



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

8

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.001/91

SOBRE EFEITOS QUÂNTICOS EM
GRAVITAÇÃO

GEORGE EMANUEL AVRAAM MATSAS



Orientador

Gerson Francisco

IFT/TE-D-25

Março 1991

Resumo

Trabalhos em gravitação quântica, especialmente sobre a quantização da gravitação, têm sido realizados nos últimos anos. Entretanto, a quantização da gravitação é um problema extremamente difícil de ser resolvido. Este trabalho apresenta uma proposta de quantização da gravitação, baseada na teoria de campos de Einstein-Maxwell, e discute os aspectos físicos e matemáticos desta proposta.

Sobre Efeitos Quânticos em Gravitação

George Emanuel Avraam Matsas

São Paulo, Março de 1991

Tese de Doutorado apresentada no
Instituto de Física Teórica

Orientador: Professor Gerson Francisco

Resumo

Pretendemos estudar como efeitos quânticos podem aparecer e influenciar a gravitação clássica. Na primeira parte, imporemos limites sobre quebra de C e P em gravitação que poderia ser induzida por efeitos quânticos. Na segunda parte, estudaremos a energia de vácuo no espaço-tempo externo a cordas cósmicas e como ela induz a correções quânticas na métrica clássica.

Abstract

We intend to study how quantum effects can appear and influence the classical gravitation. In the first half, we will impose limits on C and P violation in gravitation, which could be induced by quantum effects. In the second half, we will study the vacuum energy outside the spacetime of a cosmic string and its influence on the classical metric.

Agradecimentos

"Aquele que sabe, não fala

Aquele que fala, não sabe"

Lao Tsé

Sem dúvida, inúmeras pessoas foram-me muito mais importantes para a conclusão desta tese do que podem sequer imaginar. Não é necessário, nem possível, citar todos os nomes daqueles que me ajudaram com seu apoio e compreensão nos momentos de abatimento ou fraqueza. No entanto, dentre aqueles entre os quais mais influência recebi no Instituto de Física Teórica, gostaria de citar os Professores Gerson Francisco pela informalidade de nossas discussões sobre física e incondicional apoio recebido, Adriano A. Natale por sua confiança em mim dando-me a oportunidade de participar de uma colaboração e pela sinceridade de suas opiniões extrafísicas, sobre as quais em geral discordamos e Vicente Pleitez por nossas estimulantes discussões diárias sobre teoria de campos, física em geral e uma infinidade de outros temas.

Enfim agradeço a meus pais, amigos e mestres que generosamente nunca exigiram mais do que realmente podia oferecer e à FAPESP pelo apoio financeiro na pessoa de seu acessor pelo incentivo anônimo de seus pareceres.

Índice

1	Introdução	1
2	Simetrias Discretas em Gravitação	4
2.1	A <i>SN1987A</i> e limites na quebra de C e P em gravitação	5
2.2	Teste de quebra de C e P em gravitação via pulsares	12
2.3	Considerações finais	17
3	Flutuação do Vácuo no Espaço de Cordas Cósmicas	20
3.1	Cordas cósmicas	23
3.2	Flutuação do vácuo escalar conforme e torcido no espaço-tempo de cordas cósmicas estáticas	37
3.3	Flutuação do vácuo no espaço-tempo externo a cordas cósmicas girantes	49
3.4	Considerações finais	52

Capítulo 1

Introdução

É interessante o fato de que a teoria da relatividade geral, apesar de ser uma das mais belas da física, parece exibir suas próprias limitações, devido ao aparecimento de singularidades associadas a valores divergentes de grandezas físicas. Apesar disso parece indicar que a teoria clássica da gravitação não é adequada para tratar tais casos extremos, várias questões importantes carecem ser respondidas ainda em seu contexto. Neste sentido, destacamos toda a área da astrofísica gravitacional, além da confirmação (ou não) de algumas hipóteses utilizadas para a demonstração de resultados importantes. Dentre elas, ressaltamos a conjectura do censor cósmico, introduzida em 1969 por R. Penrose, [1] quando também estabeleceu um mecanismo para extrair energia de buracos negros de Kerr que hoje leva o seu nome. Uma singularidade nua, ou seja, não "vestida" por um horizonte de eventos, poderia influenciar o resto do universo de uma maneira não predizível, uma vez que ela não satisfaz nenhuma lei física. Assim, Penrose, para descartar tal possibilidade indesejável, resolveu postular a existência de um censor cósmico que proibiria o aparecimento de tais singularidades. A conjectura do censor cósmico é relevante na demonstração dos resultados associados a buracos negros pelas assim chamadas técnicas globais [2]. Tais técnicas, desenvolvidas em meados dos anos 60, também foram usadas na demonstração de resultados relacionados à existência de singularidades cosmológicas, mas não dizem muito quanto à sua estrutura dinâmica. Talvez, a singularidade do universo mixmaster seja o melhor paradigma que tenhamos para uma singularidade cosmológica. Isso porque ela deve ser considerada genérica, no sentido que se perturbamos arbitrari-

amente as condições iniciais que evoluem para o universo mixmaster de uma quantidade infinitesimal então , o sistema perturbado também terá uma singularidade oscilatória do mesmo tipo que a do universo mixmaster não perturbado. Numerosos estudos passados mostravam que tal singularidade deveria ser caótica mas as conclusões (veja [3] e suas referências) eram sempre baseadas na discretização do modelo. Por outro lado o índice de Lyapunov, que em geral é usado para medir caoticidade, é decrescente quando aplicado à evolução contínua, como verificado inicialmente em [4] e confirmado posteriormente em [5] e [6], mostrando que a caoticidade do modelo mixmaster é muito mais sutil do que inicialmente suposto (veja [7], [8], [9], [10]). Um estudo detalhado deverá ser encontrado, futuramente, na tese de doutorado de K.Ferraz.

Por outro lado, as tentativas de se quantizar a gravitação com o mesmo paradigma usado para as demais interações resvala no problema da não renormalizabilidade. Pode-se então questionar se a teoria da gravitação não deve ser quantizada evocando para tanto as características especiais que a distinguem das demais forças tal como, por exemplo, a existência do princípio de equivalência. Não se pode dizer ao certo como a teoria clássica deve ser modificada. Mas uma bela conjectura devido à Murphy [11], sugere que não há sentido em se medir intervalos de tempo na escala de Planck, indicando que nessa escala a variedade espaçotemporal não é suave e talvez não seja sequer diferenciável.

Podemos adaptar um argumento de Bohr, usado para justificar a quantização do campo eletromagnético, afim de ganharmos um pouco mais de intuição sobre a necessidade de compatibilizarmos a gravitação à mecânica quântica. Seja uma partícula quântica livre no espaço. Sabemos, pelo princípio de incerteza de Heisenberg, que sua trajetória não é bem definida. Por outro lado, digamos que, classicamente, possamos medir todas as propriedades geométricas do espaço-tempo com infinita precisão (onde desprezamos o fato dos próprios instrumentos de medida serem quânticos). Como a curvatura do espaço-tempo é definida, em princípio, pela partícula, o conhecimento da geometria deve se refletir na determinação de sua trajetória, o que estaria em contraposição com o princípio de Heisenberg. Isto parece exigir que o campo gravitacional esteja sujeito a algum tipo de flutuação , que talvez possa ser traduzida em alguma regra de comutação não trivial entre a métrica e suas derivadas, que são os elementos mais naturais para descrever o campo gravitacional, levando assim a uma teoria de

gravitação quântica.

Enfim, gostaríamos de destacar a necessidade da construção de uma teoria mais completa para a gravitação, compatível com a mecânica quântica, mas que não deva necessariamente seguir as fórmulas anteriores, e que, ao mesmo tempo, não devemos esquecer a riqueza da estrutura da teoria clássica, que não está completamente compreendida e que, assim, deve continuar a ser estudada.

Esta tese está dividida em duas partes. Na primeira, estaremos preocupados com limites impostos por medidas astronômicas sobre simetrias da teoria clássica da gravitação, que poderiam ser quebradas por efeitos quânticos. Os resultados podem ser encaixados como pertencentes à categoria de fenomenologia gravitacional. A segunda parte, mais formal, examina efeitos quânticos na gravitação por intermédio de um tratamento semi-clássico (também chamado de teoria de campos em espaços curvos), ou seja, a curvatura do espaço influencia mudanças nos campos sobre ele definidos que por sua vez perturbam a curvatura do espaço-tempo. Mais detalhes serão dados nas respectivas seções. Introduziremos inúmeras notas de rodapé com o intuito de adicionarmos cálculos ou observações que podem ser consideradas enfadonhas ou redundantes com relação ao texto principal, mas que julgamos poderem ser porventura úteis. Sempre que possível, optamos por efetuar os cálculos em unidades racionalizadas mas não hesitamos em introduzir explicitamente as constantes universais, sempre que consideramos isto conveniente ou necessário.

Capítulo 2

Simetrias Discretas em Gravitação

”Espelhos refletem exatamente como não somos.
Nossa idade se mede no vigor de nossos sonhos...”
Escatócrito

Apesar dos relativistas não possuírem motivos para crerem que a teoria da gravitação clássica deva falhar para fenômenos ordinários longe da escala de Planck, $L_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,616 \cdot 10^{-33} \text{cm}$ e $T_p = \sqrt{\hbar G/c^5} \approx 5,391 \cdot 10^{-44} \text{s}$, que está muitíssimo além de nossa atual tecnologia, é fundamental que um número maior de experiências corroborem a teoria. Uma oportunidade ímpar, para tanto, começou a nos ser oferecida na noite (Australiana) de 23 de fevereiro de 1987 às 7:35:40 UT, quando um feixe invulgar de neutrinos detetados durante 12s no Japão (Kamiokande II detector) e EUA (IMB detector), entre outros lugares, anunciava o nascimento da supernova 1987A, relativa à explosão da estrela supergigante azul, denominada Sanduleak situada na Grande Nuvem de Magalhães, na periferia de nossa própria galáxia, a apenas 160.000 anos luz de distância. Uma narrativa da história desta descoberta e da epopéica vitória da gravitação sobre as demais interações após 11 milhões de anos, pode ser encontrada em [12]. A supernova 1987A, cognominada Shelton por ter sido I.Shelton o primeiro a comunicar o fato do observatório de Las Campanas no Chile, serviu para verificar muitos modelos astrofísicos teóricos relativos ao colapso final de estrelas [13], além de impor vários limites em física de partículas [14]. Al-

guns deles podem ser considerados mais inofensivos, assim como o limite na carga elétrica do neutrino $e_\nu < 3 \cdot 10^{-17} e^-$, que mostra seu pequeníssimo valor¹ com relação à carga elementar e^- . Outros, de suma importância, como o limite superior na massa do neutrino. Neutrinos com energias variando entre $7,5 MeV$ a $40 MeV$ foram observados [15] num período de aproximadamente $10s$, provavelmente, derivados da aniquilação elétron-pósitron produzidos por raios *gamma* super-energéticos e comuns na temperatura de, aproximadamente, $10^{11} K$ do núcleo da estrela pré-neutrônica remanescente. É sabido que os neutrinos interagem fracamente com a matéria mas, apesar disso, são necessários alguns segundos para que eles possam escapar do núcleo de $100 km$. Portanto, o fato de terem chegado no mesmo intervalo de tempo, com que os modelos teóricos preveem sua emissão, depois de uma jornada de 160.000 anos, fixa um limite superior na massa do neutrino do e^- de $m_{\nu_e} < 23 eV$. Se limites similares se confirmarem para as massas dos neutrinos do μ e do τ , então, estará descartada a possibilidade dos neutrinos serem responsáveis pela matéria escura do Universo pois, para tanto, seria necessário $m_{\nu_{\tau,\mu}} > 50 eV$. Mas é nos testes gravitacionais que vamos nos deter. Nas duas seções seguintes mostraremos como usamos a *SN1987A* e um pulsar rápido para testarmos quebra de simetrias discretas na gravitação e como o mesmo tratamento foi usado para testar o princípio de equivalência.

2.1 A *SN1987A* e limites na quebra de C e P em gravitação

Desde a verificação experimental pela madame Wu da não conservação da paridade no decaimento β , tal como predito por Lee e Yang, os físicos se mantêm intrigados com a violação de simetrias discretas pelas interações fundamentais. Além disso, tem-se notado que, quanto mais forte a interação

¹De fato a carga elétrica e_ν esperada para o neutrino é nula pois do contrário o decaimento β e outras reações de interação fraca violariam a carga elétrica.

²Com efeito, partindo da relação relativista $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, pode-se concluir que uma partícula, com uma pequena massa m , varre uma distância d num tempo $\Delta t = \frac{d}{c} \left[1 + \frac{m^2 c^4}{2 E^2} \right]$, onde o cálculo é feito em primeira ordem de $\frac{m^2 c^4}{E^2}$. Assim neutrinos com massas significativas deveriam ser detetados em instantes diferentes dependendo de suas energias.

, tanto maior o número de simetrias conservadas. Por exemplo, a interação forte conserva isospin (I) e estranheza (S), a eletromagnética conserva (S) mas não conserva (I) por fim a interação fraca viola tanto (S) como (I). Isso nos estimula a procurar quebras de simetria na gravitação, que é a mais tênue das interações. Tanto quanto sabemos, Morrison e Gold [16] foram os primeiros a sugerir a possibilidade de quebra de simetria em gravitação por conjugação de carga C , que se manifestaria pelo comportamento distinto da matéria e anti-matéria num campo gravitacional. Mais tarde, Schiff [17] refutou a possibilidade de que matéria e anti-matéria tivessem cargas gravitacionais opostas. Recentemente, LoSecco [18] fixou limites na invariança de CP em gravitação usando os neutrinos e antineutrinos emitidos pela SN1987A. Uma cuidadosa análise da distribuição angular dos eventos associados a neutrinos mostrou que três ou quatro eventos devem ter sido induzidos pelo espalhamento $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$ enquanto que os demais são devido à interação de correntes carregadas elétron-antineutrino $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n^0$. De fato, Kolb et al [19] dizem que existe apenas 8% de probabilidade que os dados do detetor Kamiokande II no Japão não contenham ao menos uma interação $\nu_e - e^-$, enquanto que Bahcall et al [20] afirmam que combinando os eventos do detetor IMB (USA) com os do Kamiokande II a probabilidade cai para apenas 1%. Assim, supondo-se que ao menos um dos eventos está associado a neutrinos e notando-se que a diferença do tempo de chegada entre eles e os antineutrinos é de apenas 12s, pode-se fixar um limite superior na invariança CP em gravitação (lembramos que a operação CP leva um neutrino num anti-neutrino)

$$\gamma_\nu - \gamma_{\bar{\nu}} \leq 10^{-5} - 1,5 \cdot 10^{-6}, \quad (2.1)$$

onde γ é um parâmetro PPN (Parametrized Post Newtonian parameter) (veja por exemplo [21]).

Em resumo, o parâmetro PPN γ , usado para medir desvios na gravitação Einsteiniana, pode ser colocado ad hoc no elemento de linha de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas, expandido para campo fraco $\frac{M}{2R} \ll 1$ ($G = c = 1$), como segue

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M}{R} + 2 \left(\frac{M}{R} \right)^2 \right] dt^2 + \left[1 + \frac{2M\gamma}{R} \right] [dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (2.2)$$

Assim a relatividade geral prevê $\gamma_\nu - \gamma_{\bar{\nu}} = 0$. A incerteza na desigualdade fixada em 2.1 se deve ao não conhecimento exato do tempo gasto pelas

partículas em sua trajetória que, devido à curvatura gravitacional, devem ter sido atrasadas de 1 a 6 meses. Conclusões parecidas na quebra de CP em gravitação foram obtidas, independentemente, por Pakvasa et al [22] um pouco mais tarde.

