

**Polinômios de Szegő e  
Análise de Freqüência**

*Fernando Feltrin Milani*

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática Aplicada  
MAP - 096

# Polinômios de Szegő e Análise de Freqüência

**Fernando Feltrin Milani**

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cleonice Fátima Bracciali

São José do Rio Preto  
Julho de 2005

À minha esposa Adriana,  
*dedico.*

# Agradecimentos

A Deus.

À minha esposa Adriana.

Aos meus pais, Maria Feltrin Milani e Antonio Milani.

Aos meus irmãos, Jânio e Aparecida. E ao meu tio Pedro.

Aos meus amigos, Adriano, Daniel, Élcio, Éder, Oreste, Reginaldo, Samuel e Waltercy.

A todos os companheiros desde o início desta jornada.

A todos os professores que, direta ou indiretamente, contribuíram  
para o desenvolvimento deste trabalho.

À Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Eliana Xavier Linhares de Andrade e ao  
Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga.

Um agradecimento especial à Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cleonice Fátima Bracciali.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os polinômios de Szegő, que são ortogonais no círculo unitário, e suas relações com certas frações contínuas de Perron-Carathéodory e quadratura no círculo unitário, afim de resolver o problema de momento trigonométrico. Além disso, estudar a utilização dos polinômios de Szegő na determinação das freqüências de um sinal trigonométrico em tempo discreto  $x_N(m)$ . Para isso, investigamos os polinômios de Szegő gerados por uma medida  $\psi_N$  definida através do sinal trigonométrico  $x_N(m)$ , para  $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , e o comportamento dos zeros desses polinômios quando  $N \rightarrow \infty$ .

**Palavras-chave:** polinômios de Szegő, polinômios ortogonais, problema de momento trigonométrico, análise de freqüência

# Abstract

The purpose here is to study the orthogonal polynomials on the unit circle, known as Szegő polynomials, and the relations to Perron-Carathéodory continued fractions, and quadratures on the unit circle in order to solve the trigonometric moment problem. Another purpose is to study how the Szegő polynomials can be used to determine the frequencies from a discrete time trigonometric signal  $x_N(m)$ . We investigate the Szegő polynomials associated with a measure  $\psi_N$  defined by the trigonometric signal  $x_N(m)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . We study the behaviour of zeros of these polynomials when  $N \rightarrow \infty$ .

**Keywords:** Szegő polynomials, orthogonal polynomials, trigonometric moment problem, frequency analysis

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1	Funcional de momento e polinômios ortogonais na reta real . . . . .	4
2.2	Fórmulas de quadratura gaussianas . . . . .	6
2.3	Frações contínuas . . . . .	8
2.4	Problema de momento . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Polinômios de Szegő e HPC-Fração</b>	<b>11</b>
3.1	Fração contínua de Perron-Carathéodory . . . . .	11
3.2	Polinômios de Szegő . . . . .	12
3.3	Relação entre polinômios de Szegő e HPC-fração . . . . .	21
3.4	Polinômios associados e polinômios para-ortogonais . . . . .	27
3.5	Convergentes modificados . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Problema de Momento Trigonométrico</b>	<b>33</b>
4.1	Quadratura no círculo unitário . . . . .	33
4.2	Problema de momento trigonométrico . . . . .	36
4.3	Problema de momento trigonométrico N-definido . . . . .	40
4.4	Outras propriedades dos polinômios de Szegő . . . . .	43
4.5	Funções de Carathéodory normalizadas . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Análise de Frequência</b>	<b>52</b>
5.1	Apresentação do problema . . . . .	52
5.2	Polinômios de Szegő e análise de frequência . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>72</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Dada uma seqüência dupla  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  de números complexos, satisfazendo  $\bar{\mu}_{-n} = \mu_n$  e  $\Delta_n \neq 0$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , onde

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}$$

é conhecido como determinante de Toeplitz, obtemos os polinômios de Szegő

$$\rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}.$$

A seqüência de polinômios  $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$  é ortogonal com relação a um funcional linear definido por

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{m=p}^q c_m z^m \right] = \sum_{m=p}^q c_m \mu_{-m}, \quad c_m \in \mathbb{C}, \quad -\infty < p \leq q < \infty.$$

Seja  $\delta_n \in \mathbb{C}$  tal que  $\delta_0 \neq 0$  e  $|\delta_n| \neq 1$  ( $|\delta_n| < 1$ ), para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Definimos a fração contínua de Perron-Carathéodory hermitiana (positiva) por

$$\delta_0 - \frac{2\delta_0}{1 + \frac{1}{\bar{\delta}_1 z + \frac{(1 - |\delta_1|^2)z}{\delta_1 + \cdots}}} = \delta_0 - \frac{2\delta_0}{1} + \frac{1}{\bar{\delta}_1 z} + \frac{(1 - |\delta_1|^2)z}{\delta_1} + \frac{1}{\bar{\delta}_2 z} + \frac{(1 - |\delta_2|^2)z}{\delta_2} + \dots \quad (1.1)$$

Estas frações contínuas têm uma relação direta com os polinômios de Szegő, como veremos neste trabalho.



Uma medida positiva  $\psi$  no círculo unitário é uma função real definida em  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , limitada e não decrescente com infinitos pontos de aumento, tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\psi(\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

existem.

Um tópico importante que está relacionado aos polinômios de Szegő e às frações contínuas de Perron-Carathéodory é o problema de momento trigonométrico (PMT), a saber: Para uma dada seqüência de números complexos  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , encontrar condições necessárias e suficientes para a existência de uma medida positiva  $\psi$  tal que

$$\mu_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\psi(\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Este problema foi considerado pela primeira vez por Akhiezer e Krein [2] em 1934.

A partir da medida  $\psi$ , Szegő introduziu, em várias publicações por volta de 1920 (ver, por exemplo, [21] e [22]), polinômios ortogonais que atualmente são chamados de polinômios de Szegő. Esses polinômios são ortogonais no círculo unitário e serão utilizados para resolver o problema de análise de freqüência a seguir.

Consideramos um sinal trigonométrico da forma

$$x(m) = \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{imw_j}, \quad x(0) \neq 0, \quad (1.2)$$

onde  $I$  é um número inteiro positivo. As freqüências  $w_j$  satisfazem  $w_j \in \mathbb{R}$ ,  $w_{-j} = -w_j$ ,  $0 = w_0 < w_1 < \dots < w_I < \pi$  e os coeficientes  $\alpha_j$  satisfazem  $\alpha_j \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha_{-j} = \bar{\alpha}_j$ ,  $-I \leq j \leq I$ . Em (1.2) vamos tomar  $\alpha_j \neq 0$ , para  $j = 1, 2, \dots, I$  e  $\alpha_0 \geq 0$ .

O problema de análise de freqüência consiste em determinar  $w_1, w_2, \dots, w_I$  de  $N$  amostras de (1.2), observados em instantes de tempo igualmente espaçados, isto é, do sinal truncado

$$x_N(m) = \begin{cases} \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{imw_j}, & m = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definimos uma medida, construída a partir de  $x_N(m)$ , em  $[-\pi, \pi]$  por

$$d\psi_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_N(k) e^{-ik\theta} \right|^2 d\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad N \in \mathbb{N}.$$

A idéia apresentada por Jones, Njåstad e Saff em [10] é que os zeros dos polinômios de Szegő  $\rho_n(\psi_N, z)$ , com relação à medida  $\psi_N$ , podem ser utilizados para aproximar os pontos de freqüência  $e^{iw_j}$ , com  $N \rightarrow \infty$  e  $n \geq n_0$ , onde  $n_0$  indica a quantidade de pontos  $e^{iw_j}$ . Uma primeira motivação

para esse fato surge quando observamos que, para toda função contínua,  $f$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \frac{d\psi_N(\theta)}{N} \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(\theta),$$

onde  $\psi$  é uma função escada com saltos  $|\alpha_j|^2$  nos pontos  $w_j$ .

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, introduzimos alguns conceitos básicos sobre polinômios ortogonais na reta real, fórmulas de quadratura, frações contínuas e problemas de momento. Apresentamos definições e propriedades análogas às estudadas nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 3, apresentamos as frações contínuas de Perron-Carathéodory hermitianas (HPC-frações), as frações contínuas de Perron-Carathéodory positivas (PPC-frações). Definimos, também, os polinômios de Szegő e estabelecemos suas relações de ortogonalidade através de um funcional linear, com ênfase nas relações de recorrência e na localização dos zeros desses polinômios. A razão para introduzirmos as frações contínuas de Perron-Carathéodory é que os polinômios de Szegő e seus associados surgem naturalmente como denominadores e numeradores, respectivamente, de seus convergentes. Além disso, discutimos algumas propriedades dos polinômios para-ortogonais e dos convergentes modificados das frações contínuas de Perron-Carathéodory.

Iniciamos o Capítulo 4 com quadratura no círculo unitário. A aplicação dos polinômios de Szegő a estas fórmulas nos permite desenvolver o problema de momento trigonométrico. Esse problema é estudado na Seção 4.2, onde apresentamos dois resultados principais, um a respeito da existência e outro sobre a unicidade da solução. Em seguida, consideramos um caso importante chamado problema de momento N-definido, que será útil para o Capítulo 5. Finalizamos o capítulo com a definição de funções de Carathéodory normalizadas.

No Capítulo 5, estudamos o problema de análise de frequências. Definimos o problema e mostramos suas relações com os polinômios de Szegő e com as frações contínuas de Perron-Carathéodory. Em seguida, apresentamos uma técnica para encontrar as frequências que se baseia na convergência dos zeros de certos polinômios de Szegő.

Encerramos este trabalho com algumas considerações finais no Capítulo 6.

# Capítulo 2

## Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos, principalmente, algumas propriedades bem conhecidas de polinômios ortogonais. Fazemos uma breve exposição, sem demonstrações, de tópicos existentes sobre polinômios ortogonais na reta real, fórmulas de quadratura gaussiana, frações contínuas e problema de momento. As demonstrações podem ser encontradas em Chihara [4]. Os livros de Freud [6] e de Szegő [21] também são textos clássicos sobre o assunto.

### 2.1 Funcional de momento e polinômios ortogonais na reta real

**Definição 2.1.** *Sejam  $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$  uma seqüência de números complexos e  $\mathcal{F}$  uma função com valores complexos definida no espaço vetorial dos polinômios complexos de variável real,  $\Pi$ , por*

$$\mathcal{F}[x^n] = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$\mathcal{F}[\alpha_1\pi_1(x) + \alpha_2\pi_2(x)] = \alpha_1\mathcal{F}[\pi_1(x)] + \alpha_2\mathcal{F}[\pi_2(x)], \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \quad e \quad \forall \pi_1, \pi_2 \in \Pi.$$

Então,  $\mathcal{F}$  é chamado *Funcional de Momento determinado pela seqüência de momentos  $\{\mu_n\}$ .*

$$\text{Se } \pi(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \text{ então } \overline{\pi(x)} = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k x^k,$$

$$\mathcal{F}[\pi(x)] = \sum_{k=0}^n a_k \mu_k \quad e \quad \mathcal{F}[\overline{\pi(x)}] = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \mu_k.$$

**Definição 2.2.**  *$\{\mathcal{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$  é uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a um funcional de momento  $\mathcal{F}$  se, para  $m, n$  inteiros e não-negativos, vale*

- (i)  $\mathcal{P}_n$  é um polinômio de grau  $n$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}[\mathcal{P}_m(x)\mathcal{P}_n(x)] = 0$ , para  $m \neq n$ ;
- (iii)  $\mathcal{F}[\mathcal{P}_n^2(x)] \neq 0$ .

Além disso, se  $\mathcal{F}[\mathcal{P}_n^2(x)] = 1$ , então  $\{\mathcal{P}_n\}$  é uma seqüência de polinômios ortonormais com relação a  $\mathcal{F}$ . Usamos  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  para denotar a seqüência dos polinômios ortonormais.

É conhecido ([4], corolário do Teorema 2.2, p.09) que se  $\{\mathcal{Q}_n\}$  e  $\{\mathcal{P}_n\}$  são seqüências de polinômios ortogonais para um mesmo funcional de momento, então existem constantes  $k_n \neq 0$  tal que,

$$\mathcal{Q}_n(x) = k_n \mathcal{P}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Trabalhamos somente com seqüências de polinômios ortogonais mônicos, isto é, com polinômios cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 1. Portanto fica subentendido que  $\mathcal{P}_n$  é um polinômio mônico. Quando  $\{\mathcal{P}_n\}$  é uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a um funcional  $\mathcal{F}$ , costumamos dizer, por simplicidade, que os polinômios  $\mathcal{P}_n$  são ortogonais. Analogamente, se  $\{p_n\}$  é uma seqüência de polinômios ortonormais dizemos que  $p_n$  são ortonormais.

Pode-se mostrar ([4], Teorema 2.1, p.08) que as seguintes afirmações são equivalentes.

- (i)  $\{\mathcal{P}_n\}$  é uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a  $\mathcal{F}$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}[\pi(x)\mathcal{P}_n(x)] = 0$ , para todo polinômio  $\pi$  de grau  $m < n$  e  $\mathcal{F}[\pi(x)\mathcal{P}_n(x)] \neq 0$ , se  $m = n$ ;
- (iii)  $\mathcal{F}[x^m\mathcal{P}_n(x)] = 0$ , se  $m < n$  e  $\mathcal{F}[x^n\mathcal{P}_n(x)] \neq 0$ .

De acordo com estas equivalências, existem três maneiras diferentes de se definir polinômios ortogonais.

Seja  $\mathcal{F}$  um funcional de momento com seqüência de momentos  $\{\mu_n\}$ , definimos os determinantes de Hankel, com relação a  $\mathcal{F}$ , por

$$\Delta_n^H = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

Uma condição necessária e suficiente ([4], Teorema 3.1, p.11 e exercício 3.1, p.17) para a existência de uma seqüência de polinômios ortogonais para  $\mathcal{F}$  é que

$$\Delta_n^H \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Neste caso,

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}^H} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

**Definição 2.3.** Um funcional de momento  $\mathcal{F}$  é chamado positivo-definido se  $\mathcal{F}[\pi(x)] > 0$ , para todo polinômio  $\pi$  satisfazendo  $\pi(x) \geq 0$  e  $\pi \not\equiv 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Segue ([4], Teorema 3.4, p.15) que  $\mathcal{F}$  é definido positivo se, e somente se, seus momentos são todos reais e  $\Delta_n^H > 0$ , para todo  $n \geq 0$ .

**Definição 2.4.** Dizemos que um funcional de momento  $\mathcal{F}$  é quase-definido quando  $\Delta_n^H \neq 0$  para todo  $n \geq 0$ .

Os polinômios ortogonais têm uma propriedade muito importante, pois possuem uma relação de recorrência de três termos que permite encontrar o polinômio de um certo grau conhecendo-se os dois polinômios de graus imediatamente inferiores. Esse resultado, que pode ser encontrado em [4] (Teorema 4.1, p.18), diz o seguinte: Dado um funcional de momento quase-definido  $\mathcal{F}$  com a correspondente seqüência  $\{\mathcal{P}_n\}$  de polinômios ortogonais mônicos, existem constantes  $\alpha_n$  e  $\gamma_n$  tais que

$$\mathcal{P}_n(x) = (x - \alpha_n)\mathcal{P}_{n-1}(x) - \gamma_n\mathcal{P}_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \mathcal{P}_{-1}(x) = 0. \quad (2.1)$$

Temos um outro resultado, conhecido por Teorema de Favard ([4], Teorema 4.4, p.21), que fornece a recíproca do que acabamos de descrever, isto é, sejam  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ , seqüências arbitrárias de números complexos e  $\{\mathcal{P}_n\}_{n=0}^\infty$  uma seqüência de polinômios mônicos definida pela relação de recorrência (2.1). Então, existe um único funcional de momento  $\mathcal{F}$  tal que

$$\mathcal{F}[1] = \gamma_1, \quad \mathcal{F}[\mathcal{P}_n(x), \mathcal{P}_m(x)] = 0, \quad \text{para } m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$\mathcal{F}$  é quase-definido e  $\{\mathcal{P}_n\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação a  $\mathcal{F}$  se, e somente se,  $\gamma_n \neq 0$ .  $\mathcal{F}$  é positivo-definido se, e somente se,  $\gamma_n > 0$  e  $\alpha_n$  é real ( $n \geq 1$ ).

**Definição 2.5.** Dada uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos  $\{\mathcal{P}_n\}$  com relação ao funcional de momento  $\mathcal{F}$ , definimos o polinômio associado a  $\mathcal{P}_n$  por

$$\mathcal{Q}_n(x) = \mathcal{F}\left[\frac{\mathcal{P}_n(t) - \mathcal{P}_n(x)}{t - x}\right], \quad n \geq 1.$$

Usando essa definição e a relação de recorrência para os polinômios  $\mathcal{P}_n$  podemos mostrar que  $\mathcal{Q}_n$  é um polinômio de grau  $n - 1$  e que  $\mathcal{Q}_n$  satisfaz à mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais  $\mathcal{P}_n$ , mas com condições iniciais  $\mathcal{Q}_0(x) = 0$  e  $\mathcal{Q}_1(x) = \mu_0$ .

