



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

CAMPUS DE BAURU



ADILSON FABIO BAZUCCO

**MODELAGEM DE PROBLEMAS DE FORMAÇÃO DE
CONTATO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE
ACOPLAMENTO**

BAURU

2020

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA
FILHO” FACULDADE DE ENGENHARIA**

ADILSON FABIO BAZUCCO

**MODELAGEM DE PROBLEMAS DE FORMAÇÃO DE
CONTATO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE
ACOPLAMENTO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista UNESP – Campus de Bauru, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli

BAURU

2020

B364m

Bazucco, Adilson Fábio

Modelagem de problemas de formação de contato mediante elementos finitos de acoplamento / Adilson Fábio Bazucco. -- Bauru, 2020

62 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, Bauru

Orientador: Osvaldo Luís Manzoli

1. Engenharia Mecânica. 2. Elementos Finitos. 3. Mecânica do Contato. 4. Análise não linear. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Engenharia, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ADILSON FABIO BAZUCCO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 02 dias do mês de junho do ano de 2020, às 09:00 horas, no(a) Via Sistema de videoconferência e outras ferramentas de comunicação a distância, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. CAIO GORLA NOGUEIRA do(a) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. LUÍS ANTÔNIO GUIMARÃES BITENCOURT JÚNIOR do(a) Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica / Escola Politécnica da USP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ADILSON FABIO BAZUCCO, intitulada **MODELAGEM DE PROBLEMAS DE FORMAÇÃO DE CONTATO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE ACOPLAMENTO**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI

p/ Prof. Dr. CAIO GORLA NOGUEIRA

p/ Prof. Dr. LUÍS ANTÔNIO GUIMARÃES BITENCOURT JÚNIOR

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, pelas orientações e por todo conhecimento transmitido. Gostaria também de agradecer à instituição Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, por tornar possível a continuidade de minha formação acadêmica.

Gostaria também de dedicar este trabalho às pessoas que me apoiam e me incentivam de maneira incondicional. Dedico ao meu pai Adilson e minha mãe Antônia, à minha “obra-prima” Valentina, e especialmente à minha esposa Gláucia.

*“Procure ser um homem de valor, em
vez de ser um homem de sucesso...”*

Albert Einstein

RESUMO

No presente trabalho é apresentado um método de solução para problemas nos quais ocorre a formação de contato, com base no uso do elemento de acoplamento. O objetivo central é desenvolver e validar um algoritmo para a solução de problemas bidimensionais sem atrito ("*frictionless*"), envolvendo pequenas deformações, empregando malhas não conformes ("*non-matching meshes*").

O método proposto emprega elementos finitos especiais de acoplamento, originalmente proposto para acoplar malhas não conformes, por BITENCOURT et al. (2015). Os novos desenvolvimentos para aplicação em problemas de formação de contato se baseiam no fato de que esse tipo de elemento apresenta nós pertencentes aos dois domínios que podem entrar em contato, sendo capaz de introduzir forças de interação contrárias à interpenetração, mediante um método de penalização.

Para validar este método, são simulados computacionalmente alguns problemas clássicos de contato Hertziano, no qual pode-se comparar resultados obtidos numericamente com resultados analíticos.

Foi possível alcançar o objetivo com um esquema simples e estável, capaz de produzir resultados com boa precisão. Dentre os parâmetros avaliados, o ponto de maior relevância foi a verificação da necessidade de um número de passos de carga mínimo para se obter a completa formação do domínio do contato, dependendo do modelo a ser analisado.

Os resultados obtidos, de uma forma geral, apresentam boa concordância em relação aos resultados analíticos, sendo que as médias dos desvios desses resultados numéricos estão entre 5,5% e 3,0%, em relação aos resultados analíticos.

ABSTRACT

This work presents a solution method for problems in which contact formation occurs, based on the coupling finite elements. The main objective is to develop and validate an algorithm for solving two-dimensional frictionless problems, involving small deformation, using non-matching meshes.

The proposed method employs special coupling finite elements, originally proposed to couple non-matching meshes by BITENCOURT *et al.* (2015). New developments for application in contact formation problems are based on the fact that this type of element presents nodes belonging to the two domains that can come into contact, being able to introduce interaction forces contrary to interpenetration, through a penalty method.

To validate this method, solutions are presented for some classic Hertzian contact problems, in which it is possible to compare results obtained numerically with analytical results

It was possible to achieve the objective with a simple and stable scheme, capable of producing results with good precision. Among the parameters evaluated, the most relevant point was the verification of the need for a minimum number of load steps to obtain the complete contact domain formation, depending on the model to be analyzed.

The results obtained, in general, show good agreement in relation to the analytical results, with the means of deviations from these numerical results being between 5,5% and 3,0%, in relation to analytics results.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – Motivação.....	2
1.2 – Objetivo	3
2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
2.1 – Métodos para garantir a restrição de contato	5
2.1.1 – Método dos Multiplicadores de Lagrange	5
2.1.2 – Método da Penalização	6
2.1.3 – Método Lagrange Aumentado	7
2.2 – Método para discretizar o contato.....	8
2.2.1 - Nó-a-nó	8
2.2.2 - Nó-a-Segmento	11
2.2.3 - Métodos de suavização da geometria	13
2.2.4 - Segmento-a-segmento.....	14
2.2.5 – Método domínio de contato	17
3 – FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE CONTATO	19
3.1 – Problema de Valor de Contorno (Análise Linear Elástica).....	19
3.2 – Equações restritivas para Interface de contato	21
3.3 – Formulação do contato sem atrito.....	23
4 – ELEMENTO DE ACOPLAMENTO	25
4.1 – Elemento de acoplamento aplicado em problemas com contato já formado	25
4.2 – Elemento de acoplamento para problemas de formação de contato	28
4.3 – Determinação do ponto de contato.....	30
4.4 – Estrutura de funcionamento do elemento de acoplamento	34
5 – SIMULAÇÕES E RESULTADOS	38
5.1 – Modelo de teste de contato.....	38
5.2 – Modelo de contato entre meio cilindro e base.....	41
5.3 – Modelo de contato entre dois cilindros	47
5.4 – Modelo de contato entre dentes de engrenagens	53
6 – CONCLUSÃO	58
7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema nó-a-nó (NTN) de discretização do contato 2D.....	9
Figura 2 – Exemplo de aplicação da estratégia de adaptação e suavização da malha. (a) malha original (b) malha distorcida devido ao movimento prescrito do conjunto ativo (c) malha após ajuste da superfície no limite superior (d) malha após suavização Laplaciana (e) malha após suavização simples baseado em ângulo (f) Malha após suavização ponderada com base em ângulo. (adaptado de XU e HJELMSTAD 2008).	9
Figura 3 – Adaptação da malha nos contornos de contato Γ_1^c e Γ_2^c . (a) interface de contato não compatível, antes da adaptação da malha. (b) interface de contato compatível, após adaptação da malha (adaptado de XING et al. 2019).	10
Figura 4 – Esquema nó-a-segmento (NTS) de discretização do contato 2D.....	11
Figura 5 – Esquema nó-a-segmento (NTS) de discretização do contato 2D, duas passadas.....	12
Figura 6 – Exemplo de Casos especiais (adaptado de Zavarise e Lorenzis, 2009).....	12
Figura 7 – Técnica do vetor normal ponderado (adaptado de PAPADOPOULOS e TAYLOR, 1992).....	13
Figura 8 – Exemplo de Spline para uma interpolação de 4 nós (adaptado de KALLEL e BOUABDALLAH, 2017).....	14
Figura 9 – Esquema nó-a-segmento (NTS) de discretização do contato 2D comum (à esquerda) e suavizado (à direita).	14
Figura 10 – Esquema segmento-a-segmento (STS) de discretização do contato 2D.....	15
Figura 11 – Casos especiais de discretização do domínio de contato STS. (a) caso sem solução. (b) solução especial (adaptado de WRIGGERS, 2006).	15
Figura 12 – Exemplo de discretização do contato, conceito “mortar”, resultando em cinco elementos, com três pontos de integração cada (adaptado de WRIGGERS, 2006).	16
Figura 13 – Esquema segmento-a-segmento (STS) de discretização do contato 2D.....	17
Figura 14 – Discretização de contato. (a) esquema nó-a-segmento. (b) domínio de contato (adaptado OLIVER et al., 2009).	18
Figura 15 – Configuração clássica do problema de equilíbrio mecânico.....	19
Figura 16 – Interface de contato. a) corpos em contato mostrando o contorno de contato Γ_c . b) análise das tensões de contato.....	22
Figura 17 – Contato entre sólidos elásticos.....	23
Figura 18 – Exemplos de elementos de acoplamentos: (a) triângulo de 3 nós + C_{node} ; (b) quadrilátero de 4 nós + C_{node} ; (c) tetraedro de 4 nós + C_{node} ; (d) cubo de 8 nós + C_{node} . (extraído de: BITENCOURT et al., 2015).....	25
Figura 19 – Processo de acoplamento de duas malhas de elementos finitos não compatíveis. (a) Problema 2D com duas malhas não compatíveis. (b) Processo de identificação dos nós que irão compor os elementos de acoplamento. (c) criação e inserção dos elementos de acoplamento. (extraído de: BITENCOURT et al., 2015).....	26
Figura 20 – Configuração inicial de problemas de formação de contato. Identificação das componentes do deslocamento relativo ou “gap” inicial.	28
Figura 21 – Exemplo de seleção dos nós dos domínios mestre e escravo. Em destaque, a delimitação da parte do contorno candidata ao contato, em ambos os corpos.....	31
Figura 22 – Exemplo de pré-processamento para o nó escravo $nó_3$. Avaliação da distância mínima e localização do “closest point” para o elemento mestre el_1^m a el_4^m	32
Figura 23 – Formação do elemento de acoplamento (em destaque).....	33
Figura 24 – Malha com todos os elementos de acoplamentos formados (em destaque).	33
Figura 25 – Configuração do teste de contato.	38
Figura 26 – Discretização aplicado ao modelo do teste de contato.	39

Figura 27 – Elementos de acoplamento criados, e seus respectivos C_{node} .	39
Figura 28 – Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical), em N/mm^2 .	40
Figura 29 – Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical). a) suavizado e b) isolinhas, em N/mm^2 .	40
Figura 30 – Desvios no valor das tensões σ_y , na região do contato, em N/mm^2 .	41
Figura 31 – a) Configuração do problema de contato entre meio cilindro e base. b) “Malha Padrão” do modelo de contato entre meio cilindro e base.	42
Figura 32 – Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical), em N/mm^2 .	43
Figura 33 – a) Resultado do campo de tensões suavizadas σ_y (tensões na direção vertical). b) Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical) em isolinhas, em N/mm^2 .	43
Figura 34 – a) Configuração do problema de contato Hertziano. b) Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical) na região do contato. (extraído de: De LORENZIS et al.;2015)	43
Figura 35 – Distribuição de pressão de contato e desvio da pressão de contato obtida numericamente. a) 10 passos de carga; b) 15 passos de carga; c) 20 passos de carga.	44
Figura 36 – Interface de contato. Formação de contato incompleta.	46
Figura 37 – Elementos de acoplamento criados no pré-processamento.	47
Figura 38 – Interface de contato. Sequência de passos de carga mostrando a ativação dos elementos de acoplamento.	47
Figura 39 – a) Configuração do problema de contato entre meios cilindros. b) “Malha Padrão” do modelo de contato entre meios cilindros.	48
Figura 40 – Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical), em N/mm^2 .	49
Figura 41 – a) Resultado do campo de tensões suavizadas σ_y (tensões na direção vertical). b) Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical) em isolinhas, em N/mm^2 .	50
Figura 42 – Distribuição de pressão de contato e desvio da pressão de contato obtida numericamente. a) 10 passos de carga; b) 15 passos de carga; c) 20 passos de carga.	51
Figura 43 – Detalhe da região de contato. a) Passo de carga inicial, existência de gap. b) Passo de carga posterior, ocorrência de interferência, contato não ativado. c) Passo de carga seguinte, ausência de interferência, contato ativado nos elementos previamente interferentes.	52
Figura 44 – Detalhe da região de contato. Passo de carga final, formação completa do contato.	53
Figura 45 – a) Configuração do problema de contato entre engrenagens. b) Malha do modelo de contato entre engrenagens.	54
Figura 46 – Resultado do campo de tensões de von Mises σ_{VM} , em N/mm^2 .	55
Figura 47 – Detalhe do campo de tensões de von Mises σ_{VM} , em N/mm^2 .	56
Figura 48 – Resultado do campo de tensões de von Mises σ_{VM} , para o contato entre engrenagens. (extraído de: PATIL et al.;2014)	56
Figura 49 – Contato entre engrenagens. Localização da pressão máxima de contato.	57

1 – INTRODUÇÃO

Na engenharia são vários os problemas envolvendo o contato entre peças, e a necessidade de se conhecer com detalhes o comportamento das tensões e deformações surge à medida que se deseja garantir a funcionalidade de sistemas, como por exemplo, acoplamentos por atrito ou elementos de fixação por atrito, ou para garantir a integridade dos elementos envolvidos no contato, como os dentes de engrenagens, pinos e buchas aplicados em articulações, mecanismos de destrave ou desarme, e até mesmo mancais de escorregamento.

Devido à natureza não linear da mecânica de contato, esses problemas no passado eram frequentemente aproximados por soluções analíticas simplificadas.

Com a popularização das técnicas de simulação computacional, sendo o método numérico mais proeminente o Método dos Elementos Finitos, aliada ao aumento da capacidade de processamento dos computadores tornou-se possível resolver problemas complexos envolvendo contato.

Atualmente os métodos para solução de problemas de contato são aplicados no dimensionamento de engrenagens, problemas de colisão veicular, problemas de interação entre pneu e solo e até mesmo em projetos de próteses humanas.

Em geral, a análise de problemas envolvendo contato requer três passos básicos durante seu desenvolvimento, sendo: definição dos pares e tipos de contato, busca do ponto de contato e cálculo das forças de contato.

Inicialmente ocorre a definição dos pares e tipos de contato, pois a priori, a porção do contorno que envolve o contato não é conhecida, portanto se faz necessário determinar as regiões que tem maior possibilidade de ocorrência de contato como forma de diminuir o tempo de processamento. Nesta etapa também se estabelece o tipo de interação que ocorrerá no contato. As formas mais comuns são do tipo “colado”, no qual não há movimento relativo entre os pontos dos corpos em contato, e o tipo “deslizante”, no qual existe um escorregamento entre os pontos em contato, geralmente regidos por um coeficiente de atrito de Coulomb.

Posteriormente busca-se os pontos de contato. Esta etapa, também conhecida como “*global search*”, é caracterizada pela procura entre todos os pares candidatos ao contato, com a finalidade de se determinar aqueles pares que estão efetivamente em contato.

E finalmente determinam-se as forças de contato, uma vez que os pares de contato se encontram de fato em contato, empregando-se uma metodologia para fazer a correta troca de forças entre os domínios e satisfazer as restrições de contato.

É nesta última etapa que se concentram grande parte dos estudos devotados à mecânica de contato. Existem diversos métodos para estabelecer as relações de contato e discretizar seu domínio. A questão que surge neste ponto é o compromisso entre a simplicidade dos métodos (baixo ou alto custo computacional) e a precisão de seus resultados. Ou seja, busca-se desenvolver técnicas que minimize o custo computacional, e apresente resultados com o nível de precisão requerido.

O presente trabalho desenvolve uma estratégia para representar problemas de contato sem atrito, envolvendo pequenos deslocamentos, tendo como base uma técnica que emprega o elemento de acoplamento. Esta técnica é aplicada em problemas cujos domínios já iniciam em contato ou até mesmo sobrepostos. Portanto, neste trabalho o elemento de acoplamento terá sua aplicação estendida para resolver problemas de formação de contato.

A revisão bibliográfica tratada a seguir, apresenta um breve histórico sobre a mecânica do contato, assim como uma introdução sobre os métodos aplicados na resolução dos problemas.

1.1 – Motivação

Uma tarefa comum na engenharia computacional consiste na necessidade de se acoplar malhas não conformes que iniciam o problema com o contato estabelecido. Este tipo de situação ocorre para casos no qual se deseja representar problemas de aderência entre corpos, por exemplo.

Para tanto, existem diversos algoritmos para se realizar o acoplamento entre as malhas, sem a necessidade de adaptá-la.

Recentemente, BITENCOURT et al. (2015) desenvolveram uma metodologia com base no elemento finito de acoplamento, no qual pode se acoplar malhas não conformes inserindo elementos especiais (dito elemento finito de acoplamento), que possuem um nó a mais que o elemento finito fundamental. Esta formulação pode ser aplicada em problemas de aderência entre corpos, ou até mesmo problemas envolvendo sobreposição das malhas ("*overlapping meshes*"), como por exemplo, o modelo do teste de arrancamento.

Conforme pode ser visto nos resultados dos modelos analisados, este método é estável e é capaz de descrever a interação entre subdomínios discretizados de forma

independente. Entretanto, é aplicável para problemas em que as malhas estejam com o contato já estabelecido, conforme dito anteriormente.

Desta forma, surge a oportunidade de se ampliar a aplicação do elemento finito de acoplamento, incrementando-o com a capacidade de formar contato. Assim, também será possível aplicar esta técnica para problemas nos quais o contato ainda não tenha sido estabelecido.

Maiores detalhes a respeito da formulação do elemento de acoplamento serão apresentados mais adiante.

1.2 – Objetivo

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma estratégia para modelagem da formação de contato, baseada na técnica de acoplar domínios desenvolvida por BITENCOURT et *al.* (2015). Essa contribuição tem o propósito de tornar os elementos finitos de acoplamento capazes de serem utilizados em problemas nos quais os corpos inicialmente se encontram separados.

Vale destacar que o elemento finito de acoplamento emprega a penalização como método para fazer cumprir as restrições de contato, e uma técnica similar ao conceito nó-a-segmento (NTS) para discretizar a interface de contato.

O escopo deste desenvolvimento deve abranger a criação de um algoritmo simples e estável, capaz de realizar a formação do contato, destinado a resolver problemas bidimensionais sem atrito (*“frictionless”*), envolvendo pequenas deformações, aplicando malhas não conformes (*“non-matching meshes”*).

Também objetiva-se validar o algoritmo desenvolvido, mediante comparações entre resultados analíticos e simulados de problemas clássicos de contato Hertziano.

2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo da mecânica do contato tem sido tema de diversos trabalhos ao longo dos anos. O grande interesse da comunidade científica neste tema é alimentado pela infinidade de aplicações, nos diversos segmentos da engenharia, associado à complexidade característica deste tipo de problema.

O primeiro trabalho relevante para o estudo de contato foi realizado por HEINRICH RUDOLF HERTZ (1881). Ele estudou o problema de contato entre duas esferas elásticas que resultou na formulação da distribuição da pressão na interface de contato. Os trabalhos de SIGNORINI (1933) e SIGNORINI (1959) também merecem destaque. Ele formulou o problema geral de equilíbrio de um corpo elástico linear em contato, sem atrito, com uma fundação rígida. Posteriormente, FICHERA (1972) foi o primeiro a tratar o problema de contato como uma desigualdade variacional.

Contudo, estas abordagens são aplicáveis a problemas com geometria e condições de contorno simples, materiais elásticos lineares e apenas aproximações com base nestas abordagens podem ser estabelecidas para os problemas com atrito. Por outro lado, a maioria dos problemas de contato estão relacionados a geometrias complexas, materiais não lineares, adesão, desgaste e grandes deformações.

Com o avanço da tecnologia computacional, e o desenvolvimento do método dos elementos finitos, como ferramenta para tratar problemas estruturais, foi possível desenvolver soluções matemáticas destinadas à melhor representação da mecânica do contato.

Os primeiros trabalhos que associaram métodos de solução de problemas de contato com a técnica dos elementos finitos são atribuídos à WILSON e PARSON (1970), CHAN e TUBA (1971).

O problema envolvendo contato é um dos tópicos mais difíceis na mecânica devido a sua complexidade e sua natureza não linear. Para o desenvolvimento de uma formulação que represente o contato entre dois corpos comumente faz-se referência a dois componentes básicos. Um método para fazer cumprir as restrições de contato (condição de não penetração entre os corpos), e uma técnica para discretizar a interface de contato. A condição de não penetração é cumprida garantindo-se que os nós de uma aresta ou superfície de um domínio, não penetrem na aresta ou superfície do outro domínio durante o contato.

2.1 – Métodos para garantir a restrição de contato

A seguir é mostrado um resumo dos métodos clássicos destinados a cumprir as restrições de contato. Uma abordagem mais detalhada destes métodos pode ser encontrada em WRIGGERS (2006).

2.1.1 – Método dos Multiplicadores de Lagrange

O método dos Multiplicadores de Lagrange é um dos métodos clássicos de introdução de restrições à forma fraca do problema, e sua formulação serve de base para outros métodos.

Neste método, as componentes da tensão de contato são encaradas como multiplicadores de Lagrange, sendo:

$$\begin{aligned}t_N &= \lambda_N \\t_T &= \lambda_T\end{aligned}$$

A formulação parte da definição da contribuição da energia potencial devido ao contato como:

$$W_{cont}^{LM} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_N g_N + \lambda_T g_T) dA \quad (1)$$

onde t_N e t_T são as componentes normal e tangencial da tensão de contato, λ_N e λ_T são os multiplicadores de Lagrange, e g_N e g_T são as funções “gap” normal e tangencial, respectivamente.

O trabalho virtual realizado pela contribuição de contato pode ser obtido pelo variacional desta energia potencial como:

$$\delta W_{cont}^{LM} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_N \delta g_N + \lambda_T \delta g_T) dA + \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda_N g_N + \delta \lambda_T g_T) dA \quad (2)$$

Os termos $\lambda_T \delta g_T$ e $\delta \lambda_T g_T$ estão associados à condição de adesão e deslizamento tangencial no qual uma formulação adequada deve ser utilizada para representar o problema (formulação de atrito de Coulomb, por exemplo).

Este método é amplamente empregado nos problemas envolvendo contato, como exemplo os trabalhos de WOHLMUTH (2000); OLIVER et al. (2009) e TUR et al. (2009).

Nestes trabalhos os autores apontam como vantagem a precisão dos resultados obtidos, uma vez que os multiplicadores de Lagrange são calculados exatamente para atender as restrições de não penetração.

Entretanto, este método apresenta a desvantagem de aumentar o número de graus de liberdade para a resolução do problema, uma vez que os multiplicadores de Lagrange (λ_N , e λ_T) se tornam incógnitas do problema e devem ser determinados, assim como os deslocamentos dos nós de toda a malha, aumentando o custo computacional envolvido.

2.1.2 – Método da Penalização

O método da Penalização é um dos métodos mais utilizados para garantir as restrições de contato, devido a sua fácil implementação e sua intuitiva interpretação física. A Penalização pode ser interpretada tal como uma mola ativada na parte do contorno de contato.

