
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS DA MOTRICIDADE
(BIODINÂMICA DA MOTRICIDADE HUMANA)

**ROTAÇÕES TRIDIMENSIONAIS EM BIOMECÂNICA VIA QUATÉRNIONS:
APLICAÇÃO NA ANÁLISE DOS MOVIMENTOS ESPORTIVOS**

PAULO ROBERTO PEREIRA SANTIAGO

Tese apresentada ao Instituto de Biociências do Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências da Motricidade, área de Biotinâmica da Motricidade Humana.

Fevereiro - 2009



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS – RIO CLARO



PAULO ROBERTO PEREIRA SANTIAGO

**ROTAÇÕES TRIDIMENSIONAIS EM BIOMECÂNICA VIA QUATÉRNIONS:
APLICAÇÃO NA ANÁLISE DOS MOVIMENTOS ESPORTIVOS**

Tese apresentada ao Instituto de Biociências do Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências da Motricidade, área de Biodinâmica da Motricidade Humana.

Orientador: Prof. Dr. SERGIO AUGUSTO CUNHA

**Rio Claro
2009**

796.022 Santiago, Paulo Roberto Pereira
S235r Rotações tridimensionais em biomecânica via
quatérnions: aplicação na análise dos movimentos
esportivos / Paulo Roberto Pereira Santiago. – Rio
Claro : [s.n.], 2009
95 f. : il., figs., gráfs., tabs.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Biociências de Rio Claro
Orientador: Sérgio Augusto Cunha

1. Cinesiologia. 2. Ângulos de Euler. 3.
Representações de rotações. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

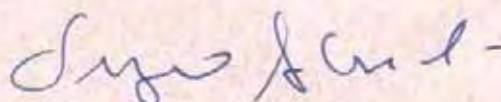
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS DA MOTRICIDADE
(ÁREA DA BIODINÂMICA DA MOTRICIDADE HUMANA)**

TESE DE DOUTORADO defendida em 06.02.2009

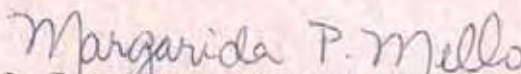
**“Rotações Tridimensionais em Biomecânica Via Quatérnions:
Aplicação na Análise dos Movimentos Esportivos”**

PAULO ROBERTO PEREIRA SANTIAGO

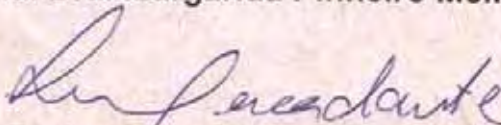
COMISSÃO EXAMINADORA:



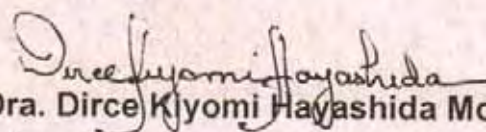
Prof. Dr. Sérgio Augusto Cunha



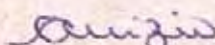
Profa. Dra. Margarida Pinheiro Mello



Prof. Dr. Luciano Allegretti Mercadante



Profa. Dra. Dirce Kiyomi Hayashida Mochida



Prof. Dr. Anizio Perissinotto Junior

Dedicatória:

Aos meus queridos pais Paulo e Luzia.

À minha amada Larissa.

Ao meu amigo Sergio Augusto Cunha.

E em memória ao Prof. Euclides Custódio de Lima Filho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sergio Augusto Cunha (e toda sua família), pela oportunidade de crescimento científico e intelectual, pelo incentivo, paciência e confiança em mim depositada, e principalmente pela consideração de pai para filho.

Ao Prof. Euclides Custódio de Lima Filho pela idéia e inspiração que nos transmite de algum lugar para a elaboração deste trabalho.

À FAPEMIG pelo apoio financeiro e todos da Faculdade de Educação Física da FESP/UEMG de Passos.

Aos professores Dra. Dirce Kiyomi Hayashida Mochida, Dra. Margarida Pinheiro Mello, Dr. Anizio Perissinotto Junior, Dr. Luciano Allegretti Mercadante, Dr. Claudio Alexandre Gobatto, Dra. Lilian Teresa Bucken Gobbi, Ms. Rodrigo Silva Lima pela ajuda e apoio durante todas as etapas do meu doutorado.

Aos amigos(as) da Universidade Federal de São Carlos do Departamento de Educação Física e Motricidade Humana que certamente contribuíram para minha formação, especialmente para a Profa. Dra. Paula Hentschel Lobo da Costa e Prof. Dr. Nelson Prudêncio.

À minha família Paulo (pai), Luzia (mãe), Danilo (irmão) e Fernanda (irmã) que sempre estiveram ao meu lado e me fizeram chegar até aqui.

Aos meus avós Ailda e Onofre por serem exemplos a serem seguidos.

Aos meus tios e primos, em especial Alexandre por toda contribuição nos desenhos desta tese.

Aos amigos Guilherme Manna Cesar e Lígia Yumi Mochida pela paciência e prontidão em todos os momentos que precisei.

Aos amigos de República Alexander, Papoti, Renato, Manuel, Alessandro, Fabiano, Rafael, Marcel, Vladimir, Marcelo.

Aos amigos(as) de Laboratório da UNESP Fábio, Fúlvia, Gustavo, Adelino, Vanessa e da UNICAMP Mário, Milton, Tiago, Márcio, Marcelo, Juliana, Ana Lorena, Amanda, Angélica, Karine, Jerusa, Andréia, Aline Prof. Dr. Ricardo Barros, Prof. Dr. Barreto, Prof. Dr. René.

Aos amigos(as) de Pirassununga Renan, Katherine, Marcelo, Thiago, Tchack e Tarley.

A minha querida companheira Larissa e sua família (lone e Talita) que me acolheram e confortaram em todos os momentos.

Amo todos vocês!

*"Em momentos de crise só a imaginação
é mais importante que o conhecimento."*
Albert Einstein

RESUMO

Algumas abordagens matemáticas são utilizadas para descrever o componente rotacional das articulações durante o movimento humano, como por exemplo, as matrizes de rotação do tipo 3×3 , ângulos de Euler e Cardan, os eixos helicais e os quatérnions, sendo este último o menos difundido na biomecânica. O presente estudo teve como objetivo apresentar e aplicar o método dos quatérnions como ferramenta biomecânica para a análise de rotação em movimentos esportivos. Para isso, o trabalho foi subdividido em três capítulos. No primeiro, são apresentadas e discutidas as definições e propriedades básicas dos quatérnions e também os cálculos matemáticos para as conversões entre três métodos utilizados para descrever rotações no espaço tridimensional (matriz de rotação, ângulos de Euler e quatérnions). No segundo, são apresentados os procedimentos para o cálculo dos quatérnions e dos ângulos de Euler através de variáveis cinemáticas. No terceiro, foram apresentadas três aplicações dos quatérnions. A primeira trata-se de um estudo no qual a representação dos quatérnions foi empregada com a finalidade de descrever e analisar as rotações ocorridas no joelho durante a aterrissagem unipodal (*single leg drop landing*); na segunda os quatérnions e os ângulos de Euler foram utilizados para representar os movimentos de rotação que ocorrem na articulação do tornozelo do membro de apoio durante o chute no futebol; e na terceira foram realizadas simulações para o estudo dos quatérnions. Conclui-se que a representação do movimento de rotação das articulações de humanos através dos quatérnions é uma abordagem nova e alternativa, pois possibilita representar o eixo instantâneo de rotação com cálculos matemáticos mais simples quando comparado com outras representações. Este é um tópico relevante uma vez que os movimentos humanos são gerados por forças internas e externas que resultam em rotações em torno de um eixo (quatérnions), que parece ser a forma natural de ocorrência dos movimentos articulares.

Palavras-chave: Quatérnions. Ângulos de Euler. Representações de rotações. Biomecânica.

ABSTRACT

Mathematical approaches have been utilized to describe joint rotational components during human movement, such as the rotational matrices, Euler angles, Cardan angles, helical axis, and quaternions, in which the last one is the least employed in biomechanics. The objective of the present study was to present and apply the quaternions method as a biomechanical tool to analyze rotation in sport movements. Thus, the thesis was divided into three chapters. In the first chapter, the basic quaternion definitions and properties are presented and discussed, along with the mathematical calculations for the conversion among the three most used methods to describe rotations in three-dimensional space (rotational matrices, Euler angles, and quaternions). In the second chapter, the procedures to calculate the quaternions and Euler angles are presented by means of kinematic variables. The third chapter submitted three applications of quaternions. The first the quaternions were used to describe the rotational movement of the human knee joint during a landing task; the second the quaternions and Euler angle were used to describe the rotational movement of the ankle joint of the foot of support during a soccer kick; In the third application opted-to implement simulations of movements for the study of quaternions. It was conclude that the representation of rotational movements observed in human joints by means of the quaternions is an interesting alternative because it is possible to represent the joint rotational axis with fairly simple mathematical calculations when compared to other forms of representation. The quaternions provide a more adequate representation system to operate rotations without constraints. This is a relevant topic once movements are product of internal and external forces that result in rotations through axis (quaternions), which naturally occurs repeatedly in human joints.

Key-words: Quaternions, Euler angle. Representation of rotations. Biomechanics.

SUMÁRIO

	Página
INTRODUÇÃO	1
OBJETIVOS	5
Objetivo geral	5
Objetivos Específicos	5
CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DA COMPOSIÇÃO DA TESE	6
CAPÍTULO 1 – ÁLGEBRA DOS QUATÉRNIONS	9
1.1 Formulação teórica dos quatérnions: Definição e propriedades básicas	9
1.2 Adição de quatérnions	9
1.3 Multiplicação de escalar por quatérnion.....	10
1.4 Multiplicação de quatérnions.....	10
1.5 Conjugado de um quatérnion	11
1.6 Norma de um quatérnion	11
1.7 Quatérnions e rotações	12
1.8 Relação com outras representações	13
1.9 Conversão matriz de rotação – quatérnion	14
1.10 Conversão quatérnion – matriz de rotação	15
1.11 Conversão ângulos de Euler – quatérnion	15
CAPÍTULO 2 – PROCEDIMENTOS PARA OBTENÇÃO DOS QUATÉRNIONS E ÂNGULOS DE EULER	18
2.1 Introdução	18
2.2 Exemplo: determinação do movimento de rotação de duas hastes rígidas unidas por uma dobradiça simples	20
2.3 Definição dos sistemas de coordenadas locais das hastes	22
2.4 Matriz de rotação	24
2.5 Cálculo dos ângulos de Euler e dos quatérnions	25
2.5.1 Seqüências de Euler	25

2.5.2 Quatérnions	30
2.6 Resultados e discussões	31
CAPÍTULO 3 – APLICAÇÕES	37
3.1 APLICAÇÃO 1 - Three-dimensional rotation in Biomechanics with the Quaternions representation: application to the knee joint during a sports-related task	38
Abstract.....	38
3.1.1 Introduction	38
3.1.1.1 The quaternions and description of joint movement rotation	39
3.1.1.2 Knee joint movement	40
3.1.2 Methods	41
3.1.2.1 Data Collection	41
3.1.2.2 Data Analysis	43
3.1.2.3 Measurement experimental error	43
3.1.2.4 Standardization procedure for movement analysis	43
3.1.2.5 Data smoothing.....	44
3.1.2.6 Procedure for calculating quaternions.....	45
3.1.3 Results and discussion	50
3.1.4 Conclusion	53
 3.2 APLICAÇÃO 2 - Determinação do movimento de rotação do tornozelo durante o chute no futebol a quatérnions e ângulo de Euler	 55
3.2.1 Introdução.....	55
3.2.2 Participante.....	56
3.2.3 Tarefa e coleta de dados.....	56
3.2.4 A articulação do tornozelo.....	58
3.2.5 Definição dos sistemas de coordenadas locais da perna e pé.....	59
3.2.6 Matriz de rotação.....	61
3.2.7 Ângulos de Euler e quatérnions.....	61
3.2.8 Representação dos movimentos de rotação do tornozelo via ângulos de Euler.....	62

3.2.9 Representação dos movimentos de rotação do tornozelo via quatérnions.....	63
3.2.10 Resultados e discussões.....	66
3.2.10.1 Tomada estática e ângulos de Euler.....	66
3.2.10.2 Tomada estática e quatérnions.....	66
3.2.10.3 Tomada dinâmica e ângulos de Euler.....	67
3.2.10.4 Tomada dinâmica e quatérnions.....	69
 3.3 APLICAÇÃO 3 - Simulações de movimentos para a associação dos quatérnions à nomenclatura clínica dos movimentos articulares.....	 73
3.3.1 Simulações.....	77
Simulação 1.....	79
Simulação 2.....	81
Simulação 3.....	84
Simulação 4.....	85
 CONSIDERAÇÕES FINAIS	 87
 REFERÊNCIAS	 89
 ANEXOS	 93

NOTAÇÕES UTILIZADAS

$\times$ é a operação produto vetorial entre vetores no $\mathbb{R}^3$.

$\cdot$ é a operação produto escalar entre vetores $\mathbb{R}^3$.

$\| \cdot \|$ representa a norma euclidiana de vetores e matrizes.

S^{-1} denota a inversa da matriz S .

S^T denota a transposta da matriz S .

q representa um quatérnion.

q^* representa o conjugado de um quatérnion q .

$\|q\|$ representa a norma de um quatérnion.

$$\arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \text{ para } b \neq 0.$$

INTRODUÇÃO

O movimento do corpo humano é um dos principais enfoques das pesquisas em biomecânica. Embora não seja, a biomecânica modela o corpo humano por meio de segmentos rígidos fazendo aproximações e estimativas que minimizem os erros cometidos nesta modelagem. O movimento de um corpo rígido no espaço tridimensional envolve translação e rotação, isto é, fica completamente determinado pela sua posição (translação) e sua orientação (rotação) em relação a um sistema de coordenadas e, em função do tempo.

Algumas abordagens matemáticas com base em matriz de rotação são empregadas para descrever o componente rotacional do movimento, como por exemplo, os ângulos de Euler, de Cardan, os eixos helicais e, mais recentemente, os quatérnions (CUNHA *et al.*, 2008). Destes, o mais difundido na biomecânica são os ângulos de Euler.

A teoria dos quatérnions foi introduzida e desenvolvida por Sir William Rowan Hamilton, em 1843, quando buscava um sistema algébrico que operasse no espaço tridimensional de maneira análoga a que operam os números complexos no plano. Nesta tentativa, primeiramente, ele definiu operações de adição e multiplicação para ternas de números reais (vetores em $\mathbb{R}^3$). Mais detalhadamente, Hamilton procurou encontrar uma regra de multiplicação para vetores em $\mathbb{R}^3$. Ele testava a conveniência de sua multiplicação usando uma propriedade do produto de números complexos: o valor absoluto do produto de dois números complexos é igual ao produto dos valores absolutos dos dois números complexos ($|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$). Embora todas as tentativas nesse sentido tenham falhado, Hamilton obteve sucesso quando considerou quádruplas de números reais (vetores em $\mathbb{R}^4$). Ao conjunto de todos os elementos da forma $q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$, onde q_0 , q_1 , q_2 e q_3 são números reais, e que pode ser identificado com a quádrupla (q_0, q_1, q_2, q_3) , foi dado o nome de *quaternions*, forma escrita em língua inglesa, a qual foi adaptada para a língua portuguesa como quatérnions ou quatérnios. Um tratamento detalhado dos quatérnions com as demonstrações de suas elegantes propriedades matemáticas pode ser encontrado em Hamilton (1847), Brand (1948), Altmann (1986), Kantor & Solodovnikov (1989) e Kuipers (1999).

O uso dos quatérnions para representar e operar rotações é muito freqüente nas áreas de robótica, computação gráfica, física e sistemas aeroespaciais. Estudos recentes apresentaram os quatérnions como uma abordagem alternativa para representar rotações em biomecânica (CUNHA *et al.*, 2008). Vrongistinos *et al.* (2002) mostraram a utilização de quatérnions na análise cinemática tridimensional de movimentos humanos e no cálculo de velocidades angulares. Os autores destacam algumas vantagens na utilização de quatérnions em relação às representações baseadas nos ângulos de Euler, mencionando, por exemplo, que esta última forma de representação sofre com a ocorrência do *Gimbal Lock* (perda de um grau de liberdade que ocorre quando dois eixos de rotação apresentam a mesma direção e sentido, ou seja, sobrepostos) e, também, possibilitam mais de duas parametrizações para uma mesma rotação, enquanto via quatérnions existem apenas duas possibilidades de representação.

Tasora (2001) representou rotações por meio de quatérnions no desenvolvimento de um método para a solução de problemas cinemáticos e dinâmicos em simulação de sistemas de múltiplos corpos. O autor justifica tal escolha sobre os ângulos de Euler comentando que o uso de quatérnions evita a ocorrência de *Gimbal Lock* e ainda são mais fáceis de decompor, além de oferecer uma maneira numericamente mais estável e eficiente quando comparado às matrizes de rotação. Esta representação é, portanto, poderosa e facilita o manuseio de equações com restrições.

Apesar destas vantagens, na biomecânica os quatérnions são conhecidos como um procedimento não tradicional para representar rotações. Sua principal ocorrência na literatura é na descrição das seqüências de movimentos do olho humano (ZATSIORKY, 1998). Haslwanter (1995) verificou os movimentos do olho humano por meio de três representações: matriz de rotação, eixo de rotação e quatérnions. O autor relata que a representação baseada em eixo de rotação e quatérnions são formas mais intuitivas e eficientes para a descrição e análise tridimensional dos movimentos do olho humano. Tais representações não foram redundantes, pois valem-se de três parâmetros para descrever três graus de liberdade das rotações, não requerem de uma seqüência arbitrária de rotações e também não apresentaram problemas de restrições.

As formulações dos quatérnions como uma abordagem alternativa para o estudo das rotações tridimensionais do corpo humano em biomecânica foi

apresentado por Cardoso Jr. (2004). Para ilustrar o uso dos quatérnions em biomecânica o autor tentou definir o eixo de rotação de uma costela durante a respiração. Através dos resultados obtidos observou-se que as maiores alterações ocorreram no componente escalar (q_0) do quatérnion. O autor enfatizou que a representação por quatérnions é uma abordagem interessante para o estudo do movimento humano e que mais experimentos deveriam ser realizados para melhorar a precisão e determinar as limitações da metodologia empregada em seu estudo.

Os quatérnions ainda apresentam outras vantagens em relação às demais formas de representação tais como: a utilização de um número menor de coordenadas, quando comparado com as matrizes de rotação (3X3) (GOMES, 1998); poucas situações de restrições em suas coordenadas (GLASSNER, 1990); a multiplicação é efetuada de modo mais eficiente (HOWELL, 1975; GOMES, 1998) e a maior facilidade em encontrar o ângulo de rotação e o eixo em que uma rotação ocorre (KUIPERS, 1999).

Apesar das vantagens apresentadas verifica-se que a utilização dos quatérnions para o estudo das rotações tridimensionais em biomecânica ainda é incipiente, fato que pode ser confirmado pela escassez de referências encontradas na literatura. Em contrapartida, encontra-se uma quantidade considerável de estudos utilizando os ângulos de Euler para descrever e analisar os movimentos de rotação. Certamente em função disto, a *International Society of Biomechanics* – ISB (WU *et al.*, 2002) recomenda tal representação. Portanto, os principais pesquisadores da área (GROOD & SUNTAY, 1983; VAUGHAN *et al.*, 1992; ZATSIORSKY, 1998; ROBERTSON *et al.*, 2004; CAPOZZO *et al.*, 2005) utilizam os ângulos de Euler para descrever os componentes rotacionais dos movimentos, para que assim seja possível a comparação dos resultados entre estudos. Outra aparente vantagem dos ângulos de Euler é sua forma de apresentação decomposta (três ângulos de rotação) que podem ser atribuídas à Nomenclatura Clínica dos Movimentos Articulares (NCMA): flexão e extensão, abdução e adução, rotação interna e rotação externa (KAPANDJI, 2000).

Todavia, os resultados obtidos por meio dos ângulos de Euler são passíveis de interpretações errôneas, por exemplo, quando o objetivo é associá-los à NCMA.

Karduna *et al.* (2000) realizaram um estudo para verificar o efeito de diferentes seqüências dos ângulos de Euler para a descrição dos movimentos da escápula. Para isso foram utilizadas seis entre as doze possíveis seqüências de rotações. Os resultados mostraram que as mudanças nestas seqüências resultam em significativas alterações na descrição dos movimentos da escápula, cujas diferenças encontradas foram encontradas acima de 50° para alguns ângulos de rotação. Os autores encerram o estudo ressaltando que é necessário uma padronização nas seqüências dos ângulos de Euler caso pretenda-se realizar a comparação de estudos entre diferentes laboratórios. Infelizmente, neste estudo os autores não utilizaram outras formas de representações para possíveis comparações com o presente trabalho.

As considerações levantadas anteriormente deixam clara duas possibilidades metodológicas para a análise das rotações em biomecânica, cada qual, com suas aparentes vantagens e desvantagens. Logo, o presente estudo apresenta uma proposta da utilização dos quatérnions como uma abordagem alternativa que possibilite ampliar as possibilidades de análises dos movimentos de rotação em biomecânica.

OBJETIVOS

Objetivo geral

Apresentar e aplicar o método dos quatérnions como ferramenta biomecânica para a análise de rotação em movimentos esportivos.

Objetivos Específicos

- Descrever a álgebra, as definições e as propriedades básicas dos quatérnions;
- Descrever os procedimentos para obtenção dos quatérnions e dos ângulos de Euler em biomecânica;
- Apresentar aplicações dos quatérnions e dos ângulos de Euler para representar rotação em movimentos esportivos.

CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DA COMPOSIÇÃO DA TESE

O projeto inicial desta tese consistia em apenas aplicar os quatérnions como uma ferramenta alternativa para descrever e analisar os movimentos humanos na biomecânica, mais especificamente, aplicar os quatérnions para analisar os movimentos articulares durante movimentos esportivos.

Ao iniciar os estudos dos quatérnions, logo notou-se que se tratava de algo complexo e, portanto, seria necessário um maior aprofundamento do referencial teórico para depois realizar as aplicações. E assim surgiu o primeiro capítulo desta tese.

Posterior ao primeiro capítulo esperava ser possível iniciar as aplicações dos quatérnions. Porém, mais uma vez, notou-se que conceitos como matriz de rotação, ângulos de Euler e mais especificamente, os quatérnions, ainda são um universo desconhecido e distante para muitos pesquisadores da área de biomecânica.

Assim, as aplicações não poderiam surgir no texto deste trabalho sem antes apresentar os “Procedimentos para a obtenção dos quatérnions e ângulos de Euler”; título dado ao segundo capítulo da tese. Neste optou-se em aplicar os quatérnions e os ângulos de Euler em um exemplo de movimento não humano, considerado relativamente simples e realizado no ambiente controlado de um laboratório. Desta forma foi possível explorar os conceitos, procedimentos e resultados obtidos para a representação dos quatérnions e ângulos de Euler. Na sequência foram realizadas as aplicações (Capítulo 3). Inicialmente, buscou-se uma situação próxima ao exemplo utilizado no capítulo anterior; um movimento humano que ocorresse basicamente em torno de um eixo e que pudesse ser realizado em

laboratório. Optou-se, então, em aplicar os quatérnions para descrever o movimento rotacional da articulação do joelho em uma tarefa de aterrissagem unipodal. Na segunda aplicação, os quatérnions e os ângulos de Euler foram utilizados para descrição da articulação do tornozelo do membro de apoio durante o chute no futebol. Após as duas aplicações, confirmou-se que a maior restrição para a utilização dos quatérnions consiste em associá-los à Nomenclatura Clínica dos Movimentos Articulares (NCMA). Portanto, na terceira aplicação optou-se em realizar simulações de movimentos para o estudo dos quatérnions. Para tal fim, realizou-se a projeção estereográfica do componente vetorial do quatérnions nos movimentos simulados, como uma tentativa de associar os quatérnions à NCMA.

Para atender os propósitos desta tese seu texto foi subdividido em capítulos em função dos objetivos específicos:

- **Capítulo 1** – Álgebra dos Quatérnions: neste capítulo são apresentadas e discutidas as definições e propriedades básicas dos quatérnions como, adição, multiplicação, norma, conjugado, inverso, e o quatérnion unitário utilizado para descrever e realizar rotações tridimensionais; também são apresentados e discutidos os cálculos matemáticos para as conversões entre três métodos utilizados para descrever rotações no espaço tridimensional - matriz de rotação, ângulos de Euler e quatérnions.
- **Capítulo 2** – Procedimentos para obtenção dos quatérnions e dos ângulos de Euler: neste capítulo foi realizado um experimento para exemplificar os procedimentos utilizados para representação dos movimentos humanos pela

abordagem dos quatérnions e dos ângulos de Euler a partir de variáveis cinemáticas.

- **Capítulo 3 – Aplicações:** neste capítulo são apresentadas três aplicações dos quatérnions. As duas primeiras aplicações foram em movimentos humanos relacionados com a prática esportiva (aplicações 1 e 2). A terceira foi em simulações de movimentos. Nesta empregou-se a projeção estereográfica na tentativa de associar os quatérnions à NCMA (aplicação 3).

CAPÍTULO 1 – ÁLGEBRA DOS QUATÉRNIONS

1.1 Formulação teórica dos quatérnions: definição e propriedades básicas

Um quatérnion é todo elemento da forma $q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$, no qual q_0, q_1, q_2 e q_3 são números reais, que pode ser identificado com a quádrupla (q_0, q_1, q_2, q_3) (um vetor de $\mathbb{R}^4$), e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tais que:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1, \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{ji} &= -\mathbf{k}, \\ \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{kj} &= -\mathbf{i}, \\ \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{ik} &= -\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Outra forma de representar um quatérnion é entendê-lo como sendo composto por duas partes: uma parte **escalar** ($q_0 \in \mathbb{R}$) e outra parte **vetorial** $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$: $q = (q_0, \mathbf{q})$.

Denota-se por $\mathbb{H}$ (em homenagem a Hamilton) o conjunto de todos os quatérnions. O conjunto $\mathbb{H}$ é munido das operações de adição e multiplicação, assim é possível operar os elementos deste conjunto que, como visto antes, é a composição de um escalar com um vetor.

1.2 Adição de quatérnions

A adição de dois quatérnions é um novo quatérnion obtido da soma das partes escalares e vetoriais, respectivamente, de cada quatérnion. Desta forma a soma dos quatérnions $p = p_0 + \mathbf{p} = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$ e $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ será o quatérnion $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k}$.

A adição de quatérnions assim definida satisfaz as propriedades:

- i) Comutativa $(p + q = q + p)$, quaisquer que sejam os quatérnions p e q ;
- ii) Associativa $(p + (q + r) = (p + q) + r)$, quaisquer que sejam os quatérnions p , q e r ;
- iii) Possui elemento neutro (o quatérnion nulo $\mathbf{0} = 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, ou $\mathbf{0} = (0,0,0,0)$);
- iv) Todo quatérnion q tem um elemento oposto $-q$ tal que $q + (-q) = \mathbf{0}$.

1.3 Multiplicação de escalar por quatérnion

Se λ é um número real e $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ é um quatérnion, o produto de λ por q , λq , é o quatérnion $\lambda q_0 + \lambda q_1\mathbf{i} + \lambda q_2\mathbf{j} + \lambda q_3\mathbf{k}$.

A multiplicação escalar de quatérnions satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\alpha(\beta q) = (\alpha\beta)q$, quaisquer que sejam os números reais α, β e qualquer que seja o quatérnion q ;
- ii) $(\alpha + \beta)q = \alpha q + \beta q$, quaisquer que sejam os números reais α, β e qualquer que seja o quatérnion q ;
- iii) $\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q$, qualquer que seja o número real α e quaisquer que sejam os quatérnions p e q .

Assim, o conjunto $\mathbb{H}$ de todos os quatérnions, munido das operações 1.2 e 1.3, tem uma estrutura de **álgebra**, chamada **Álgebra dos Quatérnions**.

1.4 Multiplicação de quatérnions

A multiplicação de dois quatérnions é feita componente a componente e deve ser definida de modo que as relações entre $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ apresentadas em (1.1) sejam satisfeitas. Desenvolvendo a multiplicação, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 pq &= (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\
 &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} \\
 &\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{j} + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k}.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Utilizando uma notação condensada: $pq = (p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$.

Como definida, a multiplicação de dois quatérnions continua sendo um quatérnio, ou seja, a operação fechada em $\mathbb{H}$. Além disso, a operação anteriormente citada satisfaz as propriedades:

1. Associativa $(p(q+r) = pq + pr)$, quaisquer que sejam p , q e r em $\mathbb{H}$.
2. Possui elemento neutro, o quatérnio $1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 1$.
3. Todo quatérnio **não nulo** possui um elemento, chamado de **quatérnio inverso**, e denotado por q^{-1} , onde $q^{-1} \cdot q = q \cdot q^{-1} = 1$ (1 é o quatérnio $1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$).
4. Distributiva em relação à adição $(p(q+r) = pq + pr)$, quaisquer que sejam os quatérnions p , q e r em $\mathbb{H}$.

No entanto, o produto entre dois quatérnions não é comutativo:

$$pq \neq qp.$$

1.5 Conjugado de um quatérnio

Conjugado de um quatérnio $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ (ou $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$), denotado por q^* , é o quatérnio dado por $q^* = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$, ou $q^* = (q_0, -\mathbf{q})$.

1.6 Norma de um quatérnio

Norma de um quatérnio q , denotada por $\|q\|$, é o número real positivo dado por $\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. Ela define uma métrica na álgebra dos quatérnions, o que permite falar em comprimento e distância entre quatérnions.

Quando $\|q\| = 1$, o quatérnio q recebe o nome de unitário e, geometricamente pertence à esfera de raio 1 no $\mathbb{R}^4$. É importante apresentar que a um quatérnio unitário pode-se atribuir um ângulo, pois é possível expressar todo quatérnio q com norma igual a 1 como $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos(\theta/2) + \mathbf{u}\sin(\theta/2)$ onde

$-\pi \leq \theta \leq \pi$ é o ângulo de rotação em torno de $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ que é um vetor unitário na direção do vetor $\mathbf{q}$. Observa-se, também, que se $\|\mathbf{q}\| = 1$, então $|q_0| \leq 1$.