## 2.2 Fórmulas de quadratura gaussianas

Sejam  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  um conjunto de  $n$  ( $n \geq 1$ ) números distintos e

$$F_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - t_j).$$

Definimos os polinômios fundamentais de Lagrange por

$$l_{k,n}(x) = \frac{F_n(x)}{(x - t_k)F_n'(t_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

onde,

$$F_n'(t_k) = \lim_{x \rightarrow t_k} \frac{F_n(x) - F_n(t_k)}{x - t_k} = \lim_{x \rightarrow t_k} \frac{F_n(x)}{x - t_k} = \lim_{x \rightarrow t_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (x - t_j) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (t_k - t_j).$$

Assim,  $l_{k,n}$  tem grau  $n - 1$  e

$$l_{k,n}(x) = \frac{(x - t_1) \cdots (x - t_{k-1})(x - t_{k+1}) \cdots (x - t_n)}{(t_k - t_1) \cdots (t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1}) \cdots (t_k - t_n)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Segue imediatamente, para  $1 \leq j, k \leq n$ , que

$$l_{k,n}(t_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k, \\ 0, & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Assim, para um conjunto  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  de números, o polinômio

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^n y_j l_{j,n}(x)$$

tem grau no máximo  $n - 1$  com a propriedade

$$L_n(t_k) = \sum_{j=1}^n y_j l_{j,n}(t_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$L_n$  é chamado polinômio interpolador de Lagrange correspondente aos nós  $t_j$  e às ordenadas  $y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Dada uma função  $f$ , construímos o polinômio interpolador de Lagrange da  $f$  nos  $n$  pontos distintos  $t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , e podemos escrever

$$\mathcal{F}[f(x)] \approx \mathcal{F}[L_n(x)] = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}[l_{j,n}(x)]f(t_j) = \sum_{j=1}^n W_{j,n}f(t_j),$$

que é a fórmula de quadratura interpolatória para  $f$  nos pontos  $t_j$  com relação a  $\mathcal{F}$ . Os números  $W_{j,n}$  são os pesos da fórmula de quadratura definidos por

$$W_{j,n} = \mathcal{F}[l_{j,n}(x)]$$

e  $t_j$  são os nós da respectiva fórmula.

Quando  $t_j$  são os zeros dos polinômios ortogonais com relação à um dado funcional de momento  $\mathcal{F}$ , a fórmula de quadratura é dita ser uma fórmula de quadratura gaussiana. Em geral uma fórmula de quadratura interpolatória sobre  $n$  pontos (nós) é exata para polinômios de grau no

máximo  $n - 1$ , entretanto, em [4] (Teorema 6.1, p.32) encontramos o seguinte resultado. Seja  $\mathcal{F}$  positivo-definido, então existem números  $W_{1,n}, W_{2,n}, \dots, W_{n,n}$  tal que para todo polinômio  $\pi$  de grau no máximo  $2n - 1$ ,

$$\mathcal{F}[\pi(x)] = \sum_{j=1}^n W_{j,n} \pi(x_{j,n}),$$

onde  $x_{j,n}$ , representa os zeros do polinômio ortogonal  $\mathcal{P}_n$  com relação a  $\mathcal{F}$ . Os números  $W_{j,n}$  são todos positivos e satisfazem a condição

$$W_{1,n} + W_{2,n} + \dots + W_{n,n} = \mu_0.$$

## 2.3 Frações contínuas

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}, \quad (2.2)$$

onde  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  são seqüências de números reais ou complexos ou funções reais ou complexas, com  $a_n \neq 0$ . Os números, ou funções,  $a_n$  e  $b_n$  são chamados, respectivamente,  $n$ -ésimo numerador e denominador parcial. O valor

$$C_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}},$$

é chamado  $n$ -ésimo convergente ou aproximante da fração contínua. É conhecido (veja [4], p.80) que

$$C_n = \frac{A_n}{B_n}$$

satisfaz as relações de recorrência

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \quad \text{e} \quad B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n \geq 1, \quad (2.3)$$

com

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = b_0, \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1. \quad (2.4)$$

$A_n$  e  $B_n$  são chamados, respectivamente, de numerador e denominador do  $n$ -ésimo convergente da fração contínua.

Dizemos que fração contínua (2.2) converge para o valor  $K$  (finito) se apenas um número finito de convergentes é indefinido e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = K.$$

## 2.4 Problema de momento

Em geral, um problema de momento é enunciado da seguinte forma: Dada uma seqüência  $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números reais, determinar condições necessárias e suficientes para a existência de uma medida positiva  $\psi$ , ou seja, uma função real definida em  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , limitada e com infinitos pontos de aumento, tal que

$$\int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

existem e satisfazem

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Um problema de momento, que tem solução, é determinado se a tal medida é única, caso contrário é indeterminado. Os textos [1], [15], [17] e [20] são boas referências sobre o assunto.

Stieltjes, em 1894-5, introduziu o conceito de problema de momento e resolveu-o no semi-eixo real positivo  $(0, \infty)$  considerando frações contínuas da forma

$$\frac{1}{b_1 z} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3 z} + \frac{1}{b_4} + \dots,$$

associado com a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} \sim \frac{\mu_0}{z} - \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} - \frac{\mu_3}{z^4} + \dots$$

Para estudar a existência de solução para os problemas de momento, é de grande importância considerar, para  $m \in \mathbb{Z}$ , os determinantes,  $H_0^{(m)} = 1$  e

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Estes determinantes também recebem o nome de determinantes de Hankel, veja que  $H_n^{(0)} = \Delta_{n-1}^{(H)}$ .

Quando o intervalo de integração é  $(0, \infty)$ , o problema é chamado problema de momento de Stieltjes. As condições necessárias e suficientes para a existência de solução para este problema são  $H_{n+1}^{(0)} > 0$  e  $H_{n+1}^{(1)} > 0$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$  (veja [4], p.72).

Quanto ao problema de momento de Hamburger, onde o intervalo de integração é  $(-\infty, \infty)$ , a condição necessária e suficiente para a existência de uma solução é  $H_{n+1}^{(0)} > 0$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$  (veja [4], p.72).

Tanto o problema de momento de Stieltjes, quanto o de Hamburger, são indeterminados.



Algumas variações desses problemas são os problemas de momento forte onde, dada uma seqüência dupla  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  de números reais, determinar condições necessárias e suficientes para a existência de uma medida positiva  $\psi$  tal que

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Estes problemas também são classificados de acordo com o intervalo de integração.

Problema de momento de Stieltjes forte, onde o intervalo de integração é  $(0, \infty)$ . Este problema tem uma solução se, e somente se,

$$\begin{aligned} H_{2n}^{(-2n)} > 0, & \quad H_{2n+1}^{(-2n)} > 0, & \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ H_{2n}^{(-2n+1)} > 0, & \quad H_{2n+1}^{(-2n-1)} < 0, & \quad n = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

O problema de momento de Stieltjes forte é determinado, se e somente se, certas frações contínuas da forma

$$\frac{F_1 z}{1 + G_1 z} + \frac{F_2 z}{1 + G_2 z} + \frac{F_3 z}{1 + G_3 z} + \dots, \quad F_n > 0 \text{ e } G_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

associadas ao problema, são convergentes (ver [15] e [16]).

Problema de momento de Hamburger forte, onde o intervalo de integração é  $(-\infty, \infty)$ . As condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução para este problema são

$$H_{2n}^{(-2n)} > 0 \text{ e } H_{2n+1}^{(-2n)} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Não são conhecidas condições necessárias e suficientes para a unicidade da solução do problema de momento de Hamburger forte (ver [11] e [15]).

Temos, também, o problema de momento trigonométrico, cujo intervalo de integração é  $[-\pi, \pi]$ , e a seqüência  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  é uma seqüência de números complexos. Este caso será estudado com mais detalhes na Seção 4.2.

# Capítulo 3

## Polinômios de Szegő e HPC-Fração

Neste capítulo, definimos as frações contínuas de Perron-Carathéodory hermitianas, HPC-frações e os polinômios de Szegő, que são ortogonais no círculo unitário. Usamos as fórmulas de recorrência para relacionar estes dois tópicos. Consideramos os polinômios de Szegő associados a um certo funcional linear, visando resolver o problema de momento trigonométrico no próximo capítulo. Os principais resultados podem ser encontrados em Jones e outros [12].

### 3.1 Fração contínua de Perron-Carathéodory

Uma fração contínua de Perron-Carathéodory hermitiana (HPC-fração) é uma expressão do tipo

$$\delta_0 - \frac{2\delta_0}{1 + \frac{1}{\bar{\delta}_1 z} + \frac{(1 - |\delta_1|^2)z}{\delta_1} + \frac{1}{\bar{\delta}_2 z} + \frac{(1 - |\delta_2|^2)z}{\delta_2} + \dots}, \quad (3.1)$$

onde  $\delta_n \in \mathbb{C}$  satisfazem

$$\delta_0 \neq 0, \quad |\delta_n| \neq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Se  $\delta_n$  satisfazem

$$\delta_0 > 0, \quad |\delta_n| < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

então a fração (3.1) é dita fração contínua de Perron-Carathéodory positiva (PPC-fração). Comparando seus coeficientes com os coeficientes da fração contínua (2.2), vemos que

$$b_0 = \delta_0, \quad a_1 = -2\delta_0, \quad b_1 = 1.$$

Daí em diante,

$$a_{2n} = 1, \quad a_{2n+1} = (1 - |\delta_n|^2)z, \quad b_{2n} = \bar{\delta}_n z, \quad b_{2n+1} = \delta_n,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ . Através dessa comparação e, de (2.3) e (2.4), podemos obter as seguintes relações de recorrência para os numeradores e denominadores dos convergentes das frações contínuas de

Perron-Carathéodory

$$\begin{pmatrix} P_{2n}(z) \\ Q_{2n}(z) \end{pmatrix} = \bar{\delta}_n z \begin{pmatrix} P_{2n-1}(z) \\ Q_{2n-1}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{2n-2}(z) \\ Q_{2n-2}(z) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (3.2)$$

$$\begin{pmatrix} P_{2n+1}(z) \\ Q_{2n+1}(z) \end{pmatrix} = \delta_n \begin{pmatrix} P_{2n}(z) \\ Q_{2n}(z) \end{pmatrix} + (1 - |\delta_n|^2) z \begin{pmatrix} P_{2n-1}(z) \\ Q_{2n-1}(z) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (3.3)$$

com as condições iniciais

$$P_0(z) = \delta_0, \quad P_1(z) = -\delta_0, \quad Q_0(z) = 1, \quad Q_1(z) = 1. \quad (3.4)$$

Usamos  $\text{HPC}\{\delta_n\}$  ( $\text{PPC}\{\delta_n\}$ ) para denotar uma HPC-fração (PPC-fração).

## 3.2 Polinômios de Szegő

Para um par de números inteiros  $(p, q)$ ,  $p \leq q$ , denotamos por  $\Lambda_{p,q}$  o espaço das funções definidas por

$$L(z) = \sum_{k=p}^q c_k z^k, \quad z, c_k \in \mathbb{C}.$$

Estas funções são conhecidas por polinômios de Laurent (L-polinômios). O espaço de todos os L-polinômios será denotado por  $\Lambda$ , o espaço dos polinômios por  $\mathbb{P}$  e o espaço dos polinômios de grau no máximo  $n$  por  $\mathbb{P}_n$ , note que  $\mathbb{P}_n = \Lambda_{0,n}$ .

**Definição 3.1.** *O suporte de uma função não-decrescente  $\psi$  é o conjunto dos seus pontos de aumento, ou seja,*

$$\text{supp}(\psi) = \{z \in \mathbb{C} : \psi(z + \epsilon) - \psi(z - \epsilon) > 0, \quad \forall \epsilon > 0\}.$$

**Definição 3.2.** *Uma função  $\psi(z)$  é uma medida positiva no círculo unitário  $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  quando  $\psi(e^{i\theta})$ , definida em  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , é uma função real, limitada e não decrescente com infinitos pontos de aumento tal que os momentos (trigonométricos)*

$$\mu_m = \int_{\mathcal{C}} z^{-m} d\psi(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} d\psi(e^{i\theta}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

*existem (são finitos). A medida  $\psi(e^{i\theta})$  induz uma outra medida  $\tilde{\psi}(\theta)$  que chamamos, simplesmente, de  $\psi(\theta)$ , esta é a notação que usamos neste trabalho.*

Um dos objetivos é estudar o problema de momento trigonométrico (PMT), a saber: Dada uma seqüência dupla  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  de números complexos, determinar condições necessárias e suficientes para a existência de uma medida positiva em  $[-\pi, \pi]$  tal que

$$\mu_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\psi(\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

De posse da medida  $\psi$ , definimos um funcional integral

$$I_\psi[f(e^{i\theta})] = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(\theta), \quad f \in \Lambda. \quad (3.5)$$

Chihara [4], p.51, afirma que se uma medida positiva  $\psi$  possui um suporte infinito, então o funcional  $I_\psi$ , definido em  $\Lambda$ , satisfaz  $I_\psi[f(e^{i\theta})] > 0$  para qualquer L-polinômio  $f(e^{i\theta}) \geq 0$ , para todo  $\theta$ , e  $f \not\equiv 0$ . Assim, o funcional  $I_\psi$ , em (3.5), define o produto interno

$$\langle f, g \rangle_\psi = I_\psi[f(e^{i\theta})\overline{g(e^{-i\theta})}] = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{-i\theta})} d\psi(\theta), \quad f, g \in \Lambda. \quad (3.6)$$

Observamos que

$$\overline{\mu}_{-n} = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{in\theta}} d\psi(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\psi(\theta) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Logo, uma condição necessária para resolver o PMT é considerar seqüências  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  que satisfazem  $\mu_n = \overline{\mu}_{-n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Correspondente a esta seqüência definimos a matriz de Toeplitz,  $T_n$ , por

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e o funcional linear  $\mathcal{L}$ , em  $\Lambda$ , por

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{m=p}^q c_m z^m \right] = \sum_{m=p}^q c_m \mu_{-m}, \quad c_m \in \mathbb{C}, \quad -\infty < p \leq q < \infty. \quad (3.7)$$

Em termos de  $\mathcal{L}$ , podemos definir um funcional  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , por

$$\langle f, g \rangle = \mathcal{L} \left[ f(z) \overline{g\left(\frac{1}{z}\right)} \right], \quad f, g \in \Lambda, \quad (3.8)$$

onde a barra sobre  $g$  significa que conjugamos somente os seus coeficientes.

Decorre imediatamente das definições de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\mathcal{L}$  e da seqüência  $\{\mu_n\}$  que

$$(i) \langle \alpha(f+g), \beta h \rangle = \alpha \overline{\beta} \langle f, h \rangle + \alpha \overline{\beta} \langle g, h \rangle,$$

$$(ii) \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle},$$

para  $f, g, h \in \Lambda$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Além disso,

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k,j=-n}^n c_j \overline{c_k} \mu_{k-j}, \quad \text{se } f(z) = \sum_{j=-n}^n c_j z^j. \quad (3.9)$$

O determinante da matriz  $T_n$  é real pois  $T_n$  é hermitiana, isto é,  $T_n = \overline{T_n^t} = T_n^H$ . Este determinante é chamado determinante de Toeplitz e é definido por  $\Delta_{-1} = 1$  e, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

**Definição 3.3.** Uma seqüência  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  de números complexos é chamada hermitiana se

$$\mu_n = \bar{\mu}_{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Além disso, se

$$\Delta_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

a seqüência é chamada hermitiana positiva-definida.

**Definição 3.4.** Um funcional linear  $\mathcal{L}$ , definido em  $\Lambda$ , é chamado positivo-definido se  $\mathcal{L}[f(z)] > 0$  para todo  $L$ -polinômio  $f$  que satisfaz  $f(z) \geq 0$ , para todo  $z$ , e  $f \not\equiv 0$ .

Novamente, de acordo com Chihara [4] p.15, o funcional linear  $\mathcal{L}$  é positivo-definido quando

$$\Delta_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

e quase-definido quando

$$\Delta_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Ainda, com relação ao funcional integral (3.5), para todo polinômio  $\pi(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ , com  $c_n \neq 0$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , temos

$$0 < \langle \pi, \pi \rangle_{\psi} = \int_{-\pi}^{\pi} |\pi(e^{i\theta})|^2 d\psi(\theta) = \begin{pmatrix} \bar{c}_0 & \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n \end{pmatrix} T_n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

de onde vemos que  $T_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) é positiva-definida.

Logo, considerar seqüências hermitianas positiva-definidas é condição necessária para resolver o PMT.

Seja  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  uma seqüência hermitiana positiva-definida, isto é,  $\mathcal{L}$  é positivo-definido. Se  $f(z) = \sum_{j=-n}^n c_j z^j$  satisfaz  $f \not\equiv 0$ . Então, de (3.9),

$$\langle f, f \rangle = \begin{pmatrix} \bar{c}_{-n} & \bar{c}_{-n+1} & \bar{c}_{-n+2} & \cdots & \bar{c}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-2n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-2n+1} \\ \mu_2 & \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-2n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{2n} & \mu_{2n-1} & \mu_{2n-2} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-n} \\ c_{-n+1} \\ c_{-n+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} > 0,$$

pois a matriz dos momentos é positiva-definida. Logo (3.8) é um produto interno em  $\Lambda \times \Lambda$ .

Quando  $\Delta_n \neq 0$  ( $\Delta_n > 0$ ), ou seja, quando  $\mathcal{L}$  é quase-definido (positivo-definido), definimos como seqüência de polinômios de ortogonais com relação a  $\mathcal{L}$ , a seqüência que satisfaz

$$\langle \rho_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1, \\ K_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Esta seqüência também é conhecida como seqüência de polinômios de Szegő com relação a  $\mathcal{L}$ . Consideramos apenas os polinômios  $\rho_n$  mônicos, isto é,

$$\rho_n(z) = \sum_{k=0}^n c_{k,n} z^k, \quad c_{k,n} \in \mathbb{C}, \quad c_{n,n} = 1,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ . Portanto, para  $m = 0, 1, 2, \dots$ , obtemos

$$\langle \rho_n, z^m \rangle = \mathcal{L} \left[ \rho_n(z) \frac{1}{z^m} \right] = \sum_{k=0}^n c_{k,n} \mu_{m-k} = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ K_n, & \text{se } m = n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

que equivale ao sistema

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,n} \\ c_{1,n} \\ c_{2,n} \\ \vdots \\ c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Calculando  $c_{n,n}$ , por meio da regra de Cramer, temos

$$1 = c_{n,n} = \frac{K_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \Rightarrow K_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Logo,

$$\langle \rho_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.12)$$

Substituindo a última linha do sistema (3.11) por  $c_{0,n} + c_{1,n}z + \cdots + c_{n-1,n}z^{n-1} + z^n = \rho_n(z)$ , obtemos o novo sistema

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,n} \\ c_{1,n} \\ c_{2,n} \\ \vdots \\ c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \rho_n(z) \end{pmatrix}.$$

Calculando  $c_{n,n}$ , pelo mesmo método anterior, encontramos

$$\rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

**Definição 3.5.** Se  $q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  é um polinômio de grau no máximo  $n$ , então o seu polinômio recíproco é definido por

$$q_n^*(z) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k z^{n-k} = z^n \overline{q_n(1/z)},$$

onde  $\bar{q}_n$  é o polinômio  $q_n$  com os coeficientes conjugados.

