \propto \tau^{2/3}$, a densidade é dada por $\rho_0(\tau) = 4/(3\tau^2)$, e a equação de estado corresponde a $p = 0$. A partir daí, concluímos imediatamente que S satisfaz a seguinte equação diferencial linear

$$\tau \dot{S} - \frac{2}{3} S = 0, \quad (\text{III.13})$$

cuja solução possui a seguinte dependência com o tempo próprio comóvel ao longo de uma linha do universo do fluido cosmológico

$$S \propto \tau^{2/3}. \quad (\text{III.14})$$

Supondo uma pequena perturbação em $\tau = \tau_0$, a partir da equação (10) de [Olson], a saber

$$S = \frac{d}{d\tau} \left(\tau \frac{\delta\rho}{\rho} \right), \quad (\text{III.15})$$

obtemos

$$\tau \frac{\delta\rho}{\rho} = \int_{\tau_0}^{\tau} S(\tau') d\tau', \quad (\text{III.16})$$

donde segue que

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{C}{\tau} \left(\tau^{5/3} - \tau_0^{5/3} \right), \quad (\text{III.17})$$

onde C é uma constante de integração, tal que $|C| \ll 1$.

Estamos, portanto, de posse de uma expressão analítica, a saber, a equação (III.17), para o cálculo do contraste na densidade, para o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter com perturbação, numa aproximação linear, independentemente de perturbações na métrica, o que permite uma avaliação desta quantidade de uma maneira independente de qualquer outra, que seja feita através da utilização de alguma técnica que leve em conta perturbações no tensor métrico, o que é o caso do nosso trabalho.

Capítulo IV

Perturbações na Métrica do Universo de Einstein-de Sitter

IV.1 Um Universo não Homogêneo com Campo Local de Velocidades

Apesar do sucesso do modelo cosmológico padrão, há um certo número de perguntas sem respostas, que suscitam questões que parecem difíceis de explicar, simplesmente à luz deste modelo, sem impor condições adicionais, como por exemplo, o problema da curvatura [Dicke & Peebles], o problema do horizonte [Ellis & Stoeger], o problema das perturbações de densidade (ver, por exemplo, [Fagundes & Kwok]), o problema do monopolo magnético [Polyakov] etc. Dentre todas estas questões, vamos focalizar nossa atenção sobre o problema das perturbações de densidade, que serão objeto de análise deste trabalho.

Embora pareça que o universo é extremamente isotrópico e homogêneo em larga escala (de fato, o modelo cosmológico padrão admite completa isotropia e homogeneidade!), ele é bastante não homogêneo em pequena escala e em escala intermediária. Em outras palavras, planetas, estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, existem! O problema reside em compreender a origem e a evolução de tais inhomogeneidades.

A origem e a evolução destas inomogeneidades, ora citadas, num universo de Friedmann-Robertson-Walker, tem sido objeto de estudo [Ellis & Schreiber], do ponto de vista das perturbações de densidade. Neste capítulo, vamos apresentar como pequenas perturbações na métrica do modelo cosmológico de Einstein-de Sitter são compatíveis com um grande contraste na distribuição da densidade, o que está de acordo com as observações usuais [Geller & Huchra]. Para tanto, vamos resolver as equações de Einstein como um problema de Cauchy [Weinberg], admitindo uma métrica espaço-temporal, que se reduz à métrica do modelo cosmológico de Einstein-de Sitter, no limite em que a perturbação se anula.

A métrica espaço-temporal do modelo cosmológico de Einstein-de Sitter é dada por $ds^2 = dt^2 - t^{4/9} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$, onde a velocidade da luz no vácuo é igual a um, a idade do universo também é igual a um e t, x, y, z constituem um sistema de coordenadas comóveis. A generalização desta métrica, para os propósitos deste trabalho, é escrita da seguinte maneira

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t, x, y) dx^2 - b^2(t, x, y) (dy^2 + dz^2), \quad (\text{IV.1})$$

onde as funções $a(t, x, y)$ e $b(t, x, y)$ são funções a determinar, a partir das soluções das equações de Einstein como um problema de Cauchy.

A partir da equação (IV.1), que fornece a métrica para o nosso modelo cosmológico de Einstein-de Sitter com perturbação, calculamos, em seqüência, os símbolos de Christoffel não nulos (ver o Apêndice A), as componentes do tensor de Ricci não nulas (ver o Apêndice B) e, as equações de Einstein não nulas (ver o Apêndice C), a saber

$$G_0^0 = 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + 2\frac{a_x b_x}{a^3 b} - \left(\frac{b_x}{ab}\right)^2 + \left(\frac{b_y}{b^2}\right)^2 - 2\frac{b_{xx}}{a^2 b} - \frac{a_{yy}}{ab^2} - \frac{b_{yy}}{b^3} = 8\pi\rho, \quad (\text{IV.2})$$

$$G_0^1 = 2\frac{\dot{b}_x}{a^2 b} - 2\frac{\dot{a}b_x}{a^3 b} = 8\pi\rho v_x, \quad (\text{IV.3})$$

$$G_0^2 = \frac{\dot{a}_y}{ab^2} + \frac{\dot{b}_y}{b^3} - \frac{a_y \dot{b}}{ab^3} - \frac{\dot{b}b_y}{b^4} = 8\pi\rho v_y, \quad (\text{IV.4})$$