Notemos agora que, $\gamma_\nu - \gamma_{\bar{\nu}} \neq 0$ implicaria não só na quebra de CP, mas também (e principalmente) na quebra do princípio de equivalência, fraco³. Os primeiros a fixarem limites no princípio de equivalência, usando dados da supernova , foram Longo [15] e Krauss e Tremaine [23] . Para tanto, eles usaram a diferença no tempo de chegada de fótons e neutrinos , o que fixa um limite superior no parâmetro PPN γ

$$\gamma_\gamma - \gamma_\nu \leq 10^{-3}. \quad (2.3)$$

Longo também coloca um limite sobre a quebra do princípio de equivalência para ν s (supostos não massivos) de diferentes energias

$$[\gamma_\nu(40MeV) - \gamma_\nu(7,5MeV)] \leq 1,6 \cdot 10^{-6}. \quad (2.4)$$

Nós, por sua vez, optamos por estudar possíveis quebras de simetrias discretas usando um potencial gravitacional fenomenológico [24]. Levando-se em conta que as únicas variáveis relevantes, que podem influenciar na trajetória das partículas, são o vetor posição \vec{r} da partícula com relação a um dado referencial, sua velocidade \vec{v} e seu spin $\vec{\sigma}$, podemos escrever o potencial mais geral não conservando C, P e T (mas impondo como preconceito invariância CPT) como sendo⁴ ($\hbar = 1$)

$$U_{CPT}(\vec{r}) = \frac{GM}{r} [A_1 \vec{\sigma} \cdot \hat{r} + A_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{v}/c + A_3 \hat{r} \cdot \vec{v}/c], \quad (2.5)$$

no mesmo espírito de Hari Dass [25]. As constantes A_i , ($1 \leq i \leq 3$) são constantes adimensionais e supostas muito menores que a unidade, enquanto

³Lembramos que o princípio de equivalência fraco tem caráter cinemático, pois afirma que todos os pontos materiais seguem geodésicas no espaço-tempo , enquanto que sua versão forte tem caráter dinâmico, pois afirma que em qualquer ponto de um espaço-tempo com um campo gravitacional arbitrário, é possível encontrar um sistema de coordenadas localmente inercial tal que, em uma região suficientemente pequena do ponto em questão, as leis da natureza tomam a forma familiar da relatividade especial

⁴Pode-se notar que em [24] o terceiro termo difere do mostrado em 2.5 que é o correto mas, como tal termo não foi usado em nenhum cálculo, todos os resultados ficam inalterados.

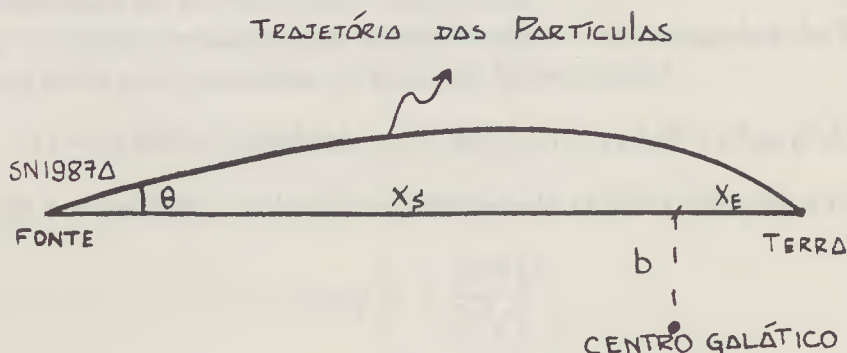


Figure 2.1: Esboço da trajetória SN1987A - Terra.

que M é a massa da fonte gravitacional. O primeiro termo foi proposto originalmente por Leitner e Okubo [26] e viola conservação de P e T, o segundo termo viola a conservação de P e C e o último termo viola C e T. Note que o nosso potencial além de violar simetrias discretas, também viola o princípio de equivalência fraco, pois partículas de diferente spin sentiriam a gravitação de maneira distinta. Um limite superior sobre A_1 já fora fixado [26], usando-se experiências de laboratório, através do estudo do splitting hiperfino do ground state do hidrogênio, obtendo-se $A_1 < 10^{-11}$ quando da utilização de prótons e $A_1 < 10^{-7}$ quando elétrons são usados em seu lugar. Apesar de que, como se verá a seguir [24], não conseguimos melhorar este limite, podemos fixar um bom limite para A_2 já que são necessárias para tanto partículas relativistas. Em especial, usamos neutrinos e fótons, onde consideramos como potencial gravitacional generalizado ($G = c = 1$)

$$U(\vec{r}) = U_0(\vec{r}) [1 + A_1 \vec{\sigma} \cdot \hat{r} + A_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{v}], \quad (2.6)$$

onde $U_0(\vec{r}) = -\frac{M}{r}$ e já desprezamos o terceiro termo de 2.5, pois ele será sentido igualmente por ν s e γ s, não influenciando, portanto, no resultado (veja Fig. 2.1). Desprezaremos a massa da Grande Nuvem de Magalhães, por ter menos de 3% da massa da nossa galáxia. Considerando que os fótons e neutrinos gastam a maior parte do tempo fora da galáxia, é natural supor que o campo gravitacional da galáxia é gerado como se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro (CG). Uma outra possibilidade é discutida em [23], onde a distribuição de matéria tenta ser levada em conta. Em ambas as situações os resultados obtidos são similares e portanto nos

concentraremos no primeiro por simplicidade.

Seja a solução estática com simetria esférica das equações de Einstein no vácuo dada pelo elemento de linha de Schwarzschild

$$ds^2 = -(1-2GM/rc^2)c^2 dt^2 + dr^2/(1-2GM/rc^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.7)$$

que pode ser reescrito, mudando a coordenada radial conforme a relação

$$r = \rho \left[1 + \frac{MG}{2c^2 \rho} \right]^2, \quad (2.8)$$

em sua forma isotrópica consagrada pelos astrofísicos⁵

$$ds^2 = -\frac{\left[1 - \frac{GM}{2\rho c^2}\right]^2}{\left[1 + \frac{GM}{2\rho c^2}\right]^2} c^2 dt^2 + \left[1 + \frac{GM}{2\rho c^2}\right]^4 \left[d\rho + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.9)$$

Seguindo os passos primeiramente dados por Eddington e Robertson, expandimos o potencial Newtoniano

$$V_N = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\rho \left[1 + \frac{MG}{2c^2 \rho}\right]^2} \quad (2.10)$$

para campo fraco $\frac{MG}{2c^2 \rho} \ll 1$ obtendo

$$V_N(\rho) = -\frac{GM}{\rho} \quad (2.11)$$

No nosso caso em especial, esta aproximação é muito boa pois ao longo de toda a trajetória das partículas $\frac{GM}{2c^2 \rho} < 10^{-6}$, como pode ser comprovado substituindo-se para M a massa da galáxia e para ρ a distância de maior aproximação das partículas ao centro galático. Levando 2.11 em 2.9 e trocando as coordenadas esféricas por cartesianas, escrevemos o elemento de linha como

$$ds^2 = -\frac{\left[1 + \frac{V_N(\rho)}{2c^2}\right]^2}{\left[1 - \frac{V_N(\rho)}{2c^2}\right]^2} c^2 dt^2 + \left[1 - \frac{V_N(\rho)}{2c^2}\right]^4 \left[dx^2 + dy^2 + dz^2 \right]. \quad (2.12)$$

⁵Onde são úteis as relações $\left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right] = \frac{\left[1 - \frac{GM}{2\rho c^2}\right]^2}{\left[1 + \frac{GM}{2\rho c^2}\right]^2}$ e $dr = d\rho \left[1 + \frac{GM}{2\rho c^2}\right] \left[1 - \frac{GM}{2\rho c^2}\right]$.

Para partículas não massivas, a geodésica é dada fazendo-se $ds = 0$ e supondo tal trajetória quase retilínea⁶, definida na direção x , podemos considerar $dy = dz = 0$, sendo suas trajetórias dadas por

$$-\frac{\left[1 + \frac{V_N(\rho)}{2c^2}\right]^2}{\left[1 - \frac{V_N(\rho)}{2c^2}\right]^2} c^2 dt^2 + \left[1 - \frac{V_N(\rho)}{2c^2}\right]^4 dx^2 = 0. \quad (2.13)$$

Integrando 2.13 obtemos

$$cT = \int_{-X_S}^{X_E} \frac{\left[1 - \frac{V_N(\rho)}{2c^2}\right]^3}{\left[1 + \frac{V_N(\rho)}{2c^2}\right]} dx \quad (2.14)$$

que é o tempo gasto pelas partículas desde a supernova até a detecção na Terra (veja Fig. 2.1). Fazendo nova expansão em 2.14 para $V_N(\rho)/(2c^2) \ll 1$ obtem-se

$$cT = \int_{-X_S}^{X_E} \left[1 - 2\frac{V_N(\rho)}{c^2}\right] dx = (X_E + X_S) - \frac{2}{c^2} \int_{-X_S}^{X_E} V_N(\rho) dx. \quad (2.15)$$

O primeiro termo é o que obteríamos sem curvatura do espaço-tempo, enquanto que o segundo termo é responsável pelo atraso de aproximadamente 5 meses devido ao potencial gravitacional $V_N(\rho)$. Estendemos agora este resultado e afirmamos que, se o potencial gravitacional Newtoniano for generalizado para o sugerido em 2.6 então, o tempo total gasto pelas partículas será

$$cT = (X_E + X_S) - \frac{2}{c^2} \int_{-X_S}^{X_E} U(\rho) dx. \quad (2.16)$$

Note que, segundo 2.16, cada partícula levará um tempo diferente posto que cada uma delas sente o potencial $U(\rho)$ de forma diversa. Assim, de 2.16 e 2.6, escrevemos a diferença de tempo de propagação de fótons e neutrinos como

$$\Delta T = T_\gamma - T_\nu = -\frac{2}{c^3} \int_{-X_S}^{X_E} U_0 [A_1(\vec{\sigma}_\gamma - \vec{\sigma}_\nu) \cdot \hat{r} + A_2(\vec{\sigma}_\gamma - \vec{\sigma}_\nu) \cdot \vec{v}] dx. \quad (2.17)$$

⁶Especificamente no nosso caso, é natural que a nossa trajetória seja aproximada por uma reta, pois o ângulo de deflexão θ (veja Fig. 2.1) pode ser mostrado ser da ordem $\theta \approx \left[\frac{\text{atr. dev. curv.}}{\text{tem. tot. viag.}}\right]^{1/2} \approx \left[\frac{5 \text{ meses}}{1,6 \cdot 10^3 \text{ anos}}\right]^{1/2} \approx 6''$.

Lembremos agora, que neutrinos são de mão esquerda e os anti-neutrinos são de mão direita, enquanto que os fótons tem ambas as helicidades. Assim, assumimos $|\vec{\sigma}_\gamma - \vec{\sigma}_\nu| \approx 1$. Sendo as partículas não massivas ($|\vec{v}| = c$), reescrevemos 2.17 como⁷

$$\Delta T = -\frac{2}{c^3} \int_{-X_S}^{X_E} U_0(A_1 x/r + A_2) dx, \quad (2.18)$$

onde $U_0 = -\frac{GM}{r}$ e $r = \sqrt{x^2 + b^2}$ veja Fig. 2.1. Podemos então reescrever 2.18 de maneira mais conveniente, após a mudança de coordenadas $x \rightarrow y = x/b$

$$\Delta T = \frac{2GM}{c^3} \left[A_1 \int_{-X_S/b}^{X_E/b} \frac{y dy}{y^2 + 1} + A_2 \int_{-X_S/b}^{X_E/b} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}} \right] \quad (2.19)$$

que pode ser facilmente integrado

$$\Delta T = \frac{2GM}{c^3} \left[A_1 \ln(\sqrt{y^2 + 1}) + A_2 \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \right]_{-X_S/b}^{X_E/b}. \quad (2.20)$$

O parâmetro de impacto b é da mesma ordem de grandeza da distância do centro da galáxia ao sol e vale aproximadamente $b \approx 12kpc \approx 3,6 \cdot 10^{22}cm$. A distância X_S pode ser considerada a distância que nos separa da Grande Nuvem de Magalhães e tem valor $X_S \approx 50kpc \approx 1,7 \cdot 10^{23}cm$. Para efeito de cálculo, usaremos as aproximações $X_S \gg b$ e $X_E \ll b$ com o que podemos reescrever 2.20

$$\Delta T = \frac{2GM}{c^3} \left[-\frac{A_1}{2} \ln[1 + X_S^2/b^2] + A_2 \ln \left[\frac{X_S}{b} + \sqrt{\frac{X_S^2}{b^2} + 1} \right] \right]. \quad (2.21)$$

Quanto à diferença de tempo de chegada entre neutrinos e fótons ΔT , como já dissemos, a chegada de neutrinos é conhecida a menos de alguns segundos, mas a chegada de raios γ é bem mais controversa. A última observação de normalidade da Grande Nuvem de Magalhães se deve a Shelton (2:20UT) a umas 5hs antes da chegada dos neutrinos (se não levarmos em conta a declaração do astrônomo amador Neo Zelandez Albert Jones que disse nada notar de anormal naquela região celeste quando da sua observação às 9:30 UT) e a primeira detecção de chegada de raios γ se deve ao

⁷Os sinais de A_i não são relevantes pois estaremos interessados apenas em seu módulo.

Australiano McNaught (10:38 UT) a, aproximadamente, 3 horas depois da chegada dos neutrinos. De fato, a chegada dos neutrinos devia se dar antes da chegada dos fótons, devido à grande densidade do núcleo da estrela e ao fato que neutrinos interagem muito mais fracamente com a matéria. De passagem, comentamos que a pequena diferença no tempo de chegada de ν s e γ s corroborou o fato que a estrela que colapsou foi uma gigante azul e não uma gigante vermelha como suposto em geral pelos modelos teóricos. Assumimos então, uma postura conservadora e tomamos $|\Delta T| = 6hs$. Estimando agora a massa da galáxia, dentro de um raio de 60kpc, por volta de $M = 6.10^{11} \approx 1,2.10^{45}g$ e substituindo tudo em 2.21, obtemos

$$|-1,5.A_1 + 2,1.A_2| \leq 3,6.10^{-3}. \quad (2.22)$$

Se saturamos 2.22 fazendo $A_2 = 0$, obtemos $|A_1| \leq 10^{-3}$, que é 8 ordens de magnitude acima do limite imposto por Leitner e Okubo [26] e portanto não possui qualquer valor. Mas fazendo $A_1 = 0$, por outro lado, obtemos

$$|A_2| \leq 10^{-3} \quad (2.23)$$

que era o melhor valor que conhecíamos sobre este parâmetro até o momento. Mais tarde, LoSecco sugeriu que estudássemos a diferença no tempo de chegada da luz com polarizações opostas, provenientes de pulsares rápidos, permitindo-nos fixar um limite bem melhor para quebra de C e P e quase igualar o limite imposto em [26] para quebra de P e T.

2.2 Teste de quebra de C e P em gravitação via pulsares

Nesta seção analisaremos o tempo de chegada de fótons com polarizações opostas, provenientes de pulsares rápidos. Note que fótons com polarizações opostas devem sentir o potencial 2.5 de maneiras diferentes. Apesar do tratamento aqui utilizado ser similar ao da seção anterior, alguns cuidados especiais devem ser tomados. O primeiro deles está relacionado com o potencial gravitacional que será usado para a galáxia. Como os pulsares cujos sinais são suficientemente fortes localizam-se em nossa própria galáxia, preferimos usar o potencial gravitacional isotérmico [23]

$$U_0(\rho) = v_c^2[\ln(\rho/\rho_{max}) - 1] \quad (2.24)$$

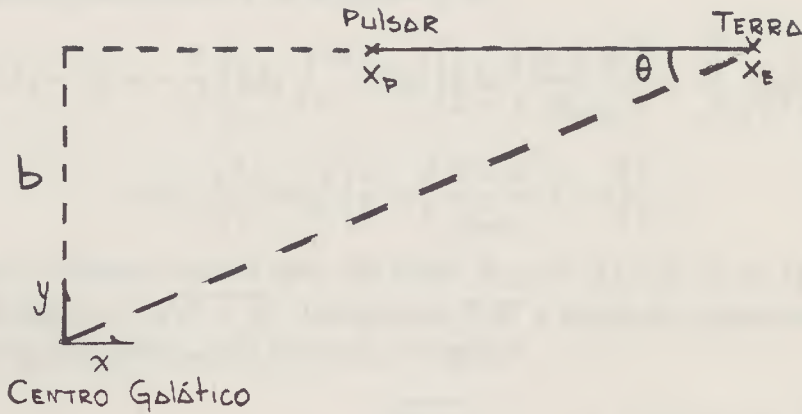


Figure 2.2: Esboço da trajetória pulsar-Terra.

para $\rho < \rho_{max}$, que tenta ser um potencial mais realístico para a galáxia, onde a velocidade circular $v_c = 220 \text{ km/s}$ é assumida independente do raio e $\rho_{max} = 100 \text{ kpc}$.

