

UNESP - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

DOUGLAS BENNDORF RODRIGUES

**VELOCIDADES SUPERLUMINAIS NA RELATIVIDADE GERAL:
MÉTRICA DE ALCUBIERRE**

Guaratinguetá

2013

DOUGLAS BENNDORF RODRIGUES

**VELOCIDADES SUPERLUMINAIS NA RELATIVIDADE GERAL:
MÉTRICA DE ALCUBIERRE**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física Bacharelado.

Orientador: Prof. Dr. José Lourenço Cindra.

Guaratinguetá
2013

Rodrigues, Douglas Benndorf
R696v Velocidades superluminais na relatividade geral: métrica de Alcubierre /
Douglas Benndorf Rodrigues. – Guaratinguetá : [s.n], 2013.
58 f. : il.
Bibliografia : f. 53 - 54

Trabalho de Graduação em Bacharelado em Física – Universidade Estadual
Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2013.
Orientador: Prof. Dr. José Lourenço Cindra

1. Relatividade especial (Física) 2. Luz-Velocidade I .Título.

CDU 530.12

Douglas Benndorf Rodrigues

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“GRADUADO EM BACHARELADO EM FÍSICA”

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA


Prof. Dra. Isabel Cristina de C. Monteiro
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. JOSÉ LOURENÇO CINDRA
Orientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. DENIS DALMAZI
UNESP-FEG


Prof. Dr. FERNANDO LUIS DE C. DE CARVALHO
UNESP-ICT

Dezembro de 2013

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Antonio Freire Rodrigues e Emma Benndorf Rodrigues.

Aos professores e ao professor orientador José Lourenço Cindra que, ao longo do curso, incentivaram e ensinaram.

Aos amigos e colegas pelo apoio e por se fazerem presentes.

RODRIGUES, D. B. **Velocidades Superluminais na Relatividade Geral: Métrica de Alcubierre**. 2013. 40 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Bacharelado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013.

Resumo

A constância da velocidade da luz aparenta ser uma barreira insuperável para as futuras viagens interestelares, energia tendendo a infinito seria necessária para alcançá-la. Mas com a relatividade geral pode-se driblar esse limite e obter velocidades globais arbitrariamente superiores, sem, no entanto violar a constância da velocidade da luz. As assim chamadas “métricas de warp-drive” são um dos meios teóricos para alcançar velocidades globais superluminais. A métrica de Alcubierre é um dos casos em que a ficção científica inspirou a realidade, de onde foi tirado o termo “warp-drive” (motor de dobra). No presente trabalho, será feito um estudo das teorias da relatividade restrita e geral e de alguns trabalhos sobre soluções que permitem velocidades superluminais.

PALAVRAS-CHAVE: relatividade geral, métrica de Alcubierre, formalismo 3+1, superluminal.

RODRIGUES, D. B. **Superluminal Speeds in General Relativity: Alcubierre Metric**. 2013. 40 f. Graduate Work (Graduate in Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013.

Abstract

The constancy of the speed of light appears to be an unbreakable barrier for future interstellar journeys, tending to infinite energy would be needed to achieve such speed. However in the general relativity one can circumvent this limit and get arbitrarily higher global speeds, without violating the constancy of the speed of light. The so-called “warp-drive metrics” is a theoretical means to achieve global superluminal speeds. The Alcubierre metric is one case in which the science fiction inspired reality, from which was drawn the term “warp-drive”. In the present work, a study of the theories of special and general relativity and of some works on solutions that allow superluminal speeds will be done.

KEYWORDS: general relativity, Alcubierre metric, 3+1 formalism, superluminal.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	6
2	PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE RESTRITA	9
2.1	RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE	10
2.2	CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO E DILATAÇÃO DO TEMPO	11
2.3	TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	13
3	ESPAÇO DE MINKOWSKI	16
3.1	DIAGRAMAS DE MINKOWSKI EM DUAS DIMENSÕES	16
3.2	INTERVALO INVARIANTE E CONE DE LUZ	17
3.3	FORMALISMO QUADRIDIMENSIONAL	19
3.4	TEMPO PRÓPRIO	23
3.5	QUADRIVELOCIDADE E QUADRIMOMENTO	23
4	INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL	25
4.1	PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA	25
4.2	PARTÍCULA EM QUEDA LIVRE	27
4.3	RELAÇÃO ENTRE A CONEXÃO AFIM E A MÉTRICA	28
4.4	DILATAÇÃO DO TEMPO	29
5	ELEMENTOS DE ANÁLISE TENSORIAL	30
5.1	LEIS DE TRANSFORMAÇÃO	30
5.2	OPERAÇÕES COM TENSORES	31
5.3	DERIVADA COVARIANTE	32
6	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	34
6.1	TENSOR DE CURVATURA	34
6.2	PROPRIEDADES DO TENSOR DE RIEMANN	35
6.3	TENSOR ENERGIA-MOMENTO	36
6.4	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	37
6.5	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	38
6.6	FORMALISMO 3+1	41
6.7	CURVATURA EXTRÍNSECA	42

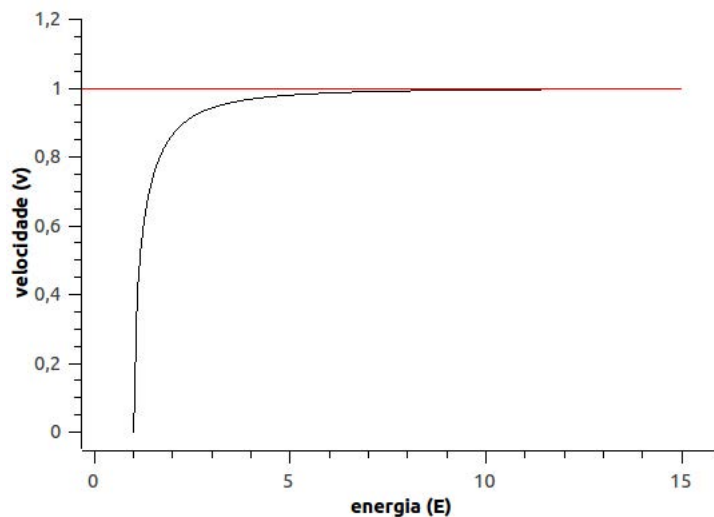
		5
7	MÉTRICA DE ALCUBIERRE	44
7.1	CONTRAÇÃO E DILATAÇÃO DO ESPAÇO	45
7.2	TEMPO PRÓPRIO E EQUAÇÃO DO MOVIMENTO	46
7.3	DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ASSOCIADA	47
7.4	OUTRAS MÉTRICAS	48
8	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	53
	APÊNDICE A - Notações	55
	APÊNDICE B - Métrica	56

1 INTRODUÇÃO

Na ficção científica é comum o tema das viagens interplanetárias e interestelares. Enquanto as primeiras podem ser consideradas quase um destino inevitável (aguardando somente o desenvolvimento de propulsores mais eficientes e potentes e outras tecnologias chave), as segundas parecem ser impossíveis, inviáveis ou um sonho para o futuro remoto.

Um dos motivos para isso é a impossibilidade, segundo a relatividade restrita, de se ultrapassar a velocidade da luz. Quanto mais rápido um corpo se move, maior seu conteúdo de energia (massa relativa) e mais energia é necessária para aumentar ainda mais a velocidade, chegando ao limite de ser necessária energia infinita para se alcançar a velocidade da luz, conforme é mostrado na figura (1.1). E mesmo que dispuséssemos de tal energia, mover-se a velocidade da luz não é consistente com um dos postulados dessa teoria, a de que “a velocidade da luz é a mesma para todos os referenciais”. Uma

Figura 1.1: Limite de velocidades da relatividade restrita para um corpo massivo, velocidade em função da energia. Foi feito $c = m_0 = 1$, de modo que a energia mínima é a massa de repouso.



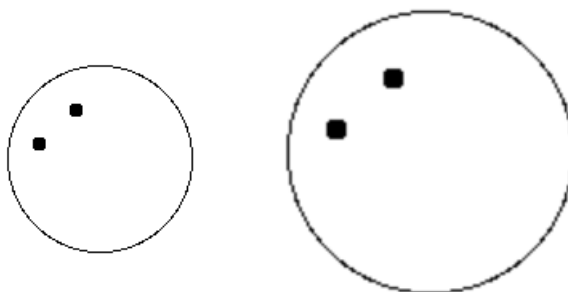
Fonte: (autor, 2013).

solução geralmente apontada para esse problema seria colocar os tripulantes da nave em animação suspensa. Mas isso não mudaria o fato de que a viagem ainda pareceria muito demorada para as pessoas na Terra. Na verdade, se a nave for suficientemente rápida, o

efeito de dilatação do tempo (ou contração da distância, para os viajantes) dispensaria a necessidade de animação suspensa, mas ainda haveria o problema da viagem ser muito longa para os que ficarem na Terra.

No entanto, na relatividade geral, velocidade instantânea não é a única forma de se afastar dois corpos, outro modo é a expansão do próprio espaço. Um exemplo é o afastamento sofrido por dois pontos marcados em uma bexiga de festa quando ela é enchida, o espaço inerente a ela se expande e a distância entre os pontos aumenta, como é representado na figura (1.2). Como consta na referência [2], se a variação da distância

Figura 1.2: Representação de dois pontos se afastando devido à expansão do espaço.



Fonte: (autor, 2013).

de dois objetos distantes no universo for dividida pelo tempo próprio, obtém-se uma velocidade muito maior que a da luz.

Outro modo de “driblar” o limite da velocidade da luz na relatividade geral (em teoria somente, por enquanto) é alterar a topologia do espaço-tempo, que é o que ocorre com *wormholes*, que conectariam pontos distantes no espaço e no tempo.

Nenhum desses dois exemplos significam que o limite da velocidade da luz é violado na relatividade geral. Nenhum corpo pode ter uma *velocidade local* maior que a velocidade da luz, mas pode ter uma *velocidade global* maior.

Enfim, existe um tipo específico de soluções das equações de Einstein que são chamadas de “métricas de *warpdrive*”, ou “métrica de deslocamento puro” (*shift only metrics*, no inglês). Essas métricas associam velocidades (vetores deslocamento) ao próprio espaço, e, como não apresentam a limitação mostrada na figura (1.1), essas velocidades podem ser arbitrárias. A primeira dessas métricas foi apresentada num artigo na *Classical and Quantum Gravity* por Miguél Alcubierre no começo da década de 90, segundo o qual a inspiração foi a ficção científica, por isso o nome “*warp drive*”.

No capítulos seguintes deste trabalho de graduação será apresentada a fundamentação teórica para a compreensão das métricas de *warp drive*, começando pelo básico da relatividade

dade restrita, seu formalismo quadridimensional, chegando ao princípio da equivalência, que, juntos, fornecem os *insights* para a relatividade geral. A seguir é apresentada de forma sucinta a teoria da relatividade geral: a generalização da métrica de Minkowski, a equação da geodésica, generalização do conceito de derivada para espaços curvos, tensor de curvatura e as equações de Einstein. Também é apresentada uma noção básica do formalismo $3 + 1$ da relatividade geral, que é o formalismo usado nas métricas de *warp drive*. Enfim, o artigo original de Alcubierre e alguns outros são abordados.

2 PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE RESTRITA

A relatividade restrita recebe esse nome por tratar exclusivamente de referenciais não acelerados e longe de campos gravitacionais. O termo “relatividade”, na verdade, é inadequado para expressar o conteúdo da teoria. É verdade que o estado de movimento de corpos massivos é relativo nessa teoria, porém já o era na mecânica de Newton. Mais do que descrever a natureza em termos de grandezas relativas, a RR (relatividade restrita) parte de princípios de invariância para descrever a natureza. As equações de Newton apresentam dupla invariância; sobre

mudança de posição arbitrária

e sobre

translação uniforme qualquer,

essa dupla invariância continua válida na RR, mas, ela é condensada no “Princípio da Relatividade”, que diz

“todo sistema de referência inercial é equivalente”,

ou, nas palavras de Einstein [7],

“... não apenas os fenômenos da mecânica, mas também os da eletrodinâmica, não possuem propriedades que correspondam ao conceito de repouso absoluto.”,

ou seja, independentemente de que velocidade possui ou em que posição está o sistema inercial, os experimentos revelarão as mesmas leis físicas. Minkowski, que foi professor de Einstein, certa vez disse que a denominação “Princípio da Relatividade” parecia-lhe demasiado frouxa, tanto que sugeriu “Princípio do Universo Absoluto” como nome mais adequado.

Outro princípio fundamental da RR é o “Princípio da Constância da Velocidade da Luz”, nas palavras de Einstein:

“... a luz sempre se propaga no espaço vazio com uma velocidade definida, que é independente do estado de movimento do corpo emissor.”,

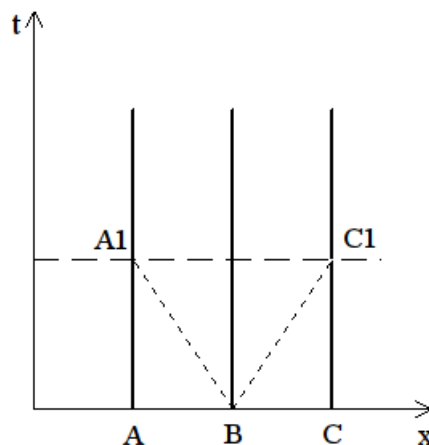
ao que pode-se acrescentar também o estado de movimento do corpo receptor. Note que com “velocidade” nos referimos à velocidade escalar, e não à velocidade vetorial (*speed*

e não *velocity*). A velocidade vetorial da luz pode e é alterada conforme o sistema de referência escolhido. A constância da velocidade da luz pode ser vista como um deslocamento do limite de velocidade. Na mecânica newtoniana esse limite era infinito, mas também era uma constante, ou seja, uma partícula se movendo com velocidade infinita tem a mesma velocidade para qualquer observador. De fato, se, na RR, fizermos a velocidade da luz infinita, os efeitos de contração da distância, dilatação do tempo e relatividade da simultaneidade desaparecem, e temos a mecânica de Newton novamente (tratando-se de referenciais inerciais).