$$G_1^1 = 2\frac{\ddot{b}}{b} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 - \left(\frac{b_x}{ab}\right)^2 + \left(\frac{b_y}{b^2}\right)^2 - \frac{b_{yy}}{b^3} = 0, \quad (\text{IV.5})$$

$$G_1^2 = -\frac{a_y b_x}{ab^3} + \frac{b_{xy}}{b^3} - \frac{b_x b_y}{b^4} = 0, \quad (\text{IV.6})$$

$$G_2^2 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{a_x b_x}{a^3 b} - \frac{b_{xx}}{a^2 b} - \frac{a_y b_y}{ab^3} = 0, \quad (\text{IV.7})$$

$$G_3^3 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{a_x b_x}{a^3 b} - \frac{b_{xx}}{a^2 b} + \frac{a_y b_y}{ab^3} - \frac{a_{yy}}{ab^2} = 0, \quad (\text{IV.8})$$

onde a constante de gravitação universal é igual a um, $\rho = \rho(t, x, y)$ é a densidade de energia, $v_x(t, x, y)$ e $v_y(t, x, y)$ são as componentes, em princípio, não nulas do campo local de velocidades, um ponto denota derivação parcial em relação a t e os índices x e y denotam derivações parciais em relação a x e a y , respectivamente.

IV.2 Solução Numérica das Equações de Einstein

Com o intuito de resolver as equações (IV.2) a (IV.8), como um problema de Cauchy, as equações (IV.2) a (IV.4) devem ser interpretadas como vínculos sobre as soluções das equações (IV.5) a (IV.8).

Não obstante, escolhemos um perfil periódico de integração, de modo que o modelo pudesse ser interpretado como um “universo pequeno”, no sentido de Ellis & Schreiber [Ellis & Schreiber]. Em modelos deste tipo, o espaço é representado por um 3-torus (T^3) (ver, por exemplo, [Fagundes & Wichoski]). As condições de periodicidade escolhidas foram $a(t, x + L, y) = a(t, x, y)$, $a(t, x, y + L) = a(t, x, y)$, $b(t, x + L, y) = b(t, x, y)$ e $b(t, x, y + L) = b(t, x, y)$, onde L é uma fração do raio do horizonte (a porção observável do universo). Em particular, neste trabalho, tomamos $L = 3ct_0/50 = 0.06$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e t_0 é a idade do universo, com $c = t_0 = 1$. Neste ponto, observamos que impor tais condições de periodicidade é equivalente a identificar o plano $x = 0$ com o plano $x = L$ e o plano $y = 0$ com o plano $y = L$, de maneira que o espaço cósmico torne-se fechado na direção do eixo x e na direção do eixo y , respectivamente. Muitos autores, incluindo Fagundes [Fagundes] têm estudado modelos cosmológicos como o deste trabalho, i.e., dotados de topologias espaciais não triviais.

A escolha das condições iniciais foi motivada pelo fato de que, no limite de perturbação nula, as soluções das equações de Einstein com perturbação deveriam ser identificadas com as soluções das equações de Einstein sem perturbação. Além disto, estas condições deveriam satisfazer identicamente as equações de vínculos (IV.2) até (IV.4). Tomamos as equações (IV.5) e (IV.7) como equações dinâmicas e escolhemos condições iniciais que anulassem também as equações (IV.6) e (IV.8). Embora isto não garanta que estas últimas permaneçam nulas (não são vínculos), em nossa aproximação isto foi obtido. Neste sentido, após várias tentativas, as condições iniciais escolhidas foram

$$a(0, x, y) = t_i^{2/3} \{1 + \alpha [\sin(qx)]\}, \quad (\text{IV.9})$$

$$b(0, x, y) = t_i^{2/3}, \quad (\text{IV.10})$$

$$\dot{a}(0, x, y) = \frac{2t_i^{-1/3}}{3}, \quad (\text{IV.11})$$

$$\dot{b}(0, x, y) = \frac{2t_i^{-1/3} \{1 + \beta [\sin(qx)]\}}{3}, \quad (\text{IV.12})$$

$$\rho(0, x, y) = \frac{G_0^0(0, x, y)}{8\pi}, \quad (\text{IV.13})$$

$$v_x(0, x, y) = \frac{G_0^1(0, x, y)}{8\pi\rho(0, x, y)}, \quad (\text{IV.14})$$

$$v_y(0, x, y) = \frac{G_0^2(0, x, y)}{8\pi\rho(0, x, y)}, \quad (\text{IV.15})$$

onde $q = 2\pi/L$, $\alpha = 10^{-4}$, $\beta = 4 \times 10^{-5}$ e $t_i = 0.1t_0$.

Definindo $f(t, x, y) = \dot{a}(t, x, y)$, $g(t, x, y) = \dot{b}(t, x, y)$, $r(t, x, y) = \dot{f}(t, x, y)$ e $s(t, x, y) = \dot{g}(t, x, y)$, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares

$$\dot{a} = f, \quad (\text{IV.16})$$

$$\dot{b} = g, \quad (\text{IV.17})$$

$$\dot{f} = r(a, b, f, g, a_x, a_y, b_x, b_y, b_{yy}), \quad (\text{IV.18})$$

$$\dot{g} = s(a, b, g, b_x, b_y, b_{yy}), \quad (\text{IV.19})$$

onde

$$r = -\frac{fg}{b} + \frac{a}{2} \left[\left(\frac{g}{b}\right)^2 - \left(\frac{b_x}{ab}\right)^2 + \left(\frac{b_y}{b^2}\right)^2 - \frac{b_{yy}}{b^3} \right] - \frac{a_x b_x}{a^2 b} + \frac{a_y b_y}{b^3} + \frac{b_{xx}}{ab}, \quad (\text{IV.20})$$

$$s = \frac{1}{2} \left[-\frac{g^2}{b} + \frac{1}{b} \left(\frac{b_x}{a}\right)^2 - \frac{b_y^2}{b^3} + \frac{b_{yy}}{b^2} \right]. \quad (\text{IV.21})$$

O sistema de equações diferenciais desde (IV.16) até (IV.19) foi obtido da seguinte maneira: num primeiro momento, extraímos $\dot{g} = s$ da equação (IV.5), substituindo, em seguida, a expressão, então obtida, para $\dot{g} = s$ na equação (IV.7), o que fornece $\dot{f} = r$.