Lembrando 2.5, definimos o potencial gravitacional estendido como

$$U(\vec{\rho}) = U_0(\rho) [1 + A_1 \vec{\sigma} \cdot \hat{\rho} + A_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{v}/c + A_3 \hat{\rho} \cdot \vec{v}/c] \quad (2.25)$$

com $U_0(\rho)$ dado por 2.24 e analogamente a 2.16, dizemos que o tempo gasto pelos fótons vindos do pulsar levam um tempo

$$T = (X_E - X_P)/c - \frac{2}{c^3} \int_{X_P}^{X_E} U(\vec{\rho}) dx \quad (2.26)$$

com $U(\vec{\rho})$ dado por 2.25 (vide Fig. 2.2).

Observamos agora que, na dedução de 2.16, usamos a solução de Schwarzschild, que é uma solução de vácuo, enquanto que o potencial gravitacional 2.24 considera uma distribuição de matéria para a galáxia. Isso apenas é compatível porque 2.24 é da mesma ordem de grandeza que o potencial Newtoniano 2.11 nas distâncias típicas envolvidadas no problema, que são de alguns kpc, como pode ser comprovado numericamente através de cálculo direto. Isso nos chama atenção que, 2.26 será tanto mais precisa, quanto mais fraco (devido às aproximações envolvidadas) e próximo do Newtoniano for o campo gravitacional.

A diferença no tempo de chegada de fótons com polarizações opostas e

emitidos simultaneamente será segundo 2.26

$$\Delta T = T_1 - T_i = -\frac{2}{c^3} \left[2A_1 \int_{X_P}^{X_E} dx v_c^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + b^2}{\rho_{max}^2} \right) - 1 \right] \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right. \\ \left. + 2A_2 \int_{X_P}^{X_E} dx v_c^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + b^2}{\rho_{max}^2} \right) - 1 \right] \right], \quad (2.27)$$

onde deve-se lembrar que o spin do fóton $\vec{\sigma}_{1(1)} = +(-)1$ ($\hbar = 1$) e $\vec{\sigma} // \vec{p}$, além de que $\rho = \sqrt{x^2 + b^2}$. Integrando 2.27 e supondo novamente uma trajetória aproximadamente retilínea obtemos⁸

$$\Delta T = -\frac{4}{c^3} v_c^2 A_1 \left[\rho_{max} \left(y \ln y - y \right) \frac{\sqrt{\frac{x^2 + b^2}{\rho_{max}^2}}}{\sqrt{\frac{x^2 + b^2}{\rho_{max}^2}}} - \rho_{max} \left(\sqrt{y^2 + \frac{b^2}{\rho_{max}^2}} \right) \frac{\frac{X_E}{\rho_{max}}}{\frac{X_P}{\rho_{max}}} \right] \\ - \frac{4}{c^3} v_c^2 A_2 \left[\frac{\rho_{max}}{2} \left(y \ln y^2 + \frac{b^2}{\rho_{max}^2} - 2y + 2 \frac{b}{\rho_{max}} + \frac{2b}{\rho_{max}} \text{arctg}(y\rho_{max}/b) \right) \frac{\frac{X_E}{\rho_{max}}}{\frac{X_P}{\rho_{max}}} \right] \\ - \frac{4}{c^3} v_c^2 A_2 (X_E - X_P) \quad (2.28)$$

Por outro lado, os pulsos emitidos pelos pulsares e observados na Terra parecem chegar com as polarizações de seus fótons misturadas, mostrando que se houver quebra de P e T ou P e C em gravitação, ela deve ser muito pequena. Assim o melhor que podemos fazer é assumir como diferença de tempo ΔT , devido ao potencial 2.25 na chegada de fótons de polarizações opostas, a própria largura do pulso de um dado pulsar. Observando-se com algum cuidado a dependência funcional de 2.28, concluímos que para fixarmos bons limites sobre os parâmetros A_i , devemos maximizar a razão

$$\frac{\text{dist.puls.} - \text{Terr.}}{\text{larg.pul.}} \quad (2.29)$$

O melhor candidato que encontramos foi o pulsar PSR 1937+214 que está localizado 2,5kpc afastado da Terra, $\alpha(1950) = 19^h 37^m 28^s$ e $\delta(1950) =$

⁸Para fazermos uma das integrações acima usamos [27] pg 205 (2.733.1) e para resolver $\int \ln \frac{x^2 + b^2}{\rho_{max}^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} dx$ recomendamos a mudança de variáveis $x^2 \rightarrow y^2 = \frac{x^2 + b^2}{\rho_{max}^2}$.

21^h28'01" [28]. O ângulo entre os segmentos Terra-pulsar e Terra-centro galático é aproximadamente 57,4 e este último segmento foi considerado como tendo 8,5kpc (vide Fig. 2.2). Para a largura do pulso usamos [28] $|\Delta T| \approx 10^{-4}$ s. Juntando todos estes dados em 2.28 obtemos

$$|7,7 \cdot 10^5 A_1 + 1,9 \cdot 10^6 A_2| \leq 10^{-4}. \quad (2.30)$$

Saturando 2.30 fazendo primeiramente $A_1 = 0$ e em seguida fazendo $A_2 = 0$, obtemos [29] os seguintes limites

$$|A_1| \leq 2 \cdot 10^{-10} \quad (2.31)$$

e

$$|A_2| \leq 6 \cdot 10^{-11}, \quad (2.32)$$

que são várias ordens de magnitude melhor do que os limites impostos via supernova como pode ser comprovado comparando 2.32 com 2.23. Em particular o limite de A_1 quase alcança o de Leitner e Okubo [26].

Pode-se agora especular que a influência do campo gravitacional do pulsar, pudesse no início da emissão ser tão importante que, rivalizasse com o efeito cumulativo do campo gravitacional da galáxia e que portanto deveria ser considerado. Mostramos a seguir que isto realmente não acontece. Seja o elemento de linha de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist ($G=c=1$),

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2M}{\rho(1 + a^2 \cos^2 \theta / \rho^2)} \right] dt^2 - \frac{1 + a^2 \cos^2 \theta / \rho^2}{1 - 2M/\rho + a^2/\rho^2} d\rho^2 - (1 + a^2 \cos^2 \theta / \rho^2) \rho^2 d\theta^2 - \left[1 + a^2/\rho^2 + \frac{2Ma^2 \sin^2 \theta}{\rho^3(1 + a^2 \cos^2 \theta / \rho^2)} \right] \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{4Ma \sin^2 \theta}{\rho(1 + a^2 \cos^2 \theta / \rho^2)} dt d\phi, \quad (2.33)$$

ou seja, a solução estacionária de vácuo das equações de Einstein, que devem caracterizar a geometria externa de estrelas girantes como é o caso de pulsares, que basicamente são estrelas de neutrons com massa M e momento angular L e onde

$$a = L/M. \quad (2.34)$$

Supomos agora que por mais veloz que seja a rotação do pulsar, seu momento angular é tal que ainda assim⁹ $a/\rho \ll 1$. Para esta aproximação ,

⁹Classicamente para uma esfera rígida com velocidade angular ω e raio r_p temos $a/\rho = \frac{2r_p^2 \omega}{5\rho}$.

que mesmo se não completamente satisfatória, a usaremos apenas para uma estimativa, podemos aproximar o campo do pulsar pelo de Schwarzschild.¹⁰

$$ds^2 = (1 - 2M/r)dt^2 - dr^2/(1 - 2M/r) - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.35)$$

Reescrevendo agora 2.35, usando a mesma filosofia anterior, e substituindo o potencial Newtoniano pelo 2.6, obtemos

$$ds^2 = (1 - 2U(\vec{r}))dt^2 - dr^2/(1 - 2U(\vec{r})) - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.36)$$

Em seguida, colocando o pulsar na origem do sistema de coordenadas e supondo novamente que a trajetória é quase retilínea na direção radial, podemos fazer $ds = 0$ em 2.36 e descobrir o tempo gasto pelos fótons para chegarem à Terra, apenas sob a influência do campo do pulsar,

$$T = \int_{R_p}^D \frac{dr}{1 - 2U(\vec{r})}, \quad (2.37)$$

onde D é a distância pulsar-Terra. Lembrando que para fótons $\vec{\sigma} // (\vec{v} = \vec{c})$ e devido à geometria usada $\vec{\sigma} // \hat{r}$, escrevemos o potencial 2.6 correspondente a fótons com polarizações opostas como

$$U_{\uparrow(1)}(\vec{r}) = \frac{M_p}{r} [1 + (-)A_1 + (-)A_2]. \quad (2.38)$$

Levando 2.38 em 2.37 podemos integrar facilmente a expressão (vide [27] (2.145.5)) para obter

$$T_{\uparrow(1)} = k_{\uparrow(1)} [\ln(x - 1) + x]_{r_p/k}^{D/k}, \quad (2.39)$$

onde

$$k_{\uparrow(1)} = 2(1 + (-)A_1 + (-)A_2)M_p. \quad (2.40)$$

¹⁰Note que o único termo que não é de ordem a^2/ρ^2 em 2.33 é o último. Mas levando em conta que os fótons emitidos pelos pulsares são devido à radiação síncrotron, referente à aceleração de elétrons na direção do eixo magnético (lembramos que a radiação síncrotron de partículas ultrarelativistas $\beta \approx 1$ aceleradas na mesma direção de sua velocidade aponta praticamente em sua totalidade na direção do movimento. Mais precisamente o ângulo entre a direção da radiação emitida e o movimento da partícula é $\approx (1 - \beta^2)^{1/2}/2$) e supondo que o eixo magnético não difira drasticamente do eixo de rotação, então $(\sin \theta)^2 \approx \theta^2 \ll 1$.

Assim, de 2.39 calculamos a diferença no tempo de chegada de fótons com polarizações opostas

$$\Delta T = T_{\uparrow} - T_{\downarrow} \approx 4(A_1 + A_2)M \ln \frac{D - 2M_p}{r_p - 2M_p}. \quad (2.41)$$

Usando, agora, os valores típicos para a massa de um pulsar $M_p \leq 3M_{\odot} \approx 6.10^{33}g$, raio $r_p \approx 15km$ e os valores A_1 e A_2 fixados em 2.31 e 2.32, podemos calcular a partir de 2.41 o atraso na chegada de fótons com helicidades invertidas devido exclusivamente ao campo do pulsar PSR 1937+214 como

$$\Delta T \approx 6.10^{-13}s, \quad (2.42)$$

que pode ser evidentemente desprezado em relação ao efeito galático.

2.3 Considerações finais

Antes de finalizar, gostaríamos de sugerir como nossos resultados poderiam ser melhorados.

Quanto a limites em A_3 , a única possibilidade eficiente, que podemos vislumbrar, é comparar o tempo de propagação de ida e de volta com que partículas (relativistas de preferência) levam para varrer uma mesma distância num campo gravitacional. Isso não deveria ser difícil de ser implementado, usando-se satélites e comparando-se o tempo de troca de sinais de rádio. Infelizmente, não sabemos se tais dados existem.

Com relação aos limites A_1 e A_2 , somos inspirados, a partir da fórmula 2.29, a procurar pulsares rápidos e distantes da Terra. De fato, um ótimo candidato em potencial seria observar o centro da SN1987A, tão logo a matéria ejetada se diluísse com a expansão, pois se observado tal pulsar, deveria ser rápido por ser jovem e estaria suficientemente distante para melhorar nossos resultados em uma ou duas ordens de magnitude. Para nossa satisfação inicial na mesma época em que sugeríamos esta possibilidade [29], uma circular (IAU 4735) foi divulgada por J.Middleditch e seus treze colaboradores reportando a observação, em Cerro Tololo por 7hs consecutivas de um pulsar ótico. Aparentemente, depois de se eliminar o ruído devido ao decaimento radioativo do níquel e do cobalto, um milionésimo da luz da supernova pulsava periodicamente numa taxa espetacular de 1968,629

vezes por segundo, ou seja, o possível pulsar completaria um ciclo a cada 0,5 ms e para tanto deveria ter uma velocidade na periferia de quase 40% a velocidade da luz. Alguns pontos, no entanto, eram bizarros desde o início. As observações indicavam que o pulsar deveria ter uma companheira muito pequena com massa de ordem planetária e sua órbita seria tão próxima do pulsar que antes da explosão estaria bem interna à gigante azul que deu origem à supernova . Ao mesmo tempo um pulsar tão rápido deveria ter uma potência de emissão muitas ordens de grandeza acima do que era observado. Por fim, e mais dramático, tais observações nunca se repetiram.

Algum tempo depois, para felicidade dos astrofísicos teóricos que se pouparam de adaptar suas teorias a novos fatos e nossa frustração (apesar de consideravelmente menor que a de Middleditch), veio a confirmação de que houve alguma falha na aparelhagem ou nas próprias observações do dia 18 de janeiro e até agora não há nenhum indício de que a maior explosão de supernova observada desde Kepler em 1604 tenha nos deixado um pulsar como souvenir.

A despeito disso, recentemente, pesquisadores de Princeton foram capazes de melhorar nossos limites [30] através de um detalhado estudo da polarização da luz proveniente do pulsar PSR1937+21 [31]. O módulo do atraso entre fótons de helicidades opostas foi fixado em $\Delta T \leq 1\mu s$ melhorando em uma ordem de magnitude nossos resultados:

$$\|A_1\| \leq 4.10^{-12} \quad (2.43)$$

e

$$\|A_2\| \leq 10^{-12}. \quad (2.44)$$

Notemos também, que a partir desse estudo de polarização , podemos melhorar em várias ordens o limite na invariança de CP tal como concebido originariamente por LoSecco [18] . Para tanto, lembremos que a operação C leva um fóton nele mesmo e que a operação P troca a helicidade do fóton . Imitando o mais proximamente possível os passos de LoSecco feitos previamente para neutrinos , anulamos ds em 2.2 e efetuamos a álgebra tal como descrita acima, recaímos numa relação parecida com 2.26 que dá o tempo gasto na viagem pulsar-Terra dos fótons com uma dada polarização \downarrow ou \uparrow como função de seu parâmetro PPN γ ($c = 1$)

$$T_{\uparrow(\downarrow)} = -(1 + \gamma_{\uparrow(\downarrow)}) \int_{pul}^{Ter} U(r) dr. \quad (2.45)$$

Supondo que toda a massa da galáxia se concentre no centro, usamos como potencial gravitacional $U(r)$ o potencial Newtoniano 2.11, para proceder à integração com a geometria adequada, cujos parâmetros já foram anteriormente estabelecidos (veja em [21] relação 40.14 na Pag.1107). Finalmente encontramos para limite superior da diferença entre os parâmetros PPN γ associados aos fótons de helicidades opostas (compare com 2.1)

$$\gamma_{\uparrow} - \gamma_{\downarrow} < 10^{-12} \quad (2.46)$$

que pode por si só ser encarado como um limite na invariança de P e CP em gravitação .

Finalizamos esta primeira parte, referente à quebras de simetrias discretas em gravitação , com a interessante observação feita por Thorsett e Stinebring [31] de que a utilização de pulsares mais distantes apenas poderia melhorar em uma ordem de grandeza os limites 2.43 e 2.44 impostos, pois a técnica por eles utilizada estaria limitada ao ruído associado às observações de fontes muito distantes. Isso nos leva a crer que a fixação de limites muito mais restridentes para quebra de simetrias discretas em gravitação deve estar baseado em algum novo método.

Capítulo 3

Flutuação do Vácuo no Espaço de Cordas Cóslicas

”Quando se sabe que o grande Vácuo esta pleno de Ch’i, compreende-se que não há coisa alguma que seja o nada.”