2.1 RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE

Considere um sistema de referência S . Para análise, consideremos duas configurações distintas. Na primeira, suponha que em repouso sobre S estão três partículas, A, B e C. Fazendo um diagrama do tempo e da posição, vemos que as posições desses corpos, ao longo do tempo, são retas paralelas ao eixo t , de modo que se um sinal for enviado de B para A e C, ele chegará nos dois simultaneamente.

Figura 2.1: Partículas em repouso no referencial S .

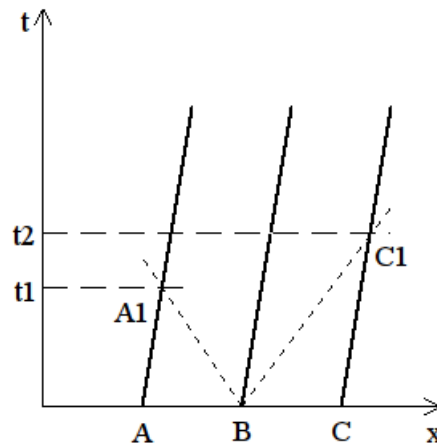


Fonte: (autor, 2013).

Se, por outro lado, tivermos as partículas movendo-se em relação a S com velocidade v para a direita, as retas das posições ao longo do tempo terão uma inclinação positiva, de modo que o sinal emitido por B não chegará simultaneamente a A e a C quando visto do referencial S .

Se considerarmos agora que as partículas A, B e C estão num referencial S' que se move para a direita com velocidade v , temos que o sinal emitido por B chega simultaneamente a A e a C nesse referencial. Vemos, assim, que a simultaneidade é relativa na RR [3][9].

Figura 2.2: Partículas em movimento em relação ao referencial S .

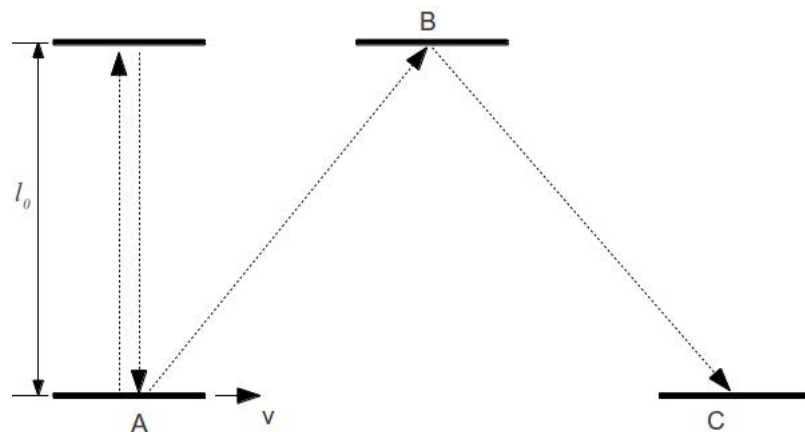


Fonte: (autor, 2013).

2.2 CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO E DILATAÇÃO DO TEMPO

Suponha um relógio de luz que funcione contando o número de vezes que um raio luminoso é rebatido entre dois espelhos paralelos entre si (com uma distância l_0 entre eles) e ortogonais ao eixo y . Esse relógio move-se em relação ao referencial S com velocidade v no sentido positivo da direção x .

Figura 2.3: Relógio de luz, visto do seu próprio referencial e do referencial S .



Fonte: (autor, 2013).

Visto do referencial S , o tempo de ida e volta do sinal luminoso é Δt , então, a distância AC é igual a $v\Delta t$. A distância $AB + BC$ é igual a $c\Delta t = 2(l_0^2 + v^2\Delta t^2/4)^{1/2}$, que nos permite obter $\Delta t = 2l_0/c(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Porém, no referencial do relógio, o sinal leva $\Delta t' = 2l_0/c$ para ir e voltar, pois c (velocidade da luz no vácuo) independe do referencial.

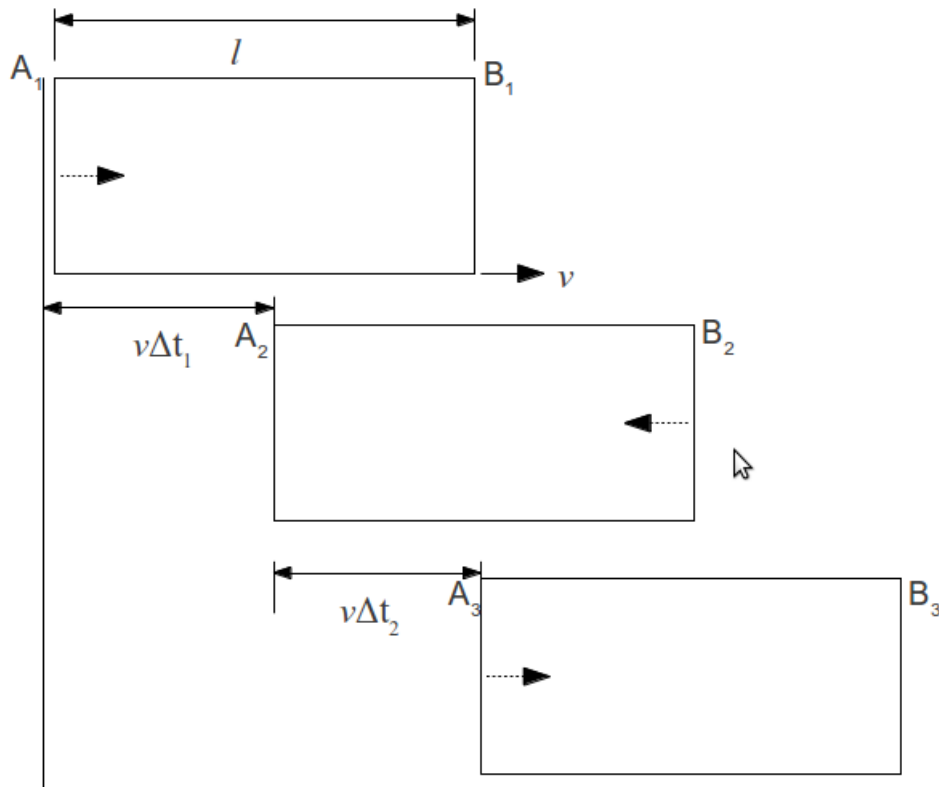
Então, temos que

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (2.1)$$

ou seja, o intervalo de tempo medido usando-se o relógio em movimento é dilatado quando visto do referencial S.

Agora, se tivermos um relógio de luz na horizontal, movendo-se para a direita (em relação ao referencial S), como indica a figura, um sinal (emitido em A_1) leva um tempo

Figura 2.4: Relógio de luz na horizontal (direção do movimento), visto do referencial S.



Fonte: (autor, 2013).

Δt_1 para chegar até B_2 , e Δt_2 para ir até A_3 . O tempo total de ida e volta à face A do relógio é

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2.$$

A distância percorrida pelo sinal luminoso no primeiro e no segundo intervalo de tempo é

$$\begin{aligned} c\Delta t_1 &= v\Delta t_1 + l \\ c\Delta t_2 &= -v\Delta t_2 + l. \end{aligned}$$

Isolando os intervalos de tempo Δt_1 e Δt_2 , e somando esses dois valores, obtemos

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c(1-v^2/c^2)}.$$

Supondo que os dois relógios de luz (o vertical e o horizontal) movem-se juntos e que os sinais luminosos sejam emitidos em posições próximas (pontos A) e simultaneamente, então eles retornarão ao ponto inicial simultaneamente (eventos que ocorrem no mesmo ponto e são simultâneos num referencial, o serão em todos), apesar de não necessariamente atingirem os pontos B simultaneamente no referencial S, de modo que o tempo de ida e volta é igual para os dois relógios. Então

$$\Delta t = \frac{2l_0}{c(1-v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{2l}{c(1-v^2/c^2)},$$

onde l_0 é a distância entre os espelhos no repouso, logo

$$l = l_0(1-v^2/c^2)^{1/2}. \quad (2.2)$$

2.3 TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

A relatividade da mecânica de Newton é representada pelas transformações de Galileu, que são

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t, \end{aligned} \quad (2.3)$$

para os referenciais S e S' , com S' movendo-se, em relação a S , a uma velocidade v na direção x .

As transformações equivalentes para a mecânica de Einstein são chamadas de transformações de Lorentz-Einstein (ou, abreviadamente, transformações de Lorentz). Pelo princípio da equivalência dos referenciais inerciais, temos que um movimento de velocidade constante em um referencial (S) deverá ser também um movimento de velocidade constante em outro referencial (S'), ou seja, as relações entre (x',t') e (x,t) serão lineares. Para x e x' , por simetria (as transformações devem ser essencialmente as mesmas ao se passar de um referencial para outro, diferindo pelo sentido de movimento) e por termos as transformações de Galileu como caso limite, temos que as transformações de Lorentz devem ser da forma

$$x = ax' + bt'. \quad (2.4)$$

do referencial S' para S , e

$$x' = ax - bt, \quad (2.5)$$

do referencial S para S' . O movimento de S' em relação a S é definido quando $x' = 0$, que nos fornece $v = b/a$. Um sinal de luz emitido na origem é descrito por $x' = ct'$ e $x = ct$, para S' e S , que, substituindo em (2.5) e (2.4), nos fornece

$$ct = act' + bt'. \quad (2.6)$$

e

$$ct' = act - bt. \quad (2.7)$$

Combinando (2.7) e (2.6), obtemos

$$c^2 = a^2(c^2 - v^2),$$

então

$$a = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} = \gamma. \quad (2.8)$$

Assim, obtemos $x' = \gamma(x - vt)$. Substituindo $x' = ct'$ e $x = ct$, obtemos a transformação para t' .

Assim, as transformações de Lorentz são

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

E as inversas

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Facilmente pode-se ver que no limite $c \rightarrow \infty$, retornamos às transformações de Galileu.

Podemos escrever as transformações de Lorentz numa forma mais compacta

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.11)$$

onde

$$(\Lambda_{\nu}^{\mu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma/c & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

onde $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ e $\beta = v/c$. Temos assim

$$\begin{aligned} x'^0 &= \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 \\ x'^1 &= \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 \\ x'^2 &= \Lambda_2^2 x^2 \\ x'^3 &= \Lambda_3^3 x^3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A contração do comprimento e a dilatação do intervalo de tempo podem ser facilmente obtidas das transformações de Lorentz, calculando a diferença entre dois pontos no espaço ($x_2 - x_1$) e a diferença entre dois pontos no tempo ($t_2 - t_1$).

3 ESPAÇO DE MINKOWSKI

Podemos ver que, na RR, tempo e espaço deixam de ter significados absolutos, como eram entendidos na mecânica newtoniana. O espaço que era visto como o ente em que todos os eventos ocorrem, sem ser afetado por eles, passa a ser definido em função dos referenciais em que se faz as medidas. E o tempo, que tinha a simples função de parâmetro em função da qual ocorrem as mudanças de configuração dos corpos no espaço, ganha o status de dimensão, ao lado das três dimensões do espaço. Então, como disse Minkowski, não faz mais sentido falar em espaço e tempo, mas sim em uma combinação dos dois, o “espaço-tempo” [13].

Daqui em diante, os conceitos de espaço e de tempo considerados como autônomos devem se reduzir completamente a uma mera sombra, e somente algum tipo de união dos dois terá existência independente reconhecida. (Minkowski)

3.1 DIAGRAMAS DE MINKOWSKI EM DUAS DIMENSÕES

Como os efeitos relativísticos relevantes no momento só afetam a direção de movimento e como podemos sempre definir nosso eixo x nessa direção, sem perda de generalidade, podemos nos limitar a trabalhar em duas dimensões (x e ct , para o referencial S). Um diagrama com os eixos do espaço e do tempo, como apresentado a seguir, recebe o nome de “diagrama de Minkowski”, devido a essa representação ter sido introduzida por Minkowski em 1908 [9]. A hipérbole mostrada é obtida de

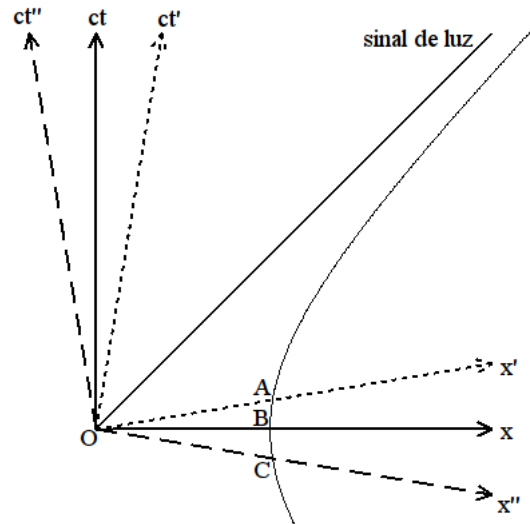
$$c^2t^2 - x^2 = 1, \tag{3.1}$$

as intersecções dela com os eixos espaciais (pontos A, B e C) indicam a unidade de comprimento no respectivo referencial.