Como o sistema de equações diferenciais desde (IV.16) até (IV.19) é altamente não linear, não tentamos uma solução por quadratura. Entretanto, não conseguimos integrar numericamente com a dependência em y , seja porque as variáveis, dela dependentes, crescem muito depressa, seja pelas limitações no nosso sistema de computadores. Neste sentido, em nossas fórmulas, a variável y é apenas formal, visando a possíveis desenvolvimentos futuros. Além disto, com o intuito de avaliarmos as derivadas espaciais, que figuram nas equações (IV.20) e (IV.21), utilizamos um método de derivação numérica, chamado de método das diferenças finitas [Smith], cujos detalhes figuram no Apêndice D. Finalmente, obtivemos a solução numérica deste sistema, baseados num método de integração numérica, chamado de método de Lax-Wendroff [Smith], cujos detalhes figuram no Apêndice E.

Passamos, agora, a exibir os resultados obtidos para a densidade perturbada, ρ , e para as componentes, em princípio, não nulas do campo local de velocidades, v_x e v_y , em termos das perturbações nas funções da métrica, $a(t, x, y)$ e $b(t, x, y)$, em forma de tabelas numéricas. Nestas tabelas, t representa o tempo comóvel, qx representa o comprimento na direção do eixo x , $a_r = a(t, x, y)/R_0(t)$, $b_r = b(t, x, y)/R_0(t)$, $\rho_r = \rho(t, x, y)/(\rho_0(t))$ e $v_x = G_0^1(t, x, y)/(8\pi\rho)$, onde $R_0(t) = t^{2/3}$, $\rho_0(t) = 1/(6\pi t^2)$ e $\rho = G_0^0(t, x, y)/(8\pi)$, com $R_0(t)$ e $\rho_0(t)$ representando o fator de escala cosmológico e a densidade de energia, respectivamente, para o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter sem perturbação; G_1^1 , G_1^2 e G_2^2 correspondem às equações de Einstein, desde (IV.5) até (IV.7); δt representa o intervalo numérico de integração e α e β representam os fatores de perturbação das funções da métrica, $a(t, x, y)$ e $b(t, x, y)$, respectivamente, que figuram nas equações (IV.9) e (IV.12).

No próximo capítulo, comentaremos os resultados numéricos, por nós obtidos, e que figuram nestas tabelas, bem como traçaremos perspectivas, no que diz respeito a possíveis futuros trabalhos, ao nosso relacionados.

t	qx	a_r	b_r	ρ_r	v_x	G_1^1	G_1^2	G_2^2
0.10000	0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.00902	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	1.00010	1.00000	0.99999	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00000	1.00000	1.00000	-0.00902	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	0.99990	1.00000	1.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00000	1.00000	1.00000	0.00902	0.00000	0.00000	0.00000
0.30000	0.00000	1.00002	1.00001	0.99927	0.00209	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.98795	1.00003	1.10049	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00002	1.00001	0.99927	-0.00209	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.01204	0.99999	0.90238	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00002	1.00001	0.99927	0.00209	0.00000	0.00000	0.00000
0.50000	0.00000	1.00010	0.99998	0.99780	0.00106	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.96318	1.00000	1.16224	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00010	0.99998	0.99780	-0.00106	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.03655	0.99996	0.85266	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00010	0.99998	0.99780	0.00106	0.00000	0.00000	0.00000
0.70000	0.00000	1.00031	0.99997	0.99587	0.00068	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.93559	0.99999	1.21733	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00031	0.99997	0.99587	-0.00068	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.06365	0.99994	0.81592	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00031	0.99997	0.99587	0.00068	0.00000	0.00000	0.00000
0.90000	0.00000	1.00063	0.99996	0.99373	0.00048	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.90750	0.99998	1.27046	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00063	0.99996	0.99373	-0.00048	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.09106	0.99993	0.78603	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00063	0.99996	0.99373	0.00048	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	1.00083	0.99995	0.99261	0.00042	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.89351	0.99998	1.29686	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00083	0.99995	0.99261	-0.00042	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.10464	0.99993	0.77284	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00083	0.99995	0.99261	0.00042	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela IV.1: $\delta t = 10^{-4}$, $\alpha = 10^{-4}$, $\beta = 4 \times 10^{-5}$