Chang Tsai

Rendidos às dificuldades para se encontrar uma teoria de gravitação quântica completa e consistente, tentou-se, ao menos, verificar como campos quânticos, em geral, se comportariam num espaço de fundo curvo, que simularia a gravitação clássica. Assim, a teoria semi-clássica da gravitação consiste no estudo da teoria de campos em espaços curvos, com vistas à análise da influência do campo gravitacional no comportamento quântico dos vários campos. Basicamente, a idéia reside em supor que o campo gravitacional tem caráter clássico, determinado pelas equações de Einstein, em distâncias típicas muito maiores que o regime de Planck. Por outro lado, o princípio de equivalência nos diz que a gravitação acopla-se igualmente com todos os tipos de matéria-energia sem excessão. Assim, não podemos descartar a existência de grávitons mesmo numa teoria semi-clássica. Por exemplo, em primeira ordem, um campo escalar não massivo deve colaborar com uma magnitude comparável ao do gráviton [32] para a energia do vácuo.¹ No que segue, estaremos interessados na flutuação do vácuo quântico.

¹Há, no entanto, uma maneira de compatibilizar uma teoria semi-clássica com a presença de grávitons. Seja a métrica de um espaço-tempo dada por $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}$, onde

Ao contrário do pacífico vácuo clássico, o vácuo quântico é bastante violento. Ou seja, mesmo numa região sem partículas reais a temperatura nula, uma contínua criação e aniquilação de pares virtuais se dá no vácuo. Neste sentido, o vácuo deve ser encarado como o estado de mínima energia associado a um dado sistema. Em geral, redefine-se a energia de vácuo que inicialmente é divergente, usando-se a operação de ordenamento normal. Assim, a energia de vácuo que era infinita passa a ser nula. Este procedimento é justificado, dizendo-se que apenas diferenças de energia são mensuráveis.² A possibilidade da redefinição da energia do vácuo, por constantes arbitrárias, poderia a princípio sugerir que ela não se refletiria em nenhum efeito mensurável. Mas, em 1948, Casimir [33] propôs um efeito que evidenciou a realidade física da flutuação de ponto zero do vácuo eletromagnético.

Classicamente, duas placas metálicas descarregadas paralelas e infinitas não teriam motivo algum para se atrair, uma vez desprezado o campo gravitacional e efeitos de temperatura.³ Uma análise mais profunda, no entanto, sob um prisma quântico, mostra que a flutuação do vácuo eletromagnético entre as placas é diferente da flutuação nas duas regiões externas às placas, devido à blindagem por elas exercida. O resultado desse fenômeno é uma força atrativa entre as duas placas metálicas, que independe do material que as constitui, contanto que a distância de penetração nas placas de uma onda com comprimento típico da ordem da distância de separação entre elas, seja muito menor quando comparada com esta distância. Dez anos mais tarde, o efeito Casimir foi confirmado experimentalmente por Sparnay [34] com placas distando da ordem de 1μ . Desde então, sucessivas generalizações do efeito Casimir foram propostas relaxando várias hipóteses, como a de condutor perfeito, temperatura nula, etc(veja as excelentes revisões

$h_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}^{(0)}$ e $g_{\mu\nu}^{(0)}$ é a métrica fixa do espaço de fundo sobre o qual se quantizam todos os campos, inclusive os grávitons associados com a perturbação $h_{\mu\nu}$. Neste sentido, os grávitons são tratados analogamente aos demais campos.

²Evidentemente, tal argumento não pode ser aplicado em gravitação uma vez que é o valor absoluto do tensor de energia momento quem determina a curvatura do espaço-tempo, tornando o estudo do vácuo em espaços curvos uma questão bem mais sutil, que será discutida adiante.

³Note-se que a suposição de placas infinitas é apenas uma hipótese de trabalho uma vez que placas infinitas com densidade constante não são em geral gravitacionalmente estáveis. Na prática, basta que as dimensões típicas sejam muito maiores que a distância que as separa, a fim de que os efeitos de borda possam ser desprezados.

[35] e [36] e suas referências). De fato, a energia de vácuo não é sensível apenas à introdução de fronteiras, que se refletem na imposição de condições de contorno, como no caso do efeito Casimir, mas também à topologia e curvatura do espaço. Neste último caso, esperamos que apenas os modos com comprimentos de onda maiores ou da ordem do raio local de curvatura sejam afetados, sensivelmente, pela presença da curvatura do espaço-tempo. Vale notar que o comportamento do vácuo em espaços curvos toma uma relevância especial quando relacionado com os teoremas clássicos de singularidade, pois as hipóteses de positividade do tensor de energia momento podem ser violados quanticamente. A energia de vácuo foi calculada em alguns espaços curvos explicitamente, tal como no universo de Einstein, onde Ford [37] usa um campo escalar conformemente acoplado e mais tarde [38] analisa o campo escalar conforme massivo, eletromagnético e de neutrinos. A técnica de renormalização utilizada baseia-se na introdução de uma função de cut-off. Apesar do tratamento ser não covariante, uma detalhada análise do método e critério para a escolha da função de cut-off foi feita em [38]. Talvez, a principal motivação física para a utilização do método de cut-off esteja baseada na convicção de que os modos mais energéticos, que são responsáveis pela divergência do valor esperado no vácuo do tensor de energia momento, devem ser menos afetados do que os modos menos energéticos (com comprimento de onda maior ou igual à curvatura típica do espaço em questão). Outros métodos de renormalização mais poderosos foram usados posteriormente neste mesmo tipo de cálculo, tais como regularização dimensional, função zeta e função de dois pontos.

Antes de prosseguirmos, gostaríamos de discutir um pouco mais o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento para o espaço de Minkowski, $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{Mink}$, (daqui para frente estaremos assumindo $\langle A \rangle = \langle 0|A|0 \rangle$ à temperatura zero absoluto qualquer que seja o operador A), uma vez que sempre estaremos interessados em comparar o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento de um dado espaço com relação ao de Minkowski. A invariança de Poincaré exige que

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle^{Mink} = \Lambda \eta^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde em princípio Λ é uma constante arbitrária. Quando, no entanto, usamos 3.1 como fonte das equações de Einstein, vemos que Λ faz o papel da constante cosmológica. Por outro lado, observações astronômicas indicam que seu valor se não for nulo, está muito próximo disso [39] ($\Lambda <$

10^{-56}cm^{-2}). Nós assumiremos ceticamente $\Lambda = 0$, sem nos preocuparmos com os primeiros princípios que, porventura, levem a isso. Note que, apenas neste caso, o espaço de Minkowski é solução das Eqs. de Einstein com o tensor de energia momento de matéria nulo.

Nosso principal objetivo nas seções subsequentes será discutir a flutuação do vácuo no espaço-tempo externo a cordas cósmicas, com certo detalhe, o que constitui um bom exemplo do papel desempenhado pela topologia nas propriedades do vácuo. Para tanto, introduziremos na seção subsequente os conceitos básicos associados a cordas cósmicas a fim de que o texto seja tanto quanto possível auto-contido.

3.1 Cordas cósmicas

Não constitui, absolutamente, nosso objetivo, apresentar uma revisão com aspirações de completeza sobre cordas cósmicas e suas implicações em cosmologia e astrofísica nesta seção, mas sim familiarizar o leitor com estes bizarros objetos, previstos como um possível espécime adicional de nossa fauna celeste, e que segundo Alexander Vilenkin deverão ter seus efeitos sob alcance experimental em breve, a fim de que sua topologia, não trivial utilizada nas seções seguintes, seja introduzida. Para os leitores interessados em se aprofundar em cordas cósmicas ou domínios de parede recomendamos a excelente revisão de Vilenkin [40].

Acredita-se que o Universo perca simetrias à medida que esfrie de tal modo que, logo depois do Big Bang e antes das simetrias serem quebradas, todas as interações ainda devem estar unificadas e descritas por um único grupo de gauge. Não se sabe exatamente, quantas transições de fase ocorreram no início, mas provavelmente todas devem ter ocorrido antes do primeiro segundo. Durante tais transições, são possíveis o aparecimento de vários tipos de defeito no vácuo. Além das cordas cósmicas, poderiam, em princípio, se formar monopolos e domínios de parede. Estes dois últimos, no entanto, não são prováveis que tenham existido por longo tempo, pois por um lado as teorias preveem aparentemente tal profusão de monopolos, que eles não poderiam se passar despercebidos ainda hoje, enquanto que por outro lado, um simples domínio de parede, que tivesse sobrevivido até os tempos atuais, teria mais massa que toda a matéria observada no universo, conduzindo a efeitos desastrosos na cosmologia. Cordas cósmicas por

sua vez, parecem se encaixar, perfeitamente, no atual cenário que temos do universo. Além disso, aproximadamente 5 anos após o aparecimento do trabalho pioneiro de Kibble [41] a respeito de cordas cósmicas, conjecturas foram feitas sugerindo que talvez a oscilação de cordas cósmicas fechadas fosse um possível mecanismo de formação de galáxias. Desde então, o estudo sobre cordas cósmicas teve seu interesse renovado.

Para ilustrar o argumento, que permite o aparecimento de cordas cósmicas, tomemos um boson de Higgs ϕ complexo, sujeito a um potencial auto-interativo

$$V_0(\phi) = \frac{1}{2}\lambda (\phi^+\phi - \eta^2)^2, \quad (3.2)$$

onde $\lambda > 0$ e $\eta \in \mathbf{R}$.

Assumimos como grupo de simetria da teoria $G = U(1)$, ou seja, a teoria deve ser invariante por transformações de fase

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi. \quad (3.3)$$

Naturalmente, o vácuo do modelo será o estado definido pelo mínimo do potencial 3.2 (vide Fig.3.1). Assim o valor esperado no vácuo do campo escalar será

$$\langle \phi \rangle_0 = \eta e^{i\theta}, \quad (3.4)$$

onde η é a magnitude do campo cujo valor é fixado pelo modelo por ocasião da definição do potencial. Por outro lado, a fase local θ é arbitrária e uma escolha específica para seu valor constitui numa quebra de simetria.

Efeitos de temperatura T no potencial podem ser levados em conta através de termos adicionais

$$V_T(\phi) = AT^2\phi^+\phi + V_0(\phi), \quad (3.5)$$

onde A é uma constante suposta positiva. Por ser quadrático, o termo acrescentado define uma massa $m(T)$ efetiva para ϕ através do potencial 3.5 sempre que

$$m^2(T) = AT^2 - \lambda\eta^2 > 0. \quad (3.6)$$

Definimos agora a temperatura crítica T_c , como sendo aquela na qual $m(T_c) = 0$, a saber

$$T_c = [\lambda/A]^{1/2}\eta. \quad (3.7)$$

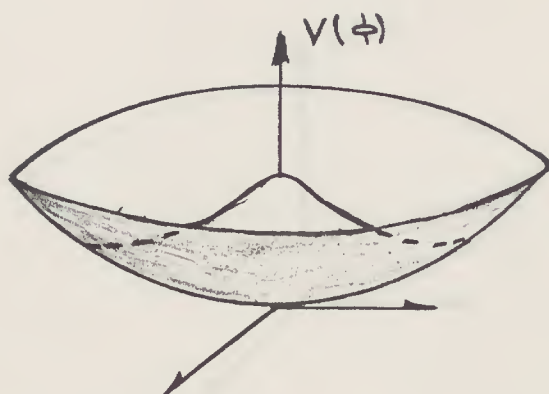


Figure 3.1: Mostra o potencial do campo escalar para este modelo no caso em que $T < T_c$. Em especial quando $T = 0$ temos $|\langle \phi \rangle_0| = \eta$.

Assim para temperaturas $T > T_c$, $m^2(T)$ é positivo e é fácil ver de 3.5 que o valor esperado no vácuo do campo escalar é nulo (vide Fig. 3.2). Porém, à medida que o universo esfria ele, eventualmente, passará para uma temperatura $T < T_c$ e então o potencial característico passa a ser mostrado na Fig. 3.1 implicando num valor esperado no vácuo do campo escalar não nulo. A temperatura crítica T_c caracteriza uma transição de fase, devido à mudança do estado de vácuo de uma dada configuração de campos. Cordas cósmicas nada mais são que defeitos no novo vácuo, de maneira muito parecida aos defeitos que podem aparecer em cristais após uma transição de fase. Mostramos agora porque cordas cósmicas são defeitos estáveis que não podem ser eliminados por meios contínuos, devido a razões topológicas.

Ao contrário dos domínio de parede, que são um outro tipo de defeito no vácuo passíveis de serem formados, em princípio, após uma transição de fase pela quebra de uma simetria discreta, as cordas cósmicas devem sua origem à quebra de uma simetria contínua.

Suponha que após uma transição de fase tenhamos uma quebra espontânea de simetria, onde o valor esperado no vácuo do campo ϕ associado a um potencial do tipo 3.2 seja $\langle \phi \rangle = \eta e^{i\theta}$, tal como mostrado em 3.4, onde a fase θ varia continuamente ao longo do espaço. Como exigimos que o campo ϕ seja univaluado, a fase θ deverá variar ao longo de um loop

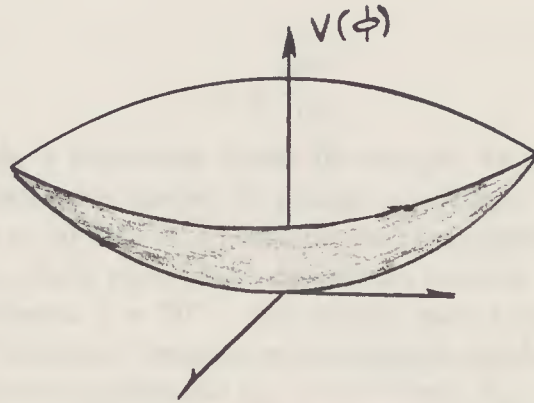


Figure 3.2: Mostra o potencial do campo escalar para este modelo para altas temperaturas $T > T_c$.

fechado hipotético arbitrário de

$$\Delta\theta = 2\pi n, \quad (3.8)$$

onde n é um número inteiro. Considere agora o caso em que $n \neq 0$ e suponha que o loop vai continuamente se contraindo. Justamente pelo fato do processo ser contínuo, não podemos passar, em nenhum instante, para $n = 0$. Isso faz com que postulamos a existência de ao menos uma região interior ao hipotético loop com θ mal definido, onde $\langle \phi \rangle = 0$, que nada mais é do que uma região unidimensional de falso vácuo, a que se deu o nome de corda cósmica. Além disso, pelo argumento acima, induzimos que estes objetos devem ser infinitos ou fechados caso contrário, poderíamos deformar o nosso hipotético loop para fora da corda e depois contraí-lo continuamente para obter $n = 0$ quando o loop se transformasse num ponto. Fica então claro que as cordas cósmicas aparecem num contexto bastante geral, dependendo fundamentalmente da existência de transições de fase mas não, de maneira crucial, da teoria em si. Os valores numéricos dos parâmetros, que caracterizam as cordas por outro lado, estas sim, dependem da teoria de grande unificação subjacente. Para estimarmos a densidade típica associada a estes objetos, usaremos, respectivamente, para as energias de desacoplamento das interações fortes e fracas das demais interações os valores de $10^{15} GeV$ e $10^2 GeV$. A única grandeza com dimensão de massa/distância que podemos montar, usando para tanto apenas as grandezas $\eta = m/\lambda^{1/2}$,

c, \hbar, ϵ

$$\mu \approx \frac{m^2 c}{\lambda \hbar}, \quad (3.9)$$

que será associada à densidade linear de energia da corda. Assim, para as usualmente chamadas cordas de grande unificação ($m \approx 10^{15} GeV/c^2$) e eletrofracas ($m \approx 10^2 GeV/c^2$) temos respectivamente⁴ $\mu_{GU} \approx 10^{22} g/cm$, $\mu_{EF} \approx 10^{-4} g/cm$, onde para efeito de cálculo usamos como valor da constante de acoplamento $\lambda = 10^{-2}$. Os valores para a espessura ϵ e tensão F associadas são também bastante extravagantes, sendo respectivamente⁵ para cordas de grande unificação $\epsilon_{GU} = 10^{-28} cm$, $F_{GU} = 10^{43} dina$ e para cordas eletrofracas $\epsilon_{EF} = 10^{-15} cm$, $F_{EF} = 10^{17} dina$. Apenas a título de ilustração, dizemos que uma porção de alguns kms de uma corda cósmica de grande unificação teria tanta massa quanto toda a massa da Terra.