Um evento no diagrama de Minkowski é representado por um ponto e é chamado de ponto-evento. O mesmo ponto-evento tem coordenadas diferentes em referenciais diferentes, como mostra a figura (3.2).

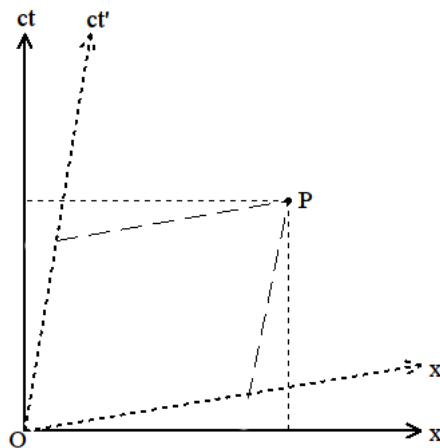
A contração do comprimento pode ser visualizada num diagrama de Minkowski traçando a reta tangente à hipérbole no ponto adequado. Na figura (3.3), temos que um corpo de comprimento $OA = 1$ em repouso no referencial S , será visto com um comprimento $OA' < OB' = 1$ por um observador no referencial S' . Na figura (3.4),

Figura 3.1: Digrama de Minkowski mostrando o referencial S , S' (com velocidade v em relação a S) e S'' (com velocidade $-v$ em relação a S).



Fonte: (autor, 2013).

Figura 3.2: Digrama de Minkowski mostrando o ponto-evento P e suas coordenadas no referencial S e S' .



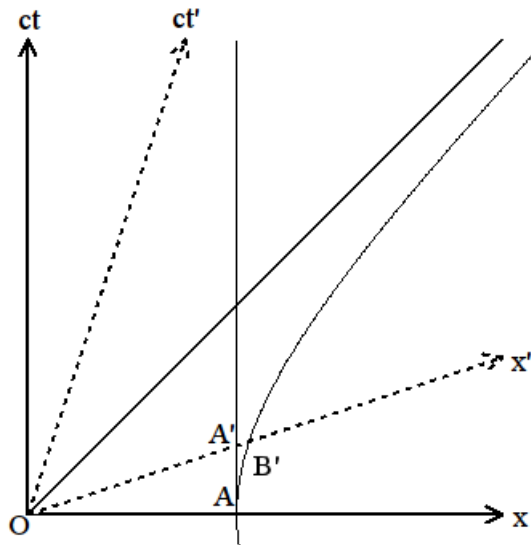
Fonte: (autor, 2013).

um corpo de comprimento $OB' = 1$ em repouso em S' , é visto com um comprimento $OB < OA = 1$ em S .

3.2 INTERVALO INVARIANTE E CONE DE LUZ

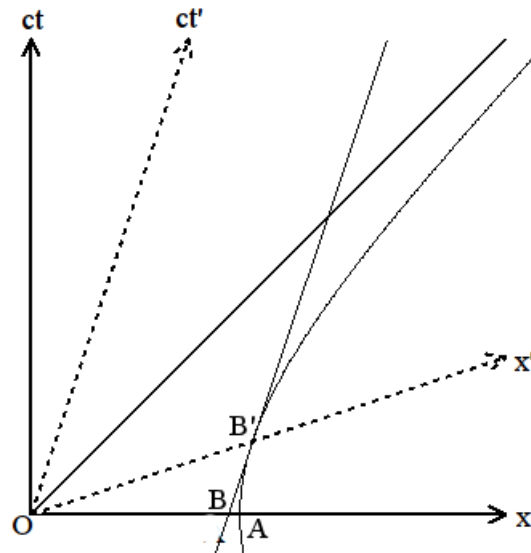
Apesar do espaço e do tempo terem deixado de ser absolutos, ainda há uma grandeza com dimensão de comprimento que se mostra invariante independentemente do referencial.

Figura 3.3: Corpo de comprimento OA em repouso no referencial S e seu comprimento OA' visto de S' .



Fonte: (autor, 2013).

Figura 3.4: Corpo de comprimento OB' em repouso no referencial S' e seu comprimento OB visto de S .



Fonte: (autor, 2013).

Se tomarmos $c^2t'^2 - x'^2$ e aplicarmos as transformações de Lorentz, teremos

$$\begin{aligned}
 c^2t'^2 - x'^2 &= \gamma^2[(ct - vx/c)^2 - (x - vt)^2] \\
 &= \gamma^2[(1 - v^2/c^2)c^2t^2 - (1 - v^2/c^2)x^2] \\
 &= c^2t^2 - x^2 = s^2,
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

onde s^2 é um invariante. A grandeza $\Delta S = (c^2\Delta t^2 - \Delta x^2)^{1/2}$, que na forma diferencial fica

$$ds = (c^2 dt^2 - dx^2)^{1/2}, \quad (3.3)$$

é chamado de “intervalo de espaço-tempo” entre dois eventos.

Montando um diagrama bidimensional do espaço-tempo, figura (3.5), podemos usar o intervalo de espaço-tempo para dividir o diagrama em quatro regiões distintas e definir três tipos de intervalo. Quando o intervalo é igual a zero, os eventos ocorrem sobre uma das retas $x = \pm ct$ (região chamada “cone de luz”) e o intervalo é chamado “tipo luz”.

Se o intervalo é positivo, então os eventos ocorrem acima do cone de luz, intervalos desse tipo podem sempre ser descritos a partir de um referencial tal que ct' seja paralelo ao segmento PQ (onde P e Q são os ponto-eventos), de modo que os eventos ocorrem no mesmo lugar, mas em instantes diferentes (P pode causar Q), esse intervalo é chamado “tipo tempo” (*time-like*).

Por fim, se o intervalo for negativo, os eventos P e Q podem sempre ser descritos por um referencial tal que o segmento PQ seja paralelo à x' , de modo que ocorrem simultaneamente (são conectados por uma reta $ct' = cte$), mas em lugares diferentes (não há relação de causa e efeito entre eles), um intervalo desse tipo é chamado “tipo espaço” (*space-like*).

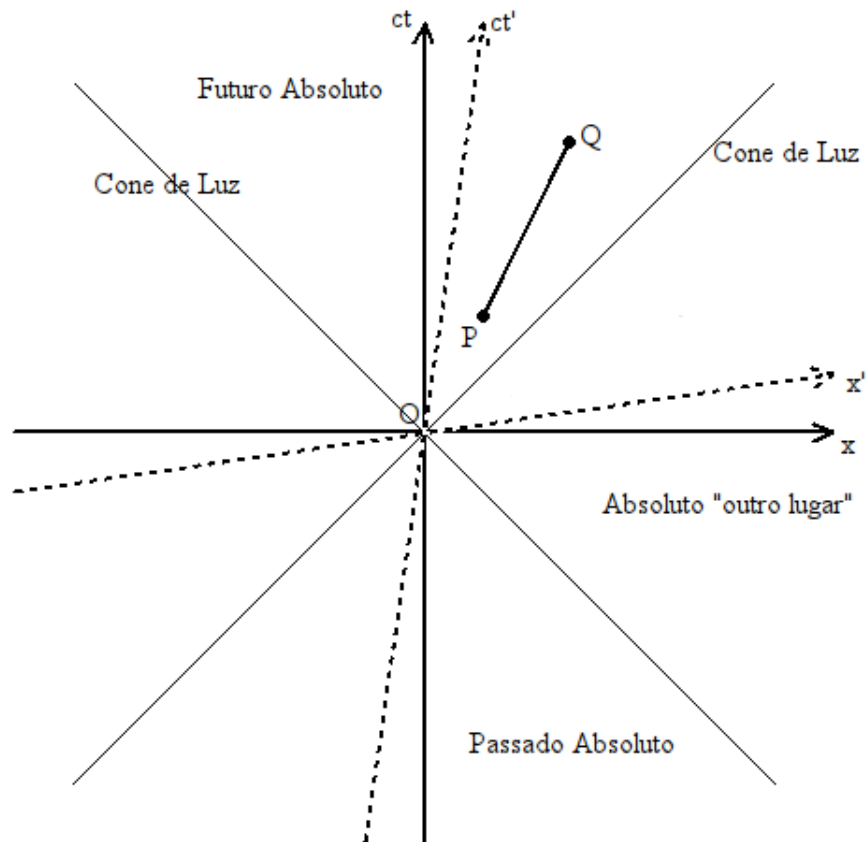
Em relação a um observador em O, todo evento acima do cone de luz ($t > \pm x/c$) está em seu futuro e todo evento abaixo do cone de luz ($t < \pm x/c$) está em seu passado, mas é possível escolher um referencial em que eles ocorrem na mesma posição de O. Eventos entre os cones de luz ($-x/c < t < x/c$, para x positivo, e $x/c < t < -x/c$, para x negativo) podem sempre ser simultâneos a O em algum referencial, mas sempre estarão em posições diferentes da de O.

3.3 FORMALISMO QUADRIDIMENSIONAL

A geometria que se estuda até o início de um curso de graduação em física (R , R^2 e R^3) é chamada de geometria euclidiana. Ela trata de um espaço (não “espaço-tempo”, pois não há a dimensão temporal) de, normalmente, até três dimensões (espaço euclidiano tridimensional). Porém, nada nos impede de conceber uma quarta dimensão espacial (à qual podemos associar um eixo w), tendo assim quatro coordenadas, (x, y, z, w) , como indica a figura (3.6). Um gráfico desses (com quatro eixos projetados num plano) é ininteligível para a maioria das pessoas, pois não é trivial conceber uma quarta direção ortogonal às outras três. A projeção de três eixos num plano é interpretada imaginando que um dos eixos “entra” e “sai” ortogonalmente ao plano, mas o mesmo recurso didático não pode ser usado ao se falar de quatro dimensões espaciais, pois não há como apontarmos para uma quarta direção linearmente independente no espaço físico.

O “espaço de Minkowski” (também chamado de “pseudo-euclidiano”) possui quatro dimensões, o intervalo invariante, em quatro dimensões e na forma diferencial, é escrito

Figura 3.5: Cone de luz, eventos no futuro e absolutamente em outro lugar em relação a O e intervalos tipo tempo e espaço.



Fonte: (autor, 2013).

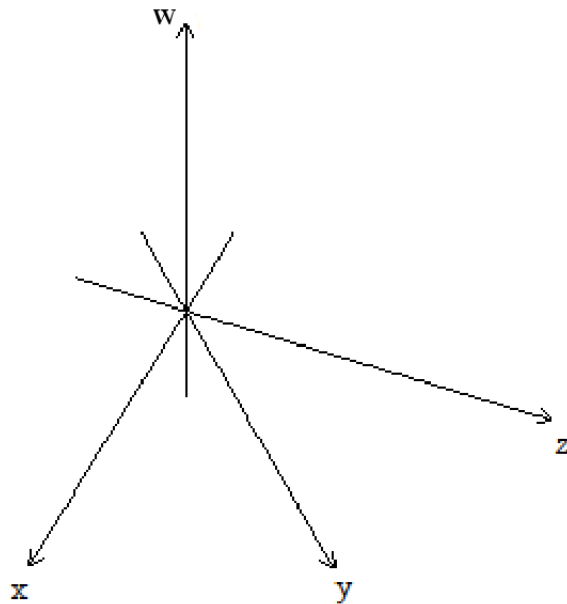
como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (3.4)$$

Ele difere de um espaço euclidiano quadridimensional por apresentar uma assinatura $(+ - - -)$ (ou $(- + + +)$, de acordo com a convenção escolhida), enquanto que o espaço euclidiano quadridimensional tem assinatura positivo-definida $(+ + + +)$. Fisicamente, a assinatura do espaço de Minkowski pode ser interpretada como havendo somente três dimensões espaciais e uma dimensão temporal (comumente diz-se que possui $3 + 1$ dimensões). As coordenadas de um ponto no espaço de Minkowski são escritas como (ct, x, y, z) , que definem um raio vetor no espaço quadridimensional de Minkowski, ao qual podemos nos referir abreviadamente por “4-raio vetor” [16]. Um vetor genérico nesse espaço é chamado de “quadrivetor” (4-vetor), com coordenadas representadas por x^α (chamadas de coordenadas contravariantes), temos que o quadrivetor X é (x^0, x^1, x^2, x^3) . Assim, o quadrado do comprimento de um quadrivetor é

$$(s)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (3.5)$$

Figura 3.6: Espaço euclidiano quadridimensional, projeção no plano.



Fonte: (autor, 2013).

No caso do 4-raio vetor, temos $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$.

Outro tipo de coordenada que se pode usar para representar um quadrivetor são as coordenadas covariantes x_i , tais que

$$x^0 = x_0, \quad x^1 = -x_1, \quad x^2 = -x_2, \quad x^3 = -x_3. \quad (3.6)$$

O produto escalar entre dois quadrivetores (X e Y) é escrito como

$$s^2 = x^\alpha y_\alpha = x^0 y_0 + x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3, \quad (3.7)$$

onde $x^\alpha y_\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 x^\alpha y_\alpha$ é a convenção de Einstein para índices repetidos. Pode-se escrever tanto na forma $x^\alpha y_\alpha$ quanto na forma $x_\alpha y^\alpha$, o resultado não é alterado.