t	qx	a_r	b_r	ρ_r	v_r	G_1^1	G_1^2	G_2^2
0.10000	0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.00993	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	1.00011	1.00000	0.99999	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00000	1.00000	1.00000	-0.00993	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	0.99989	1.00000	1.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00000	1.00000	1.00000	0.00993	0.00000	0.00000	0.00000
0.30000	0.00000	1.00002	1.00001	0.99916	0.00229	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.98675	1.00003	1.11075	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00002	1.00001	0.99916	-0.00229	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.01324	0.99999	0.89282	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00002	1.00001	0.99916	0.00229	0.00000	0.00000	0.00000
0.50000	0.00000	1.00012	0.99998	0.99738	0.00116	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.95949	1.00001	1.17941	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00012	0.99998	0.99738	-0.00116	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.04019	0.99996	0.83871	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00012	0.99998	0.99738	0.00116	0.00000	0.00000	0.00000
0.70000	0.00000	1.00038	0.99997	0.99504	0.00074	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.92912	0.99999	1.24128	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00038	0.99997	0.99504	-0.00074	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.06999	0.99994	0.79909	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00038	0.99997	0.99504	0.00074	0.00000	0.00000	0.00000
0.90000	0.00000	1.00077	0.99996	0.99245	0.00053	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.89818	0.99998	1.30150	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00077	0.99996	0.99245	-0.00053	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.10010	0.99993	0.76711	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00077	0.99996	0.99245	0.00053	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	1.00101	0.99995	0.99110	0.00046	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.88276	0.99998	1.33163	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00101	0.99995	0.99110	-0.00046	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.11502	0.99992	0.75307	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00101	0.99995	0.99110	0.00046	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela IV.2: $\delta t = 10^{-4}$, $\alpha = (1.0 + 0.1)10^{-4}$, $\beta = (4.0 + 0.4)10^{-5}$

t	qx	a_r	b_r	ρ_r	v_r	G_1^1	G_1^2	G_2^2
0.10000	0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.00812	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	1.00011	1.00000	0.99997	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00000	1.00000	1.00000	-0.00812	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	0.99989	1.00000	1.00003	0.00812	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00000	1.00000	1.00000	0.00812	0.00000	0.00000	0.00000
0.30000	0.00000	1.00002	1.00001	0.99936	0.00188	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.98917	1.00002	1.09025	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00002	1.00001	0.99936	-0.00188	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.01082	0.99999	0.91198	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00002	1.00001	0.99936	0.00188	0.00000	0.00000	0.00000
0.50000	0.00000	1.00008	0.99998	0.99818	0.00095	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.96688	1.00000	1.14523	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00008	0.99998	0.99818	-0.00095	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.03289	0.99996	0.86674	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00008	0.99998	0.99818	0.00095	0.00000	0.00000	0.00000
0.70000	0.00000	1.00024	0.99997	0.99662	0.00061	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.94207	0.99999	1.19381	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00024	0.99997	0.99662	-0.00061	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.05731	0.99995	0.83301	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00024	0.99997	0.99662	0.00061	0.00000	0.00000	0.00000
0.90000	0.00000	1.00050	0.99996	0.99489	0.00044	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.91682	0.99998	1.24022	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00050	0.99996	0.99489	-0.00044	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.08200	0.99993	0.80535	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00050	0.99996	0.99489	0.00044	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	1.00066	0.99995	0.99399	0.00038	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.90425	0.99997	1.26312	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00066	0.99995	0.99399	-0.00038	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.09424	0.99993	0.79308	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00066	0.99995	0.99399	0.00038	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela IV.3: $\delta t = 10^{-4}$, $\alpha = (1.0 + 0.1)10^{-4}$, $\beta = (4.0 - 0.4)10^{-5}$

t	qx	a_r	b_r	ρ_r	v_x	G_1^1	G_1^2	G_2^2
0.10000	0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.00993	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	1.00009	1.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00000	1.00000	1.00000	-0.00993	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	0.99991	1.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00000	1.00000	1.00000	0.00993	0.00000	0.00000	0.00000
0.30000	0.00000	1.00002	1.00001	0.99916	0.00229	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.98673	1.00003	1.11076	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00002	1.00001	0.99916	-0.00229	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.01325	0.99999	0.89282	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00002	1.00001	0.99916	0.00229	0.00000	0.00000	0.00000
0.50000	0.00000	1.00013	0.99998	0.99738	0.00116	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.95948	1.00001	1.17942	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00013	0.99998	0.99738	-0.00116	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.04020	0.99996	0.83871	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00013	0.99998	0.99738	0.00116	0.00000	0.00000	0.00000
0.70000	0.00000	1.00038	0.99997	0.99504	0.00074	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.92911	0.99999	1.24128	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00038	0.99997	0.99504	-0.00074	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.07000	0.99994	0.79910	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00038	0.99997	0.99504	0.00074	0.00000	0.00000	0.00000
0.90000	0.00000	1.00077	0.99996	0.99244	0.00053	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.89817	0.99998	1.30150	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00077	0.99996	0.99244	-0.00053	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.10011	0.99993	0.76711	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00077	0.99996	0.99244	0.00053	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	1.00101	0.99995	0.99109	0.00046	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.88275	0.99998	1.33163	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00101	0.99995	0.99109	-0.00046	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.11503	0.99992	0.75307	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00101	0.99995	0.99109	0.00046	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela IV.4: $\delta t = 10^{-4}$, $\alpha = (1.0 \quad 0.1)10^{-4}$, $\beta = (4.0 + 0.4)10^{-5}$