Devido às grandes tensões envolvidas, cordas infinitas não perfeitamente retas ou em forma de loops tendem a oscilar. De fato, acredita-se que talvez a oscilação de loops de cordas de grande unificação constitua num mecanismo de formação de galáxias. A despeito disso, ao longo de toda a tese, trabalharemos tão somente com cordas cósmicas infinitas e perfeitamente retas por gerarem um espaço-tempo estático e bem comportado. Passamos agora à sua dedução, por ser seu elemento de linha usado nas seções seguintes.

O primeiro a considerar o impacto gravitacional de uma corda no espaço subjacente, no contexto da relatividade geral, foi, aparentemente, Vilenkin [42]. Consideremos uma corda cósmica infinita e reta sobre o eixo z de um sistema de coordenadas imerso num espaço plano. O tensor de energia

⁴Note que em unidades naturais ($G=c=1$) a densidade linear de massa $\mu \rightarrow \frac{\mu G}{c^2}$ passa a ser adimensional com valores

$$\mu_{GU} \approx 10^{-6} \quad (3.10)$$

e

$$\mu_{EF} \approx 10^{-32} \quad (3.11)$$

⁵A espessura correspondente ao comprimento Compton das partículas com energias típicas no momento da transição de fase enquanto que a tensão é estimada multiplicando-se por c^2 a densidade linear de massa μ .

momento canônico associado à corda será, como usualmente,

$$T_{\mu}^{\nu}(x, y) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\nu}^i} \phi_{,\mu}^i - \delta_{\mu}^{\nu} L, \quad (3.12)$$

onde $L(\phi^i, \phi_{,\nu}^i)$ é a Lagrangeana da teoria enquanto que os índices latinos rotulam os campos envolvidos. Repetindo os passos de Vilenkin [42], redefinimos o tensor de energia momento

$$T_{\mu}^{\nu} \rightarrow \hat{T}_{\mu}^{\nu}(x, y) = \delta(x)\delta(y) \int T_{\mu}^{\nu}(x', y') dx' dy', \quad (3.13)$$

graças à suposição da corda ser infinitamente fina. Assumindo por simetria que os campos relevantes apenas dependem das variáveis x e y , é imediato descobrir, usando 3.12, que todas as componentes do tensor de energia momento se anulam trivialmente com excessão de $\hat{T}_0^0 = \hat{T}_3^3$ e do conjunto \hat{T}_i^j (com os índices latinos até a relação 3.16 assumindo valores 1 e 2). Para mostrarmos que este conjunto também se anula, lembramos que a partir da lei de conservação $T_{\mu,\nu}^{\nu} = 0$, podemos escrever

$$0 = \int T_{i,k}^k x^j dx dy = \int (T_i^k x^j)_k dx dy - \int T_i^j dx dy. \quad (3.14)$$

Usando o teorema de Stokes na primeira integral do segundo termo de 3.14 e lembrando que $T_{\mu}^{\nu} = 0$ para $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ obtemos

$$\int T_i^j dx dy = 0 \quad (3.15)$$

que quando aplicado em 3.13 nos leva a concluir que

$$\hat{T}_i^j = 0 \quad (3.16)$$

Assim, escrevemos finalmente, o tensor de energia momento de uma corda cósmica, se estendendo na direção, z como

$$\hat{T}_{\mu}^{\nu}(x, y) = \mu \delta(x)\delta(y) \text{diag}(1, 0, 0, 1), \quad (3.17)$$

onde μ é a densidade linear de energia da corda (veja 3.9 e discussão subjacente). No caso geral de uma corda qualquer, o tensor de energia momento será

$$\hat{T}_{\mu}^{\nu}(x, y) = \delta(x)\delta(y) \text{diag}(\mu, 0, 0, -p), \quad (3.18)$$

onde p é a pressão envolvida. Comparando 3.17 e 3.18, notamos que para cordas cósmicas

$$p = -\mu, \quad (3.19)$$

ou seja, a pressão é negativa.

Além disso, outra característica, digna de nota, é que movimentos unidimensionais tangenciais à corda são inobserváveis, já que o tensor de energia momento é invariante por boosts de Lorentz na direção z , ou seja,

$$\hat{T}'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha}\Lambda_{\nu}^{\beta}\hat{T}^{\mu\nu} = \hat{T}^{\alpha\beta}, \quad (3.20)$$

onde Λ são os boosts usuais de Lorentz na direção z . Esta propriedade é muito bem vinda, quando lembramos que, apesar de patológica, uma corda cósmica continua sendo um ancestral do vácuo, que era invariante de Lorentz.

Uma vez de posse do tensor de energia momento da corda, passaremos ao cálculo do espaço-tempo externo, associado a ela. Procederemos inicialmente aos cálculos, usando a linearização das Eqs. de Einstein (veja por exemplo [21] Pag.435), que podem ser escritas no gauge harmônico ($G=c=1$)

$$\partial_{\alpha} \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h \right) = 0 \quad (3.21)$$

como

$$(\nabla^2 - \partial_t^2)h_{\mu\nu} = 16\pi \left(\hat{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\hat{T} \right), \quad (3.22)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é suposta uma pequena perturbação $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$ sobre o espaço de Minkowski de tal maneira, que escrevemos a métrica total como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.23)$$

e usamos a assinatura $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$.

Por 3.17, podemos calcular o traço do tensor de energia momento $\hat{T} = 2\mu\delta(x)\delta(y)$, que pode ser levado às relações linearizadas 3.22, conduzindo à relação

$$\vec{\nabla}^2 h_{\mu\nu} = 16\pi\mu\delta(x)\delta(y)diag(0, 1, 1, 0), \quad (3.24)$$

onde já assumimos a métrica como estática. Resolvendo 3.24, obtemos

$$h_{00} = h_{33} = 0 \quad (3.25)$$

$$h_{11} = h_{22} = 8\mu \ln(\rho/\rho_0), \quad (3.26)$$

sendo as demais componentes da métrica nulas e onde lembramos a forma do Laplaciano em coordenadas cilíndricas⁶

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \quad (3.27)$$

A constante ρ_0 que aparece em 3.26 é arbitrária e será assumida da ordem do raio físico da corda.

Podemos também comprovar diretamente que as perturbações $h_{\mu\nu}$ satisfazem os vínculos 3.21, bastando para tanto usar 3.26 e $h = -16\mu \ln(\rho/\rho_0)$.

Escrevemos, então, o elemento de linha associado a cordas cósmicas em coordenadas cilíndricas como

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - [1 - 8\mu \ln(\rho/\rho_0)](dr^2 + \rho^2 d\zeta^2). \quad (3.28)$$

Notemos que, em princípio, sob a aproximação de campo fraco ($h_{\mu\nu} \ll 1$) utilizada, 3.28 só terá sentido quando $8\mu \ln \rho/\rho_0 \ll 1$.

Vamos agora fazer a seguinte mudança na coordenada radial

$$(1 - 8\mu \ln(\rho/\rho_0))\rho^2 = (1 - 8\mu)r^2, \quad (3.29)$$

que leva à relação

$$(1 - 8\mu \ln(\rho/\rho_0))d\rho^2 = dr^2, \quad (3.30)$$

quando se usam as aproximações $\mu \ll 1$ e $\ln \rho/\rho_0 \approx 1$. De posse de 3.29 e 3.30, podemos reescrever 3.28 como

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dr^2 - (1 - 8\mu)r^2 d\zeta^2. \quad (3.31)$$

Finalmente, redefinindo a coordenada angular

$$\theta = (1 - 4\mu)\zeta, \quad (3.32)$$

chegamos ao elemento de linha comumente associado às cordas cósmicas (onde optamos pela assinatura $(-+++)$)

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (3.33)$$

⁶Vale notar, que a derivação da distribuição $(\log \rho)_+ = H(\rho) \log \rho$ resulta em $\frac{d(\log \rho)_+}{d\rho} = pf[H(\rho)/\rho]$ e que $\frac{d}{d\rho} pf[H(\rho)]/\rho = -pf[H(\rho)/\rho^2] - \delta'(\rho)$. Assim, não é difícil encontrar a importante identidade $\vec{\nabla}^2(\log \rho)_+ = -\delta'(\rho) = 2\pi\delta(x)\delta(y)$, usada na dedução de 3.25-3.26.

onde

$$0 \leq \theta \leq 2\pi(1 - 4\mu). \quad (3.34)$$

Antes de procedermos a uma análise das propriedades da geometria do espaço-tempo, gostaríamos de comentar sobre o grau de generalidade da solução 3.33 - 3.34. Apesar de que usamos um tratamento linearizado, a solução encontrada satisfaz as equações completas de Einstein. Com efeito, a solução de vácuo, mais geral, estática com simetria cilíndrica é [43]

$$ds^2 = -[r/r_0]^{4(1-K)/(K^2+3)} dt^2 + [r/r_0]^{2(K^2-1)/(K^2+3)} dz^2 + dr^2 + [r/r_0]^{-2(K-1)^2/(K^2+3)} r^2 d\phi^2, \quad (3.35)$$

onde K e r_0 são parâmetros constantes. As únicas soluções de 3.35, que mantém a invariância de Lorentz para a corda na direção z são $K = 1$ e $K = -3$. Mas $K = -3$ é uma solução não física (faça $r \rightarrow \infty$). Consequentemente, ficamos apenas com a possibilidade $K = 1$ que corresponde a 3.33. Assim, para todos os fins práticos, assumiremos 3.33 - 3.34 como descrevendo a geometria externa completa de cordas cósmicas estáticas, infinitas, retas e com densidade linear de energia μ . O fato marcante a respeito do espaço-tempo externo a cordas cósmicas é que ele é plano ($R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0$), implicando que um ponto material (com seu auto-campo desprezado), inicialmente em repouso, no espaço-tempo de uma corda cósmica não seria afetada por ela, continuando em repouso, o que causa perplexidade visto o astronômico valor da densidade linear de energia da corda. Num contexto puramente relativista, no entanto, isto pode ser entendido se usamos a relação

$$m_{at} = \mu + \sum_{i=1}^3 p_i/c^2, \quad (3.36)$$

que dá a massa ativa gravitacional em termos da densidade de energia e pressões p_i envolvidas. Usando-se 3.19 em 3.36 (com $c = 1$), concluímos que neste sentido a massa ativa gravitacional de uma corda cósmica é nula, não atuando em consequência como fonte gravitacional.⁷

⁷Num contexto puramente Newtoniano, a velocidade da luz c não desempenha papel na mecânica e assim a massa ativa não sofre a influência das pressões envolvidas. Por esse ponto de vista, é instrutivo calcular o campo gravitacional Newtoniano $\vec{E} = -\frac{2\mu}{r}\hat{e}_r$ gerado por uma corda infinita em repouso sobre o eixo z e densidade linear de matéria μ , que está

Apesar de que pontos materiais em repouso externamente a cordas cósmicas retas não sentirão nenhuma atração gravitacional, sempre que desprezarmos o próprio campo gravitacional (e eletromagnético) da partícula, a topologia não trivial do espaço pode induzir a forças devido à perturbação na auto-energia da partícula [44].

A auto-energia gravitacional de um corpo pode ser calculado pela relação

$$U = \frac{1}{2} \int \int \rho(\vec{x}) G_p(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') dx'^3 dx''^3, \quad (3.37)$$

onde $\rho(\vec{x})$ é a distribuição de massa do corpo e $G(\vec{x}, \vec{x}')$ é a função de Green que propaga o campo gravitacional no espaço cônico da corda. No caso da aproximação Newtoniana ser válida no interior do corpo, então a função de Green satisfará a equação de Poisson

$$\vec{\nabla}^2 G_p(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.38)$$

e $p = p(\mu)$ apenas dependerá da densidade da corda que define o déficit angular do espaço cônico

$$p = (1 - 4\mu)^{-1}. \quad (3.39)$$

No caso em que $p = 1$ (ausência da corda), a função de Green, que satisfaz 3.38, é

$$G_1(\vec{x}, \vec{x}') = \|\vec{x} - \vec{x}'\|^{-1}. \quad (3.40)$$

O caso geral para um $p > 0$ arbitrário foi calculado em [44]

$$G_p(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\pi \sqrt{2rr'}} \int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\cosh u - \cosh u_0}} \frac{p \sinh u}{\cosh pu - \cosh p(\theta - \theta')}, \quad (3.41)$$

onde u_0 é definido por

$$\cosh u_0 = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'}. \quad (3.42)$$

associado ao potencial $V(r) = 2\mu \ln r/r_0$, onde r_0 é uma constante arbitrária. Obviamente, num contexto estritamente Newtoniano, qualquer densidade linear não nula implica num campo não trivial. Fica claro então que cordas cósmicas são objetos puramente relativistas e não possuem lugar na gravitação Newtoniana, onde $p/c^2 \ll \mu$. Isso já poderia ser antecipado desde 3.19.

Para uma partícula pontual no ponto \vec{x} e massa m

$$\rho(\vec{x}') = m\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.43)$$

e a auto-energia 3.37 será escrita como

$$U(x) = \frac{1}{2}m^2 \lim_{x' \rightarrow x} G_p(x, x'), \quad (3.44)$$

que diverge. A auto-energia renormalizada será escrita como

$$U_{ren}(x) = \frac{1}{2}m^2 G_p(x, x)_{ren}, \quad (3.45)$$

onde

$$G_p(x, x)_{ren} = \lim_{x' \rightarrow x} (G_p(\vec{x}, \vec{x}') - G_1(\vec{x}, \vec{x}')). \quad (3.46)$$

Usando 3.41 em 3.46, Smith calculou a auto-força de uma partícula em repouso no espaço de uma corda

$$\vec{F}_{grav}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U_{ren}(\vec{x}) = -\frac{K(p)m^2\hat{r}}{2r^2}, \quad (3.47)$$

onde

$$K(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{p \coth px - \coth x dx}{\sinh x}. \quad (3.48)$$

É interessante notar que $K(p) < 0$ para $0 < p < 1$ e $K(p) > 0$ para $p > 1$. Um raciocínio completamente análogo poderia ser usado para estudar a auto-força induzida pela auto-energia eletromagnética da partícula no espaço cônico da corda.

Para cordas de grande unificação, $\mu \ll 1$ em unidades naturais, ou seja, $p \approx 1 + 4\mu$ e em primeira aproximação reescrevemos 3.47 como

$$\vec{F}_{grav} = -\frac{m^2}{2r^2} [K(1) + 4\mu K'(1)] = -\frac{\pi m^2 \mu \hat{r}}{4r^2}, \quad (3.49)$$

onde usou-se $K(1) = 0$ e $K'(1) = \frac{\pi}{8}$.

Do que foi dito acima, pode-se considerar difícil encontrar um efeito observacional que indique a existência de cordas cósmicas, uma vez que seu campo gravitacional é trivial. Note, no entanto, que apesar do elemento 3.33 indicar que o espaço é plano, a relação 3.34 indica que ele não é

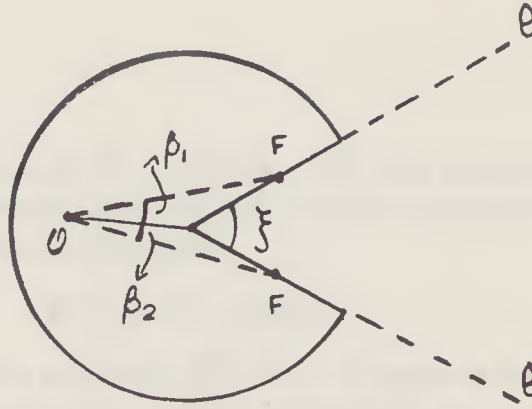


Figure 3.3: Seção espacial reta perpendicular à corda. Os lados l estão indicados evidenciando a topologia cônica com deficit angular ζ . No caso de uma fonte F estar numa configuração conveniente, um observador O poderá ver duas imagens diferentes desse mesmo objeto F

Minkowskiano. Com efeito, a seção espacial 2-dimensional, perpendicular à corda cósmica, tem topologia cônica com um deficit angular de $\zeta = 8\pi\mu$ (veja Fig. 3.3). A existência de cordas cósmicas pode produzir um efeito de lente gravitacional muito especial (vide Fig. 3.3), onde a deflexão das trajetórias não depende da velocidade da partícula ou parâmetro de impacto. Talvez a observação de imagens duplas de quasares ou galáxias, com as características apropriadas, possa sugerir a existência de cordas cósmicas.