A generalização dos quadrivetores são os quadritensores, os quadritensores de segunda ordem são definidos como tensores tais que se transformam (sob mudança de sistema de coordenadas) como o produto de dois quadrivetores. O abaixamento ou levantamento do índice temporal não afeta o sinal da componente, enquanto que o abaixamento ou levantamento de um índice espacial inverte o sinal da componente, por exemplo

$$x_{00} = x^{00}, \quad x_{ij} = x^{ij}, \quad x_i^j = -x^{ij}, \quad x_j^0 = x_{0j} \dots, \quad (3.8)$$

um tensor é dito simétrico se

$$x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha} \quad (3.9)$$

e é chamado de antissimétrico se

$$x_{\alpha\beta} = -x_{\beta\alpha}, \quad (3.10)$$

se $\alpha = \beta$, então $x_{\alpha\alpha} = -x_{\alpha\alpha} = 0$. O traço de um tensor e o produto escalar de dois tensores, são exemplos de operações de redução, que diminuem a ordem dos tensores em duas unidades (reduz a ordem de tensores de segunda ordem para zero, ou seja escalares).

O quadritensor unitário é o tensor δ_{β}^{α} tal que $\delta_{\beta}^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha}$, ou seja

$$(\delta_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

note que a matriz do tensor métrico de um espaço euclidiano quadridimensional é igual ao quadritensor unitário, pois não possui a coordenada temporal. O símbolo δ_{β}^{α} a rigor indica o coeficiente de um tensor, mas costuma-se usar o símbolo da componente para representar o próprio tensor.

O tensor métrico associado ao espaço de Minkowski é

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.12)$$

que é levemente diferente do tensor métrico associado ao espaço euclidiano, que corresponde ao quadritensor unitário em sua forma matricial, por isso o espaço de Minkowski é chamado de pseudo-euclidiano. O símbolo $\delta_{\beta\alpha}$ é simplesmente δ_{β}^{α} contraído.

O tensor métrico pode ser usado para mudar quadrivetores de coordenadas covariantes para contravariantes e vice-versa

$$x_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}x^{\beta}, \quad x^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}x_{\beta}. \quad (3.13)$$

Consequentemente, temos que

$$x^{\alpha}y_{\beta} = x^{\alpha}\eta_{\alpha\beta}y^{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}x_{\beta}y_{\beta} \quad (3.14)$$

3.4 TEMPO PRÓPRIO

Consideremos o intervalo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2, \quad (3.15)$$

onde dt' é o tempo do relógio atrelado ao referencial em movimento. Podemos escrever

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}, \quad (3.16)$$

então

$$dt' = ds/c = d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.17)$$

é chamado de tempo próprio.

3.5 QUADRIVELOCIDADE E QUADRIMOMENTO

Se derivarmos as coordenadas de um quadrivetor em relação ao intervalo s , teremos

$$v^\alpha = dx^\alpha / d\tau, \quad (3.18)$$

que é chamada de quadrivelocidade. Em componentes, temos

$$\vec{V} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (3.19)$$

Multiplicando esta última expressão por m_0 , obtemos o quadrimomento

$$(p^\mu) = \vec{P} = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}(v) \right). \quad (3.20)$$

Note que \vec{p} denota o momento ordinário e p^μ é o quadrimomento.

\vec{V} é um quadrivetor tangente à linha de universo da partícula. De $ds^2 = dx_\alpha dx^\alpha$, temos que as componentes da quadrivelocidade não são independentes

$$v_\alpha v^\alpha = c^2 \quad (3.21)$$

Isso advém do fato do produto escalar de dois quadrivetores ser um invariante. O produto escalar é feito fazendo o produto de um quadrivetor covariante por um contravariante ou

vice-versa. No caso do quadrimomento temos

$$p_\mu p^\mu = (E^2/c, \vec{p}) \cdot (E^2/c, -\vec{p}) = (E/c)^2 - p^2, \quad (3.22)$$

substituindo E e p por seus valores dados em (3.20), temos que

$$(E/c)^2 - p^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^2, \quad (3.23)$$

então

$$E^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4, \quad (3.24)$$

que é um invariante, chamado de “energia própria”, apesar de E e p não o serem. Algo interessante a se notar é que esse invariante possui a mesma estrutura que o intervalo invariante $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$.

4 INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL

4.1 PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

Na relatividade restrita, postulamos que todos os referenciais inerciais são equivalentes, ou seja, as mesmas leis são válidas em todos eles. Queremos, agora, estender esse princípio para os referenciais acelerados e referenciais expostos a campos gravitacionais. Como impulso inicial, faremos um pequeno experimento mental: Suponha um observador em uma caixa vedada no espaço vazio e outro (também em uma caixa) em queda livre sobre a Terra. O primeiro não sente força alguma por não estar próximo de qualquer fonte de campo e nem em movimento acelerado. Supondo que as dimensões da caixa sejam muito pequenas em comparação com as dimensões da Terra (de modo que o campo gravitacional possa ser considerado homogêneo e constante ali), o segundo também não sentirá força alguma, pois o “chão” que lhe “deveria” aplicar uma força normal de reação também está em queda (a igualdade de aceleração dos corpos em queda se deve a proporcionalidade fixa entre a massa inercial e a massa gravitacional - no caso, $m_g/m_i = 1$ - esse é o princípio da equivalência da mecânica newtoniana). Resulta disso que tanto um como o outro não podem dizer, sem correr o risco de errar, se estão no espaço distante ou em queda livre. Se, por outro lado, o observador no espaço distante sofrer aceleração e o observador sobre a Terra for mantido a uma altura fixa, tanto um como o outro não poderão especificar se estão acelerando ou parados sobre a Terra. O princípio da equivalência da relatividade geral consiste em afirmar que um observador em um referencial não inercial enxerga um campo gravitacional ou, equivalentemente, um observador em queda livre (considerando uma região suficientemente pequena) não enxerga campo gravitacional.

O princípio da equivalência pode ser enunciado como [18]

“Em todo ponto de um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um sistema de coordenadas onde as leis da natureza tomam a mesma forma que em um referencial não acelerado e isento de gravidade.”

Esse princípio apresenta a forma “forte” (exposta acima) e a forma “fraca”, esta última consiste em substituir “leis da natureza” por “leis do movimento”. Há também duas versões da forma forte, a “muito forte” (referente a “todos os fenômenos”) e a “meio forte” (referente a todos os fenômenos, com exceção da gravidade).

Nas palavras de Einstein, o princípio da equivalência é [7]

Todos os sistemas de coordenadas gaussianos são essencialmente equivalentes

para a formulação das leis gerais da natureza.

O motivo dele ter especificado “sistemas de coordenadas gaussianos” será exposto a seguir.

Faremos, agora, outro experimento mental (envolvendo rotação e consequências da relatividade restrita) [7][16]. Consideremos um corpo de referência K , tal que seja um referencial inercial, ou seja, um referencial em que são válidas as equações da relatividade restrita. Consideremos agora um corpo de referência K' que gire relativamente a K , para facilitar o raciocínio, suponha que esse corpo K' seja um disco.

Um observador em K' (B), num ponto diferente do centro do disco, sente uma força radial para fora. Um observador em K (A) julga que a força em K' advém da inércia do observador B, mas, este tem o direito, pelo princípio da relatividade, de se considerar em repouso, então (como consequência do experimento mental anterior) podemos dizer que ele enxerga um campo gravitacional cujo efeito é repelir os objetos radialmente para fora do disco.

Suponha que A utilize uma régua do referencial K' para realizar medidas, ela tem comprimento unitário quando colocada ao longo do diâmetro do disco. Ao se realizar a medida da circunferência, o valor obtido em número de réguas será maior que o obtido usando uma régua unitária de K (devido a contração do comprimento), mas, o número de réguas de K' que o observador B deverá obter ao medir a circunferência deve ser o mesmo, ou seja, em K' a circunferência dividida pelo diâmetro é maior que π . Se forem realizadas medidas com relógios a diferentes distâncias do centro, verificar-se-á que o tempo passa mais lentamente conforme a distância, ou seja a gravidade afeta também o tempo. Portanto, vemos que a geometria do espaço-tempo é afetado pelo campo gravitacional. Por isso Einstein referiu-se especificamente a sistemas de coordenadas gaussianos (o mais adequado seria “pseudo-riemanniano”).

Assim, podemos dizer que a teoria de Einstein consiste em supôr [5] que a gravidade é o resultado da geometria do espaço-tempo, e esta pode ser especificada pela generalização da métrica de Minkowski, ou seja

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (4.1)$$

No que se refere à parte espacial de (4.1), convém mencionar que há dois tipos de campo gravitacional, os de espaço plano (que podem ser “eliminados” por uma simples mudança de referencial, como o do disco girante) e os de espaço curvo (que não podem ser “eliminados” por uma simples mudança de referencial, como o campo gravitacional da Terra).

4.2 PARTÍCULA EM QUEDA LIVRE

Ainda não conhecemos as equações de campo de Einstein, mas conhecemos as consequências da relatividade restrita, de modo que podemos descrever sistemas a partir de referenciais inerciais (que podem ser chamados de “galileanos”, “eulerianos”, etc). Um observador em queda livre não sente efeitos de aceleração ou de campos gravitacionais, o que caracteriza um referencial inercial (localmente inercial, no caso). A equação de movimento de uma partícula no referencial em queda livre (onde não há força resultante) de coordenadas ξ^α é

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (4.2)$$

assumindo $c = 1$, temos que o tempo próprio é

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (4.3)$$

o que corresponde ao tempo próprio do espaço de Minkowski.

Suponhamos um sistema de coordenadas generalizado x^μ (que pode ser cartesiano, curvilíneo, acelerado, rotacional, etc), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) &= 0 \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, e usando a igualdade $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda$ e a definição de conexão afim

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (4.5)$$

obtemos a equação de movimento generalizada

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4.6)$$

que é também conhecida como equação da geodésica, ou seja, ela descreve a trajetória de uma partícula à qual não é aplicada nenhuma força, exceto a “força gravitacional”, que, entretanto, do ponto de vista da Relatividade Geal, não é uma força propriamente dita. O tempo próprio é dado então por

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} dx^\mu \frac{d\xi^\beta}{dx^\nu} dx^\nu, \quad (4.7)$$

podemos assim definir a métrica como

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \frac{d\xi^\beta}{dx^\nu}, \quad (4.8)$$

em termos da métrica

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.9)$$

esse é o tempo próprio do referencial em queda livre em termos das coordenadas de qualquer referencial.

A equação geodésica para uma partícula de massa de repouso nula (como um fóton, apesar desse conceito ser da eletrodinâmica quântica) é idêntica à equação de movimento da partícula massiva, a não ser pelo fato de a derivação não poder ser feita em relação ao tempo próprio, pois ele se anula [18].

4.3 RELAÇÃO ENTRE A CONEXÃO AFIM E A MÉTRICA

Na seção sobre o princípio da equivalência, mencionamos que a teoria da relatividade geral responsabiliza a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo pelos fenômenos gravitacionais, mas, como vimos na seção sobre a partícula em queda livre, a equação do movimento depende da conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, ou seja, ela é o campo que determina a força gravitacional. Podemos, no entanto, escrever $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ em termos de $g_{\mu\nu}$ e, assim, preservar o que foi dito. Para tal, primeiro derivamos a equação (4.8) em relação à coordenada x^λ e obtemos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{dx^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \eta_{\alpha\beta}. \quad (4.10)$$

Tomemos agora a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e a multipliquemos por $\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\gamma}$, disso obtemos

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma}. \quad (4.11)$$

Substituindo em (4.10), chegamos à expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\gamma \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\gamma} \eta_{\alpha\beta} \\ &= \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma g_{\gamma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\gamma g_{\gamma\mu}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Somando $\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}$ e subtraindo $\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}$ de (4.12), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} &= \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma g_{\gamma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\gamma g_{\gamma\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\gamma g_{\gamma\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\gamma g_{\gamma\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\gamma g_{\gamma\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\gamma g_{\gamma\lambda} \\ &= 2\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma g_{\gamma\nu}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

dizemos que $\Gamma_{\nu\mu}^\gamma$ e $g_{\mu\nu}$ são simétricos sobre permutação de μ e ν .