Este método consiste em substituir as componentes incógnitas da tensão de contato, por novas componentes dependentes do parâmetro de penalização e do campo de deslocamento. Assim, as componentes normal e tangencial da tensão de contato podem ser escritas por:

$$t_N = \epsilon_N g_N \quad (3)$$

$$t_T = \epsilon_T g_T \quad (4)$$

onde ϵ_N , e ϵ_T são conhecidos como parâmetros de penalização e apresentam valores positivos ($\epsilon_N, \epsilon_T > 0$).

Pode-se descrever a contribuição da energia potencial devido ao contato como:

$$W_{cont}^{PE} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} (t_N g_N + t_T g_T) dA \quad (5)$$

Substituindo as componentes normal e tangencial pelos parâmetros de penalização:

$$W_{cont}^{PE} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} (\epsilon_N g_N g_N + \epsilon_T g_T g_T) dA \quad (6)$$

O trabalho virtual realizado pelo contato pode ser obtido, assim como para o método dos multiplicadores de Lagrange, pelo variacional desta energia potencial como:

$$\delta W_{cont}^{PE} = \int_{\Gamma_c} (\epsilon_N g_N \delta g_N + \epsilon_T g_T \delta g_T) dA \quad (7)$$

Os trabalhos WRIGGERS (1985) e; WEYLER et al. (2012) são exemplos de aplicações do método da Penalização.

Destaca-se nesses trabalhos que o método da Penalização torna-se similar ao método dos Multiplicadores de Lagrange, quando $\epsilon_N \rightarrow \infty$ e $\epsilon_T \rightarrow \infty$. Contudo esse fato pode causar um mau condicionamento da matriz rigidez. Por outro lado, existe a tendência de ocorrer penetração ente os domínios, à medida que ϵ_N se torna pequeno.

Portanto, uma desvantagem deste método trata-se do compromisso na escolha dos parâmetros de penalização entre a possibilidade de haver penetração ou problemas de condicionamento da matriz rigidez. Entretanto sua simplicidade de implementação e a manutenção do número de graus de liberdade são suas principais vantagens, apontam os autores.

As características que diferenciam os métodos de Penalização e multiplicadores de Lagrange são confirmadas no trabalho de VULOVIC et al. (2007), no qual comparou-se a solução de um mesmo problema empregando-se os dois métodos. Os autores concluíram que o método da Penalização utilizou menor tempo computacional, mas os resultados foram fortemente influenciados pelo parâmetro de penalização, ao passo que o método dos multiplicadores de Lagrange levou a soluções mais precisas, porém com um acréscimo no número de iterações, e conseqüentemente um tempo computacional maior.

2.1.3 – Método Lagrange Aumentado

A formulação do método Lagrange Aumentado é uma combinação entre o método dos multiplicadores de Lagrange e o método da Penalização. A restrição de contato é assegurada por multiplicadores de Lagrange, mas de forma que não aumente o número de incógnitas do problema.

A ideia consiste em um algoritmo no qual o multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}_N$ é mantido constante durante uma iteração, para resolver a forma fraca do problema. Após essa iteração, o multiplicador de Lagrange é atualizado para um novo valor, tendo como base o

valor antigo acrescido de um parâmetro de Penalização. Este procedimento é conhecido como algoritmo Uzawa.

Assim, a contribuição devido ao trabalho virtual de contato, para o caso sem atrito é dado por:

$$\delta W_{cont}^{AL} = \int_{\Gamma_c} (\bar{\lambda}_N + \epsilon_N g_N) \delta g_N dA \quad (8)$$

Como $\bar{\lambda}_N$ é desconhecido, um procedimento para atualizar o multiplicador de Lagrange deve ser construído dentro de uma iteração, sendo:

$$\bar{\lambda}_{N_{novo}} = \bar{\lambda}_{N_{antigo}} + \epsilon_N g_{N_{novo}} \quad (9)$$

Exemplos de aplicação desta formulação podem ser encontrados nos trabalhos de SIMO e LAURSEN (1992), PIETRZAK e CURNIER (1999), e HIRMAND *et al.* (2015).

Com este procedimento é possível sobrepor os problemas causado pelo aumento do número de graus de liberdade, característico do método dos multiplicadores de Lagrange, além de minimizar o risco de mau condicionamento da matriz rigidez e ocorrência de penetração, pois a solução do problema fica menos sensível à escolha do parâmetro de penalização.

Entretanto, apresenta um aumento no custo computacional, se comparado ao método da Penalização, devido ao processamento da atualização do multiplicador de Lagrange, como pode ser visto em POPP *et al.* (2010).

Existem ainda outros métodos para se estabelecer as restrições de contato, como por exemplo, o método Lagrange Perturbado e o método de Nitsche. Uma ampla revisão destes métodos pode ser encontrada em WRIGGERS (2006).

2.2 – Método para discretizar o contato

2.2.1 - Nó-a-nó

O conceito de discretização de contato nó-a-nó (NTN), proposto inicialmente por FRANCAVILLA e ZIENKIEWICZ (1975) assegura as restrições de contato através de uma base puramente nodal. Este método transfere precisamente as pressões de contato (passa no teste de contato), além de ser simples do ponto de vista de programação. Porém, tem como base para seu funcionamento o emprego de malhas conformes (*“matching meshes”*), restringindo

sua aplicação a problemas com esta característica de discretização e pequenos escorregamentos (nós do contato têm pequeno deslizamento em torno da posição original), conforme salienta WRIGGERS (2006). A Figura 1 apresenta um exemplo de discretização do contato utilizando o conceito NTN.

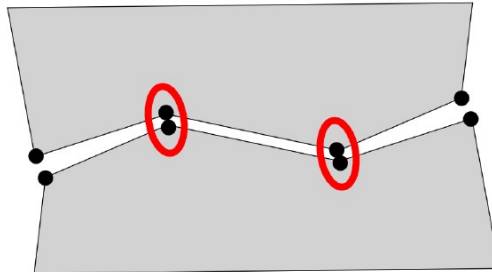


Figura 1 – Esquema nó-a-nó (NTN) de discretização do contato 2D.

Entretanto, esta limitação pode ser superada empregando-se técnicas de adaptação de malha, como pode ser visto em XU e HJELMSTAD (2008). Os autores propuseram um esquema utilizando o conceito nó-a-nó para resolver problemas bidimensionais com grandes deformações, no qual a malha dos domínios é adaptada e suavizada, para manter o caráter nó-a-nó, durante o processamento. A Figura 2 apresenta um exemplo de aplicação desta estratégia.

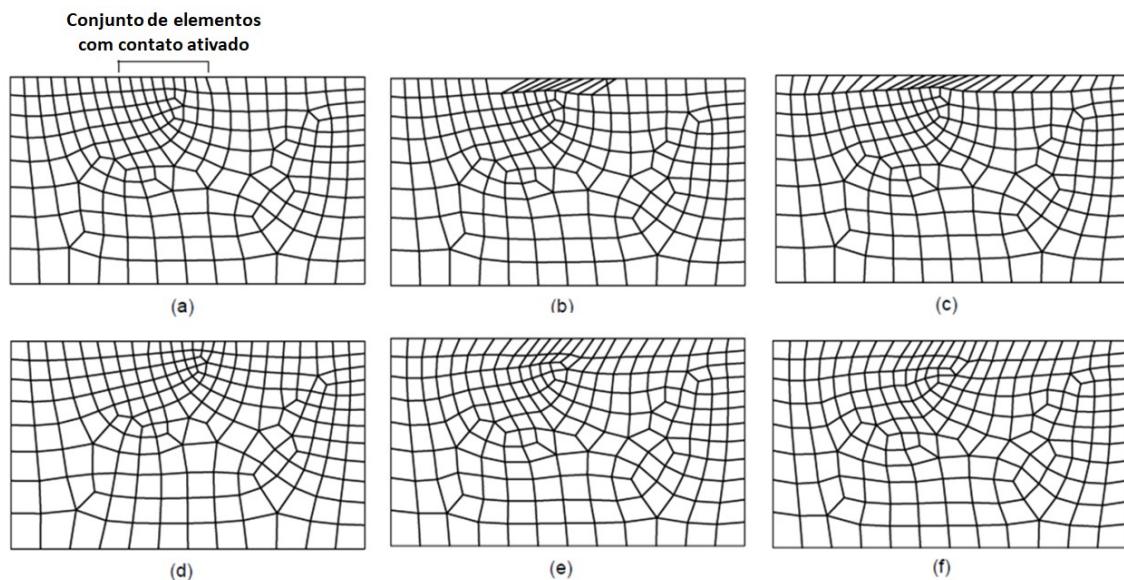


Figura 2 – Exemplo de aplicação da estratégia de adaptação e suavização da malha. (a) malha original (b) malha distorcida devido ao movimento prescrito do conjunto ativo (c) malha após ajuste da superfície no limite superior (d) malha após suavização Laplaciana (e) malha após suavização simples baseado em ângulo (f) Malha após suavização ponderada com base em ângulo. (adaptado de XU e HJELMSTAD 2008).

Com o mesmo propósito de associar técnicas de adaptação da malha ao conceito NTN, WRIGGERS et al. (2016) propuseram uma metodologia aplicando o método dos elementos virtuais (VEM – “*virtual element method*”), para discretizar interfaces de contato entre malhas não conformes. A vantagem de aplicar os elementos virtuais consiste na facilidade de empregar diferentes números de nós para se definir um elemento. Essa característica é explorada com o objetivo de transformar a interface de contato de malhas não conformes em um problema de malhas conformes. Os autores mostraram que os resultados de problemas de contato Hertzianos obtidos com o método proposto coincidiram com soluções analíticas, além de constatar que o método passa no teste de contato.

Recentemente, XING et al. (2018) empregou o esquema nó-a-nó em conjunto com a técnica do elemento finito de contorno escalonado (SBFEM – “*scaled boundary finite element method*”), para modelar problemas de contato bidimensionais com malhas não compatíveis. Este tipo de elemento se caracteriza por apresentar forma poligonal com número arbitrário de arestas. A ideia é empregar SBFEM devido sua flexibilidade em lidar com malhas não compatíveis, inserindo nós em ambas as arestas de contato, de forma a transformar malhas não compatíveis em compatíveis (malha adaptativa), conforme a Figura 3. Essa técnica foi estendida por XING et al. (2019), para solução de problemas tridimensionais, e em ambos os casos, os autores concluem que esta abordagem não só passa no teste de contato, como também é estável e precisa.

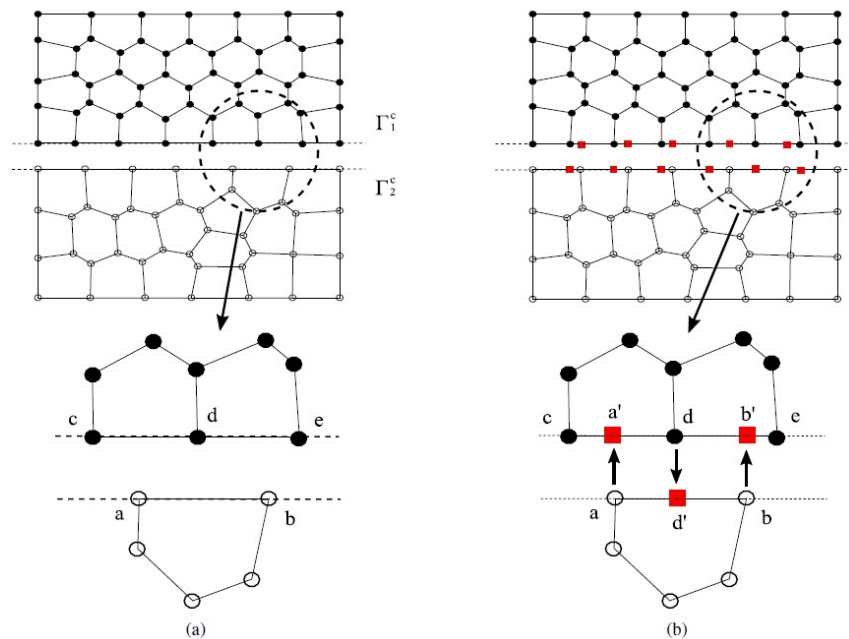


Figura 3 – Adaptação da malha nos contornos de contato Γ_1^c e Γ_2^c . (a) interface de contato não compatível, antes da adaptação da malha. (b) interface de contato compatível, após adaptação da malha (adaptado de XING et al. 2019).

Em resumo, as técnicas recentes que empregam o conceito NTN estão associadas a estratégias para adaptar a malha. Com isso é possível manter as vantagens deste conceito (precisão e simplicidade na definição do domínio de contato), por outro lado, as estratégias de adaptação de malha geram um indesejável aumento no custo computacional.

2.2.2 - Nó-a-Segmento

O conceito para discretização de contato denominado nó-a-segmento (NTS) surgiu para sobrepor as deficiências do conceito NTN, inicialmente desenvolvido por HALLQUIST et *al.* (1985). A ideia básica é impedir a penetração dos nós de um domínio (denominado escravo – “*slave*”) nos segmentos do outro domínio (denominado mestre – “*master*”). Dado esta característica é necessário especificar o domínio escravo como o de malha mais refinada, com o objetivo de se minimizar pontos de penetração entre domínios.

Este esquema apresenta a vantagem de poder ser aplicado em problemas no qual a malha não é compatível, problemas envolvendo atrito e grandes deslocamentos, sem a necessidade de aplicar técnicas para adaptar a malha. Esse conjunto de características somado à sua simplicidade de implementação levaram este conceito a ser amplamente aplicado nos programas comerciais de elementos finitos. A Figura 4 apresenta um exemplo deste conceito.

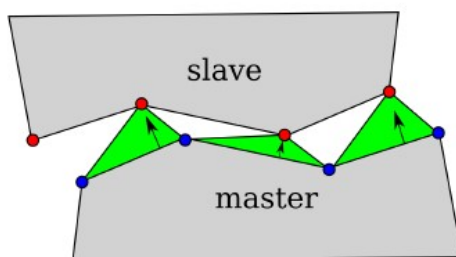


Figura 4 – Esquema nó-a-segmento (NTS) de discretização do contato 2D.

Contudo, o fato de garantir a não penetração em apenas um domínio faz com que a transmissão da pressão de contato não aconteça de forma correta. Em outras palavras, este conceito não passa no teste de contato, conforme indicam os trabalhos de TAYLOR e PAPADOPOULOS (1991), e ABBASI e BATHE (2001).

Para sobrepor este problema TAYLOR e PAPADOPOULOS (1991) propuseram um método chamado duas passagens (“*two pass*”), no qual ocorre uma dupla definição do par de contato, trocando os lados mestre e escravo, evitando a penetração em ambos os lados, conforme mostra a Figura 5. Com essa estratégia foi possível garantir a passagem no teste de contato.

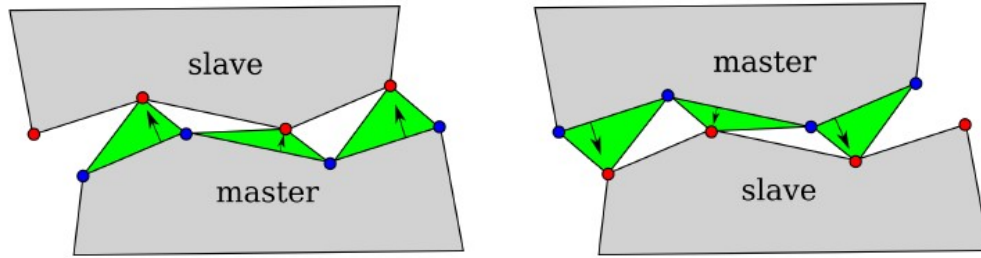


Figura 5 – Esquema nó-a-segmento (NTS) de discretização do contato 2D, duas passadas.

Todavia, o método NTS “two pass” apresenta problemas quando forças de atrito são consideradas, devido à falta de suavidade nas superfícies de contato. A superfície não suavizada causa saltos nas forças de contato quando nós escravos deslizam entre os segmentos mestres, de acordo com PUSO e LAURSEN (2004).

Também há problemas de bloqueios dos nós em contato, devido ao excesso de restrições nos mesmos, conforme apontam OLIVER et al. (2009).

Outra questão do método NTS é a ocorrência de casos especiais na definição do par nó escravo e aresta mestre, segundo ZAVARISE e LORENZIS (2009). Neste trabalho os autores tratam dos casos especiais no qual a identificação do segmento mestre relacionado a um nó escravo é ambíguo ou impossível. A Figura 6 apresenta alguns exemplos destes casos especiais. Dentre as diversas soluções analisadas a mais proeminente foi um algoritmo baseado na rotação do vetor normal, que consiste em uma relação direta nó-a-nó entre o nó escravo “S” e o nó mestre mais próximo “C”.

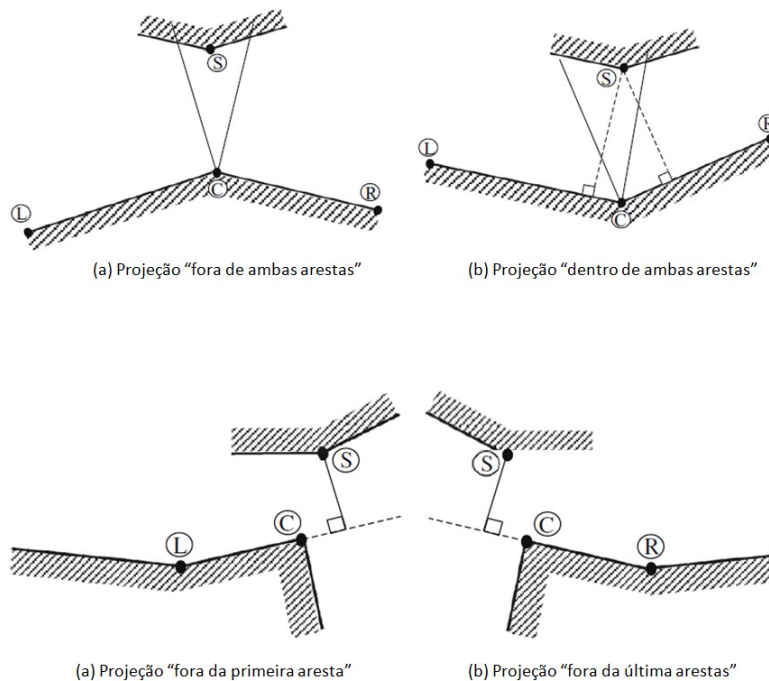


Figura 6 – Exemplo de Casos especiais (adaptado de Zavarise e Lorenzis, 2009)

2.2.3 - Métodos de suavização da geometria

Uma alternativa empregada para sobrepor o problema de descontinuidade da malha, presente no conceito NTS é suavizar o domínio do contato.

Uma discretização não suavizada (a maioria das técnicas de discretização é de continuidade C^0) frequentemente gera uma descontinuidade do vetor normal às arestas de dois elementos consecutivos, cujas consequências foram abordadas no tópico anterior. Este fato também pode levar a problemas de convergência, principalmente se a curvatura das arestas de contato muda drasticamente, conforme ZAVARISE e LORENZIS (2009).

Para resolver essa questão PAPADOPOULOS e TAYLOR (1992) propuseram um método na qual a direção normal no nó é ponderada com relação às direções de arestas consecutivas e ao comprimento das mesmas, conforme mostra a Figura 7. Outra técnica similar pode ser vista em LIU et al. (1999), na qual, uma mudança contínua no vetor normal resultando em um contorno virtual com continuidade C^1 é proposto como forma de evitar oscilações no escorregamento de nós em contato.

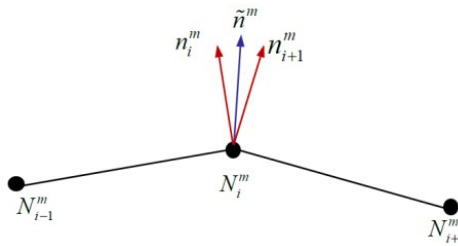


Figura 7 – Técnica do vetor normal ponderado (adaptado de PAPADOPOULOS e TAYLOR, 1992)

Outra alternativa empregada para resolver a questão acima apresentada consiste em discretizar a região de contato empregando interpolações de ordem superior. Isso resulta em arestas ou superfícies de contato discretizados com continuidade C^1 ou até mesmo C^2 . Para tanto, pode ser empregado o polinômio de Hermite (WRIGGERS et al., 2001, PADMANABHAN e LAURSEN, 2001), curvas Bezier (PIETRZAK e CURNIER, 1999), curva Spline cúbica (AL-DOJAYLI e MEGUID, 2002; e KALLEL e BOUABDALLAH, 2017) e B-splines racional não uniforme (NURBS – “non-uniform rational B-splines”) (HU et al., 2018).

A Figura 8 mostra um exemplo de aplicação da interpolação Splines como forma de suavizar o contorno. A superfície inicialmente discretizada contém os nós N_i^m , e a superfície suavizada através de uma Spline cúbica é mostrada em vermelho. Em azul, são apresentados os pontos de controle P_j , utilizados para determinar a Spline cúbica através de uma sucessão de três interpolações lineares.

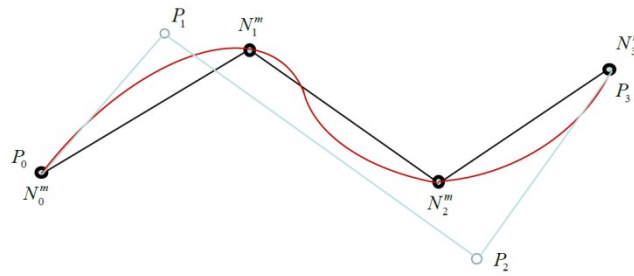


Figura 8 – Exemplo de Spline para uma interpolação de 4 nós (adaptado de KALLEL e BOUABDALLAH, 2017)

E a Figura 9 mostra uma comparação entre o método NTS original e suavizado. Destaca-se a utilização de vários nós, necessários para se criar a superfície suavizada.

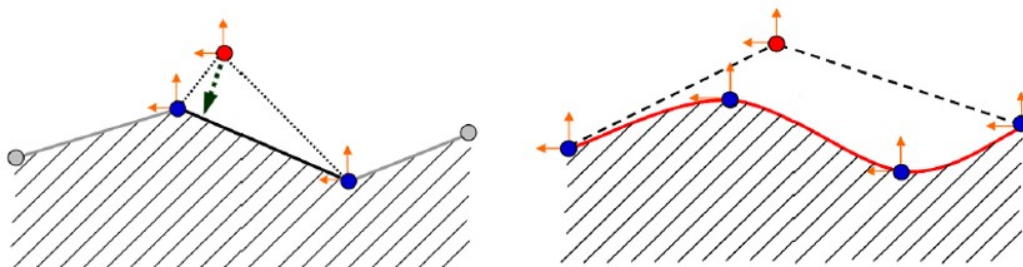


Figura 9 – Esquema nó-a-segmento (NTS) de discretização do contato 2D comum (à esquerda) e suavizado (à direita).