t	qx	a_r	b_r	ρ_r	v_x	G_1^1	G_1^2	G_2^2
0.10000	0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.00812	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	1.00009	1.00000	0.99999	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00000	1.00000	1.00000	-0.00812	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	0.99991	1.00000	1.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00000	1.00000	1.00000	0.00812	0.00000	0.00000	0.00000
0.30000	0.00000	1.00002	1.00001	0.99936	0.00188	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.98916	1.00002	1.09026	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00002	1.00001	0.99936	-0.00188	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.01083	0.99999	0.91197	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00002	1.00001	0.99936	0.00188	0.00000	0.00000	0.00000
0.50000	0.00000	1.00008	0.99998	0.99818	0.00095	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.96687	1.00000	1.14524	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00008	0.99998	0.99818	-0.00095	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.03290	0.99996	0.86674	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00008	0.99998	0.99818	0.00095	0.00000	0.00000	0.00000
0.70000	0.00000	1.00024	0.99997	0.99662	0.00061	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.94206	0.99999	1.19382	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00024	0.99997	0.99662	-0.00061	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.05732	0.99995	0.83301	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00024	0.99997	0.99662	0.00061	0.00000	0.00000	0.00000
0.90000	0.00000	1.00050	0.99996	0.99489	0.00044	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.91681	0.99998	1.24023	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00050	0.99996	0.99489	-0.00044	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.08201	0.99993	0.80535	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00050	0.99996	0.99489	0.00044	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	1.00066	0.99995	0.99398	0.00038	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.90424	0.99997	1.26313	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00066	0.99995	0.99398	-0.00038	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.09425	0.99993	0.79308	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00066	0.99995	0.99398	0.00038	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela IV.5: $\delta t = 10^{-4}$, $\alpha = (1.0 \quad 0.1)10^{-4}$, $\beta = (4.0 \quad 0.4)10^{-5}$

t	qx	a_r	b_r	ρ_r	v_x	G_1^1	G_1^2	G_2^2
0.10000	0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.00902	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	1.00010	1.00000	0.99999	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00000	1.00000	1.00000	-0.00902	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	0.99990	1.00000	1.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00000	1.00000	1.00000	0.00902	0.00000	0.00000	0.00000
0.30000	0.00000	1.00002	1.00000	0.99939	0.00209	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.98794	1.00002	1.10061	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00002	1.00000	0.99939	-0.00209	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.01204	0.99999	0.90250	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00002	1.00000	0.99939	0.00209	0.00000	0.00000	0.00000
0.50000	0.00000	1.00011	0.99999	0.99791	0.00106	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.96318	1.00001	1.16235	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00011	0.99999	0.99791	-0.00106	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.03656	0.99997	0.85276	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00011	0.99999	0.99791	0.00106	0.00000	0.00000	0.00000
0.70000	0.00000	1.00033	0.99998	0.99596	0.00068	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.93560	1.00001	1.21744	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00033	0.99998	0.99596	-0.00068	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.06368	0.99996	0.81601	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00033	0.99998	0.99596	0.00068	0.00000	0.00000	0.00000
0.90000	0.00000	1.00065	0.99998	0.99381	0.00048	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.90751	1.00000	1.27056	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00065	0.99998	0.99381	-0.00048	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.09109	0.99995	0.78610	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00065	0.99998	0.99381	0.00048	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	1.00085	0.99998	0.99269	0.00042	0.00000	0.00000	0.00000
	1.57080	0.89352	1.00000	1.29695	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	3.14159	1.00085	0.99998	0.99269	-0.00042	0.00000	0.00000	0.00000
	4.71239	1.10467	0.99995	0.77290	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	6.28319	1.00085	0.99998	0.99269	0.00042	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela IV.6: $\delta t = 5 \times 10^{-5}$, $\alpha = 10^{-4}$, $\beta = 4 \times 10^{-5}$

Capítulo V

Conclusão

Nosso trabalho foi motivado pelo intuito de tentar descrever a inhomogeneidade do universo, que se manifesta através de um grande contraste na densidade, e que é observada em escalas cada vez maiores.

Para tanto, por um lado, estudamos o problema das perturbações de densidade linearizadas em universos espacialmente homogêneos e isotrópicos, em particular, para o universo de Einstein-de Sitter, seguindo [Olson], a partir de um ponto de vista independente de perturbações na métrica, exibindo uma expressão analítica, que conduz ao contraste na densidade, em termos do tempo próprio comóvel ao longo de uma linha do universo do fluido cosmológico, a saber, a equação (III.17).

Por outro lado, construímos um modelo cosmológico não homogêneo, dotado de um campo local de velocidades, a partir do modelo cosmológico de Einstein-de Sitter, que é homogêneo e desprovido de qualquer campo local de velocidades, e estudamos a perturbação na densidade obtida, resolvendo, numericamente, as equações de Einstein, que são não lineares, como um problema de Cauchy [Weinberg], a partir de um ponto de vista que depende de perturbações na métrica.

Quanto aos resultados numéricos obtidos, de acordo com a tabela IV.1, depreendemos que o desvio espacial, com relação ao eixo x , da função $a(t, x, y)$, cresce de, no máximo, 0.01% até 10%, e que o desvio correspondente, da função $b(t, x, y)$, de, no máximo, 0 até 0.001%, no intervalo temporal comóvel de 0.1 até 1, em unidades de t_0 , a idade do universo, que, em nosso trabalho, é igual a 1. Neste mesmo intervalo temporal comóvel, entretanto, o desvio espacial na densidade, cresce de, no máximo, 0.001% até 30%, o que está de acordo com as observações usuais [Geller & Huchra].