Podemos agora expressar a conexão afim em termos da métrica, para tal devemos considerar que $g^{\mu\nu}$ é o inverso de $g_{\mu\nu}$ e que $g^{\nu\sigma}g_{\kappa\nu} = \delta_{\kappa}^{\sigma}$, assim, multiplicando (4.13) por $g^{\nu\sigma}$, obtemos

$$g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) = 2\Gamma_{\lambda\mu}^{\gamma} g^{\nu\sigma} g_{\gamma\nu} = 2\delta_{\kappa}^{\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^{\gamma}, \quad (4.14)$$

então, temos enfim a relação entre a conexão afim e a métrica

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \lambda\mu \end{array} \right\}. \quad (4.15)$$

A conexão afim também é conhecida como “símbolo de Christoffel de segunda espécie”. O símbolo de Christoffel de primeira espécie é

$$[\lambda\mu, \sigma] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \right) = \Gamma_{\lambda\mu\sigma}. \quad (4.16)$$

4.4 DILATAÇÃO DO TEMPO

A medida de tempo de referenciais submetidos à campos gravitacionais pode ser afetada, para tal análise consideremos o caso geral de uma partícula em um campo arbitrário e com velocidade arbitrária. O intervalo de tempo entre dois eventos quando vistos de um referencial localmente inercial, é, da mesma forma que em (4.3), dado por

$$d\tau = (\eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta})^{1/2}, \quad (4.17)$$

introduzindo coordenadas generalizadas x^{ν} , temos

$$d\tau = \left(\eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^{\alpha}}{dx^{\mu}} dx^{\mu} \frac{d\xi^{\beta}}{dx^{\nu}} dx^{\nu} \right)^{1/2}, \quad (4.18)$$

ou então

$$d\tau = (g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu})^{1/2}. \quad (4.19)$$

Considerando que o relógio esteja em movimento, com velocidade dx^{ν}/dx^0 , dividindo ambos os lados de (4.19) por $dt = dx^0$ e o isolando, temos

$$dt = d\tau \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{dx^{\nu}}{dt} \right)^{-1/2}. \quad (4.20)$$

Se o relógio estiver em repouso, todos os termos diferentes de $dx^0/dx^0 = 1$ anulan-se, de modo que dt é

$$dt = d\tau (g_{00})^{-1/2}. \quad (4.21)$$

5 ELEMENTOS DE ANÁLISE TENSORIAL

5.1 LEIS DE TRANSFORMAÇÃO

Nesta seção, apresentamos algumas regras de transformação de quadrivetores e quadritensores sobre mudanças de sistemas de coordenadas, essas são algumas das ferramentas básicas do formalismo utilizado na relatividade geral. A transformação de um escalar é a mais simples, pois não muda sobre mudanças de coordenadas: $a' = a$. A segunda mais simples é a transformação de quadrivetores. Um vetor contravariante se transforma segundo a regra

$$v'^{\mu} = v^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \quad (5.1)$$

enquanto que um vetor covariante se transforma pela regra

$$v'_{\mu} = v_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}. \quad (5.2)$$

Em ambos os casos (e em todos os posteriores, sejam vetores ou tensores) vale que $v = v(x)$ e $v' = v'(x')$.

Tensores covariantes e contravariantes se transformam como produtos de vetores, ou seja

$$T'^{\mu}_{\nu}{}^{\eta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\gamma}} T'^{\kappa}_{\lambda}{}^{\gamma}. \quad (5.3)$$

Um tensor é uma generalização do conceito de vetor, em alguns casos pode até ser usado como uma forma de compactar vetores numa única entidade (assim como certos vetores para escalares). Um vetor, assim, pode ser considerado um caso específico de tensores, tensores com um único índice, e escalares tensores sem índice. No entanto, nem tudo são tensores [18], a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ não se transforma como um tensor (exceto sob transformações lineares de coordenadas), então não é um tensor, apesar de sua aparência.

Se dois tensores do mesmo tipo são iguais em um certo sistema de referência x^{μ} , então eles serão iguais no sistema x'^{μ} . Exemplificando, se

$$A^{\mu}_{\nu}{}^{\kappa} = B^{\mu}_{\nu}{}^{\kappa} \quad (5.4)$$

então

$$A'^{\mu}_{\nu}{}^{\kappa} = B'^{\mu}_{\nu}{}^{\kappa}. \quad (5.5)$$

No entanto, se a igualdade é estabelecida entre tensores que não do mesmo tipo (como entre covariante e contravariante, de segunda ordem e escalar, mistos de índice não coincidentes), nada garante que ela será válida em todo referencial. Com essa propriedade, pode-se imediatamente identificar toda uma classe de equações invariantes sob mudanças de coordenadas generalizadas.

5.2 OPERAÇÕES COM TENSORES

Combinação linear de tensores: A combinação linear de tensores com os mesmos índices é um tensor com esses índices, assim, se a e b forem escalares, tem-se

$$T^\mu{}_\nu \equiv aA^\mu{}_\nu + bB^\mu{}_\nu. \quad (5.6)$$

Pode-se verificar que é um tensor efetuando a transformação de mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} T'^\mu{}_\nu &\equiv aA'^\mu{}_\nu + bB'^\mu{}_\nu \\ &= a \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A^\rho{}_\sigma + b \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} B^\rho{}_\sigma \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} T^\rho{}_\sigma. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Produto de tensores: O produto de dois tensores resulta num tensor com os mesmos índices dos tensores originais.

$$T^\mu{}_\nu{}^\kappa \equiv A^\mu{}_\nu B^\kappa. \quad (5.8)$$

Como todo tensor, ele deve satisfazer a regra de transformação de tensores, assim

$$\begin{aligned} T'^\mu{}_\nu{}^\kappa &\equiv A'^\mu{}_\nu B'^\kappa \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A^\rho{}_\sigma \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\eta} B^\eta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\eta} T^\rho{}_\sigma{}^\eta. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Contração de tensores: Se houver índices repetidos em cima e em baixo, podemos reescrever (contrair) esse tensor como um tensor de ordens mais baixas, o que depende do número de contrações. Por exemplo

$$T^{\mu\nu} \equiv T^\mu{}_\eta{}^{\nu\eta}. \quad (5.10)$$

5.3 DERIVADA COVARIANTE

Num espaço curvo o transporte paralelo de um vetor altera suas coordenadas. Não pode-se simplesmente derivar um tensor e obter outro tensor. Suponha um vetor contravariante A^μ em x^μ . Em $x^\mu + dx^\mu$ será $A^\mu + dA^\mu$. Realizando um transporte paralelo de A^μ para $x^\mu + dx^\mu$, sua variação será δA^μ . A diferença entre ambos vetores no mesmo ponto é agora

$$\begin{aligned} DA^\mu &= (A^\mu + dA^\mu) - (A^\mu + \delta A^\mu) \\ &= dA^\mu - \delta A^\mu \end{aligned} \quad (5.11)$$

a variação por transporte paralelo é

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\kappa\nu}^\mu A^\kappa dx^\nu, \quad (5.12)$$

e analogamente para um covariante $\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\kappa A_\kappa dx^\nu$, prosseguido, considerando que

$$dA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (5.13)$$

obtém-se

$$DA^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\kappa\nu}^\mu A^\kappa \right) dx^\nu, \quad (5.14)$$

o termo entre parenteses é a derivada covariante de um vetor contravariante. Para um vetor covariante

$$DA_\mu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa A_\kappa \right) dx^\nu. \quad (5.15)$$

Enfim, pode-se denotar a derivada covariante por “;” no subíndice, ou por ∇_ν , assim

$$\nabla_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\kappa\nu}^\mu A^\kappa \quad (5.16)$$

e para um vetor covariante

$$\nabla_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa A_\kappa. \quad (5.17)$$

Pode-se demonstrar que o $\Gamma_{\kappa\nu}^\mu$ é a conexão afim fazendo a derivada covariante da métrica e manipulando os índices, de modo que obtém-se 4.16. Em coordenadas galileanas (espaço plano) a conexão afim é nula, de modo que a derivada covariante se reduz a derivada convencional. Notemos também que a derivada covariante de um vetor é um tensor, pois

se transforma como um tensor

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\nu} - \Gamma'_{\mu\nu}{}^\kappa A'_\kappa = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\eta} - \Gamma_{\sigma\eta}^\zeta A_\zeta \right), \quad (5.18)$$

e de forma análoga para um vetor contravariante.

Pode-se estender essa definição para tensores de ordem mais elevada adicionando ou subtraindo conexões de acordo com o índice e sua posição, por exemplo

$$\nabla_\nu T^{\mu\eta}{}_\lambda = \frac{\partial T^{\mu\eta}{}_\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\kappa}^\mu T^{\kappa\eta}{}_\lambda + \Gamma_{\nu\alpha}^\eta T^{\mu\alpha}{}_\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho T^{\mu\eta}{}_\rho. \quad (5.19)$$

6 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

6.1 TENSOR DE CURVATURA

A métrica não é o melhor método de distinguir um espaço plano de um espaço curvo, não é trivial definir se o espaço de um referencial em rotação é plano ou curvo somente olhando para sua métrica, por exemplo (ele é plano, apesar de não ser um espaço de Minkowski). O modo correto de diferenciar um espaço plano de um curvo [1] é fazer transporte paralelo de vetores. Num espaço plano, se vetores forem movidos ao longo de geodésicas de modo que realizem um circuito fechado (retornem ao ponto inicial) e se forem comparados, não será notada qualquer mudança. Já num espaço esférico bidimensional notar-se-ia uma mudança na direção do vetor.

Suponha que seja feito tal transporte paralelo (mas que seja infinitamente pequeno), em um espaço-tempo S qualquer, de um vetor A_α . A variação desse vetor é [16]

$$\Delta A_\alpha = \frac{1}{2} \oint \Gamma_{\alpha\nu}^\kappa A_\kappa dx^\nu = \oint \delta A_\alpha, \quad (6.1)$$

pelo teorema de Stokes

$$\oint f_i dx^i = \frac{1}{2} \int da^{ji} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right),$$

desse modo

$$\Delta A_\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Gamma_{\alpha\eta}^\kappa A_\kappa) - \frac{\partial}{\partial x^\eta} (\Gamma_{\alpha\mu}^\kappa A_\kappa) \right] \Delta a^{\mu\eta}, \quad (6.2)$$

onde $\Delta a^{\mu\eta}$ é uma área infinitesimal. Derivando, obtêm-se

$$\Delta A_\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\eta}^\kappa A_\kappa + \Gamma_{\alpha\eta}^\kappa \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\eta} \Gamma_{\alpha\mu}^\kappa A_\kappa - \Gamma_{\alpha\mu}^\kappa \frac{\partial}{\partial x^\eta} A_\kappa \right] \Delta a^{\mu\eta}, \quad (6.3)$$

como a derivada covariante do vetor ao longo da curva é zero,

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta A_\beta,$$

então

$$\Delta A_\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\eta}^\kappa A_\kappa + \Gamma_{\alpha\eta}^\kappa \Gamma_{\kappa\mu}^\beta A_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\eta} \Gamma_{\alpha\mu}^\kappa A_\kappa - \Gamma_{\alpha\mu}^\kappa \Gamma_{\kappa\eta}^\beta A_\beta \right] \Delta a^{\mu\eta}, \quad (6.4)$$

agora trocando-se β por κ nos termos com duas conexões

$$\Delta A_\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\eta}^\kappa + \Gamma_{\alpha\eta}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\eta} \Gamma_{\alpha\mu}^\kappa - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\eta}^\kappa \right] A_\kappa \Delta a^{\mu\eta}. \quad (6.5)$$

O termo entre colchetes é definido como o tensor de curvatura

$$R_{\alpha\nu\gamma}^\kappa \equiv \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma_{\gamma\nu}^\kappa + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\kappa - \Gamma_{\gamma\nu}^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\kappa. \quad (6.6)$$

Esse foi o modo geométrico de obter o tensor de curvatura (ou tensor de Riemann). É possível obtê-lo por meios puramente algébricos também [18].

6.2 PROPRIEDADES DO TENSOR DE RIEMANN

Forma covariante: Pode-se passar o tensor $R_{\alpha\nu\gamma}^\kappa$ para uma forma completamente covariante usando a métrica para abaixar o índice

$$R_{\lambda\alpha\nu\gamma} = g_{\lambda\kappa} R_{\alpha\nu\gamma}^\kappa, \quad (6.7)$$

este tensor apresenta as seguintes propriedades:

Simetria: A permutação dos dois pares de índices não muda o sinal do tensor,

$$R_{\lambda\alpha\nu\gamma} = R_{\nu\gamma\lambda\alpha}. \quad (6.8)$$

Antissimetria: Permutações ímpares mudam o sinal, pares não,

$$R_{\lambda\alpha\nu\gamma} = -R_{\alpha\lambda\nu\gamma} = -R_{\lambda\alpha\gamma\nu} = R_{\alpha\lambda\gamma\nu}. \quad (6.9)$$

Ciclicidade: A soma do tensor de curvatura com suas permutações cíclicas dos três últimos índices é nula,

$$R_{\lambda\alpha\nu\gamma} + R_{\lambda\gamma\alpha\nu} + R_{\lambda\nu\gamma\alpha} = 0. \quad (6.10)$$

Identidade de Ricci: A derivada covariante de um vetor não comuta num espaço curvo,

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) v^\eta = R^\eta{}_{\kappa\mu\nu} v^\kappa. \quad (6.11)$$

Tensor de Ricci: As simetrias do tensor de Riemann implicam que ele tem somente vinte componentes independentes em quatro dimensões, de 6.9 temos que a contração entre os dois primeiros índices ou entre os dois últimos índices se anula, mas a contração

entre o primeiro e o terceiro índice não se anula. O tensor de Ricci é

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\eta_{\mu\eta\nu}. \quad (6.12)$$

De 6.8 tem-se que

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (6.13)$$

Escalar de Ricci: O escalar de Ricci ou escalar de curvatura é a contração do tensor de Ricci

$$R \equiv R^\mu_{\mu}. \quad (6.14)$$

É um número que indica o quanto o elemento de volume desvia de valor quando comparado com o elemento de volume um espaço de Minkowski.

Identidade de Bianchi: A derivada covariante do tensor de curvatura é

$$\nabla_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) \quad (6.15)$$

então

$$\nabla_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \nabla_\kappa R_{\lambda\mu\eta\nu} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\kappa\eta} = 0, \quad (6.16)$$

que é a identidade de Bianchi. Ela implica no importante resultado de que

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0, \quad (6.17)$$

onde

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \quad (6.18)$$

é chamado de tensor de Einstein.