Para  $z \in \mathbb{C}$ , também podemos escrever

$$q_n^*(z) = z^n \overline{q_n(1/\bar{z})}.$$

Neste caso, conjugamos os coeficientes e a variável de  $q_n$ . Consideramos  $*$  como sendo uma operação que depende de  $n$  e que é uma involução, pois

$$[q_n^*]^* = q_n.$$

Da forma (3.13) para  $\rho_n$  e lembrando que  $\Delta_n \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , temos

$$\rho_n^*(z) = z^n \overline{\rho_n(1/\bar{z})} = \frac{z^n}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \bar{\mu}_0 & \bar{\mu}_{-1} & \cdots & \bar{\mu}_{-n} \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_0 & \cdots & \bar{\mu}_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mu}_{n-1} & \bar{\mu}_{n-2} & \cdots & \bar{\mu}_{-1} \\ 1 & \frac{1}{z} & \cdots & \frac{1}{z^n} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.14)$$

Usando as definições de polinômio recíproco e do funcional (3.8), obtemos

$$\langle \rho_n^*, z^m \rangle = \left\langle z^n \bar{\rho}_n \left( \frac{1}{z} \right), z^m \right\rangle = \mathcal{L} \left[ z^n \bar{\rho}_n \left( \frac{1}{z} \right) \frac{1}{z^m} \right] = \mathcal{L} \left[ z^{n-m} \bar{\rho}_n \left( \frac{1}{z} \right) \right] = \langle z^{n-m}, \rho_n \rangle.$$

Então,

$$\langle \rho_n^*, z^m \rangle = \begin{cases} \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.15)$$

Como  $\rho_m(z) = z^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,m} z^k$ , temos

$$\langle \rho_n, \rho_m \rangle = \left\langle \rho_n, z^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,m} z^k \right\rangle = \langle \rho_n, z^m \rangle + \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,m} \langle \rho_n, z^k \rangle = \langle \rho_n, z^m \rangle, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Portanto,

$$\langle \rho_n, \rho_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Definimos, agora,  $\delta_n \in \mathbb{C}$  por

$$\delta_0 = \mu_0 \quad \text{e} \quad \delta_n = \rho_n(0), \quad n = 1, 2, \dots$$

O coeficiente  $\delta_n$  é chamado coeficiente de reflexão e será extremamente útil para este estudo. Por (3.13), obtemos

$$\delta_n = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-3} & \cdots & \mu_{-1} \end{vmatrix}. \quad (3.16)$$

**Teorema 3.1 (Relações de Recorrência).** *Os polinômios de Szegő mônicos satisfazem as relações*

$$\rho_n^*(z) = \bar{\delta}_n z \rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1, \quad (3.17)$$

$$\rho_n(z) = \delta_n \rho_n^*(z) + (1 - |\delta_n|^2) z \rho_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.18)$$

com as condições iniciais

$$\rho_0(z) = 1, \quad \rho_0^*(z) = 1.$$

**Demonstração:** Lembramos que

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{k=p}^q c_k z^k \right] = \sum_{k=p}^q c_k \mu_{-k} \quad \text{e} \quad \langle f, g \rangle = \mathcal{L} \left[ f(z) \bar{g} \left( \frac{1}{z} \right) \right].$$

Seja  $L \in \Lambda$ , então

$$\langle zL, z^n \rangle = \mathcal{L} \left[ zL(z) \frac{1}{z^n} \right] = \mathcal{L} \left[ L(z) \frac{1}{z^{n-1}} \right] = \langle L, z^{n-1} \rangle.$$

Para  $n \geq 1$ , seja

$$A_n(z) = \rho_n^*(z) - \alpha_n z \rho_{n-1}(z) - \rho_{n-1}^*(z), \quad \alpha_n = -\frac{\langle \rho_{n-1}^*, z \rangle}{\langle z \rho_{n-1}, z^n \rangle}. \quad (3.19)$$

O coeficiente  $\alpha_n$  está bem definido, pois

$$\langle z \rho_{n-1}, z^n \rangle = \langle \rho_{n-1}, z^{n-1} \rangle = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De  $\rho_n^*(0) = \rho_{n-1}^*(0) = 1$  segue que

$$A_n(0) = 0,$$

isto significa que o polinômio  $A_n$  não possui termo independente. Portanto,

$$A_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k \in \Lambda_{1,n}.$$



Como  $A_n$  não tem termo independente,

$$A_n^*(z) = z^n \bar{A}_n \left( \frac{1}{z} \right), \quad (3.20)$$

pertence a  $\mathbb{P}_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Então  $A_n^*$  tem a expansão

$$A_n^*(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \rho_k(z). \quad (3.21)$$

De (3.20) e (3.21), obtemos para  $n \geq 1$ ,

$$A_n(z) = z^n \bar{A}_n^* \left( \frac{1}{z} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} z^n \bar{b}_k \bar{\rho}_k \left( \frac{1}{z} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} \bar{b}_k z^k \bar{\rho}_k \left( \frac{1}{z} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k z^{n-k} \rho_k^*(z). \quad (3.22)$$

A escolha de  $\alpha_n$  assegura que  $\langle A_n, z^n \rangle = 0$ , pois de (3.19)

$$\langle A_n, z^n \rangle = \langle \rho_n^*, z^n \rangle + \frac{\langle \rho_{n-1}^*, z^n \rangle}{\langle z \rho_{n-1}, z^n \rangle} \langle z \rho_{n-1}, z^n \rangle - \langle \rho_{n-1}^*, z^n \rangle = 0.$$

Disso, da definição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e de (3.22) vemos que

$$\begin{aligned} 0 = \langle A_n, z^n \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k \langle z^{n-k} \rho_k^*, z^n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k \mathcal{L} \left[ z^{n-k} \rho_k^*(z) \frac{1}{z^n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k \mathcal{L} \left[ \rho_k^*(z) \frac{1}{z^k} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{b}_k \langle \rho_k^*, z^k \rangle = \bar{b}_0 \mu_0. \end{aligned}$$

Como  $\mu_0 = \Delta_0 \neq 0$ , concluímos que  $b_0 = 0$ . Agora,

$$\begin{aligned} \langle A_n, z^{n-1} \rangle &= \langle \rho_n^*, z^{n-1} \rangle - \alpha_n \langle z \rho_{n-1}, z^{n-1} \rangle - \langle \rho_{n-1}^*, z^{n-1} \rangle = -\alpha_n \mathcal{L} \left[ z \rho_{n-1}(z) \frac{1}{z^{n-1}} \right] \\ &= -\alpha_n \mathcal{L} \left[ \rho_{n-1}(z) \frac{1}{z^{n-2}} \right] = -\alpha_n \langle \rho_{n-1}, z^{n-2} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = \langle A_n, z^{n-1} \rangle &= \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k \langle z^{n-k} \rho_k^*, z^{n-1} \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k \mathcal{L} \left[ z^{n-k} \rho_k^*(z) \frac{1}{z^{n-1}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k \langle \rho_k^*, z^{k-1} \rangle = \bar{b}_1 \langle \rho_1^*, 1 \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,  $b_1 = 0$ . Continuando, obtemos,  $b_2 = b_3 = \dots = b_{n-1} = 0$ . Logo,  $A_n(z) \equiv 0$  e de (3.19)

$$\rho_n^*(z) = \alpha_n z \rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z). \quad (3.23)$$

Comparando os coeficientes de  $z^n$  em (3.23) temos,

$$\alpha_n = \bar{\rho}_n(0) = \bar{\delta}_n, \quad n \geq 1.$$

Logo,

$$\rho_n^*(z) = \bar{\delta}_n z \rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z),$$

como em (3.17).

Definimos

$$C_n(z) = \rho_n(z) - \delta_n \rho_n^*(z) - \gamma_n z \rho_{n-1}(z), \quad \gamma_n = \frac{\langle \rho_n, z^n \rangle}{\langle z \rho_{n-1}, z^n \rangle}.$$

De maneira completamente análoga à anterior, encontramos

$$\rho_n(z) = \delta_n \rho_n^*(z) + (1 - |\delta_n|^2) z \rho_{n-1}(z),$$

terminando, assim, a prova de (3.17). ■

Pelas relações de recorrência podemos ver que os polinômios de Szegő mônicos são completamente determinados pelos coeficientes de reflexão  $\delta_n$ . Esses coeficientes podem ser calculados por (3.16) ou pelo método dado no próximo teorema. No próximo teorema também mostramos que  $\delta_0 \neq 0$  e  $|\delta_n| \neq 1$ .

**Teorema 3.2.** *Sejam  $\mathcal{L}$  um funcional linear quase-definido,  $\Delta_n$  o determinante de Toeplitz (3.10) e  $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$  uma seqüência definida por*

$$\delta_0 = \mu_0, \quad \delta_n = \rho_n(0), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Então,  $\delta_0 \neq 0$  e, para  $n \geq 1$ ,

$$\delta_n = -\frac{\langle z \rho_{n-1}(z), 1 \rangle}{\langle \rho_{n-1}^*, 1 \rangle} \quad (3.24)$$

e

$$1 - |\delta_n|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} \neq 0. \quad (3.25)$$

**Demonstração:** Como estamos trabalhando com um funcional quase-definido, temos que  $\Delta_n \neq 0$  ( $n \geq 0$ ), então,  $\delta_0 = \mu_0 \neq 0$ . Para mostrar (3.24), multiplicamos a relação de recorrência (3.17) por  $\delta_n$  e somamos com a relação (3.18), obtendo uma terceira relação dada por

$$\rho_n(z) = z \rho_{n-1}(z) + \delta_n \rho_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1.$$

Assim temos

$$\langle \rho_n, 1 \rangle = \langle z \rho_{n-1}, 1 \rangle + \delta_n \langle \rho_{n-1}^*, 1 \rangle.$$

Como  $\langle \rho_n, 1 \rangle = 0$ , chegamos ao resultado.

Finalmente, para mostrar (3.25), usamos a relação de ortogonalidade (3.12) e a relação de recorrência (3.18) e obtemos

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \langle \rho_n, z^n \rangle = \delta_n \langle \rho_n^*, z^n \rangle + (1 - |\delta_n|^2) \langle z \rho_{n-1}, z^n \rangle = (1 - |\delta_n|^2) \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}},$$

como queríamos demonstrar. ■

Quando  $\mathcal{L}$  é um funcional linear positivo-definido, é possível mostrar que os zeros dos polinômios de Szegő  $\rho_n$  estão todos no disco unitário aberto  $|z| < 1$ . Para demonstrarmos este fato precisamos do seguinte resultado.

**Teorema 3.3.** *Seja  $U (\neq 0)$  um polinômio com todos os zeros em  $|z| < 1$ . Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  satisfaz  $|\lambda| < 1$ , então todos os zeros do polinômio*

$$T(z) = U^*(z) + \lambda z U(z) \quad (3.26)$$

*estão em  $|z| > 1$ .*

**Demonstração:** Convém observar inicialmente que, como os zeros de  $U$  estão em  $|z| < 1$ , os zeros do seu recíproco  $U^*$  estão em  $|z| > 1$ .

Para demonstrar o teorema, supomos, por absurdo, que  $T(z_0) = 0$  e  $|z_0| \leq 1$ . Então, por (3.26), vemos que  $z_0 \neq 0$  e  $U^*(z_0) \neq 0$ , pois os zeros de  $U^*$  estão em  $|z| > 1$ . Assim,  $U^*(z_0) = -z_0 \lambda U(z_0)$ , e segue que

$$1 = |z_0| |\lambda| \left| \frac{U(z_0)}{U^*(z_0)} \right| \leq |z_0| |\lambda| < |z_0|,$$

o que é uma contradição. ■

Se  $\mathcal{L}$  é um funcional linear positivo-definido no sentido que  $\Delta_n > 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , então, de (3.25), temos que  $|\delta_n| < 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Neste caso, vamos usar o princípio de indução finita na relação de recorrência (3.17), ou seja, em

$$\rho_n^*(z) = \rho_{n-1}^*(z) + \bar{\delta}_n z \rho_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

para mostrar que os zeros dos polinômios de Szegő  $\rho_n$  estão no disco unitário aberto  $|z| < 1$ . Para isso basta mostrar que os zeros de  $\rho_n^*$  estão em  $|z| > 1$ .

Temos que

$$\rho_1(z) = z + \delta_1,$$

cujos zeros são  $-\delta_1$  que, em módulo, é menor do que 1.

Supomos que todos os zeros de  $\rho_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , estão em  $|z| < 1$ , ou equivalentemente que os zeros de  $\rho_k^*$  estão em  $|z| > 1$ , para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Agora, usando a relação (3.17) e o Teorema 3.3, mostramos que os zeros de  $\rho_n^*$  estão em  $|z| > 1$ . Logo, os zeros de  $\rho_n$  satisfazem  $|z| < 1$ .

### 3.3 Relação entre polinômios de Szegő e HPC-fração

No teorema a seguir tomamos um funcional quase-definido  $\mathcal{L}$  e sua correspondente seqüência de polinômios de Szegő  $\{\rho_n\}$  e mostramos que existe uma HPC-fração cujos denominadores dos  $n$ -ésimos convergentes  $Q_n$  satisfazem  $Q_{2n+1}(z) = \rho_n(z)$  e  $Q_{2n}(z) = \rho_n^*(z)$ .

**Teorema 3.4.** *Seja  $\{\rho_n\}$  a seqüência de polinômios de Szegő com relação ao funcional linear quase-definido  $\mathcal{L}$ . Sejam  $\{\delta_n\}$  e  $\{Q_n\}$  definidos por*

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \mu_0, & \delta_n &= \rho_n(0), & n &= 1, 2, 3, \dots, \\ Q_{2n+1}(z) &= \rho_n(z), & Q_{2n}(z) &= \rho_n^*(z), & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

Então  $Q_n$  é o denominador do  $n$ -ésimo convergente de uma HPC-fração construída com os coeficientes  $\delta_n$ . Além disso, a HPC-fração é uma PPC-fração se, e somente se,  $\mathcal{L}$  é definido positivo.

**Demonstração:** Pelo Teorema 3.2,  $\delta_0 \neq 0$  e  $|\delta_n| \neq 1$ , que está de acordo com a definição da HPC-fração. De (3.27) e (3.17), obtemos

$$Q_{2n}(z) = \bar{\delta}_n z Q_{2n-1}(z) + Q_{2n-2}(z)$$

e

$$Q_{2n+1}(z) = \delta_n Q_{2n}(z) + (1 - |\delta_n|^2) z Q_{2n-1}(z).$$

Portanto,  $Q_n$  satisfaz as mesmas relações de recorrência dos denominadores dos convergentes da HPC-fração. As condições iniciais são conseqüências de  $\rho_0(z) = \rho_0^*(z) = 1$  e de (3.27).

Agora, se  $\mathcal{L}$  é positivo-definido, então  $\delta_0 = \mu_0 = \Delta_0 > 0$  e  $\Delta_n > 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Assim, de (3.25),  $|\delta_n| < 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Portanto a HPC-fração é uma PPC-fração. Reciprocamente, se HPC $\{\delta_n\}$  é positiva, então  $\Delta_0 = \mu_0 = \delta_0 > 0$ . Para  $n \geq 1$ ,  $|\delta_n| < 1$ . Assim (3.25) e o fato que  $\Delta_n$  é real implica que

$$0 < 1 - |\delta_n|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} \Rightarrow \Delta_n \Delta_{n-2} > 0,$$

como  $\Delta_{-1} = 1$  e  $\Delta_0 > 0$ , concluímos que  $\Delta_n > 0$ . Logo,  $\mathcal{L}$  é positivo-definido.  $\blacksquare$

O próximo teorema contém um resultado do tipo Teorema de Favard, em que tomando uma HPC-fração com o numerador do  $n$ -ésimo convergente  $Q_n$ , mostramos que existe um funcional linear quase-definido  $\mathcal{L}$  tal que  $\{Q_{2n+1}\}$  é a seqüência de polinômios de Szegő com relação a  $\mathcal{L}$ .

**Teorema 3.5.** *Seja HPC $\{\delta_n\}$  uma HPC-fração cujo denominador do  $n$ -ésimo convergente  $Q_n$  está definido pelas relações de recorrência (3.2), (3.3) e (3.4). Para cada  $n \geq 0$ , sejam  $\sigma_n$  e  $\sigma_n^x$  definidos por*

$$\sigma_n(z) = Q_{2n+1}(z), \quad \sigma_n^x(z) = Q_{2n}(z). \quad (3.28)$$

Então,

(A)  $\sigma_0(z) \equiv \sigma_0^x(z) \equiv 1$  e para  $n \geq 1$ ,

$$\sigma_n(z) = z\sigma_{n-1}(z) + \delta_n\sigma_{n-1}^x(z), \quad (3.29)$$

$$\sigma_n^x(z) = \bar{\delta}_nz\sigma_{n-1}(z) + \sigma_{n-1}^x(z), \quad (3.30)$$

e  $\sigma_n$  é um polinômio mônico de grau  $n$  com  $\sigma_n(0) = \delta_n$ ,  $\sigma_n^x$  é um polinômio de grau no máximo  $n$  com  $\sigma_n^x(0) = 1$  e

$$Q_{2n+1}^*(z) = \sigma_n^*(z) = \sigma_n^x(z) = Q_{2n}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde  $*$  denota o polinômio recíproco.