De acordo com as tabelas IV.2 até IV.5, exibimos resultados numéricos, obtidos com o intuito de estudar a estabilidade das soluções das equações de Einstein, para o nosso modelo cosmológico não homogêneo, que figuram na tabela IV.1. Tal estabilidade foi estudada, fazendo-se variar os parâmetros de perturbação, α e β , das funções da métrica, $a(t, x, y)$ e $b(t, x, y)$, respectivamente. Em particular, tomamos $\alpha = (1.0 \pm 0.1)10^{-4}$ e $\beta = (4.0 \pm 0.4)10^{-5}$. A partir destas tabelas, depreendemos que os desvios espaciais, citados no parágrafo anterior, mantêm-se na mesma ordem de grandeza, donde concluímos que nossas soluções são estáveis.

Finalmente, como, em nosso trabalho, limitamo-nos à aproximação linear da equação (E.5), no que diz respeito ao método de integração numérica que utilizamos, tornamos a solucionar as equações de Einstein, para o nosso modelo cosmológico, porém, agora, tomando um δt ainda menor que aquele que figura na tabela IV.1, a saber, $\delta t = 5 \times 10^{-5}$. Neste caso, de acordo com a tabela IV.6, depreendemos que os desvios espaciais, citados no penúltimo parágrafo, mantêm-se, também, na mesma ordem de grandeza, donde concluímos que a nossa opção pelo método de integração numérica de Lax-Wendroff foi bastante razoável.

Em todas as tabelas numéricas, exibimos o campo local de velocidades, que só possui componente na direção do eixo x , além das equações de Einstein, G_1^1 , G_1^2 e G_2^2 , cujos membros direitos são nulos, pelo menos, até à ordem de centésimos de milésimos, graças a uma escolha conveniente de parâmetros, citada no capítulo anterior.

As perspectivas de nosso trabalho, consistem, agora, por um lado, em tentar comparar os resultados numéricos, por nós obtidos, para a perturbação na densidade, e que dependem de perturbações na métrica, nesta teoria não linear, com os resultados analíticos para a perturbação na densidade, e que não dependem de perturbações na métrica, na aproximação linear, a partir da equação (III.17). Por outro lado, desejamos revisitar nossa análise numérica, levando em conta perturbações na métrica, que dependam da variável y .

Apêndice A

Os símbolos de Christoffel

O tensor métrico que utilizamos neste trabalho é dado por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (1, -a^2, -b^2, -c^2), \quad (\text{A.1})$$

donde decorre que a métrica em questão se escreverá da seguinte maneira

$$ds^2 = dt^2 - a^2 dx^2 - b^2 dy^2 - c^2 dz^2, \quad (\text{A.2})$$

desde que nos lembremos de que $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ e onde $a = a(t, x, y)$, $b = b(t, x, y)$ e $c = c(t, x, y)$, com a velocidade da luz no vácuo igual a um.

Definindo os símbolos de Christoffel através de

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (\text{A.3})$$

e levando em conta o fato de que

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(1, -\frac{1}{a^2}, -\frac{1}{b^2}, -\frac{1}{c^2} \right), \quad (\text{A.4})$$

deduzimos que os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\Gamma_{11}^0 = a\dot{a}, \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{22}^0 = b\dot{b}, \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma_{33}^0 = c\dot{c}, \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{a_x}{a}, \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{a_y}{a}, \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{b_x b}{a^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{c_x c}{a^2}, \quad (\text{A.12})$$

$$\Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{b}}{b}, \quad (\text{A.13})$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{b_x}{b}, \quad (\text{A.14})$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{b_x}{b}, \quad (\text{A.15})$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{c_y c}{b^2}, \quad (\text{A.16})$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{a_y a}{b^2}, \quad (\text{A.17})$$

$$\Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{c}}{c}, \quad (\text{A.18})$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{c_x}{c}, \quad (\text{A.19})$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{c_y}{c}. \quad (\text{A.20})$$

Apêndice B

O tensor de Ricci

Escrevendo o tensor de Ricci na forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \quad (\text{B.1})$$

e utilizando os resultados do Apêndice A, deduzimos que as componentes não nulas do tensor de Ricci são dadas por

$$R_{00} = -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c}, \quad (\text{B.2})$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{\dot{a}b_x}{ab} + \frac{\dot{a}c_x}{ac} - \frac{\dot{b}_x}{b} - \frac{\dot{c}_x}{c}, \quad (\text{B.3})$$

$$R_{02} = R_{20} = \frac{\dot{b}c_y}{bc} + \frac{\dot{b}a_y}{ba} - \frac{\dot{c}_y}{c} - \frac{\dot{a}_y}{a}, \quad (\text{B.4})$$

$$R_{11} = a\ddot{a} + \frac{aa_y b_y}{b^3} + \frac{a\dot{a}\dot{b}}{b} + \frac{a\dot{a}\dot{c}}{c} + \frac{a_x b_x}{ab} + \frac{a_x c_x}{ac} - \frac{b_{xx}}{b} - \frac{c_{xx}}{c} - \frac{aa_{yy}}{b^2} - \frac{aa_y c_y}{b^2 c}, \quad (\text{B.5})$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{a_y c_x}{ac} + \frac{b_x c_y}{bc} - \frac{c_{xy}}{c}, \quad (\text{B.6})$$

$$R_{22} = \ddot{b}\dot{b} + \frac{ba_x b_x}{a^3} - \frac{bb_x c_x}{a^2 c} + \frac{bb\dot{a}}{a} + \frac{bb\dot{c}}{c} + \frac{b_y a_y}{ba} + \frac{b_y c_y}{bc} - \frac{bb_{xx}}{a^2} - \frac{a_{yy}}{a} - \frac{c_{yy}}{c}, \quad (\text{B.7})$$

$$R_{33} = c\ddot{c} + \frac{cc_x a_x}{a^3} + \frac{cc_y b_y}{b^3} + \frac{c\dot{c}\dot{a}}{a} + \frac{c\dot{c}\dot{b}}{b} - \frac{cc_{xx}}{a^2} - \frac{cc_{yy}}{b^2} - \frac{cc_x b_x}{a^2 b} - \frac{cc_y a_y}{b^2 a}. \quad (\text{B.8})$$