Nota-se, ainda, que $q^{-1} = \frac{q^*}{\|\mathbf{q}\|}$, e se q é um quatérnion unitário então q^{-1} é igual ao seu conjugado q^* .

1.7 Quatérnion e rotações

Uma importante propriedade dos quatérnions é que eles podem representar rotações no espaço tridimensional. Para isso é necessário obter um operador definido por meio dos quatérnions que manipule adequadamente vetores do $\mathbb{R}^3$, isto é, o resultado da ação deste operador sobre um vetor do $\mathbb{R}^3$ continua sendo um vetor do $\mathbb{R}^3$, e no qual seja possível associar um ângulo com este operador.

O operador que cumpre estas condições é aqui chamado de operador quatérnion de rotação, designado como L_q , é dado por:

$$\begin{aligned} L_q: \mathbb{H}_0 &\rightarrow \mathbb{H}_0 \\ v &\rightarrow L_q(\mathbf{v}) = qvq^* \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde, q é um quatérnion unitário.

A expressão qvq^* representa um produto entre quatérnions no qual q^* o conjugado de q (portanto, $q^* = q^{-1}$), e $v \in \mathbb{H}$ é um quatérnion com a parte escalar igual a zero (quatérnion puro).

Para cada quatérnion unitário $q = (q_0, \mathbf{q})$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, a ação de L_q sobre um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ pode ser interpretada como uma rotação do vetor $v = (0, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $L_q(\mathbf{v}) = qvq^{-1} = w$, $w = (0, \mathbf{w})$. Geometricamente, pode-se interpretar tal ação como uma rotação do vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ (parte vetorial de v) em torno do eixo determinado por $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ (parte vetorial do quatérnion q), de um ângulo 2θ .

Denotando-se por M_q a matriz associada ao operador L_q em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$, tem-se a seguinte identidade:

$$M_q(v^T) = w^T,$$

$$\text{Onde, } v^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ e } w^T = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

É possível mostrar que $M_q \in SO(3)$ (o grupo das matrizes ortogonais de ordem 3) e que existe uma correspondência entre o conjunto dos quatérnions unitários S^3 e $SO(3)$. Um melhor detalhamento destes procedimentos pode ser encontrado em Lima (2007) e Biasi (2002).

Em particular, se um quatérnion unitário $q = q_0 + \mathbf{q}$ é dado, então a rotação determinada por este quatérnion tem um ângulo de rotação θ_{rot} e um vetor unitário na direção do eixo de rotação $eixo_{rot}$ dados por:

$$\theta_{rot} = 2\cos^{-1}(q_0) \text{ e } eixo_{rot} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}. \quad (1.4)$$

Assim, representando-se uma rotação por meio de um quatérnion obtém-se o vetor que define o eixo de rotação e um ângulo de rotação em torno deste eixo.

Também, é possível obter um quatérnion unitário q através de um vetor unitário $\mathbf{u}$ e uma rotação θ em torno deste vetor:

$$q = q_0 + \mathbf{q} = \cos(\theta/2) + \mathbf{u}\sin(\theta/2) \quad (1.5)$$

1.8 Relação com outras representações

Na sessão anterior foi introduzido o operador quatérnion de rotação como uma forma de abordar problemas que envolvam rotações no espaço tridimensional. Na biomecânica, representar a matriz de rotação através dos ângulos de Euler é a forma clássica utilizada para estudar as rotações. Tanto a matriz de rotação quanto os ângulos de Euler estão relacionados algebricamente com os

quatérnions. E por isso, é importante apresentar os procedimentos de conversão, por exemplo, a partir de uma matriz de rotação é possível obter o quatérnion (unitário) que representa a mesma rotação e vice-versa.

1.9 Conversão matriz de rotação – quatérnion

Quando a um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ aplica-se uma matriz de rotação M tem-se como resultado um novo vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, que geometricamente é o resultado da rotação do vetor $\mathbf{v}$ de um certo ângulo θ em torno de algum eixo: a mesma rotação pode ser obtida por meio da teoria dos quatérnions aplicando-se ao vetor $\mathbf{v}$ (escrito da forma $(\theta, \mathbf{v})$) o operador quatérnion de rotação L_q . Em notação matemática escreve-se respectivamente $\mathbf{w} = M\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} = L_q(\mathbf{v})$. Dessa forma, a conexão entre uma matriz de rotação M e um quatérnion (unitário) q , ambos descrevendo a mesma rotação, é obtida da equação $M\mathbf{v} = q\mathbf{v}q^*$. Esta equação pode ser colocada na forma $M\mathbf{v} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{v} + 2(q^* \times \mathbf{v})q + 2q_0(q \times \mathbf{v})$ e resolvendo-a chega-se à seguinte igualdade entre matrizes:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Portanto, os componentes do quatérnion q , em termos dos elementos da matriz de rotação M , podem ser obtidos considerando quatro casos diferentes:

Caso 1: $m_{11} + m_{22} + m_{33} \geq 0$

$$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{m_{11} + m_{22} + m_{33} + 1}, \quad q_1 = \frac{m_{32} - m_{23}}{4q_0}, \quad q_2 = \frac{m_{13} - m_{31}}{4q_0}, \quad q_3 = \frac{m_{21} - m_{12}}{4q_0} \quad (1.7)$$

Caso 2: $m_{11} + m_{22} + m_{33} < 0$ e $m_{11} \geq \max\{m_{22}, m_{33}\}$

$$q_1 = \frac{\sqrt{m_{11} - m_{22} - m_{33} + 1}}{2}, \quad q_0 = \frac{m_{23} - m_{32}}{4q_1}, \quad q_2 = \frac{m_{12} + m_{21}}{4q_1}, \quad q_3 = \frac{m_{13} + m_{31}}{4q_1} \quad (1.8)$$

Caso 3: $m_{11} + m_{22} + m_{33} < 0$ e $m_{22} \geq \max\{m_{11}, m_{33}\}$

$$q_2 = \frac{\sqrt{-m_{11} + m_{22} - m_{33} + 1}}{2}, \quad q_0 = \frac{m_{31} - m_{13}}{4q_2}, \quad q_1 = \frac{m_{12} + m_{21}}{4q_2}, \quad q_3 = \frac{m_{23} + m_{32}}{4q_2} \quad (1.9)$$

Caso 4: $m_{11} + m_{22} + m_{33} < 0$ e $m_{33} \geq \max\{m_{11}, m_{22}\}$

$$q_3 = \frac{\sqrt{-m_{11} - m_{22} + m_{33} + 1}}{2}, \quad q_0 = \frac{m_{12} - m_{21}}{4q_3}, \quad q_1 = \frac{m_{13} + m_{31}}{4q_3}, \quad q_2 = \frac{m_{23} + m_{32}}{4q_3} \quad (1.10)$$

1.10 Conversão quatérnion – matriz de rotação

Para obter a matriz de rotação a partir de um quatérnion q , basta construir a matriz M cujos elementos são dados em termos das componentes do quatérnion pela igualdade entre matrizes apresentadas na Equação (1.6). Caso o quatérnion não seja unitário, basta normalizá-lo e proceder com a mesma operação.

1.11 Conversão ângulos de Euler – quatérnion

Existem doze seqüências possíveis para a representação de uma rotação no espaço tridimensional utilizando os ângulos de Euler. Aqui será utilizada a seqüência na qual roda-se primeiramente sobre o eixo x , depois sobre o eixo y' (já rodado inicialmente) e finalmente sobre o eixo z'' (também já rodado nas duas operações anteriores). Desta forma, a partir de duas bases ortonormais definidas, obtêm-se os ângulos ϕ (φ), θ (θ) e ψ (ψ). Assim, através das equações abaixo, faz-se a conversão dos ângulos de Euler para os quatérnions:

$$\begin{aligned}
q_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\
q_1 &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\
q_2 &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\
q_3 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Uma forma interessante de notação para representar um quatérnion unitário e que facilita a sua representação e interpretação na biomecânica, é apresentar sua parte escalar em graus e sua parte vetorial em coordenadas esféricas (longitude, latitude e raio). E neste caso, a parte escalar foi normalizada (norma euclidiana 1) para representações em uma esfera unitária de raio 1 (Figura 1.1).

$$\begin{aligned}
\text{ângulo de rotação} &= \theta_{rot} = 2 \cos^{-1}(q_0) \frac{180}{\pi} \\
\text{longitude} &= \text{tg}^{-1} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) \frac{180}{\pi} \\
\text{latitude} &= \text{tg}^{-1} \left(\frac{q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \right) \frac{180}{\pi}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Se $q_0 = 0$ e:

- a. $q_1 \rightarrow 0+$ (q_1 tende a zero através de valores positivos), então:

$$\text{longitude} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

- b. $q_1 \rightarrow 0-$ (q_1 tende a zero através de valores negativos), então:

$$\text{longitude} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

c. $q_1 = 0$ e $q_2 \rightarrow 0$, então: $\text{latitude} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{q_3}{q_2}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

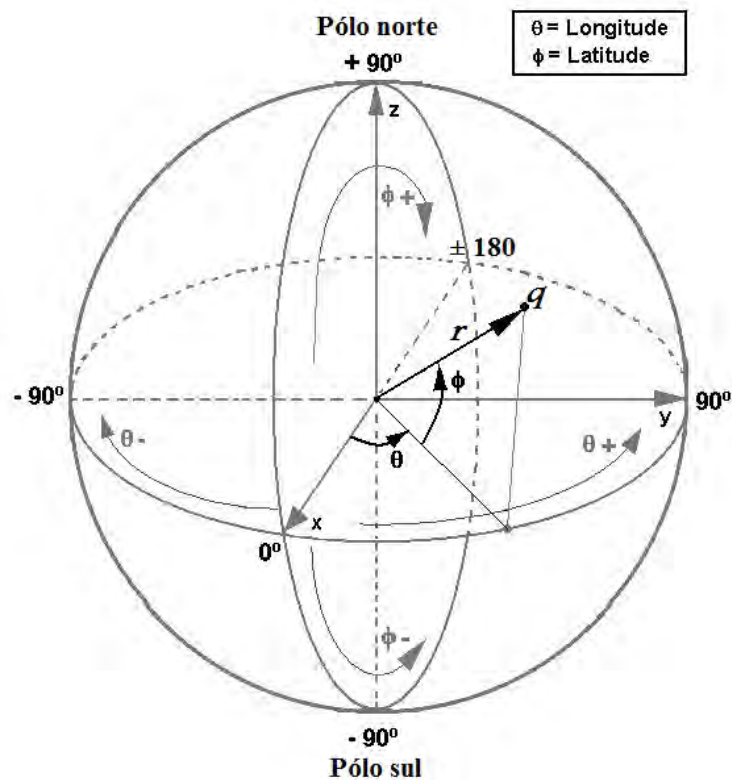


Figura 1.1 Representação da parte vetorial normalizada de um quatérnion (q) através das coordenadas esféricas (longitude = θ , latitude = Φ e raio = r).

Para as aplicações em biomecânica, essa é uma forma (coordenadas esféricas) interessante de representação, pois reduz o número de variáveis a serem apresentadas, e também, parece ser uma forma mais intuitiva para posterior interpretação e análise dos resultados.

CAPÍTULO 2 – PROCEDIMENTOS PARA OBTENÇÃO DOS QUATÉRNIONS E ÂNGULOS DE EULER

2.1 Introdução

O propósito deste capítulo é apresentar os procedimentos para o cálculo dos quatérnions e dos ângulos de Euler através de variáveis cinemáticas que foram obtidas por procedimentos de videogrametria.

Como apresentado anteriormente, para descrever a rotação de um segmento corporal no espaço tridimensional, torna-se necessária sua modelagem. Assim, o primeiro passo é considerar este segmento como um corpo rígido interligado a outro corpo rígido por meio de uma articulação. O segundo passo é orientar este segmento. É necessário então identificar a posição (coordenadas x, y, z) de pelo menos três pontos não-colineares nesse segmento. Desta forma, é possível definir um sistema de coordenadas local $S = \{P, E = (e_1, e_2, e_3)\}$, onde P é um ponto fixado e E é uma base que permite definir a posição e orientação do segmento em relação ao sistema de coordenadas global. A maneira mais utilizada em biomecânica para definir os sistemas de coordenadas global e locais, é escolher uma base ortonormal, orientada segundo a regra da mão direita (sistema de coordenadas cartesianas ortogonais):

$$\begin{array}{ll} x = y \times z, & i = j \times k, \\ y = z \times x, & \text{ou} \quad j = k \times i, \\ z = x \times y. & k = i \times j. \end{array}$$

O sistema de coordenadas global é formado pela base canônica do $\mathbb{R}^3$ localizado no ponto O , origem do sistema de coordenadas. O sistema de coordenada local também é formado por uma base ortonormal, localizado em um ponto convenientemente escolhido $S_G = \{O, E = (x, y, z)\}$, $S_{L1} = \{P_1, E_1 = (i, j, k)\}$ e $S_{L2} = \{P_2, E_2 = (i, j, k)\}$ (Figura 2.1).

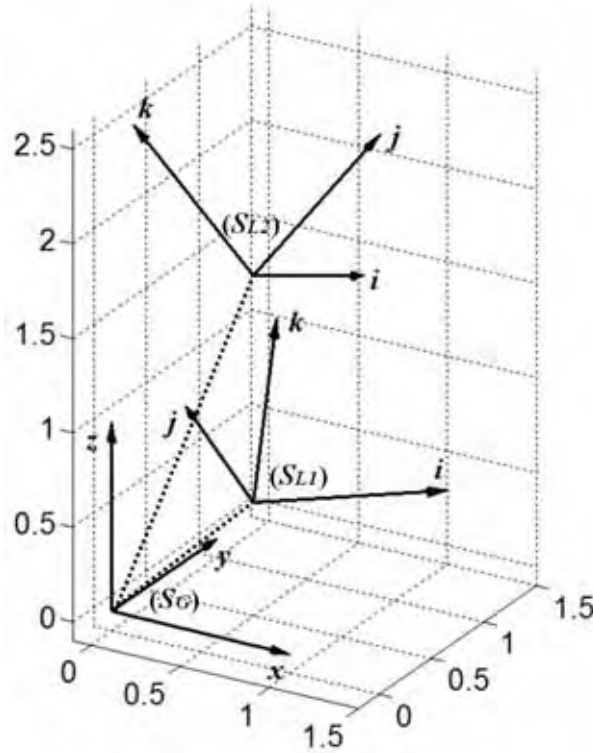


Figura 2.1 Vetores canônicos de $\mathbb{R}^3$ que definem os sistemas de coordenadas global S_G e locais S_{L1} e S_{L2} .

Através de dois sistemas de coordenadas é possível obter a matriz de rotação para representar um determinado movimento de rotação ocorrido. A matriz de rotação representa uma transformação de coordenadas relacionando as coordenadas de um ponto qualquer em dois sistemas com origens coincidentes. Dela também é possível obter a orientação do sistema de coordenadas transformando (ou rodando) em relação ao sistema fixo.

Contudo, neste caso os sistemas S_G , S_{L1} e S_{L2} não têm origens coincidentes, e, para descrever um ponto qualquer dos sistemas de coordenadas locais no sistema de coordenadas global são necessário a composição de uma rotação com uma translação.

2.2 Exemplo: determinação do movimento de rotação de duas hastes rígidas unidas por uma dobradiça simples

O exemplo aqui utilizado simula o movimento de uma articulação do corpo humano, a qual julga-se possuir apenas um grau de liberdade para o movimento de rotação. Para isso, duas hastes rígidas de madeira foram unidas por uma dobradiça simples. Em cada haste foram fixados cinco marcadores esféricos de isopor, com 15 mm de diâmetro ($p1$, $p2$, $p3$, $p4$, $p5$, $p6$, $p7$, $p8$, $p9$ e $p10$) (Figura 2.2).

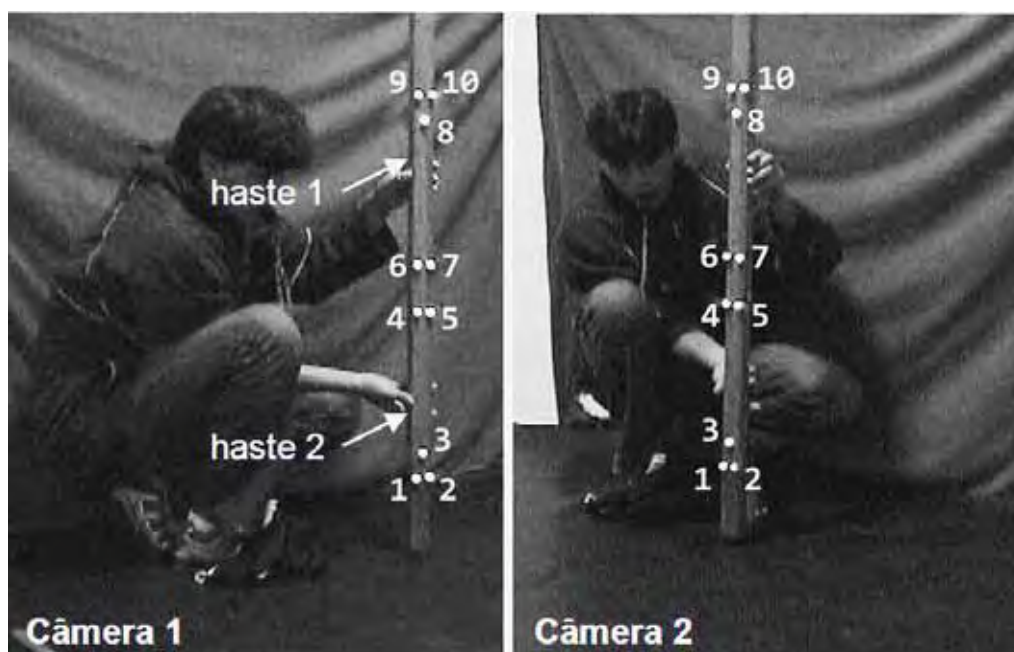


Figura 2.2 Imagem das hastes interligadas por uma dobradiça e dos dez marcadores ($p1 = 1$, $p2 = 2$, $p3 = 3$, $p4 = 4$, $p5 = 5$, $p6 = 6$, $p7 = 7$, $p8 = 8$, $p9 = 9$, $p10 = 10$).

Na seqüência realizou-se o movimento de rotação das hastes em torno da dobradiça (Figura 2.3).



Figura 2.3 Seqüência de imagens referente ao movimento das hastes em torno da dobradiça (imagens extraídas do software Dvideow).

Após o movimento das hastes um objeto calibrador contendo oito marcadores, com coordenadas previamente mensuradas foi colocado no mesmo local onde realizou-se os movimentos das hastes. Através do objeto calibrador definiu-se o sistema de coordenadas global $S_G = \{O, (x, y, z)\}$ do experimento (Figura 2.4).

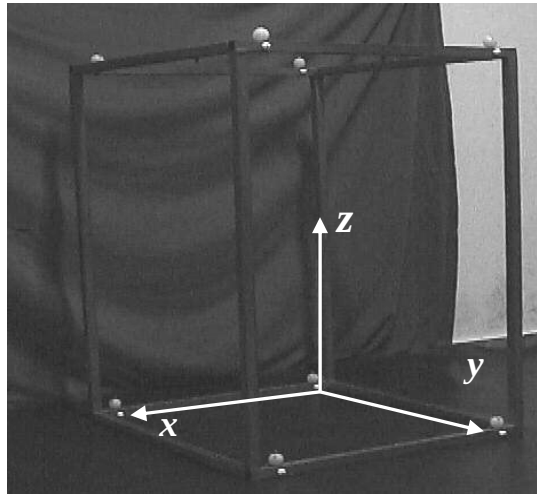


Figura 2.4 Objeto calibrador com marcadores de posições absolutas previamente mensuradas, que foram utilizadas para definir o sistema de coordenadas global do experimento.

É importante ressaltar que os vetores que formam o sistema de coordenadas global (S_G) foram definidos com módulo unitário e ortogonais entre si, logo a base em S_G é a base canônica, aqui representada por E_{S_G} .

Tanto o objeto calibrador quanto a movimentação das hastes foram filmadas por duas câmeras de vídeo digitais, com aquisição de imagens na frequência de 60 Hz. Através destas imagens foram realizados os procedimentos de videogrametria no *software* Dvideow (*Digital Video for Biomechanics for Windows 32 bits*), para a obtenção das coordenadas tridimensionais dos marcadores contidos nas hastes.

Assim, foram obtidas matrizes com as posições tridimensionais de cada marcador dadas por vetores com origem no sistema de coordenadas global em função do tempo.

2.3 Definições dos sistemas de coordenadas locais das hastes

As variáveis cinemáticas dos marcadores foram tratadas através de rotinas desenvolvidas no *software* Matlab[®].

Todos os procedimentos apresentados na seqüência são referentes a apenas um instante de tempo. Porém, nas rotinas desenvolvidas, esses procedimentos foram realizados em cada instante de tempo.

Inicialmente, as coordenadas de cada marcador foram suavizadas, e na seqüência iniciaram-se os procedimentos para determinar os versores que definiriam o sistema de coordenadas local das hastes, representados por S_1 e S_2 (Figura 2.5).

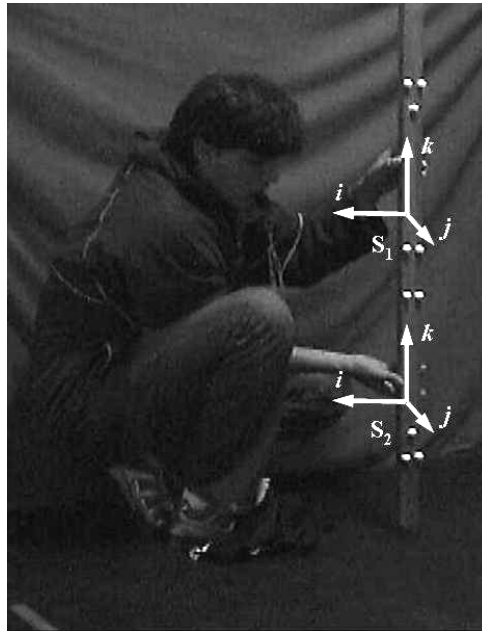


Figura 2.5 Ilustração dos sistemas de coordenadas locais da haste 1 (S_1) e haste 2 (S_2).

O sistema de coordenadas S_1 foi definido através das coordenadas dos marcadores contidos na haste 1:

$$k_{S_1} = \frac{p9 - p6}{\|p9 - p6\|} \quad (2.1)$$

$$aux_1 = \frac{p10 - p6}{\|p10 - p6\|} \quad (2.2)$$

$$j_{S_1} = \|aux_1 \times k_{S_1}\| \quad (2.3)$$

$$i_{S_1} = j_{S_1} \times k_{S_1} \quad (2.4)$$

Então, o sistema de coordenadas S_1 é representado por:

$$S_1 = \{O, (i_{S_1}, j_{S_1}, k_{S_1})\} \quad (2.5)$$

O sistema de coordenadas S_2 foi definido através das coordenadas dos marcadores contidos na haste 2:

$$k_{S_2} = \frac{p4 - p1}{\|p4 - p1\|} \quad (2.6)$$

$$aux_2 = \frac{p5 - p1}{\|p5 - p1\|} \quad (2.7)$$

$$j_{S_2} = \|aux_2 \times k_{S_2}\| \quad (2.8)$$

$$i_{S_2} = j_{S_2} \times k_{S_2} \quad (2.9)$$

Então, o sistema de coordenadas S_2 é representado por:

$$S_2 = \{O, (i_{S_2}, j_{S_2}, k_{S_2})\} \quad (2.10)$$

A Figura 2.5 é apenas uma ilustração dos sistemas de coordenadas locais das hastes, pois as operações apresentadas anteriormente definem os sistemas S_1 e S_2 na origem do sistema de coordenadas global S_G .

Deste modo, os vetores básicos dos sistemas S_1 e S_2 têm suas origens coincidentes ao ponto O da origem do sistema de coordenadas global.

Portanto, os sistemas S_1 e S_2 , neste caso, podem ser considerados e representados como as bases E_{S_1} e E_{S_2} .

2.4 Matriz de rotação

Depois de demonstrado os procedimentos para obtenção dos sistemas de coordenadas locais das hastes, são apresentados os procedimentos para definir a matriz de rotação M que foi utilizada para calcular os quatérnions e os ângulos de Euler. Neste caso, M denota a matriz de rotação que leva a base E_{S_1} sobre a base E_{S_2} . Para a interpretação do movimento seria como se a base E_{S_1} estivesse fixa e apenas a base E_{S_2} realizasse movimentos de rotação.

Assim:

$$M = E_{S_2} E_{S_1}^{-1} \quad (2.11)$$

ou:

$$M = E_{S_2} E_{S_1}^T \quad (2.12)$$

Nota-se que neste caso todas as bases e matrizes criadas são matrizes ortogonais e, portanto a inversa da matriz é a sua transposta:

$$E_{S_1}^{-1} = E_{S_1}^T \quad (2.13)$$

Assim, a matriz de rotação M é utilizada para representar de forma conveniente os movimentos de rotação de uma possível articulação humana, aqui representada pelas hastes e a dobradiça.

2.5 Cálculo dos ângulos de Euler e dos quatérnions

Uma vez encontrada a matriz de rotação M é possível extrair os ângulos de Euler e os quatérnions que representam as rotações ocorridas do sistema S_2 móvel (considerado como um segmento distal) em relação à S_1 , fixo (considerado como um segmento proximal).

2.5.1 Seqüências de Euler

Para o cálculo dos ângulos de Euler é preciso previamente escolher uma seqüência de rotação entre as 12 possíveis: zyx , zyz , zxy , zxx , yxz , yxy , yzx , yzx , xyz , xyx , xzy e xzx . Estas seqüências são obtidas através da composição de rotação definidas segundo a regra da mão direita dos ângulos ψ , θ e φ em torno dos eixos coordenados x , y , z .

$$M_{x,\psi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$M_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$M_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

onde $M_{x,\psi}$, $M_{y,\theta}$ e $M_{z,\varphi}$ são matrizes de rotação em torno dos eixos x , y , z , respectivamente.

Como exemplo, imagine inicialmente a base $E = (x, y, z)$ (Figura 2.6). Imagine agora que nela sejam realizadas três rotações sucessivas na seqüência de Euler xyz , e que estas rotações sejam de 30° (ψ) em torno do

eixo x (Figura 2.7), de 40° em torno do eixo y' (θ), já modificado pela primeira rotação (Figura 2.8), e finalmente de 50° em torno do eixo z'' (φ), também modificado pelas duas rotações anteriores (Figura 2.9). Ao final desta seqüência será obtida a base $E = (x''', y''', z''')$.

As figuras utilizadas para ilustrar este exemplo foram criadas no *software* Matlab® a partir da função *Understanding_Euler_Angles* disponível no site da empresa (MathWorks, Inc.).

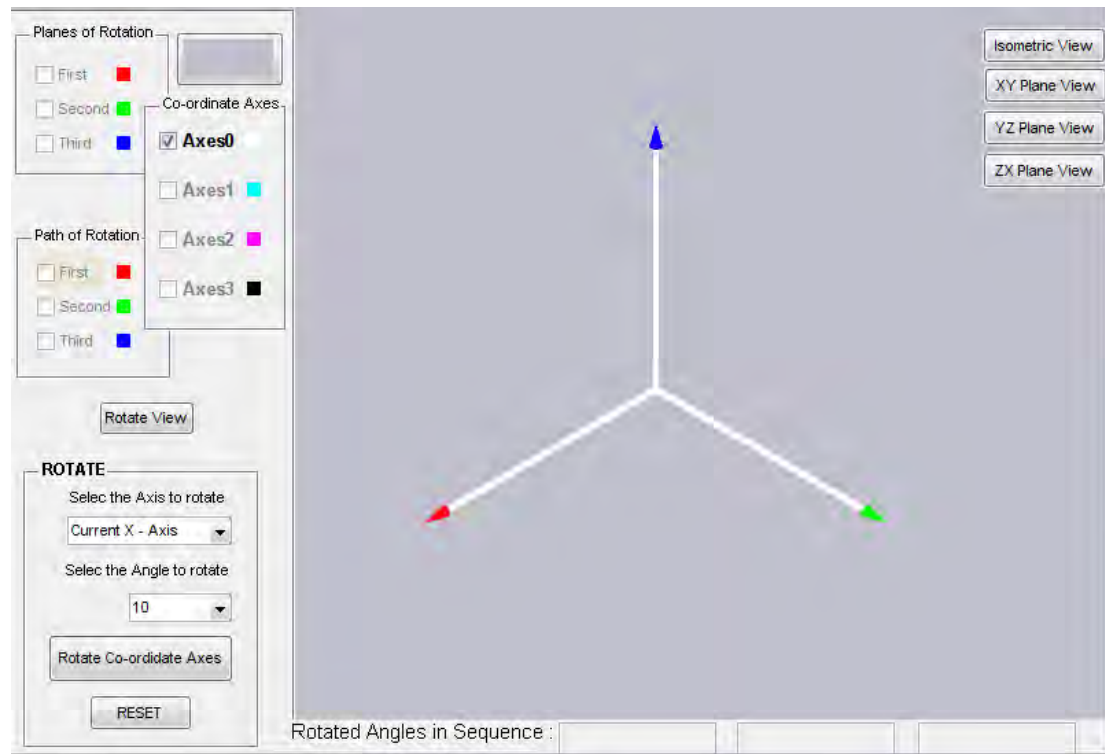


Figura 2.6 Ilustração gráfica da base $E = (x, y, z)$ (vetores em branco).