(B) Existe um funcional linear  $\mathcal{L}$ , quase-definido, tal que  $\{\sigma_n\}$  é a seqüência de polinômios de Szegő com relação a  $\mathcal{L}$ . O funcional  $\mathcal{L}$  é positivo-definido se, e somente se,

$$\delta_0 > 0 \quad e \quad |\delta_n| < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Demonstração:** (A) As relações (3.29) e (3.30) seguem substituindo (3.28) nas relações de recorrência (3.2) e (3.3) da HPC-fração.

Para provar o restante temos que  $\sigma_n^*(z) = z^n\bar{\sigma}_n(1/z)$ , de onde

$$\sigma_n(z) = z^n\bar{\sigma}_n^*(1/z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como  $\sigma_0(z) \equiv \sigma_0^x(z) \equiv 1$ ,

$$\sigma_0^*(z) \equiv 1 \equiv \sigma_0^x(z).$$

De (3.30), para  $n = 1$ ,

$$\sigma_1(z) = z + \delta_1 \quad e \quad \sigma_1^x(z) = \bar{\delta}_1z + 1$$

de onde vemos que  $\sigma_1(z)$  tem grau 1,  $\sigma_1^x(z)$  tem grau no máximo 1,  $\sigma_1(0) = \delta_1$ ,  $\sigma_1^x(0) = 1$  e

$$\sigma_1^*(z) = z\bar{\sigma}_1\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{\delta}_1z + 1 = \sigma_1^x(z).$$

Vamos supor, por indução, que  $\sigma_k$  tem grau  $k$ ,  $\sigma_k^x$  tem grau no máximo  $k$ ,  $\sigma_k(0) = \delta_k$ ,  $\sigma_k^x(0) = 1$  e  $\sigma_k^x \equiv \sigma_k^*$ .

Agora, por (3.29),

$$\sigma_{k+1}(z) = z\sigma_k(z) + \delta_{k+1}\sigma_k^x(z) = z\sigma_k(z) + \delta_{k+1}\sigma_k^*(z). \quad (3.31)$$

Portanto,  $\sigma_{k+1}(z)$  tem grau  $k + 1$  e, ainda,

$$\sigma_{k+1}(0) = \delta_{k+1}\sigma_k^*(0) = \delta_{k+1}.$$

De (3.30),

$$\sigma_{k+1}^x(z) = \bar{\delta}_{k+1} z \sigma_k(z) + \sigma_k^x(z) = \bar{\delta}_{k+1} z \sigma_k(z) + \sigma_k^*(z).$$

Portanto,  $\sigma_{k+1}^x(z)$  tem grau no máximo  $k + 1$  e

$$\sigma_{k+1}^x(0) = \sigma_k^*(0) = 1.$$

De (3.31) ainda vemos que

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1}^*(z) &= z^{k+1} \bar{\sigma}_{k+1} \left( \frac{1}{z} \right) = z^{k+1} \left( \frac{1}{z} \right) \bar{\sigma}_k \left( \frac{1}{z} \right) + z^{k+1} \bar{\delta}_{k+1} \bar{\sigma}_k^* \left( \frac{1}{z} \right) \\ &= z^k \bar{\sigma}_k \left( \frac{1}{z} \right) + \bar{\delta}_{k+1} z z^k \bar{\sigma}_k^* \left( \frac{1}{z} \right) = \sigma_k^*(z) + \bar{\delta}_{k+1} z \sigma_k(z) \\ &= \sigma_{k+1}^x(z), \end{aligned}$$

demonstrando assim o resultado.

(B) Começamos mostrando que é possível construir uma seqüência  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  com

$$\mu_m = \bar{\mu}_{-m} \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

tal que, para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$ , o funcional  $\mathcal{L}^{(n)}$  definido em  $\Lambda_{-n,n}$  por

$$\mathcal{L}^{(n)} \left[ \sum_{k=-n}^n c_k z^k \right] = \sum_{k=-n}^n c_k \mu_{-k}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad (3.32)$$

satisfaz

$$\mathcal{L}^{(n)}[\sigma_k(z)] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.33)$$

Tomamos  $0 \neq \mu_0 \in \mathbb{R}$ . Então  $\bar{\mu}_0 = \mu_0$ . Por (3.32),

$$\mathcal{L}^{(0)} \left[ \sum_{k=0}^0 c_k z^k \right] = \mathcal{L}^{(0)}[c_0] = c_0 \mu_0$$

e satisfaz, por imposição, (3.33).

Supomos que para algum  $n \geq 1$ ,  $\mu_{-(n-1)}, \dots, \mu_{n-1}$  satisfaz

$$\bar{\mu}_{-m} = \mu_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

e  $\mathcal{L}^{(n-1)}$  definido em  $\Lambda_{-(n-1), (n-1)}$  por (3.32), trocando  $n$  por  $n-1$ , satisfaz

$$\mathcal{L}^{(n-1)}[\sigma_k(z)] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.34)$$

Como  $\sigma_k$  é um polinômio mônico de grau exatamente  $k$ , o conjunto  $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  é linearmente independente, daí

$$z^n = \sigma_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sigma_k(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde os coeficientes  $a_k$  são unicamente determinados. Definimos

$$\mu_{-n} = a_0\mu_0, \quad \mu_n = \bar{\mu}_{-n} \quad (3.35)$$

e  $\mathcal{L}^{(n)}$  por (3.32). Então  $\mathcal{L}^{(n)}$  é uma extensão do funcional  $\mathcal{L}^{(n-1)}$  definido em  $\Lambda_{-(n-1),(n-1)}$  para  $\Lambda_{-n,n}$ , isto é, podemos aplicar  $\mathcal{L}^{(n)}$  a todo elemento de  $\Lambda_{-(n-1),(n-1)}$  obtendo o mesmo valor provindo de  $\mathcal{L}^{(n-1)}$ . Portanto, por (3.34)

$$\mathcal{L}^{(n)}[\sigma_k(z)] = \mathcal{L}^{(n-1)}[\sigma_k(z)] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.36)$$

De (3.35) e (3.36),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(n)}[\sigma_n] &= \mathcal{L}^{(n)}\left[z^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sigma_k(z)\right] = \mathcal{L}^{(n)}[z^n] - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathcal{L}^{(n)}[\sigma_k(z)] \\ &= \mu_{-n} - a_0 \mathcal{L}^{(n)}[\sigma_0(z)] = \mu_{-n} - a_0 \mu_0 = 0. \end{aligned}$$

Isto completa a indução.

O funcional  $\mathcal{L}$ , definido em  $\Lambda$  por (3.7) é, então, uma extensão do funcional  $\mathcal{L}^{(n)}$  e, portanto, satisfaz

$$\mathcal{L}[\sigma_k] = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Assim, o funcional associado  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , definido por (3.8), satisfaz

$$\langle \sigma_n, 1 \rangle = \mathcal{L}[\sigma_n(z)] = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.37)$$

De (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \sigma_n^*, z^n \rangle &= \langle z^n \bar{\sigma}_n \left( \frac{1}{z} \right) z^n \rangle = \mathcal{L} \left[ z^n \bar{\sigma}_n \left( \frac{1}{z} \right) \frac{1}{z^n} \right] = \mathcal{L} \left[ \bar{\sigma}_n \left( \frac{1}{z} \right) \right] = \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^n \bar{\alpha}_k \frac{1}{z^k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \bar{\alpha}_k \mu_k = \sum_{k=0}^n \bar{\alpha}_k \bar{\mu}_{-k} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu_{-k} = \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k \right] = \overline{\mathcal{L}[\sigma_n(z)]} = \overline{\langle \sigma_n, 1 \rangle} = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle \sigma_n^*, z^n \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.38)$$

Nosso próximo passo é mostrar que, para  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\langle \sigma_n, z^q \rangle = \langle \sigma_n^*, z^q \rangle = 0, \quad 1 \leq q \leq n-1. \quad (3.39)$$

Inicialmente, introduzimos, para  $r \geq 0$  inteiro, as afirmações  $I_r$  e  $J_r$  dadas por

$$I_r = \{ \langle \sigma_n, z^q \rangle = 0, \quad \text{para } 0 \leq q \leq r \leq n-1, \quad n = r+1, r+2, \dots \} \text{ e}$$

$$J_r = \{ \langle \sigma_n^*, z^q \rangle = 0, \quad \text{para } 1 \leq q \leq r \leq n, \quad n = r, r+1, \dots \},$$

e usamos indução finita para mostrar que estas afirmações são verdadeiras, demonstrando, assim, (3.39).

Cabe observar que  $I_0$  é simplesmente (3.37) e  $J_0$  é vazio. Assim, ambas as afirmações valem. Para  $p \geq r + 1$ , introduzimos

$$J_{r+1,p} = \{\langle \sigma_m^*, z^{r+1} \rangle = 0, \quad \text{para } r + 1 \leq m \leq p\}.$$

Observamos que

$$J_r = \{\langle \sigma_r^*, z \rangle = 0, \dots, \langle \sigma_r^*, z^r \rangle = 0, \langle \sigma_{r+1}^*, z \rangle = 0, \dots, \langle \sigma_{r+1}^*, z^r \rangle = 0, \dots\}$$

e

$$J_{r+1} = \{\langle \sigma_{r+1}^*, z \rangle = 0, \dots, \langle \sigma_{r+1}^*, z^{r+1} \rangle = 0, \langle \sigma_{r+2}^*, z \rangle = 0, \dots, \langle \sigma_{r+2}^*, z^{r+1} \rangle = 0, \dots\},$$

onde  $\langle \sigma_{r+1}^*, z^{r+1} \rangle = 0, \langle \sigma_{r+2}^*, z^{r+1} \rangle = 0, \dots \notin J_r$ . Então

$$J_{r+1} \setminus J_r = \{\langle \sigma_{r+1}^*, z^{r+1} \rangle = 0, \langle \sigma_{r+2}^*, z^{r+1} \rangle = 0, \dots\} = \bigcup_{p=r+1}^{\infty} J_{r+1,p}, \quad (3.40)$$

onde  $J_{r+1} \setminus J_r$  significa o conjunto de todas as afirmações que estão em  $J_{r+1}$  mas não em  $J_r$ .

Supomos que para algum  $r \geq 1$  fixo,  $I_r$  e  $J_r$  são válidas. Por (3.38),  $\langle \sigma_{r+1}^*, z^{r+1} \rangle = 0$ , isto é,  $J_{r+1,r+1}$  é válida.

Supomos, também, que  $J_{r+1,p}$  é válida para algum  $p \geq r + 1$ . Então, usando este fato, a relação de recorrência (3.2), (3.28) e  $I_r$ , temos

$$\langle \sigma_{p+1}^*, z^{r+1} \rangle = \bar{\delta}_{p+1} \langle z \sigma_p^*, z^{r+1} \rangle + \langle \sigma_p^*, z^{r+1} \rangle = \bar{\delta}_{p+1} \langle \sigma_p^*, z^r \rangle + \langle \sigma_p^*, z^{r+1} \rangle = 0.$$

Segue que  $J_{r+1,p+1}$  é válida e, portanto, por indução,  $J_{r+1,p}$  vale para todo  $p \geq r + 1$ .

De (3.40),

$$J_{r+1} = \bigcup_{p=r+1}^{\infty} J_{r+1,p} \cup J_r.$$

Portanto,  $J_{r+1}$  é válida.

Usando (3.3), (3.28),  $I_r$  e  $J_{r+1}$ , obtemos para  $n \geq r + 2$ ,

$$\langle \sigma_n, z^{r+1} \rangle = \delta_n \langle \sigma_n^*, z^{r+1} \rangle + (1 - |\delta_n|^2) \langle z \sigma_{n-1}, z^{r+1} \rangle = (1 - |\delta_n|^2) \langle \sigma_{n-1}, z^r \rangle = 0.$$

Portanto,  $I_{r+1}$  vale e, por indução em  $r$ , podemos concluir que  $I_m$  e  $J_m$  são válidas para todo  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Logo, (3.39) está provada.

De (3.3), também vemos que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_n, z^n \rangle &= \delta_n \langle \sigma_n^*, z^n \rangle + (1 - |\delta_n|^2) \langle \sigma_{n-1}, z^{n-1} \rangle = (1 - |\delta_n|^2) \langle \sigma_{n-1}, z^{n-1} \rangle \\ &= (1 - |\delta_n|^2) (1 - |\delta_{n-1}|^2) \cdots (1 - |\delta_1|^2) \langle \sigma_0, 1 \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.41)$$



Como  $\langle \sigma_0, 1 \rangle \neq 0$  e  $|\delta_n| \neq 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , segue de (3.41) que

$$\langle \sigma_n, z^n \rangle \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.42)$$

De (3.42) e pela definição de polinômio recíproco,

$$\langle \sigma_n^*, 1 \rangle = \langle z^n \overline{\sigma_n} \left( \frac{1}{z} \right), 1 \rangle = \langle z^n, \sigma_n(z) \rangle = \overline{\langle \sigma_n(z), z^n \rangle} \neq 0.$$

Agora, provaremos por indução que o determinante de Toeplitz satisfaz

$$\Delta_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.43)$$

tal que o funcional  $\mathcal{L}$  é quase-definido e, assim,  $\sigma_n$  é a seqüência de polinômios de Szegő com relação à  $\mathcal{L}$ .

Pela escolha de  $\mu_0$  temos que  $\Delta_0 = \mu_0 \neq 0$ . Supomos que para algum  $n \geq 1$ ,  $\Delta_{n-1} \neq 0$ . Escrevemos  $\sigma_n(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n$ . Então,

$$\langle \sigma_n, z^k \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad \langle \sigma_n, z^n \rangle = \beta_n \neq 0$$

é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_n \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Podemos ver que a matriz  $M_n$  dos coeficientes satisfaz  $\det(M_n) = \Delta_n$  e que a matriz aumentada desse sistema é dada por

$$M'_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} & 0 \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} & 0 \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Vemos que o determinante da submatriz obtida de  $M'_n$ , eliminando-se sua penúltima coluna, é o valor não nulo  $\beta_n \Delta_{n-1}$ . Em Boldrini [3] (Teorema 3.7.1, p.80) encontramos que o posto de uma matriz  $A$ , quadrada ou não, é dado pela maior ordem possível das submatrizes quadradas de  $A$  com determinantes diferentes de zero. Assim, o posto de  $M'_n$  é  $n+1$ . Como o sistema (3.44) tem uma solução, o posto de  $M_n$  é  $n+1$ . Logo,  $\Delta_n = \det(M_n) \neq 0$  e, por indução, (3.43) vale, como queríamos.

O restante é equivalente ao final do Teorema 3.4. ■

### 3.4 Polinômios associados e polinômios para-ortogonais

Nesta seção, apresentamos, sem demonstrações, dois tópicos que são necessários para a solução do problema de momento trigonométrico. As demonstrações podem ser encontradas em [12].

O primeiro tópico trata dos polinômios associados aos polinômios de Szegő. Consideramos expressões do tipo

$$\frac{z+t}{z-t}[\rho_n(t) - \rho_n(z)], \quad \frac{z+t}{z-t} \left[ \frac{z^n}{t^n} \rho_n^*(t) - \rho_n^*(z) \right],$$

onde  $t$  é a variável e  $z$  é considerado constante. Como  $t = z$  é um zero dos termos entre colchetes, em ambas, o numerador e o denominador, de cada expressão, possuem o fator  $(z - t)$ . Então temos que essas expressões são L-polinômios em  $t$ .

Para um L-polinômio em  $t$ ,

$$L(t, z) = \sum_{k=p}^q a_k(z)t^k, \quad a_k(z) \in \mathbb{C}, \quad -\infty < p \leq q < \infty,$$

usamos  $\mathcal{L}_t$  para denotar o funcional linear operando em  $L$  como uma função de  $t$  e escrevemos

$$\mathcal{L}_t[L(t, z)] = \sum_{k=p}^q a_k(z)\mu_{-k}.$$

Agora, definimos  $\pi_n$  e  $\omega_n$  por

$$\pi_n(z) = \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} (\rho_n(t) - \rho_n(z)) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \pi_0 = -\mu_0 \quad (3.45)$$

$$\omega_n(z) = \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^n}{t^n} \rho_n^*(t) - \rho_n^*(z) \right) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \omega_0 = \mu_0. \quad (3.46)$$

$\pi_n$  e  $\omega_n$  são chamados polinômios associados com  $\rho_n$  e  $\rho_n^*$ , respectivamente.

**Teorema 3.6.** *Seja  $\{\rho_n\}$  a seqüência de polinômios de Szegő com relação ao dado funcional linear quase-definido  $\mathcal{L}$ . Sejam  $\{\pi_n\}$  e  $\{\omega_n\}$  as seqüências de polinômios associados definidos por (3.45) e (3.46). Então,*

(A) *Para cada  $n \geq 0$ ,  $\pi_n(z)$  é um polinômio de grau  $n$ ,  $\omega_n(z)$  é um polinômio de grau no máximo  $n$ , e*

$$\omega_n(z) = -\pi_n^*(z). \quad (3.47)$$

(B) *Para  $n \geq 2$ ,*

$$\pi_n(z) = \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \rho_n(t) - \rho_n(z) \right) \right], \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (3.48)$$

$$\omega_n(z) = \mathcal{L}_t \left( \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \rho_n^*(t) - \rho_n^*(z) \right) \right] \right), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3.49)$$

(C) Dada uma HPC-fração definida por  $\delta_0 = \mu_0$  e  $\delta_n = \rho_n(0)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , com numerador do  $n$ -ésimo convergente  $P_n$ , temos

$$P_{2n}(z) = \omega_n(z) \quad e \quad P_{2n+1}(z) = \pi_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Este resultado garante que os polinômios associados  $\pi_n$  e  $\omega_n$  são numeradores dos convergentes da HPC-fração e, portanto, satisfazem as relações de recorrência

$$\begin{aligned} \omega_n(z) &= \bar{\delta}_n z \pi_{n-1}(z) + \omega_{n-1}(z), & n = 1, 2, 3, \dots, \\ \pi_n(z) &= \delta_n \omega_n(z) + (1 - |\delta_n|^2) z \pi_{n-1}(z), & n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (3.50)$$

com as condições iniciais

$$\omega_0(z) = P_0(z) = \delta_0, \quad \pi_0(z) = P_1(z) = -\delta_0.$$

A demonstração deste teorema baseia-se no fato de que é possível encontrar tais relações de recorrência para  $\pi_n$  e  $\omega_n$  a partir de suas definições (3.45) e (3.46).