Apêndice C

As equações de Einstein

Podemos escrever as componentes mistas das equações de Einstein da seguinte maneira

$$G_{\mu}^{\nu} = 8\pi T_{\mu}^{\nu}, \quad (\text{C.1})$$

onde a constante de gravitação universal é igual a um e a velocidade da luz no vácuo é, também, igual a um.

O membro esquerdo da equação (C.1) está associado à geometria do modelo cosmológico de que trata este trabalho, que, como já vimos, deve igualar o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter, no limite de perturbação nula. Neste sentido, devemos escrever o primeiro membro da equação (C.1) da seguinte forma

$$G_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R, \quad (\text{C.2})$$

onde tanto as componentes mistas do tensor de Ricci, R_{μ}^{ν} , quanto o escalar de curvatura, R , podem ser obtidos a partir das componentes covariantes do tensor de Ricci, calculadas no Apêndice B, através de $R_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\rho}R_{\mu\rho}$ e de $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Por outro lado, também as componentes mistas do tensor de energia-momento, T_{μ}^{ν} , podem ser obtidas a partir de suas componentes covariantes, através de procedimento idêntico, i.e., $T_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\rho}T_{\mu\rho}$. As componentes covariantes do tensor de energia-momento satisfazem a expressão $T_{\mu\nu} = \epsilon u_{\mu}u_{\nu}$, onde ϵ é a densidade de energia relativística, u_{μ} é a quadrivelocidade e a pressão isotrópica, p , é nula.

De tudo o que vimos, deduzimos que podemos reescrever as equações de Einstein, em componentes mistas, do seguinte modo

$$G_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\rho} R_{\mu\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} g^{\sigma\tau} R_{\sigma\tau} = 8\pi\epsilon g^{\nu\rho} u_{\mu} u_{\rho}, \quad (\text{C.3})$$

de maneira que as componentes mistas não nulas da equação (C.3) se escrevem da seguinte forma

$$G_0^0 = \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} + \frac{a_x b_x}{a^3 b} - \frac{b_x c_x}{b c a^2} + \frac{c_x a_x}{c a^3} - \frac{b_{xx}}{a^2 b} - \frac{c_{xx}}{c a^2} + \frac{a_y b_y}{a b^3} + \frac{b_y c_y}{b^3 c} - \frac{c_y a_y}{c a b^2} - \frac{c_{yy}}{b^2 c} - \frac{a_{yy}}{a b^2} = 8\pi\epsilon u_0 u^0, \quad (\text{C.4})$$

$$G_0^1 = \frac{\dot{b}_x}{a^2 b} + \frac{\dot{c}_x}{c a^2} - \frac{\dot{a} b_x}{a^3 b} - \frac{c_x \dot{a}}{c a^3} = 8\pi\epsilon u_0 u^1, \quad (\text{C.5})$$

$$G_0^2 = \frac{\dot{a}_y}{a b^2} + \frac{\dot{c}_y}{b^2 c} - \frac{a_y \dot{b}}{a b^3} - \frac{\dot{b} c_y}{b^3 c} = 8\pi\epsilon u_0 u^2, \quad (\text{C.6})$$

$$G_1^1 = \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{b_x c_x}{b c a^2} + \frac{b_y c_y}{b^3 c} - \frac{c_{yy}}{b^2 c} = 8\pi\epsilon u_1 u^1, \quad (\text{C.7})$$

$$G_1^2 = -\frac{b_x c_y}{b^3 c} + \frac{c_{xy}}{b^2 c} - \frac{c_x a_y}{a b^2 c} = 8\pi\epsilon u_1 u^2, \quad (\text{C.8})$$

$$G_2^2 = \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{c_x a_x}{c a^3} - \frac{c_{xx}}{c a^2} - \frac{c_y a_y}{c a b^2} = 8\pi\epsilon u_2 u^2, \quad (\text{C.9})$$

$$G_3^3 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{a_x b_x}{a^3 b} - \frac{b_{xx}}{a^2 b} + \frac{a_y b_y}{a b^3} - \frac{a_{yy}}{a b^2} = 8\pi\epsilon u_3 u^3. \quad (\text{C.10})$$

Com o intuito de tornar o sistema de equações diferenciais, desde (C.4) até (C.10), um pouco mais simples, vamos tomar $b = c$. Além disto, no limite de baixas velocidades ($v \ll c$), vamos fazer $\epsilon = \frac{\rho}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \approx \rho$ e tomar o seguinte campo local de velocidades: $u^0 = 1$, $u^1 = \frac{v_x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \approx v_x$, $u^2 = \frac{v_y}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \approx v_y$ e $u^3 = 0$, onde ρ é a densidade de energia, v_x e v_y são as componentes não nulas do campo local de velocidades, cujo módulo é v e c é a velocidade da luz no vácuo. Finalmente, vamos desprezar os termos de segunda ordem nas componentes do campo local de velocidades, que figuram nos segundos membros das equações desde (C.7) até (C.9).