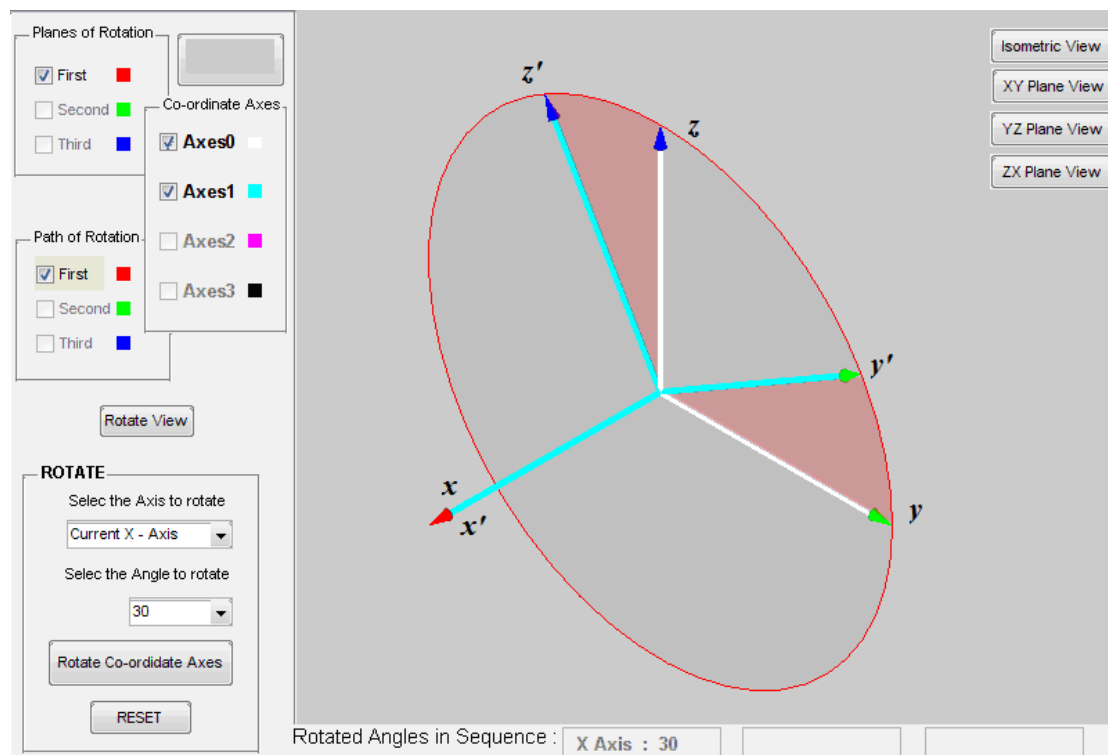


Figura 2.7. Ilustração gráfica da rotação de $\psi = 30^\circ$ em torno do eixo x (plano vermelho) da base $E = (x, y, z)$ que resulta na base $E = (x', y', z')$ (vetores em azul claro).

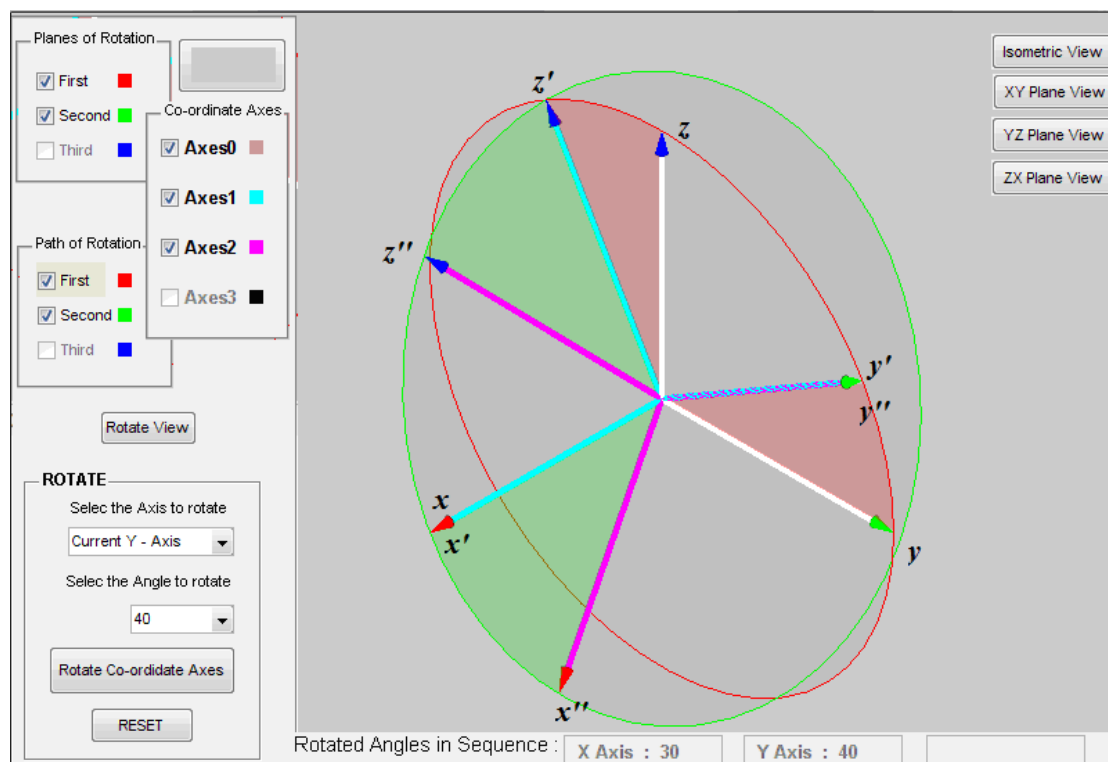


Figura 2.8. Ilustração gráfica da rotação de $\theta = 40^\circ$ em torno do eixo y' (plano verde) da base $E = (x', y', z')$ que resulta na base $E = (x'', y'', z'')$ (vetores em rosa).

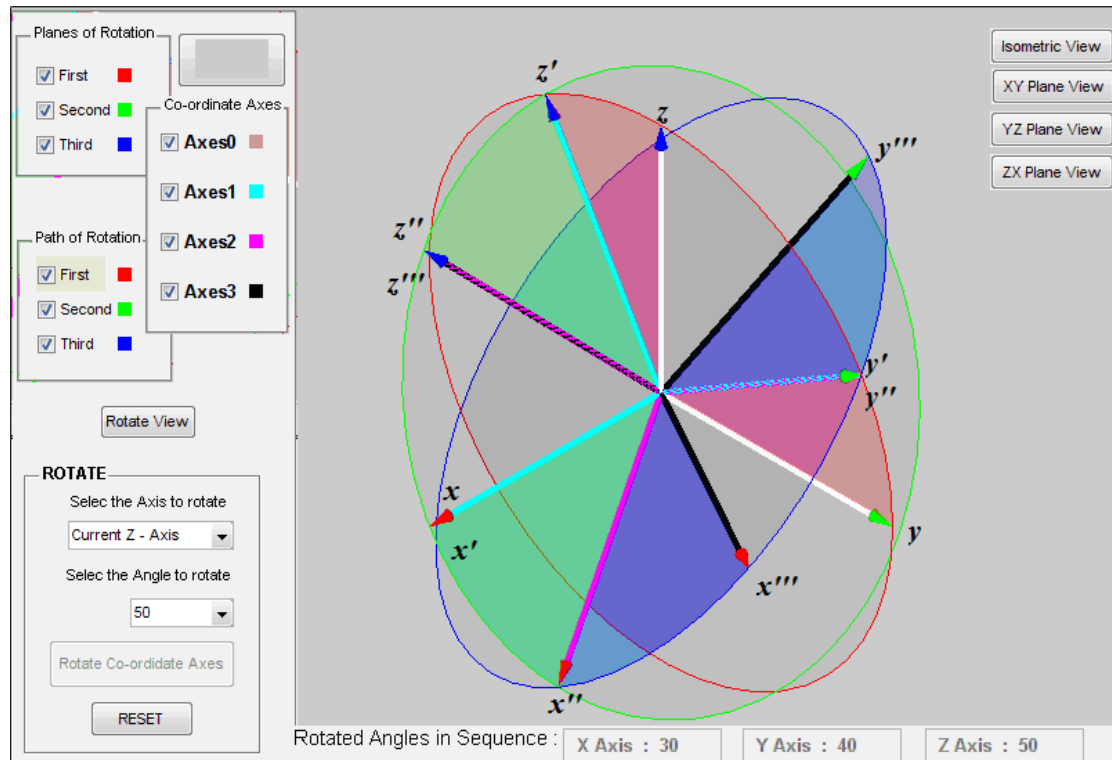


Figura 2.9 Ilustração gráfica da rotação de $\varphi = 50^\circ$ em torno do eixo z'' (plano azul escuro) da base $E = (x'', y'', z'')$ que resulta na base $E = (x''', y''', z''')$ (vetores em preto).

A composição de rotações na sequência xyz pode ser obtida por:

$$\begin{aligned}
 M_{xyz} &= M_{z,\varphi} M_{y,\theta} M_{x,\psi} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.17) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \varphi & \cos \psi \cos \varphi \sin \theta + \sin \psi \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

E expressas em graus em torno dos eixos xyz são obtidas através de M por:

$$rot_x = \psi = tg^{-1}\left(\frac{M_{32}}{M_{33}}\right)\frac{180}{\pi} \quad (2.18)$$

$$rot_y = \theta = sen^{-1}(-M_{31})\frac{180}{\pi} \quad (2.19)$$

$$rot_z = \varphi = tg^{-1}\left(\frac{M_{21}}{M_{11}}\right)\frac{180}{\pi} \quad (2.20)$$

Note-se neste caso, que se as mesmas rotações fossem realizadas em outra seqüência de rotação, como por exemplo, zyx , seria obtida ao final uma base diferente da anterior (Figura 2.10).

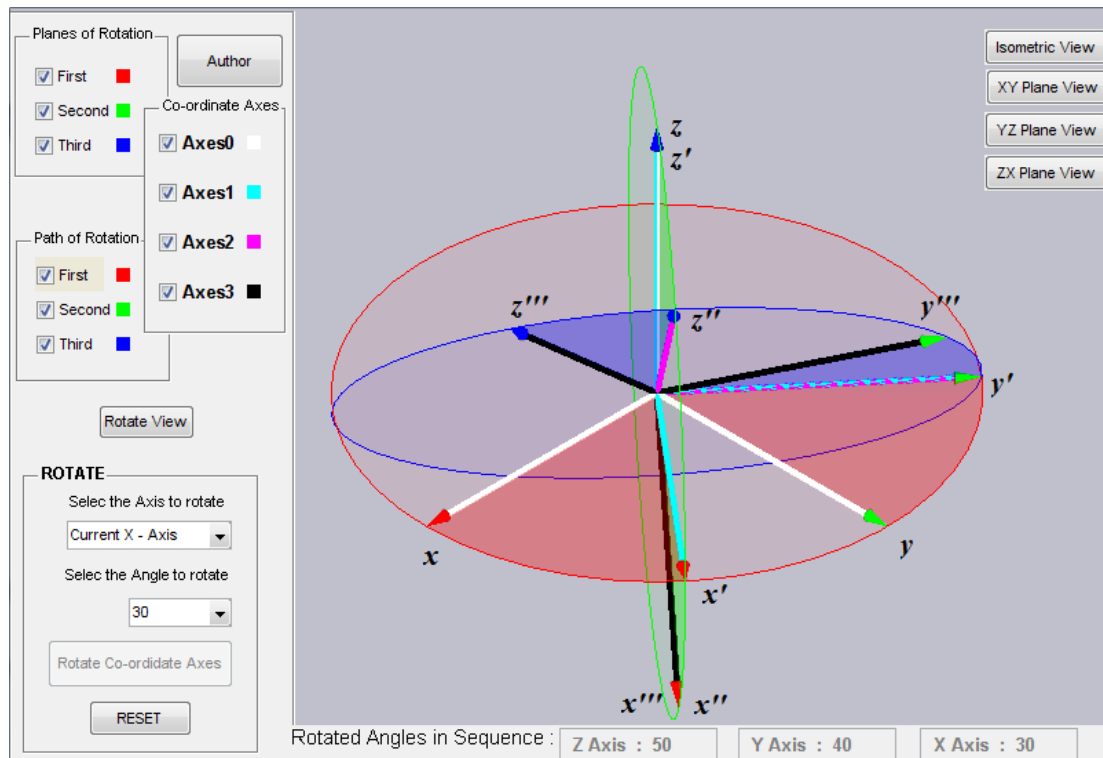


Figura 2.10. Ilustração gráfica da seqüência de rotação zyx ($\varphi = 50^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\psi = 30^\circ$) da base $E = (x, y, z)$ (vetores em branco) que resulta na base $E = (x''', y''', z''')$ (vetores em preto).

Em seguida são apresentadas as 12 possíveis seqüências de rotações. Nestas matrizes, $c = \cos$, $s = \sin$, e os números $1 = \psi$, $2 = \theta$ e $3 = \varphi$:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} xyx \\ \left(\begin{array}{ccc} c_2 & s_1 s_2 & c_1 s_2 \\ s_2 s_3 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_3 s_1 - c_1 c_2 s_3 \\ -c_3 s_2 & c_2 c_3 s_1 + c_1 s_3 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 \end{array} \right) \end{array} & \begin{array}{c} xyz \\ \left(\begin{array}{ccc} c_2 c_3 & c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 & c_1 c_3 s_2 + s_1 s_3 \\ c_2 s_3 & c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 & c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 \\ -s_2 & c_2 s_1 & c_1 c_2 \end{array} \right) \end{array} \\
\\
\begin{array}{c} xzx \\ \left(\begin{array}{ccc} c_2 & -c_1 s_2 & s_1 s_2 \\ c_3 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_2 c_3 s_1 - c_1 s_3 \\ s_2 s_3 & c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 & c_1 c_3 + c_2 s_1 s_3 \end{array} \right) \end{array} & \begin{array}{c} xzy \\ \left(\begin{array}{ccc} c_2 c_3 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 & c_3 s_1 s_2 + c_1 s_3 \\ s_2 & c_1 c_2 & -c_2 s_1 \\ -c_2 s_3 & c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 \end{array} \right) \end{array} \\
\\
\begin{array}{c} yxz \\ \left(\begin{array}{ccc} c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -c_2 s_3 & c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3 \\ c_3 s_1 s_2 + c_1 s_3 & c_2 c_3 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 \\ -c_2 s_1 & s_2 & c_1 c_2 \end{array} \right) \end{array} & \begin{array}{c} yzx \\ \left(\begin{array}{ccc} c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3 & -s_2 & c_2 s_1 \\ c_1 c_3 s_2 + s_1 s_3 & c_2 c_3 & c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 \\ c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 & c_2 s_3 & c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 \end{array} \right) \end{array} \\
\\
\begin{array}{c} yxy \\ \left(\begin{array}{ccc} c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & s_2 s_3 & c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 \\ s_1 s_2 & c_2 & -c_1 s_2 \\ -c_2 c_3 s_1 - c_1 s_3 & c_3 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 \end{array} \right) \end{array} & \begin{array}{c} yzy \\ \left(\begin{array}{ccc} c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_3 s_2 & c_2 c_3 s_1 + c_1 s_3 \\ c_1 s_2 & c_2 & s_1 s_2 \\ -c_3 s_1 - c_1 c_2 s_3 & s_2 s_3 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 \end{array} \right) \end{array} \\
\\
\begin{array}{c} zxz \\ \left(\begin{array}{ccc} c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_3 s_1 - c_1 c_2 s_3 & s_2 s_3 \\ c_2 c_3 s_1 + c_1 s_3 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_3 s_2 \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 & c_2 \end{array} \right) \end{array} & \begin{array}{c} zyz \\ \left(\begin{array}{ccc} c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 & -c_2 c_3 s_1 - c_1 s_3 & c_3 s_2 \\ c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -s_2 s_3 \\ -c_1 s_2 & s_1 s_2 & c_2 \end{array} \right) \end{array} \\
\\
\begin{array}{c} zxy \\ \left(\begin{array}{ccc} c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 & c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 & c_2 s_3 \\ c_2 s_1 & c_1 c_2 & -s_2 \\ c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 & c_1 c_3 s_2 + s_1 s_3 & c_2 c_3 \end{array} \right) \end{array} & \begin{array}{c} zyx \\ \left(\begin{array}{ccc} c_1 c_2 & -c_2 s_1 & s_2 \\ c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -c_2 s_3 \\ s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 & c_3 s_1 s_2 + c_1 s_3 & c_2 c_3 \end{array} \right) \end{array}
\end{array} \tag{2.21}$$

2.5.2 Quatérnions

A obtenção dos componentes do quatérnion, que representa o ângulo de rotação e o eixo sobre o qual essa rotação ocorreu, foi realizada através matriz de rotação M por meio das equações (1.7), (1.8), (1.9) e (1.10) apresentadas no Capítulo 1.

2.6 Resultados e discussões

Os resultados obtidos estão apresentados na forma de gráficos. Neste exemplo o qual foram utilizadas as hastes unidas por uma dobradiça, foram escolhidas as seqüências de Euler xyz , zyx , zxz e zyz . A escolha destas quatro seqüências justifica-se pelo fato de serem os que mais ocorrem na literatura. É importante lembrar que os eixos que formam os sistemas de coordenadas local das hastes foram denominados pelas letras i, j, k .

Para representação gráfica do quatérnion unitário, sua parte escalar foi convertida para graus e sua parte vetorial em coordenadas esféricas (longitude, latitude e raio), como demonstrado no final do Capítulo 1 deste trabalho.

As Figuras 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14 apresentam os ângulos de Euler das quatro seqüências de rotação escolhida, e a Figura 2.15 apresenta o gráfico dos componentes do quatérnion unitário. Na Figura 2.15 ocorreu o problema da descontinuidade da longitude. Para resolver tal questão foi utilizada a função *smoothlong* do software Matlab®, representada na Figura 2.16.

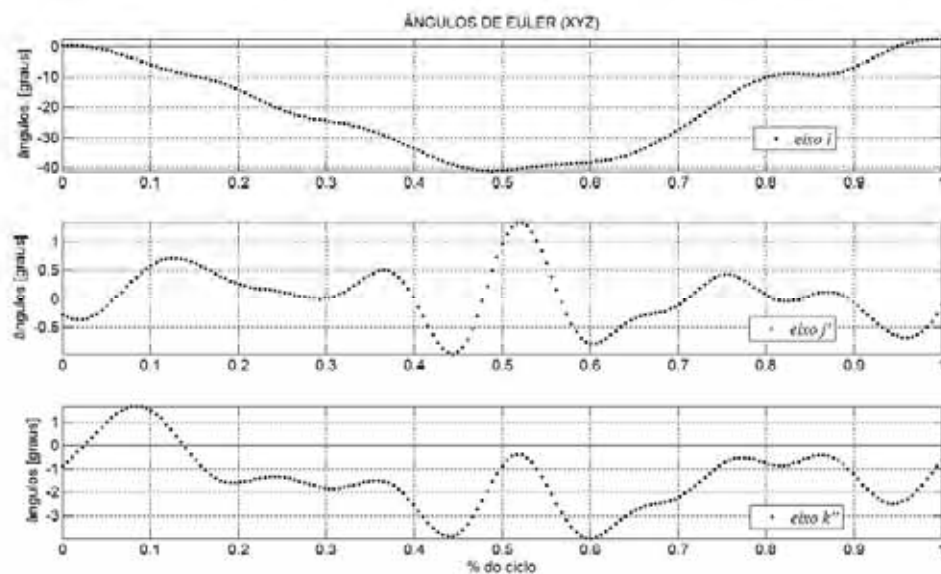


Figura 2.11 Ângulos de Euler seqüência rotação definida xyz que correspondem aos eixos i, j' e k'' das hastes.

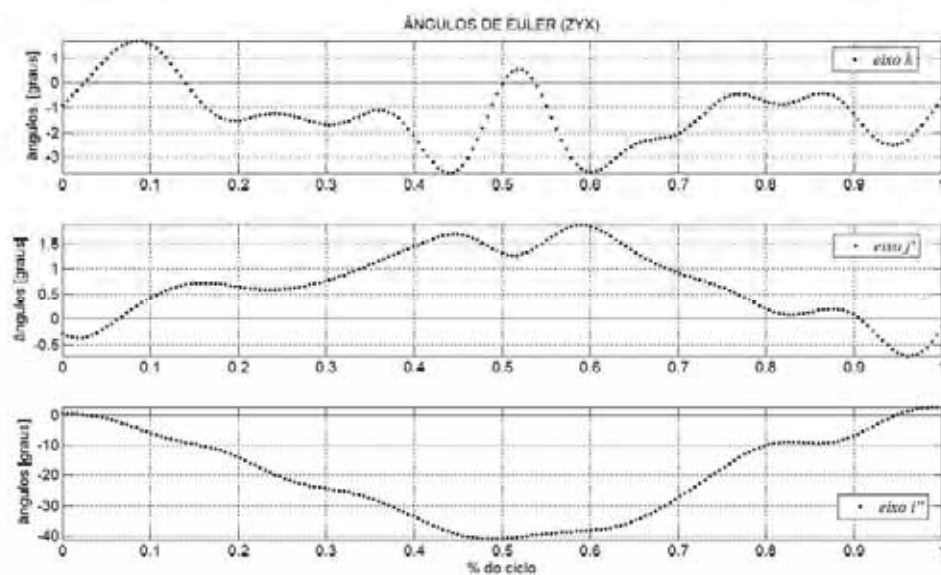


Figura 2.12 Ângulos de Euler seqüência rotação definida zyx que correspondem aos eixos k , j' e i'' das hastes.

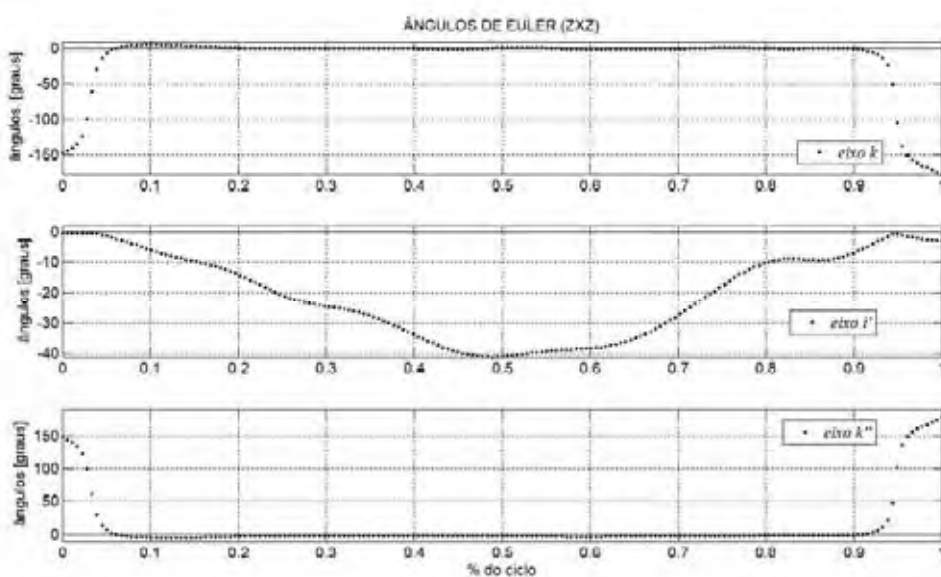


Figura 2.13 Ângulos de Euler seqüência rotação definida zxz que correspondem aos eixos k , i' e k'' das hastes.

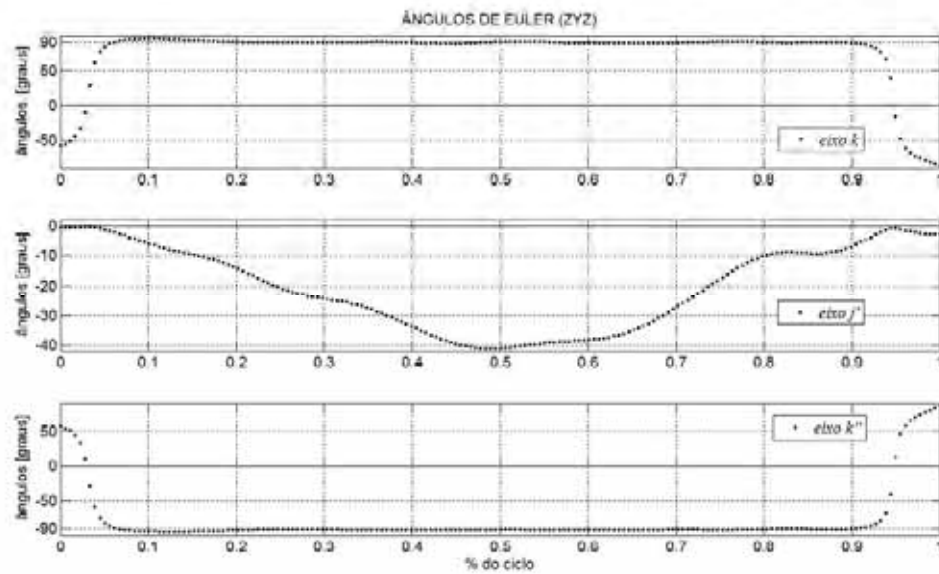


Figura 2.14 Ângulos de Euler seqüência rotação definida zyz que correspondem aos eixos k, j' e k'' das hastes.

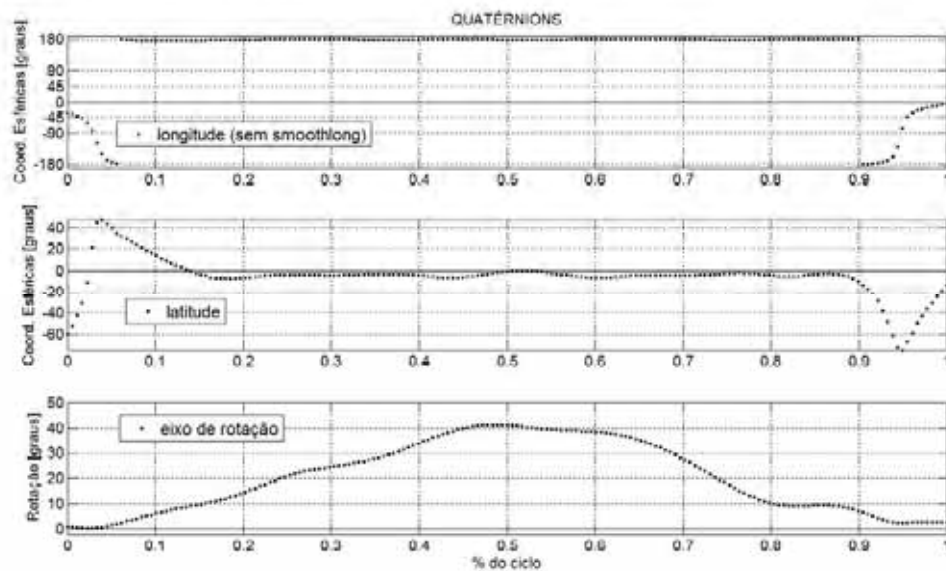


Figura 2.15 Quatérnions unitários – componente vetorial (Longitude e Latitude) e componente escalar (rotação em graus). Ocorrência de descontinuidade na longitude.

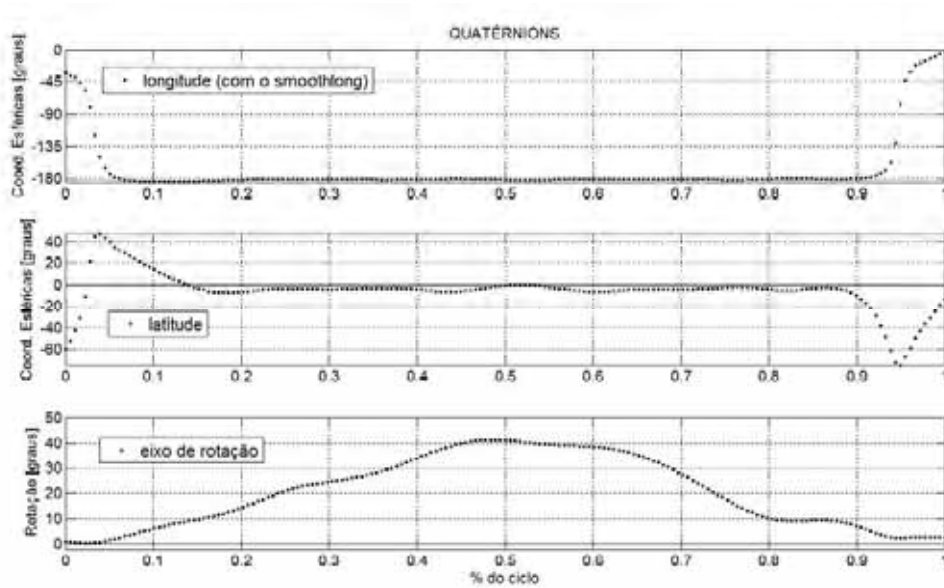


Figura 2.16 Quatérnions unitários – componente vetorial (Longitude e Latitude) e componente escalar (rotação em graus). Removido a descontinuidade na Longitude através da função *smoothlong* do matlab.

Durante toda a movimentação da haste esperava-se que as rotações ocorressem principalmente em torno de um eixo, e que esta rotação fosse representada por variações em graus no eixo i para os ângulos de Euler e na parte escalar q_0 do quatérnion unitário.

Através de uma análise posterior das imagens de vídeo e do objeto utilizado neste teste, verificou-se que além da rotação no eixo da dobradiça, a mesma apresentou outros pequenos movimentos que ocorreram devido a uma “folga” existente em seu eixo. Estes movimentos são observados principalmente por alterações nos valores de rotação em torno dos eixos j e k para os ângulos de Euler e na parte vetorial longitude e latitude do quatérnion unitário.

Isto não era esperado, contudo, esta imperfeição na dobradiça permitiu verificar que no início e fim do movimento, para uma primeira análise (visual), as seqüências zxz , zyz e os quatérnions foram mais sensíveis aos pequenos movimentos que ocorreram devido à “folga” do que àqueles existentes no eixo da dobradiça. Isto ocorreu porque nessas posições as bases E_{S_1} e E_{S_2} estão próximas de uma sobreposição, situação essa em que ocorre o *gimbal lock*, fenômeno caracterizado quando a segunda rotação é de 0° ou 180° , ou seja, o primeiro e terceiro eixos estão em paralelo. Já para os

quatérnions verificou-se que nesta situação os pequenos movimentos representam grandes alterações no eixo de rotação.

Deste ponto em diante para continuar a interpretação dos resultados, essa imperfeição da dobradiça será desconsiderada.