Tomando as relações de recorrência para  $\pi_n$  e  $\omega_n$ , podemos dizer que os numeradores dos convergentes da HPC-fração são os polinômios associados aos polinômios de Szegő. Com esses argumentos podemos provar o próximo resultado.

**Teorema 3.7.** *Dada uma HPC-fração, construída a partir dos coeficientes  $\delta_n$ , obtemos um funcional linear quase-definido  $\mathcal{L}$  correspondente a ela (Teorema 3.5(B)), com  $\mu_0 = \delta_0$ . Seja  $\{\rho_n\}$  a seqüência de polinômios de Szegő com relação a esse funcional  $\mathcal{L}$ . Então, para  $n \geq 0$ ,*

$$P_{2n}(z) = \omega_n(z) \quad e \quad P_{2n+1}(z) = \pi_n(z),$$

onde  $\pi_n$  e  $\omega_n$  são os polinômios associados (3.45) e (3.46).

O segundo tópico a ser estudado nesta seção é sobre os polinômios para-ortogonais. Uma seqüência de polinômios  $\{X_n\}$  será chamada de seqüência de polinômios para-ortogonais com relação ao funcional quase-definido  $\mathcal{L}$  se, para todo  $n \geq 0$ ,  $X_n$  for um polinômio de grau  $n$  satisfazendo

$$\langle X_n, 1 \rangle \neq 0; \quad \langle X_n, z^m \rangle = 0, \quad 1 \leq m \leq n-1; \quad \langle X_n, z^n \rangle \neq 0.$$

Para  $k \in \mathbb{C}$ ,  $k \neq 0$ , um polinômio  $X$  é chamado  $k$ -invariante se

$$X^*(z) = kX(z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Uma seqüência de polinômios  $\{X_n\}$  é dita ser  $k_n$ -invariante se  $X_n$  é  $k_n$ -invariante para cada  $n$ .

Para cada  $n \geq 0$ , podemos mostrar que o polinômio de Szegő  $\rho_n$  não é  $k_n$ -invariante. De fato, supondo que para  $n \geq 0$ ,  $\rho_n^*(z) = k\rho_n(z)$  para algum  $k \neq 0$ , encontramos  $\rho_n(z) = \bar{k}\rho_n^*(z)$ . Lembrando que  $\rho_n$  é um polinômio mônico e, por isto,  $\rho_n^*(0) = 1$ , obtemos

$$1 = \rho_n^*(0) = k\rho_n(0) = k\delta_n \quad \text{e} \quad \delta_n = \rho_n(0) = \bar{k}\rho_n^*(0) = \bar{k},$$

que implica  $|\delta_n| = 1$ , mas por 3.25,  $|\delta_n| \neq 1$ . Temos, portanto, uma contradição.

Pode-se obter seqüências de polinômios para-ortogonais  $k_n$ -invariantes considerando funções do tipo

$$c_n B_n(z, v_n) = c_n(\rho_n(z) + v_n \rho_n^*(z)), \quad z, v_n \in \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.51)$$

Além disso, toda seqüência de polinômios para-ortogonais com relação a  $\mathcal{L}$  tem a forma (3.51). Isto é garantido pelo próximo resultado.

**Teorema 3.8.** *Seja  $\mathcal{L}$  um funcional linear quase-definido da forma (3.7) com a correspondente seqüência de polinômios de Szegő  $\{\rho_n\}$ . Temos,*

(A) *para todo  $n \geq 0$ , sejam  $c_n$  e  $v_n$  números complexos dados, satisfazendo  $c_n \neq 0$  e  $|v_n| = 1$ , e seja  $k_n = \bar{c}_n \bar{v}_n / c_n$ . Então  $\{c_n B_n(z, v_n)\}$  é uma seqüência de polinômios para-ortogonais  $k_n$ -invariantes com relação a  $\mathcal{L}$  e  $|k_n| = 1$ ,  $n \geq 0$ ;*

(B) *seja  $\{X_n\}$  uma seqüência de polinômios para-ortogonais com relação a  $\mathcal{L}$ . Então, para  $n \geq 0$ ,*

$$X_n(z) = c_n B_n(z, v_n), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

onde

$$c_n = \frac{\langle X_n, \rho_n \rangle}{\langle \rho_n, \rho_n \rangle} - \frac{\langle \rho_n^*, \rho_n \rangle \langle X_n, 1 \rangle}{\langle \rho_n, \rho_n \rangle \langle \rho_n^*, 1 \rangle} \neq 0, \quad d_n = \frac{\langle X_n, 1 \rangle}{\langle \rho_n^*, 1 \rangle} \neq 0, \quad v_n = \frac{d_n}{c_n}.$$

Para cada  $n \geq 0$ , se  $X_n$  é também  $k_n$ -invariante, então

$$|v_n| = 1, \quad k_n = \frac{\bar{c}_n v_n}{c_n} \quad \text{e} \quad |k_n| = 1.$$

**Teorema 3.9.** *Seja  $\{X_n\}$  uma seqüência de polinômios para-ortogonais,  $k_n$ -invariante, com relação a um funcional linear positivo-definido  $\mathcal{L}$ . Então para cada  $n \geq 1$ , os zeros de  $X_n$  são simples e estão no círculo unitário  $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .*

## 3.5 Convergentes modificados

No estudo do problema de momento trigonométrico, definimos o convergente modificado da HPC-fração associada por

$$M_n(z, v) = \frac{P_n(z) + vP_{n-1}(z)}{Q_n(z) + vQ_{n-1}(z)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e  $v$  está no círculo unitário. De particular interesse são os convergentes modificados de ordem ímpar da HPC-fração

$$R_n(z, v) = M_{2n+1}(z, v).$$

Já vimos (Teoremas 3.5(B) e 3.7) que dada uma HPC-fração, existe um funcional linear quase-definido tal que

$$Q_{2n+1}(z) = \rho_n(z), \quad Q_{2n}(z) = \rho_n^*(z), \quad P_{2n+1}(z) = \pi_n(z) \quad \text{e} \quad P_{2n}(z) = -\pi_n^*(z),$$

onde  $P_n$  e  $Q_n$  são, respectivamente, o numerador e o denominador, do  $n$ -ésimo convergente da HPC-fração e,  $\rho_n$  e  $\pi_n$  são o polinômio de Szegő e seu associado, respectivamente. Combinando esses resultados, obtemos

$$R_n(z, v) = \frac{P_{2n+1}(z) + vP_{2n}(z)}{Q_{2n+1}(z) + vQ_{2n}(z)} = \frac{\pi_n(z) - v\pi_n^*(z)}{\rho_n(z) + v\rho_n^*(z)}, \quad (3.52)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ . Para  $n \geq 0$  e  $|v| = 1$ , escrevemos

$$R_n(z, v) = \frac{A_n(z, v)}{B_n(z, v)},$$

$$A_n(z, v) = \pi_n(z) - v\pi_n^*(z) \quad \text{e} \quad B_n(z, v) = \rho_n(z) + v\rho_n^*(z). \quad (3.53)$$

Diz-se que uma seqüência  $\{r_n\}$  de funções analíticas em  $z = 0$  e  $z = \infty$  corresponde ao par  $(L_0, L_\infty)$  de séries de potências formais

$$L_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad L_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}$$

se existem seqüências  $\{k_n\}$  e  $\{m_n\}$  de números naturais, tendendo ao infinito, tal que, para todo  $n \geq 0$

$$\Lambda_0(r_n(z)) = \sum_{j=0}^{k_n} a_j z^j + O(z^{k_n+1}) \quad \text{e} \quad \Lambda_\infty(r_n(z)) = \sum_{j=0}^{m_n} b_j z^{-j} + O\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{m_n+1}\right).$$

$\Lambda_0(r_n(z))$  e  $\Lambda_\infty(r_n(z))$  denotam as expansões em séries de Taylor e Laurent da função  $r_n$  sobre  $z = 0$  e  $z = \infty$ , respectivamente. O símbolo  $O(z^k)$  indica uma série de potências crescentes de  $z$  começando com  $z^k$  (ver [12]).

**Teorema 3.10 (Correspondência).** *Seja HPC $\{\delta_n\}$  uma dada HPC-fração. Sejam  $R_n(z, v)$  uma seqüência de convergentes modificados definidos em (3.52) com  $|v| = 1$  e  $n \geq 0$  e,  $\{\rho_n\}$  e  $\{\pi_n\}$  as seqüências de polinômios de Szegő e associados com relação ao funcional linear quase-definido  $\mathcal{L}$ , associado a HPC $\{\delta_n\}$  (veja Teorema 3.5). Então, para cada  $n \geq 0$ , a função racional  $R_n(z, v)$  é analítica em  $z = 0$  e  $z = \infty$  e satisfaz*

$$\Lambda_0[R_n(z, v)] = \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k z^k + O(z^n) \quad (3.54)$$

e

$$\Lambda_\infty[R_n(z, v)] = -\mu_0 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{-k} z^{-k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right). \quad (3.55)$$

**Demonstração:** Se  $A_n(z, v)$  e  $B_n(z, v)$  são definidos por (3.53), então, para  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} A_n(z, v) &= \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \rho_n(t) - \rho_n(z) \right) \right] + v \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \rho_n^*(t) - \rho_n^*(z) \right) \right] \\ &= \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \{ \rho_n(t) + v \rho_n^*(t) \} - \{ \rho_n(z) + v \rho_n^*(z) \} \right) \right] \\ &= \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} B_n(t, v) - B_n(z, v) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Observamos que,

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{z}{t} \right)^k &= 1 + 2 \left( \frac{\frac{z}{t} - \frac{z^n}{t^n}}{1 - \frac{z}{t}} \right) = 1 + 2 \frac{\frac{z t^{n-1} - z^n}{t^n}}{\frac{t-z}{t}} = 1 + 2 \frac{z t^n - t z^n}{(t-z) t^n} + \left( \frac{z^n}{t^n} - \frac{z^n}{t^n} \right) \\ &= \frac{(t-z) t^n + 2 z t^n - 2 t z^n + (t-z) z^n}{(t-z) t^n} - \frac{z^n}{t^n} = \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^n}{t^n} - 1 \right) - \frac{z^n}{t^n}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^n}{t^n} - 1 \right) - \frac{z^n}{t^n} \right] = \mathcal{L}_t \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{z}{t} \right)^k \right] = \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k z^k. \quad (3.57)$$

Assim, de (3.56) e (3.57),

$$\begin{aligned} &A_n(z, v) - B_n(z, v) \left( \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k z^k \right) \\ &= \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^{n-1}}{t^{n-1}} B_n(t, v) - B_n(z, v) \right) \right] - B_n(z, v) \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^n}{t^n} - 1 \right) - \frac{z^n}{t^n} \right] \\ &= \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^{n-1}}{t^{n-1}} B_n(t, v) - B_n(z, v) \right) \right] - \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \left( \frac{z^n}{t^n} - 1 \right) B_n(z, v) \right) \right] + B_n(z, v) \mathcal{L}_t \left[ \frac{z^n}{t^n} \right] \\ &= \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^{n-1}}{t^{n-1}} B_n(t, v) - \frac{z^n}{t^n} B_n(z, v) \right) \right] + B_n(z, v) \mathcal{L}_t \left[ \frac{z^n}{t^n} \right] \\ &= z^{n-1} \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{1}{t^n} \right) \{ t B_n(t, v) - z B_n(z, v) \} \right] + \mu_n z^n B_n(z, v). \end{aligned}$$

Tomamos a função

$$g_n(z, v) = \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{1}{t^n} \right) \{ t B_n(t, v) - z B_n(z, v) \} \right]$$

que é um polinômio em  $z$ . Pelas relações de ortogonalidade (3.12) e (3.15),

$$g_n(0, v) = -\mathcal{L}_t \left[ \frac{B_n(t, v)}{t^{n-1}} \right] = -\langle B_n(t, v), t^{n-1} \rangle = -\langle \rho_n(t), t^{n-1} \rangle - v \langle \rho_n^*(t), t^{n-1} \rangle = 0.$$

Portanto,  $g_n(z, v)$  não possui termo independente. Logo, existem constantes complexas  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}$ , tais que

$$A_n(z, v) - B_n(z, v) \left( \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k z^k \right) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_{2n-1} z^{2n-1}.$$

Vemos, ainda, que

$$B_n(0, v) = \rho_n(0) + v \rho_n^*(0) = \delta_n + v \neq 0.$$

Assim,  $R_n(z, v)$  é uma função analítica em  $z = 0$ . Portanto,

$$A_n(z, v) = B_n(z, v) \left( \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k z^k \right) + (a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_{2n-1} z^{2n-1}).$$

O que prova (3.54).

A prova de (3.55) é análoga, mas há diferenças nas justificativas de algumas passagens. Obtemos, de (3.56) e (3.57),

$$\begin{aligned} A_n(z, v) &= B_n(z, v) \left( -\mu_0 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{-k} z^{-k} \right) \\ &= A_n(z, v) + B_n(z, v) \left( \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{-k} z^{-k} \right) \\ &= \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z}{t} B_n(t, v) - B_n(z, v) \right) \right] + B_n(z, v) \mathcal{L}_t \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{z^k} \right] \\ &= \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z}{t} B_n(t, v) - B_n(z, v) \right) \right] + B_n(z, v) \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( 1 - \frac{t^n}{z^n} \right) - \frac{t^n}{z^n} \right] \\ &= \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z}{t} B_n(t, v) - \frac{t^n}{z^n} B_n(z, v) \right) \right] - B_n(z, v) \mathcal{L}_t \left[ \frac{t^n}{z^n} \right] \\ &= G_n(z, v) - z^{-n} \mu_{-n} B_n(z, v), \end{aligned}$$

onde

$$G_n(z, v) = \mathcal{L}_t \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z}{t} B_n(t, v) - \frac{t^n}{z^n} B_n(z, v) \right) \right].$$

Fazendo  $z = \frac{1}{y}$  em  $G_n$ , obtemos

$$G_n(y^{-1}, v) = \frac{1}{y} \mathcal{L}_t \left[ \frac{1+ty}{1-ty} \left( \frac{1}{t} B_n(t, v) - y^{n+1} t^{n+1} B_n(y^{-1}, v) \right) \right],$$

onde  $H_n(y, v) = y G_n(y^{-1}, v)$  é um polinômio em  $y$  e

$$H_n(0, v) = \mathcal{L}_t \left[ \frac{B_n(t, v)}{t} \right] = \langle B_n(t, v), t \rangle = 0,$$

pelas relações de ortogonalidade (3.12) e (3.15). Portanto,  $G_n(z, v) \in \Lambda_{-n,0}$  como uma função de  $z$ . Como  $A_n(z, v)$  é um polinômio em  $z$  de grau no máximo  $n$  e  $B_n(z, v)$  é um polinômio em  $z$  de grau  $n$ , segue que em  $R_n(z, v)$  é analítica em  $z = \infty$ . O final da demonstração é análogo ao anterior. ■

# Capítulo 4

## Problema de Momento Trigonométrico

Neste capítulo estudamos o problema de momento trigonométrico, bem como algumas propriedades de quadratura no círculo unitário e polinômios de Szegő. Estes resultados podem ser encontrados em [1], [12] e [23].

### 4.1 Quadratura no círculo unitário

Vamos considerar fórmulas de quadratura do tipo

$$\mathcal{L}[L] = \sum_{m=1}^n \lambda_{m,n} L(\zeta_{m,n}), \quad \lambda_{m,n} > 0, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| = 1, \quad (4.1)$$

onde  $\mathcal{L}$  é um funcional linear positivo-definido da forma (3.7). Dizemos que (4.1) é uma fórmula de quadratura de Szegő de  $n$  pontos com relação ao funcional linear positivo-definido  $\mathcal{L}$  se (4.1) é válida para todo  $L \in \Lambda_{-(n-1),(n-1)}$ .

Sejam  $\{\rho_n\}$  a seqüência de polinômios de Szegő mônicos com relação a  $\mathcal{L}$  e  $\{v_n\}$  uma dada seqüência de números complexos satisfazendo  $|v_n| = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Se

$$B_n(z, v_n) = \rho_n(z) + v_n \rho_n^*(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

então, pelo Teorema 3.8,  $\{B_n(z, v_n)\}$  é uma seqüência de polinômios para-ortogonais,  $\bar{v}_n$ -invariante, com relação a  $\mathcal{L}$ . Pelo Teorema 3.9,  $B_n(z, v_n)$  tem  $n$  zeros  $\zeta_{m,n}(v_n)$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , que são todos simples e estão no círculo unitário. Por conveniência, as vezes escrevemos  $\zeta_{m,n} = \zeta_{m,n}(v_n)$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ .

Definimos, para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , o polinômio fundamental  $L_{m,n}$

$$L_{m,n}(z, v_n) = \frac{B_n(z, v_n)}{(z - \zeta_{m,n})B_n'(\zeta_{m,n}, v_n)}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$



Escrevendo  $\delta_n = \rho_n(0)$ , temos que  $|\delta_n| < 1$  e

$$B_n(z, v_n) = (1 + \bar{\delta}_n v_n) \prod_{m=1}^n (z - \zeta_{m,n}).$$

Para  $m = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} B'_n(\zeta_{m,n}, z_n) &= (1 + \bar{\delta}_n v_n) \lim_{z \rightarrow \zeta_{m,n}} \frac{\prod_{k=1}^n (z - \zeta_{k,n}) - \prod_{k=1}^n (\zeta_{m,n} - \zeta_{k,n})}{z - \zeta_{m,n}} \\ &= (1 + \bar{\delta}_n v_n) \lim_{z \rightarrow \zeta_{m,n}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n (z - \zeta_{k,n}) = (1 + \bar{\delta}_n v_n) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n (\zeta_{m,n} - \zeta_{k,n}). \end{aligned}$$

Assim, de (4.3),

$$L_{m,n}(z, v_n) = \frac{(z - \zeta_{1,n}) \cdots (z - \zeta_{m-1,n})(z - \zeta_{m+1,n}) \cdots (z - \zeta_{n,n})}{(\zeta_{m,n} - \zeta_{1,n}) \cdots (\zeta_{m,n} - \zeta_{m-1,n})(\zeta_{m,n} - \zeta_{m+1,n}) \cdots (\zeta_{m,n} - \zeta_{n,n})}, \quad 1 \leq m \leq n, \quad (4.4)$$

e segue de (4.4) que para  $1 \leq k, m \leq n$ ,

$$L_{m,n}(\zeta_{k,n}, v_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = k \\ 0, & \text{se } m \neq k \end{cases}, \quad (4.5)$$

de (4.4) também vemos que

$$L_{m,n}(z, v_n) \in \Lambda_{0,n-1} = \mathbb{P}_{n-1} \quad \text{e} \quad \bar{L}_{m,n}(1/z, v_n) \in \Lambda_{-(n-1),0}.$$

Definimos os pesos da fórmula de quadratura por

$$\lambda_{m,n}(v_n) = \mathcal{L}[L_{m,n}(z, v_n)], \quad 1 \leq m \leq n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

**Teorema 4.1.** *Seja  $\mathcal{L}$  um dado funcional linear positivo-definido da forma (3.7). Para  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $m = 1, 2, \dots, n$ , seja  $\zeta_{m,n}(v_n)$  os zeros de  $B_n(z, v_n)$ , definido por (4.2), e seja  $\lambda_{m,n}(v_n)$  definidos por (4.6). Então,*

$$\mathcal{L}[L] = \sum_{m=1}^n \lambda_{m,n}(v_n) L(\zeta_{m,n}(v_n)) \quad (4.7)$$

é exata para qualquer  $L \in \Lambda_{-(n-1),(n-1)}$  e

$$\lambda_{m,n}(v_n) > 0, \quad \sum_{m=1}^n \lambda_{m,n}(v_n) = \mu_0 > 0. \quad (4.8)$$

**Demonstração:** Seja  $n \geq 1$  e  $L \in \Lambda_{-(n-1),(n-1)}$ , dados. Definimos

$$D(z) = L(z) - \sum_{m=1}^n L(\zeta_{m,n}(v_n)) L_{m,n}(z, v_n),$$

onde  $L_{m,n}$  é o polinômio fundamental definido por (4.3). Então  $D \in \Lambda_{-(n-1),(n-1)}$  e, por (4.5)

$$D(\zeta_{k,n}(v_n)) = L(\zeta_{k,n}(v_n)) - \sum_{m=1}^n L(\zeta_{m,n}(v_n))\delta_{m,k} = L(\zeta_{k,n}(v_n)) - L(\zeta_{k,n}(v_n)) = 0,$$

para  $1 \leq k \leq n$ . Vemos também que  $E(z) = z^{n-1}D(z) \in \mathbb{P}_{2n-2}$  e  $E(\zeta_{m,n}(v_n)) = 0$  para  $1 \leq m \leq n$ . Logo, existe um polinômio  $S \in \mathbb{P}_{n-2}$  tal que

$$D(z) = \frac{E(z)}{z^{n-1}} = \frac{S(z)B_n(z, v_n)}{z^{n-1}}.$$

Seja  $S_n(z) = s_0 + s_1z + \dots + s_{n-2}z^{n-2}$ , então

$$\mathcal{L}[D] = \mathcal{L}\left[B_n(z, v_n) \sum_{m=0}^{n-2} \frac{s_m z^m}{z^{n-1}}\right] = \mathcal{L}\left[B_n(z, v_n) \sum_{m=0}^{n-2} \frac{s_m}{z^{n-m-1}}\right] = \sum_{m=0}^{n-2} \langle B_n(z, v_n), \bar{s}_m z^{n-m-1} \rangle = 0,$$

pela para-ortogonalidade de  $B_n(z, v_n)$  (Teorema 3.8). Disso segue que

$$\mathcal{L}[L] = \mathcal{L}\left[D + \sum_{m=1}^n L(\zeta_{m,n}(v_n))L_{m,n}(z, v_n)\right] = \sum_{m=1}^n L(\zeta_{m,n}(v_n))\lambda_{m,n}(v_n),$$

que prova que (4.7) é válida para todo  $L \in \Lambda_{-(n-1),(n-1)}$ .

A equação em (4.8) segue de (4.7) escolhendo  $L \equiv 1$ . Para provar a desigualdade em (4.8) definimos

$$T_{m,n}(z, v_n) = L_{m,n}(z, v_n)\bar{L}_{m,n}(1/z, v_n) - L_{m,n}(z, v_n). \quad (4.9)$$

Podemos ver que  $T_{m,n}(z, v_n) \in \Lambda_{-(n-1),(n-1)}$  e que

$$T_{m,n}(z, v_n) = L_{m,n}(z, v_n)[\bar{L}_{m,n}(1/z, v_n) - 1]. \quad (4.10)$$

Como  $|\zeta_{m,n}| = 1$ , temos de (4.4) que

$$\bar{L}_{m,n}(\zeta_{k,n}^{-1}, v_n) = \delta_{m,k}, \quad k, m = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, de (4.10),

$$T_{m,n}(\zeta_{k,n}(v_n), v_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Segue de (4.7) que

$$\mathcal{L}[T_{m,n}(z, v_n)] = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n}(v_n)T_{m,n}(\zeta_{k,n}(v_n), v_n) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (4.11)$$

Por (4.9) e (4.11)

$$\lambda_{m,n}(v_n) = \mathcal{L}[L_{m,n}(z, v_n)] = \mathcal{L}[L_{m,n}(z, v_n)\bar{L}_{m,n}(1/z, v_n)] = \langle L_{m,n}, L_{m,n} \rangle > 0,$$

pois  $\mathcal{L}$  é positivo-definido. ■

É conhecido (veja, por exemplo, [12]) que não existe uma fórmula de quadratura

$$\mathcal{L}[f] = \sum_{m=1}^n \lambda_{m,n} f(\alpha_n), \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots,$$

com  $\alpha_n \in C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  que é exata para toda  $f \in \Lambda_{-(n-1),n}$  ou  $f \in \Lambda_{-n,n-1}$ .

## 4.2 Problema de momento trigonométrico

Para mostrar que o problema de momento trigonométrico, descrito no início da Seção 3.2, tem solução, fazemos uso do Princípio da Escolha de Helly que enunciaremos a seguir. Sua demonstração pode ser encontrada em Henrici [8], Teorema 12.9 d, p.575.

**Teorema 4.2 (Princípio da Escolha de Helly).** *Seja  $\{\phi_n\}$  uma seqüência de funções não-decrescentes definidas em um intervalo  $I$  (finito ou infinito). Suponha que existe um  $c > 0$  tal que  $|\phi_n(x)| \leq c$  para todo  $x \in I$  e todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Então  $\{\phi_n\}$  possui uma subseqüência que converge, em  $I$ , para uma função limitada e não-decrescente  $\phi$ .*

Observamos, na Seção 3.2, que para resolver o problema de momento trigonométrico é necessário considerar uma seqüência  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  hermitiana positiva-definida. No próximo teorema, que pode ser encontrado em [12], vemos que esta condição também é suficiente.

**Teorema 4.3 (Problema de Momento Trigonométrico).** *Se  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  é uma seqüência hermitiana positiva-definida, então existe uma função  $\psi(\theta)$  limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em  $[-\pi, \pi]$  tal que*

$$\mu_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\psi(\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.12)$$

Antes de demonstrar este teorema, faremos algumas considerações. Um funcional linear  $\mathcal{L}$  definido em  $\Lambda$  por  $\mathcal{L}[z^{-n}] = \mu_n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , é, pelas condições desse teorema, positivo-definido. Se (4.12) vale, então

$$\mathcal{L}[L] = \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta}) d\psi(\theta) = I_{\psi}(L), \quad \forall L \in \Lambda \quad (4.13)$$

e, portanto, o lado direito de (4.13) fornece uma extensão de  $\mathcal{L}$  em  $\Lambda$  para o espaço de Hilbert  $L_2(\psi)$  das funções  $f$  que satisfazem

$$\int_{\mathcal{C}} |f(z)|^2 d\psi(z) < \infty,$$

onde  $\mathcal{C}$  é o círculo unitário. Assim a existência de uma solução para o problema de momento trigonométrico é equivalente à existência de uma representação de  $\mathcal{L}$  como um funcional integral  $I_{\psi}$ .

**Demonstração:** Seja  $\{v_n\}$  uma seqüência de números complexos satisfazendo  $|v_n| = 1$ , para todo  $n \geq 1$ . Para cada  $n \geq 1$  e  $1 \leq m \leq n$ , seja  $\lambda_{m,n}(v_n)$  e  $\zeta_{m,n}(v_n)$  os pesos e os nós, respectivamente, da fórmula de quadratura (4.7) no Teorema 4.1. Seja  $\theta_{m,n}$  definido, para  $n \geq 1$ , por

$$-\pi \leq \theta_{1,n} \leq \theta_{2,n} \leq \dots \leq \theta_{n,n} \leq \pi, \quad e^{i\theta_{m,n}} = \zeta_{m,n}(v_n), \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Tomamos uma função  $\psi_n$  dada por

$$\psi_n(\theta) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq \theta \leq \theta_{1,n}, \\ \sum_{m=1}^k \lambda_{m,n}(v_n), & \theta_{k,n} < \theta \leq \theta_{k+1,n}, \\ \sum_{m=1}^n \lambda_{m,n}(v_n) = \mu_0, & \theta_{n,n} < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (4.14)$$

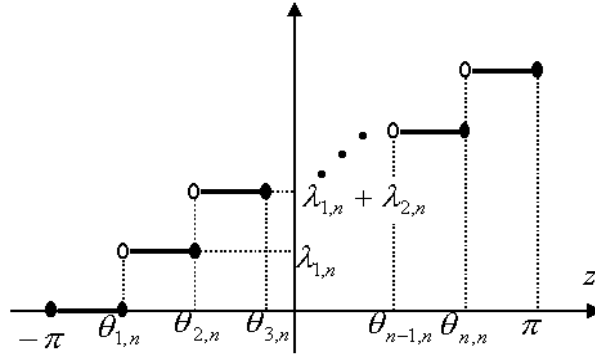


Figura 4.1: Função escada

Cabe observar que  $\psi_n$  é uma função escada, não-decrescente, satisfazendo

$$0 \leq \psi_n(\theta) \leq \mu_0, \quad \text{para } -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vemos que  $\psi_n$  tem salto de valor  $\lambda_{k,n}(v_n)$  em cada ponto  $\theta = \theta_{k,n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Estamos considerando uma seqüência  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  hermitiana, ou seja, que satisfaz  $\mu_n = \bar{\mu}_{-n}$  para todo  $n$ . Portanto, para resolver o problema de momento trigonométrico, é suficiente verificar a equação em (4.12) para  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Então, para todo  $N = 0, 1, 2, \dots$ , e  $n = N + 1, N + 2, \dots$ , segue da fórmula de quadratura (4.7) que

$$\mu_N = \mathcal{L}[z^{-N}] = \sum_{m=1}^n \lambda_{m,n}(v_n) [\zeta_{m,n}(v_n)]^{-N} = \sum_{m=1}^n \lambda_{m,n}(v_n) e^{-iN\theta_{m,n}}. \quad (4.15)$$

Pela função  $\psi_n$ , definida em (4.14), e por (4.15), obtemos

$$\mu_N = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iN\theta} d\psi_n(\theta), \quad n \geq N + 1.$$

Pelo Princípio da Escolha de Helly, existe uma subsequência  $\{n_k\}$  de  $\{n\}$  tal que  $\psi_{n_k}$  converge para uma função não-decrescente e limitada  $\psi$ . Portanto

$$\mu_N = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iN\theta} d\psi_{n_k}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iN\theta} d\psi(\theta), \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

A seguir mostraremos que  $\psi$  tem infinitos pontos de aumento. Supomos que  $\psi$  tem somente um número finito de pontos de aumento,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ , então  $\psi$  é uma função escada da forma (4.14) com saltos nesses pontos. Seja  $q(z) = (z - e^{i\theta_1})(z - e^{i\theta_2}) \cdots (z - e^{i\theta_p})$ . Então  $q \not\equiv 0$  e

$$\langle q, q \rangle = \mathcal{L} \left[ q(z) \bar{q} \left( \frac{1}{z} \right) \right] = \int_{-\pi}^{\pi} |q(e^{i\theta})|^2 d\psi(\theta) = 0,$$

contrariando ao fato que  $\mathcal{L}$  é positivo-definido. ■

No próximo teorema, extraído de Akhiezer [1] (p.180), mostramos que a solução do PMT é única. No entanto, precisamos de alguns pré-requisitos sobre séries de Fourier que podem ser encontrados em Figueiredo [5] (p.16-38).

Dizemos que uma função  $f$  é integrável e, respectivamente, absolutamente integrável, em  $[-\pi, \pi]$  se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2\pi$ , integrável e absolutamente integrável, então podemos expandir  $f$  em na seguinte série, conhecida como série de Fourier,

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \text{sen}(n\theta)],$$

onde os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , chamados coeficientes de Fourier, são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \text{sen}(n\theta) d\theta.$$

Neste trabalho é necessário considerar a forma complexa da série de Fourier, para defini-la usamos a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(n\theta) + i \text{sen}(n\theta),$$

e suas conseqüências

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

para escrever

$$a_n \cos(n\theta) + b_n \text{sen}(n\theta) = \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{in\theta} + \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-in\theta}.$$

Logo, o coeficiente de  $e^{in\theta}$  é dado por

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(\cos(n\theta) - \text{sen}(n\theta)) d\theta,$$

ou seja,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

e o coeficiente de  $e^{-in\theta}$  por

$$\bar{c}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta = c_{-n}.$$

Definimos, também,

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta.$$

Então,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n e^{-in\theta} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\theta} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

**Teorema 4.4.** *A solução do problema de momento trigonométrico é única, a menos de uma constante aditiva.*

**Demonstração:** Dada uma seqüência  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  hermitiana positiva-definida temos que  $\psi$  definida em  $\mathcal{C}$  é uma solução para o PMT se

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\psi(\theta), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.16)$$

Integrando por partes obtemos

$$\mu_k = (-1)^k [\psi(e^{i\pi}) - \psi(e^{-i\pi})] + ik \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

E, ainda,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{(-1)^k \mu_0 - \mu_k}{ik}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.17)$$

que dividido por  $2\pi$  fornece os coeficientes de Fourier da expansão de  $\psi$  em série de Fourier complexa. Como todos os coeficientes da expansão de  $\psi$  são unicamente determinados por (4.17), exceto  $c_0$ , temos que  $\psi$  é determinada por (4.16), exceto por uma constante aditiva. ■

Podemos, então, relacionar os polinômios de Szegő com o funcional integral determinado pela solução do problema de momento trigonométrico.

**Teorema 4.5.** *Seja  $\{\rho_n\}$  uma seqüência de polinômios de Szegő com relação ao dado funcional linear, positivo-definido  $\mathcal{L}$ , definido em  $\Lambda$  por  $\mathcal{L}[z^n] = \mu_{-n}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Seja  $\psi$  a solução para o PMT para  $\{\mu_n\}$ . Então  $\{\rho_n\}$  é a seqüência de polinômios de Szegő com relação ao funcional integral*

$$I_{\psi}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(\theta),$$

para toda  $f \in L_2(\psi)$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 4.3, o funcional integral  $I_\psi$  é uma extensão de  $\mathcal{L}$ , em  $\Lambda$ , para o espaço  $L_2(\psi)$ . Portanto, pelas definições (3.6), de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ , e (3.8), de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , temos

$$\langle f, g \rangle = \mathcal{L}[f(z)\bar{g}(1/z)] = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\bar{g}(e^{-i\theta}) d\psi(\theta) = \langle f, g \rangle_\psi$$

para todas  $f, g \in \Lambda$ . Como  $\rho_n$  é ortogonal com relação a  $\mathcal{L}$ , então

$$\langle \rho_n, z^m \rangle_\psi = \langle \rho_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \Delta_n/\Delta_{n-1}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Portanto,  $\rho_n$  é ortogonal com relação a  $I_\psi$ , ou seja,  $\rho_n$  é um polinômio de Szegő com relação a  $I_\psi$ . ■

Freqüentemente, quando  $\rho_n$  é um polinômio de Szegő com relação a  $I_\psi$  e o intervalo de integração já está subentendido, neste caso  $[-\pi, \pi]$ , dizemos, simplesmente, que  $\rho_n$  é um polinômio de Szegő com relação a  $\psi$ .

### 4.3 Problema de momento trigonométrico $N$ -definido

**Definição 4.1.** Uma seqüência de números complexos  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  é chamada quase- $N$ -definida (positiva- $N$ -definida) se

$$\Delta_n \neq 0 \quad (\Delta_n > 0) \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad \Delta_N = 0.$$

A seqüência  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  dá origem aos funcionais  $\mathcal{L}_{(N)}$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(N)}$  definidos em  $\Lambda_{-N, N}$  e  $\Lambda_{-N, N} \times \Lambda_{-N, N}$ , respectivamente, por

$$\mathcal{L}_{(N)} \left[ \sum_{m=p}^q c_m z^m \right] = \sum_{m=p}^q c_m \mu_{-m}, \quad c_m \in \mathbb{C}, \quad -N \leq p \leq q \leq N \quad (4.18)$$

e

$$\langle f, g \rangle_{(N)} = \mathcal{L}_{(N)} \left[ f(z)\bar{g}\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad f, g \in \Lambda_{-N, N}.$$

O funcional  $\mathcal{L}_{(N)}$  é chamado quase- $N$ -definido ou positivo- $N$ -definido de acordo com a seqüência  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  ser quase- $N$ -definida ou positiva- $N$ -definida.