6.3 TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Na gravitação newtoniana a fonte de gravidade é a massa dos corpos. Mas, na relatividade restrita vê-se que há uma equivalência entre massa e energia (até mesmo partículas não massivas apresentam alguma inércia). Assim, é de se esperar que a fonte de gravitação na relatividade geral seja a densidade de energia em si mesma. Mas a densidade de energia não é um escalar, pois (das transformações de Lorentz) o volume [1] não é um escalar e a própria energia é uma componente do quadrimomento. A densidade de energia, enfim, é uma componente do tensor de segunda ordem $T^{\mu\nu}$ que inclui a densidade de momento (fluxo de energia) e o fluxo de momento:

- $T^{00} \rightarrow$ densidade de energia;

- $T^{i0} = T^{0i} \rightarrow$ densidade de momento;
- $T^{ii} \rightarrow$ tensão normal ou pressão (quando independe da direção);
- $T^{ij} \rightarrow$ quando $i \neq j$, é a tensão de cisalhamento.

Por isso esse tensor pode ser chamado de “tensor energia momento” ou “tensor estresse-energia”. A conservação da energia-momento é expressa pelo anulamento da derivada covariante do tensor $T^{\mu\nu}$:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (6.19)$$

6.4 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Para obter as equações de campo para a gravidade, considera-se que massa-energia é a fonte da curvatura do espaço-tempo [15]. A massa-energia é expressa pelo tensor energia-momento (ou energia-extresse) $T_{\mu\nu}$, que deve se conservar, ou seja

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (6.20)$$

As equações de campo devem expressar como o espaço-tempo se curva na presença de matéria-energia, devem, portanto, apresentar a forma

$$G_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}, \quad (6.21)$$

onde α é uma constante a ser definida, G é um tensor ainda desconhecido que: (a) se anula quando o espaço é plano; (b) expressa a curvatura do espaço-tempo, ou seja, é constituído somente pelo tensor de Riemann e pela métrica; (c) seja linear em Riemann (de modo a remover ambiguidades em $G_{\mu\nu}$, de modo que as equações para o campo gravitacional sejam uniformes em escala [18]); (d) seja simétrico e de ordem dois; e (e) obedece a lei de conservação

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (6.22)$$

O único tensor que atende todos esses requisitos é o tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$, definido na equação (6.18). Assim

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \alpha T^{\mu\nu}. \quad (6.23)$$

Para encontrar o valor de α , considere uma partícula em queda livre através de um buraco que atravesse um planeta com densidade ρ . De acordo com Newton é a densidade ρ que governa a aceleração ($\nabla^2\phi = 4\pi\rho$) e de acordo com Einstein é a curvatura do espaço-tempo ($R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$), a comparação os dois sugere que a versão relativística da equação de campo newtoniana é $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 4\pi T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ [1], então

$$R_{00} = 4\pi\rho. \quad (6.24)$$

O traço de (6.23) é

$$R - 2R = \alpha T = -R, \quad (6.25)$$

o que implica que

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}g_{00}R + \alpha T_{00} \\ &= \frac{1}{2}\alpha(-T + 2T_{00}) \\ &= \frac{1}{2}\alpha(-T^0_0 - T^i_i + 2T_{00}) \\ &= \frac{1}{2}\alpha(-T_{00} - T^i_i + 2T_{00}) \\ &= \frac{1}{2}\alpha(-T^i_i + T_{00}) \cong \frac{1}{2}\alpha\rho. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Então, como a contribuição das componentes de pressão T_{ii} do tensor energia-momento são muito pequenas comparadas com T_{00} (para um corpo como a Terra), de (6.24) e de (6.26), chega-se ao valor $\alpha = 8\pi$, de modo que as equações de Einstein são

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi T^{\mu\nu}. \quad (6.27)$$

Qualquer espaço-tempo pode ser considerado uma solução das equações de Einstein [1], bastando para isso achar a distribuição de matéria-energia associada. Para limitar quais métricas podem ser consideradas soluções, costuma-se usar condições de energia (elas não são leis físicas, mas somente considerações razoáveis sobre densidades de energia que podemos encontrar no universo). As mais comuns são:

- “Condição fraca de energia”: $T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu \geq 0$, para todos os observadores, onde $T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu$ é a densidade de energia e n_ν são vetores unitários do tipo tempo que apontam para o futuro.
- “Condição forte de energia”: $T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu - T/2 \geq 0$, para todos os observadores, onde $T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu$ é a densidade de energia, $T = T^\nu_\nu$ e n_ν são vetores unitários do tipo tempo que apontam para o futuro. É equivalente a $R^{\mu\nu}n_\mu n_\nu \geq 0$.
- “Condição de energia nula”: $T^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \geq 0$, ou seja, a densidade de energia mais cada uma das pressões deve ser não-negativa (k_ν são vetores nulos que apontam para o futuro). É equivalente a $R^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \geq 0$.

As duas primeiras condições são independentes, mas ambas implicam na terceira.

6.5 SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

A métrica de Schwarzschild foi obtida por Karl Schwarzschild alguns meses após Einstein publicar suas equações de campo. Ela trata do campo gravitacional externo

associado a uma esfera massiva estática. Como quer-se uma métrica estacionária e esfericamente simétrica, a forma geral dela pode ser escrita em coordenadas esféricas como [17]

$$ds^2 = e^{2f} dt^2 - e^{2h} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad (6.28)$$

onde $f = f(r)$ e $h = h(r)$. A forma exponencial será conveniente para os cálculos posteriormente. As conexões que não se anulam são

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= f', & \Gamma_{rr}^r &= h', & \Gamma_{tt}^r &= f' e^{2f-2h}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2h}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \text{sen}^2 \theta e^{-2h}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\text{sen} \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\phi}^\phi = 1/r, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta, \end{aligned} \quad (6.29)$$

onde $f' = \frac{df}{dr}$ e $h' = \frac{dh}{dr}$. O tensor de Ricci pode ser construído a seguir

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2f-2h} \left[f' + (f')^2 - f'h' + \frac{2}{r} f' \right], \\ R_{rr} &= - \left[f'' + (f')^2 - f'h' - \frac{2}{r} h' \right], \\ R_{\theta\theta} &= 1 - e^{-2h} (1 + r f' - r h') = R_{\phi\phi} / \text{sen}^2 \theta, \end{aligned} \quad (6.30)$$

e também o escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R &= e^{-2h} \left[f'' + (f')^2 - f'h' + 2f'/r \right] \\ &+ e^{-2h} \left[f'' + (f')^2 - f'h' - 2h'/r \right] \\ &- \frac{1}{r^2} \left[1 - e^{-2h} (1 + r f' - r h') \right] \\ &- \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \left[1 - e^{-2h} (1 + r f' - r h') \right] \text{sen}^2 \theta \\ &= 2e^{-2h} \left[f'' + (f')^2 - f'h' + 2f'/r - 2h'/r + (1 - e^{2h})/r^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Assim, pode-se obter também o tensor de Einstein. Considerando que o tensor energia-momento de um fluido é dado pela forma geral

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)n_\mu n_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (6.32)$$

como a esfera é estática e a condição de normalização $g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 1$ deve ser satisfeita, o tensor energia-momento se reduz a

$$T_{tt} = \rho e^{2f}, \quad T_{rr} = \rho e^{2h}, \quad T_{\theta\theta} = \rho r^2, \quad T_{\phi\phi} = \rho r^2 \text{sen}^2 \theta. \quad (6.33)$$

Substituindo esses termos na equação de Einstein, obtém-se três equações diferenciais (as equações para “ $\theta\theta$ ” e “ $\phi\phi$ ” são iguais e todas as outras são vazias), ou seja, para tt

$$\frac{1}{r^2} e^{2f} \frac{d}{dr} (r - r e^{-2h}) = 8\pi e^{2f} \rho, \quad (6.34)$$

para rr

$$\frac{1}{r^2}(1 + 2rf' - e^{2h}) = 8\pi e^{2h}\rho \quad (6.35)$$

e para $\theta\theta$ e $\phi\phi$

$$r^2 e^{-2h}(f'' + (f')^2 - f'h' + f'/r - h'/r) = 8\pi r^2 \rho. \quad (6.36)$$

As duas primeiras equações permitem achar f e h e fornecem a solução para a região externa da esfera massiva. Enfim, o intervalo achado (métrica) é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (6.37)$$

O limite newtoniano pode ser obtido fazendo uma aproximação para campos fracos ou muito distantes da fonte para o termo radial da métrica de Schwarzschild (em SI)

$$ds^2 \cong \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2MG}{c^2 r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (6.38)$$

como as velocidades envolvidas são muito menores que a velocidade da luz ($\frac{dr}{dt} \ll c$), o termo somado na parte radial pode ser desprezado, o que resulta em

$$ds^2 \cong \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (6.39)$$

ou seja, a maior parte do que experimenta-se como gravidade no cotidiano é o resultado da alteração da geometria do tempo e não do espaço. E mais, considerando o resultado obtido em (6.40), nota-se que o tempo é mais lento próximo à Terra (ou outro corpo massivo esférico) que longe dela, ou seja

$$dt = d\tau \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1/2}, \quad (6.40)$$

para valores de r maiores que o raio da Terra.

A lei newtoniana da gravitação pode ser obtida da equação da geodésica, após algumas manipulações simples [5], chega-se a

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{tt}^i - \Gamma_{tj}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{tj}^t \frac{dx^j}{dt} + \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{jk}^t \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}, \quad (6.41)$$

descartando os termos em v/c , obtêm-se a lei pseudonewtoniana da gravitação (onde considerou-se a métrica de Schwarzschild completa, não seu limite newtoniano, para o cálculo de Γ_{tt}^i), em SI:

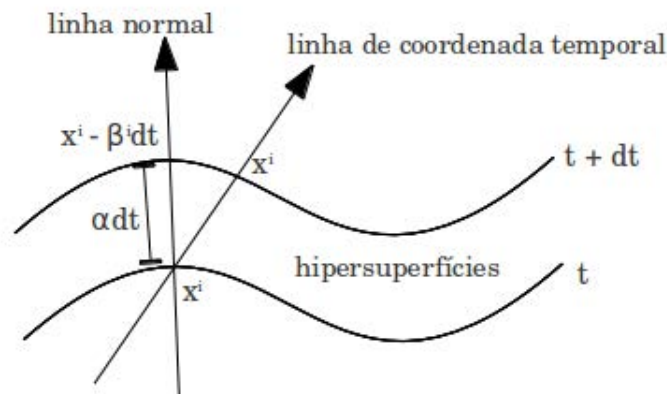
$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\Gamma_{tt}^r = \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}, \quad (6.42)$$

de onde pode-se facilmente visualizar a lei de Newton da gravitação fazendo c muito grande. O segundo termo entre parenteses expressa a existência de um horizonte de eventos (buraco negro).

6.6 FORMALISMO 3+1

No estudo das métricas de warp drive será utilizado o formalismo 3+1 da relatividade geral, que é empregado em relatividade numérica (esse formalismo permite uma visão mais intuitiva da teoria da relatividade geral) [1] [15]. Ele consiste na foliação do espaço-tempo em sucessivos espaços tridimensionais (hipersuperfícies do tipo espaço) ao longo do eixo de um parâmetro t (chamado função de tempo universal, mas que não corresponde necessariamente ao tempo próprio de qualquer referencial). Assim, cada hipersuperfície é chamada de uma *sincronização*.

Figura 6.1: Foliação do espaço-tempo em hipersuperfícies.



Fonte: (autor, 2013).

Considerando agora duas hipersuperfícies sucessivas (S_t e S_{t+dt}) de uma certa foliação do espaço-tempo, temos para ela, como é mostrado na figura, os seguintes elementos: a **métrica tridimensional** γ_{ij} , tal que

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j; \quad (6.43)$$

o **tempo próprio** $d\tau$ entre as duas hipersuperfícies, medido por um observador movendo-se ortogonalmente a elas (referencial inercial), ou seja

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt, \quad (6.44)$$

onde α é a função lapso; e a **velocidade relativa** β^i (também chamado de vetor deslocamento) entre os observadores inerciais e as linhas de posição espacial constante, ou seja

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^j)dt, \quad (6.45)$$

onde $x_{t+dt}^i - x_t^i = dx^i$. A função lapso e o vetor deslocamento são arbitrários e carregam informação sobre o sistema de coordenadas escolhido, eles são chamados de funções de gauge.

Em termos desses elementos, o intervalo assume a forma

$$ds^2 = (\alpha^2 + \beta_i \beta^i)dt^2 - 2\beta_i dt dx^i - \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.46)$$

onde abreviou-se $\beta_i \equiv \gamma_{ij} \beta^j$.

Podemos escrever agora o vetor n^μ normal às hipersuperfícies, que corresponde a direção da quadrivelocidade do referencial inercial, ou seja, $n^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, então

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^1/\alpha, -\beta^2/\alpha, -\beta^3/\alpha), \quad n_\mu = (\alpha, 0, 0, 0) \quad (6.47)$$

Em termos do vetor normal n^μ , podemos escrever a métrica $\gamma_{\mu\nu}$ como a projeção da métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo quadridimensional sobre cada uma das foliações S tridimensionais, tomando o cuidado de que $\gamma_{\mu\nu}$ é uma métrica quadridimensional, mas com os termos incluindo o tempo triviais. Assim

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (6.48)$$

vê-se que $\gamma_{\mu\nu}$ é operador projeção sobre as foliações, ele será útil na introdução do tensor de curvatura externa, a seguir.