Continuamos a nossa breve e informal apreciação, voltando nossas atenções para cordas cósmicas gigantes. O primeiro a exibir a forma do elemento de linha de uma corda cósmica infinita com momento angular por unidade de comprimento S e densidade linear de massa μ ($G=c=1$).

$$ds^2 = -(dt + 4Sd\zeta)^2 + r^2\alpha^2d\zeta^2 + dr^2 + dz^2, \quad (3.50)$$

onde

$$\alpha = 1 - 4\mu, \quad (3.51)$$

foi Mazur [45] através de duas maneiras distintas. A primeira foi em analogia à solução de Kerr no contexto da gravidade Einsteiniana tri-dimensional descoberta por Deser, Jackiw e t'Hooft [46]. A solução de Kerr, descoberta na teoria de Einstein em 2+1 dimensões por Deser et al, é dada exatamente por 3.50 sem o termo dz^2 , onde neste caso S e μ , fazem neste caso os papeis

de momento angular e massa da partícula. Não será surpresa, portanto, descobrir que o espaço-tempo dado por 3.50 é plano, como veremos a seguir, pois em 3 dimensões temos a identidade

$$R^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} G^{\lambda}_{\sigma}, \quad (3.52)$$

de maneira que em regiões sem fonte $R^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = 0$. A segunda forma baseia-se na análise da geometria de espaço-tempo estacionários com simetria axial gerados por rotações sólidas, quando impomos no limite estático que o espaço-tempo seja invariante por boosts na direção paralela à corda.

Procedendo a uma transformação de coordenadas em 3.50

$$t \rightarrow \tau = t + 4S\zeta, \quad (3.53)$$

$$\zeta \rightarrow \theta = \alpha\zeta, \quad (3.54)$$

obtemos trivialmente o elemento de linha

$$ds^2 = -d\tau^2 + r^2 d\theta^2 + dr^2 + dz^2, \quad (3.55)$$

que mostra que a geometria é plana apesar de ter também uma topologia não trivial.

Alguns comentários são oportunos com relação ao espaço externo gerado pela corda e dado em 3.50. Na região interna definida pelo raio R_0

$$r < R_0 = \frac{4S}{\alpha}, \quad (3.56)$$

podemos ter violação de causalidade, pois temos trajetórias fechadas tipo tempo como efeito colateral da transmutação do vetor de Killing ∂_ϕ de tipo espaço para tipo tempo. Isso, no entanto, não oferece na situação real qualquer problema [47]. Podemos estimar o momento angular máximo por unidade de comprimento de uma corda como

$$S_{max} = \mu r_s \alpha, \quad (3.57)$$

onde se supôs toda a massa da corda de raio r_s concentrada na periferia, rodando à velocidade da luz e α é introduzido para levar em conta o deficit angular. Usando 3.56 e 3.57, temos que a região anômala para uma dada corda com densidade linear de massa μ será

$$R_0 < 4\mu r_s. \quad (3.58)$$

Agora, em coordenadas racionalizadas, mesmo para cordas de grande unificação $4\mu \ll 1$ e assim concluímos que, em qualquer situação realista, a região não causal seria interna à corda. Mas nossa análise anterior apenas é válida para a região externa à corda, uma vez que a solução 3.50 é uma solução de vácuo. Assim, para todos os efeitos, suporemos que a variedade espaço-tempo associada a cordas girantes são bem comportadas. Nós, em especial, apenas estaremos interessados com a região externa.

Por fim, mostramos que a detecção desse tipo de corda também fica prejudicada pelo limite máximo no momento angular 3.57 [47]. Pretende-se explorar o fato que o espaço-tempo externo a cordas cósmicas girantes, no sistema de coordenadas do elemento de linha 3.50, não pode ser sincronizado de forma monódroma [48], uma vez que isso só seria possível quando $g_{0i} = 0$. Com efeito, a diferença na coordenada temporal t durante um processo de sincronização de relógios ao longo de um circuito fechado, que englobe a corda, será⁸

$$\Delta s = \Delta t = -8\pi S. \quad (3.59)$$

Assim, considere duas partículas (ou raios luminosos) partindo do mesmo ponto. Se ambas descrevem a mesma trajetória ao redor da corda, mas em sentidos opostos, então a que circula na direção contrária ao sentido de rotação da corda completará o circuito atrasada de $16\pi S$ em relação à outra partícula que circulou a corda na mesma direção de rotação a corda.

Note que o atraso previsto é de origem puramente topológico, pois o espaço-tempo é plano, e apenas dependerá do fato da trajetória englobar ou não a corda e independerá das características locais ou forma da trajetória.

Por outro lado, já sabemos que cordas cósmicas podem produzir imagens duplas, quando tanto a fonte emissora quanto o observador estiverem suficientemente colineares a ela. Se, além disso, a fonte emissora for pulsante (pulsares por exemplo) e a corda for girante, então as imagens duplas do mesmo pulso seriam observadas com uma defasagem temporal de no máximo $8\pi S_{max}$. Usando agora valores numéricos para cordas de grande unificação (que é o caso mais favorável) $\mu \approx 10^{22} g/cm$, $r_s \approx 10^{-28} cm$ e $\alpha \approx 1$

⁸Na dedução de 3.59 é necessário lembrar que dois eventos próximos e simultâneos diferem na coordenada temporal de $dt = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i$ e que intervalos infinitesimais de tempo próprio se relacionam com intervalos de tempo coordenado t por $s = \int \sqrt{-g_{00}} dx^0$. No nosso caso $g_{02} = -4S$ e $g_{00} = -1$.

(veja discussão inicial), deduzimos que o atraso seria da ordem do tempo de Planck $10^{-44}s$, provavelmente além do escopo da própria relatividade geral. Assim, se cordas cósmicas girantes existirem, terão de ser detetadas por outros meios.

Feita esta breve digressão sobre cordas cósmicas, passamos ao estudo do vácuo externo a elas.

3.2 Flutuação do vácuo escalar conforme e torcido no espaço-tempo de cordas cósmicas estáticas

Muita informação sobre o vácuo conforme externo a cordas cósmicas pode ser extraída, usando-se apenas argumentos gerais de simetria [49]. Seja $\langle T_\alpha^\beta \rangle$ o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento externo a uma corda cósmica reta, infinita e estática, escrito como

$$\langle T_\alpha^\beta \rangle = \text{diag}(T_t^t(r), T_r^r(r), T_\phi^\phi(r), T_z^z(r)). \quad (3.60)$$

Exigimos, em seguida, que o vácuo guarde a propriedade das cordas de serem invariantes por boosts na direção z . Isto implica em

$$T_t^t(r) = T_z^z(r), \quad (3.61)$$

tão logo se efetue uma transformação tipo 3.20. Supondo um campo conformemente invariante e lembrando que o espaço-tempo externo à corda é plano, como mostrado no elemento de linha 3.33, exigimos a anulação do traço (esta propriedade será exibida explicitamente no caso particular discutido posteriormente), conduzindo a

$$T_\theta^\theta = -T_r^r - 2T_t^t, \quad (3.62)$$

onde usamos 3.61. Por fim, impomos pela lei de conservação, a anulação da quadridivergência do tensor de energia momento

$$T_{\mu;\nu}^\nu = 0. \quad (3.63)$$

Para calcular explicitamente 3.63, é conveniente escrever as conexões associadas ao elemento de linha 3.33. Os únicos símbolos de Christoffel não nulos são

$$\Gamma_{12}^1 = -r, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r. \quad (3.64)$$

Usando 3.64 em 3.63, obtemos apenas uma identidade não trivial

$$T_{r,r}^r + \frac{1}{r}T_r^r - \frac{1}{r}T_\theta^\theta = 0. \quad (3.65)$$

Usando 3.62 em 3.65, obtemos

$$T_{r,r}^r + \frac{2}{r}T_r^r + \frac{2}{r}T_t^t = 0. \quad (3.66)$$

Para prosseguir, efetuamos uma análise dimensional. Para tanto notemos que⁹

$$[T_\mu^\nu] = \frac{[M][x^\nu]}{[L][T]^2[x^\mu]} \quad (3.67)$$

Em especial, os termos diagonais do tensor de energia momento 3.60 tem dimensão

$$[T_\mu^\mu] = \frac{[M]}{[L][T]^2}. \quad (3.68)$$

Fica então claro que a única grandeza física que é linear em \hbar , que se pode construir apenas com a coordenada radial r e que tenha a dimensão dada por 3.68, é

$$\langle T_\mu^\nu \rangle = A_\mu^\nu \frac{\hbar c}{r^4}, \quad (3.69)$$

onde $A_\alpha^\beta = A_\alpha^\beta[G\mu/c^2]$ são constantes adimensionais que só podem depender do parâmetro $G\mu/c^2$ de tal maneira que, quando $\mu = 0$ (não existe corda cósmica), $A_\alpha^\beta = 0$. Levando agora 3.69 em 3.66 obtemos,

$$A_\theta^\theta = -3A_r^r \quad (3.70)$$

e graças a 3.61 e 3.62

$$A_r^r = A_t^t = A_z^z. \quad (3.71)$$

⁹Para deduzir 3.67 lembramos as relações $[T_\mu^\nu] = \frac{[G_\mu^\nu]}{[G][c]^{-4}} = \frac{[R_\mu^\nu]}{[G][c]^{-4}}$, $R_{\mu;\nu}^\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^\mu}$ e $[R] = [L]^{-2}$.

Finalmente, levando 3.70 e 3.71 em 3.69, obtemos pelos argumentos de simetria acima citados, o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento [49]

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle = A_0(\mu) \frac{\hbar c}{r^4} \text{diag}(1, 1, -3, 1), \quad (3.72)$$

onde A_0 é uma constante arbitrária, que deverá depender do conjunto de campos conformes envolvidos e cujo valor só poderá ser deduzido depois de feito um cálculo completo de teoria de campos.

O estudo da teoria de campos em espaços cônicos não deve às cordas cósmicas sua motivação inicial, desenvolvendo-se de forma independente [50], [51] (veja também [52] para uma generalização dimensional na seção espacial e [53]). Pode-se dizer, no entanto, que foi em 1986 que apareceram os primeiros trabalhos tratando do vácuo em espaços cônicos com motivação diretamente ligada a cordas cósmicas. Linet [54] estudou o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento para um campo escalar massivo encontrando, no caso particular de massa nula e acoplamento conforme, a mesma expressão encontrada em [55] que se resume à expressão 3.72 com

$$A_0(\mu)_{m=0} = \frac{p^{-4} - 1}{1440\pi^2}, \quad (3.73)$$

onde

$$p = p(\mu) = \alpha^{-1} = (1 - 4\mu)^{-1}. \quad (3.74)$$

A generalização deste resultado para campos escalares acoplados não conformemente pode ser encontrado em [56]

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle = \frac{\hbar c}{1440\pi^2 r^4} [(p^4 - 1) \text{diag}(1, 1, -3, 1) + 20(6\xi - 1)(p^2 - 1) \text{diag}(1, -1/2, 3/2, 1)], \quad (3.75)$$

onde ξ é o parâmetro que define o acoplamento (veja a Lagrangeana 3.77). No caso $\xi = 1/6$, recaímos no caso conforme expresso pelo resultado anterior. Também já foi calculada [56], a contribuição dos fótons para o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento, que também é representado por 3.72 com

$$A_0(\mu)_{\gamma} = \frac{(p^2 - 1)(p^2 + 11)}{720\pi^2}. \quad (3.76)$$

Cálculo análogo é repetido para um campo de neutrinos (veja também [57]). Por fim, antes de prosseguirmos em nossos próprios cálculos, citamos por completeza [58] e [59] que tratam respectivamente da flutuação do vácuo exterior a cordas cósmicas retilíneas imersas num universo de Einstein e Friedmann respectivamente.

A seguir, mostraremos com certo detalhismo o cálculo do tensor de energia momento associado a um campo escalar torcido conformemente acoplado, no espaço externo a cordas cósmicas retas, que pode ser encontrado em [60]. Para tanto, usaremos o método da função de Green. Gostaríamos de enfatizar que muitos dos resultados acima, inclusive este associado a campos torcidos (apesar de que usando uma prescrição para a renormalização um pouco diferente), já haviam sido descobertos por Smith [44], mas permaneceram não publicados até 1989, quando finalmente apareceram nos proceedings de um workshop em Cambridge.

Iniciamos escrevendo a Lagrangeana associada a um campo escalar, não massivo, real ϕ acoplado à gravitação como

$$L = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \xi R\phi^2), \quad (3.77)$$

onde tanto a derivada covariante ∇_μ , como o escalar de curvatura R são calculados a partir da métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço base, onde todos os campos estão imersos. No caso particular em que $\xi = 1/6$, a Lagrangeana toma a forma

$$L = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - R\phi^2/6) \quad (3.78)$$

e o campo ϕ fica conformemente acoplado à gravitação. Restringir-nos-emos a este caso.

Variando a ação $S = \int d^4x \sqrt{-g}L$ com relação ao campo escalar ϕ , obtemos

$$\delta_\phi S = \int d^4x \sqrt{-g}[-\nabla^2\phi - R\phi/6]\delta\phi, \quad (3.79)$$

a menos da integral de uma quadri-divergência que foi feita nula com ajuda do teorema de Gauss.

Pelo princípio variacional, impomos $\delta_\phi S = 0$ em 3.79, para obter a equação de Klein-Gordon modificada,

$$\nabla^2\phi + R\phi/6 = 0. \quad (3.80)$$

Variando agora a ação em relação a $g^{\mu\nu}$, obteremos o tensor de energia momento $T_{\mu\nu}$, que é definido como

$$\delta_{g^{\mu\nu}} S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{T_{\mu\nu}}{2} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.81)$$

Fazendo a variação explicitamente com o auxílio da Lagrangeana 3.78, obtemos

$$\begin{aligned} \delta_{g^{\mu\nu}} S = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} \delta g^{\mu\nu} \left[\frac{-\phi^2 G_{\mu\nu}}{6} - \frac{1}{6} \nabla_\nu \nabla_\mu \phi^2 + \frac{g_{\mu\nu}}{6} \nabla^2 \phi^2 \right. \\ \left. + \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \right]. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Comparando 3.81 e 3.82, obtemos explicitamente o tensor de energia momento

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = \frac{-\phi^2 G_{\mu\nu}}{6} + \frac{2}{3} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{g_{\mu\nu}}{6} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \\ + \frac{g_{\mu\nu}}{3} \phi \nabla^2 \phi - \frac{\phi}{3} \nabla_\nu \nabla_\mu \phi. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Note que quando 3.80 é satisfeita

$$T_\mu^\mu = 0. \quad (3.84)$$

Sabemos que o espaço-tempo externo a cordas cósmicas retilíneas, tal como exibido em 3.33 e 3.55, é plano. Assim, neste espaço, campos escalares conformes devem satisfazer a equação de Klein-Gordon 3.80, com $R = 0$,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.85)$$

e o tensor de energia momento 3.83 se restringe a

$$T_{\mu\nu} = +\frac{2}{3} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{g_{\mu\nu}}{6} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - \frac{\phi}{3} \nabla_\nu \nabla_\mu \phi. \quad (3.86)$$

Para definirmos o vácuo neste espaço, começamos expandindo o campo escalar

$$\phi(x) = \sum_\lambda [a_\lambda u_\lambda(x) + a_\lambda^* u_\lambda^*(x)] \quad (3.87)$$

num conjunto completo de modos normais $u_\lambda(x)$ que satisfazem

$$\nabla^2 u_\lambda(x) = 0, \quad (3.88)$$

onde a_λ e a_λ^* são respectivamente os operadores de aniquilação e criação de partículas com números quânticos λ e satisfazem a regra canônica de comutação

$$[a_\lambda, a_{\lambda'}^*] = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.89)$$

Assim, chamamos o estado $|0\rangle$ de vácuo sempre que satisfizer à propriedade

$$a_\lambda|0\rangle = 0. \quad (3.90)$$

Então, se definimos a função de Green como

$$G(x, x') = i\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle, \quad (3.91)$$

o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento pode ser escrito como [61]

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left[+\frac{2}{3} \nabla_\mu \nabla_{\nu'} - \frac{g_{\mu\nu}}{6} \nabla_\alpha \nabla^{\alpha'} - \frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu \right] G(x, x'). \quad (3.92)$$

Note que, como a Lagrangeana não admite auto-interação do campo ϕ , a contribuição para a energia do vácuo ocorre apenas em primeira ordem de \hbar .