De tudo o que vimos, deduzimos um conjunto de equações diferenciais, que figura no Capítulo IV, e que corresponde às equações desde (IV.2) até (IV.8).

Apêndice D

O método das diferenças finitas aplicado a duas variáveis

Vamos considerar uma função $u = u(t, x, y)$. Dividimos o espaço t, x, y num reticulado de paralelepípedos congruentes, de arestas $\delta t = l, \delta x = m, \delta y = n$, representamos as coordenadas (t, x, y) de um ponto P , nesta rede, por $t = il, x = jm, y = kn$ e escrevemos $u(il, jm, kn) = u_{i,j,k}$, onde i, j, k são inteiros [Smith].

Para as derivadas parciais de primeira ordem, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}}{2m}, \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}}{2n}. \quad (\text{D.2})$$

Para as derivadas parciais de segunda ordem, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i,j+1,k} + 2u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{m^2}, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i,j+1,k+1} + u_{i,j-1,k-1} - u_{i,j+1,k-1} - u_{i,j-1,k+1}}{4mn}, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j,k+1} + 2u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{n^2}. \quad (\text{D.5})$$

Apêndice E

O método de Lax-Wendroff aplicado a duas variáveis

O método de integração numérica de Lax-Wendroff [Smith], aplicado a uma função $u = u(t, x, y)$ pode ser utilizado para aproximar uma equação do tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0, \quad (\text{E.1})$$

onde $f(u)$ e $g(u)$ são duas funções explícitas de u , por uma equação de diferenças finitas (ver o Apêndice D), em geral, com uma boa precisão, até a segunda ordem, em x e em y , i.e., até termos de ordem igual ou inferior a $O(x^2)$, $O(y^2)$ ou $O(xy)$.

Para tanto, vamos considerar, por exemplo, a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (\text{E.2})$$

onde a e b são constantes positivas. Através de um desenvolvimento em série de Taylor de $u(t, x, y)$, em torno de t_i , obtemos

$$u_{i+1,j,k} = u(t_i + l, x_j, y_k) \approx u_{i,j,k} + l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j,k} + \frac{1}{2} l^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j,k}, \quad (\text{E.3})$$

onde $t_i = il$, $x_j = jm$ e $y_k = kn$, com $l = \delta t$, $m = \delta x$ e $n = \delta y$; $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $j, k = 0, 1, 2, \dots$.

A equação diferencial (E.2) pode ser agora utilizada com o intuito de eliminar as derivadas parciais de u com relação a t , na medida em que esta equação fornece

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}, \quad (\text{E.4})$$

donde decorre que

$$u_{i+1,j,k} \approx u_{i,j,k} - l \left[a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j,k} + b \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j,k} \right] + \frac{1}{2} l^2 \left[a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j,k} + 2ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j,k} + b^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j,k} \right]. \quad (\text{E.5})$$

Neste trabalho, limitamo-nos à aproximação linear em x e em y , i.e., até termos de ordem igual ou inferior a $O(l)$, na série acima, entretanto, em compensação, utilizamos um intervalo de integração numérica muito pequeno, i.e., $l = \delta t = 0.9/9000 = 10^{-4}$ (ver a Tabela IV.1). Além disto, como confirmação da convergência de nossa integração numérica, utilizamos, também, $l = \delta t = 0.9/18000 = 5 \times 10^{-5}$ (ver a Tabela IV.6).

Referências Bibliográficas

- [$\alpha\beta\gamma$] R. A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow, *Phys. Rev.* 73(1948)803.
- [Bondi & Gold] H. Bondi and T. Gold, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 108(1948)252.
- [Dicke & Peebles] R. H. Dicke and P. J. E. Peebles, in: *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, eds. S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
- [EdS] A. Einstein and W. de Sitter, *Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A.*, 18(1932)213.
- [Ellis & Schreiber] G. F. R. Ellis and G. Schreiber, *Phys. Lett. A* 115(1986)97.
- [Ellis & Stoeger] G. F. R. Ellis and W. Stoeger, *Class. Quantum Grav.* 5(1988)207.
- [Fagundes] H. V. Fagundes, *Astrophys. J.* 338(1989)618.
- [Fagundes & Kwok] H. V. Fagundes and S. F. Kwok, *Astrophys. J.* 368(1991)337.
- [Fagundes & Wichoski] H. V. Fagundes and U. F. Wichoski, *Astrophys. J. Lett.* 332(1987)L5.
- [Geller & Huchra] M. J. Geller and J. P. Huchra, *Science* 246(1989)901.

- [Guth] A. H. Guth, Phys. Rev. D 23(1981)347.
- [Lifshitz] E. M. Lifshitz, J. Phys. 10(1946)116.
- [Lifshitz & Khalatnikov] E. M. Lifshitz and I. N. Khalatnikov, Adv. Phys. 12(1963)185.
- [Mather et al.] J. C. Mather et al., Astrophys. J. Lett. 354(1990)L37.
- [Olson] D. W. Olson, Phys. Rev. D 14(1976)327.
- [Peebles et al.] P. J. E. Peebles et al., Nature 352(1991)769.
- [Penzias & Wilson] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. 142(1965)419.
- [Polyakov] A. M. Polyakov, JETP Lett. 20(1974)194.
- [Smith] J. D. Smith, Numerical Solutions of Partial Differential Equations (2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1978).
- [Weinberg] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (Wiley, New York, 1972).