A principal vantagem deste conceito é superar os problemas causados pela descontinuidade do domínio. Porém, surgem questões quanto à complexidade de implementação, principalmente em problemas 3D, e a possibilidade de a superfície suavizada não coincidir com a geometria real (surgimento de superfícies “não físicas”), para problemas em que a precisão da geometria é um requisito importante (WRIGGERS et al., 2001).

2.2.4 - Segmento-a-segmento

Outro conceito que surge para sobrepor as questões envolvendo continuidade do domínio discretizado é a abordagem segmento-a-segmento (STS), inicialmente estabelecida por SIMO et al., (1985) para pequenas deformações, e posteriormente PAPADOPOULOS e TAYLOR (1992) para grandes deformações, ambos para problemas bidimensionais.

Em contraste ao conceito NTS as restrições de contato não são impostas apenas em pontos nodais, mas ao longo de todo o contorno de contato.

A ideia básica é criar uma superfície intermediária às superfícies de contato, com continuidade C^1 , de forma que o “gap” é dado em função desta nova superfície e a integral do trabalho virtual de contato é feita em cada segmento desta nova superfície contínua. Os

segmentos são formados a partir da projeção ortogonal de cada nó de um domínio sobre a aresta do elemento do outro domínio, conforme mostra a Figura 10.

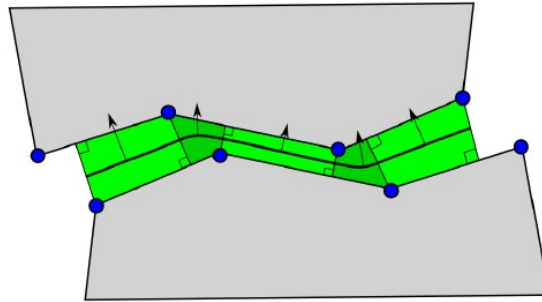


Figura 10 – Esquema segmento-a-segmento (STS) de discretização do contato 2D.

Similar ao conceito NTS, a abordagem STS também apresenta casos especiais no qual é necessária uma solução específica para cada tipo de situação, como mostra a Figura 11. Outra característica importante deste método é a suposição de pressão de contato constante ao longo de cada segmento, que pode significar uma limitação para problemas que demandam precisão na determinação da distribuição de pressão.

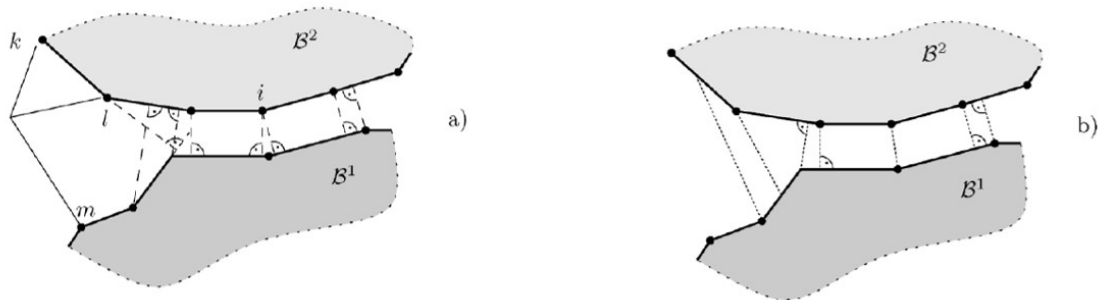


Figura 11 – Casos especiais de discretização do domínio de contato STS. (a) caso sem solução. (b) solução especial (adaptado de WRIGGERS, 2006).

Uma variação do conceito STS foi introduzido por BERNARDI et al. (1994), e posteriormente adaptado para problemas de contato sem atrito por BELGACEM et al. (1998), acoplado ao método “mortar” de decomposição de domínios. Este método é baseado na formulação dos multiplicadores de Lagrange, no qual funções de formas especiais são usadas para interpolar e discretizar o multiplicador de Lagrange na interface de contato. Desta forma diz-se que o método “mortar” é constituído por uma base dupla (“dual basis”) de funções de forma. Assim como o método NTS, o método “mortar” é aplicável em problemas com malhas não compatíveis e grandes deslocamentos. Outra característica no qual o conceito STS se assemelha ao NTS é o fato de se distinguir os domínios entre “mortar” e “não-mortar”

(análogo à denominação mestre - escravo), sendo que geralmente a superfície de referência é a “*não-mortar*”.

A integração do trabalho virtual devido ao contato é feito em cada segmento “*não-mortar*”, através de certo número de pontos de Gauss. Para o exemplo ilustrado na Figura 12 são utilizados três pontos de integração.

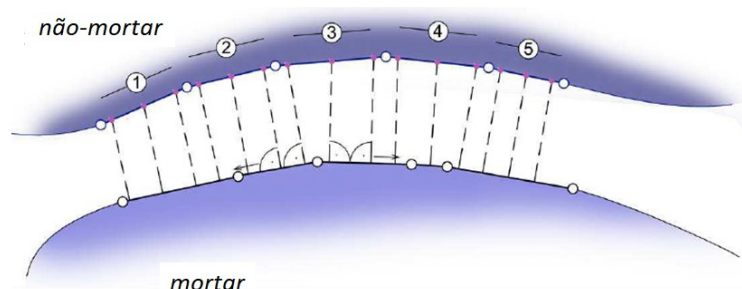


Figura 12 – Exemplo de discretização do contato, conceito “mortar”, resultando em cinco elementos, com três pontos de integração cada (adaptado de WRIGGERS, 2006).

Essa formulação foi posteriormente estendida para problemas envolvendo grandes deformações com atrito, aplicando funções de forma lineares, por McDEVITT e LAURSEN (2000).

PUSO e LAURSEN (2004) desenvolveram uma formulação, com base no conceito “mortar”, para problemas tridimensionais com grandes deformações. Segundo os autores, há grande dificuldade em lidar com este tipo de problema, pois as projeções superfície-a-superfície são fortemente dependentes das deformações dos corpos em contato, e por vezes se apresentam emaranhadas tornando difícil obtê-las. Além disso, a natureza facetada das superfícies de contato introduz dificuldades associadas aos “cantos” (“corners”), ao realizar a busca por elementos “mortar”, que se executada de forma inadequada, resultará em problemas de convergência.

FISCHER e WRIGGERS (2005) fizeram diferentes formulações para problemas bidimensionais sem atrito e grandes deformações, também baseados no método “mortar”, envolvendo multiplicadores de Lagrange e Penalização. Puderam concluir que a escolha do número de pontos de integração afeta a precisão da solução. Se a superfície “não-mortar” for discretizada de forma mais refinada que a superfície “mortar”, uma quantidade mínima de pontos de integração deve ser fornecida para se obter uma solução adequada.

Trabalhos recentes compararam os resultados obtidos entre elementos de contato lineares e quadráticos, mostrando o ganho de precisão da solução usando elementos quadráticos (PUSO et al. 2008, e POPP et al., 2012). Segundo os autores, esta técnica é estável, passa no teste de contato e permite o uso de funções de forma de qualquer ordem, mas sua

implementação é complexa principalmente em problemas tridimensionais, conforme abordado anteriormente.

2.2.5 – Método domínio de contato

Um método relativamente novo, denominado domínio de contato (*“contact domain”*) foi proposto para problemas bidimensionais por OLIVER et al. (2009) e amplamente explorado na aplicação de diversos problemas envolvendo grandes deformações com atrito e auto contato em HARTMANN et al. (2009). Posteriormente, teve sua formulação estendida para aplicações tridimensionais sem atrito (HATMANN et al., 2010).

Este método é considerado uma evolução da formulação NTS. É formado por um conjunto de regiões não sobrepostas e dotadas com um campo de deslocamento interpolado a partir dos deslocamentos dos contornos dos corpos em contato. Consequentemente as medidas de *“gap”* normal e *“gap”* tangencial, bem como os multiplicadores de Lagrange são definidos dentro de todo o domínio de contato, e não somente ao longo da superfície de contato, como no conceito NTS. A Figura 13 mostra um exemplo desta aplicação.

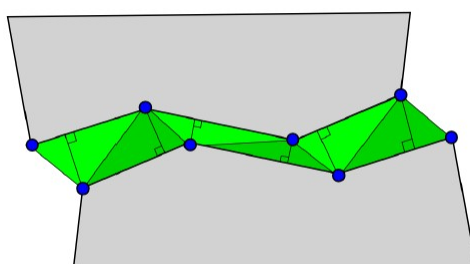


Figura 13 – Esquema segmento-a-segmento (STS) de discretização do contato 2D.

A vantagem apontada pelos autores é que o emparelhamento resultante das superfícies de contato é completo e continuamente definido, evitando as questões de descontinuidades, já abordadas.

A Figura 14 mostra a diferença entre o conceito NTS (a) e o domínio de contato (b). Para o esquema NTS duas situações distintas acontecem: primeiro, o esquema NTS é fortemente dependente da escolha mestre-escravo, e segundo, pode-se descartar (regiões vazias) ou super-restringir (regiões sobrepostas) alguns pares de contato específicos. Isso pode dificultar a passagem no teste de contato. Por outro lado, o conceito domínio de contato mostra um pareamento completo entre os domínios, sem sobreposição, o qual leva a um algoritmo que passa no teste de contato para malhas arbitrárias não conformes.

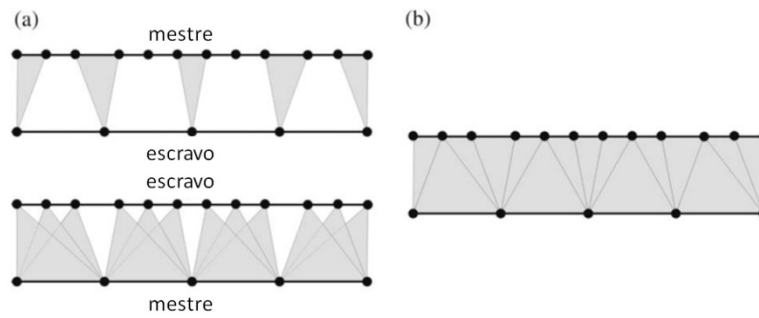


Figura 14 – Discretização de contato. (a) esquema nó-a-segmento. (b) domínio de contato (adaptado OLIVER et al., 2009).

Outra vantagem é a não dependência da escolha de domínios mestre-escravo, pois o pareamento de contato é definido pelo domínio de contato, evitando a necessidade de se projetar nós escravos em segmentos mestre.

No entanto, WOPSCHALL et al. (2019) observam que o método é dependente da malha, uma vez que é necessário fornecer um parâmetro de estabilidade, cujo objetivo é aliviar a restrição excessiva.

Uma questão, levantada por YASTREBOV (2011), é a necessidade de se distinguir entre dois tipos de elementos de contato, para preencher totalmente o domínio de contato sem sobreposição, para casos tridimensionais. O elemento dito tipo “A” que compartilha três nós e um contorno de elemento (similar ao conceito NTS), e o tipo “B”, que possui dois nós localizados sobre o lado do contorno de contato potencial. Segundo o autor, este elemento tipo “B” representa um novo tipo de elemento de contato, cuja consideração é chave para permitir que a estratégia de contato passe no teste de contato.

3 – FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE CONTATO

3.1 – Problema de Valor de Contorno (Análise Linear Elástica)

Em geral, grande parte dos problemas estruturais na engenharia mecânica consiste em resolver o problema de valor de contorno, considerando deformações infinitesimais. Vários são os autores que descrevem o problema de valor de contorno, dentre eles destaca-se a abordagem de FISH e BELYTSCHKO (2007) como segue:

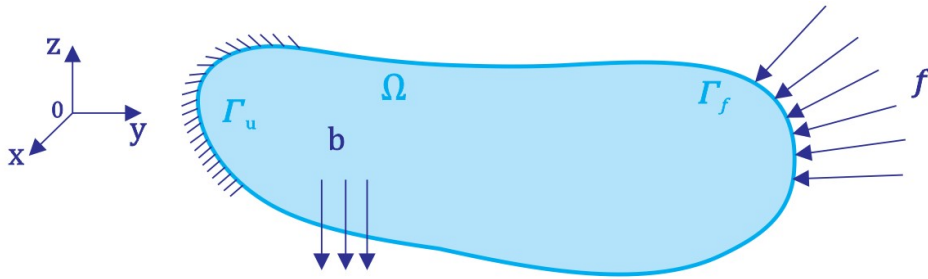


Figura 15 – Configuração clássica do problema de equilíbrio mecânico.

A Figura 15 representa um corpo (domínio) tridimensional, submetido a um carregamento externo de superfície f e de volume b . As forças externas são aplicadas em uma porção da superfície do corpo Γ_f . Em outra porção da superfície do corpo Γ_u são aplicados deslocamentos prescritos, normalmente com valor zero.

É importante ressaltar que:

$$\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_u \quad \text{e} \quad (10)$$

$$\Gamma_f \cap \Gamma_u = \emptyset \quad (11)$$

No qual Γ , Γ_f e Γ_u são respectivamente o contorno de todo domínio, contorno da condição de Neumann (natural) e contorno da condição Dirichlet (essencial).

As equações que regem este tipo de problema constituem a chamada caracterização forte do equilíbrio, ou simplesmente “*Forma Forte*” do problema de equilíbrio. Estas equações estabelecem que as tensões internas σ estejam em equilíbrio com as forças externas f e b , bem como as restrições ou os deslocamentos prescritos.

$$\nabla_S^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \text{ (equação de equilíbrio estático)} \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\tau} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{em } \Gamma_f \text{ (Condição Neumann)} \quad (13)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u \text{ (Condição Dirichlet)} \quad (14)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor (dimensões 1x1, 3x1, 6x1, respectivamente para os casos 1D, 2D e 3D) que contem as componentes de tensão, $\boldsymbol{\tau}$ é a matriz com as componentes de tensão (dimensões 1x1, 2x2 e 3x3, respectivamente para os casos 1D, 2D e 3D), ∇_S^T é a matriz gradiente simétrica transposta, $\mathbf{b}$ e $\bar{\mathbf{f}}$ são respectivamente os vetores contendo as componentes das forças externas volumétricas e de superfície, $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal à superfície (contorno do domínio), $\mathbf{u}$ e $\bar{\mathbf{u}}$ são respectivamente os vetores contendo as componentes de deslocamento e deslocamento prescrito.

Levando em conta a relação deformação-deslocamento (relação cinemática) e a relação tensão-deformação (relação constitutiva), tem-se respectivamente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_S \mathbf{u} \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

no qual $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor contendo as componentes de deformação (de mesma dimensão do vetor $\boldsymbol{\sigma}$), $\mathbf{D}$ é a matriz constitutiva do material. Assim:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \nabla_S \mathbf{u} \quad (17)$$

Após algumas manipulações matemáticas, aplicando-se integração por partes e o teorema da divergência, é possível reescrever a equação (12) na forma integral, chamada de “*Forma Fraca*”, resultando em:

$$\int_{\Omega} (\nabla_S \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_f} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{b} d\Omega \quad \forall \mathbf{w} \in U_0 \quad (18)$$

cujo objetivo é determinar $\mathbf{u} \in U$, tal que:

$$U = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in H^1, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u\} \quad e \quad U_0 = \{\mathbf{w} | \mathbf{w} \in H^1, \mathbf{w} = 0 \text{ em } \Gamma_u\}$$

onde $\mathbf{w}(x, y, z)$ é uma função arbitrária, chamada “*Função Ponderadora*” e H^1 é um espaço de funções com derivadas quadradas integráveis ($H^1 \subset C^0$), ou seja funções H^1 são de continuidade C^0 .

Fazendo $\mathbf{w} = \delta \mathbf{u}$, sendo $\delta \mathbf{u}$ um deslocamento virtual arbitrário, tal que deve atender as condições de C.C.E. homogêneas, podemos reescrever a equação (18) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in U_0 \quad (19)$$

Esta forma também é conhecida como “*Principio do Trabalho Virtual*”, no qual implica ao equilíbrio para qualquer $\delta \mathbf{u}$, atendendo as condições de C.C.E. homogêneas.

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (20)$$

Sendo:

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (21)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega \quad (22)$$

3.2 – Equações restritivas para Interface de contato

Os problemas de contato se diferenciam dos problemas mecânicos lineares convencionais por estabelecer restrições originadas nas regiões onde ocorre o contato, além das restrições normais do problema (deslocamentos prescritos).

A restrição comumente observada baseia-se na condição de não penetração como uma restrição puramente geométrica. Observa-se que a formação do contato bem como o comportamento dos corpos em contato são influenciados por uma variável chamada “*gap*” (g_N) ou penetração ($\bar{g}_N$). Esta variável contém a menor distância entre dois pontos materiais de domínios distintos, candidatos a formarem contato, sendo empregada para dois propósitos. O primeiro é determinar em que instante ocorre o contato (ou seja, $g_N = 0$) e o segundo é garantir que não haja penetração após o contato ser estabelecido ($g_N \geq 0$).

Outro ponto importante é que no instante em que ocorre o contato, surge uma tensão em ambos os corpos, dita tensão de contato $\mathbf{t}$, que atua em ambas as superfícies, obedecendo ao princípio da ação e reação ($\mathbf{t}^1 = -\mathbf{t}^2$, ver Figura 16).

O vetor $\mathbf{t}$ (“*traction*”) possui componentes na direção normal t_N e componentes na direção tangencial ao plano de contato t_T , dependendo do modelo constitutivo adotado

para representar o contato. Para os casos de problemas em que o atrito é desprezado a componente tangencial é obviamente nula ($t_T = 0$).

Em resumo, para se estabelecer o contato, é necessário que a função “gap” seja igual a zero $g_N = 0$, e como consequência ocorra o surgimento das tensões de contato (tensões com valores negativos por se tratarem de tensões de compressão) $t_N < 0$. Por outro lado, se os corpos estiverem separados (ocorre uma abertura ou “gap” entre eles), tem-se $g_N > 0$ e $t = 0$.

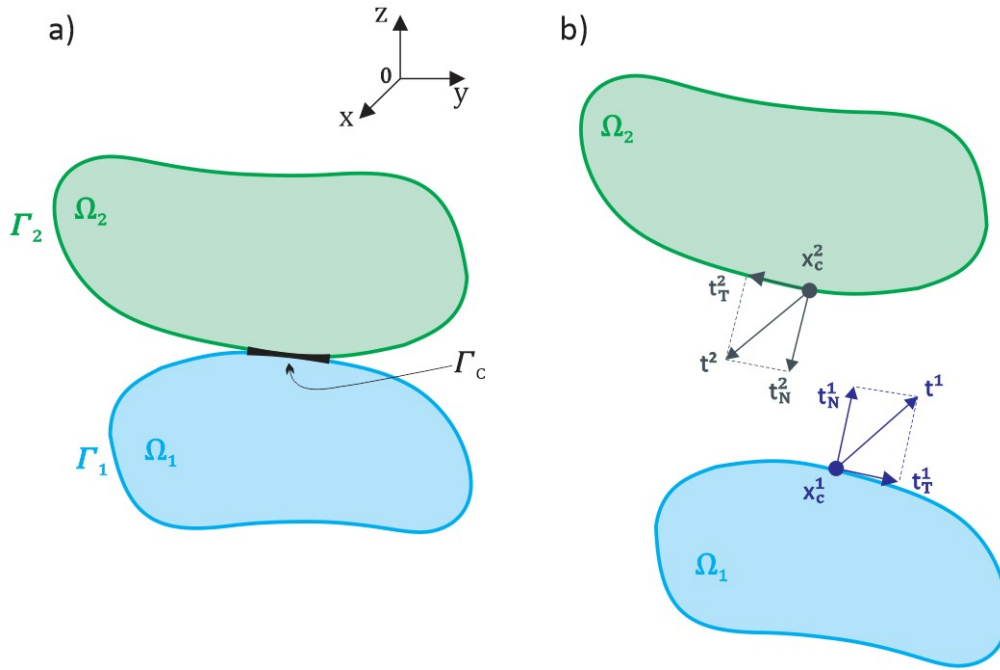


Figura 16 – Interface de contato. a) corpos em contato mostrando o contorno de contato Γ_c . b) análise das tensões de contato.

Vale destacar que o problema de equilíbrio mecânico, acrescido das restrições de contato é conhecido como problema de SIGNORINI. Em teorias de otimização esse conjunto de restrições é chamado de condições de KUHN-TUCKER-KARUSH.

$$g_N \geq 0$$

$$t_N \leq 0$$

$$t_N \cdot g_N = 0$$

Já o contato na direção tangencial pode ser representado de três formas básicas. Sem atrito, colado ou aderido, e com atrito (dependendo da relação constitutiva de contato).

Para o caso sem atrito, não há a presença de forças restritivas na direção tangencial, portanto:

$$t_T = 0$$

A representação de problemas em que os domínios estão aderidos ou colados é obtida através da ausência de movimento tangencial entre os mesmos. Portanto adiciona-se a restrição deslocamento tangencial g_T nulo, ou seja:

$$g_T = 0 \quad (23)$$

Para os casos em que ocorre o deslizamento ou escorregamento com atrito entre os domínios, ou seja, os casos em que ocorre um deslocamento relativo entre os corpos na direção tangencial do contato, a restrição pode ser apresentada de diversas formas, dependendo da natureza do atrito envolvido entre os corpos. Uma das formas mais comuns de representar o fenômeno de atrito seco é a Lei de Coulomb:

$$t_T = -\mu |t_N| \frac{\dot{g}_T}{\|\dot{g}_T\|} \quad (24)$$

onde μ é o coeficiente de atrito, sendo um valor constante na Lei de Coulomb clássica, dependente dos materiais envolvidos no contato e $\dot{g}_T$ é a velocidade de escorregamento relativa.

3.3 – Formulação do contato sem atrito

O contato entre sólidos elásticos é a denominação dada ao contato formado entre dois corpos deformáveis elasticamente. O entendimento deste tipo de problema é fundamental para se compreender a introdução das restrições causadas pelo surgimento de regiões de contato entre domínios. A Figura 17 ilustra a interface de contato.

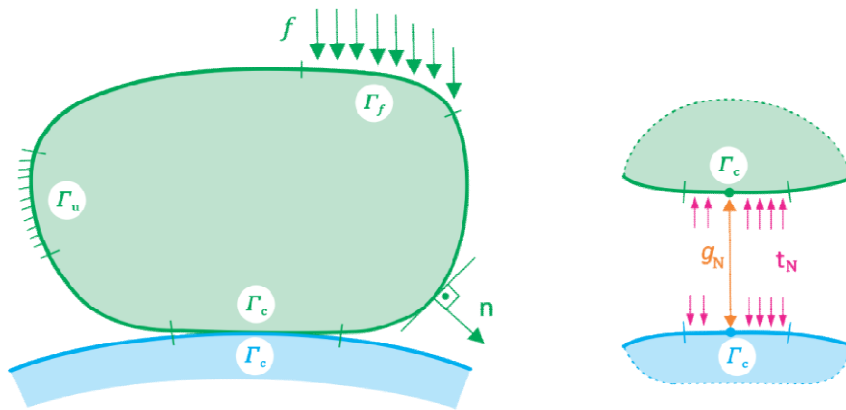


Figura 17 – Contato entre sólidos elásticos.