Uma seqüência finita  $\{\rho_n\}_{n=0}^N$  de polinômios ortogonais e seus recíprocos  $\{\rho_n^*\}_{n=0}^N$  são dadas por (3.13) e (3.14). A seqüência  $\{\rho_n\}_{n=0}^N$  é chamada seqüência de polinômios de Szegő com relação ao funcional linear quase- $N$ -definido  $\mathcal{L}_{(N)}$ . Note que

$$\langle \rho_n, \rho_n \rangle_{(N)} = \langle \rho_n, z^n \rangle_{(N)} = \langle \rho_n^*, 1 \rangle_{(N)} = \Delta_n/\Delta_{n-1} = 0/\Delta_{n-1} = 0$$

e

$$\langle \rho_n^*, \rho_n^* \rangle_{(N)} = \langle z^N \bar{\rho}_n(1/z), z^N \bar{\rho}_n(1/z) \rangle_{(N)} = \mathcal{L}_{(N)}[z^N \bar{\rho}_n(1/z) 1/z^N \bar{\rho}_n(z)] = \langle \rho_n, \rho_n \rangle_{(N)} = 0.$$

A restrição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(N)}$  à  $\Lambda_{-(N-1), (N-1)} \times \Lambda_{-(N-1), (N-1)}$  é um produto interno se  $\mathcal{L}_{(N)}$  é positivo- $N$ -definido.

Os resultados do Capítulo 3 são aplicados à seqüência finita de polinômios de Szegő  $\{\rho_n\}_{n=0}^N$  com relação ao funcional  $\mathcal{L}_{(N)}$ .

Definimos o convergente  $N$ -truncado HPC $\{\delta_n\}_0^N$  de uma HPC-fração por

$$\delta_0 - \frac{2\delta_0}{1} + \frac{1}{\overline{\delta_1}z} + \frac{(1 - |\delta_1|^2)z}{\delta_1} + \dots + \frac{(1 - |\delta_{N-1}|^2)z}{\delta_{N-1}} + \frac{1}{\overline{\delta_N}z}, \quad (4.19)$$

onde

$$\delta_0 \neq 0, \quad |\delta_n| \neq 1 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N-1, \quad \text{e } |\delta_N| = 1.$$

O convergente  $N$ -truncado HPC $\{\delta_n\}_0^N$  é positivo- $N$ -definido se

$$\delta_0 > 0, \quad |\delta_n| < 1 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N-1, \quad \text{e } |\delta_N| = 1.$$

**Teorema 4.6.** *Sejam  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  uma seqüência hermitiana quase- $N$ -definida e  $\mathcal{L}_{(N)}$  o funcional linear quase- $N$ -definido (4.18). Tomamos a seqüência finita de polinômios de Szegő  $\{\rho_n\}_{n=0}^N$  com relação a  $\mathcal{L}_{(N)}$  e,*

$$\delta_0 = \mu_0, \quad \delta_n = \rho_n(0), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Sejam  $P_n$  e  $Q_n$  definidos, para  $n = 1, 2, \dots, N$ , por

$$P_{2n}(z) = -\pi_n^*(z), \quad Q_{2n}(z) = \rho_n^*(z), \quad P_{2n+1}(z) = \pi_n(z), \quad Q_{2n+1}(z) = \rho_n(z), \quad (4.20)$$

onde  $\pi_n$  é o polinômio associado ao polinômio de Szegő  $\rho_n$  e,  $\pi_n^*$  e  $\rho_n^*$ , são seus respectivos recíprocos. Se  $R_n(z, v)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , denota o convergente modificado (3.52), então,

(A)

$$\delta_0 \neq 0, \quad 1 - |\delta_n|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad |\delta_N| = 1. \quad (4.21)$$

(B)

$$\rho_N = \delta_N \rho_N^* \quad \text{e} \quad \pi_N = -\delta_N \pi_N^*, \quad (4.22)$$

tal que  $\rho_N$  é  $\delta_N$ -invariante.

(C)  $R_N(z, v)$  é independente de  $v$  e

$$R_N(z) = R_N(z, v) = \frac{P_{2N}(z)}{Q_{2N}(z)} = \delta_0 - \frac{2\delta_0}{1} + \frac{1}{\overline{\delta_1}z} + \frac{(1 - |\delta_1|^2)z}{\delta_1} + \dots + \frac{1}{\overline{\delta_N}z} \quad (4.23)$$

é o convergente  $N$ -truncado da HPC-fração associada a  $\mathcal{L}_{(N)}$ ;  $P_n$  e  $Q_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, 2N$ , são, respectivamente, o numerador e denominador do  $n$ -ésimo convergente de (4.19).

(D)

$$\Lambda_0[R_n(z)] = \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^N \mu_k z^k + O(z^{N+1}) \quad (4.24)$$



e

$$\Lambda_\infty[R_n(z)] = -\mu_0 - 2 \sum_{k=1}^N \mu_{-k} z^{-k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right). \quad (4.25)$$

**Demonstração:** (A) O Teorema 3.4 implica que  $Q_n$  é o denominador do  $n$ -ésimo convergente de HPC $\{\delta_n\}_{n=0}^N$ . Assim, de (3.3) e de (4.20), obtemos

$$\rho_n(z) = \delta_n \rho_n^*(z) + (1 - |\delta_n|^2) z \rho_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.26)$$

Com  $|z| = 1$  e  $1 \leq n \leq N - 1$ , temos

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \langle \rho_n, z^n \rangle_{(N)} = (1 - |\delta_n|^2) \langle \rho_{n-1}, z^{n-1} \rangle_{(N)} = (1 - |\delta_n|^2) \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}.$$

Por definição,  $\Delta_n \neq 0$  para  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , então

$$1 - |\delta_n|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Também, pela definição de seqüência positiva- $N$ -definida,  $\Delta_N = 0$ , então

$$1 - |\delta_N|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\delta_N| = 1,$$

o que prova (4.21).

(B) De (4.26)

$$\rho_N(z) = \delta_N \rho_N^*(z).$$

Por (3.50),  $\pi_N$  satisfaz

$$\pi_N(z) = \delta_N \omega_N(z) + (1 - |\delta_N|^2) z \pi_{N-1}(z),$$

de onde obtemos

$$\pi_N(z) = \delta_N \omega_N.$$

Por (3.47) completamos a demonstração de (4.22).

(C) Pela definição de  $R_n(z, v_n)$ , dada em (3.52), e do fato

$$Q_{2N+1}(z) = \rho_N(z) = \delta_N \rho_N^*(z) = \delta_N Q_{2N}(z) \quad \text{e} \quad P_{2N+1}(z) = \pi_N(z) = \delta_N \omega_N(z) = \delta_N P_{2N}(z),$$

temos

$$R_N(z) = R_N(z, v_N) = \frac{\delta_N P_{2N}(z) + v_N P_{2N}(z)}{\delta_N Q_{2N}(z) + v_N Q_{2N}(z)} = \frac{(\delta_N + v_N) P_{2N}(z)}{(\delta_N + v_N) Q_{2N}(z)} = \frac{P_{2N}(z)}{Q_{2N}(z)}.$$

(D) De um lado, por (3.48), temos

$$\pi_N(z) = \mathcal{L}_t^{(N)} \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \rho_N(t) - \rho_N(z) \right) \right], \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad N \geq 2.$$

Por outro lado, de (4.22), (3.48) e (3.49), temos

$$\begin{aligned}\pi_N(z) &= \delta_N \omega_N(z) = \delta_N \mathcal{L}_t^{(N)} \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \rho_N^*(t) - \rho_N^*(z) \right) \right] \\ &= \mathcal{L}_t^{(N)} \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \rho_N(t) - \rho_N(z) \right) \right], \quad 1 \leq k \leq N, \quad N \geq 1.\end{aligned}$$

Assim, observando os intervalos de variação do parâmetro  $k$  nas duas equações acima, concluímos que,

$$\pi_N(z) = \mathcal{L}_t^{(N)} \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \rho_N(t) - \rho_N(z) \right) \right], \quad 0 \leq k \leq N, \quad N \geq 1.$$

Analogamente,

$$\omega_N(z) = \mathcal{L}_t^{(N)} \left[ \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} \rho_N^*(t) - \rho_N^*(z) \right) \right], \quad 0 \leq k \leq N, \quad N \geq 1.$$

Como observamos em (4.23),

$$R_N(z) = \frac{P_{2N}(z)}{Q_{2N}(z)} = \frac{\omega_N(z)}{\rho_N^*(z)}.$$

Definimos, então,

$$A_N(z) = \omega_N(z) \quad \text{e} \quad B_N(z) = \rho_N^*(z),$$

e procedemos de maneira análoga à demonstração do Teorema 3.10 para mostrar (4.24) e (4.25).  $\blacksquare$

De acordo com os resultados do Capítulo 3 e do item (A) do Teorema 4.6, vemos que a HPC-fração associada à seqüência finita de polinômios de Szegő  $\{\rho_n\}_{n=0}^N$  com relação ao funcional  $\mathcal{L}_{(N)}$  é um convergente  $N$ -truncado HPC  $\{\delta_n\}_{n=0}^N$ .

**Observação 4.1.** *No Teorema 4.6, quando a seqüência  $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$  é hermitiana positiva- $N$ -definida (ou equivalentemente, quando  $\mathcal{L}$  é positivo- $N$ -definido), no sentido que  $\Delta_n > 0$ , para  $0 \leq n \leq N-1$  e  $\Delta_N = 0$ , temos de (4.21) que*

$$\delta_0 \neq 0, \quad |\delta_n| < 1, \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad \text{e} \quad |\delta_N| = 1. \quad (4.27)$$

## 4.4 Outras propriedades dos polinômios de Szegő

Nesta seção, descrevemos resultados análogos aos encontrados no Capítulo 3, porém utilizando uma medida positiva  $\psi$ , como feito em Van Assche [23]. Esta é a maneira que Szegő estudou, pela primeira vez, os polinômios ortogonais no círculo unitário, por isso, atualmente esses polinômios recebem seu nome.

Um dos propósitos desta seção é definir os polinômios de Szegő partindo de uma medida positiva  $\psi$  definida no círculo unitário. Assim, não há necessidade de ter uma seqüência  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  pré-estabelecida como ocorreu nos capítulos anteriores. Na verdade, geramos a seqüência de momentos  $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$  a partir da medida  $\psi$ .

Outro propósito desta seção é mostrar uma propriedade extrema dos polinômios de Szegő. Este resultado será útil no desenvolvimento do Capítulo 5.

Seja  $z \in \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , ou seja,  $z$  está no círculo unitário. Então,  $z = e^{i\theta}$  e  $\bar{z} = e^{-i\theta}$ , onde  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Seja  $\psi$  uma medida positiva no círculo unitário (ver Definição (3.2)), definimos o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\psi} = \int_{\mathcal{C}} f(z) \overline{g(z)} d\psi(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\psi(\theta), \quad f, g \in L_2(\psi), \quad (4.28)$$

e os momentos com relação a  $\psi$  por

$$\mu_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\psi(\theta).$$

A seqüência de polinômios mônicos,  $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ , definida por

$$\langle \rho_n, \rho_m \rangle_{\psi} = \int_{\mathcal{C}} \rho_n(z) \overline{\rho_m(z)} d\psi(z) = 0, \quad n \neq m,$$

é a seqüência de polinômios ortogonais no círculo unitário, ou seja, a seqüência de polinômios de Szegő, com relação à medida  $\psi$ .

Utilizando a medida  $\psi$ , estabelecemos outra maneira de demonstrar que (3.13) e (3.14) valem. Para isso, precisamos relembrar um conceito da álgebra linear. Seja  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  um sistema de funções linearmente independentes em  $L_2(\psi)$ , onde  $\psi$  é uma medida positiva no círculo unitário. Com o produto interno (4.28), obtemos a matriz

$$G_n = \begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle_{\psi} & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle_{\psi} & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle_{\psi} \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle_{\psi} & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle_{\psi} & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle_{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle_{\psi} & \langle \phi_1, \phi_n \rangle_{\psi} & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle_{\psi} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

que é conhecida como matriz de Gram. O seu determinante é representado por  $\Delta_n^{(G)}$ . É conveniente tomar  $\Delta_{-1}^{(G)} = 1$ . Como  $\langle \phi_k, \phi_l \rangle_{\psi} = \overline{\langle \phi_l, \phi_k \rangle_{\psi}}$ , a matriz de Gram é hermitiana. Além disso,

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) G_n \begin{pmatrix} \overline{x_0} \\ \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k \overline{x_l} \langle \phi_l, \phi_k \rangle_{\psi} = \langle f_n, f_n \rangle_{\psi} = \|f_n\|^2.$$

onde  $f_n(z) = \sum_{k=0}^n \bar{x}_k \phi_k(z)$ . Como  $\|f_n\| \geq 0$  e  $\|f_n\| = 0$  somente quando  $f_n = 0$ , então  $G_n$  é positiva-definida. Como consequência disso,

$$\Delta_n^{(G)} > 0,$$

e, portanto, real.

Uma seqüência  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  de funções pertencentes a  $L_2(\psi)$  é ortonormal com relação ao produto interno (4.28) se

$$\langle f_n, f_m \rangle_\psi = \delta_{m,n}, \quad \text{onde} \quad \delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 1, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

**Teorema 4.7.** *As funções definidas por*

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle_\psi & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle_\psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle_\psi \\ \phi_0(z) & \phi_1(z) & \cdots & \phi_n(z) \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.29)$$

são ortonormais relativamente ao produto interno (4.28).

**Demonstração:** Vamos mostrar a ortogonalidade expandindo o determinante em (4.29) com relação à última linha. A linearidade implica que é suficiente mostrar que

$$\langle f_n, \phi_k \rangle_\psi = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

pois  $f_n(z) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \phi_i(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Então,

$$\begin{aligned} \langle f_n, \phi_k \rangle_\psi &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} \left\langle \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle_\psi & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle_\psi \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle_\psi & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle_\psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle_\psi \\ \phi_0(z) & \phi_1(z) & \cdots & \phi_n(z) \end{vmatrix}, \phi_k \right\rangle_\psi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} \left\{ (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_0 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle_\psi \\ \langle \phi_1, \phi_1 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle_\psi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle_\psi \end{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_k \rangle_\psi + \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_{n-1}, \phi_0 \rangle_\psi \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_{n-1}, \phi_1 \rangle_\psi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle_\psi \end{vmatrix} \langle \phi_n, \phi_k \rangle_\psi \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle_\psi & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle_\psi \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle_\psi & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle_\psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle_\psi \\ \langle \phi_0, \phi_k \rangle_\psi & \langle \phi_1, \phi_k \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_k \rangle_\psi \end{vmatrix}.$$

Assim, para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , duas linhas do determinante são idênticas e, portanto,

$$\langle f_n, \phi_k \rangle_\psi = 0.$$

Além disso, substituindo  $\phi_k$  por  $\phi_n$ , vemos que

$$\langle f_n, \phi_n \rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle_\psi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle_\psi \end{vmatrix} = \frac{\Delta_n^{(G)}}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} = \frac{\sqrt{\Delta_n^{(G)}}}{\sqrt{\Delta_{n-1}^{(G)}}}.$$

De (4.29) segue que

$$f_n(z) = c_0 \phi_0(z) + \cdots + c_{n-1} \phi_{n-1}(z) + \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}^{(G)}}}{\sqrt{\Delta_n^{(G)}}} \phi_n(z), \quad (4.30)$$

onde

$$c_m = \frac{(-1)^{n+m+2}}{\sqrt{\Delta_n^{(G)} \Delta_{n-1}^{(G)}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_{m-1}, \phi_0 \rangle_\psi & \langle \phi_{m+1}, \phi_0 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle_\psi \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_{m-1}, \phi_1 \rangle_\psi & \langle \phi_{m+1}, \phi_1 \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle_\psi \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_{m-1}, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \langle \phi_{m+1}, \phi_{n-1} \rangle_\psi & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle_\psi \end{vmatrix},$$

$m = 0, 1, \dots, n-1$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \langle f_n, f_n \rangle_\psi &= \langle f_n, (c_0 \phi_0 + \cdots + c_{n-1} \phi_{n-1} + \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}^{(G)}}}{\sqrt{\Delta_n^{(G)}}} \phi_n) \rangle_\psi \\ &= c_0 \langle f_n, \phi_0 \rangle_\psi + \cdots + c_{n-1} \langle f_n, \phi_{n-1} \rangle_\psi + \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}^{(G)}}}{\sqrt{\Delta_n^{(G)}}} \langle f_n, \phi_n \rangle_\psi \\ &= \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}^{(G)}}}{\sqrt{\Delta_n^{(G)}}} \frac{\sqrt{\Delta_n^{(G)}}}{\sqrt{\Delta_{n-1}^{(G)}}} = 1, \end{aligned}$$

o que prova a ortonormalidade. ■

Estamos interessados no sistema de monômios  $\{1, z, z^2, \dots\}$  e, a partir desta base do espaço linear de polinômios, obter um sistema de polinômios ortogonais,  $\{\rho_n\}$ , em relação a uma medida

$\psi$  dada. O sistema de polinômios ortonormais,  $\{\hat{\rho}_n\}$ , é único se impomos que o coeficiente do termo de maior grau é positivo. Temos, assim, um sistema único de polinômios  $\hat{\rho}_n$  tal que

$$\int \hat{\rho}_n(z) \overline{\hat{\rho}_m(z)} d\psi(z) = \delta_{m,n}, \quad m, n \geq 0,$$

com  $\hat{\rho}_n(z) = c_{n,n}z^n + \dots + c_{1,n}z + c_{0,n}$  e  $c_{n,n} > 0$ .