Nas Figuras 2.11, 2.12, 2.13 e 2.16, como era esperado, as rotações ocorreram basicamente em torno do eixo i para os ângulos de Euler e em torno do eixo de rotação para os quatérnions (olhar Figura 2.4 para relembrar sistemas de coordenadas local das hastes). Estas rotações atingiram valores próximos no eixo principal de rotação (eixo i) nas três seqüências em questão (xyz , zyx , zxz) e também para o componente escalar (q_0) do quatérnion.

Na Figura 2.14, na seqüência zyz que não contemplou o eixo i , verifica-se que a principal rotação ocorreu em torno do eixo j , enquanto que a primeira rotação ocorreu em torno do eixo k e a segunda novamente em torno do eixo k' (porém, já rodado anteriormente). Esta apresenta valores de rotação de aproximadamente 90° e -90° . Note que para se definir a orientação de um objeto no espaço tridimensional, esses valores de rotações (90° e -90°) não representariam um problema. Porém, caso esta seqüência fosse escolhida para representar o movimento de uma articulação do corpo humano, como por exemplo a do joelho, certamente isso seria um problema, pois neste caso seria passível interpretar que o joelho realizou movimentos anatomicamente impossíveis (90° , -41° e -90° de rotação). Em uma analogia à lógica matemática seria como ao resolver um sistema, duas possíveis soluções fossem encontradas:

$$\text{sen}\theta = -2, \text{ (não convém),}$$

ou:

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{2}, \text{ (convém).}$$

Neste caso a solução $\text{sen}\theta = -2$, não convém, pois a função seno tem imagem o intervalo $[-1, 1]$. Essa seria uma vantagem na representação dos quatérnions frente aos ângulos de Euler. A não dependência de uma seqüência de rotação que acarreta em diferentes interpretações. Tal fato já foi reportado por Haslwanter (1995), que em estudos dos movimentos do olho humano,

apresentou as vantagens dos quatérnions. Estes não requerem uma seqüência arbitrária de rotação e não apresentam problemas de restrições.

Verifica-se então que a perspectiva inicial do presente trabalho, que é inserir os quatérnions como uma representação adequada para investigar o movimento de rotação em biomecânica, começa a ganhar forças.

CAPÍTULO 3 – APLICAÇÕES

A primeira aplicação trata-se de um estudo no qual a representação dos quatérnions foi empregada com a finalidade de descrever e analisar as rotações ocorridas no joelho após uma aterrissagem unipodal (*single leg drop landing*). Esta atividade está relacionada a tarefas esportivas, a qual é utilizada por pesquisadores da área da saúde no estudo dos mecanismos de lesão do ligamento cruzado anterior. A referida aplicação foi apresentada na forma de pôster e seu resumo foi publicado nos anais do *13th Annual Congress of the European College of Sport Science* em 2008. A versão completa do trabalho aqui apresentado encontra-se em forma de artigo científico.

3.1 APLICAÇÃO 1

Three-dimensional rotation in Biomechanics with the Quaternions representation: application to the knee joint during a sports-related task

Abstract

Amongst the several mathematical representations of spatial rotations, such as Euler or Cardan angles, rotation matrices and quaternions, the latter is the least employed in Biomechanics. In this paper we use quaternions to describe the rotational movement of the human knee joint during a landing task, calculating the instantaneous axis of rotation throughout the movement. In the experiment described herein, three female college students performed five single-leg drop landings, recorded with four 120Hz digital video cameras. Thigh and shank coordinate systems were defined and their relative rotation calculated by means of a rotation matrix, afterwards converted to quaternion. Axis and angle of rotation are easily obtained from the quaternion. Evolution through time of the (3D unitary) axis of rotation is described in terms of its representation in spherical coordinates. This approach is not only simpler and more robust from the computational point of view, but also more meaningful than the traditional Euler sequence description, since the actual movement is not the result of the composition of three rotations with respect to predetermined axes. Hopefully this work will lead to further investigations concerning human joint behavior, including the computation of physical quantities such as angular velocities and torques, thereby improving our understanding of human joint.

Keywords: Quaternions, representation of rotations, kinematics, knee joint, drop landing.

3.1.1 Introduction

In general, the human body is modeled as a group of articulated rigid segments. The ideal rigid body moves in rigid displacements, which consist only of translations and/or rotations. Therefore the movement of a rigid body in three-dimensional space is completely determined by its position and orientation with respect to a fixed coordinate system. The representation of translations is quite straightforward from a mathematical point of view. Rotation is quite another matter,

and there are several alternate representations, such as Euler and Cardan angles (by far the more traditional one in Biomechanics), rotation matrices, axis-angle and quaternions. The latter have been steadily gaining popularity since its inception in the mid nineteenth century, its use spreading from the more theoretical areas, such as mathematics and physics, to the applied sciences, from aerospace applications to computer graphics. The quaternion approach is not only simple and robust from a computational point of view, but also provides a more apt description of the joint movement, in the sense that the joint motion does not follow a sequence of rotations around predetermined angles, as in the Euler angle representation. Given the quaternion, one may easily calculate the instantaneous axis and amount of rotation.

3.1.1.1 The quaternions and description of joint movement rotation

Quaternions were introduced and developed by the mathematician William Rowan Hamilton in 1843, when he was looking for an algebraic system that could operate in three-dimensional space with the same complex numbers conditions observed in two-dimensional space (Hamilton, 1847). Therefore, he tried to define addition and multiplication operations with triplets of real numbers (vectors in $\mathbb{R}^3$) that were analogous to the ones defined to pairs of real numbers (complex numbers). The name “quaternions” was then given to this four-number set, and a detailed treatment with the expression of its elegant mathematical properties may be found in and Kantor and Solodovnikov (1989) and Kuipers (1999).

Rotation representation and operations with the quaternions approach is frequently observed in the areas of robotics, graphical computation, physics, aerospace systems, and more recently, in biomechanics (Cunha et al., 2008). Concerning human movements, Vrongistinos et al. (2002) demonstrated the use of the quaternions in a three-dimensional kinematics analysis along with the calculation of angular velocities. The authors reported advantages with the use of quaternions over other representations, such as the Euler angles where singularities (Gimbal Lock) may occur and different rotation sequence parameters may be observed for one single rotation. In fact, twelve different parameters may represent the same rotation when utilizing the Euler angle convention to represent one rigid body rotation in three-dimension.

Tasora (2001) utilized the quaternions to represent rotations in the development of a method to solve kinematic and dynamic problems under simulation of multiple body systems. The author justified such choice by stating that quaternions prevent the occurrence of singularities, along with providing a powerful and easy method of dealing with equations without constraints.

The quaternions still offer further advantages when compared to another representation approach based on the rotation matrices (3x3), such as the lesser amount of coordinates utilized for its description (Gomes, 1998), the small number of constraints applied on the coordinates (Bloomenthal, 1990), the more efficient process of performing multiplications (Gomes, 1998), and the promptness in finding the rotation angle around the axis where the rotation is taking place (Kuipers, 1999).

Therefore, the quaternions approach presents itself as an interesting possibility in the study of rotational movements within the area of biomechanics. However, despite of the advantages presented above, very few are the studies using quaternions in the biomechanical model of three-dimensional rotations. Such fact is verified by the small number of references encountered in the literature that explore this topic.

3.1.1.2 Knee joint movement

The knee joint has an essential importance during human locomotion; hence, it is observed in the literature a great amount of studies of this joint during gait and other dynamic tasks. However, the reports present two- or three-dimensional angles of the knee joint by means of mathematical approaches that may suffer singularities or constraints already mentioned.

It is known that for a healthy knee to achieve complete range of motion, movements in the three anatomic movement planes (flexion-extension, adduction-abduction, and lateral-medial rotations) should occur. With that in mind the utilization of the quaternions to describe the alterations in the movement axes during a dynamic task would be imperative for the presentation of data without constraints or unnoticeable errors.

Landing from a jump characterizes a frequent movement within any athletic event (Pflum, et al., 2004). Such task presents a rapid segment deceleration, producing more exacerbate joint movements when compared to other activities such

as gait or stair ascending/descending. Therefore, the aim of the present study was to utilize the rotational representation of quaternions to describe the human knee joint movement during a landing task.

3.1.2 Methods

3.1.2.1 Data Collection

Three recreational female athletes (average age 19.7 ± 1.2 , range 19-21 years) participated in the study (volunteers A, B and C). The volunteers presented no history of lower limb injury or surgery (orthopaedic assessment performed by a physical therapist), along with no complaints of lower limb joint pain during activities of daily living and athletic tasks. Pilot and experimental procedures initiated only after the signing of the written consent form that was approved by the university's ethics committee for human subject participation in research (protocol 124/2007). All volunteers were right-limb dominant and preferred to kick a soccer ball as far as possible with their right leg (Hewett et al., 2005). Thus, the analyzed limb in this study was the right lower limb from each volunteer.

They performed five single-leg drop landings from a 31cm platform while maintaining their hands against their iliac crest throughout the entire task. Six passive markers (10mm diameter) were utilized, and they were fixed on the following anatomic landmarks: prominence of the greater trochanter ($p1$), lateral epicondyle of the femur ($p2$), medial epicondyle of the femur ($p3$), head of the fibula ($p4$), lateral malleolus ($p5$), and medial malleolus ($p6$) (Cappozzo, 1995) (Figure 3.1.1 - A).

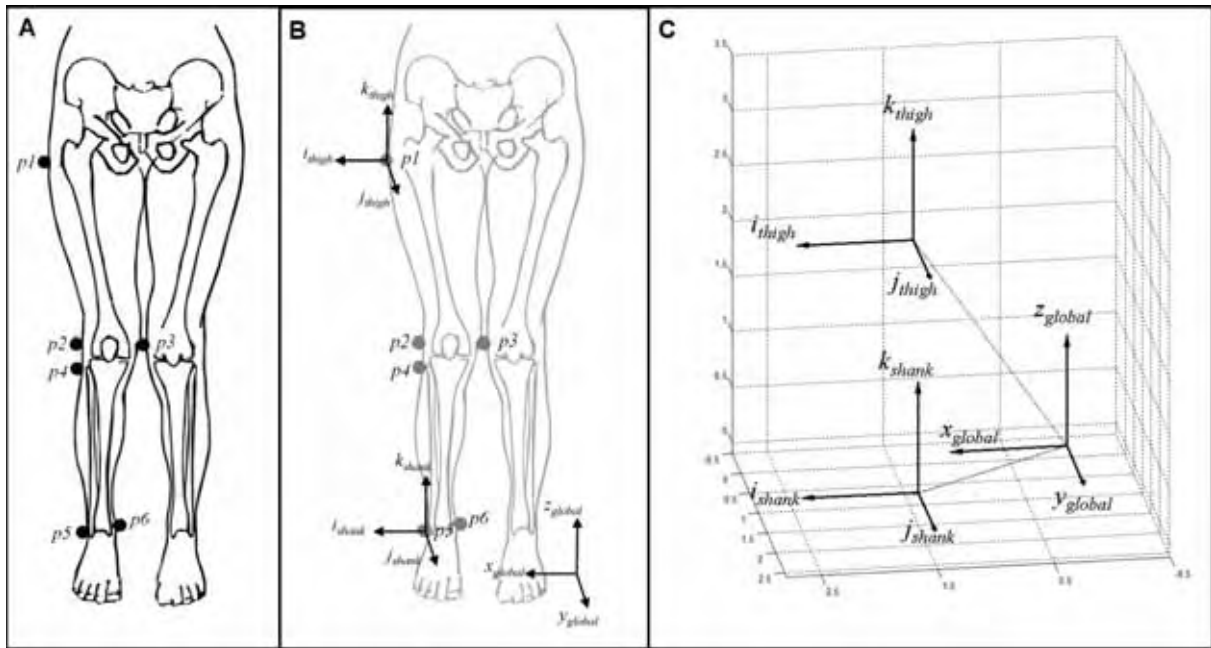


Figure 3.1.1 A - Representation of the six passive markers were fixed on the anatomic landmarks. B and C – Representation of the thigh and shank system were defined in terms of the markers with respect to the global system by translations.

Prior to the video recordings the volunteers performed enough drop-landings to be familiarized with the studied task. Following this acquaintance period, the trials were recorded by four digital cameras (JVC GR-DVL9800u®) adjusted to the acquisition frequency of 120 Hz. They were positioned as so they could capture all the passive markers, and they were located laterally (camera 1), in front of (cameras 2 and 3), and diagonally (camera 4) to the volunteer (Figure 3.1.2). The frontal cameras presented a 70° angle between them, while camera 1 was perpendicular to the task and camera 4 was angled 40° to the task.

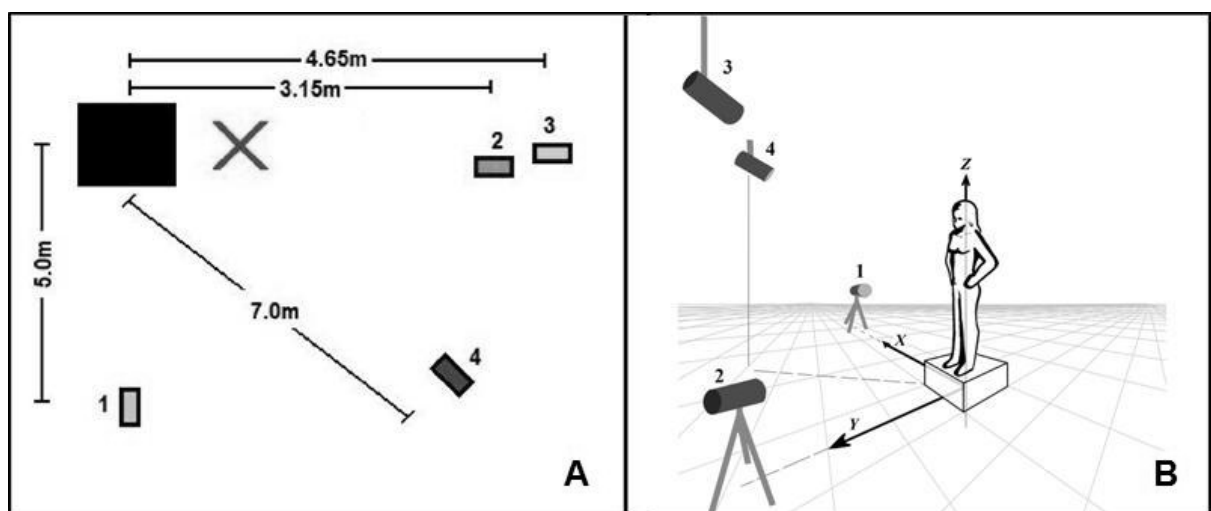


Fig. 3.1.2 A - The black square in the represents the platform in which the subjects performed the task into the X mark (the X mark is only illustrative to indicate task direction). B - Positions of the four high speed videos cameras (top (left) and diagonal (right) views from the task) and the

For the calibration procedure an object with 1.80m x 0.80m x 1.00m dimension was filmed in the area where the volunteers performed the drop-landings. This object had 24 control points with known absolute positions in relation to the Cartesian coordinate system. The global reference system was then defined with this calibrated object. Subsequently, the axes of the global reference system were aligned with the human body axes, where the z axis was defined in the vertical position oriented upwards, the y axis was oriented in the posterior-anterior direction of the volunteer, and the x axis was defined as the cross product of the vectors y and z (Figure 3.1.2 - B).

The raw three-dimensional data from each marker was obtained by means of videogrammetry procedures with the software Dvideow[®] (Digital Video for Biomechanics for Windows 32 bits) (Barros et al., 1999 and Figueroa et al., 2003) which utilizes the direct linear transformation (DLT) method for 3D representations (Abdel-Aziz and Karara, 1971).

3.1.2.2 Data Analysis

For all the following procedures, the software Matlab (Mathworks Inc., Natick, MA, USA) was used as a computation tool for data treatment.

3.1.2.3 Measurement experimental error

Initially the experimental error was verified with a specific accuracy test (Ehara et al. 1997), in which the value of the experimental error was 2.1 mm.

3.1.2.4 Standardization procedure for movement analysis

As the standardization procedure the movement considered for analysis was the same time period for all landings, and the initial foot contact (IC) with the ground was selected as the common event. The IC was obtained from a force plate (Bertec force plate model 4060-08, Bertec Corp., Ohio, USA) in which the vertical ground reaction force was only utilized to detect the specific time of foot initial contact (IC) with the ground. Two cycles were then stipulated for each analysis: 1 second prior to IC, and 1 second after IC (Figure 3.1.3).

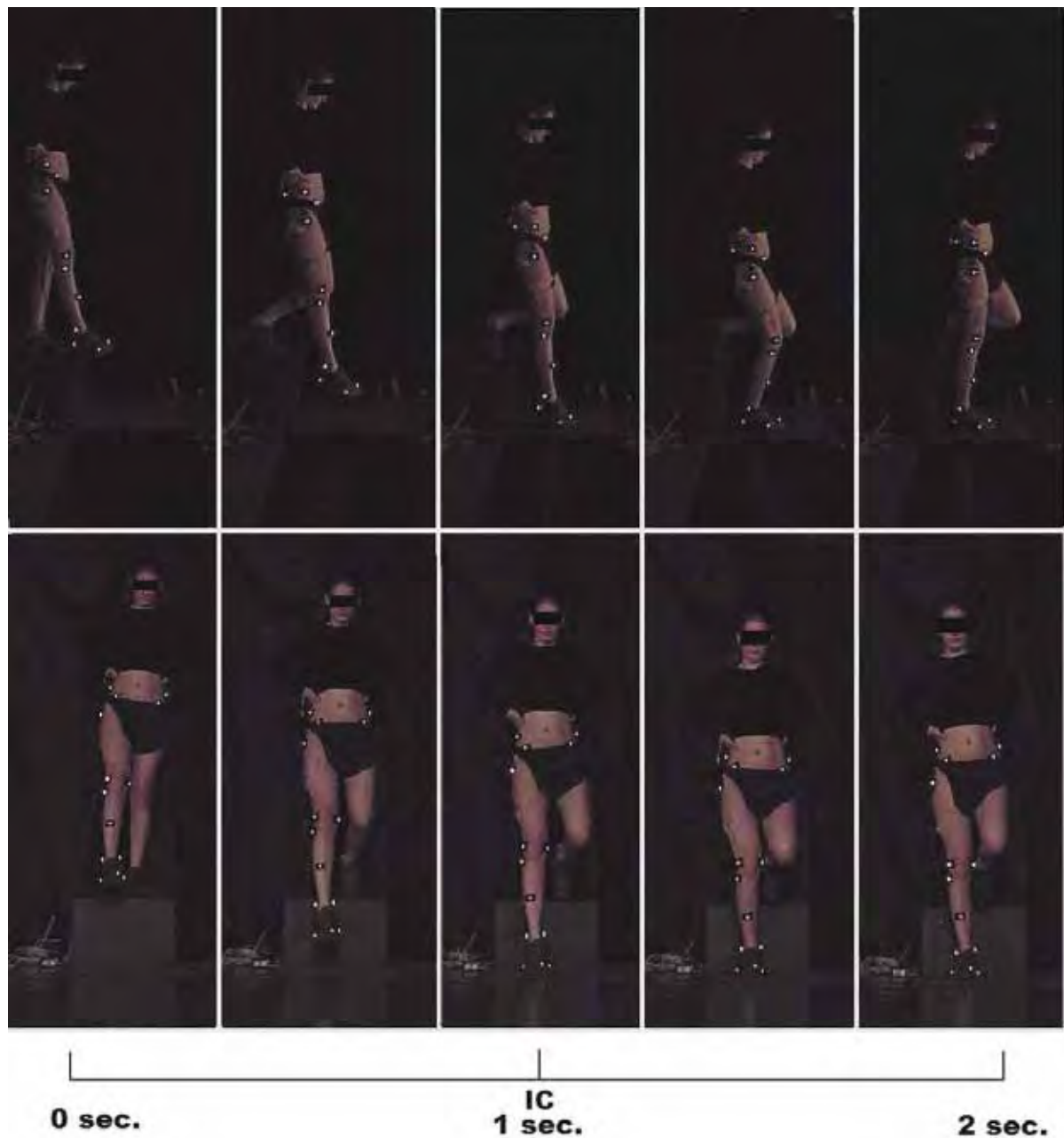


Fig. 3.1.3 Volunteer at initial foot contact (IC). This event was selected to divide the two studied cycles: 1 second prior to IC and 1 second after IC.

3.1.2.5 Data smoothing

The three-dimensional data, comprised of x , y and z coordinates of each marker relative to time (x_t , y_t , and z_t) were smoothed by the function Loess (Cunha and Lima Filho, 2003), where the function parameter was defined using residual, position, velocity and acceleration graphic analysis of the 3D marker coordinate data.

3.1.2.6 Procedure for calculating quaternions

The thigh and shank are modeled as rigid segments. Their relative orientation is measured by means of two right-handed systems (ordered triples of unit vectors satisfying the right-hand rule) defined in terms of the markers $p1$ through $p6$ placed on the athletes, as described in section 3.1.2.1 and depicted schematically in Figure 3.1.1, in accordance with the formulas adopted in Grood and Suntay (1983), namely:

Thigh system

$$k_{thigh} = \frac{p1 - p2}{\|p1 - p2\|} \quad (3.1.1)$$

$$aux_{thigh} = \frac{p3 - p1}{\|p3 - p1\|} \quad (3.1.2)$$

$$j_{thigh} = \|aux_{thigh} \times k_{thigh}\| \quad (3.1.3)$$

$$i_{thigh} = j_{thigh} \times k_{thigh} \quad (3.1.4)$$

The unit vectors of the thigh system are the column vectors of the orthogonal matrix $[S_{thigh}]$:

$$[S_{thigh}] = \begin{bmatrix} i_{x_{thigh}} & j_{x_{thigh}} & k_{x_{thigh}} \\ i_{y_{thigh}} & j_{y_{thigh}} & k_{y_{thigh}} \\ i_{z_{thigh}} & j_{z_{thigh}} & k_{z_{thigh}} \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

Shank system

$$k_{shank} = \frac{p4 - p5}{\|p4 - p5\|} \quad (3.1.6)$$

$$aux_{shank} = \frac{p6 - p4}{\|p6 - p4\|} \quad (3.1.7)$$

$$j_{shank} = \|aux_{shank} \times k_{shank}\| \quad (3.1.8)$$

$$i_{shank} = j_{shank} \times k_{shank} \quad (3.1.9)$$

The orthogonal matrix $[S_{shank}]$ is built analogously:

$$[S_{shank}] = \begin{bmatrix} i_{x_{shank}} & j_{x_{shank}} & k_{x_{shank}} \\ i_{y_{shank}} & j_{y_{shank}} & k_{y_{shank}} \\ i_{z_{shank}} & j_{z_{shank}} & k_{z_{shank}} \end{bmatrix} \quad (3.1.10)$$

The $\|$ and $\times$ denote the norm and cross product of the vectors in $\mathbb{R}^3$, respectively.

Right-handed systems are rotations of one another. In this case we want to evaluate what rotation leads the shank system to the thigh system, that is, the matrix $[M_R]$ satisfying:

$$[S_{thigh}] = [M_R][S_{shank}] \quad (3.1.11)$$

Premultiplying (3.1.11) by the inverse of $[S_{shank}]$ (which is also its transpose) we obtain:

$$[M_R] = [S_{shank}] [S_{thigh}]^T \quad (3.1.12)$$

If we identify a vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ with the pure quaternion $v_p = (0, v_1, v_2, v_3)$, we can use the fact that the vector $\tilde{v}$ obtained by applying the rotation operator $[M_R]$ to v equals the imaginary part of the pure quaternion $\tilde{v}_p$ given by the product:

$$\tilde{v}_p = q v_p q^* \quad (3.1.13)$$

For the quaternion defined by the following formulas, see, for example, Kuipers (1999):

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{([M_R]_{11} + [M_R]_{22} + [M_R]_{33}) + 1} \\
 q_1 &= \frac{([M_R]_{32} - [M_R]_{23})}{(4q_0)}, \text{ when } q_0 \neq 0 \\
 q_2 &= \frac{([M_R]_{13} - [M_R]_{31})}{(4q_0)}, \text{ when } q_0 \neq 0 \\
 q_3 &= \frac{([M_R]_{21} - [M_R]_{12})}{(4q_0)}, \text{ when } q_0 \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

The unit quaternion q carries the relevant information of the rotation operator in a condensed way. The scalar part q_0 is the cosine of half the angle of rotation θ . Thus if q_0 is 1, there is no rotation ($[M_R]$ is the identity matrix). Otherwise, $[M_R]$ performs a right-handed rotation of θ around the unit vector v :

$$q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)v), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$\text{or} \tag{3.1.15}$$

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

In our experiment, we want to study the evolution of qu with time. Instead of looking at its Cartesian coordinates, it is more meaningful to consider its spherical coordinates (in fact, just the angular part thereof, since the radius is always 1), expressed in degrees:

$$\begin{aligned}
 \text{longitude or azimuth} &= \tan^{-1} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) \frac{180}{\pi} \\
 \text{latitude or elevation} &= \tan^{-1} \left(\frac{q_3}{\sqrt{(q_1)^2 + (q_2)^2}} \right) \frac{180}{\pi}
 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Likewise, the angle of rotation will also be expressed in degrees:

$$\text{rotation} = \theta_{rot} = 2 \cos^{-1}(q_0) \frac{180}{\pi} \tag{3.1.17}$$

A schematic representation of the quaternion (q) expressed by its spherical coordinates is given in Figure 3.1.4.

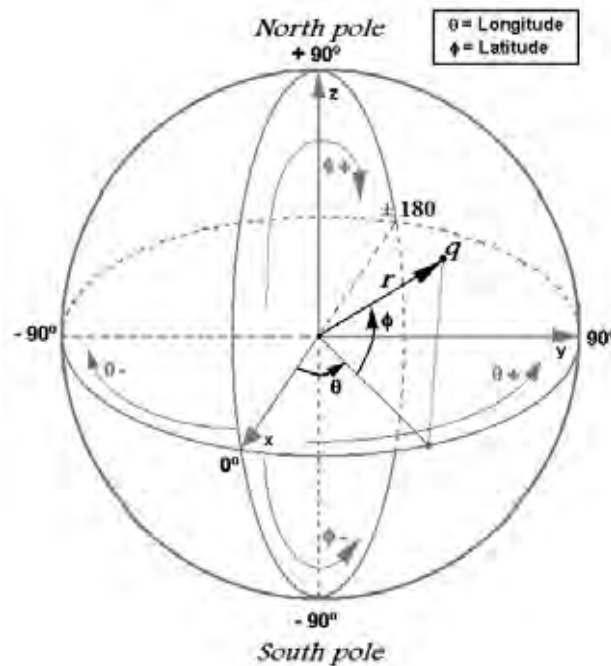


Fig. 3.1.4 Quaternion (q) expressed by spherical coordinates (longitude, latitude and radian).

For a better understanding of the rotation unit quaternion, a graphical simulation of the knee flexion-extension movement is presented in Figure 3.1.5.

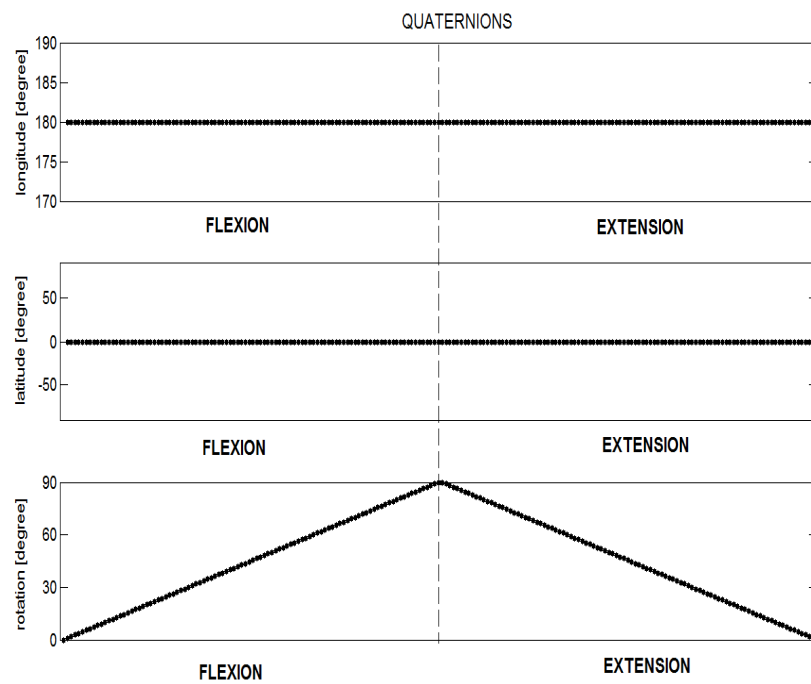
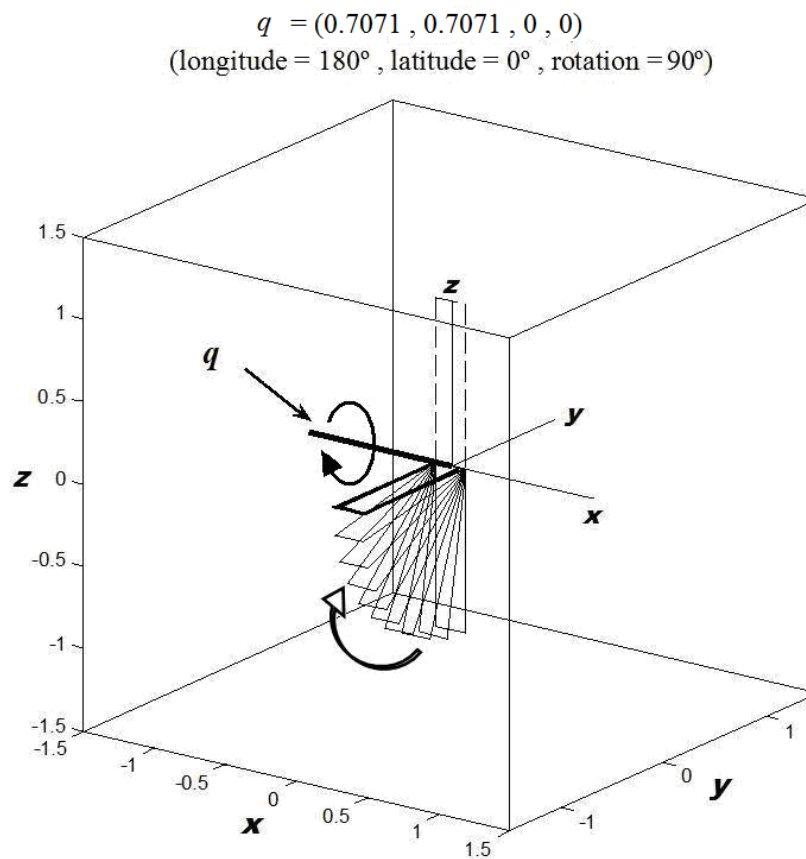


Fig. 3.1.5 Illustration of the knee movement during the flexion phase (upper) and longitude, latitude and rotation of quaternion during simulation of the knee flexion-extension during flexion/extension (bottom).