6.7 CURVATURA EXTRÍNSECA

Existem dois tipos de curvatura do espaço, a intrínseca, definida pelo tensor de curvatura de Riemann e a extrínseca, definida pelo modo como o espaço de dimensão n é visto a partir de um espaço de dimensão $n + 1$. A curvatura intrínseca é percebida tanto por observadores imersos no espaço em questão quanto por observadores fora dele, já a extrínseca pode não ser percebida pelo observador interno. Um exemplo é um cilindro bi-dimensional imerso num espaço tridimensional, ele é intrinsecamente plano, mas apresenta curvatura quando visto de “fora”.

No caso das foliações em que o espaço-tempo foi dividido na seção anterior, a curvatura intrínseca é definida pela métrica γ_{ij} . Já a curvatura extrínseca é definida pelo modo como o vetor normal muda conforme realiza-se seu transporte paralelo. O tensor de curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ é a medida da variação do vetor normal sob transporte paralelo ao longo da hipersuperfície.

O operador projeção sobre as foliações é a própria métrica $\gamma_{\mu\nu}$

$$\gamma_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + n^{\alpha}n_{\beta}. \quad (6.49)$$

Assim, o tensor de curvatura extrínseca é

$$K_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu}^{\alpha}\nabla_{\alpha}n_{\nu} = -(\nabla_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}n^{\alpha}\nabla_{\alpha}n_{\nu}), \quad (6.50)$$

ou seja, é a projeção sobre a foliação da variação do vetor normal, de modo que $K_{\mu\nu}$ é puramente espacial ($n^{\mu}K_{\mu\nu} = 0$), de modo que é conveniente se referir somente aos termos K_{ij} do tensor. Uma propriedade importante do tensor de curvatura extrínseca é que ele é simétrico

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}. \quad (6.51)$$

De [1] e [15], temos que o tensor de curvatura extrínseca (em suas componentes espaciais) pode ser escrito como

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha}(\nabla_i\beta_j + \nabla_j\beta_i - \partial_t\gamma_{ij}). \quad (6.52)$$

7 MÉTRICA DE ALCUBIERRE

Neste capítulo será exposta a métrica de Alcubierre, que usa da idéia de expansão do espaço para dar viabilidade teórica de uma viagem superluminal (ou, para os menos exagerados, fazer uma partícula de teste mover-se a tal velocidade). A idéia essencialmente é fazer com que a velocidade global da hipotética nave seja maior que a velocidade da luz (o limite local da velocidade da luz é mantido intocado).

Usando do método chamado “engenharia de métrica” (imaginar uma métrica e calcular depois a distribuição de energia associada à ela), Alcubierre [2] propôs uma métrica que permite velocidades globais superiores a da luz. Considerando o formalismo 3 + 1, o intervalo possui a forma

$$ds^2 = (\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 - 2\beta_i dt dx^i - \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (7.1)$$

Uma métrica que vai empurrar uma espaçonave ao longo de um trajetória arbitrária $x_s(t)$ é

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - v_s^2 f^2(r_s(t))) dt^2 + 2v_s f(r_s(t)) dt dx - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= dt^2 - (dx - v_s f dt)^2 - dy^2 - dz^2, \end{aligned} \quad (7.2)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta^1 &= -v_s f(r_s(t)) \\ \beta^2 &= \beta^3 = 0 \\ \gamma_{ij} &= -\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sendo que $v_s = \frac{d}{dt} x_s$, $r_s(t) = \sqrt{(x - x_s)^2 + y^2 + z^2}$ e

$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s + R)) - \tanh(\sigma(r_s - R))}{2 \tanh(\sigma R)},$$

onde

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(r_s) = \begin{cases} 1, & r_s \leq R \\ 0, & r_s > R. \end{cases} \quad (7.4)$$

Tem-se, então, que o espaço tridimensional é plano, e, como a função lapso $\alpha = 1$, as curvas do tipo tempo normais às hipersuperfícies são geodésicas. Mas há um vetor deslocamento não trivial associado à bolha de raio $\sim R$ (supondo um valor grande para σ) centrada em x_s . Para analisar como esse vetor afeta o espaço tempo ao redor, deve-se usar o tensor de curvatura extrínseca.

7.1 CONTRAÇÃO E DILATAÇÃO DO ESPAÇO

O tensor de curvatura extrínseca é dado por

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha}(\nabla_i\beta_j + \nabla_j\beta_i - \partial_t g_{ij}), \quad (7.5)$$

que se reduz a

$$K_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i\beta_j + \partial_j\beta_i), \quad (7.6)$$

assim

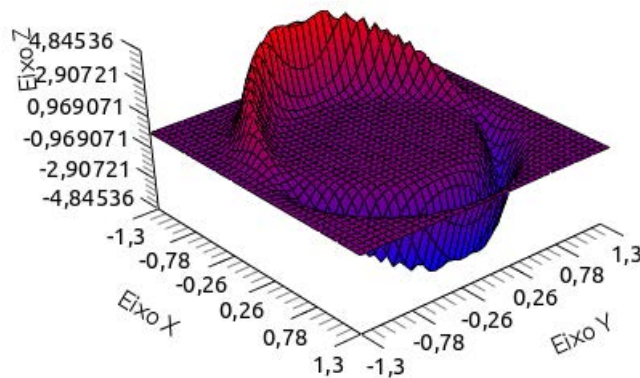
$$K^i{}_i = v_s \frac{x - x_s}{r_s} \frac{df}{dr_s}. \quad (7.7)$$

Onde

$$\frac{df}{dr_s} = \frac{\sec h^2(\sigma(r_s + R)) - \sec h^2(\sigma(r_s - R))}{2 \tanh(\sigma R)}. \quad (7.8)$$

A expressão (7.7) mostra que há uma expansão do elemento de volume atrás da bolha e uma contração à frente. Na figura (7.1) pode-se visualizar uma representação desse efeito (não é a visualização do espaço real), o eixo y representa um raio $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ e o eixo z representa o traço $K^i{}_i$.

Figura 7.1: Há uma contração do elemento de volume a frente e uma expansão atrás.

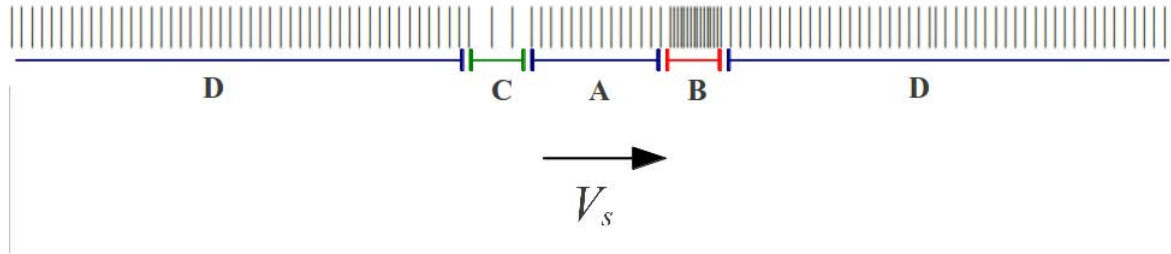


Fonte: (autor, 2013).

A figura (7.2) é uma representação em uma dimensão do efeito da métrica de Alcubierre sobre o espaço. As regiões A (interior da bolha) e D são de espaço “normal” e as

regiões B e C são as paredes da bolha (contração e dilatação, respectivamente).

Figura 7.2: Espaço na métrica de alcubierre em uma dimensão.



Fonte: (autor, 2013).

7.2 TEMPO PRÓPRIO E EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Fazendo $x = x_s$ no intervalo (7.2) e tomando-se o limite representado em (7.4),

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= (1 - v_s^2 f^2(r_s(t))) dt^2 + 2v_s f(r_s(t)) dt dx_s - dx_s^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= \left(1 - v_s^2 f^2(r_s(t)) + 2v_s f(r_s(t)) dt \frac{dx_s}{dt} - \frac{dx_s^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2} \right) dt^2 \end{aligned} \quad (7.9)$$

como $f(r_s) = 1$ em $x = x_s$, $\frac{dx_s}{dt} = v_s$ e $\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, obtêm-se que

$$dt = d\tau, \quad (7.10)$$

ou seja, o tempo no interior da bolha é igual ao tempo de um observador num referencial inercial externo, não há efeito de dilatação do tempo. Isso também significa que a aceleração própria no interior da bolha é sempre nula, mesmo que a bolha sofra uma aceleração arbitrária.

A bolha move-se numa geodésica, então a equação do movimento é

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0. \quad (7.11)$$

Os símbolos de Christoffel que não se anulam são [12]

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= -\Gamma_{xt}^x = -\Gamma_{tx}^x = v_s^3 f^2 \partial_x f \\ \Gamma_{xx}^x &= -\Gamma_{tx}^t = -\Gamma_{xt}^t = v_s^2 f \partial_x f \\ \Gamma_{xx}^t &= v_s \partial_x f \\ \Gamma_{tt}^x &= v_s^2 f \partial_x f (v_s^2 f^2 - 1) - f \partial_t v_s - v_s \partial_t f, \end{aligned} \quad (7.12)$$

onde pode-se ver que, se for feita a substituição $x \rightarrow x_s$ e tomando-se o limite da função *top hat* (7.4), a equação de movimento se reduz a

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x_s = \partial_t v_s. \quad (7.13)$$

Como pode-se notar, $x_s(t)$ é uma função arbitrária do tempo, não está submetida ao limite da velocidade da luz. Uma analogia que se pode fazer para entender como a velocidade global v_s da bolha pode ser maior que a velocidade da luz e como a própria luz mantém sua velocidade local é comparar a luz com ondas sonoras se movendo num fluido: elas se movem a uma velocidade fixa em cada ponto do fluido (velocidade do som), mas, se uma porção do fluido for envolvida numa bolha (de algum material conveniente, suponha) e essa bolha for movimentada a uma velocidade arbitrária, pode-se constatar que a velocidade local do som dentro da bolha será ainda a velocidade padrão do som quando medida localmente. Obviamente, essa analogia falha no ponto em que constata-se que o fluido é um referencial absoluto para as ondas sonoras.

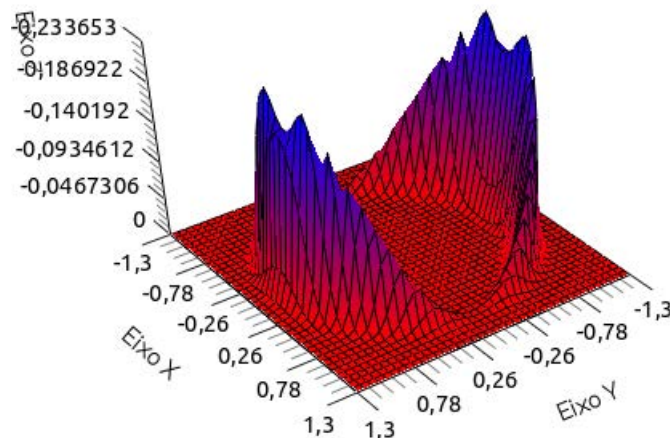
7.3 DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ASSOCIADA

Tendo a métrica, pode-se calcular a distribuição de energia associada, ela é

$$T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu = T^{00} = \frac{1}{8\pi}G^{00} = -\frac{v_s^2(y^2 + z^2)}{32\pi r_s^2} \left(\frac{df}{dr_s} \right)^2, \quad (7.14)$$

que é uma distribuição de energia negativa, como pode-se ver pelo sinal de menos. Na figura (7.3) pode-se visualizar no plano xy a distribuição de energia.

Figura 7.3: Distribuição de energia no plano xy , com o eixo z representando a energia. No espaço xyz tem-se um anel.



Fonte: (autor, 2013).

Como pode-se ver, a distribuição de energia não apresenta nenhuma assimetria que define a priori o sentido de movimento, como apontado em [20], talvez seja necessária alguma condição inicial ou mecanismo de direcionamento.

Uma densidade negativa de energia representa uma violação das três condições de energia, além disso, em [4] é estimado um valor de energia de $6,2 \times 10^{62} v_s kg$, vê-se que a quantidade de energia negativa é de várias ordens de grandeza maiores que a massa do universo visível.

7.4 OUTRAS MÉTRICAS

Métrica de Van Den Broeck A fim de amenizar os requerimentos de energia da métrica de Alcubierre, Chris Van Den Broeck propôs uma alteração na estrutura da bolha de espaço-tempo curvo em [4]. A ideia é criar internamente uma região em que o volume é expandido, de modo que se possa reduzir o raio da bolha externa (e a quantidade de energia, pois $E \cong R^2/d$, onde R é o raio da bolha e d é a espessura da “parede” dela) mantendo a possibilidade de manter uma nave de dimensões consideráveis dentro da bolha.

Uma forma de fazer isso é modificar a métrica da Alcubierre da seguinte forma

$$ds^2 = (1 - B^2(r_s)v_s^2 f(r_s(t))^2)dt^2 + B^2(r_s) (2v_s f(r_s(t))dtdx - dx^2 - dy^2 - dz^2), \quad (7.15)$$

onde

$$\begin{aligned} B^2(r_s) &= 1 + k, & r_s < R' \\ 1 < B^2(r_s) &\leq 1 + k, & R' \leq r_s < R' + d' \\ B^2(r_s) &= 1, & R' + d' \leq r_s. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Onde os significados dos símbolos são indicados na figura (7.4), a seguir. Os demais termos são os mesmos da métrica de Alcubierre.