O problema de equilíbrio, para um corpo em contato pode ser formulado como o problema de valor de contorno previamente apresentado, acrescido das restrições de contato (condições de KHUN-TUCKER-KARUSH):

$$\begin{aligned}\nabla_S^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \text{ (equação de equilíbrio)} \\ \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} &= \mathbf{f} && \text{em } \Gamma_f \text{ (Condição Neumann)} \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{em } \Gamma_u \text{ (Condição Dirichlet)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_N &\geq 0 && \text{em } \Gamma_c \\ t_N &\leq 0 && \text{em } \Gamma_c \\ t_N \cdot g_N &= 0 && \text{em } \Gamma_c\end{aligned}$$

Para a solução de elementos finitos do sistema de equações acima, faz-se necessário a formulação do problema de SIGNORINI, que em termos de trabalhos virtuais, consiste em adicionar as restrições de contato à forma fraca, levando a equação (20) a forma:

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} - \delta W_{cont} = 0 \quad (25)$$

Sendo que δW_{cont} corresponde ao trabalho virtual devido às restrições impostas pelas condições de contato. Sua introdução aumenta consideravelmente a complexidade do problema, pois a princípio o domínio de contato Γ_c não é conhecido. Desta forma, determinar o contorno de contato é uma das respostas procuradas durante a resolução deste tipo de problema.

A determinação de δW_{cont} ocorre através da aplicação um método que garanta a restrição de contato, já abordado anteriormente (ver seção 2.1) em conjunto com um esquema destinado a discretizar o domínio de contato (ver seção 2.2).

4 – ELEMENTO DE ACOPLAMENTO

4.1 – Elemento de acoplamento aplicado em problemas com contato já formado

O elemento de acoplamento proposto por BITENCOURT et al. (2015) é um elemento que possui um nó adicional ($nn + 1$), chamado de C_{node} , em relação aos elementos padrão de uma malha, e a estratégia para seu funcionamento consiste em coincidir todos os seus nn nós com os nós de um elemento pertencente ao contorno do domínio Ω^1 (domínio mestre), e também coincidir o nó de acoplamento (C_{node}) com um nó pertencente ao contorno do outro domínio Ω^2 (domínio escravo). Desta forma, o elemento de acoplamento torna possível obter o deslocamento relativo entre os nós do elemento pertencente a Ω^1 e o nó pertencente ao Ω^2 , e assim estabelecer qualquer relação para este deslocamento, como por exemplo, uma relação linear entre deslocamento relativo e força de contato. A Figura 18 mostra diferentes exemplos de elemento de acoplamento, para problemas bidimensionais e tridimensionais.

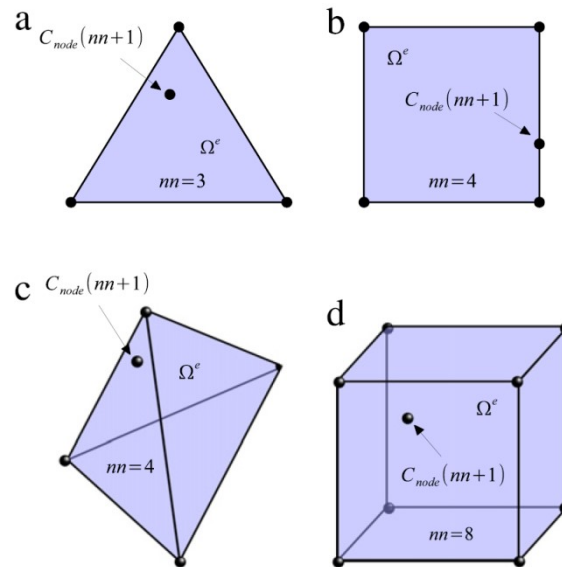


Figura 18 – Exemplos de elementos de acoplamentos: (a) triângulo de 3 nós + C_{node} ; (b) quadrilátero de 4 nós + C_{node} ; (c) tetraedro de 4 nós + C_{node} ; (d) cubo de 8 nós + C_{node} . (extraído de: BITENCOURT et al., 2015).

Esta técnica foi concebida para representar o contato entre malhas não conformes, para problemas nos quais o contato já esteja estabelecido, ou até mesmo para problemas em que ocorra sobreposição de malhas. Têm como característica a simplicidade de implementação e estabilidade, a vantagem de não acrescentar grau de liberdade ao problema, evitando aumento do custo computacional.

A Figura 19 mostra a aplicação do elemento de acoplamento em um problema bidimensional de contato entre duas malhas não compatíveis. Os elementos de acoplamento estão destacados em azul e amarelo.

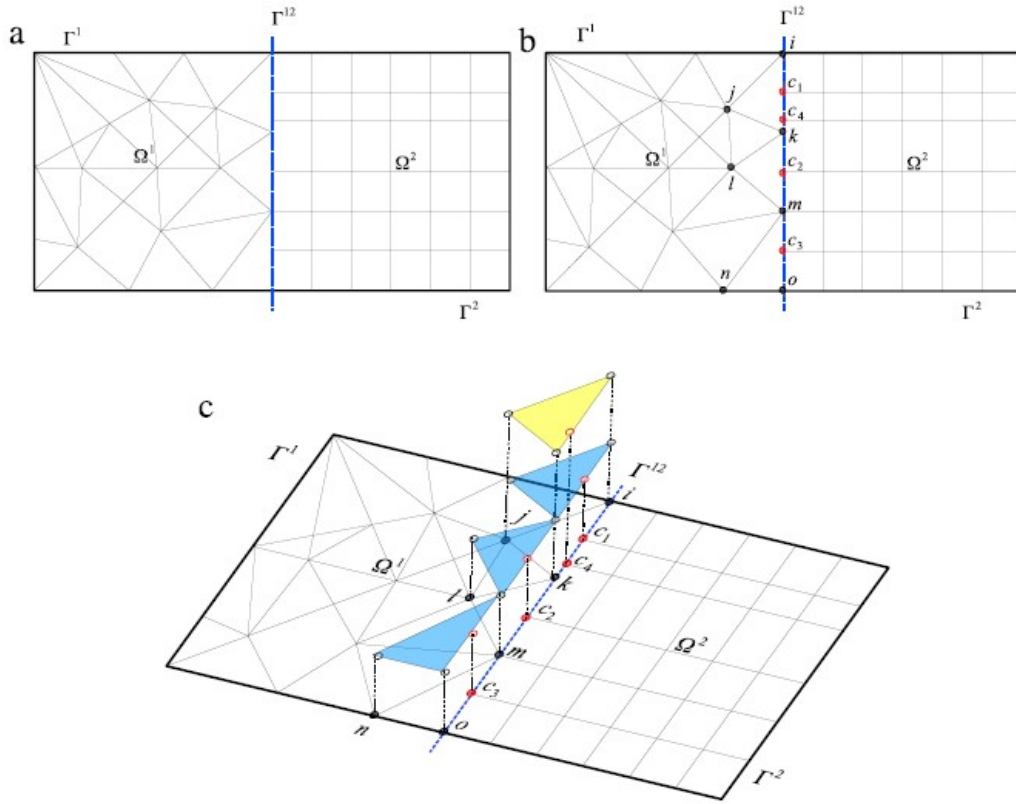


Figura 19 – Processo de acoplamento de duas malhas de elementos finitos não compatíveis. (a) Problema 2D com duas malhas não compatíveis. (b) Processo de identificação dos nós que irão compor os elementos de acoplamento. (c) criação e inserção dos elementos de acoplamento. (extraído de: BITENCOURT et al., 2015).

A formulação deste elemento de acoplamento consiste no seguinte:

Seja $\bar{N}_i(\mathbf{X})$ ($i = 1, nn$) as funções de forma definidas para um ponto material $\mathbf{X} \in \Omega^e$, no qual nn é o número de nós. O deslocamento $\bar{\mathbf{U}}$ em qualquer ponto do domínio ou contorno pode ser aproximado pelos deslocamentos nodais $\mathbf{D}_i$:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{nn} \bar{N}_i \mathbf{D}_i \quad (26)$$

Portanto, o deslocamento relativo entre o nó C_{node} e o ponto material de contato $\mathbf{X}_c$, correspondente à sua posição no contorno do elemento de acoplamento, sendo expresso por:

$$\llbracket \mathbf{U} \rrbracket = \mathbf{D}_{nn+1} - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}_c) = \mathbf{D}_{nn+1} - \sum_{i=1}^{nn} \bar{N}_i(\mathbf{X}_c) \mathbf{D}_i = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e \quad (27)$$

Sendo que:

$$\mathbf{B}_e = [-\bar{N}_1(\mathbf{X}_c) \quad -\bar{N}_2(\mathbf{X}_c) \quad \dots \quad -\bar{N}_{nn}(\mathbf{X}_c) \quad \mathbf{I}] \quad (28)$$

onde $\bar{N}_i = \bar{N}_i \mathbf{I}$, e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, e $\mathbf{D}_e$ é o vetor dos deslocamentos nodais, de forma:

$$\mathbf{D}_e = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{nn+1} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Vale ressaltar que $\mathbf{B}_e$ não é a tradicional matriz de relação deformação-deslocamento $\mathbf{B}$.

O trabalho virtual desenvolvido pela força de contato, no elemento de acoplamento é dado por:

$$\delta \mathcal{W}_e^{int} = \delta \llbracket \mathbf{U} \rrbracket^T \mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket) \quad (30)$$

Onde $\mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket)$ é a força de reação correspondente ao deslocamento relativo $\llbracket \mathbf{U} \rrbracket$, que pode ser determinada segundo um modelo constitutivo apropriado para representar a interação entre superfícies em contato.

Desta forma, valendo-se de que $\delta \llbracket \mathbf{U} \rrbracket = \mathbf{B}_e \delta \mathbf{D}_e$ obtém-se a força interna do elemento como sendo:

$$\mathbf{F}_e^{int} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket) \quad (31)$$

E finalmente, a matriz rigidez tangente pode ser obtida através de:

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial \mathbf{F}_e^{int}}{\partial \mathbf{D}_e} = \mathbf{B}_e^T \frac{\partial \mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket)}{\partial \llbracket \mathbf{U} \rrbracket} \mathbf{B}_e \quad (32)$$

4.2 – Elemento de acoplamento para problemas de formação de contato

Nesta seção será abordada a forma como o algoritmo proposto fará a discretização da região de contato, baseando-se no elemento de acoplamento apresentado, compondo o primeiro componente necessário para se modelar os problemas de contato.

O segundo componente necessário para o modelo de problemas de contato é composto por um método que garanta as restrições de contato, conforme mencionado anteriormente. Neste trabalho será empregado o método da Penalização como forma de garantir as restrições de contato, devido à sua simplicidade de implementação e a manutenção do número de graus de liberdade do problema.

A estrutura do elemento de acoplamento para esta nova formulação segue idêntica à estrutura original, ou seja, o elemento de acoplamento continua possuindo um nó adicional (C_{node}), em relação aos elementos padrão da malha, e a estratégia para seu funcionamento continua sendo coincidir todos os seus n nós com os nós de um elemento pertencente ao contorno do domínio Ω^1 (domínio mestre), além de também coincidir o nó de acoplamento (C_{node}) com um nó pertencente ao contorno do outro domínio Ω^2 (domínio escravo).

Entretanto, ao se calcular o deslocamento relativo $[\mathbf{U}](\mathbf{X}_c)$ entre o C_{node} (que agora pode não pertencer ao contorno do elemento de acoplamento no início do problema, conforme Figura 20) e o ponto material de contato $\mathbf{X}_c$ (situado no contorno do elemento) deverá ser levado em conta a distância inicial entre esses pontos, caracterizado pelo vetor $[\mathbf{U}]_0(\mathbf{X}_{c_{node}} - \mathbf{X}_c)$, que pode ser interpretado como sendo um deslocamento relativo inicial, ou o “gap” inicial entre os corpos.

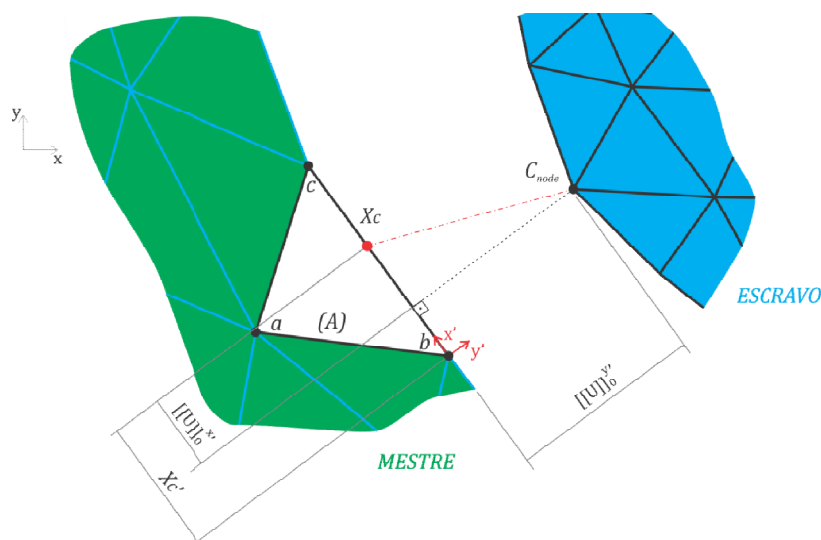


Figura 20 – Configuração inicial de problemas de formação de contato. Identificação das componentes do deslocamento relativo ou “gap” inicial.

Portanto, o deslocamento relativo resulta em:

$$[\mathbf{U}] = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e + [\mathbf{U}]_0 (\mathbf{X}_{c_{node}} - \mathbf{X}_c) \quad (33)$$

onde $[\mathbf{U}]_0 (\mathbf{X}_{c_{node}} - \mathbf{X}_c)$ é o vetor de posição relativa inicial entre o C_{node} e um ponto material de contato $\mathbf{X}_c$, pertencente ao contorno do elemento. Vale ressaltar que para o caso 2D este vetor contém as componentes tangencial e normal, e para o caso 3D contém as componentes tangenciais (duas direções) e normal. Portanto:

$$[\mathbf{U}]_0 = \mathbf{X}_{c_{node}} - \mathbf{X}_c \quad (34)$$

Destaca-se que a matriz $\mathbf{B}_e$ e o vetor $\mathbf{D}_e$ são os mesmos já apresentados na formulação original.

O trabalho virtual desenvolvido pela força de contato, no elemento de acoplamento continua sendo dado por:

$$\delta W_e^{cont} = \delta [\mathbf{U}]^T \mathbf{F}([\mathbf{U}]) \quad (35)$$

onde:

$$\delta [\mathbf{U}] = \mathbf{B}_e \delta \mathbf{D}_e + \delta [\mathbf{U}]_0 (\mathbf{X}_{c_{node}} - \mathbf{X}_c) \quad (36)$$

$$\delta [\mathbf{U}]_0 (\mathbf{X}_{c_{node}} - \mathbf{X}_c) = 0 \quad (37)$$

Pois, $[\mathbf{U}]_0 (\mathbf{X}_{c_{node}} - \mathbf{X}_c)$ é constante, resultando em:

$$\delta [\mathbf{U}] = \mathbf{B}_e \delta \mathbf{D}_e \quad (38)$$

Assim a força de contato no elemento é dada por:

$$\mathbf{F}_e^{cont} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{F}([\mathbf{U}]) \quad (39)$$

Valendo-se do método da Penalização para garantir as restrições de contato, a força devido ao contato é dada por:

$$\mathbf{F}([\mathbf{U}]) = \mathbf{C}[\mathbf{U}] = \mathbf{C} \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e \quad (40)$$

no qual $\mathbf{C}$ é a matriz que contém os fatores de penalização, em coordenadas globais, sendo que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^T \mathbf{c} \mathbf{R} \quad (41)$$

onde $\mathbf{R}$ é a matriz de rotação ortogonal dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

no qual n_i , s_i e t_i ($i = 1,2,3$) são as componentes do vetor base local (n, s, t) de acordo com o sistema de coordenadas global. E $\mathbf{c}$ é a matriz dos fatores de penalização local, que para o caso sem atrito assume a seguinte forma:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c} \end{bmatrix} \quad (43)$$

onde $\tilde{c}$ é o parâmetro de penalização na direção normal. Pode-se observar também que a componente tangencial do parâmetro de penalização é nula, justamente por se tratar de uma representação de problemas sem atrito.

Substituindo a equação (40) na equação (39), e posteriormente as equações (41); (42) e (43); a força interna do elemento resulta em:

$$\mathbf{F}_e^{int} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e = \mathbf{B}_e^T \mathbf{R}^T \mathbf{c} \mathbf{R} \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e \quad (44)$$

E a matriz rigidez tangente do elemento continua sendo:

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial \mathbf{F}_e^{int}}{\partial \mathbf{D}_e} = \mathbf{B}_e^T \frac{\partial \mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket)}{\partial \llbracket \mathbf{U} \rrbracket} \mathbf{B}_e = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e = \mathbf{B}_e^T \mathbf{R}^T \mathbf{c} \mathbf{R} \mathbf{B}_e \quad (45)$$

4.3 – Determinação do ponto de contato

Uma característica marcante nos problemas de formação de contato é a determinação do ponto $\mathbf{X}_c$, ponto no qual ocorre o contato entre os corpos, e que a priori não é conhecido. Portanto, a determinação do ponto $\mathbf{X}_c$ torna-se questão fundamental para a solução do problema de contato.

A forma proposta para se obter o ponto de contato é bastante simples e se fundamenta na condição de que o método desenvolvido neste trabalho é destinado a solução de problema com pequenos deslocamentos.

Com esta condição torna-se possível estabelecer o ponto de contato de maneira prévia à solução do problema, com satisfatória aproximação em relação ao ponto de contato real. Assim, a definição dos pontos de contato, bem como a criação dos elementos de acoplamentos ocorre através de um pré-processamento que consiste de três passos.

Passo 1: Seleção dos nós mestres e escravos candidatos ao contato. Com a seleção dos nós mestres é possível identificar as arestas pertencente ao contorno do domínio mestre candidatas ao contato, bem como o elemento mestre ao qual pertence, conforme ilustra a Figura 21.

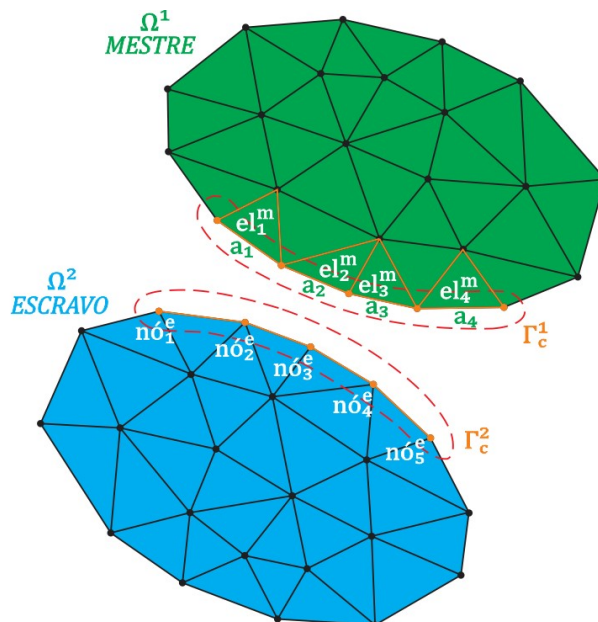


Figura 21 – Exemplo de seleção dos nós dos domínios mestre e escravo. Em destaque, a delimitação da parte do contorno candidata ao contato, em ambos os corpos.

Passo 2: Cálculo das distâncias mínimas e das localizações dos pontos de distância mínima, chamado “closest point”, para cada nó escravo em relação à todas as arestas do domínio mestre, candidatas ao contato. Em seguida, verificação de atendimento aos critérios para a formação do elemento de acoplamento:

- 1) Ponto de distância mínima deve pertencer ao domínio da aresta mestre analisada.
- 2) Menor distância mínima. No caso de o nó escravo analisado pertencer a duas ou mais arestas.

O par nó escravo mais elemento mestre selecionado para a formação do elemento de acoplamento será aquele que atender aos critérios 1 e 2 concomitantemente.

A Figura 22 mostra um exemplo deste processo para o nó escravo $nó_3^e$. Para cada elemento mestre candidato el_n^m , com n de 1 a 4, é calculada uma distância mínima dm_n e é determinada a localização do “closest point” ξ_n , em relação à coordenada natural ξ (varia de 0 a 1 ao longo da aresta do elemento do domínio mestre). O subscrito n indica o número de elementos mestres candidatos e os sobrescritos e e m indicam os domínios escravo e mestre respectivamente. Em seguida, verifica se o “closest point” pertence ao domínio da aresta, ou seja, se $0 \leq \xi_n < 1$. Neste exemplo, o par nó-elemento selecionado para a formação do elemento de acoplamento seria $nó_3^e$ e el_2^m , como pode ser observado.

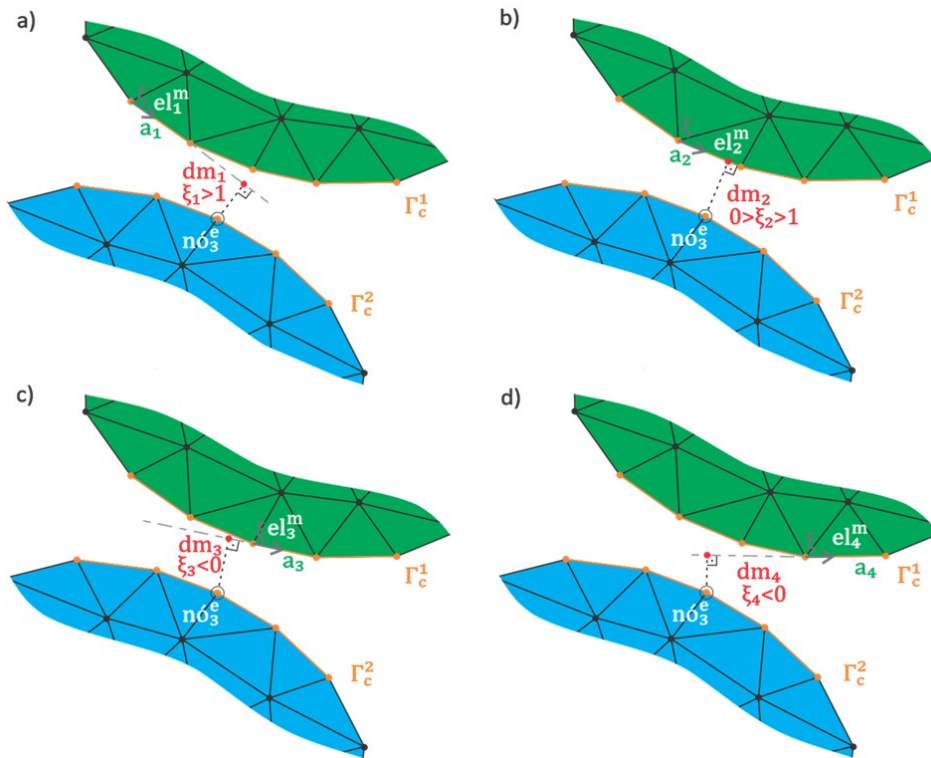


Figura 22 – Exemplo de pré-processamento para o nó escravo $nó_3^e$. Avaliação da distância mínima e localização do “closest point” para o elemento mestre el_1^m a el_4^m .