During the representation of longitude with unit quaternions we may encounter the problem of discontinuity when values vary between $\pm 180^\circ$ of longitude. Such limitation hinders the graphic representation and the interpretation of the quaternions. When such condition occurs, the Matlab (Mathworks Inc., Natick, MA, USA) function “smoothlong” can be used to solve the discontinuity (Figure 3.1.6).

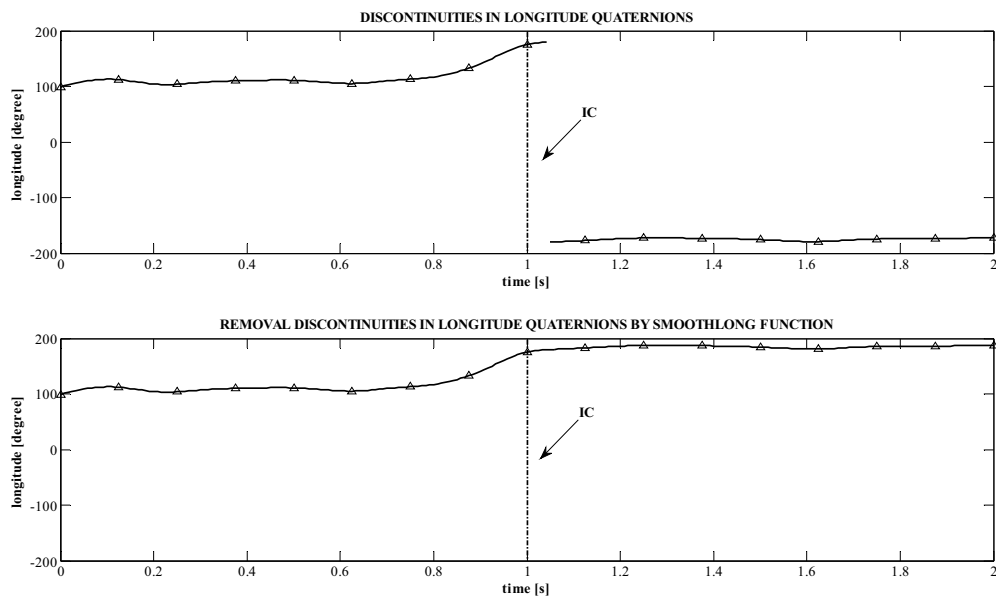


Fig. 3.1.6 Trial 3, volunteer C - Situation where longitude discontinuity occurred with the unit quaternion (top graph), and correction of the discontinuity with the function smoothlong (lower graph).

3.1.3 Results and discussion

The figures 3.1.7, 3.1.8 and 3.1.9 present the values of longitude, latitude and rotation of the unit quaternion for each of the five single-leg drop landings performed by each volunteer.

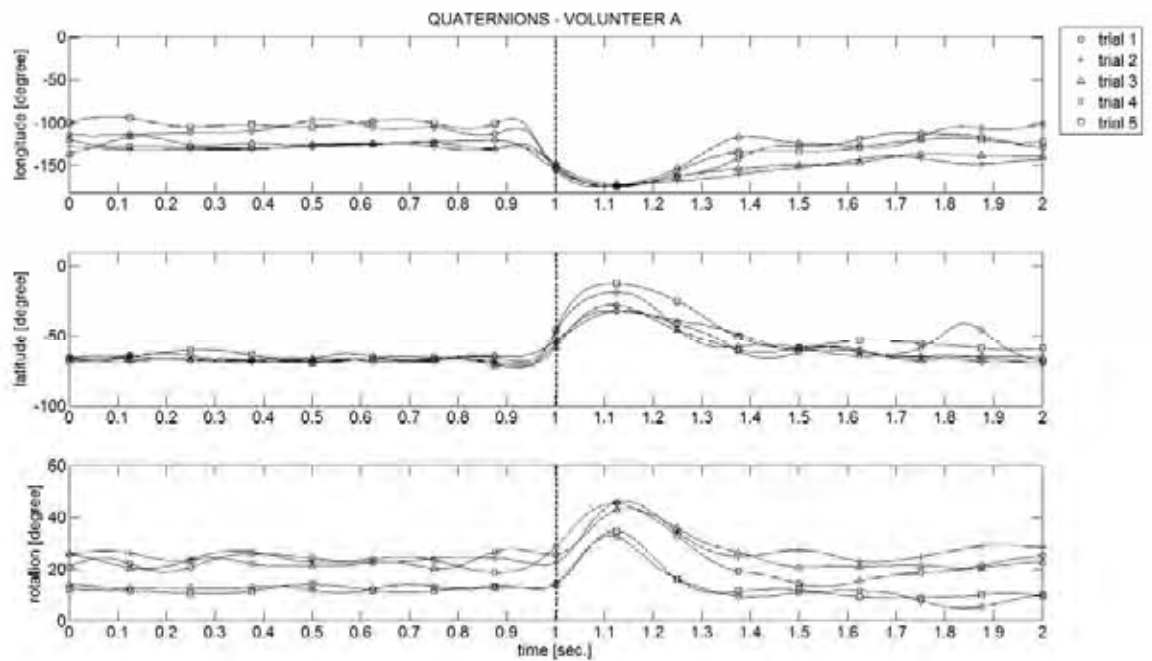


Fig. 3.1.7 Volunteer A - Longitude (top), latitude (middle), and rotation (lower) of the unit quaternion during single-leg drop landings.

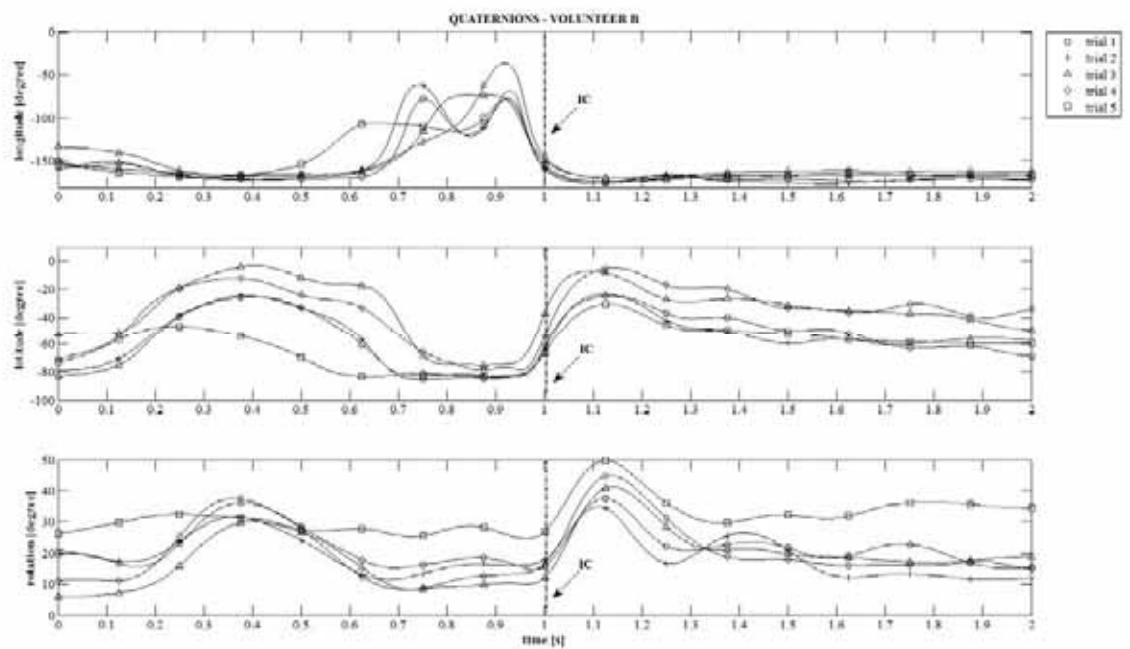


Fig. 3.1.8 Volunteer B - Longitude (top), latitude (middle), and rotation (lower) of the unit quaternion during single-leg drop landings.

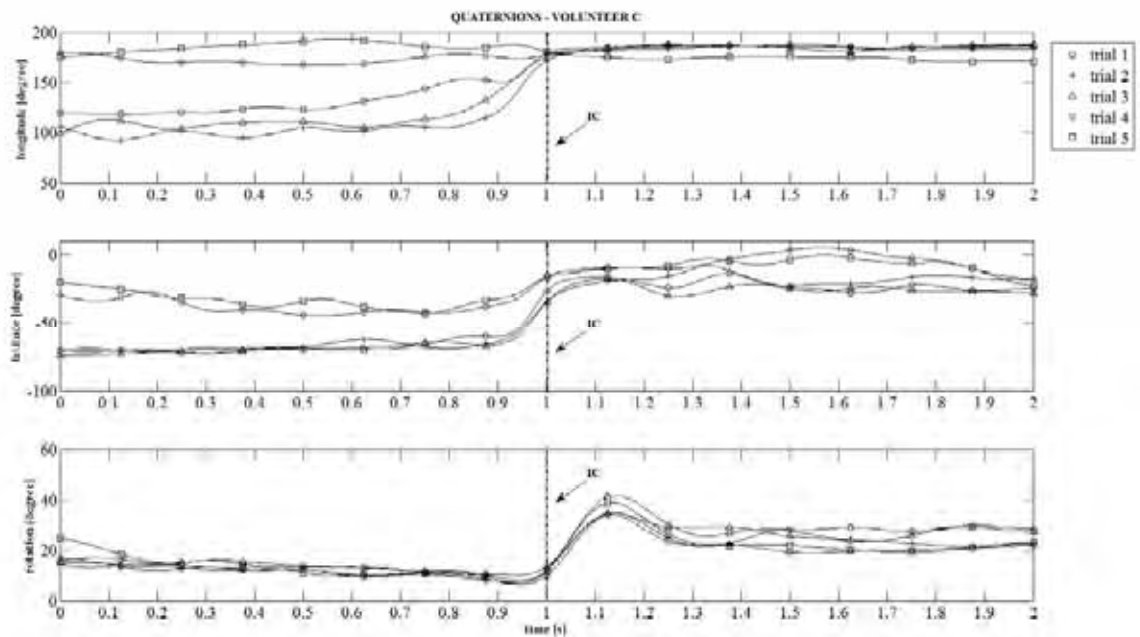


Fig. 3.1.9 Volunteer C - Longitude (top), latitude (middle), and rotation (lower) of the unit quaternion during single-leg drop landings.

It was observed for all volunteers that complete foot contact occurred approximately 0.05s after IC, where the calcaneal contact with the ground (after IC) was utilized to confirm such event. The importance of detecting this phase is attributed to the fact that the maximum amplitudes of knee rotation axes take place after complete foot contact.

As regards to volunteer A it was verified that the knee joint axis (qu) did not present great variations until approximately 0.05s before IC (0.95s of entire cycle). The initial changes were observed between this point in time and IC, in which occurred only in the direction of the rotation axes expressed by the values of longitude and latitude. These alterations may be derived from pre-activation of major muscle groups involved in the performance of the studied task, which are responsible for joint protection mechanisms (active restraints).

Greater apparent rotations of the knee joint axes were verified after IC, which then achieved its greatest variations after complete foot contact that occurred approximately 0.12s after IC (or 1.12s of entire cycle). This is an interesting result because it allowed us to infer that the organism utilized the strategy of modifying the position of knee joint rotation axis only on an instant prior to IC. This is performed so the organism may achieve a favorable knee position in order to maintain full body balance during the supported lower limb weight distribution (Figure 3.1.7).

Regarding volunteer B, greater variations of longitude, latitude and rotation were observed until approximately 0.95s. However, prior to IC a similar behavior described for volunteer A was detected (Figure 3.1.8).

The function `smoothlong` was utilized to remove longitude value discontinuity for the results obtained from volunteer C. The longitude values of this volunteer were not equivalent to the values of volunteers A and B because prior to IC three trials presented longitude values between 100° and 120° , and two trials presented values between 180° and 190° . After IC the longitude values maintained unaltered until the completion of the task. Once again it is important to mention that the longitude values were above 180° due to the correction executed with the function `smoothlong`. As regards to the latitude values, it was verified the same curve separation observed for the longitude values. After IC the curve pattern is similar to the other volunteers (Figure 3.1.9), displaying that the rotation around this axis was analogous for all volunteers.

The results obtained demonstrated that all three volunteers utilized similar strategies during the performance of the studied task. Such strategy consisted in adjusting the rotation axis to a more balance-favored arrangement for the landing task. Only after this adjustment the rotation would occur around the joint.

Indeed the difficulty achieved during the utilization of the quaternions to describe the joint rotation was the tendency of primarily considering the decomposition of the rotation that occurred in the joint into three axes. Only then the clinical nomenclature could be associated to the anatomic reference planes. Nonetheless, the authors of the present studies have not found any other biomechanical study utilizing the quaternions approach to describe a three-dimensional human joint movement. The lack of such studies prevents the comparison of our results and the subsequent mathematical approach to other researches.

3.1.4 Conclusion

The representation of rotation movements observed in human joints by means of the unit quaternions is an interesting alternative because it is possible to represent the joint rotation axis with fairly simple mathematical calculations when compared to other forms of representation. This is a relevant topic once movements

are product of internal and external forces that result in rotations through axes, which naturally occurs repeatedly in human joints. Therefore, it is suggested that other forms of rotation representation be also transformed to quaternions to allow comparison among studies, once the transformations are simple and provide a more adequate representation system to operate rotations without constraints.

3.2 APLICAÇÃO 2

Descrição do Movimento de Rotação do Tornozelo Durante o Chute no Futebol Via Quatérnions e Ângulos de Euler

3.2.1 Introdução

O chute é um dos principais fundamentos técnicos do futebol e, portanto, é objeto de estudo de diversas áreas de pesquisa, dentre as quais; a biomecânica. O chute no futebol caracteriza-se como o ato de tocar a bola com um dos pés, tendo como meta final impulsioná-la em uma determinada direção e velocidade desejada. Para a sua realização são executados uma série de movimentos corporais que envolvem principalmente rotações nas articulações. Além dos movimentos do membro inferior, que toca a bola, existem outras partes do corpo que podem modificar a realização do chute, como o posicionamento dos membros de apoio, a posição dos braços em relação ao corpo, o movimento do tronco, entre outros.

Na literatura são encontrados estudos que enfatizam a importância dos movimentos ocorridos no tornozelo do membro de apoio para que se obtenha um bom desempenho no chute (LIMA JÚNIOR, 2007; LARA JÚNIOR, 2003).

Entretanto, a escolha de um modelo para representar o movimento de rotação da articulação do tornozelo, em situações estáticas e dinâmicas, em especial durante uma ação esportiva, não é trivial.

Existem trabalhos que representam os possíveis movimentos do tornozelo em três eixos de movimentos, mas ainda existem outros trabalhos que representam estes movimentos através de um único eixo.

Deste modo, o objetivo desta aplicação foi utilizar os ângulos de Euler para descrever os movimentos de rotação do tornozelo, forma decomposta em três eixos, e os quatérnions para representar os movimentos do tornozelo por um único eixo.

3.2.2 Participante

Para realizar esta aplicação foi convidado a participar do estudo um integrante da equipe adulta de futebol de campo da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus Rio Claro, que treinava regularmente duas vezes por semana há mais de um ano e participava de competições estaduais. Este participante foi informado, previamente, sobre o protocolo experimental, atestando sua participação por meio de um termo de consentimento livre e esclarecido. Todo protocolo experimental foi encaminhado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual Paulista – Campus Rio Claro (Ofício CEP 019/2006, protocolo 8451).

3.2.3 Tarefa e coleta de dados

A coleta foi realizada no campo de futebol da Universidade Estadual Paulista – Campus Rio Claro. Durante a coleta de dados o participante utilizou vestimentas especialmente confeccionadas para a coleta e chuteiras pretas. Através da técnica de anatomia palpatória (FIELD, 2001), foram fixados marcadores passivos, esferas brancas de isopor de 15 mm de diâmetro sobre as seguintes proeminências ósseas da perna e pé do membro de suporte: calcâneo porção lateral (*P1*); maléolo lateral (*P2*); quinta articulação metatarsofalangiana (*P3*); cabeça da fibula (*P4*); maléolo medial (*P5*), calcâneo (porção medial) (*P6*) (Figura 3.2.1).



Figura (3.2.1) A – Visão posterior dos pontos localizados no pé: 1 - calcâneo porção lateral (*P1*), 3 - quinta articulação metatarsofalangiana (*P3*) e 6 - calcâneo porção medial (*P6*). B – Visão frontal dos marcadores localizados na perna: 2 - maléolo lateral (*P2*), 4 - cabeça da fibula (*P4*) e 5 - maléolo medial (*P5*).

Esta aplicação foi realizada em duas etapas. A primeira consistiu em uma tomada estática do participante que foi utilizada para definir a posição anatômica (ou posição neutra) da articulação do tornozelo. Para este fim, o participante permaneceu em pé na posição ereta, com os pés paralelos e ligeiramente afastados (Figura 3.2.1). A segunda consistiu na tomada dinâmica, momento em que o participante realizou quatro cobranças de pênalti.

As etapas anteriormente descritas foram registradas por quatro câmeras de vídeo digitais, ajustadas com frequência de 120 Hz, *shutter* de 1/250, *white balance* e foco definidos de forma manual.

O software Dvideow (BARROS *et al.* 1999; FIGUEROA *et al.* 2006) foi utilizado para obterem-se as variáveis tridimensionais de cada marcador. Para a calibração utilizou-se um objeto com dimensões conhecidas, possuindo dezesseis marcadores com suas posições espaciais absolutas previamente mensuradas. O sistema de referência utilizado foi orientado com o eixo z na direção vertical (orientado para cima), o eixo y em direção ao gol ortogonal a linha de fundo do campo e o eixo x como o produto vetorial de y por z (Figura 3.2.2).

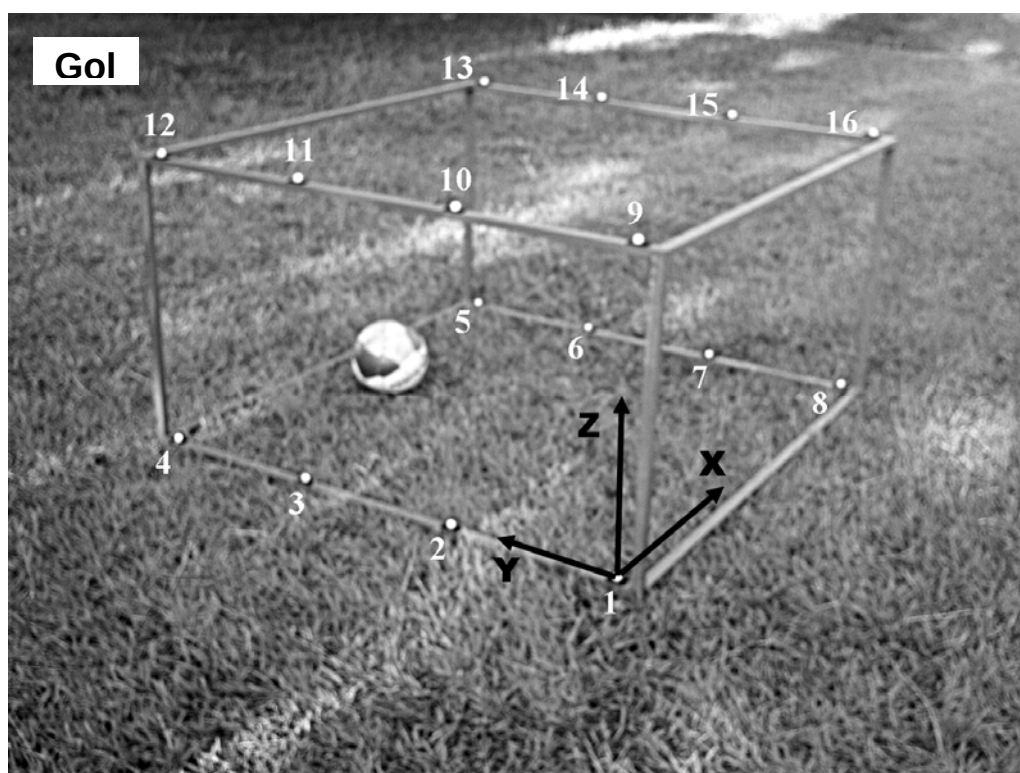


Figura 3.2.2 Objeto calibrador com 16 marcadores e o sistema de referência adotado a partir do marcador número 1.

Como padronização o intervalo de tempo para as análises foram os mesmos para os quatro chutes. Nesse caso foi identificado, nas seqüências de imagens de cada chute, um evento em comum; o quadro correspondente ao contato do pé de chute com a bola (Figura 3.2.3 - B). Então, foram selecionados 12 quadros (correspondente a 0,1 segundos) que antecediam (Figura 3.2.3 - A) e sucediam (Figura 3.2.3 - C) a este evento.

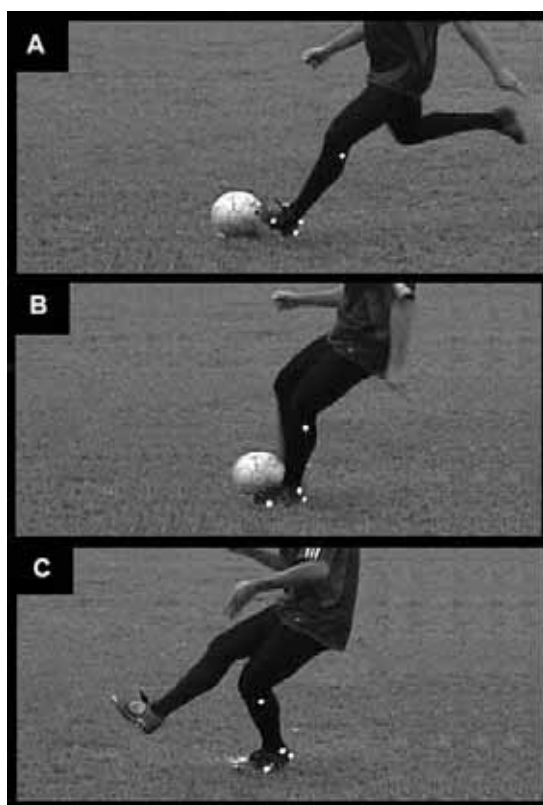


Figura 3.2.3 Imagens do intervalo de tempo do movimento analisado. Início no décimo segundo quadro que antecedeu o contato com a bola (A), o contato do pé de chute com a bola como instante em comum (B) e o final do movimento sendo o décimo segundo quadro após o contato do pé de chute com a bola (C).

3.2.4 A articulação do tornozelo

A articulação do tornozelo ou túbio-tarsiana é considerada uma tróclea (articulação que apresenta apenas um grau de liberdade para os movimentos de rotação), pois realiza apenas os movimentos de flexão plantar e dorsiflexão. Os movimentos de abdução/adução e eversão/inversão ocorrem no conjunto das articulações subtalares.

Medir todos esses movimentos e atribuí-los a cada articulação em uma situação dinâmica é extremamente complexo. Assim, no presente estudo, considerou-se a perna e o pé como corpos rígidos e interligados através de uma única articulação (articulação do tornozelo), capaz de realizar todos os movimentos citados no parágrafo anterior.

3.2.5 Definição dos sistemas de coordenadas locais da perna e pé

Inicialmente o sistema de coordenadas global (S_G) foi definido através das coordenadas dos marcadores do objeto calibrador. Na sequência foram realizados os procedimentos para determinação da matriz de rotação (M) que por sua vez foi utilizada para calcular os quatérnions e os ângulos de Euler.

Através das coordenadas tridimensionais dos marcadores contidos em cada segmento, foram definidos os sistemas de coordenadas locais da perna (S_{perna} - na ilustração da Figura 3.2.4) e pé ($S_{pé}$ - na ilustração da Figura 3.2.5) para cada instante de tempo:

Sistema de coordenadas local da perna S_{perna} :

$$k_{perna} = \frac{p4 - p2}{\|p4 - p2\|} \quad (3.2.1)$$

$$aux_{perna} = \frac{p5 - p2}{\|p5 - p2\|} \quad (3.2.2)$$

$$j_{perna} = \|aux_{perna} \times k_{perna}\| \quad (3.2.3)$$

$$i_{perna} = j_{perna} \times k_{perna} \quad (3.2.4)$$

Então, o sistema de coordenadas da perna foi representado por:

$$S_{perna} = \{P_2, (i_{perna}, j_{perna}, k_{perna})\} \quad (3.2.5)$$

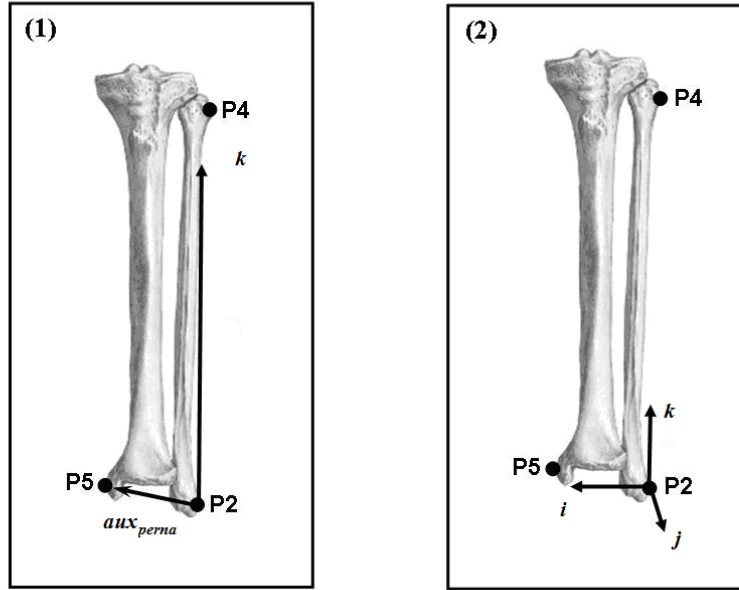


Figura 3.2.4 Ilustração da construção do sistema de coordenadas da perna (vista frontal dos ossos tíbia e fibula da perna esquerda). (1) Vetores k e auxiliar da perna (aux_{perla}). (2) Vetores i, j e k .

Sistema de coordenadas do pé $S_{pé}$:

$$k_{pé} = \frac{p1 - p3}{\|p1 - p3\|} \quad (3.2.6)$$

$$aux_{pé} = \frac{p6 - p1}{\|p6 - p1\|} \quad (3.2.7)$$

$$j_{pé} = \|k_{pé} \times aux_{pé}\| \quad (3.2.8)$$

$$i_{pé} = j_{pé} \times k_{pé} \quad (3.2.9)$$

Então, o sistema de coordenadas do pé foi representado por:

$$S_{pé} = \{P_1, (i_{pé}, j_{pé}, k_{pé})\} \quad (3.2.10)$$

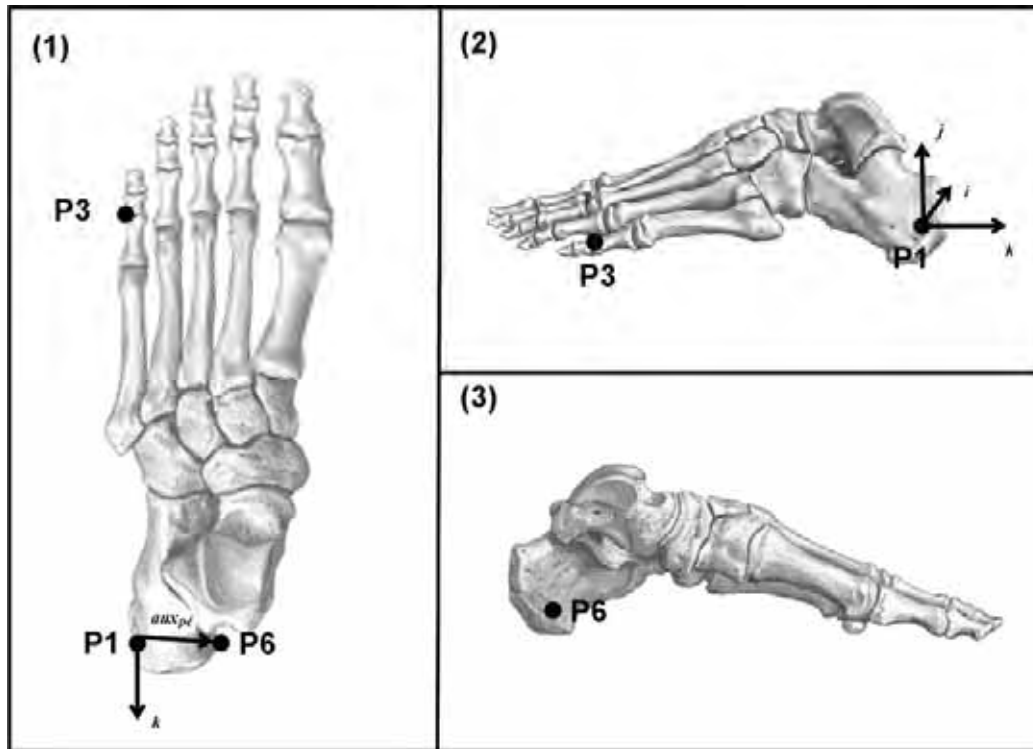


Figura 3.2.5 Ilustração da construção do sistema de coordenadas do pé. (1) Vista superior do pé com a representação do vetor auxiliar ($aux_{pé}$) e do vetor k . (2) Vista lateral dos vetores i, j e k do pé com origem em $P1$. (3) Vista medial do posicionamento do ponto $P6$.