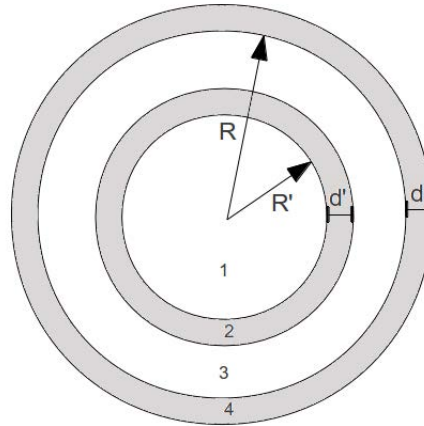
A representação gráfica dessa métrica seria a da métrica de Alcubierre com um “pescoço” em seu interior (que levaria à região de volume expandido). O tensor energia momento é a soma daquele da métrica de Alcubierre com o obtido da alteração, este último é

$$(T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu)_B = (T^{00})_B = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{1}{B^4} (\partial_r B)^2 - \frac{1}{B^3} \partial_r^2 B - \frac{1}{rB^3} \partial_r B \right], \quad (7.17)$$

onde a forma da distribuição de energia depende da escolha da função $B(r_s)$ e o índice B indica que se refere somente a distribuição de energia causada pela função $B(r_s)$.

Tubo de Krasnikov Krasnikov [10] argumentou que fótons emitidos na direção positiva de x na métrica de Alcubierre nunca saem da bolha, pois no interior dela a velocidade do fóton (“visto” por um observador externo) é $v_f = 1 + v$ e fora dela é $v_f = 1$, de modo que (por continuidade) será $v_f = v$ na borda frontal. Para um observador interno, a velocidade do fóton é um no interior e zero na borda frontal. Assim, um piloto no interior

Figura 7.4: Divisão da bolha de dobra em regiões: 1 possui espaço-tempo plano e volume ampliado. 2 é onde $B(r_s)$ varia. 3 é uma região de acordo com a métrica original de Alcubierre. 4 é a bolha de dobra.



Fonte: (autor, 2013).

de uma nave hipotética não poderia alterar a geometria do espaço fora da borda da bolha, pois ela está sempre separada do interior por um intervalo do tipo espaço.

Mas, ainda seria possível usar a geometria de Alcubierre para viagens superluminais (desde que suponha-se que todos os outros requerimentos sejam atendidos), basta para isso que a deformação do espaço seja causada por uma estrutura externa à bolha e que conecte os pontos de partida e chegada. Para implementar tal idéia, Krasnikov propôs a seguinte métrica [8] num espaço-tempo bidimensional (dimensão 1 + 1)

$$ds^2 = dt^2 - [1 - k(x, t)]dxdt - k(x, t)dx^2, \quad (7.18)$$

onde

$$k(x, t) = 1 - (2 - \delta)\theta_\epsilon(t - x)[\theta_\epsilon(x) - \theta_\epsilon(x + \epsilon - D)], \quad (7.19)$$

θ_ϵ é uma função tal que

$$\theta_\epsilon(\xi) = \begin{cases} 1 & , \xi > \epsilon \\ 0 & , \xi < 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

e δ e ϵ são parâmetros positivos arbitrariamente pequenos.

A alteração do espaço-tempo decorrente dessa métrica consiste em três regiões; uma externa, em que $k = 1$, ou seja, é o espaço de Minkowski; uma interna, com $k = \delta - 1$, onde o espaço-tempo ainda é plano, mas apresenta cones de luz mais abertos [11]; e uma de transição, de espaço-tempo curvo.

Diferente da métrica de Alcubierre, o tubo de Krasnikov funciona mais como uma estrada de alta velocidade, é necessário ter chegado ao ponto de destino previamente e alterar a métrica entre ele e o ponto de partida. Nisso ele se parece com um buraco de

minhoca, que precisa ter uma de suas bocas movidas para o ponto para o qual se quer viajar, mas sem a necessidade de alteração da topologia do espaço-tempo.

Abordagem de White Harold G. White [20] propôs um conceito de viagem a velocidade superluminal em que, em vez de contração a frente e expansão atrás da nave, têm-se uma bolha em que o tempo é arbitrariamente encurtado (observadores externos vêem relógios mais rápidos na bolha), o que pode ser feito de dois modos: uma esfera de tempo encurtado ou uma casca esférica de tempo encurtado em torno de uma região de espaço-tempo plano. A primeira opção seria útil para o envio de sondas robóticas (pois o intervalo de tempo no interior da esfera seria proporcional à velocidade com que observadores externos a vêem se mover). O segundo tipo serviria para mover espaçonaves tripuladas, pois o tempo próprio no interior da bolha é igual ao tempo dos observadores inerciais externos.

Para implementar tal conceito de viagem superluminal, White usou de uma alteração na métrica de Alcubierre por uma transformação de gauge, colocando-a na forma canônica, como pode ser visto na referência [20]. Nesta forma pode-se calcular o potencial gravitacional e obter dele a equação de campo da expansão do espaço-tempo γ (*boost*), de modo que é uma pequena velocidade inicial que impulsiona a nave para frente, sendo ampliada pelo *boost*. Como discutido no parágrafo anterior, as paredes da bolha possuem tempo acelerado e a contração e expansão do espaço a frente e atrás, respectivamente, são mais uma consequência que a causa do movimento [19].

8 CONCLUSÃO

As teorias da relatividade de Einstein mudaram profundamente o modo como o universo é interpretado. O espaço (que antes era visto somente como uma arena onde as coisas ocorrem) e o tempo (que era somente uma abstração útil para descrever as mudanças no mundo) ganharam *status* de entes ativos ao lado de matéria e energia. Pode-se dizer até mesmo que as equações de Einstein unificaram esses conceitos, espaço, tempo, massa e energia são indissociáveis.

Os dois postulados da relatividade restrita, a generalização do formalismo de Minkowski e o princípio da equivalência foram as ferramentas conceituais para a formulação da relatividade geral, teoria que permite muito mais “liberdade” para as geometrias que o espaço-tempo pode assumir. Certas alterações na métrica do espaço-tempo podem até mesmo permitir que se observe velocidades globais superiores a da luz, como o efeito de arrasto em torno de buracos negros rotativos, a expansão do universo, os buracos de minhoca (*wormholes*) e os motores de dobra (*warp-drives*).

De forma generalizada, um espaço-tempo de *warp-drive* [14] é um espaço-tempo globalmente hiperbólico (de forma simples, que possui todos os eventos futuros determinados, desde que conhecidas as condições iniciais, e não possui curvas fechadas de tempo) e com um intervalo da forma

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 (dx^i + X^i dt)^2 \quad (8.1)$$

onde X^i são funções limitadas e suaves a serem definidas. A métrica de Alcubierre é um caso específico desse tipo de métrica, outras podem ser imaginadas e novos termos podem ser acrescentados para obter-se propriedades novas. A necessidade de densidade de energia negativa (ao lado de seu valor elevado) pode significar que elas são fisicamente irrealizáveis (assim como ocorre com *wormholes*). Como possível solução, alguns apontam o efeito Casimir como evidência de que pode-se obter densidades de energia negativa.

O tubo de Krasnikov não é uma métrica de *warp-drive*, via definição dada anteriormente, embora seja inspirado na métrica de Alcubierre. Diferente dela (ao menos no formalismo 3+1), ele permite curvas fechadas de tempo se forem usados dois tubos em paralelo.

Enfim, este trabalho permitiu contato do autor com a relatividade geral e o estudo de

uma de suas consequências que podem parecer estranhas, ou seja, de métricas associadas a matéria exótica. Houve importante contribuição à formação, de modo que fomentou o interesse na continuidade dos estudos na área de relatividade geral e cosmologia.

REFERÊNCIAS

- [1] ALCUBIERRE, M. **Introduction to 3+1 Numerical Relativity**. Oxford University Press, New York.
- [2] ALCUBIERRE, M. **The warp drive: hyper-fast travel within general relativity**. Classical and Quantum Gravity 11-5, L73-L77 - 1994.
- [3] BOHM, D. **The Special Theory of Relativity**. London, Routhledge - 1996.
- [4] BROECK, C. V. D. **A ‘warp drive’ with more reasonable total energy requirements**. Classical and Quantum Gravity 16 - 1999.
- [5] CAMENZIND, M. **Modern Cosmology. Part II: From Special to General Relativity**. Disponível nesse link e acessado em 22/08/2012.
- [6] EDGAR, G. **Measure, Topology and Fractal Geometry** New York, Springer Science+Business Media - 2008.
- [7] EINSTEIN, A. **Relativity: The Special and the General Theory**. London, Routhledge - 1994.
- [8] EVERETT, A. E., ROMAN, T. A. **Superluminal subway: The Krasnikov tube**. Physical Review D, vol. 56, num. 4 - 15 agosto de 1997.
- [9] FRENCH, A. P. **Special Relativity**. London, Chapman & Hall - 1994.
- [10] KRASNIKOV, S. V. **Hyperfast interstellar travel in general relativity**. Physical Review, D57, 4760-4766 - 1998.
- [11] LOBO, F. S. N. **Exotic solutions in General Relativity: Transversable wormholes and “warp drive” spacetimes**. Classical and Quantum Gravity Research, 1-78, Nova Sci. - 2008.
- [12] MCMONIGAL, B., LEWIS, G. F., O’BYRNE, P. **The Alcubierre Warp Drive: On the Matter of Matter**. The University of Sydney, Australia, February 24 - 2012
- [13] MINKOWSKI, H. **Space and Time**. A Lecture delivered before the Naturforscherversammlung (Congress of Natural Philosophers) at Cologne — 21st September - 1908.

- [14] NATÁRIO, J. **Warp drive with zero expansion**. *Classical and Quantum Gravity*, 19 - 2002, 1157-1165.
- [15] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A. **Gravitation**. San Francisco, W. H. Freeman and Company - 1973.
- [16] LANDAU, L., LIFSHITZ, E. **Teoria do Campo**. Moscou - 1980.
- [17] VOJINOVIĆ, M. **Schwarzschild Solution in General Relativity** Lisboa, Seminar on Schwarzschild solution of Einstein equations, given at Complexo Interdisciplinar - Março, 2010.
- [18] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. New York: John Wiley & Sons - 1972.
- [19] WHITE, H. G., DAVIS, E. W. **The Alcubierre Warp Drive in Higher Dimensional Spacetime**. 3rd Symp. on New Frontiers & Future Concepts. AIP Conference Proceedings, Volume 813, pp. 1382-1389 - 2006.
- [20] WHITE, H. G. **A Discussion of Space-Time Metric Engineering**. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 35, No. 11 - November 2003.

APÊNDICE A - Notações

Vetores: Um vetor, também chamado de vetor contravariante, será denotado por

$$v^\nu$$

e uma 1-forma, também chamado de vetor covariante, será denotado por

$$v_\nu.$$

Índices: Letras gregas indicam valores de 0 a 3 e letras latinas indicam valores de 1 a 3.

Notação de Einstein: Índices repetido em cima e em baixo indicam soma.

$$T^\nu{}_\nu = \sum_{\nu=0}^3 T^\nu{}_\nu.$$

$$T^i{}_i = \sum_{i=1}^3 T^i{}_i.$$

Assinatura: Neste texto é usada a assinatura $(+, -, -, -)$ para a métrica. No entanto, é comum o uso da assinatura $(-, +, +, +)$. Ambas são válidas e não alteram o conteúdo das teorias RR e RG.

Derivação: A não ser que seja dito o contrário, o símbolo ∇_ν indica a derivada covariante em relação à variável x^ν (x^0 a x^3). ∇_i indica a derivada covariante em relação à variável x^i (x^1 a x^3).

Derivadas parciais podem ser abreviadas por

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

APÊNDICE B - Métrica

Um espaço métrico S é um espaço que possui uma métrica, e a métrica δ , por sua vez, é o modo como distâncias são definidas em S .

Formalmente, métrica e espaço métrico podem ser definidos como [6]:

Def.: Um espaço métrico é um conjunto S que junto com uma função $\delta : S \times S \rightarrow [0, \infty)$ satisfaz

- $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$;
- $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$.

O número positivo $\delta(x, y)$ é chamado de *distância* entre os pontos x e y , ou *métrica* do conjunto S , de modo que o espaço métrico pode ser denotado por (S, δ) , ou S , por simplicidade e comun entendimento.

Essa definição de métrica, obviamente, não é aplicável ao espaço de Minkowski e ao espaço pseudo-riemanniano, para tal, deve-se estender a definição, para enquadrar o intervalo ds^2 (que possui assinatura não positiva definida) e extendê-la para quatro dimensões. Nota-se, no entanto, que em relatividade costuma-se chamar o tensor métrico de métrica, em vez de ds .

Como pode-se ver em [15], o tensor métrico, do ponto de vista da geometria diferencial, é uma aplicação bilinear \mathbf{g} tal que $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é o produto escalar de \mathbf{u} e de \mathbf{v} , $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ é o comprimento quadrático de \mathbf{u} (u^2). Ele apresenta propriedades de simetria $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ e linearidade sobre os vetores $\mathbf{g}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{w}, a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Seus coeficientes são obtidos a partir da aplicação de \mathbf{g} sobre os vetores base, ou seja: $g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta)$.