Para calcularmos explicitamente o propagador, lembramos por 3.85 que ele deve satisfazer

$$\nabla^2 G(x, x') = -g^{-1/2} \delta(x, x'), \quad (3.93)$$

que na representação de Schwinger adquire a forma

$$G(x, x') = i \int_0^{+\infty} ds e^{is\nabla^2} \delta(x, x'), \quad (3.94)$$

onde o operador D'Alambertiano é expresso em coordenadas cilíndricas como

$$\nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.95)$$

As autofunções do operador ∇^2 , por sua vez, são

$$u(x; w, k, p, \nu) = \left(\frac{p}{2\pi\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} J_{|\nu|}(pr) e^{i(kz - wt)} e^{i\nu\theta} \quad (3.96)$$

com os autovalores $w^2 - k^2 - p^2$ ($w, k \in \mathbf{R}, p \in \mathbf{R}_+$), onde $J_\nu(x)$ é uma função de Bessel de primeira espécie.

Se o campo escalar é torcido, impomos anti-periodicidade na coordenada angular θ . Isso é traduzido impondo

$$\nu = \frac{n + 1/2}{\alpha} \quad (3.97)$$

nas funções 3.96

$$u(x; w, k, p, n) = \left(\frac{p}{2\pi\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} J_{|\frac{n+1/2}{\alpha}|}(pr) e^{i(kz-wt)} e^{i\left(\frac{n+1/2}{\alpha}\right)\theta}. \quad (3.98)$$

Note que com isso

$$u(t, r, \theta, 2\pi n\alpha, z) = (-1)^n u(t, r, \theta, z) \quad (3.99)$$

e conseqüentemente por 3.87 apenas o módulo de ϕ torna-se univaluado. Mas isso não implica em dano, uma vez que as quantidades $\langle \phi^2 \rangle$ e $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ são funções do quadrado do campo.

Os modos normais, tais como exibidos em 3.98, satisfazem a relação de completiza

$$\delta(x, x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_0^{+\infty} dp \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(x) u^*(x'). \quad (3.100)$$

Levando agora 3.100 na relação 3.94, escrevemos o propagador do campo escalar conforme no espaço de uma corda cósmica com densidade μ como

$$G_\alpha(x, x') = \frac{i}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_0^{+\infty} dp \int_0^{+\infty} ds e^{is(w^2 - k^2 - p^2)} e^{-i\omega(t-t')} e^{ik(z-z')} \times \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{|\nu|}(pr) J_{|\nu|}(pr') e^{i\nu(\theta-\theta')}. \quad (3.101)$$

Vamos agora seguir o atalho sugerido em [61], fazendo as mudanças nas variáveis $w \rightarrow iw$ e $s \rightarrow -is$ e em seguida tornando a rodar os contornos de volta para o eixo real, modificando com isso 3.101 para

$$G_\alpha(x, x') = \frac{i}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_0^{+\infty} dp \int_0^{+\infty} ds e^{-s(w^2 + k^2 + p^2)} e^{w(t-t')} e^{ik(z-z')} \times$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{|\nu|}(pr)J_{|\nu|}(pr')e^{i\nu(\theta-\theta')}. \quad (3.102)$$

Na verdade, nos basta, para os nossos propósitos, o cálculo de¹⁰

$$\begin{aligned} G_\alpha(\theta, \theta') &= \lim_{(t', r', z') \rightarrow (t, r, z)} G_\alpha(x, x') \\ &= \frac{i}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_0^{+\infty} dp p \int_0^{+\infty} ds e^{i-s(w^2+k^2+p^2)} \times \\ &\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{|\nu|}^2(pr) e^{i\nu(\theta-\theta')}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Efetuada a integral em w e k num espaço de dimensão $2 - \epsilon$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dw \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_0^{+\infty} ds e^{-s(w^2+k^2+p^2)} = \frac{\pi\Gamma(\epsilon/2)}{p^\epsilon} \quad (3.104)$$

e em seguida usando [27] (Eq. 6.576.2 e 9.122.2) temos

$$\int_0^{+\infty} dp p^{1-\epsilon} J_{|\nu|}^2(pr) = -\frac{|\nu|}{r^{2-\epsilon}\Gamma(\epsilon/2)}, \quad (3.105)$$

Levando 3.104 e 3.105 em 3.103, obtemos

$$G_\alpha(\theta, \theta') = -\frac{i}{8\pi^2\alpha r^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\nu| e^{i\nu(\theta-\theta')}, \quad (3.106)$$

onde já se tomou o limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Substituindo 3.97 em 3.106 obtemos

$$G_\alpha(\theta, \theta') = -\frac{i}{4\pi^2\alpha^2 r^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1/2) \cos \frac{n+1/2}{\alpha} (\theta - \theta') \quad (3.107)$$

que pode ser reescrito como

$$G_\alpha(\theta, \theta') = -\frac{1}{4\pi^2\alpha r^2} \text{Im} \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{i}{\alpha}(n+1/2)(\theta-\theta')} \quad (3.108)$$

¹⁰Para um cálculo completo veja [44].

ou finalmente como

$$G_\alpha(\theta, \theta') = \frac{i}{16\pi^2 \alpha^2 r^2} \frac{\cos \left[\frac{\theta - \theta'}{2\alpha} \right]}{\sin^2 \left[\frac{\theta - \theta'}{2\alpha} \right]} \quad (3.109)$$

Podemos agora calcular a primeira grandeza de interesse. Por 3.91 escrevemos

$$\langle \phi^2 \rangle_\alpha = -i \lim_{\theta \rightarrow \theta'} G_\alpha(\theta, \theta')_{ren}, \quad (3.110)$$

onde

$$G_\alpha(\theta, \theta')_{ren} = G_\alpha(\theta, \theta') - G_1(\theta, \theta'). \quad (3.111)$$

Expandindo $G_\alpha(\theta, \theta')$ para $\epsilon_\theta = \theta - \theta' \ll 1$, obtemos

$$G_\alpha(\theta, \theta') = \frac{i}{4r^2 \pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon_\theta^2} - \frac{1}{24\alpha^2} - \frac{7\epsilon_\theta^2}{1920\alpha^4} + O(\epsilon_\theta^4) \right]. \quad (3.112)$$

Finalmente, levando 3.111 e 3.112 em 3.110, obtemos para o valor esperado no vácuo do quadrado do campo escalar conforme torcido no espaço de uma corda cósmica reta o valor

$$\langle \phi^2 \rangle_\alpha = -\frac{1}{96\pi^2 r^2} (1/\alpha^2 - 1). \quad (3.113)$$

Note que a renormalização foi escolhida de tal maneira que $\langle \phi^2 \rangle_{\alpha=1} = 0$.

Para prosseguirmos com o cálculo do tensor de energia momento é conveniente escrevermos algumas identidades

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = - \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial t'} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z'} \quad (3.114)$$

e

$$\lim_{\theta' \rightarrow \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial \theta'} = - \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}, \quad (3.115)$$

as quais são imediatamente verificáveis a partir da relação 3.102. Bem mais sutis são as identidades¹¹

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial r'} = \frac{1}{3r} \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \left[4 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] G(\theta, \theta') \quad (3.116)$$

¹¹Aqui, apenas indicamos a estratégia para demonstrar 3.116 e 3.117 devido à extensão do cálculo. Após tomar o limite $(t', r', z') \rightarrow (t, r, z)$ em 3.102, integram-se as variáveis w, k, s como indicado em 3.104. Para integrar em seguida a variável p , é conveniente usar a [27] (Eq.6.576.2). Resta, então, proceder às segundas derivadas nas coordenadas radiais que em nosso caso foram executadas com ajuda do pacote de cálculo algébrico Macsyma.

e

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = \frac{1}{3r} \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \left[5 - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] G(\theta, \theta'). \quad (3.117)$$

Analogamente pode-se demonstrar que

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{1}{3r^2} \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \left[1 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] G(\theta, \theta'). \quad (3.118)$$

A partir da relação 3.92, poderíamos calcular todas as componentes do tensor de energia momento . Mas devido à relação 3.72, que relaciona as diversas componentes, vamos nos fixar apenas na componente $\langle T_0^0 \rangle$ que tem a seguinte forma explícita

$$\langle T_0^0 \rangle = -i \lim_{x' \rightarrow x} \left[-\frac{2}{3} \partial_t \partial_{t'} - \frac{1}{6} \left(-\partial_t \partial_{t'} + \partial_r \partial_{r'} + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \partial_{\theta'} + \partial_z \partial_{z'} \right) + \frac{1}{3} \partial_t \partial_t \right] G(x, x'). \quad (3.119)$$

Usando as relações 3.114 - 3.118 em 3.119, somos levados à simples relação

$$\langle T_0^0 \rangle = -\frac{i}{3r^2} \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} G(\theta, \theta')_{ren} \quad (3.120)$$

e a partir de 3.72 escrevemos, em geral,

$$\langle T_\mu^\nu \rangle = -\frac{i\hbar c}{3r^2} \left[\lim_{\theta' \rightarrow \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} G_\alpha(\theta, \theta')_{ren} \right] diag(1, 1, -3, 1), \quad (3.121)$$

onde já assumimos a função de Green renormalizada. Calculando 3.111 a partir de 3.112, obtemos que

$$\lim_{\theta' \rightarrow \theta} \frac{\partial^2 G_\alpha(\theta, \theta')_{ren}}{\partial \theta^2} = -i \frac{7}{3840r^2\pi^2} (\alpha^{-4} - 1). \quad (3.122)$$

Finalmente, levando 3.122 em 3.121, obtemos

$$\langle T_\mu^\nu \rangle_\alpha = -\frac{7\hbar c}{11520r^4\pi^2} (\alpha^{-4} - 1) diag(1, 1, -3, 1), \quad (3.123)$$

que é o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento do campo escalar conforme torcido no espaço de uma corda cósmica , estática, reta e

infinita. No caso de cordas cósmicas podemos, lembrando de 3.74, expandir 3.123 para $\mu \ll 1$, obtendo em primeira ordem

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\alpha} = -\frac{7\hbar c}{720r^4\pi^2}\mu \text{diag}(1, 1, -3, 1). \quad (3.124)$$

Podemos, agora, comparar a energia de vácuo por unidade de comprimento ao longo de uma corda de raio r_c ($G = \hbar = c = 1$)

$$\epsilon_{vac} = \int_{r_c}^{\infty} dr r \int_0^{2\pi\alpha} d\theta \langle T_0^0 \rangle = -\frac{7\mu}{720r_s^2\pi} \quad (3.125)$$

com a densidade linear de energia da corda $\epsilon_{cor} = \mu$

$$\frac{|\epsilon_{vac}|}{|\epsilon_{cor}|} = \frac{7}{720\pi r_c^2}. \quad (3.126)$$

Mas por nossa discussão anterior (vide 3.9 - 3.11) não é difícil ver que

$$r_c \approx 1/m \approx 10/\mu^{1/2}, \quad (3.127)$$

onde m é a energia típica envolvida durante a formação da corda. Substituindo 3.127 em 3.126

$$\frac{|\epsilon_{vac}|}{|\epsilon_{cor}|} \approx 10^{-11} \ll 1, \quad (3.128)$$

onde supusemos cordas de grande unificação ($\mu \approx 10^{-6}$). Por 3.125, podemos também verificar que a energia de vácuo neste caso é negativa, mostrando o caráter quântico do fenômeno.

Antes de prosseguirmos, gostaríamos de comentar que o resultado 3.123, descoberto independentemente em [60], pode também ser encontrado em [44], com a ressalva de que lá a prescrição usada na renormalização desloca o valor do tensor de energia momento, de tal forma que para Smith o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento assume, no limite $\alpha = 1$, o valor $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\alpha=1} = -\frac{\hbar c}{768r^4\pi^2} \text{diag}(1, 1, -3, 1)$ e não zero como exigido pela nossa prescrição.

Uma vez conhecida a forma geral 3.72 do tensor de energia momento no vácuo, pode-se calcular a perturbação quântica da ordem \hbar na métrica clássica. Para tanto, Hiscock [49], partindo da métrica estática mais geral com simetria cilíndrica e invariante por boosts ao longo do eixo de simetria,

resolveu as Eqs. de Einstein linearizadas, mostrando que o espaço-tempo clássico 3.33 é modificado, em primeira ordem de \hbar , para ($G = c = 1$)

$$ds^2 = (1 - 4\pi A_0 \hbar / r^2)(-dt^2 + dr^2 + dz^2) + (1 + 20\pi A_0 \hbar / r^2)\alpha^2 r^2 d\zeta^2, \quad (3.129)$$

onde A_0 está definido em 3.72. Note que para a linearização ter sentido, é necessário que ($G = c = \hbar = 1$)

$$r \gg |4\pi A_0|^{1/2} \approx \mu^{1/2}/10, \quad (3.130)$$

onde comparamos 3.72 com 3.124 para obter, que em nosso caso (para $\mu \ll 1$),

$$A_0 \approx -\frac{7\mu}{720\pi^2}. \quad (3.131)$$

Assim, comparando 3.127 com 3.130, vemos que a linearização é boa em qualquer região externa à corda de grande unificação .

Fazendo a mudança de coordenadas ($G = c = 1$)

$$R = \frac{2\pi A_0 \hbar}{r} + r, \quad (3.132)$$

o elemento de linha 3.129 toma uma forma mais conveniente

$$ds^2 = (1 - 4\pi A_0 \hbar / R^2)(-dt^2 + dz^2) + dR^2 + (1 - 4\mu)^2 R^2 (1 + 16\pi A_0 \hbar / R^2) d\zeta^2, \quad (3.133)$$

onde usou-se que $\hbar/r \ll 1$ (vide novamente 3.127)

Vejam agora que correção quântica é induzida no deficit angular a partir da métrica 3.133

$$\begin{aligned} \Delta\zeta &\approx 2\pi - \int_0^{2\pi} d\zeta (1 - 4\mu)(1 + 8\pi A_0 \hbar / R^2) \\ &\approx 8\pi\mu - 16\pi^2 A_0 \hbar / R^2, \end{aligned} \quad (3.134)$$

onde usou-se ($\hbar/R^2 \ll 1$). Substituindo o valor A_0 encontrado em nosso caso, na aproximação realista $\mu \ll 1$, obtemos

$$\Delta\zeta \approx \left(8\pi + \frac{7\hbar}{45R^2}\right)\mu. \quad (3.135)$$

Assim, quando não há corda $\mu = 0$, o deficit angular é nulo. Por outro lado, quando desprezamos os efeitos quânticos, o deficit angular é $8\pi\mu$ como usualmente. Por 3.135, notamos que o deficit angular devido ao efeito quântico, no nosso caso, aumenta à medida que nos aproximamos da corda.