Passo 3: Formação do elemento de acoplamento, e estabelecimento do ponto de contato na aresta mestre, na coordenada natural do “closest point”. Nesta etapa a matriz de elementos do problema sofre o acréscimo dos elementos de acoplamento criados. A localização do ponto de contato X_c também é armazenada, para ser utilizada durante o processamento.

Vale destacar que o ponto de contato é estabelecido uma única vez, através deste pré-processamento, e sua localização não é atualizada ao longo do processamento, com base na fundamentação previamente descrita.

A Figura 23 mostra o elemento de acoplamento em destaque formado através de todos os nós do elemento mestre el_2^m e do nó escravo $nó_3^e$. Também é mostrado o ponto de contato X_c armazenado, o qual será utilizado durante todo o processamento sem atualização, conforme dito anteriormente.

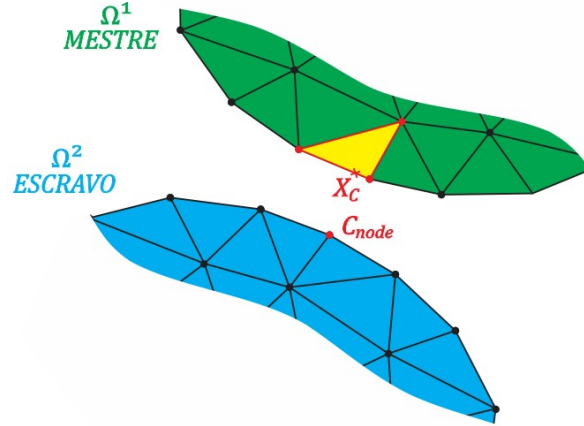


Figura 23 – Formação do elemento de acoplamento (em destaque)

A Figura 24 mostra todos os elementos de acoplamento el_s^a , criados para o exemplo em questão, com s de 1 a 5. O sobrescrito a indica elemento do tipo acoplamento, e o subscrito s indica o número de elementos de acoplamento. Na figura é possível observar também os respectivos C_{node_s} e X_{c_s} , estabelecidos pelo pré-processamento.

Vale destacar que os elementos de acoplamento el_1^a e el_2^a (em cor laranja) compartilham os mesmos nós do elemento mestre el_1^m , mas se diferenciam por possuir diferentes C_{node_s} e X_{c_s} .

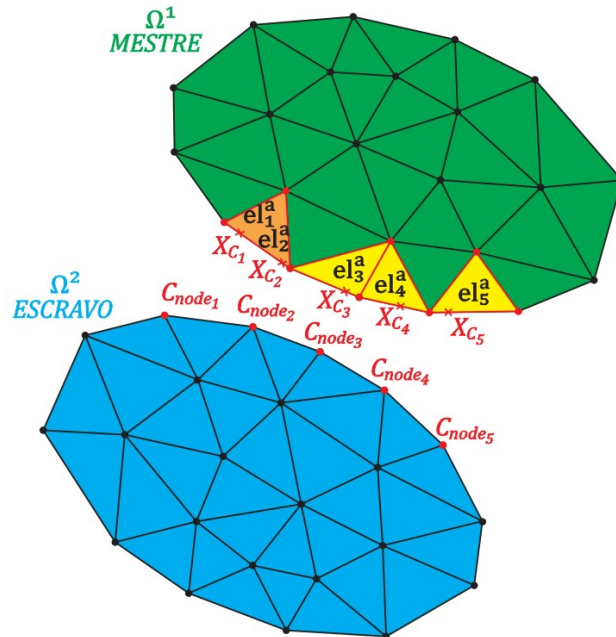


Figura 24 – Malha com todos os elementos de acoplamentos formados (em destaque).

Uma vez estabelecido todos os elementos de acoplamento, se inicia o processo de solução do problema.

4.4 – Estrutura de funcionamento do elemento de acoplamento

A estratégia de solução deste problema não linear é concebido baseado no método Newton-Rhapson, em um esquema de integração implícito/explicito (IMPL-EX). Trata-se de um esquema incremental e iterativo, sendo que as iterações ocorrem dentro de um mesmo passo de carga até que o resíduo entre as forças internas e externas convirja para um valor abaixo de uma tolerância especificada. Na sequência, ocorre o incremento na carga iniciando um novo processo iterativo, e assim sucessivamente até completar todos os passos de carga.

Abaixo segue o Quadro 1 contendo o esquema de funcionamento do algoritmo de solução do problema, onde:

j: passo de carga

n_passos: número de passo de carga do problema

G: vetor resíduo

tol: valor de tolerancia para o problema

n: número da iteração

ele: tipo de elemento (padrão ou acoplamento)

i: número do elemento analisado

n_ele: número total de elementos

$\mathbf{F}^{int}$: vetor de forças internas global

$\mathbf{F}_{e_i}^{int}$: vetor de forças internas do *i*-elemento

K: matriz rigidez global

$\mathbf{K}_{e_i}$: matriz rigidez do *i*-elemento

A: operador montagem das matrizes globais

$\mathbf{F}^{ext}$: vetor de forças externas

D : vetor deslocamentos nodais

t_arm : vetor que armazena as forças de contato de todos elementos de acoplamento, em coordenadas locais, para ser utilizado no passo seguinte como verificação do surgimento de força de compressão (força negativa).

$\mathbf{t}'_e$: vetor que armazena as forças de contato de todos elementos de acoplamento, em coordenadas locais, no passo de carga atual.

INÍCIO:

For $j = 1:n_passos$

$n = 0$

While $|G| \geq tol$

$n = n + 1$

For $i = 1:n_ele$

If $ele = \text{elemento fundamental} \rightarrow \text{Modelo elástico}$

Elseif $ele = \text{elemento de acoplamento} \rightarrow \text{Modelo de acoplamento}$

End If

$$\mathbf{F}^{int} = \sum_{e=1}^{n_ele} \mathbf{F}_{e_i}^{int}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_ele} \mathbf{K}_{e_i}$$

End For

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{F}_n^{ext} - \mathbf{F}_n^{int}$$

$$\text{Solve : } \mathbf{K}_{(n)} d\mathbf{D}_{(n)} = \mathbf{G}_{(n)}$$

$$\mathbf{D}_{(n+1)} = \mathbf{D}_{(n)} + d\mathbf{D}_{(n)}$$

End While

$$\mathbf{t}_{arm} = \mathbf{t}'_e$$

End For

FIM

Quadro 1 – Estrutura do algoritmo de solução

Destaca-se que durante o processamento ocorre a seleção do modelo de elemento, dependendo do seu tipo, que pode ser fundamental ou acoplamento.

ENTRADA: $\mathbf{D}_e$; $\mathbf{t}_{arm}$

$$[\mathbf{U}]'_e = \mathbf{R}^T \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e + [\mathbf{U}]'_o$$

If $\mathbf{t}_{arm} > 0$

$$\mathbf{t}'_e = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}_e'^{int} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}'_e = \mathbf{0}$$

Elseif $\mathbf{t}_{arm} \leq 0$

$$\mathbf{t}'_e = \mathbf{c}[\mathbf{U}]'_e$$

$$\mathbf{F}_e'^{int} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{t}'_e$$

$$\mathbf{K}'_e = \mathbf{B}_e^T \mathbf{c} \mathbf{B}_e$$

End if

$$\mathbf{F}_e^{int} = \mathbf{R}^T \mathbf{F}_e'^{int}$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{R}^T \mathbf{K}'_e \mathbf{R}$$

SAÍDA: $\mathbf{t}'_e$; $\mathbf{F}_e'^{int}$; $\mathbf{K}_e$

Quadro 2 – Estrutura do algoritmo do elemento de acoplamento

O Quadro 2 apresenta o esquema do modelo aplicado ao elemento de acoplamento desenvolvido, onde os termos seguidos por “ ’ ” se referem às coordenadas locais, além disso:

$\mathbf{D}_e$: vetor deslocamentos nodais do elemento.

$[\mathbf{U}]_e$: deslocamento relativo.

$\mathbf{R}$: matriz rotação.

$\mathbf{B}_e$: matriz contendo as funções de forma do elemento padrão, utilizadas pelo elemento de acoplamento.

$[\mathbf{U}]_o$: deslocamento relativo inicial (“gap”).

$\mathbf{F}_e'^{int}$: vetor de forças internas do elemento, em coordenada local.

$\mathbf{K}'_e$: matriz rigidez do elemento, em coordenada local.

Um ponto a ser salientado nesta estratégia consiste no fato de que a verificação do sentido da força de contato (se trativa ou compressiva), utiliza o valor calculado no passo de carga anterior (armazenado pelo vetor t_{arm}), ou seja, a verificação do sentido da força de contato no passo de integração atual é feita utilizando o valor da força de contato do passo anterior. Este fato dá o caráter explícito à estratégia para solução do problema não linear, conferindo maior velocidade de convergência e estabilidade ao processo.

Outro ponto importante a ser observado é que ao se confirmar que a força de contato é compressiva e consequentemente se empregar o parâmetro de penalização normal elevado ($\tilde{c} \gg 0$), faz-se cumprir as restrições de contato (condições do problema de Signorini) previamente apresentado.

Para ilustrar o funcionamento do método proposto, serão apresentados alguns problemas de contato Hertziano.

5 – SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados alguns problemas clássicos envolvendo contato, aplicando o método desenvolvido para a solução destes problemas.

Para validar o método proposto, inicialmente será tratado o problema de contato entre um meio cilindro e uma base, comparando-se os resultados obtidos numericamente, com os dados obtidos analiticamente. Posteriormente será realizado o chamado teste de contato, analisando-se a continuidade das tensões de contato resultantes, e em seguida, será analisado o problema de contato entre dois cilindros. Por fim, para verificar a aplicação do método desenvolvido em um problema prático, será feita a análise de um problema clássico da engenharia mecânica, que se trata do contato entre engrenagens de dentes retos.

5.1 – Modelo de teste de contato

A seguir é desenvolvido o teste de contato, com o propósito de avaliar a uniformidade das tensões transmitidas entre os domínios, seguindo a configuração apresentada na Figura 25, baseado no teste de contato proposto por TAYLOR e PAPADOPOULOS (1991). Os dois blocos são constituídos pelo mesmo material, isotrópico linear, no qual o módulo de elasticidade $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Os blocos possuem espessura unitária e é considerado o estado plano de tensões. O carregamento distribuído aplicado é $F = 200 \text{ N/mm}$, e o fator de penalização normal considerado é $\tilde{c} = 1 \times 10^{10} \text{ N/mm}^2$.

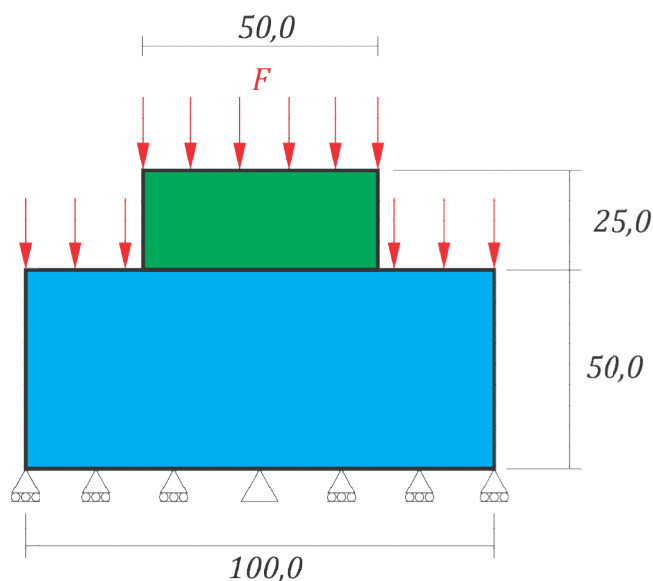


Figura 25 – Configuração do teste de contato.

A Figura 26 apresenta a discretização aplicada ao modelo do teste de contato, no qual foram empregados um total de 556 elementos triangulares de 3 nós, sendo 156 no domínio superior (bloco superior) e 400 no domínio inferior (bloco inferior), e um total de 329 nós. Ressalta-se que neste modelo o domínio superior foi designado como escravo, por ser o mais refinado, e o domínio inferior foi designado como mestre. Observa-se também na mesma figura a incompatibilidade entre as malhas.

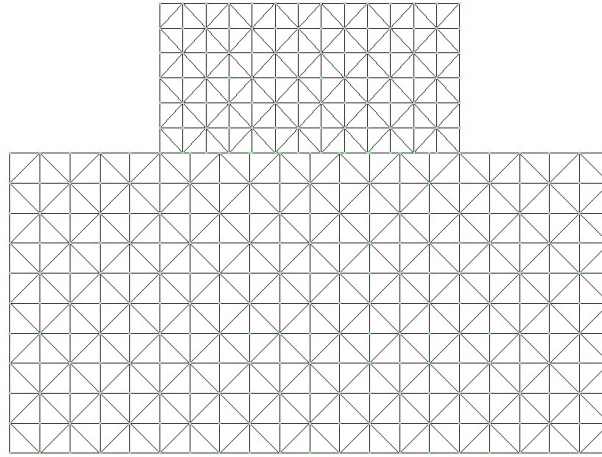


Figura 26 – Discretização aplicado ao modelo do teste de contato.

Após o pré-processamento, foram criados 14 elementos de acoplamento. Estes elementos com seus respectivos C_{node} podem ser vistos na Figura 27. Nesta figura, os elementos em amarelo são elementos de acoplamentos únicos, e os de cor laranja são dois elementos de acoplamento sobrepostos.

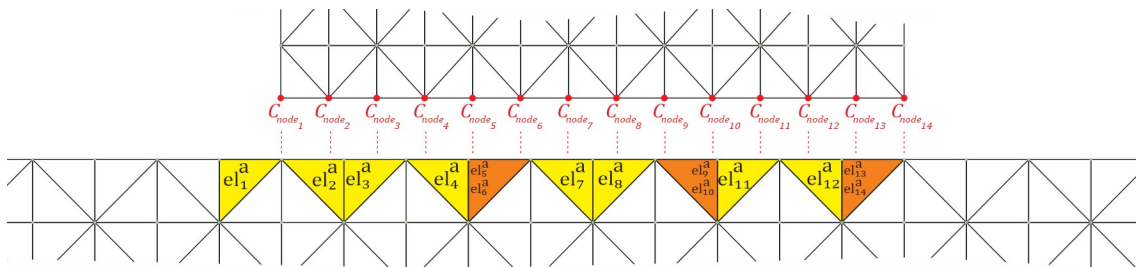


Figura 27 – Elementos de acoplamento criados, e seus respectivos C_{node} .

A Figura 28 apresenta o resultado das tensões σ_y (tensões na direção vertical), obtido. A Figura 29 apresenta o resultado de tensões σ_y suavizadas (nodais) e as respectivas isolinhas.

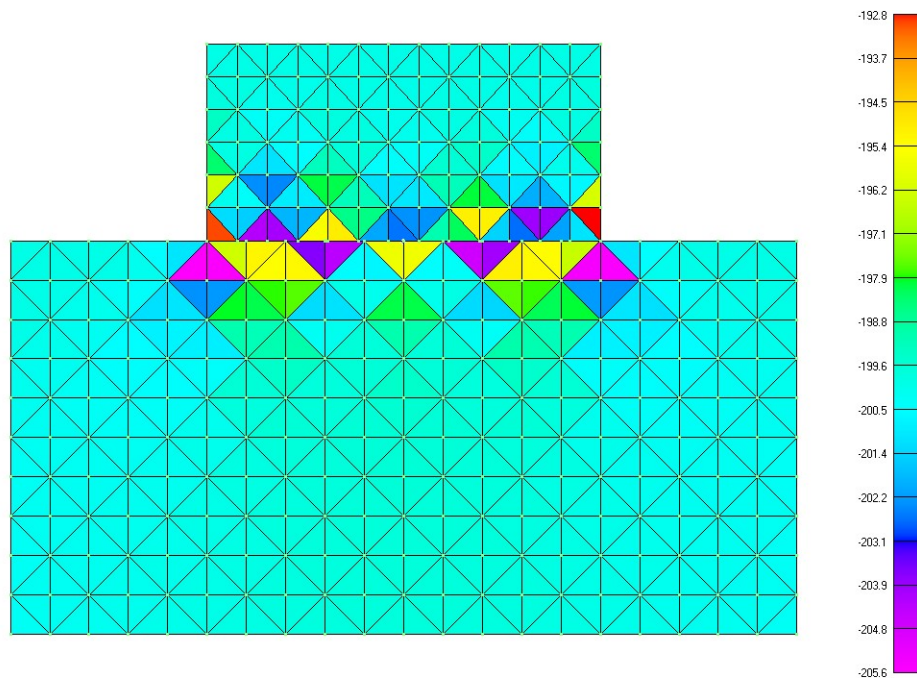


Figura 28 – Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical) , em N/mm^2 .

É possível observar que o campo de tensões não se apresenta de maneira uniforme na região de contato. Os valores de tensão variam entre $-192,8 N/mm^2$ e $-205,6 N/mm^2$. Ou seja, as tensões variaram $+7,2 N/mm^2$ e $-5,6 N/mm^2$ em torno da tensão real $-200 N/mm^2$.

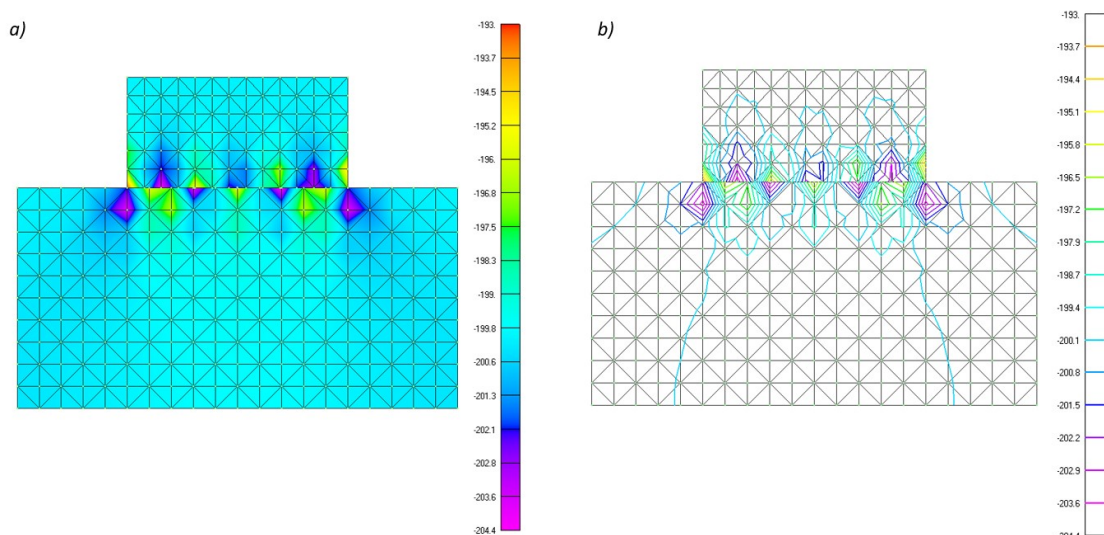


Figura 29 – Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical). a) suavizado e b) isolinhas, em N/mm^2 .

As Figura 30 mostra os desvios, em porcentagem, nos valores das tensões de cada elemento na região do contato, em relação a tensão real ($-200 N/mm^2$).

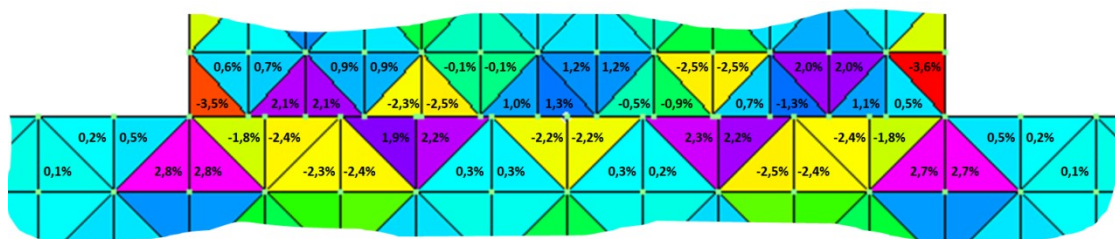


Figura 30 – Desvios no valor das tensões σ_y , na região do contato, em N/mm^2 .

Portanto, conforme os resultados mostrados acima, pode-se observar que a perfeita transmissão de tensão entre os domínios não foi obtida. Entretanto, destaca-se uma variação máxima de $-3,5\%$ em relação ao valor real da tensão σ_y na região de contato, o que geralmente pode ser considerado aceitável em grande parte das soluções de engenharia obtidas através de métodos numéricos.

5.2 – Modelo de contato entre meio cilindro e base

A primeira aplicação do método proposto consiste em um problema de contato clássico, conhecido como contato Hertziano entre uma metade de cilindro (ou meio cilindro) e uma placa ou base, cujo objetivo é validar o método desenvolvido, comparando os resultados de pressões de contato obtidos através do método com os resultados de pressões calculadas analiticamente.

Conforme mostra a Figura 31 (a), o meio cilindro possui diâmetro 20,0 mm, afastado inicialmente 0,1 mm de uma base de dimensões 10,0 mm de largura por 5,0 mm de altura. Ambos os componentes possuem espessura unitária, e foram especificados com módulo de elasticidade $E = 210.000 N/mm^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$; correspondendo às propriedades do aço. Neste problema é considerado o estado plano de tensões. A força distribuída foi aplicada em dois casos ($F = 300 N/mm$ e $F = 500 N/mm$) e a solução do problema foi obtida utilizando três quantidades distintas de passos de carga (10; 15 e 20 passos).

O fator de penalização normal utilizado foi $\tilde{c} = 1 \times 10^{10} N/mm^2$. Ressalta-se que este valor foi determinado após alguns teste prévios com o modelo, aplicando diferentes valores de fator de penalização. Assim, com o valor apresentado foi possível alcançar uma boa interação entre os domínios, sem a ocorrência de mau condicionamento da matriz rigidez.