3.2.6 Matriz de rotação

Convenientes composições de translação permitem transportar as informações contidas em cada sistema de coordenadas para o sistema de coordenadas global S_G (para detalhes rever capítulo 2). Assim, a matriz de rotação M foi obtida através dos procedimentos apresentados a seguir:

$$M = S_{pé} S_{perna}^T \quad (3.2.11)$$

3.2.7 Ângulos de Euler e quatérnions

Os ângulos de Euler e os quatérnions para representação dos movimentos de rotação do tornozelo se deram através da matriz M com a utilização dos procedimentos descritos no Capítulo 2. Os mesmos procedimentos também foram utilizados para a obtenção dos ângulos de Euler

e quatérnions referentes à posição anatômica (ou neutra) da articulação do tornozelo.

3.2.8 Representação dos movimentos de rotação do tornozelo via ângulos de Euler

Para os ângulos de Euler foi escolhida a sequência xyz . O intuito foi que as rotações sucessivas ocorridas em torno dos eixos i , j' , k'' representasse a Nomenclatura Clínica dos Movimentos Articulares (NCMA) do tornozelo. Neste caso a posição de referência denominada de posição neutra foi obtida através dos ângulos da tomada estática:

- Rotações em torno do eixo i descrevem os movimentos de **dorsiflexão**, representados por ângulos maiores que da posição neutra e **flexão plantar**, por ângulos menores que o da posição neutra (Figura 3.2.6);

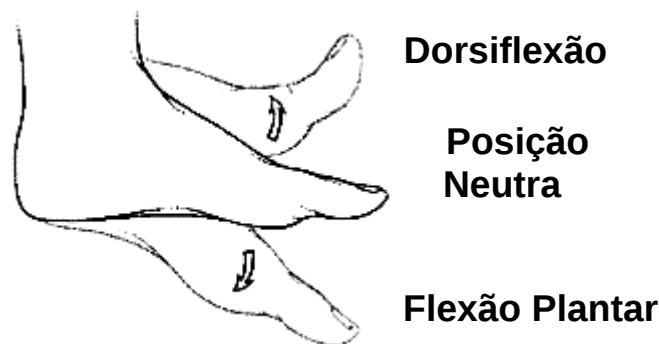


Figura 3.2.6 Movimentos de flexão plantar e dorsiflexão do tornozelo.

- Rotações em torno do eixo j' descrevem os movimentos de **eversão**, representados por ângulos maiores que da posição neutra e **inversão**, por ângulos abaixo menores que o da posição neutra. (Figura 3.2.7).



Figura 3.2.7 Movimentos de eversão e inversão do tornozelo.

- Rotações em torno do eixo k'' descrevem os movimentos de **abdução**, representados por ângulos maiores que da posição neutra e **adução**, por ângulos abaixo menores que o da posição neutra (Figura 3.2.8);



Figura 3.2.8 Movimentos de abdução e adução do tornozelo.

3.2.9 Representação dos movimentos de rotação do tornozelo via quatérnions

Alguns autores não representam os possíveis movimentos da articulação do tornozelo de forma decomposta em três eixos, mas sim, em torno de um único eixo, denominado de oblíquo.

A estimativa deste eixo em uma situação estática foi descrita por Mann (1986). O eixo corresponde a uma linha imaginária que liga a borda inferior dos maléolos lateral e medial. E pode ser encontrado posicionando os

dedos indicadores do examinador na borda inferior dos maléolos de uma pessoa (Figura 3.2.9).

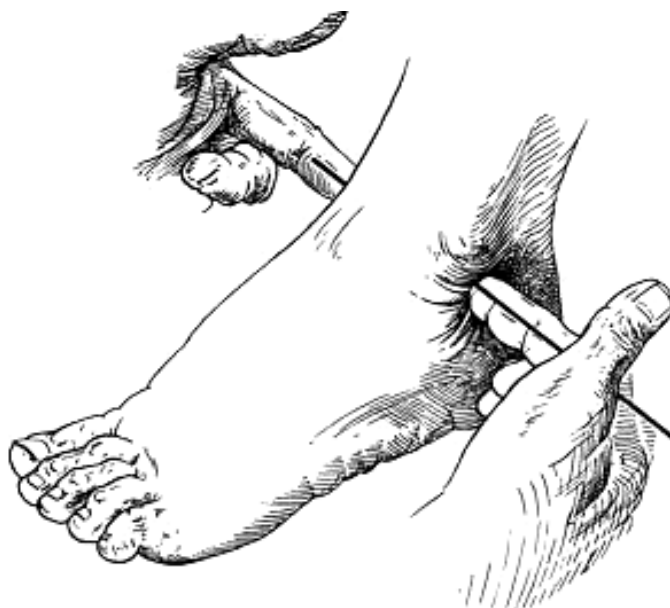


Figura 3.2.9 Estimativa do eixo oblíquo do tornozelo por palpção das bordas inferiores dos maléolos (MANN, 1986, apud VALMASSY, 1996, p. 5).

Em geral este eixo é inclinado aproximadamente 8° em relação ao plano transversal (ou 82° em relação ao plano sagital) e de 20° a 30° em relação ao plano frontal (Figura 3.2.10).

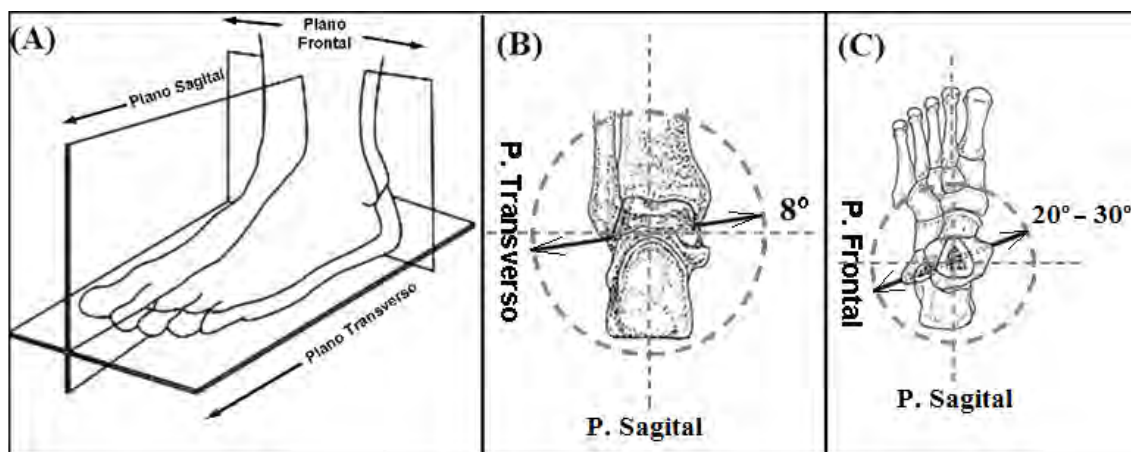


Figura 3.2.10 (A) Planos anatômicos da articulação do tornozelo; vista posterior (B) e vista superior (C) da localização do eixo de movimento da articulação do tornozelo. ((B) e (C) Adaptado de MICHAUD, 1993, apud VALMASSY, 1996, p. 4).

Nota-se que existe uma relação direta entre o eixo de rotação do tornozelo com a posição dos maléolos. Assim, ao imaginar uma situação dinâmica, em que o segmento proximal (perna) estivesse fixo e o segmento

distal (pé) estivesse livre e inicialmente na posição neutra (Figura 3.2.11 – centro), os movimentos de rotação ocorridos em torno deste eixo têm os seguintes efeitos: flexão plantar, inversão e adução do tornozelo, quando a parte distal do pé é voltada para baixo (Figura 3.2.11 - esquerda); e dorsiflexão, eversão e abdução, quando a parte distal do pé é voltada para cima (Figura 3.2.11 – direita).

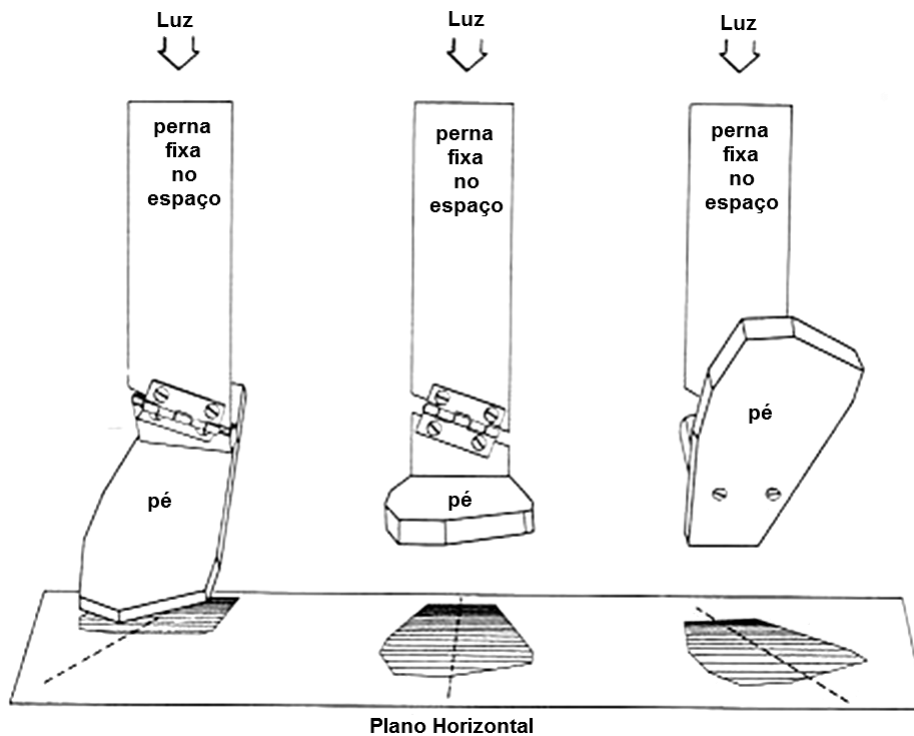


Figura 3.2.11 Representação do eixo oblíquo de rotação do tornozelo durante a flexão plantar (esquerda) e dorsiflexão (direita), com o pé livre. (Adaptado de MANN, 1986, apud VALMASSY, 1996, p. 7).

Esta representação é um modelo simplificado do eixo de rotação do tornozelo, pois, segundo os estudos de Barnett e Napier (1952) e Hicks (1954), a partir da posição neutra (Figura 3.2.12 (B)) ocorrem mudanças na direção do eixo do tornozelo durante a dorsiflexão e flexão plantar. Na dorsiflexão o eixo é inclinado lateralmente para baixo (Figura 3.2.12 (A)), enquanto que na flexão plantar o eixo é inclinado medialmente para baixo (Figura 3.2.12 (C)).

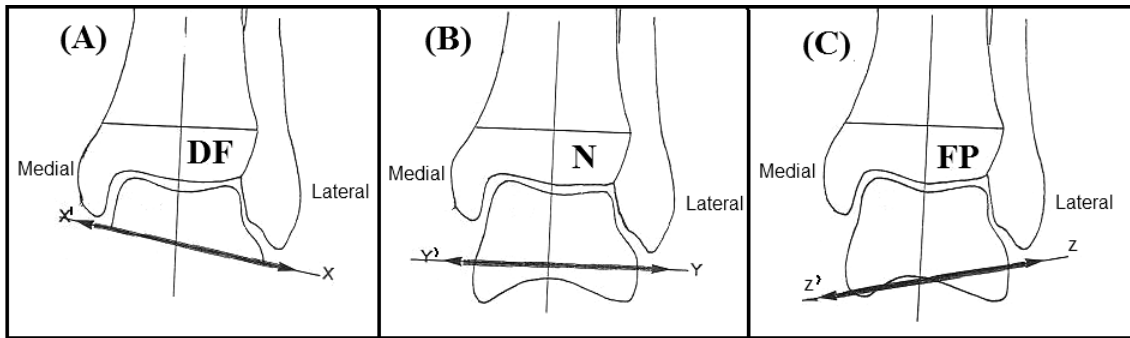


Figura 3.2.12 Vista frontal - Variação do ângulo da articulação do tornozelo. (A) em dorsiflexão (DF), o eixo XX' é inclinado para baixo lateralmente. (B) eixo YY' na posição neutra. (C) em flexão plantar (PF), o eixo ZZ' é inclinado para baixo medialmente (adaptado de BARNETT e NAPIER, 1952, apud VALMASSY, 1996, p.6).

Então, espera-se que os quatérnions representem o eixo oblíquo de rotação do tornozelo, tanto na situação estática quanto na dinâmica.

3.2.10 Resultados e discussões

3.2.10.1 Tomada estática e ângulos de Euler

Foram encontrados valores de referência para os ângulos de Euler de 92° de rotação no eixo i , -18° no eixo j' e -18° no eixo k'' .

Deve-se ressaltar que o valor de 92° de rotação no eixo i deve-se ao fato de que o eixo k , para perna e pé, foi definido no sentido longitudinal, pois o pé na posição neutra já estava rodado em torno do eixo i aproximadamente 90° .

O sinal negativo para os valores de rotação em torno dos eixos j' e k'' que representam eversão/inversão, abdução/adução respectivamente, devem-se ao fato do sistema da perna se encontrar rodado inicialmente em relação ao sistema do pé.

3.2.10.2 Tomada estática e quatérnions

O quaternion unitário (qu) obtido na tomada estática foi de -15° de longitude, 0° de latitude e de 92° de rotação. A longitude e latitude não

assemelham-se ao eixo oblíquo descrito na literatura por Michad (1993) (longitude entre 20° e 30° e latitude de aproximadamente 8°) (Figura 3.2.13).

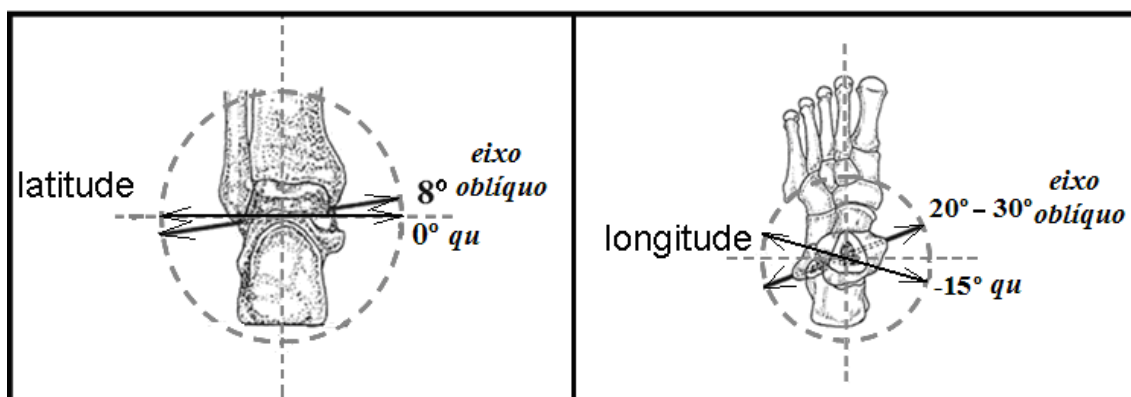


Figura 3.2.13 Localização do eixo oblíquo de movimento e localização do quatérnion unitário (*qu*) para a tomada estática (adaptado de MICHAUD, 1993, apud VALMASSY, 1996, p. 4).

Contudo, a latitude corrobora com o eixo apresentado por Barnett e Napier (1952) (Figura 3.2.12 (B)).

Uma possível explicação para este achado é que o quatérnion unitário representa um eixo e uma rotação em torno deste. Este eixo tem como ação levar o sistema da perna (fixo) sobre o sistema do pé (móvel). Neste caso, tanto o sistema da perna quanto o sistema do pé já encontravam-se inicialmente rodados: o sistema da perna devido a diferença de alinhamento existente entre os maléolos lateral e medial; e o sistema do pé por estar rodado aproximadamente 90° em torno do eixo *i*.

Portanto, o eixo obtido por meio dos quatérnions não tem o mesmo significado do eixo reportado na literatura, uma vez que o primeiro representa um eixo instantâneo de rotação e o segundo é apenas um modelo simplificado para representar o eixo de rotação do tornozelo.

3.2.10.3 Tomada dinâmica e ângulos de Euler

A Figura 3.2.14 foi utilizada para descrever os movimentos de dorsiflexão/flexão plantar, eversão/inversão e abdução/adução. Através de sua análise foi possível realizar as seguintes observações:

Rotação em torno do eixo i : dorsiflexão/flexão plantar.

Durante todo o movimento a articulação do tornozelo permaneceu em dorsiflexão, representada por rotações em torno do eixo i acima do valor de referência anatômico.

No início do movimento o tornozelo apresentou ligeira dorsiflexão, com valores entre 90° e 100°. Após o contato do pé de apoio com o solo (0,02s), verifica-se um aumento na dorsiflexão que é fruto da progressão do corpo em direção ao chute. O fato do pé permanecer praticamente imóvel, pois está fixado pelas travas da chuteira no solo, caracteriza tal situação que tecnicamente pode ser entendida como uma aproximação da parte proximal da perna à distal do pé.

Rotação em torno do eixo j' : eversão/inversão

Os chutes 1 e 2 iniciaram em inversão, próximo do contato do pé de apoio com o solo passaram para eversão e terminaram em eversão e inversão, respectivamente. O chute 3 iniciou próximo à posição neutra e permaneceu assim durante quase todo o movimento, porém nos instantes finais passou à inversão. O chute 4, ao contrário dos demais, iniciou em eversão, teve um ligeiro aumento na eversão, terminando próximo ao seu valor de eversão inicial.

Rotação em torno do eixo k'' : abdução e adução

Em todos os chutes, no início do movimento existiu uma maior abdução do tornozelo, finalizando com uma ligeira redução nestes valores.

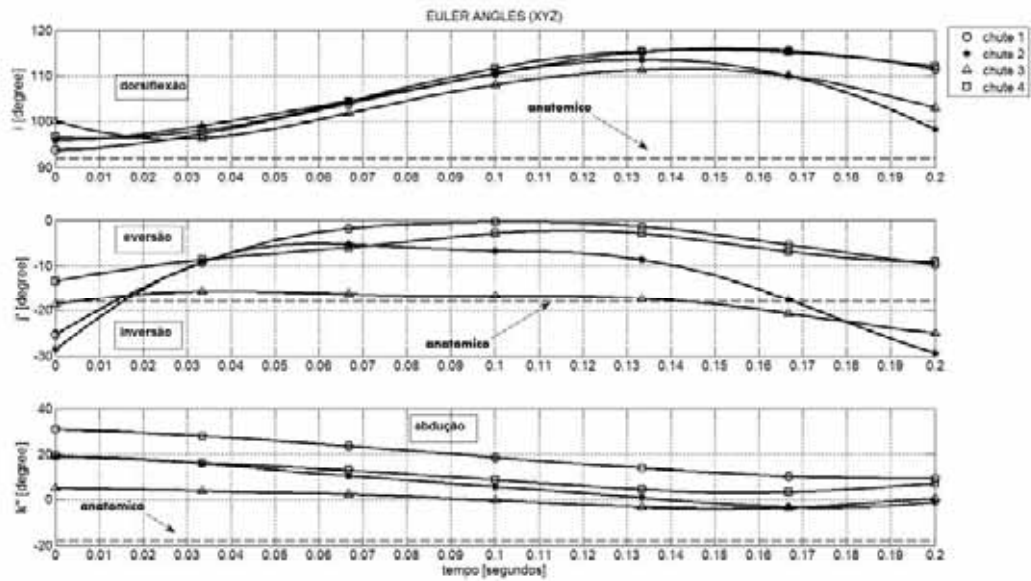


Figura 3.2.14 Ângulos de Euler que representam os movimentos de dorsiflexão/flexão plantar, eversão/inversão e abdução/adução em torno dos eixos i , j' e k'' .

3.2.10.4 Tomada dinâmica e quatérnions

A Figura 3.2.15 apresenta os valores de longitude, latitude e rotação dos quatérnions que descreve o eixo instantâneo de rotação do tornozelo durante os chutes:

Longitude:

Em todos os chutes as longitudes dos quatérnions permaneceram acima do valor da posição neutra (-15°).

Os chutes 1 e 4 apresentaram valores positivos praticamente durante todo o movimento. Estes iniciaram e terminaram o movimento com valores de aproximadamente 4° , porém durante a realização do movimento é possível considerar que chute 1 apresentou um ligeiro aumento e já o chute 4 permaneceu constante. Já os chutes 2 e 3 iniciaram o movimento com valores negativos de aproximadamente -4° e terminaram com valores abaixo, aproximadamente -10° (chute 3) e -13° (chute 2) sendo estes valores mais próximos do obtido na posição neutra.

Latitude:

Em todos os chutes as latitudes dos quatérnions permaneceram acima do valor da posição neutra (0°). Estes iniciaram com valores entre 10° e 25° , apresentaram um ligeiro declínio durante a realização do movimento e terminaram com um pequeno aumento, apresentando valores entre 7° e 15° .

Rotação:

Em todos os chutes as rotações dos quatérnions permaneceram acima do valor da posição neutra (92°). Estes iniciaram com valores entre 100° e 106° , apresentaram um pequeno declínio no começo do movimento até instantes após o momento do contato do pé de apoio com o solo ($0,03s$), após este instante começam a aumentar até aproximadamente $0,14s$, instante esse, em que ocorreu a diferenciação dos chutes 1 e 4 dos chutes 2 e 3 e os chutes 1 e 4 permanecem praticamente com valores constantes enquanto os chutes 2 e 3 diminuem para valores próximos aos verificados no início do movimento.

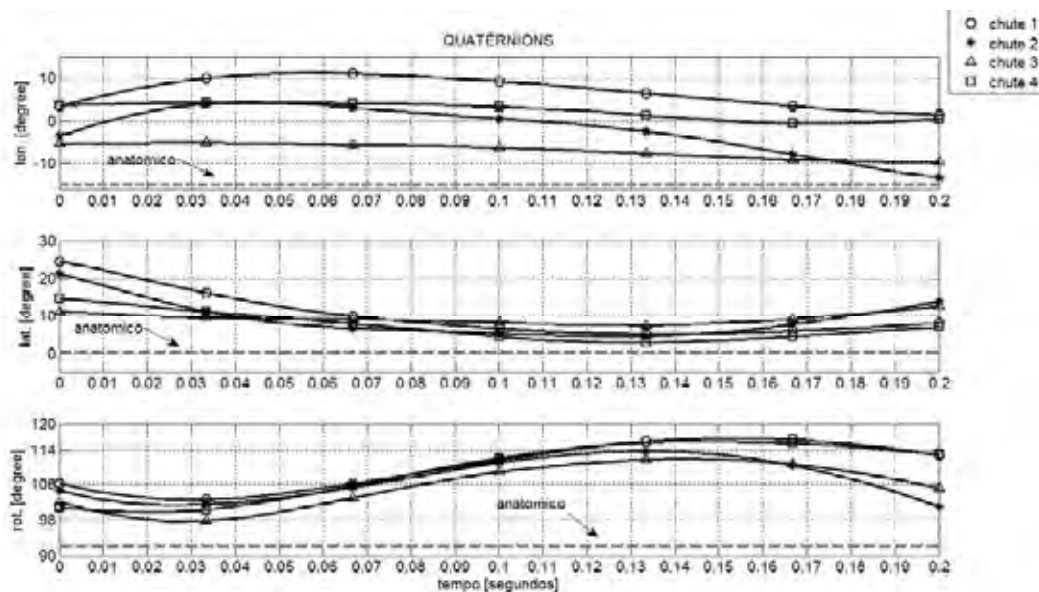


Figura 3.2.15 Valores de longitude, latitude e rotação dos quatérnions durante a realização dos quatro chutes.

Em resumo verificou-se que mesmo na situação dinâmica a longitude e latitude do quatérnion não assemelham-se ao eixo de rotação reportado na literatura. Da mesma forma, verificou-se que a longitude, latitude e rotação em nenhum momento apresentaram valores semelhantes aos obtidos

na situação estática. O mesmo pode ser dito para os ângulos de Euler que representam a dorsiflexão e abdução/adução. Já para a eversão/inversão dos chutes 1 e 2, verificou-se que a grande variação angular ocorrida no início e fim do movimento resultou na passagem de inversão para eversão e eversão para inversão, respectivamente.

Da mesma forma, na tomada dinâmica o eixo obtido por meio dos quatérnions não tem o mesmo significado do eixo reportado na literatura. Porém, observou-se que tanto os ângulos de Euler quanto os quatérnions possibilitaram identificar, por semelhança, dois pares de chutes (ou dois padrões): o chute 1 assemelha-se com 4 e chute 2 assemelha-se com 3.

Porém, o detalhe que mais chamou a atenção nesta aplicação foi a semelhança no formato (ou desenho) das curvas dos componentes do quatérnion unitário com as curvas dos ângulos de Euler.

Nota-se que as curvas da parte escalar dos quatérnions são as que mais se parecem às curvas que descrevem o grau de rotação no eixo i para os ângulos de Euler (movimentos de dorsiflexão/flexão plantar) (Figura 3.2.16).

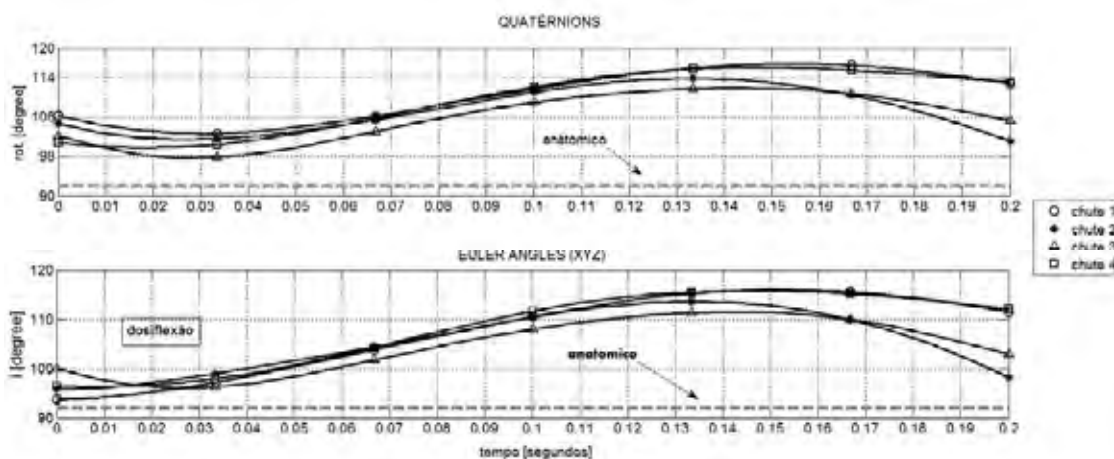


Figura 3.2.16 Semelhanças entre as curvas do componente escalar dos quatérnions e o eixo i dos ângulos de Euler.

Nota-se que as curvas da latitude também são semelhantes às curvas do eixo k'' para os ângulos de Euler (movimentos de abdução/adução) (Figura 3.2.17).

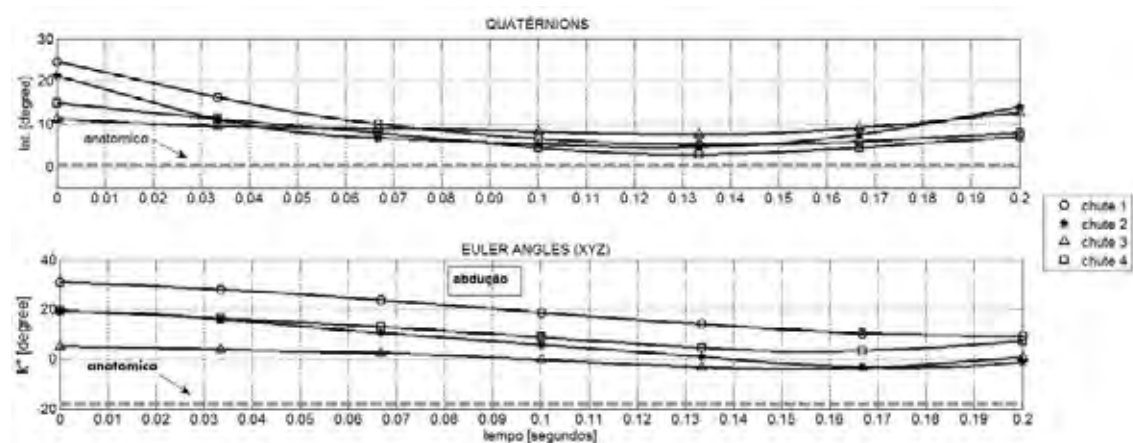


Figura 3.2.17 Semelhanças entre as curvas da latitude dos quatérnions e o eixo k'' dos ângulos de Euler.

E por fim, as curvas da longitude são semelhantes às curvas do eixo j' para os ângulos de Euler (movimentos de eversão/inversão) (Figura 3.2.18).

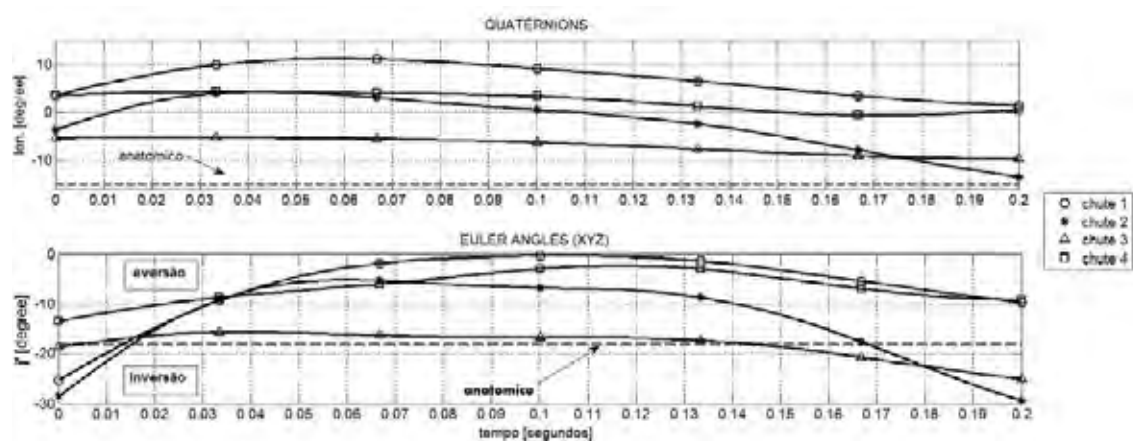


Figura 3.2.18 Semelhanças entre as curvas da longitude dos quatérnions e o eixo j' dos ângulos de Euler.