Um caso mais realista seria supor a corda cósmica imersa num universo não estático. Davies e Sahni [59] fizeram isso, imergindo a corda num universo de Friedman plano dado pela métrica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[dr^2 + dz^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2], \quad (3.136)$$

onde se desprezou a influência da corda na expansão do universo. Neste trabalho, supôs-se um campo escalar conforme. Por analogia ao resultado de Davies e Sahni, esperamos que no caso do campo torcido, o valor esperado no vácuo do tensor de energia momento neste caso será

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\alpha} = -\frac{7\hbar c}{11520r^4\pi^2 a^4(t)}(\alpha^{-4} - 1)diag(1, 1, -3, 1). \quad (3.137)$$

Na próxima seção analisaremos a flutuação do vácuo ao redor de cordas cósmicas girantes.

3.3 Flutuação do vácuo no espaço-tempo externo a cordas cósmicas girantes

Uma generalização natural é estudar o vácuo ao redor de uma corda infinita rodando em torno de seu eixo de simetria [62]. O elemento de linha que descreve a geometria fora da corda 3.50 pode ser levado ao elemento de Minkowski pelas transformações 3.53 - 3.54. Assim apesar do espaço ser plano, a topologia é não trivial, uma vez que é necessária a seguinte identificação ($G = c = 1$)

$$(\tau, r, \theta, z) = (\tau + 8\pi S, r, \theta + 2\pi\alpha, z). \quad (3.138)$$

A estratégia que assumiremos aqui é bastante semelhante à utilizada na seção anterior. Estaremos usando, aqui, um campo escalar conforme cujo

propagador também satisfará a equação 3.93. Assim, a função de Green associada terá a mesma forma de 3.101 mas com

$$\nu = \frac{n}{\alpha} + \frac{4Sw}{\alpha}, \quad (3.139)$$

a fim de guardar a identificação 3.138. Assim, podemos escrever a função de Green como

$$G_{\alpha,S}(x, x') = \frac{i}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_0^{+\infty} dp p \int_0^{+\infty} ds e^{is(w^2 - k^2 - p^2)} e^{-iw(\tau - \tau')} e^{ik(z - z')} \times \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{|\frac{n}{\alpha} + \frac{4Sw}{\alpha}|}(pr) J_{|\frac{n}{\alpha} + \frac{4Sw}{\alpha}|}(pr') e^{i(\frac{n}{\alpha} + \frac{4Sw}{\alpha})(\theta - \theta')}. \quad (3.140)$$

Note que ao fazermos $S = 0$, em 3.140, recuperamos a função de Green associada à corda estática (vide [62] para maiores detalhes).

Formalmente o tensor de energia momento é calculado usando-se 3.140 em 3.92. No entanto dificuldades relativas ao esquema de renormalização obrigou-nos a extrair as informações relativas ao vácuo sem fazer completamente os cálculos. Pode-se mostrar, usando 3.140 em 3.92, que as únicas componentes do tensor de energia momento que podem ser não nulas são os termos diagonais $\langle T^{[\mu][\mu]} \rangle$ e o termo $\langle T^{02} \rangle = \langle T^{20} \rangle$ que satisfazem respectivamente

$$\langle T^{[\mu][\mu]} \rangle (S) = \langle T^{[\mu][\mu]} \rangle (-S) \quad (3.141)$$

e

$$\langle T^{02} \rangle (S) = - \langle T^{02} \rangle (-S), \quad (3.142)$$

onde os colchetes indicam que os índices não se somam.

Note que a anulação da componente $\langle T_{01} \rangle$ sugere que o espaço-tempo é estacionário, em primeira ordem de \hbar , já que não há fluxo de energia na direção radial.¹² Fazendo agora uma análise dimensional, apenas usando a distância radial r e os parâmetros α e S , que caracterizam o espaço-tempo 3.50 externo à corda, obtemos que $\langle T^{00} \rangle$ e $\langle T^{02} \rangle$ devem necessariamente ter a forma

$$\langle T^{00} \rangle = \hbar \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A_m(\alpha) S^{2m}}{r^{2m+4}} \quad (3.143)$$

¹²Que cordas cósmicas estacionárias não irradiam, é também sugerido pela inexistência de um horizonte de eventos, ao contrário do que acontece com por exemplo buracos negros.

e

$$\langle T^{02} \rangle = \hbar \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(\alpha) S^{2k+1}}{r^{2k+6}}, \quad (3.144)$$

onde impusemos explicitamente linearidade em \hbar por estarmos tratando de contribuições de primeira ordem e $A_m(\alpha)$ e $B_m(\alpha)$ são constantes adimensionais, que apenas poderiam ser determinadas levando a termo o cálculo completo. Note que 3.143 e 3.144 satisfazem respectivamente 3.141 e 3.142. Façamos, agora, expansões da ordem $S/r \ll 1$ para 3.143 e 3.144

$$\langle T^{00} \rangle = \hbar \frac{A_0}{r^4} + \hbar \frac{A_1 S^2}{r^6} + O(S^4/r^8), \quad (3.145)$$

$$\langle T^{02} \rangle = \hbar \frac{B_0 S}{r^6} + O(S^3/r^8). \quad (3.146)$$

O primeiro termo de $\langle T^{00} \rangle$ corresponde à contribuição da corda parada para a densidade de energia do vácuo e já foi calculado exatamente para o campo escalar em questão [55] e [44]. O valor de A_0 é dado em 3.73. Os demais termos são devido à rotação da corda. Mesmo quando a rotação da corda é máxima (vide 3.57), a expansão 3.145 é satisfatória a menos que $A_1 > 10^{12} A_0$.

Uma consequência imediata de 3.146 é que o vácuo externo a uma corda rodando ganha um mometo angular axial por unidade de comprimento

$$M_z = \int_0^{2\pi\alpha} d\theta \int_{r_c}^{+\infty} dr r^2 \langle T^{02} \rangle \simeq \hbar \frac{2\pi}{3} \frac{B_0 S}{r_c^3}, \quad (3.147)$$

contanto que $B_0 \neq 0$. Esse momento angular do vácuo pode ser responsável por um efeito de dragagem sobre referenciais inerciais. Este fenômeno não é encontrado no vácuo clássico de cordas cósmicas estáticas ou girantes.

Podemos ver mais claramente como a existência da componente $\langle T_{02} \rangle$ não nula pode influenciar no próprio espaço-tempo, resolvendo as Eqs. de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (3.148)$$

com as componentes não nulas do tensor de energia momento no vácuo 3.141 - 3.142 como fonte. Resolvendo as equações 3.148, depois de lin-

earizadas supondo uma pequena perturbação

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & 0 & \tilde{g}_{02} = rh_{02} & 0 \\ 0 & -h_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{g}_{02} = rh_{02} & 0 & r^2 h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix} \quad (3.149)$$

sobre a métrica clássica 3.55 , onde $h_{\mu\nu} \ll 1$ (assim como todas as suas derivadas), obtemos¹³

$$-\frac{r}{2} \frac{d^2 h_{02}}{dr^2} - \frac{1}{2} \frac{dh_{02}}{dr} + \frac{h_{02}}{2r} = 8\pi \langle T_{02} \rangle. \quad (3.150)$$

Usando o primeiro termo da expansão 3.144 temos

$$-\frac{r}{2} \frac{d^2 h_{02}}{dr^2} - \frac{1}{2} \frac{dh_{02}}{dr} + \frac{h_{02}}{2r} = -\frac{8\pi \hbar B_0 S}{r^4}, \quad (3.151)$$

cuja solução é ($c = 1$)

$$h_{02} = \frac{\hbar 2\pi B_0 S}{r^3}, \quad (3.152)$$

fazendo com que a métrica seja não diagonal em primeira ordem de \hbar .

3.4 Considerações finais

Antes de finalizar, gostaria de enfatizar uma vez mais a interrelação entre a teoria quântica e a gravitação .

É certo que a introdução de efeitos quânticos na gravitação podem conduzir a resultados não previstos pela teoria clássica (um possível efeito seria a quebra de simetrias discretas pela gravitação , como explorado fenomenologicamente na primeira parte da tese).

Em contrapartida, a geometria do espaço determinada pela gravitação induz a mudanças em resultados quânticos (um exemplo é o comportamento do vácuo no espaço-tempo de cordas cósmicas , explorado na segunda parte da tese). Neste sentido é interessante notar que experiências locais (de laboratório) devem ser sensíveis à topologia global do universo e não apenas às propriedades locais do espaço (veja também [63] [64]). Isso porque os

¹³Aqui usamos o pacote computacional de cálculo algébrico Macsyma.

propagadores em geral guardam a informação da topologia do espaço que vêm traduzidas em condições de contorno. Isso abre uma possibilidade formalmente plausível (apesar de que experimentalmente não), muito estimulante, de determinar a topologia do universo através de experiências locais. Mesmo observacionalmente nosso universo se encaixando bastante bem ao universo de Friedmann, várias topologias diferentes podem ser encaixadas com a mesma solução local das Eqs de Einstein. Qual topologia é a que deve ser associada ao nosso universo, ainda é um problema em aberto. Mais do que isso, a suposição de seções espaciais pequenas, para o universo com topologia não trivial, poderia explicar a aparente homogeneidade do universo (veja por exemplo [65]), contornando o problema de postular uma solução tão particular como a de Friedmann.

Tais aspectos e muitos outros, que infelizmente fogem ao escopo da tese e à minha competência, transformam a gravitação semiclássica numa área interdisciplinar de oportunidades múltiplas para a intelecção da natureza.

”Todo começo engendra um fim
Todo fim engendra um novo começo.”
Escatócrito

Bibliography

- [1] R.Penrose, Riv.Nuovo Cim. **1**, (numero speciale) 252 (1969).
- [2] S.W.Hawking e G.F.R.Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime*, Camb.Univ.Press, Cambridge, England (1973).
- [3] J.D.Barrow, Phys.Rep. **85**, 1 (1982).
- [4] G.Francisco e G.E.A.Matsas, Gen.Rel.Grav. **20**, 1047 (1988).
- [5] A.B.Burd, N.Buric e G.F.R.Ellis, Gen.Rel.Grav.**22**, 349 (1990).
- [6] S.E.Rugh e B.J.T.Jones, Phys.Lett.A **147**, 353 (1990).
- [7] P.K-H Ma e J.Wainwright, *Proceed.Third Hung.Rel.Workshop* (1989).
- [8] B.K.Berger Class.Quantum Grav. **7**, 203 (1990).
- [9] J.Pulin, *VII Simposio Latinamericano de Relatividad y Gravitacion*, Cidade do México, Dezembro (1990).
- [10] K.Ferraz, G.Francisco e G.E.A.Matsas, em preparação .
- [11] G.L.Murphy Amer.Journ.Phys. **42**, 958 (1974).
- [12] S.Woosley e T.Weaver, Scien.Amer. August Pag.24 (1989).
- [13] V.Trimble, Rev.Mod.Phys.**60**, 859 (1988).
- [14] G.G.Raffelt, MPI -PAE/PTh 8/90 *What have we learned from SN1987A*, DPF 90, Houston, Texas, January, 1990.
- [15] M.J.Longo, Phys.Rev.Lett. **60**, 173 (1988).
- [16] P.Morrison e T.Gold, *Essays on Gravity*, Gravity Research Foundation, Boston, New Hampshire (1957).
- [17] L.I.Schiff, Phys.Rev.Lett. **1**, 254 (1958).
- [18] J.M.LoSecco, Phys.Rev.D **38**, 3313 (1988).

- [19] E.W.Kolb, A.J.Stebbins e M.Turner, *Phys.Rev.D* **35**, 3598 (1987).
- [20] N.Bachall, T.Piran, W.H.Press e D.N.Spergel, *Nature* **327**, 682 (1987).
- [21] C.W.Misner, K.S.Thorne e J.A.Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, San Francisco), (1973).
- [22] S.Pakvasa, W.A.Simmons e T.J.Weiter, *Phys.Rev.D* **39**, 1716 (1989).
- [23] L.M.Krauss e S.Tremaine, *Phys.Rev.Lett.* **60**, 176 (1988).
- [24] L.D.Almeida, G.E.A.Matsas e A.A.Natale *Phys.Rev.D* **39**, 677 (1989).
- [25] N.D.Hari Dass, *Phys.Rev.Lett.* **36**, 393 (1976).
- [26] J.Leitner e S.Okubo, *Phys.Rev.* **136**, 1542 (1964).
- [27] I.S.GradshTEyn e I.W.Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, (Academic Press, New York) (1965).
- [28] J.M.Cordes, D.R.Stinebring, *Ap.J.Lett.* **277**, 53 (1984).
- [29] J.M.LoSecco, G.E.A.Matsas, A.A.Natale e J.Pacheco, *Phys. Lett. A* **138**, 5 (1989).
- [30] J.R.Klein e S.E.Thorsett, *Phys.Lett.A* **145**, 79 (1990).
- [31] S.E.Thorsett e D.R.Stinebring, *Ap.Journ.* submitted
- [32] N.D.Birrell, P.C.W.Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Univ.Press (1984).
- [33] H.B.G.Casimir, *Proc.Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen*, **51**,793 (1984).
- [34] M.J.Sparnaay, *Physica*, **24**, 751 (1958).
- [35] G.Plunien, B.Müller and W.Greiner, *Phys.Rep.* **134**, 87 (1986).
- [36] V.M.Mostepanenko and N.N.Trunov, *Sov.Phys.Usp.***31**, 965 (1988).
- [37] L.H.Ford, *Phys.Rev.D* **11**, 3370 (1975).
- [38] L.H.Ford, *Phys.Rev.D* **14**, 3304 (1976).
- [39] S.Weinberg, *Rev.Mod.Phys.* **61**, 1 (1989).
- [40] A.Vilenkin, *Phys.Rep.* **121**, 263 (1985).
- [41] T.W.B.Kibble, *J.Phys.A* **9**, 1387 (1976).
- [42] A.Vilenkin, *Phys.Rev.D* **23**, 852 (1981).

- [43] E.Frehland, Commun.Math.Phys. **23**,127 (1971).
- [44] A.G.Smith, Proceedings of a Cambridge workshop *The formation and evolution of cosmic strings* (1989), editado por G.W.Gibbons, S.W.Hawking, T.Vachaspati.
- [45] P.O.Mazur, Phys.Rev.Lett. **57**,929 (1986).
- [46] S.Deser, R.Jackiw e G.t'Hooft, Annals of Phys. **152**, 220 (1984).
- [47] D.Harari e A.Polychronakos, Phys.RevD **38**, 3320 (1988).
- [48] L.D.Landau and E.M.Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Fourth ed., Perg.Press. (1975).
- [49] W.A.Hiscock, Phys.lett.B **188**, 317 (1987).
- [50] J.S.Dowker, Nuov.Cim.B **52**, 129 (1967).
- [51] J.S.Dowker, J.Phys.A:Math.Gen. **10**, 115 (1977).
- [52] J.S.Dowker, Phys.Rev.D **36**, 3095 (1987).
- [53] J.S.Dowker, Proceed.of a Cambridge workshop *The formation and evolution of cosmic strings*, editado por G.W.Gibbons, S.W.Hawking e T.Vachaspati.
- [54] B.Linet, Phys.Rev.D **35**, 536 (1987).
- [55] T.M.Helliwell e D.A.Konkowski, Phys.Rev.D**34**, 1918 (1986).
- [56] V.P.Frolov e E.M.Serebriany, Phys.Rev.D **35**, 3779 (1987).
- [57] J.S.Dowker, Phys.Rev.D **36**, 3742 (1987).
- [58] J.S.Dowker, Class.Quan.Grav. **4**, L157 (1987).
- [59] P.C.W.Davies e V.Sahni, Class.Quan.Grav. **5**, 1 (1988).
- [60] G.E.A.Matsas, Phys.Rev.D **41**, 3846 (1990).
- [61] D.Deutsh e P.Candelas, Phys.Rev.D **20**, 3063 (1979).
- [62] G.E.A.Matsas, Phys.Rev.D **42**, 2927 (1990).
- [63] S.G.Mamaev e N.N.Trunov, Teor.Mat.Fiz. **38**, 345 (1979).
- [64] S.G.Mamaev, V.M.Mostepanenko e D.I.Mendelev Prooc.of the Third Sem. on Quant.Grav., World Scient., Sing. (1985), pg 462.
- [65] G.F.R.Ellis, Gen.Rel.Grav. **11**, 281 (1979).