A discretização do problema foi realizada de duas formas. Inicialmente foi gerada uma malha, chamada de “malha padrão”, conforme mostra a Figura 31 (b). E posteriormente

foi gerada uma segunda malha, mais refinada nas regiões de contato, denominada “malha refinada”. A Tabela 1 mostra as características das duas malhas analisadas.

Vale destacar que o domínio do meio cilindro foi designado como escravo (por possuir a malha mais fina que a base), e naturalmente o domínio base como mestre. E nas duas discretizações realizadas foi garantida a não conformidade entre as malhas, na região de contato.

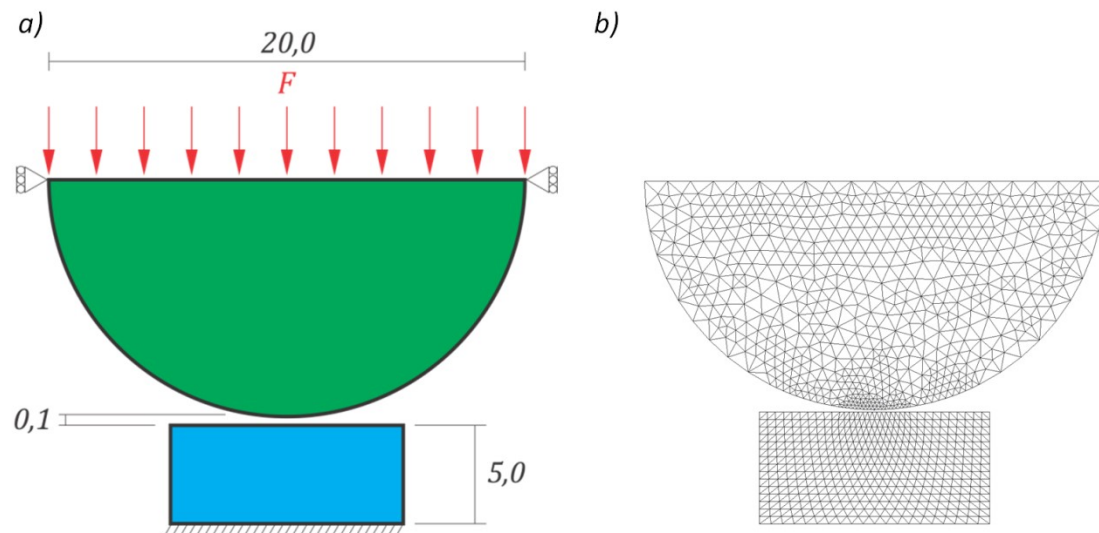


Figura 31 – a) Configuração do problema de contato entre meio cilindro e base. b) “Malha Padrão” do modelo de contato entre meio cilindro e base.

	Nº de Elementos	Nº de Elementos de Acoplamento	Nº de Nós
Malha Padrão	2021	21	1095
Malha Refinada	4168	57	2196

Tabela 1 – Características das malhas analisada

A Figura 32 apresenta o resultado geral de tensões verticais σ_y para o problema discretizado com a “malha padrão”, força aplicada $F = 500 \text{ N/mm}$ e solução obtida em 20 passos. A Figura 33 mostra o mesmo resultado, porém de forma suavizado (tensões nodais), e também em forma de isolinhas. Através dessas figuras é possível analisar de maneira qualitativa o desempenho do método proposto, em termos de tensões obtidas, no qual nota-se a concordância no perfil de tensões com o perfil característico para este tipo de problema, apresentado na Figura 34. Esta figura mostra o campo de tensões verticais σ_y de um problema semelhante, focando a região do contato, apresentado por De LORENZIS et al. (2015).

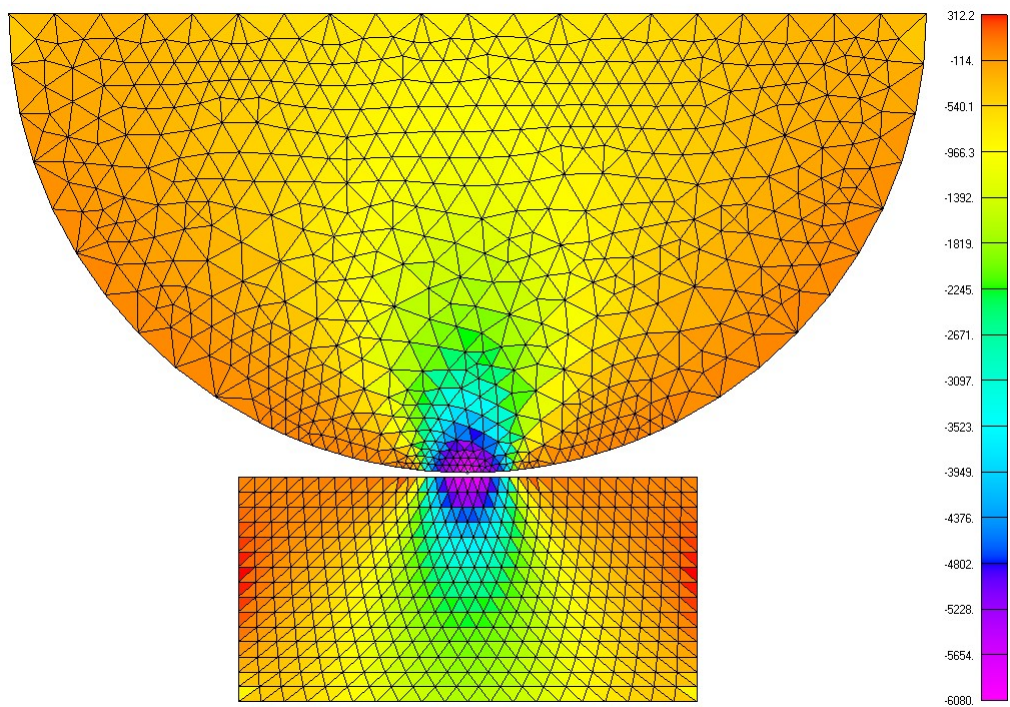


Figura 32 – Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical), em N/mm^2 .

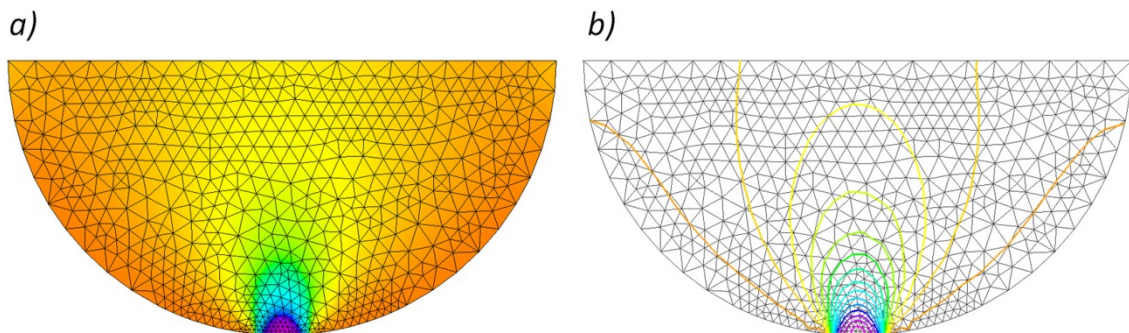


Figura 33 – a) Resultado do campo de tensões suavizadas σ_y (tensões na direção vertical). b) Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical) em isolinhas, em N/mm^2 .

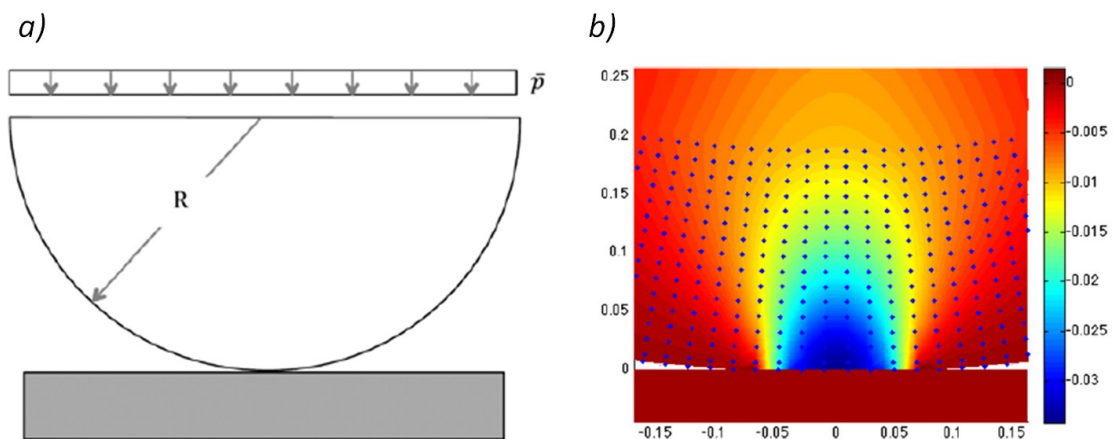


Figura 34 – a) Configuração do problema de contato Hertziano. b) Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical) na região do contato. (extraído de: De LORENZIS et al.;2015)

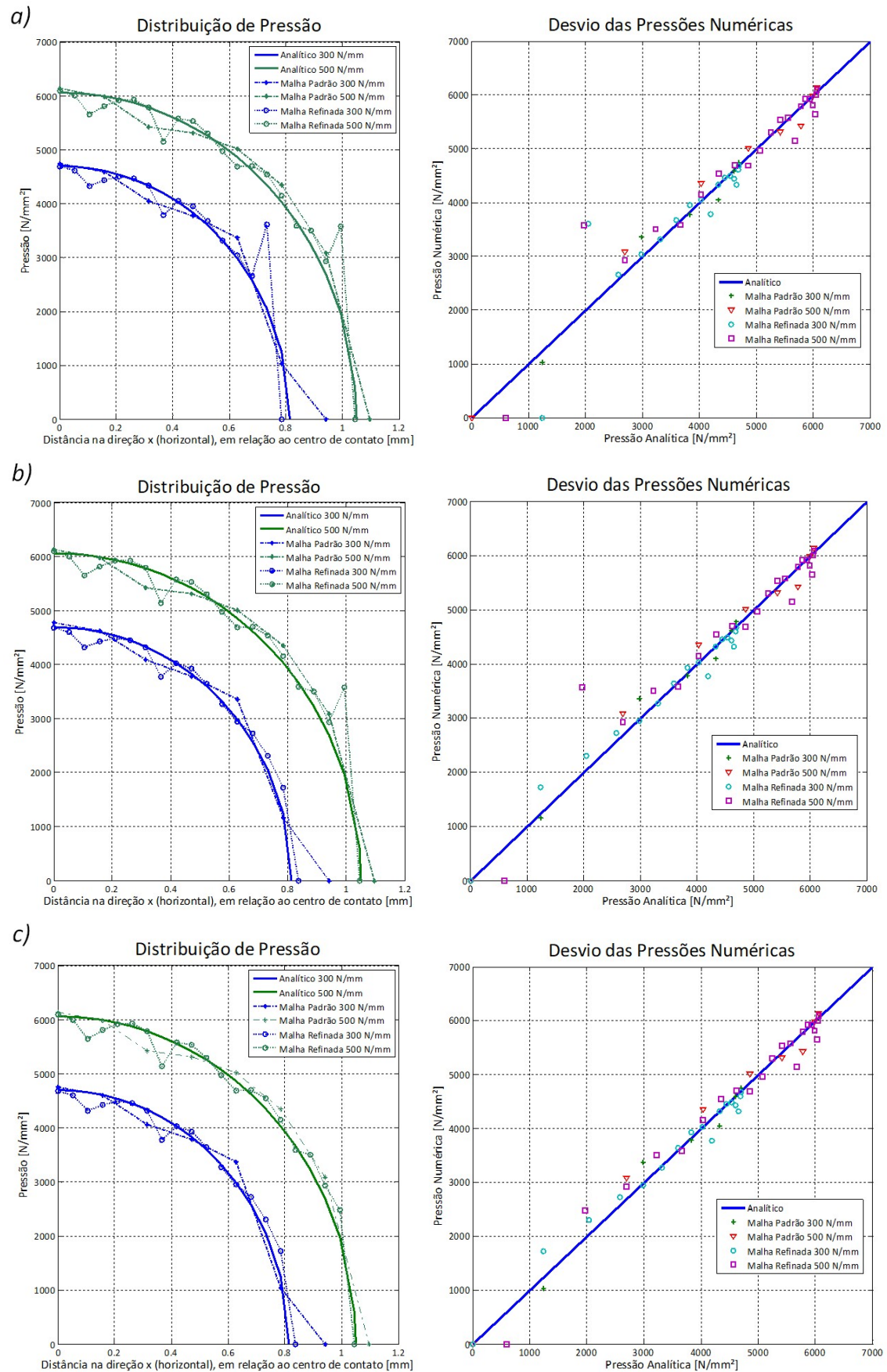


Figura 35 – Distribuição de pressão de contato e desvio da pressão de contato obtida numericamente. a) 10 passos de carga; b) 15 passos de carga; c) 20 passos de carga.

A Figura 35 traz os gráficos com os valores de pressão de contato obtidos pelo método proposto e obtidos analiticamente, para as diversas configurações testadas. Traz também os gráficos de comparação entre os valores obtidos numericamente em relação aos valores obtidos analiticamente para o mesmo nó, tornando claro o desvio de cada ponto analisado.

Os gráficos de pressão de contato estão divididos em três quantidades distintas totais de passos de carga ((a) 10; (b) 15 e (c) 20 passos), e em cada gráfico são apresentadas as curvas de valores obtidas analiticamente para as forças $F = 300 \text{ N/mm}$ (em azul) e $F = 500 \text{ N/mm}$ (em verde). Para cada curva analítica existem duas outras curvas de valores obtidos numericamente, sendo uma para os valores obtidos através da “malha padrão” e a outra para os valores obtidos através da “malha refinada”. Desta forma é possível verificar o grau de aproximação entre os valores obtidos utilizando-se uma malha padrão e a resposta analítica, verificar o efeito do refinamento da malha e o efeito do aumento da carga, bem como é possível verificar o efeito do aumento do número de passos de carga utilizados na obtenção da solução.

Com relação ao efeito do refinamento da malha, como o esperado, melhora a representação da curva de pressões (aumenta o número de pontos da curva), entretanto vale ressaltar que os resultados para malha padrão já apresentam baixos desvios (média de 6,4% e 5,5% para forças $F = 300 \text{ N/mm}$ e $F = 500 \text{ N/mm}$, respectivamente, para a solução em 20 passos), como pode ser visto nos gráficos de desvios de pressão.

O efeito do aumento de carga não traz diferenças no resultado, desde que a região de contato resultante seja menor que as regiões de refinamento de malha presentes nos dois domínios.

Contudo, o efeito do número de passos para a obtenção da solução traz alterações significativas na solução. Nos gráficos para a solução em 10 passos de carga, e para os modelos com malha refinada, pode ser visto uma grande diferença no valor da pressão nos últimos nós pertencente ao contato, para os dois níveis de carga aplicado (desvio de 76,4% para $F = 300 \text{ N/mm}$, e 81,2% para $F = 500 \text{ N/mm}$). O mesmo não se observa para os modelos com malha padrão (mais grosseira). Para a solução em 15 passos apenas o modelo refinado com carga $F = 500 \text{ N/mm}$ apresenta acentuado desvio (81,2%). Já a solução em 20 passos não apresentou desvios com tamanha magnitude, nos últimos nós do contato.

Há portanto, um compromisso entre o número de passos para a obtenção da solução, com relação ao nível de carga e ao refinamento aplicado à malha.

Isso ocorre devido à forma como o algoritmo ativa o par de contato. Lembrando que é necessário que haja penetração do nó escravo (C_{node}) no elemento de acoplamento

(domínio mestre) em um determinado passo de carga para que nos próximos passos de carga o contato seja efetivado. Se durante a execução do problema houver um insuficiente número de passos de carga, poderá ocorrer uma formação incompleta do contato, no qual alguns nós da periferia do contato serão sobrecarregados, enquanto que outros nós podem penetrar o domínio mestre, como pode ser mostrado na Figura 36. A Figura 36 mostra o resultado final, na interface de contato, para “malha padrão”, $F = 300 \text{ N/mm}$, 10 passos de carga.

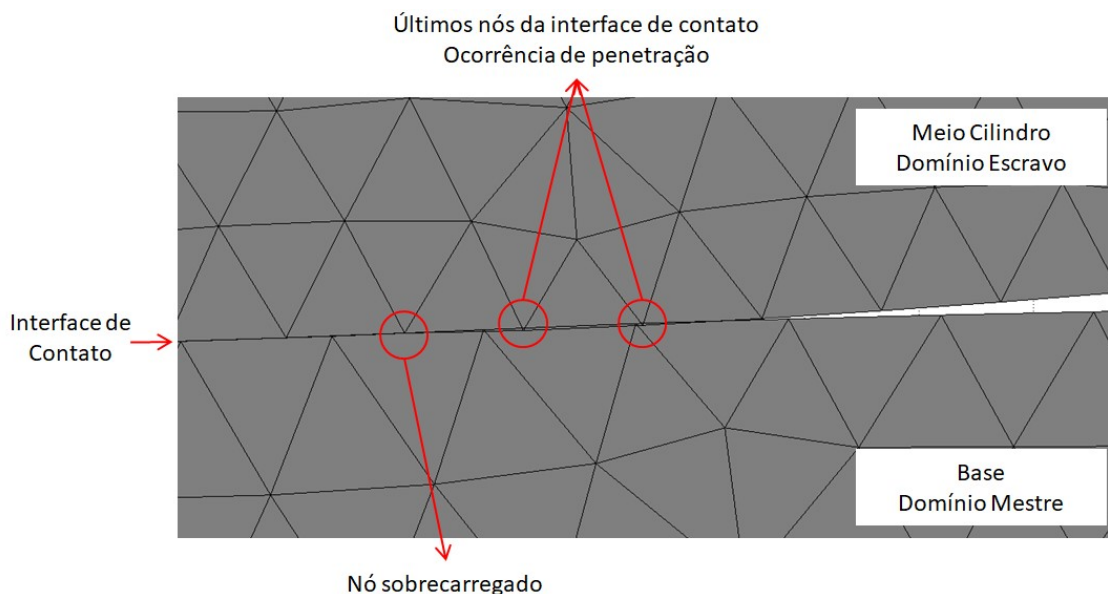


Figura 36 – Interface de contato. Formação de contato incompleta.

Nesta figura é clara a incompleta formação do contato, dada a ocorrência de penetração entre domínios na solução final, resultando em valores imprecisos de pressão na periferia da zona de contato.

Este problema é contornado aumentando-se o número de passo de carga, como pode ser observado nos resultados de pressão de contato, da Figura 35 (c).

Para melhor ilustrar o processo de formação do contato, segue a Figura 37 e a Figura 38 que mostram os elementos de acoplamento criados no pré-processamento e o processo de detecção de penetração e a ativação dos elementos de acoplamento, para cada passos de carga, do modelo com malha padrão, $F = 300 \text{ N/mm}$ e 10 passos de carga.

Na Figura 37 verifica-se todos os elementos de acoplamento criados, destacados em verde, e seus respectivos C_{node} . Os elementos com destaque laranja são os elementos de acoplamento coincidentes, ou seja, são dois elementos de acoplamento inseridos, que compartilham os mesmos nós da malha mestre.

A Figura 38, mostra a sequencia de passos de carga, bem como a ativação dos elementos de acoplamento criados. Os elementos em verde são aqueles no qual o corre a

penetração do C_{node} no elemento de acoplamento (ativação do contato). A partir do passo de carga seguinte, para estes elementos é utilizado o fator de penalização $\tilde{c}$, para evitar a penetração dos domínios e para que ocorra a troca das forças de contato entre os mesmos. Esta situação ocorre nos elementos em amarelo. Vale dizer que os elementos na cor laranja apontam a sobreposição de dois elementos de acoplamento ativos.

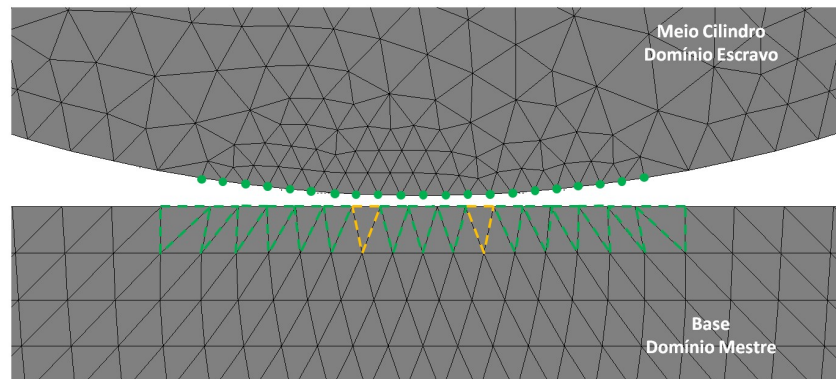


Figura 37 – Elementos de acoplamento criados no pré-processamento.

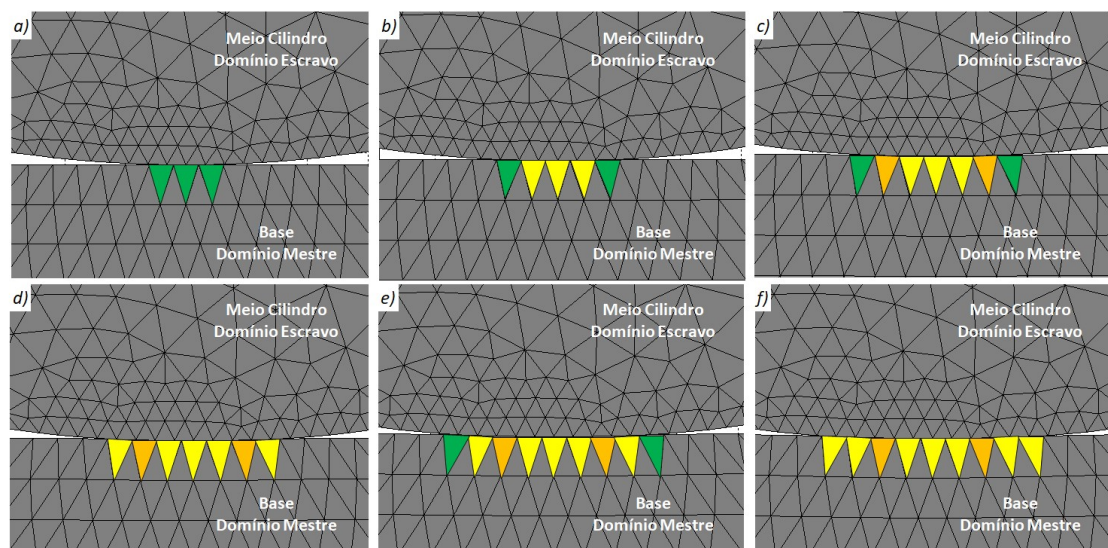


Figura 38 – Interface de contato. Sequência de passos de carga mostrando a ativação dos elementos de acoplamento.