A considerada semelhança entre as curvas dos ângulos de Euler e quatérnions instigou, ainda mais, a possibilidade de associação destes às NCMA. Contudo, estas possibilidades não foram aqui discorridas, pois as mesmas emergiram como um novo objeto de estudo, que se julgou ser mais conveniente abordar na próxima aplicação.

3.3 APLICAÇÃO 3

Simulações de movimentos para a associação dos quatérnions à nomenclatura clínica dos movimentos articulares

Como evidenciado nas aplicações anteriores a maior dificuldade encontrada na utilização dos quatérnions, para a descrição de movimentos humanos, refere-se a sua interpretação, uma vez que eles não possuem associação à Nomenclatura Clínica dos Movimentos Articulares (NCMA).

Assim, em paralelo a esta aplicação tentou-se criar uma técnica que permitisse associar os quatérnions à NCMA. Para tanto, foram construídas duas estruturas virtuais que representaram os segmentos corporais coxa e perna (Figura 3.3.1).

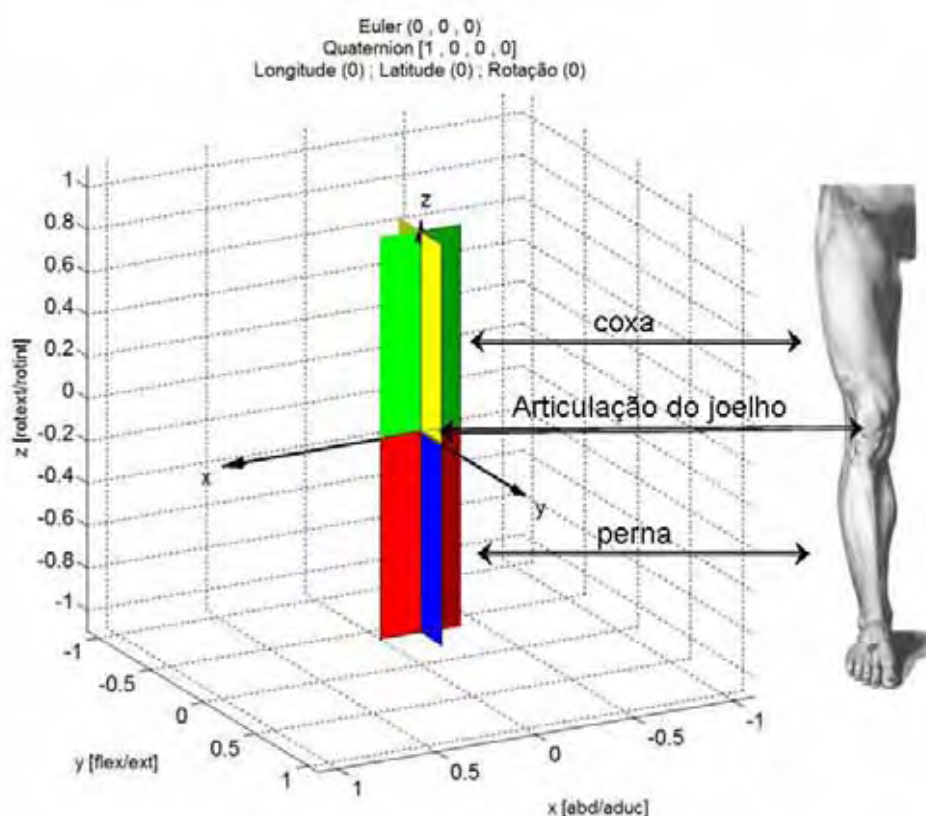


Figura 3.3.1 Estruturas virtuais criadas para representar os segmentos corporais coxa (amarelo e verde) e perna (azul e vermelho) e a articulação do joelho na junção das duas estruturas.

Nesta tentativa, optou-se em normalizar (norma euclidiana 1) e projetar (projeção estereográfica) a parte escalar dos quatérnions unitários que eram obtidos através dos movimentos simulados.

A projeção estereográfica consistiu em centrar uma esfera unitária (esfera de raio 1) no centro de rotação das duas estruturas virtuais criadas (representada pela articulação do joelho na simulação). Durante um movimento de rotação os quatérnions percorrem a superfície da esfera; movimento semelhante ao de um lápis riscando a casca de uma esfera. Então, foi criado um segmento de reta da ponta do vetor x (ponto com coordenadas cartesianas $(1, 0, 0)$), que passa pela extremidade do vetor unitário, representado pelo quatérnion, perfura a casca da esfera e atinge um plano tangente (plano yz transladado para o ponto $(-1, 0, 0)$) ao ponto oposto ao vetor x (ponto com coordenadas $(-1, 0, 0)$) da esfera (Figura 3.3.2).

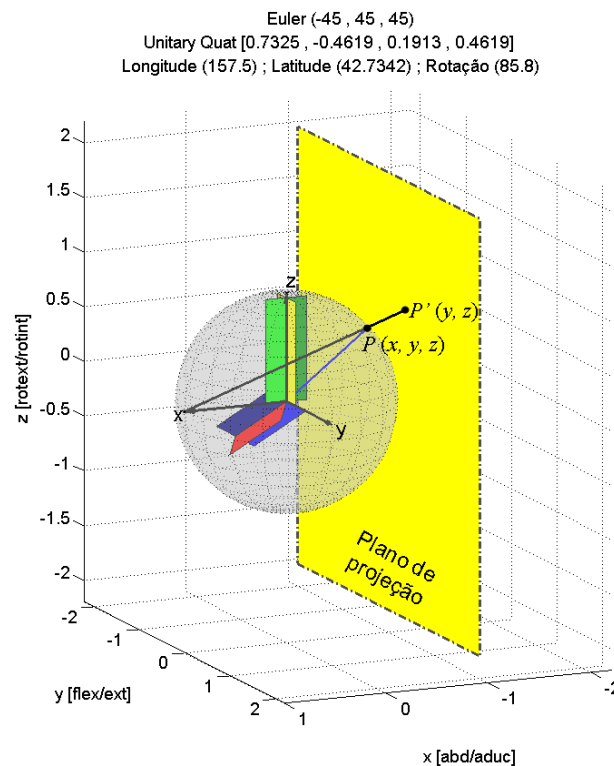


Figura 3.3.2 Projeção estereográfica (P') da parte escalar do quatérnion normalizado (P linha azul) no plano tangente o ponto $(-1, 0, 0)$ de uma esfera unitária.

Tal procedimento é biunívoco, ou seja, para um ponto na esfera, só existe um ponto que o represente no plano projetado (COXETER, 1969).

Assim, as coordenadas de projeção em $P'(y_{p'}, z_{p'})$ podem ser obtidas a partir das coordenadas tridimensionais do quatérnion $P(x_p, y_p, z_p)$:

$$(y_{p'}, z_{p'}) = \left(\frac{2y}{(1-x_p)}, \frac{2z}{(1-x_p)} \right) \text{ para } x_p \neq 1 \quad 3.3.1$$

Também, é possível obter de volta as coordenadas tridimensionais do quatérnion $P(x_p, y_p, z_p)$ a partir das coordenadas do ponto projetado $P'(y_{p'}, z_{p'})$:

$$(x_p, y_p, z_p) = \left(\frac{(-4 + y_{p'}^2 + z_{p'}^2)}{(4 + y_{p'}^2 + z_{p'}^2)}, \frac{4y_{p'}}{(4 + y_{p'}^2 + z_{p'}^2)}, \frac{(4z_{p'})}{(4 + y_{p'}^2 + z_{p'}^2)} \right) \quad 3.3.2$$

No caso desta aplicação, para facilitar a representação gráfica e conseqüentemente sua interpretação, optou-se em restringir a área de projeção estereográfica apenas para os quatérnions situados no hemisfério esquerdo da esfera imaginária. Desta forma, qualquer quatérnion situado no hemisfério direito (quatérnions com coordenadas $x > 0$) não teria uma representação no plano de projeção. Para solucionar esta situação, foi estabelecida a seguinte condição: para qualquer quatérnion P localizado do lado direito da esfera (coordenada $x_p > 0$), este será representado por seu conjugado P^* , que terá sua parte escalar projetada (d) e por fim, terá a sua coordenada de projeção espelhada ($d' = -1d$) (Figura 3.3.3).

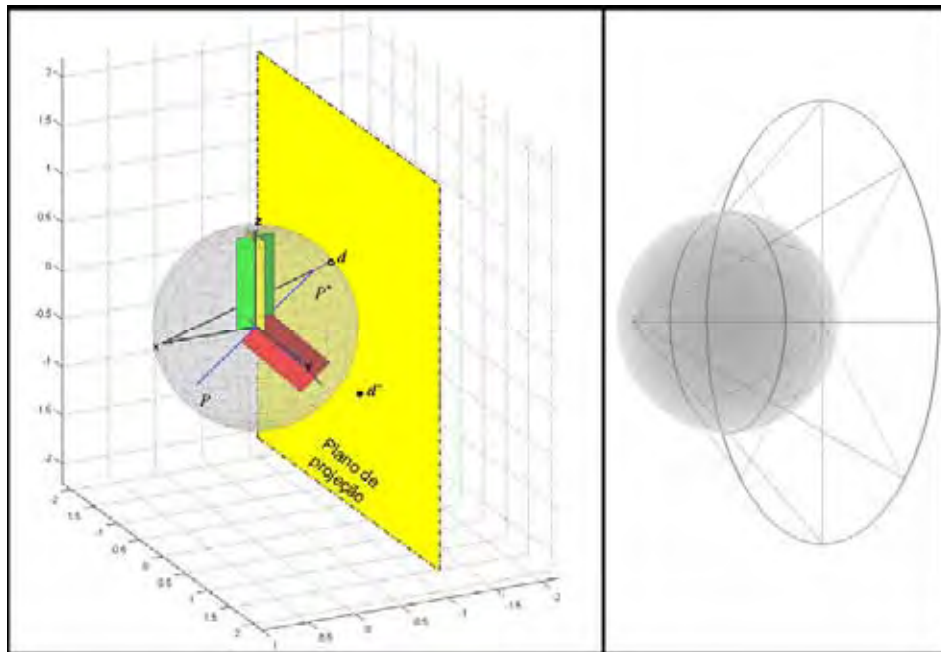


Figura 3.3.3 Esquerda – Representação do quatérnion P e seu conjugado P^* . Ponto d (círculo aberto) obtido da projeção estereográfica do quatérnion conjugado P^* . Ponto d' (círculo fechado) obtido do ponto d espelhado. Direita – Área de projeção estereográfica de quatérnions localizados no hemisfério esquerdo da esfera.

Na representação gráfica, foram identificados por círculos fechados e abertos os pontos projetados que passaram e não passaram por este procedimento, respectivamente (Figura 3.3.3).

A projeção estereográfica realizada em cada instante de tempo da simulação desenha pontos seqüenciais no plano de projeção (Figura 3.3.4).

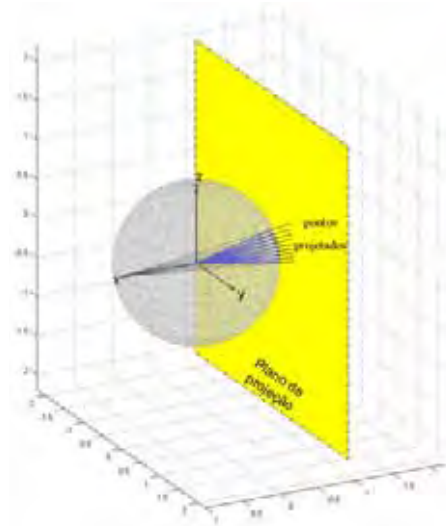


Figura 3.3.4 Projeção estereográfica de uma seqüência de quatérnions.

A localização, direção e sentido da distribuição de uma seqüência de pontos projetados foram utilizados para associar quais tipos de NCMA ocorreram. Para este feito, foram realizadas diversas simulações de movimento, sendo assim, possível definir no plano de projeção pontos, linhas e áreas de referência para as principais NCMA (Figura 3.3.5).

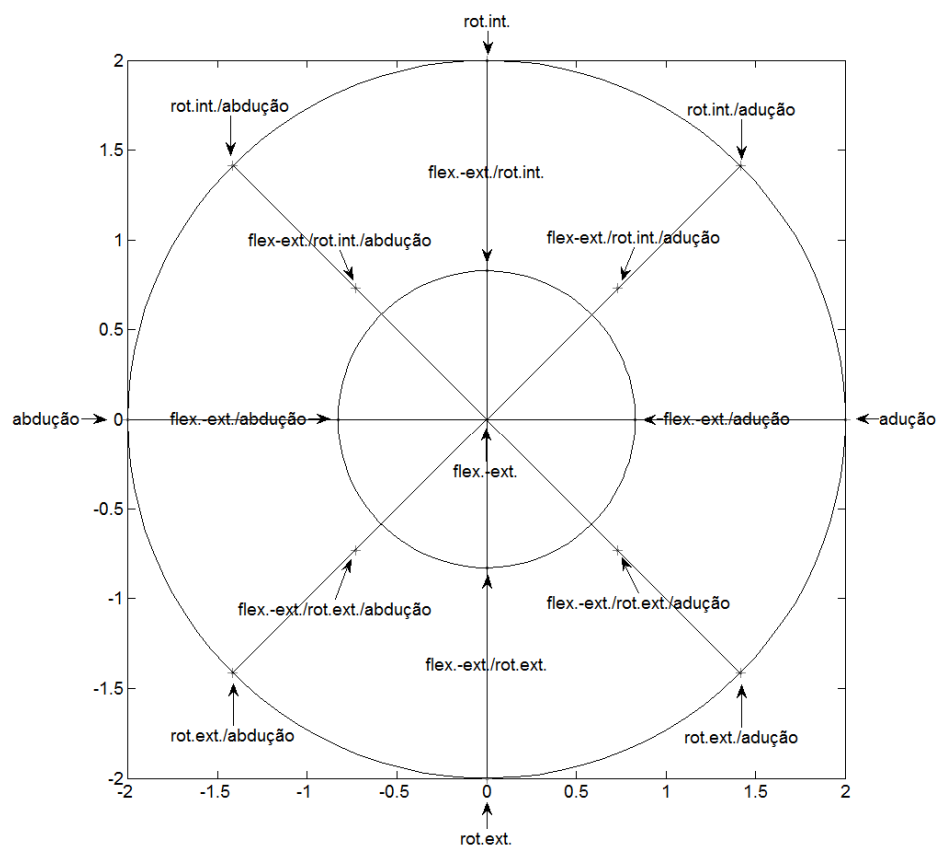


Figura 3.3.5 Pontos, linhas e áreas de referência que relaciona o plano e projeção estereográfica dos quatérnions à nomenclatura clínica de movimento.

3.3.1 Simulações

Considere duas situações (simulação 1 e 2) nas quais as estruturas virtuais que representam a coxa e perna tenham inicialmente a mesma orientação (eixos paralelos), como demonstrado na ilustração da Figura 3.3.1. Suponha que na perna sejam realizadas composições de rotações na seqüência xyz dos seguintes ângulos demonstrados na Tabela 3.3.1.

Tabela 3.3.1. Seqüências de ângulos de rotação em torno dos eixos x , y e z que foram utilizados para compor as rotações na seqüência xyz na estrutura da perna para as simulações 1 e 2.

Simulação 1				Simulação 2			
tempo	x (graus)	y (graus)	z (graus)	tempo	x (graus)	y (graus)	z (graus)
t_0	0	0	0	t_0	0	0	0
t_1	-7	-2	-3	t_1	6	1,5	5
t_2	-14	-4	-6	t_2	12	3	10
t_3	-21	-6	-9	t_3	18	4,5	15
t_4	-28	-8	-12	t_4	24	6	20
t_5	-35	-10	-15	t_5	30	7,5	25
t_6	-42	-12	-18	t_6	36	9	30
t_7	-49	-14	-21	t_7	42	10,5	35
t_8	-56	-16	-24	t_8	48	12	40
t_9	-63	-18	-27	t_9	54	13,5	45
t_{10}	-70	-20	-30	t_{10}	60	15	50

Simulação 1

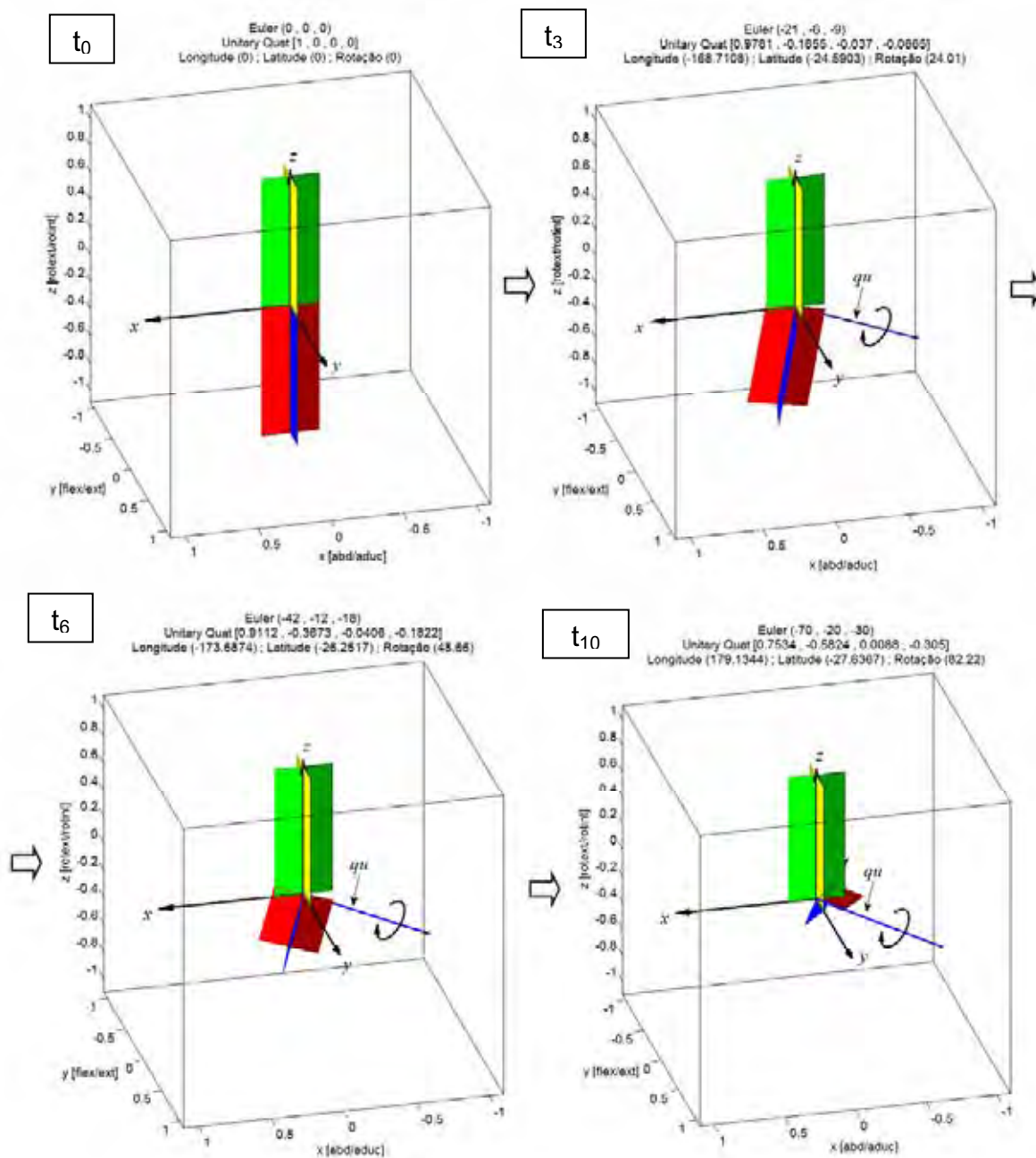


Figura 3.3.6 Simulação 1 - Representação gráfica da seqüência de rotação da perna nos tempos t_0 , t_3 , t_6 e t_{10} .

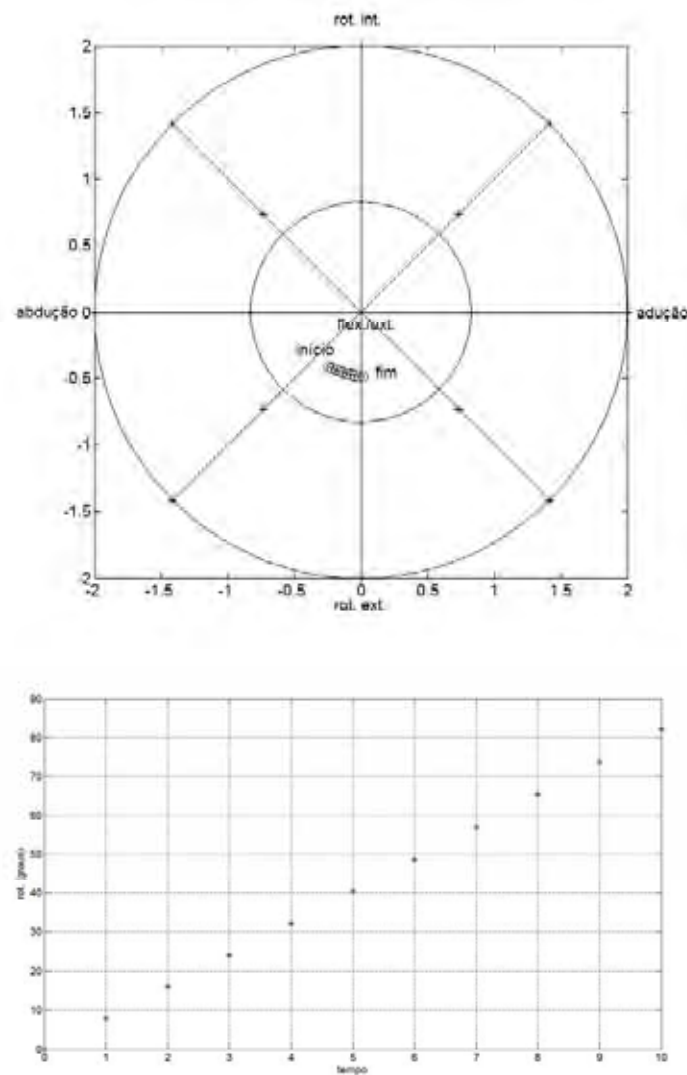


Figura 3.3.7 Simulação 1 - Projeção estereográfica (cima) e ângulo de rotação do quatérnion (baixo).

Observa-se na simulação 1 que os principais movimentos ocorridos são de flexão (círculos abertos - próximos do ponto central da projeção (flex./ext.)), seguidos em menores graus pelos movimentos de rotação externa e abdução (área de distribuição da projeção no quadrante inferior esquerdo da circunferência), respectivamente (Figura 3.3.7).

Simulação 2

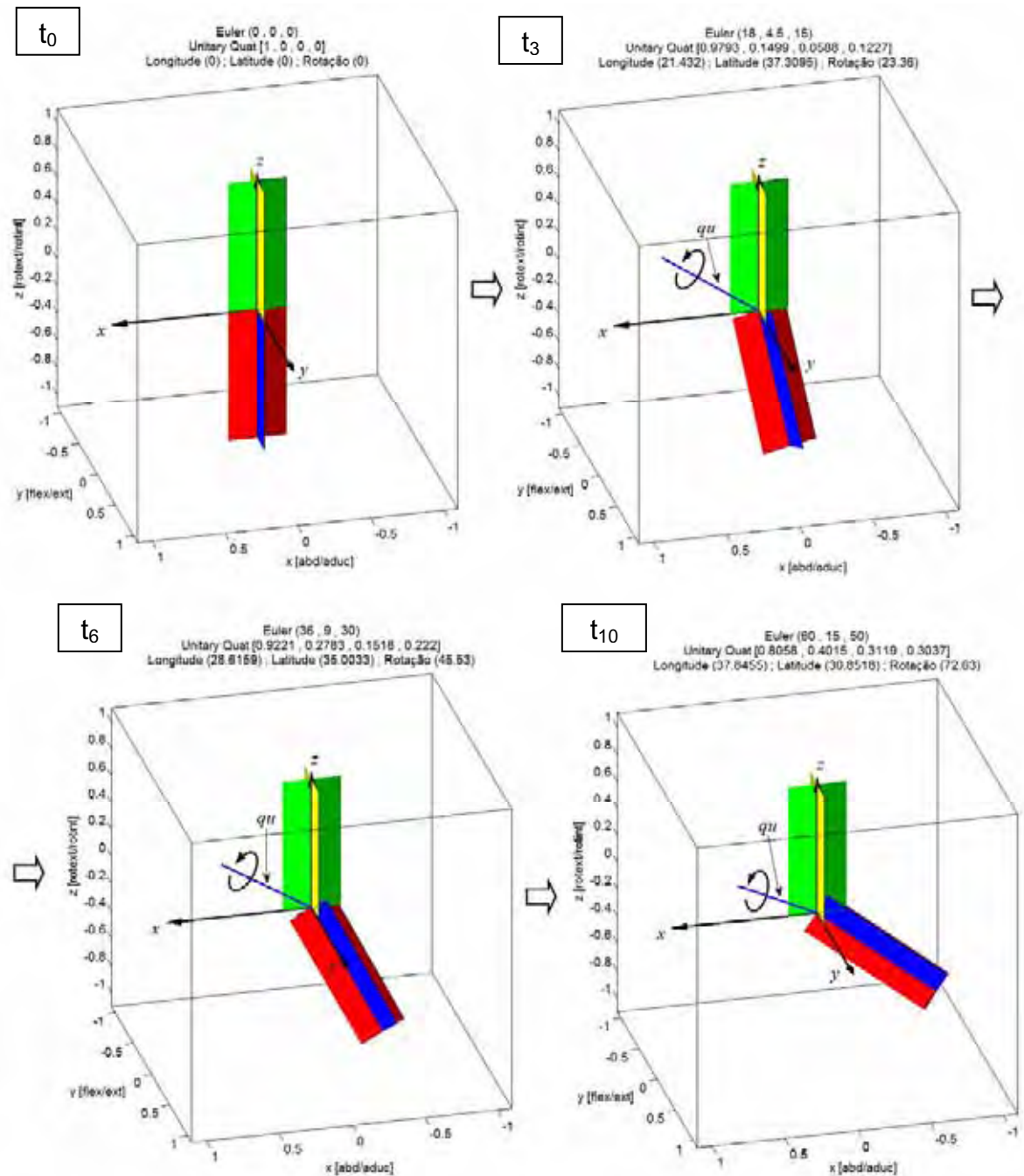


Figura 3.3.8 Simulação 2 - Representação gráfica da seqüência de rotação da perna nos tempos t_0 , t_3 , t_6 e t_{10} .

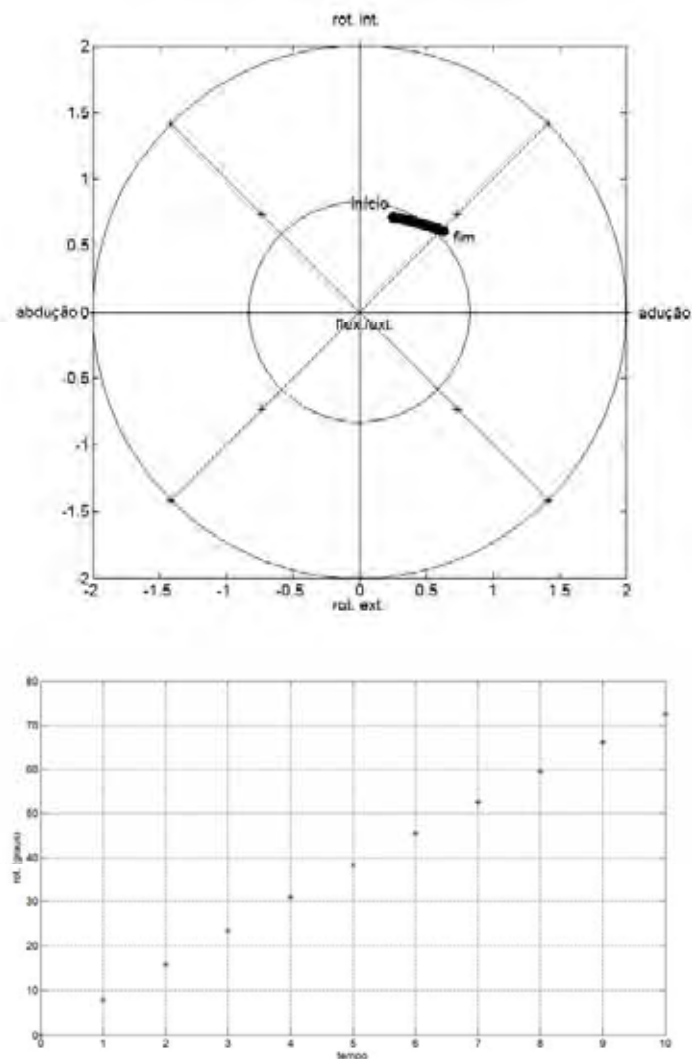


Figura 3.3.9 Simulação 2 - Projeção estereográfica (cima) e ângulo de rotação do quatérnion (baixo).

Observa-se na simulação 2 que os principais movimentos ocorridos são de extensão (círculos fechados - próximos do ponto central da projeção (flex./ext.)), seguidos em menores graus pelos movimentos de rotação interna e adução (área de distribuição da projeção no quadrante superior direito da circunferência), respectivamente (Figura 3.3.9).