Portanto, neste modelo dos 21 elementos de acoplamento criados no pré-processamento, apenas 11 efetivamente foram ativados para compor a interface de contato.

5.3 – Modelo de contato entre dois cilindros

Esta aplicação do método proposto também consiste em um problema de contato Hertziano clássico, sendo o problema referente ao contato entre duas metades de cilindros. O

objetivo é verificar o desempenho do método desenvolvido, em problemas envolvendo o contato entre geometrias convexas. As análises também serão feitas comparando os resultados de pressões de contato obtidos através do método com os resultados de pressões calculadas analiticamente.

A configuração do problema é mostrada pela Figura 39 (a), no qual os meio cilindros possuem diâmetro de 20,0 mm, afastados entre si inicialmente de 0,1 mm. Ambos os componentes possuem espessura unitária, e foram especificados com módulo de elasticidade $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$; correspondendo às propriedades do aço. Neste problema também é considerado o estado plano de tensões. Apenas um caso de carga foi considerado, $F = 500 \text{ N/mm}$. Novamente, a solução do problema foi obtida para três passos de carga distintos (10; 15 e 20 passos), e o fator de penalização normal utilizado foi $\tilde{c} = 1 \times 10^{10} \text{ N/mm}^2$.

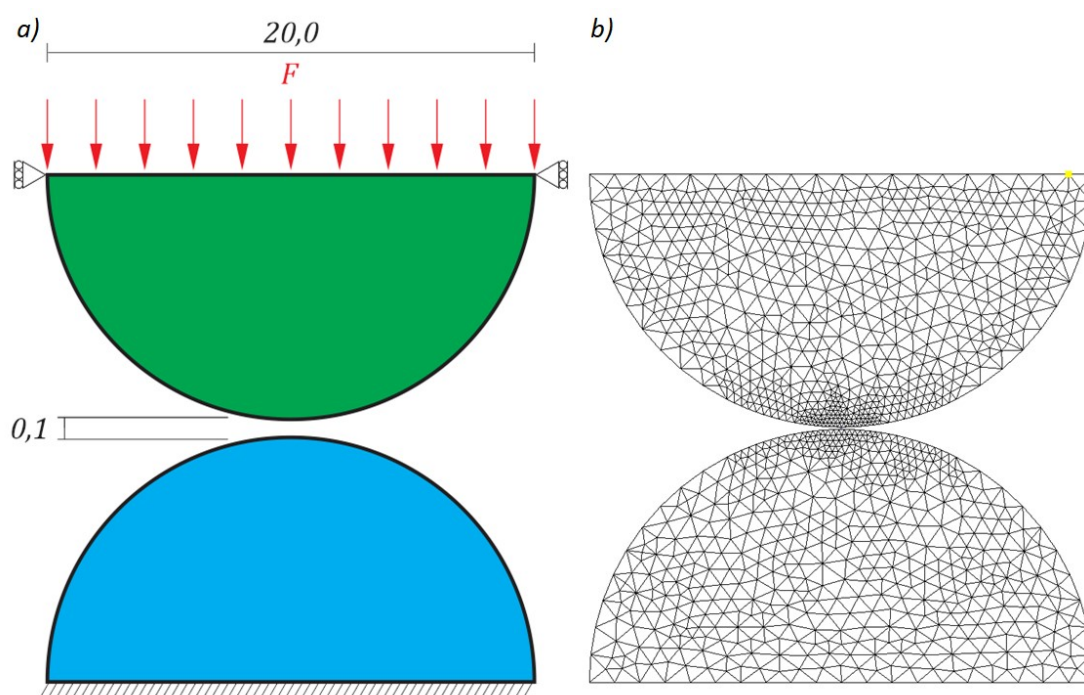


Figura 39 – a) Configuração do problema de contato entre meios cilindros. b) “Malha Padrão” do modelo de contato entre meios cilindros.

A discretização do problema também foi realizada de duas formas. Inicialmente foi gerada uma malha, chamada de “malha padrão”, conforme mostra a Figura 39 (b). E posteriormente foi gerada uma segunda malha, mais refinada nas regiões de contato, denominada “malha refinada”. A Tabela 2 mostra as características empregadas em cada malha. O domínio do meio cilindro superior foi designado como escravo, e naturalmente o meio cilindro inferior como mestre. E novamente, para as duas discretizações realizadas foi garantida a não conformidade entre as malhas, na região de contato.

A Figura 40 apresenta o resultado geral de tensões verticais σ_y para o problema discretizado com a “malha padrão”, a força aplicada $F = 500 \text{ N/mm}$ e solução obtida em 20 passos. A Figura 41 mostra o mesmo resultado, porém de forma suavizado (tensões nodais), e também em forma de isolinhas.

	Nº de Elementos	Nº de Elementos de Acoplamento	Nº de Nós
Malha Padrão	2175	13	1167
Malha Refinada	4577	37	2403

Tabela 2 – Características das malhas analisada

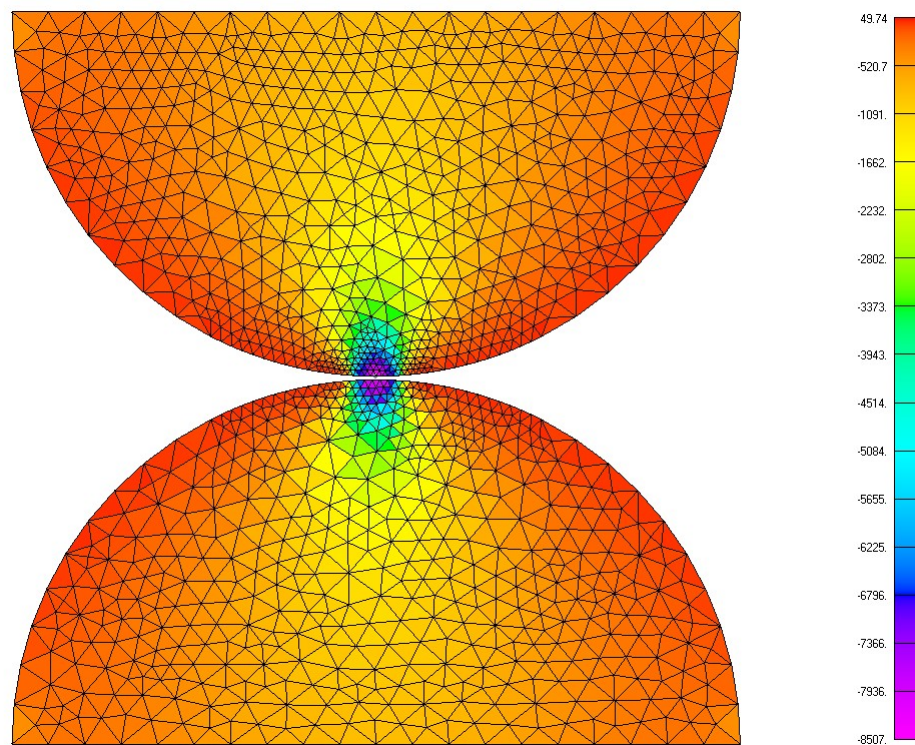


Figura 40 – Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical) , em N/mm^2 .

Análogo ao primeiro problema analisado, é possível observar a concordância no perfil de tensões com o perfil característico para este tipo de problema.

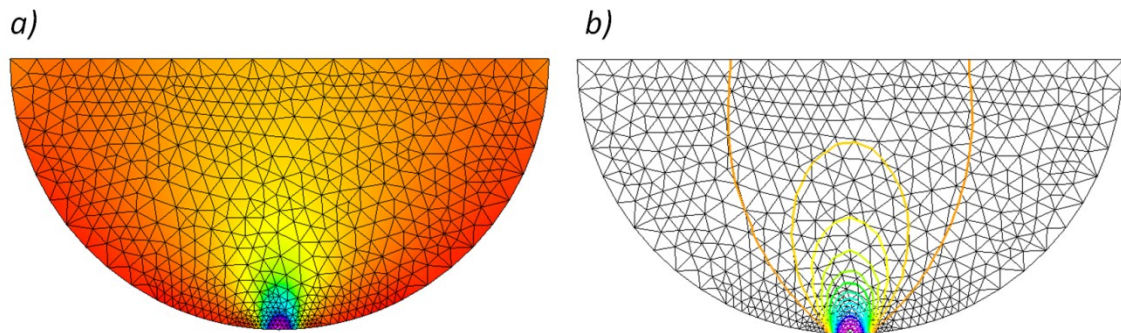


Figura 41 – a) Resultado do campo de tensões suavizadas σ_y (tensões na direção vertical). b) Resultado do campo de tensões σ_y (tensões na direção vertical) em isolinhas, em N/mm^2 .

A Figura 42 mostra os gráficos da distribuição da pressão de contato em relação ao centro do contato, e os gráficos dos desvios da pressão de contato obtida numericamente. Estão divididos em três passos de carga ((a) 10; (b) 15 e (c) 20 passos). Para cada curva analítica existem duas outras curvas de valores obtidos numericamente, sendo uma para os valores obtidos através da “malha padrão” e a outra para os valores obtidos através da “malha refinada”.

Novamente se observa uma boa aderência dos resultados numéricos, em relação ao analítico, para as duas malhas analisadas, pois o desvio médio observado foi de 3,9% e 3,0% para as malhas padrão e refinada, respectivamente, para o caso com 20 passos.

Assim como o problema do meio cilindro e base, neste problema também observa-se maior desvio no valor da pressão, para os nós presentes na região da periferia do domínio de contato, nos casos de solução com baixo número de passos, como pode ser visto na Figura 42 (a). Como já relatado este efeito está relacionado ao compromisso entre o número de passos para a obtenção da solução, o nível de carga e o refinamento aplicado à malha, decorrente do esquema de ativação do par de contato utilizado.

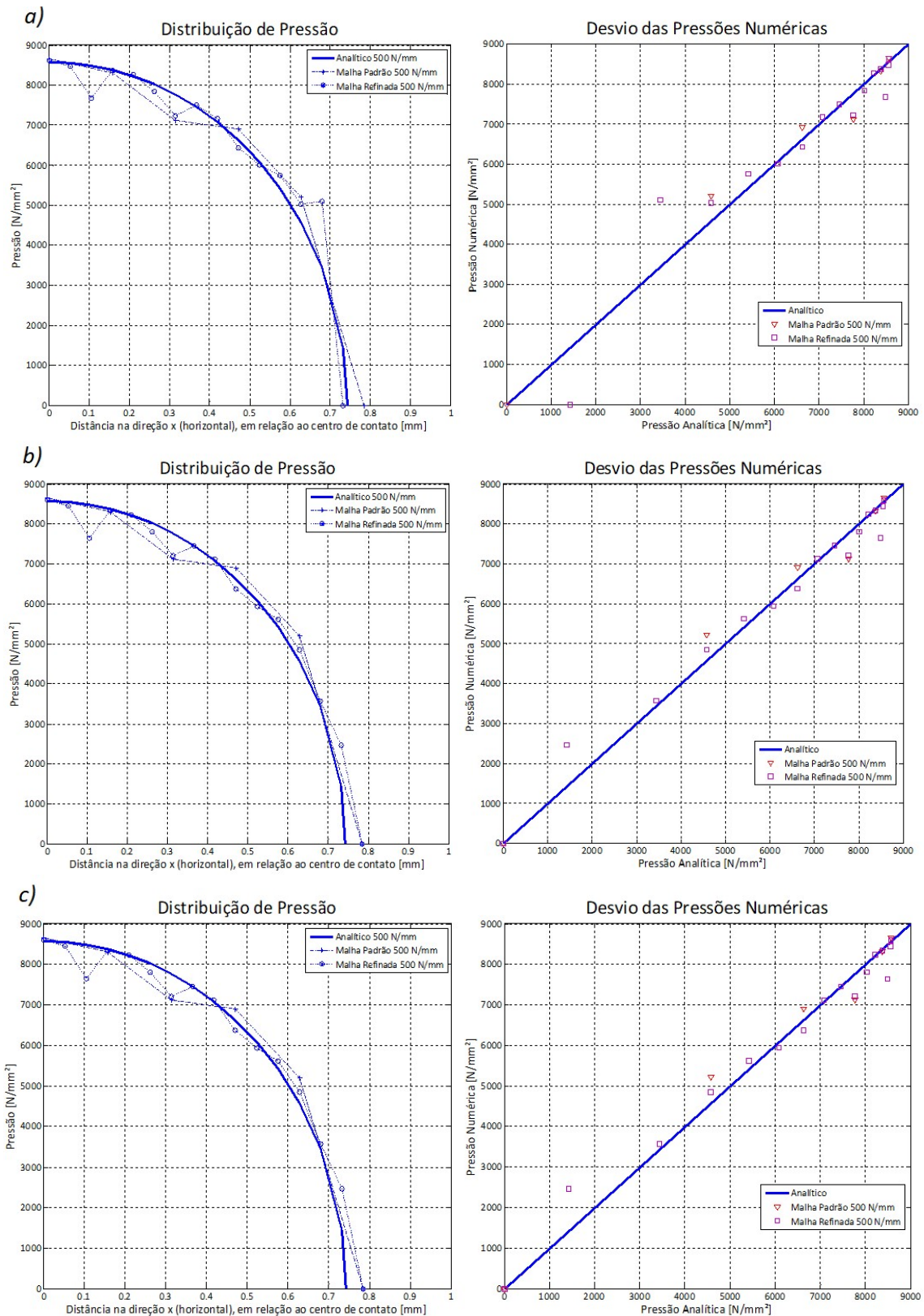


Figura 42 – Distribuição de pressão de contato e desvio da pressão de contato obtida numericamente. a) 10 passos de carga; b) 15 passos de carga; c) 20 passos de carga.

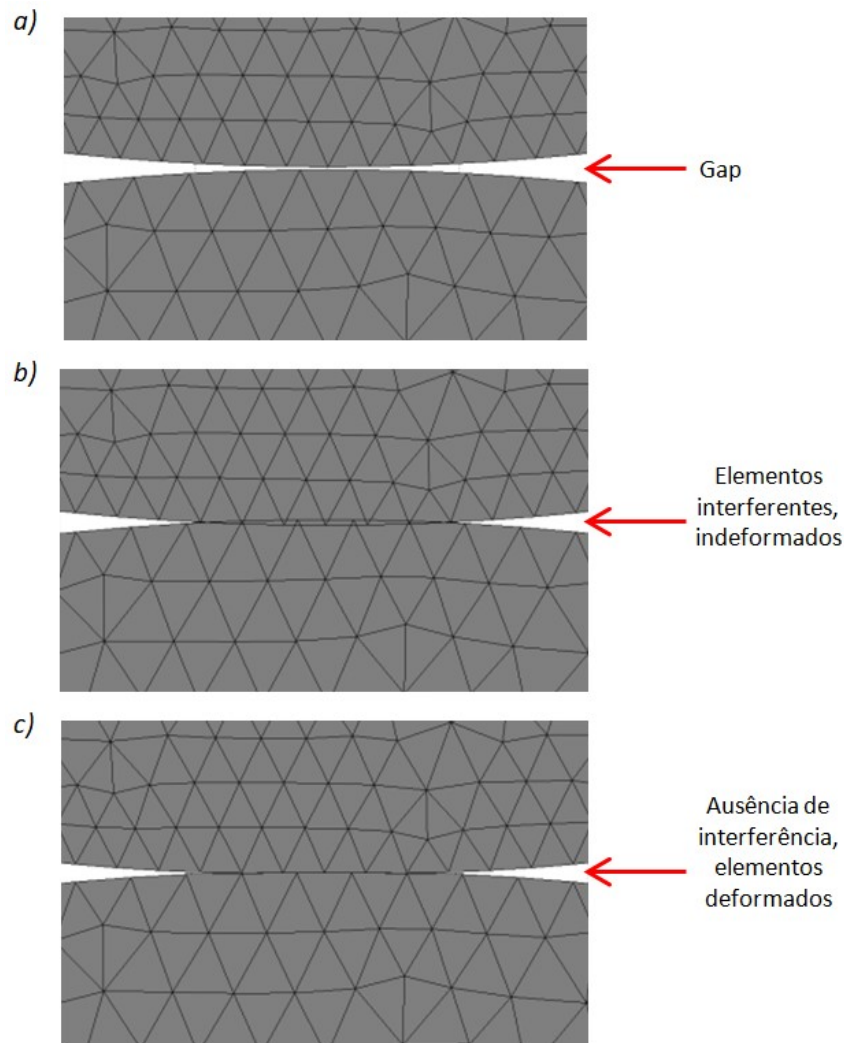


Figura 43 – Detalhe da região de contato. a) Passo de carga inicial, existência de gap. b) Passo de carga posterior, ocorrência de interferência, contato não ativado. c) Passo de carga seguinte, ausência de interferência, contato ativado nos elementos previamente interferentes.

O processo de ativação dos elementos de acoplamento é detalhado novamente para este modelo. A Figura 43 ilustra os três passos iniciais da simulação, no qual pode se observar inicialmente a existência de gap entre os domínios (Figura 43 (a)), no passo seguinte, com o incremento de carga ocorre a penetração entre os domínios (Figura 43 (b)). A partir deste passo, os elementos de acoplamento que estão interferentes são ativados. Note que não há deformação nos domínios, pois ainda não há forças de contato atuando. Já no passo posterior, mostrado na Figura 43 (c), ocorre o contato daqueles elementos ativados (que apresentaram interferência) no passo anterior, e consequentemente ocorre a troca de forças entre os domínios, eliminando as interferências previamente existente, e resultando na correta deformação devido ao contato entre os corpos.

De maneira análoga, este processo se repete nos passos subsequentes para os elementos da periferia do contato, de forma que ao final da simulação todos os elementos

pertencentes à região de contato (ao domínio do contato) estejam ativados, exercendo a correta troca das forças de contato.

O resultado final da formação completa do contato (domínio de contato) pode ser visto na Figura 44.

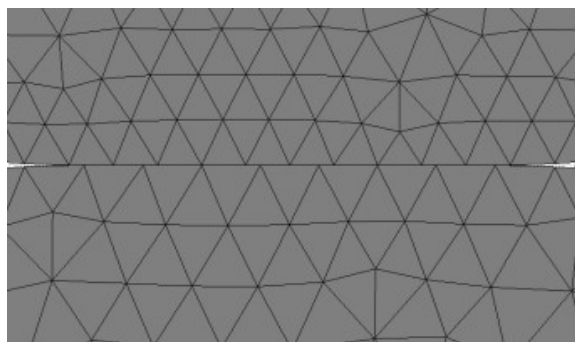


Figura 44 – Detalhe da região de contato. Passo de carga final, formação completa do contato.

5.4 – Modelo de contato entre dentes de engrenagens

Esta aplicação do método desenvolvido consiste em um problema muito comum na engenharia mecânica. Trata-se do contato entre duas engrenagens de dentes retos. O objetivo desta aplicação é verificar o desempenho do esquema proposto mediante geometria e carregamento mais complexo. Para tanto serão analisados o campo de tensões de von Mises e a pressão de contato entre os dentes. Esta última será comparada com o valor analítico, obtido no diâmetro primitivo das engrenagens.

A Figura 45 (a) mostra a configuração do modelo simplificado de contato entre engrenagens, desprezando-se o atrito. A engrenagem superior é restrita pelo diâmetro interno, e na engrenagem inferior é aplicado um torque de $T = 250.000 \text{ Nmm}$, também no diâmetro interno. Ambos os componentes possuem espessura unitária, e foram especificados com módulo de elasticidade $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$; correspondendo às propriedades do aço. É considerado o estado plano de tensões. A solução do problema foi obtida para 20 passos de carga, e o fator de penalização normal utilizado foi $\tilde{c} = 1 \times 10^{10} \text{ N/mm}^2$. As duas engrenagens são geometricamente iguais e suas características são apresentadas na Tabela 3.

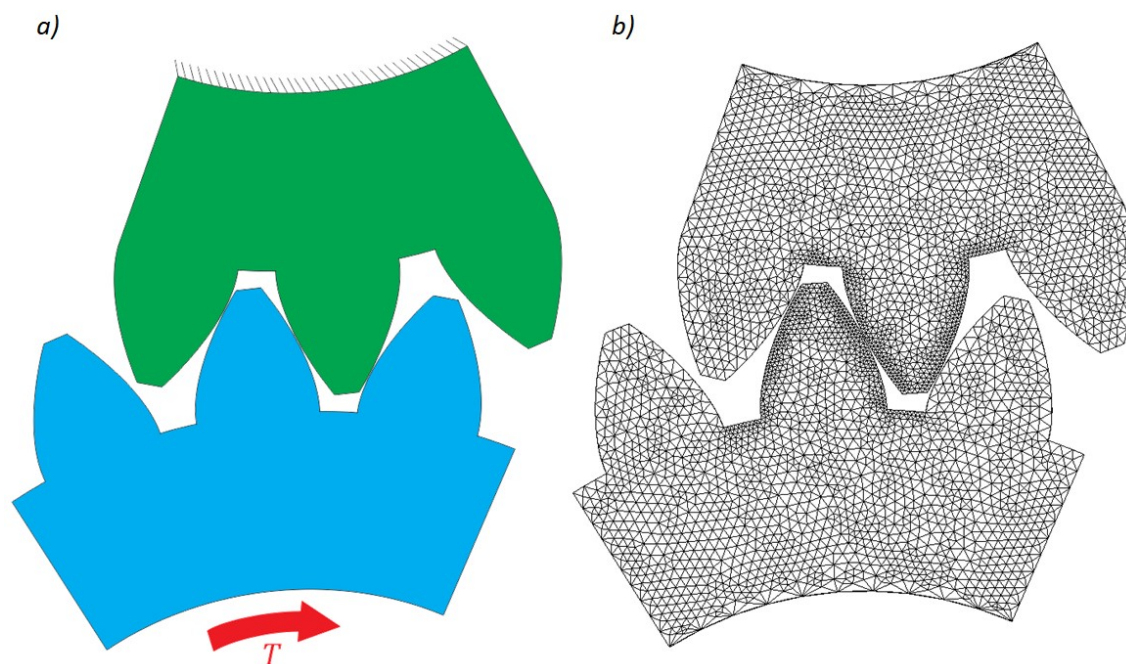


Figura 45 – a) Configuração do problema de contato entre engrenagens. b) Malha do modelo de contato entre engrenagens.

Nº de dentes	21	
Módulo	4	
Diâmetro Primitivo	84,000	mm
Passo	12,566	mm
Diâmetro Externo	92	mm
Diâmetro Interno	74,664	mm
Ângulo de Pressão	20	°
Diâmetro do círculo base	78,934	mm
Altura da cabeça do dente	4	mm
Altura do dente	8,668	mm
Distância entre centros	84,3	mm

Tabela 3 – Características geométricas das engrenagens.

Diferentemente dos problemas anteriores, a discretização do problema foi realizada de uma única forma, e é apresentada na Figura 45. A Tabela 4 mostra a característica da malha analisada. O domínio da engrenagem superior foi designado como escravo, e naturalmente a engrenagem inferior como mestre.

Nº de Elementos	Nº de Elementos de Acoplamento	Nº de Nós
6762	16	3567

Tabela 4 – Características da malha analisada.

A Figura 46 apresenta uma visão geral do campo de tensões de von Mises resultante e a Figura 47 mostra um detalhe do mesmo campo de tensões, na região de contato.

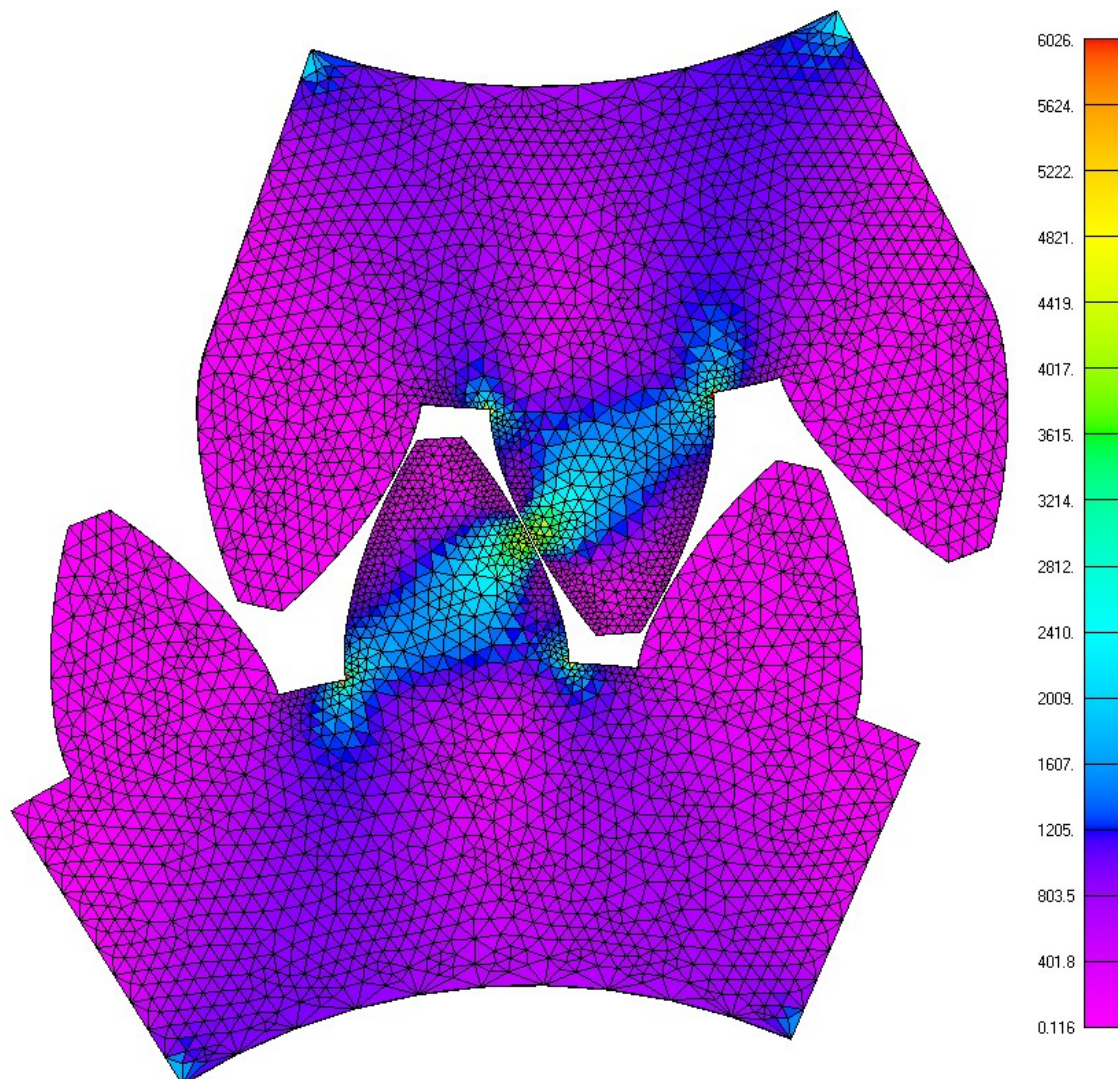


Figura 46 – Resultado do campo de tensões de von Mises σ_{VM} , em N/mm^2 .

Além das tensões compressivas na região do contato, nota-se também concentrações de tensão nos pés dos dentes, devido à flexão dos mesmos. Estas concentrações são um problema frequente presente no projeto de engrenagens, e uma solução para este problema seria a aplicação de raios de arredondamento, para suavizar a transição entre o dente e o cubo da engrenagem.

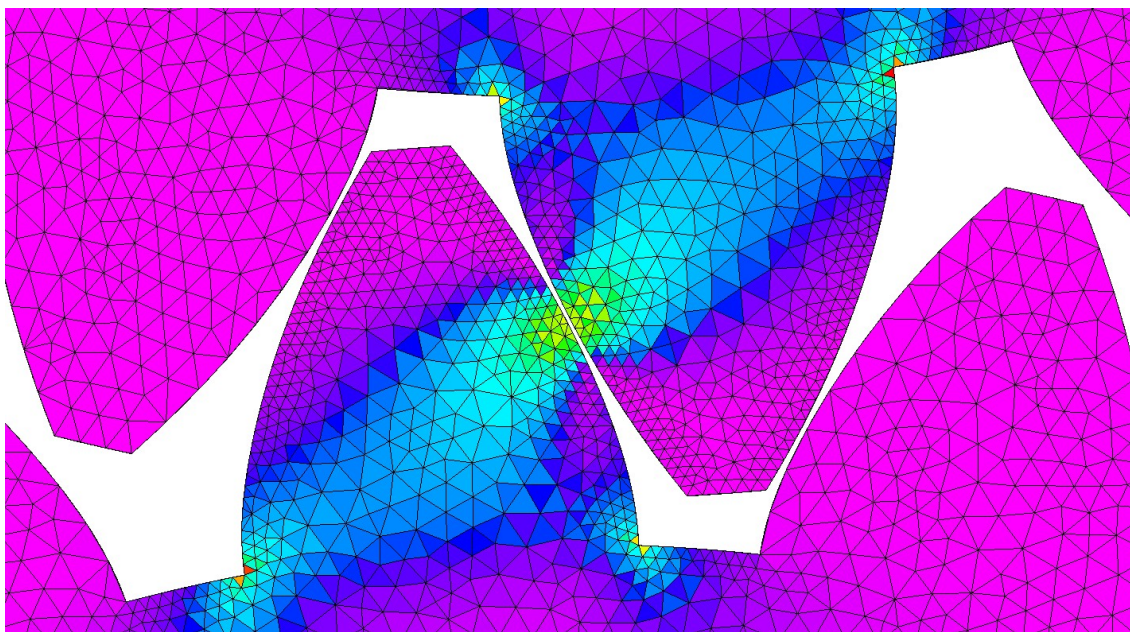


Figura 47 – Detalhe do campo de tensões de von Mises σ_{VM} , em N/mm^2 .

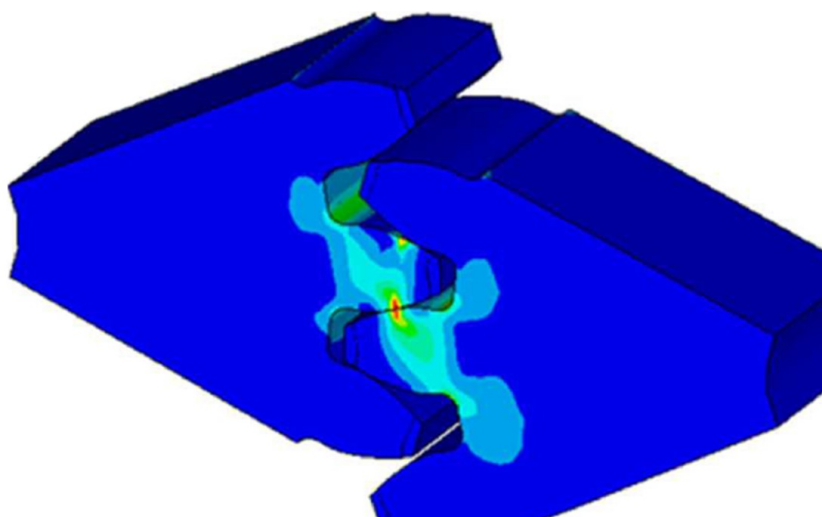


Figura 48 – Resultado do campo de tensões de von Mises σ_{VM} , para o contato entre engrenagens.
(extraído de: PATIL et al.;2014)

Destaca-se a concordância do campo de tensões obtido, com o resultado característico para este tipo de problema, como pode ser visto na Figura 48, extraído do trabalho de PATIL et al. (2014). Neste trabalho os autores obtêm o resultado de tensões de von Mises para um problema similar, utilizando programa comercial.

Uma segunda análise do resultado obtido pode ser feita através da comparação do valor de máxima pressão de contato, determinada analiticamente e numericamente. Dada a complexidade do cálculo analítico, esta pressão será determinada no instante em que o contato estiver alinhado com o diâmetro primitivo das engrenagens, como mostrado na Figura 49.

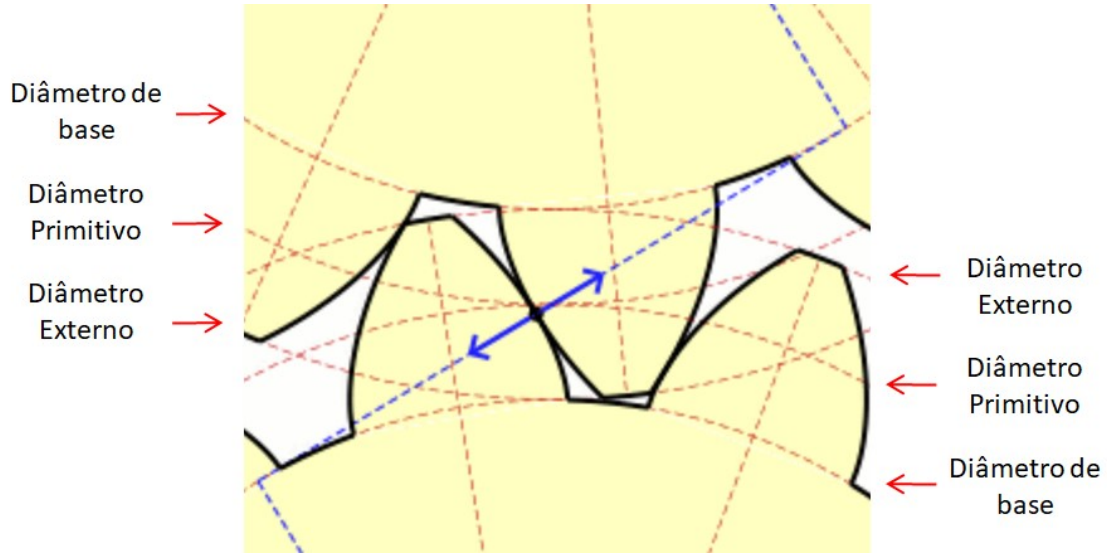


Figura 49 – Contato entre engrenagens. Localização da pressão máxima de contato.

Segundo BUDYNAS e NISBETT (2011), a pressão máxima, no diâmetro primitivo, pode ser dada por:

$$P_{max} = \sqrt{\frac{T}{\pi e \cos \phi} \frac{(1/r_1) + (1/r_2)}{[(1 - \nu_1^2)/E_1] + [(1 - \nu_2^2)/E_2]}} \quad (46)$$

sendo:

$$r_1 = \frac{d_{p1} \sin \phi}{2} \quad (47)$$

$$r_2 = \frac{d_{p2} \sin \phi}{2} \quad (48)$$

onde T é o torque aplicado na engrenagem, e é a espessura do dente; ϕ o ângulo de pressão, E_1 e E_2 , ν_1 e ν_2 são respectivamente o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson de cada engrenagem; r_1 e r_2 são os raios instantâneo de curvatura de cada engrenagem; d_{p1} e d_{p2} são os diâmetros primitivos de cada engrenagem.

Portanto, valendo-se das Equações (46); (47) e (48) o valor da pressão máxima obtida analiticamente foi de $P_{max} = 5.691,4 \text{ N/mm}^2$. Enquanto que a pressão máxima obtida numericamente, através do algoritmo desenvolvido foi de $P_{max} = 4.828,7 \text{ N/mm}^2$. Assim houve um desvio de $-862,7 \text{ N/mm}^2$, correspondente a $-15,2\%$ do valor analítico. O valor deste desvio pode ser minimizado, aumentando-se o refinamento da malha na região do contato, pois para este modelo, dos 16 elementos de acoplamento criados, apenas 8 foram ativados, resultando em uma baixa discretização na região do contanto.

6 – CONCLUSÃO

O presente trabalho teve por objetivo desenvolver uma estratégia para modelagem da formação de contato, baseada na técnica de acoplar domínios criada por BITENCOURT et al. (2015). Com este desenvolvimento pode-se generalizar a aplicação da técnica de acoplar domínios discretizados com malhas não conformes, tanto para problemas nos quais os domínios iniciem em contato ou até mesmo sobrepostos, quanto para problemas em que haja a formação do contato.

Foi possível realizar o objetivo descrito acima com um esquema simples e estável, capaz de produzir resultados com boa precisão.

Como forma de validar os resultados do método proposto, foram apresentados alguns problemas clássicos de contato, dito contato Hertziano. Os campos de tensões foram concordantes com as distribuições de tensão características para cada problema, evidenciando a capacidade do algoritmo de representar o contato.

Foram analisados também os valores numéricos de pressão de contato, no qual alcançou-se valores de desvios médios de 5,5% e 3,0%, em relação aos valores analíticos, para os problemas de contato entre meio cilindro e base, e contato entre cilindros, respectivamente. Nesses problemas também ficou caracterizado o efeito que um número total relativamente baixo de passos de carga proporciona, no qual ocorre a incompleta formação de contato em sua periferia. Por outro lado, o efeito de diferentes níveis de carga aplicada e o efeito do refinamento da malha não apresentaram comportamentos diferentes do esperado.

Detaca-se os baixos valores de desvios máximo e mínimo obtidos no campo de tensões, para o problema do teste de contato ($-3,5\%$ e $2,8\%$), em relação ao resultado analítico.

Por fim, o modelo de contato entre engrenagens pôde mostrar a capacidade de solução do esquema desenvolvido, para a simulação de um problema de engenharia mais complexo. Da mesma forma, o método apresentou resultados concordantes com os resultados obtidos em análises semelhantes, feitas por outro método. Já o desvio da pressão máxima de contato obtida numericamente foi de $-15,2\%$ em relação à máxima pressão obtida analiticamente.

7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AL-DOJAYLI, M.; MEGUID, S. A. Accurate modeling of contact using cubic splines. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 38, p. 337-352, 2002.

BELGACEM, F.; HILD, P.; LABORDE, P. The mortar finite element method for contact problems. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 28, p. 263-271, 1998.

BERNARDI, C.; MADAY, Y.; PATERA, A. A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method, in Nonlinear partial differential equations and their applications. *Collège de France Seminar*, v. 11, pp. 13–51, 1994.

BITENCOURT Jr., L. A. G.; MANZOLI, O. L.; PRAZERES, P. G. C.; RODRIGUES, E. A.; BITTENCOURT, T. N. A coupling technique for non-matching finite element meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 290, p. 19-44, 2015.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, K. J. *Elementos de máquinas de Shigley - projeto de engenharia mecânica*, ed MCGRAW-HILL, 2011, 1059 p.

CHAN, S. H.; TUBA, I. S. A finite element method for contact problems in solid bodies. *International Journal of Mechanics Sciences*, v. 13, p. 615–639, 1971.

De LORENZIS, L.; EVANS, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A. Isogeometric collocation: Neumann boundary conditions and contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 284, p. 21-54, 2015.

EL-ABBASI, N.; BATHE, K. J. Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm, *Computers & Structures*, v. 79, p. 1473–1486, 2001.

FICHERA, G. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*, p. 391-424, 1972.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A first course in finite elements*, ed. John Wiley & Sons, 2007, 319 p.

FISCHER, K. A.; WRIGGERS, P. Frictionless 2D Contact formulations for finite deformations based on the mortar method. *Computational Mechanics*, v. 36, p. 226-244, 2005.

FRANCAVILLA, A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A note on numerical computation of elastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 9, p. 913-924, 1975.

HALLQUIST, J.; GOUDREAU, G.; BENSON, D. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 51, p. 107–137, 1985.

HARTMANN, S.; OLIVER, J.; WEYLER, R.; CANTE, J. C.; HERNÁNDEZ, J. A. A Contact Domain Method for Large Deformation Frictional Contact Problems. Part 2: Numerical Aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, p. 2607-2631, 2009.

HARTMANN, S.; WEYLER, R.; OLIVER, J.; CANTE, J. C.; HERNÁNDEZ, J. A. A 3D Frictionless contact domain method for large deformation problems. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 55, p. 211-269, 2010.

HERTZ, H. Über die Berührung Fester Elastischer Körper. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 92, p. 156-171, 1881.

HIRMAND, M.; VAHAB, M.; KHOEI A. R. An augmented Lagrangian contact formulation for frictional discontinuities with the extended finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 107, p. 28-43, 2015.

HU, Q.; CHOULY, F.; HU, P.; CHENG, G.; BORDAS, S. Skew-symmetric Nitsche's formulation in isogeometric analysis: Dirichlet and symmetry conditions, patch coupling and frictionless contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 341, 2018.

KALLEL, A.; BOUABDALLAH, S. 2d Frictional B-Spline Smoothed Mortar Contact Problems Part I: Matching Phase. *Journal of Applied Mechanical Engineering*, v. 6, 2017.

LIU, W. N.; MESCHKE, G.; MANG, H. A. A note on the algorithmic stabilization of 2nd contact analyses. *Computational Methods in Contact Mechanics*, vol. 4, p. 231-240, 1999.

McDEVITT, T.; LAURSEN, T. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v. 48, p. 1525-1547, 2000.

OLIVER, J.; HARTMANN, S.; CANTE, J. C.; WEYLER, R.; HERNÁNDEZ, J. A. A Contact Domain Method for Large Deformation Frictional Contact Problems. Part 1: Theoretical Basis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, p. 2591-2606, 2009.

PADMANABHAN, V.; LAURSEN, T. A. A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 37, p. 173-198, 2001.

PAPADOPOULOS, P.; TAYLOR, R. L. A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 50, p. 163-180, 1992.

PATIL, S.; KARUPPANAN S.; ATANASOVSKA I.; WAHAB, A. A. Frictional tooth contact analysis along line of action of a spur gear using finite element method. *International Conference on Advances in Manufacturing and Materials Engineering - AMME*, p. 1801-1809, 2014.

PIETRZAK, G.; CURNIER, A. Large deformation frictional contact mechanics: Continuum formulation and augmented Lagrangean treatment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 177, p. 351-381, 1999.

POPP, A.; GITTERLE, M.; GEE, M. W.; WALL, W. A. A dual mortar approach for 3D finite deformation contact with consistent linearization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 83, p. 1428-1465, 2010.

POPP, A.; WOHLMUTH, B.; GEE, M.; WALL, W. Dual quadratic mortar finite element methods for 3d finite deformation contact. *Journal on Scientific Computing – SIAM*. v. 34, p. B421–B446, 2012.

PUSO, M. A.; LAURSEN, T. A. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 601–629, 2004.

PUSO, M. A.; LAURSEN, T. A.; SOLBERG, J. A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. v. 197, p. 555-566, 2008.

SIGNORINI, A. Sopra Alcune Questioni di Elastostatica. *Atti della Societa Italiana per il Progresso della Scienza*, v. 128, 1933.

SIGNORINI, A. Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti di Mathematica e dell sue Appllicazioni*, v. 18, p. 95–139, 1959.

SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, v. 42, p. 97-116, 1992.

SIMO, J. C.; WRIGGERS, P.; TAYLOR, R. L. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 50, p. 163–180, 1985.

TAYLOR, R. L.; PAPADOPOULOS, P. On a patch test for contact problems in two dimensions. *Computational Methods in Nonlinear Mechanics, Springer-Verlag*, p. 690-702, 1991.

TUR, M.; FUENMAYOR, F. J.; WRIGGERS, P. A mortar based frictional contact formulation for large deformations using Lagrange multipliers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, p. 2860–2873, 2009.

VULOVIC, S.; ZIVKOVIC, M.; GRUJOVIC, N.; SLAVKOVIC, R. A Comparative Study of Contact Problems Solution Based on the Penalty and Lagrange Multiplier Approaches. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, v. 1, p. 174-183, 2007.

WEYLER, R.; OLIVER, J.; SAIN, T.; CANTE, J. C. On the contact domain method: A comparison of penalty and Lagrange multiplier implementations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 205–208, p. 68–82, 2012.

WILSON, E. A.; PARSONS, B. Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 2, p. 387–395, 1970.

WOHLMUTH, B. I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrangian multiplier. *Journal on Numerical Analysis - SIAM*, 2000.

WOPSCHALL, S. R.; RASHID, M. M. A novel face-on-face contact method for nonlinear solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 348, p. 356–376, 2019.

WRIGGERS, P. *Computational Contact Mechanics*, Springer, 2006.

WRIGGERS, P. Penalty and Augmented Lagrangian formulations for contact problems. *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering Theory and Applications - NUMETA*, 1985

WRIGGERS, P.; KRSTULOVIC-OPARA, L.; KORELC, J. Smooth C^1 -interpolations for two-dimensional frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 51, p. 1469–1495, 2001.

WRIGGERS, P.; RUST, W. T.; REDDY, B. D. A virtual element method for contact. *Computational Mechanics*, v. 58, p. 1039–1050, 2016.

XING, W.; SONG, C.; TIN-LOI, F. A scaled boundary finite element based node-to-node scheme for 2D frictional contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 333, p. 114–146, 2018.

XING, W.; SONG, C.; TIN-LOI, F. A node-to-node scheme for three-dimensional contact problems using the scaled boundary finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 347, p. 928–956, 2019.

XU, D.; HJELMSTAD, K. D. A New Node-to-Node Approach to Contact/Impact Problems for Two-Dimensional Elastic Solids Subject to Finite Deformation. *NSEL Report Series*, n° NSEL-009, 2008.

YASTREBOV, V. A. Computational contact mechanics: geometry, detection and numerical techniques. *Centre des Matériaux, MINES Paris Tech - Ph.D. dissertation*, 2011.

ZAVARISE, G.; DE LORENZIS, L. The node-to-segment algorithm for 2D frictionless contact: classical formulation and special cases. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, p. 3428–3451, 2009.