É importante ressaltar que estes movimentos foram utilizados para o estudo da técnica aqui empregada, pois os mesmos não são observados na articulação do joelho humano.

Na sequência são apresentadas mais duas simulações de movimentos da articulação do joelho. Ao contrário do exemplo anterior, os sistemas da coxa e perna não apresentam inicialmente a mesma orientação. Imagine então, que uma pessoa esteja sentada na borda de uma mesa com os joelhos flexionados a 90°. A

partir desta situação são possíveis duas interpretações: o sistema da coxa está inicialmente rodado 90° em torno do eixo x do sistema global, ou o sistema da perna está inicialmente rodado -90° em torno do eixo x do sistema global. O fato é que para as duas interpretações o joelho encontra-se em flexão de 90° (Figura 3.3.10 - centro).

Então, imagine que nesta posição sejam realizados os seguintes movimentos:

- Simulação 3 - Rotação interna de 30° da perna em relação à coxa; movimento que corresponde a uma rotação de 30° em torno do eixo k do sistema da perna (Figura 3.3.8 - esquerda);
- Simulação 4 - Rotação externa de 40° da perna em relação à coxa; movimento que corresponde a uma rotação de -40° em torno do eixo k do sistema da perna (Figura 3.3.8 - direita).

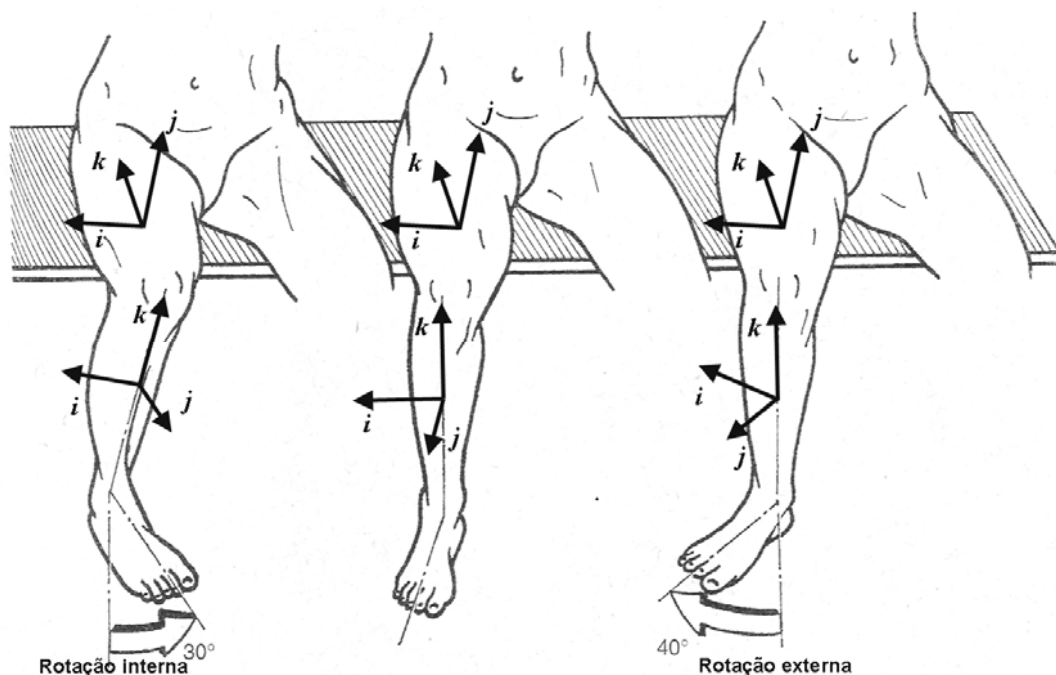


Figura 3.3.10 Movimentos de rotação interna (esquerda) e rotação externa (direita) a partir da posição neutra (centro) (adaptado de KAPANDJI, 2000).

Simulação 3 – Rotação interna de 30°

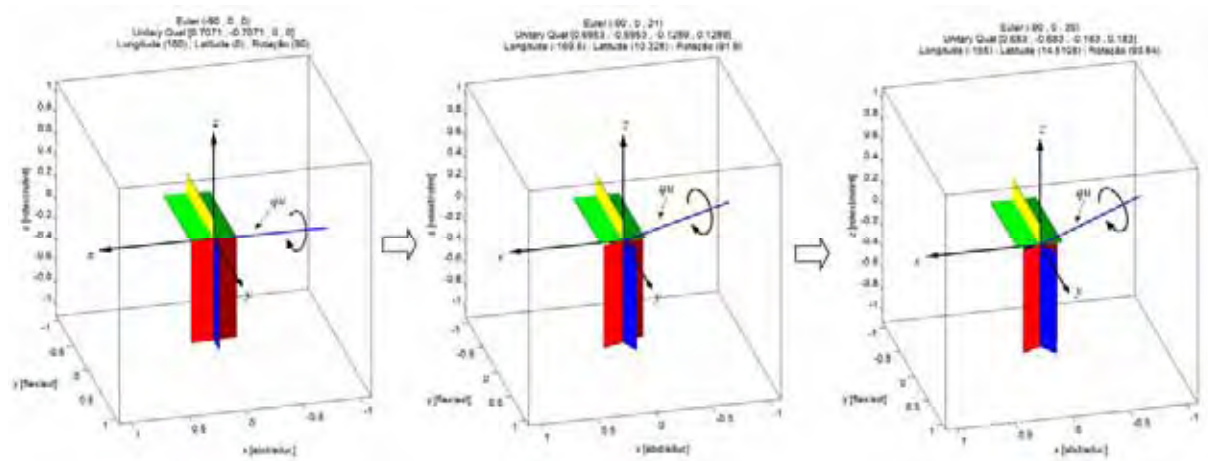


Figura 3.3.11 Simulação 3 - Representação gráfica de três instantes de tempo da sequência de rotação interna de 30°.

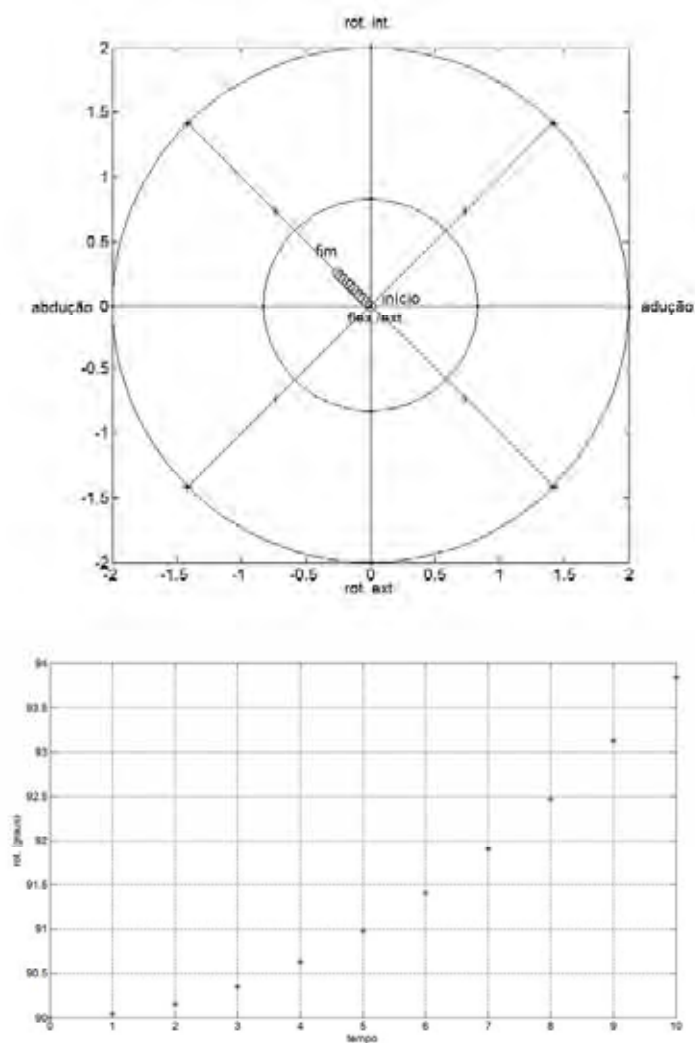


Figura 3.3.12 Simulação 3 - Projeção estereográfica (cima) e ângulo de rotação do quatérnio (baixo).

Simulação 4 – Rotação externa de 40°

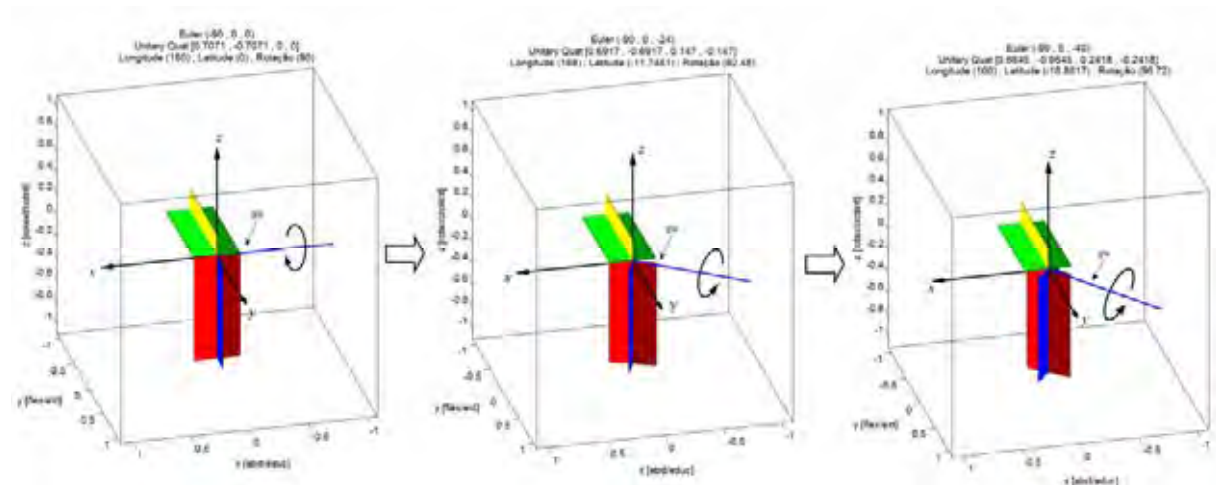


Figura 3.3.13 Simulação 4 - Representação gráfica de três instantes de tempo da seqüência de rotação externa de 40°.

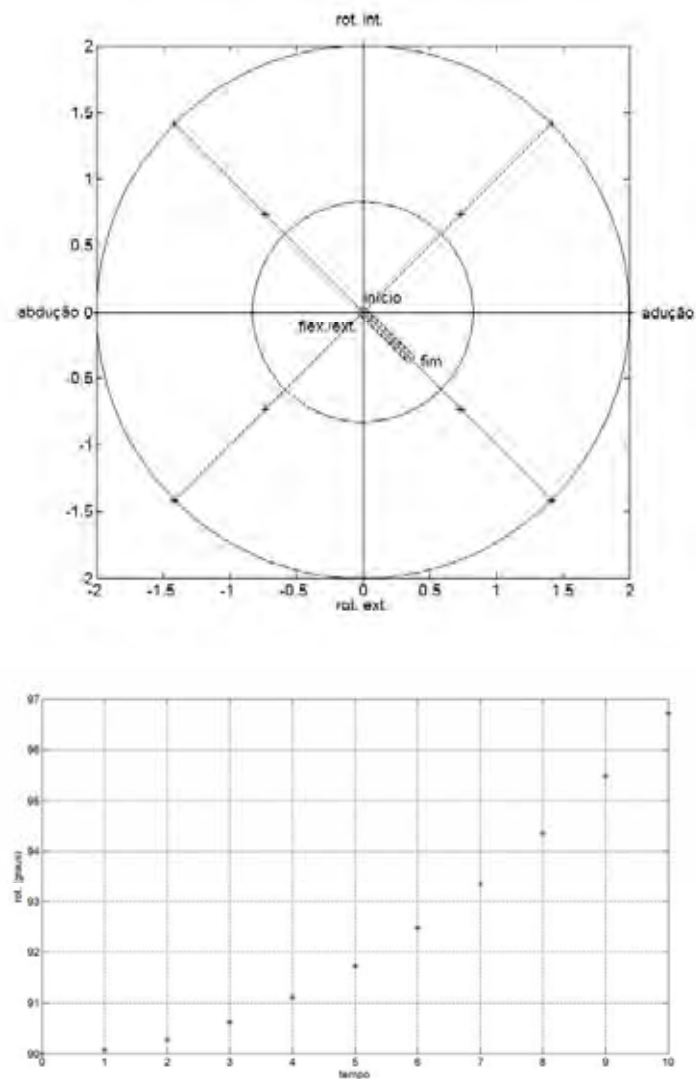


Figura 3.3.14 Simulação 4 - Projeção estereográfica (cima) e ângulo de rotação do quatérnion (baixo).

Como já era esperado a projeção estereográfica das simulações 3 e 4 evidenciaram a flexão de 90° do joelho na posição inicial. Em continuidade às rotações realizadas, verifica-se que além da flexão, também existiram os movimentos de rotação interna/abdução (simulação 3) e rotação externa/adução (simulação 4). Este achado pontua uma falha na técnica aqui empregada, pois se sabe que os movimentos de abdução e adução não ocorreram.

Certamente tal falha gera um problema na interpretação dos resultados obtidos. Todavia, verificou-se que ela ocorreu apenas nas situações em que os eixos do sistema considerado fixo (coxa) e móvel (perna), não estão inicialmente paralelos. Portanto, é plausível assumir que os resultados obtidos confirmam em parte as expectativas acerca desta tentativa.

É importante enfatizar que esta tentativa serve de ponto de partida para este tipo de investigação. Desta forma, sugere-se que outros estudos sejam realizados para que seja possível a completa associação dos quatérnions às NCMA.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escolha da forma mais adequada de representar o movimento de rotação em biomecânica ainda é um amplo caminho a ser explorado (ANEXO).

Os ângulos de Euler apresentam vantagens sobre as outras formas de representações. Eles são a forma mais utilizada em biomecânica, com exceção de restrições, os mesmos podem ser associados à Nomenclatura Clínica dos Movimentos Articulares (NCMA). Todavia, os ângulos de Euler também apresentam desvantagens, como o *Gimbal Lock* e necessitam da escolha de uma seqüência de rotação para, assim, poder representar uma rotação ocorrida. Desta forma, é possível obter diferentes valores de ângulos para um mesmo movimento investigado. Este fato é indesejável porque possibilita diferentes interpretações para um mesmo movimento.

Já a utilização dos quatérnions para descrever os movimentos de rotação de uma articulação humana é uma abordagem alternativa que se mostrou interessante, pois permite descrever um eixo instantâneo de rotação através de cálculos matemáticos mais simples quando comparado com outras representações.

Este é um tópico (eixo instantâneo de rotação) relevante, uma vez que os movimentos humanos são gerados por forças internas e externas que resultam em rotações que podem ser representadas por movimentos ocorridos em torno de eixos móveis, forma esta mais próxima ao que realmente acontece em uma articulação humana. Além disso, é possível utilizar os quatérnions para comparar os padrões de movimentos em diversas atividades humanas, entre elas, as atividades esportivas. Uma vez que os quatérnions são mais sensíveis para detectar pequenos movimentos de rotação, não apresentam o problema do *Gimbal Lock* e possuem apenas duas possibilidades de representar uma rotação - o quatérnion unitário ou o seu conjugado.

Contudo, a maior dificuldade na utilização dos quatérnions em biomecânica refere-se à sua visualização e interpretação em termos dos movimentos ocorridos. Isto se agrava ainda mais em função da escassez de trabalhos na literatura e também pela tradicional e arraigada forma de entendimento das ciências da saúde, afinal, primeiramente busca-se em decompor a rotação ocorrida em uma articulação em três eixos para então associar NCMA.

Por este motivo, além das aplicações dos quatérnions tentou-se, primeiramente representar a parte vetorial dos quatérnions em coordenadas esféricas para facilitar sua representação gráfica. Posteriormente, tentou-se criar uma técnica que permitisse associar os quatérnions à NCMA. Embora tal técnica tenha, inicialmente, gerado muita expectativa, verificou-se através de simulações que em determinadas situações não foram obtidos os resultados esperados. Desta forma, é oportuno sugerir o aprimoramento ou a criação de novas técnicas que propiciem a difusão dos quatérnions como uma abordagem alternativa para a análise do movimento de rotação em biomecânica.

Como não foram encontrados na literatura estudos que utilizem os quatérnions para representar os movimentos de rotação em atividades esportivas, sugere-se que, em um primeiro momento, os resultados oriundos de outras formas de representações sejam transformados para os quatérnions, já que estas transformações são relativamente simples e fornecem uma forma mais adequada para operar sistemas com restrições. Sendo possível a comparação entre diferentes estudos.

Em nenhum momento da elaboração deste trabalho teve-se a pretensão de que fosse possível extinguir as discussões que permeiam tal temática. As possibilidades de utilização dos quatérnions em biomecânica são indubitavelmente fartas. As suas contribuições para o estudo do movimento humano ainda não foram plenamente apresentadas e para isso é necessário um melhor aprofundamento a respeito dos quatérnions. Infelizmente, ainda são irrisórias investigações nesta área que contribuam para o avanço de tais elementos (os quatérnions).

Portanto, é oportuno ressaltar novamente que “os quatérnions, ainda são um universo desconhecido e distante para muitos pesquisadores da área de biomecânica”.

REFERÊNCIAS

ABDEL-AZIZ, Y. I., KARARA, H. M. Direct linear transformation from comparator coordinates into object-space coordinates in close-range photogrammetry. In: PROCEEDINGS OF THE ASP SYMPOSIUM ON CLOSE-RANGE PHOTOGRAMMETRY, 1971, Fall Church, VA: American Society of Photogrammetry, **Annals**. 1971, p. 1-18.

ALTMANN, S. L. **Rotations, quaternions and double groups**. Oxford: Clarendon Press, 1986.

BARROS, R. M. L., BREZIKOFER, R., LEITE, N. J., FIGUEROA, P. J. Desenvolvimento e avaliação de um sistema para análise tridimensional de movimentos humanos. **Revista Brasileira de Engenharia Biomédica**, v. 15, n. 1, p. 79-86, 1999.

BELL, A. L., PEDERSEN, D. R., BRAND, D. A comparison of the accuracy of several different hip center location prediction methods. **Journal of Biomechanics**, v. 23, p. 617-621, 1990.

BIASI, S. C. **Utilização de quatérnios para representação de rotações em 3D**. 2001. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia da Computação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

BLOOMENTHAL J. **Calculation of reference frames along a space curve**. In: Glassner A. S. (ed.), *Graphics Gems*. Massachusetts: Academic Press. p. 567-571, 1990.

BRAND, L. **Vector and tensor analysis**. New York: Wiley, 1948.

CAPPOZZO A., CATANI F., DELLA CROCE U., LEARDINI A. Position and orientation of bones during movement: anatomical frame definition and determination. **Clinical Biomechanics**, v. 10, p. 171-178, 1995.

CAPPOZZO A., DELLA CROCE U., LEARDINI A., CHIARI L. Human movement analysis using stereophotogrammetry Part 1: theoretical background. **Gait & Posture**, v. 21, n. 2, p. 186 -196, 2005.

COXETER, H. S. M. **Introduction to Geometry**. New York, John Wiley & Sons, 1969.

CUNHA, S. A., LIMA FILHO, E. C. Metodologia para a suavização de dados biomecânicos por funções não paramétricas. **Revista Brasileira de Biomecânica**, São Paulo, v. 1, n. 6, p. 23-28, 2003.

CUNHA, S. A., SANTIAGO, P. R. P., CARDOSO Jr., A. S., CUNHA, M. C. **Rotações em biomecânica usando quatérnios: formulação teórica e exemplo de aplicação**. In: Modelos matemáticos nas ciências não-exatas. São Paulo: Blucher, v.1, p. 55-63, 2008.

CARDOSO JR. A. S. **Quatérnios e aplicações na biomecânica**. 2004. 45 f. (Dissertação de Mestrado) – Faculdade de Educação Física, Universidade de Campinas, Campinas, 2004.

EHARA Y, FUJIMOTO H, MIYAZAKY S, MOCHIMARU M, TANAKA S, YAMAMOTO S. Comparison of the performance of 3-D camera systems. **Gait & Posture**, v. 5, p. 251-255, 1997.

FIELD, D. **Anatomia Palpatória**. 2 ed. São Paulo: Manole, 2001.

FIGUEROA, P.J., LEITE N.J., BARROS, R.M.L. A Flexible Software for Tracking of Markers Used in Human Motion Analysis. **Computer Methods and Programs in Biomedicine**, v. 72, p. 155-165, 2003.

FIGUEROA, P.J., LEITE N.J., BARROS, R.M.L. Tracking soccer players aiming their kinematical motion analysis. **Computer Vision and Image Understanding**. v. 101, n. 2, p. 122-135, 2006.

GOMES, J., VELHO, L. **Computação Gráfica, Volume 1**. 317 f. IMPA/SBM. 1998.

GROOD, E. S., SUNTAY, W. J. A Joint Coordinate System for the Clinical Description of Three-Dimensional Motions: Application to the Knee. **Journal of Biomechanical Engineering**, v. 105, p. 136-144, 1983.

HAMILTON, W. R. **On Quaternions**, Proceedings of the Royal Irish Academy, 3, p.1-16, 1847.

HASLWANTER, T. Mathematics of Three-dimensional Eye rotations. **Vision Res.** v. 35, n. 12, p. 1727-1739, 1995.

HEWETT, T. E., MYER, G. D., FORD, K. R., HEIDT, R. S. JR., COLOSIMO, A. J., MCLEAN, S. G., VAN DEN BOGERT, A. J., PATERNO, M. V., SUCCOP, P. Biomechanical Measures of Neuromuscular Control and Valgus Loading of the Knee Predict Anterior Cruciate Ligament Injury Risk in Female Athletes - A Prospective Study. **American Journal of Sports Medicine**, v. 33, n. 4, p. 492-501, 2005.

KARDUNA, A. R., MCCLURE, P. W., MICHENER, L. A. Scapular Kinematics: Effects of Altering the Euler Angle Sequence of Rotation. **Journal of Biomechanics**, v. 33, p. 1063-1068, 2000.

KANTOR, I. L.; SOLODOVNIKOV, A. S. **Hypercomplex Numbers: An Elementary Introduction to Algebras**. New York: Springer-Verlag, 1989.

KAPANDJI, A. I. **Fisiologia Articular: Membro inferior**. 5. ed. São Paulo: Editora Médica Panamericana, 2000.

KUIPERS, J. B. **Quaternions and Rotation Sequences**. New Jersey: Princeton University Press, 1999.

LARA JÚNIOR, A. A. **Cinemática do chute com a bola parada no futebol**. 2003. 89 f. (Dissertação de Mestrado em Ciências do movimento humano) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Florianópolis.

LIMA JÚNIOR, R. S. **Identificação dos ângulos do tornozelo do membro de suporte, distância entre o pé de apoio e a bola e velocidade de saída da bola em cobranças de pênalti no futebol**. 2007. 77 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Motricidade). Instituto de Biociências, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro.

LIMA, R. S. **Descrição de rotações: prós e contras na teoria e na prática**. 2007. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada). Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PFLUM, M. A., SHELBURNE, K. B., TORRY, M. R. Model prediction of anterior cruciate ligament force during drop-landings. **Medicine and Science in Sports and Exercise**, v. 36, n. 11, p. 1949-1958. 2004.

ROBERTSON, E. G., CALDWELL, G., HAMILL, J., KAMEN, G., WHITTLESEY, S. **Research Methods in Biomechanics**. Champaign: Human Kinetics Publisher, 2004.

TASORA, A. An Optimized Lagrangian-Multiplier Approach for Interactive Multibody Simulation in Kinematic and Dynamical Digital Prototyping. In: PROCEEDINGS OF COMPUTER SIMULATION IN BIOMECHANICS, 2001, Milano, **Annals**. p.3-12, 2001.

VAUGHAN, C. L. **Dynamics of Human Gait**. Champaign: Human Kinetics Publisher, 1992.

VALMASSY, R. L. Clinical biomechanics of the lower extremities. Mosby. 1996

VRONGISTINOS, K., STYLIANIDES, G., HWANG, Y. S. Angular Velocities and Three Dimensional Analysis Using Quaternions. In: PROCEEDINGS OF THE 7th INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON THE 3-D ANALYSIS OF HUMAN MOVEMENT, **Annals**. 2002.

WU G, SIEGLER S, ALLARD P, KIRTLEY C, LEARDINI A, ROSENBAUM D, WHITTLE M, D'LIMA DD, CRISTOFOLINI L, WITTE H, SCHMID O, STOKES I. ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion--part I: ankle, hip, and spine. International Society of Biomechanics. **Journal of Biomechanics**, v. 35, n. 4, p. 543-548, 2002.

ZATSIORSKY, V. M. **Kinematics of human motion**. Champaign: Human Kinetics. 1998.

ANEXOS

A tabela e os textos a seguir foram retirados do endereço eletrônico <http://www.univie.ac.at/cga/faq/angles.html>. Eles representam bem a dificuldade encontrada na escolha de uma maneira adequada de representar as rotações em biomecânica:

Methods of Representing Solid Angles

Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.

Bertrand Russell

Representation	Definition	Problems	Advantages	Notes/Conversions
Direction cosine (transformation, rotation) matrices	a_{11}, a_{12}, a_{13} a_{21}, a_{22}, a_{23} a_{31}, a_{32}, a_{33}	Redundant, Interpretation	No gimbal lock	Most complete representation
Cardan (Tait-Bryant)	roll, pitch, yaw (somersault, tilt, twist) no axis repeats <i>cyclic</i> : (Xyz (Earth Fixed - longitude/latitude, Fick), Yzx (Helmholz), Zxy or <i>anti-cyclic</i> : Zyx, Xzy, Yxz	Sequence Dependence Increasingly sensitive to measuring errors. near <i><u>gimbal lock</u></i> when second rotation = 90° or 270°, i.e. first & third axes parallel (e.g. earth at poles for Fick, shoulder abducted to 90°, <i>false torsion</i> in eye movements in Fick & Helmholz)	Interpretation in terms of anatomical motion (sagittal, frontal, transverse)	Sometimes also grouped with Euler angles [Grood & Suntay, 1983]

Euler	As for Cardan but first and last rotations about same axis: Xyx, Yzy, Zxz, Xzx, Yxy	Sequence Dependence Gimbal lock when second rotation is 0 or 180°, i.e. first & third axes parallel	Interpretation in terms of anatomical motion No false torsion in eye movements for Xzx	[Craig, 1989 has conversion matrices between all Euler sequence combinations]
Euler parameters (Quaternions, Euler's axis and angle, finite rotational axis)	$q = q_4 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ where: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ $q_1 = e_x \sin(\phi/2)$ $q_2 = e_y \sin(\phi/2)$ $q_3 = e_z \sin(\phi/2)$ $q_4 = \cos(\phi/2)$ where: $\underline{e}$ = unit vector along axis of rotation ϕ = total rotation angle	Interpretation in terms of anatomical motion	Sequence-independent Insensitive to round-off errors	Conversion from Euler Angles $q_1 = \cos(\text{yaw}/2) \cos(\text{pitch}/2) \sin(\text{roll}/2) - \sin(\text{yaw}/2) \sin(\text{pitch}/2) \cos(\text{roll}/2)$ $q_2 = \cos(\text{yaw}/2) \sin(\text{pitch}/2) \cos(\text{roll}/2) + \sin(\text{yaw}/2) \cos(\text{pitch}/2) \sin(\text{roll}/2)$ $q_3 = \sin(\text{yaw}/2) \cos(\text{pitch}/2) \cos(\text{roll}/2) - \cos(\text{yaw}/2) \sin(\text{pitch}/2) \sin(\text{roll}/2)$ $q_4 = \cos(\text{yaw}/2) \cos(\text{pitch}/2) \cos(\text{roll}/2) + \sin(\text{yaw}/2) \sin(\text{pitch}/2) \sin(\text{roll}/2)$ For small angles: $q_1 \sim \text{roll} / 2$ $q_2 \sim \text{pitch} / 2$ $q_3 \sim \text{yaw} / 2$ $q_4 \sim 1$ Conversion from Quaternion to Euler $\tan(\text{yaw}) = \frac{2(q_1q_2 + q_4q_3)}{(q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)}$ $\sin(\text{pitch}) = -\frac{2(q_1q_3 - q_4q_2)}{2(q_4q_1 + q_2q_3) / (q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)}$ $\tan(\text{roll}) = \frac{2(q_4q_1 + q_2q_3)}{(q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)}$ [Haug, 1989; Kuipers, 1999]

Angle-axis	$q_1 = U_x$ $q_2 = U_y$ $q_3 = U_z$ $q_4 = \phi$			<u>Conversion from Euler Angles</u>
Rotation Vector (Benati, Rodriguez-Hamilton)	$q_1 = e_x$ $\tan(\phi/2)$ $q_2 = e_y$ $\tan(\phi/2)$ $q_3 = e_z$ $\tan(\phi/2)$	Gimbal lock when 180°		
Helical angles (finite helical axis, screw theory, Woltring)	$h_1 = A^*U_x$ $h_2 = A^*U_y$ $h_3 = A^*U_z$	sensitive to measurement error & noise	combines description of location & attitude (absolute or relative) or location & attitude displacements	[Ball, 1900; Woltring 1994]

The current rotations must respect the previous rotations to avoid gimbal lock to prevent any alignment of rotation axis which causes this problem. This problem doesn't depend on the mathematical way you choose to express rotations, it depends on the way to combine rotations. The problem comes from Euler's classical transform: $R=R_x.R_y.R_z$

Implicitely or explicitly you use it with matrices, quaternions, Euler or Cardan angles, ...

You should correct this transform and it works whatever you used to express your rotations:

$$R=R[R[R[Ox,a]Oy,b]R[Ox,a]Oz,c] \cdot R[R[Ox,a]Oy,b] \cdot R[Ox,a].$$

Contributed by Julien Gouesse

Please let me know if you spot any errors, or have any additions!

Dr. Chris Kirtley