Consideramos, então, as funções  $1, z, z^2, \dots, z^n$ . Com relação ao produto interno (4.28) temos,

$$\langle z^k, z^l \rangle_\psi = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \overline{e^{il\theta}} d\psi(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(l-k)\theta} d\psi(\theta) = \mu_{l-k}.$$

Então, a matriz de Gram  $(\langle z^k, z^l \rangle_\psi)_{k,l=0}^n$  é dada por

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix},$$

que é a matriz de Toeplitz. Como observamos, o determinante de Toeplitz é  $\det(T_n) = \Delta_n$ .

Pelo Teorema 4.7, os polinômios definidos por

$$\hat{\rho}_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix} \quad (4.31)$$

são ortonormais. Estes são os polinômios de Szegő ortonormais com relação à medida  $\psi$ .

Por (4.30), vemos que o coeficiente do termo de maior grau de  $\hat{\rho}_n$  é real pois

$$c_{n,n} = \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}}}{\sqrt{\Delta_n}} > 0. \quad (4.32)$$

Então, multiplicando (4.31) por  $\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\sqrt{\Delta_{n-1}}}$ , obtemos

$$\rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}, \quad (4.33)$$

e usando a definição de polinômio recíproco, obtemos

$$\rho_n^*(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

que são, respectivamente, os polinômios de Szegő mônicos e seus recíprocos com relação a  $\psi$ , exatamente como mostramos em (3.13) e (3.14) quando consideramos um funcional linear geral definido em  $\Lambda$  por (3.7).

Como no Capítulo 3, temos

$$\begin{aligned} \langle \rho_n, \rho_m \rangle_\psi &= \langle \rho_n, z^m \rangle_\psi = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = n, \end{cases} \\ \langle \rho_n^*, z^m \rangle_\psi &= \begin{cases} \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \\ \delta_n &= -\frac{\langle z\rho_{n-1}(z), 1 \rangle_\psi}{\langle \rho_{n-1}^*, 1 \rangle_\psi} = \frac{(-1)^n}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-3} & \cdots & \mu_{-1} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde  $\delta_0 = \mu_0$  e  $\delta_n = \rho_n(0)$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Quando a medida  $\psi$  é simétrica no sentido que

$$\int_{-\pi}^0 e^{-ik\theta} d\psi(\theta) = \int_0^\pi e^{ik\theta} d\psi(\theta), \quad k \in \mathbb{N},$$

os momentos trigonométricos são todos reais e são dados por

$$\mu_k = 2 \int_{-\pi}^\pi \cos(k\theta) d\psi(\theta),$$

tal que os polinômios  $\hat{\rho}_n$  (ou  $\rho_n$ ) terão coeficientes reais, o que pode ser visto de (4.31) (ou (4.33)).

O teorema a seguir fornece uma propriedade extrema dos polinômios de Szegő.

**Teorema 4.8.** *Seja  $\psi$  uma medida positiva definida no círculo unitário. Suponha que o suporte de  $\psi$  contém no mínimo  $n$  pontos. Então o mínimo da norma*

$$\|q_n\| = \left( \int_{\mathcal{C}} |q_n(z)|^2 d\psi(z) \right)^{\frac{1}{2}},$$

*quando variamos  $q_n$  entre todos os polinômios mônicos de grau  $n$ , é atingido quando*

$$q_n(z) = \frac{\hat{\rho}_n(z)}{c_{n,n}} = \rho_n(z),$$

onde  $c_{n,n} > 0$  é o coeficiente do termo de maior grau do polinômio ortonormal  $\hat{\rho}_n$  com relação a  $\psi$ . O mínimo é  $\frac{1}{c_{n,n}} = \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\sqrt{\Delta_{n-1}}}$ .

**Demonstração:** Podemos escrever o polinômio  $q_n(z) = \rho_n(z) + r_{n-1}(z)$  onde  $\rho_n(z) = \frac{\hat{\rho}_n(z)}{c_{n,n}}$  é o polinômio ortogonal mônico, com relação a  $\psi$ , de grau  $n$  e  $r_{n-1}$  é um polinômio de grau no máximo  $n - 1$ . Então,

$$\int_{\mathcal{C}} |q_n(z)|^2 d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} |\rho_n(z)|^2 d\psi(z) + \int_{\mathcal{C}} |r_{n-1}(z)|^2 d\psi(z) + 2\operatorname{Re}\left(\int_{\mathcal{C}} \rho_n(z) \overline{r_{n-1}(z)} d\psi(z)\right),$$

onde  $\operatorname{Re}$  indica a parte real de um número complexo. Pela ortogonalidade de  $\rho_n$ , o último termo é nulo, de modo que

$$\int_{\mathcal{C}} |q_n(z)|^2 d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} |\rho_n(z)|^2 d\psi(z) + \int_{\mathcal{C}} |r_{n-1}(z)|^2 d\psi(z).$$

Essa expressão é mínima se

$$\int_{\mathcal{C}} |r_{n-1}(z)|^2 d\psi(z) = 0.$$

Porém, essa integral vale zero se, e somente se,  $r_{n-1} \equiv 0$ , pois  $r_{n-1}$  tem no máximo  $n - 1$  zeros e  $\psi$  tem no mínimo  $n$  pontos em seu suporte. Assim, o mínimo é atingido quando  $q_n(z) = \rho_n(z)$  e, como  $\|\hat{\rho}_n\| = 1$ , mostramos que o mínimo da norma de  $q_n$  é  $1/c_{n,n}$ . A identidade  $1/c_{n,n} = \sqrt{\Delta_n}/\sqrt{\Delta_{n-1}}$  é dada por (4.32). ■

**Teorema 4.9.** *O mínimo da integral*

$$\int_{\mathcal{C}} |q_n(z)|^2 d\psi(z),$$

obtido entre todos os polinômios  $q_n$  de grau no máximo  $n$  para os quais  $q_n(\xi) = 1$ , é atingido para o polinômio

$$\frac{K_n(z, \xi)}{K_n(\xi, \xi)} = \frac{\sum_{k=0}^n \hat{\rho}_k(z) \overline{\hat{\rho}_k(\xi)}}{\sum_{k=0}^n |\hat{\rho}_k(\xi)|^2}$$

e vale  $1/K_n(\xi, \xi)$ .

**Demonstração:** Escrevendo  $q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \hat{\rho}_k(z)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} |q_n(z)|^2 d\psi(z) &= \int_{\mathcal{C}} \left| \sum_{k=0}^n a_k \hat{\rho}_k(z) \right|^2 d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} \left( \sum_{k=0}^n a_k \hat{\rho}_k(z) \right) \left( \sum_{j=0}^n \bar{a}_j \overline{\hat{\rho}_j(z)} \right) d\psi(z) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_k \bar{a}_j \int_{\mathcal{C}} \hat{\rho}_k(z) \overline{\hat{\rho}_j(z)} d\psi(z) = \sum_{k,j=0}^n a_k \bar{a}_j \langle \hat{\rho}_k, \hat{\rho}_j \rangle_{\psi} = \sum_{k=0}^n |a_k|^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Como  $q_n(\xi) = 1$ ,

$$\sum_{k=0}^n a_k \hat{\rho}_k(\xi) = 1.$$



Então, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$1 = \left| \sum_{k=0}^n a_k \hat{\rho}_k(\xi) \right|^2 \leq \left( \sum_{k=0}^n |a_k|^2 \right) \left( \sum_{k=0}^n |\hat{\rho}_k(\xi)|^2 \right),$$

tal que

$$\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \geq \frac{1}{\sum_{k=0}^n |\hat{\rho}_k(\xi)|^2} = \frac{1}{K_n(\xi, \xi)}. \quad (4.36)$$

Obtemos o mínimo quando ocorrer igualdade em (4.35). Isto acontece para  $a_k = c \overline{\hat{\rho}_k(\xi)}$ , onde  $c$  é uma constante. Assim,

$$q_n(z) = c \sum_{k=0}^n \overline{\hat{\rho}_k(\xi)} \hat{\rho}_k(z)$$

e

$$q_n(\xi) = c \sum_{k=0}^n |\hat{\rho}_k(\xi)|^2 = 1.$$

Daí,  $c = \frac{1}{\sum_{k=0}^n |\hat{\rho}_k(\xi)|^2}$ , então

$$q_n(z) = \frac{\sum_{k=0}^n \hat{\rho}_k(z) \overline{\hat{\rho}_k(\xi)}}{\sum_{k=0}^n |\hat{\rho}_k(\xi)|^2} = \frac{K_n(z, \xi)}{K_n(\xi, \xi)}$$

é o polinômio que minimiza a integral dada, e como observamos em (4.35) e (4.36),  $1/K_n(\xi, \xi)$  é esse mínimo. ■

## 4.5 Funções de Carathéodory normalizadas

A relação existente entre as funções de Carathéodory normalizadas e as PPC-frações, constitui uma ferramenta que permite relacionar o problema de análise de frequências com os polinômios de Szegő. Definimos a classe  $\mathcal{C}$  de funções de Carathéodory normalizadas por

$$\mathcal{C} = \{f : f \text{ é analítica, } f(0) > 0 \text{ e } \operatorname{Re}(f(z)) > 0 \text{ para } |z| < 1\}.$$

Para  $N \in \mathbb{N}$ , seja  $\mathcal{C}_N$  a classe de todas as funções racionais da forma

$$f(z) = \sum_{m=1}^N \lambda_m \frac{e^{i\theta_m} + z}{e^{i\theta_m} - z}, \quad (4.37)$$

onde

$$\lambda_m > 0, \quad \text{para } 1 \leq m \leq N, \quad \text{e } -\pi < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N < \pi.$$

A função definida em (4.37) é uma função de Carathéodory normalizada, pois

(i)  $f(z)$  é analítica para  $|z| < 1$ , visto que  $e^{i\theta_m} - z = 0$  somente quando  $|z| = 1$ ;

$$(ii) f(0) = \sum_{m=1}^N \lambda_m > 0;$$

(iii) tomando apenas uma parcela da soma em (4.37), temos

$$\lambda_m \frac{e^{i\theta_m} + z}{e^{i\theta_m} - z} = \lambda_m \frac{(e^{i\theta_m} + z)(e^{-i\theta_m} - \bar{z})}{(e^{i\theta_m} - z)(e^{-i\theta_m} - \bar{z})} = \frac{\lambda_m}{|e^{i\theta_m} - z|^2} [1 - e^{i\theta_m} \bar{z} + e^{-i\theta_m} z - |z|^2],$$

portanto,  $\operatorname{Re} \left( \lambda_m \frac{e^{i\theta_m} + z}{e^{i\theta_m} - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta_m} - z|^2} > 0$ , para  $|z| < 1$  e  $1 \leq m \leq N$ .

A seguir, apresentamos, sem demonstração, um teorema que relaciona funções de Carathéodory com séries e frações contínuas. Este resultado encontra-se em [12], Teorema 10.3.

**Teorema 4.10.** *Seja  $N$  um número natural. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(A)  $f \in \mathcal{C}_N$ ;

(B) existe uma seqüência  $\{\mu_k\}_{-\infty}^{\infty}$  positiva- $N$ -definida tal que

$$f(z) = \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k, \quad |z| < 1;$$

(C) existe uma função  $\psi$  limitada, não-decrescente em  $[-\pi, \pi]$ , com  $N$  pontos de aumento tal que

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi(\theta), \quad |z| < 1;$$

(D) existe um convergente  $N$ -truncado de uma PPC-fração

$$\frac{P_{2N}(z)}{Q_{2N}(z)} = \delta_0 - \frac{2\delta_0}{1} + \frac{1}{\bar{\delta}_1 z} + \frac{(1 - |\delta_1|^2)z}{\delta_1} + \dots + \frac{(1 - |\delta_{N-1}|^2)z}{\delta_{N-1}} + \frac{1}{\bar{\delta}_N z}$$

tal que  $f(z) = P_{2N}(z)/Q_{2N}(z) = R_N(z)$  (veja (4.23)).

# Capítulo 5

## Análise de Freqüência

Neste capítulo estudamos o problema de análise de freqüências. Na Seção 5.1, apresentamos o problema de acordo com [9]. Na Seção 5.2, introduzimos um método para calcular as freqüências, baseamo-nos, principalmente, nos trabalhos [9], [10], [13] e [18].

### 5.1 Apresentação do problema

O problema de análise de freqüências consiste em determinar as freqüências de um sinal trigonométrico discreto truncado  $\{x_N(m)\}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , de uma amostra de  $N$  valores, tomados em intervalos de tempo igualmente espaçados, do sinal trigonométrico definido por

$$x(m) = \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{iw_j m}, \quad x(0) \neq 0,$$

onde  $I$  é um inteiro positivo,  $w_j$  são as freqüências normalizadas e  $\alpha_j$  são as amplitudes complexas do sinal.

Iniciamos com uma função da forma

$$G(t) = \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{i2\pi f_j t}, \quad I \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

tal que

$$\alpha_0 \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \neq \alpha_j = \bar{\alpha}_{-j} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \dots, I,$$

são as amplitudes complexas e, os números reais  $f_j$ , que satisfazem

$$0 = f_0 < f_1 < \dots < f_I \quad \text{e} \quad f_j = -f_{-j}, \quad j = 1, 2, \dots, I, \quad (5.1)$$

são as freqüências do sinal trigonométrico discreto. A variável real  $t$  denota o tempo, em segundos, relativo ao instante inicial  $t = 0$ . Consideramos, sempre, que  $2I + 1 < N$ , isto é, a quantidade de freqüências menor do que o tamanho da amostra dos valores observados do sinal trigonométrico.

Como  $\alpha_j$  é um número complexo, podemos escrever,

$$\alpha_j = |\alpha_j|e^{i\varphi_j}, \quad |\alpha_j| > 0, \quad -\pi < \varphi_j \leq \pi,$$

o argumento  $\varphi_j$  é conhecido como fase do sinal. Facilmente vemos que

$$\alpha_{-j} = \bar{\alpha}_j = \overline{|\alpha_j|e^{i\varphi_j}} = |\alpha_j|e^{-i\varphi_j}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G(t) &= \alpha_{-I}e^{i2\pi f_{-I}t} + \alpha_{-I+1}e^{i2\pi f_{-I+1}t} + \dots + \alpha_{-1}e^{i2\pi f_{-1}t} + \alpha_0e^0 \\ &\quad + \alpha_1e^{i2\pi f_1t} + \dots + \alpha_{I-1}e^{i2\pi f_{I-1}t} + \alpha_Ie^{i2\pi f_I t} \\ &= |\alpha_I|e^{-i[2\pi f_I t + \varphi_I]} + |\alpha_{I-1}|e^{-i[2\pi f_{I-1}t + \varphi_{I-1}]} + \dots + |\alpha_1|e^{-i[2\pi f_1 t + \varphi_1]} + \alpha_0 \\ &\quad + |\alpha_1|e^{i[2\pi f_1 t + \varphi_1]} + \dots + |\alpha_{I-1}|e^{i[2\pi f_{I-1}t + \varphi_{I-1}]} + |\alpha_I|e^{i[2\pi f_I t + \varphi_I]} \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^I 2|\alpha_j| \cos(2\pi f_j t + \varphi_j), \end{aligned}$$

de onde vemos que  $G$  é uma função real do tempo  $t$ . O valor  $2|\alpha_j|$  é chamado amplitude do sinal.

Supomos que conhecemos alguns valores  $G(t_m)$  de  $G$ , de uma amostragem de  $N$  dados obtidos em intervalos de tempo igualmente espaçados,

$$t_m = m\Delta t, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad \Delta t > 0.$$

A dificuldade está, então, em determinar as freqüências  $f_j$  e, uma vez encontradas estas freqüências, as amplitudes complexas  $\alpha_j$  são obtidas resolvendo o sistema linear

$$G(t_m) = \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{i2\pi f_j t_m}, \quad I \in \mathbb{N}, \quad m = 1, 2, \dots, 2I+1.$$

O intervalo de tempo  $\Delta t$  pode ser escolhido, convenientemente, afim de obter

$$2\pi f_j \Delta t < \pi, \quad j = 1, 2, \dots, I.$$

Para isso, é suficiente considerar apenas a maior freqüência  $f_I$  e tomar

$$\Delta t < \frac{1}{2f_I}.$$

Essa escolha de  $\Delta t$  depende de algum conhecimento sobre a natureza física do problema em questão. O seguinte exemplo é dado em Jones e Petersen [9] para explicar esse fato. Em processamento da fala, é tipicamente necessário determinar freqüências  $f_j$  variando-as no intervalo

$$0 < f_j < 5000 \text{ Hz} \quad (\text{Hertz}).$$

Assim, a escolha do intervalo de tempo  $\Delta t$ , entre uma amostragem e outra, deve ser

$$\Delta t < \frac{1}{2 \times 5000} = 10^{-4} \text{ s} \quad (\text{segundos}).$$

Utilizamos, assim, as frequências normalizadas  $w_j = 2\pi f_j \Delta t$ , onde  $\Delta t$  é escolhido apropriadamente para que

$$0 = w_1 < w_2 < \cdots < w_I < \pi, \quad w_j = -w_{-j}, \quad j = 1, 2, \dots, I,$$

de acordo com (5.1).

Finalmente, definimos o sinal trigonométrico discreto truncado  $\{x_N(m)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ , por

$$x_N(m) = \begin{cases} G(t_m) = \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{iw_j m}, & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Os números

$$e^{iw_j}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I,$$

são chamados pontos de frequência. Esses pontos, com  $-\pi < w_j < \pi$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I$ , estão no círculo unitário e serão aproximados pelos zeros dos polinômios de Szegő, que estão no interior do círculo unitário. Trabalhamos com as frequências normalizadas  $w_j$  e, por simplicidade, chamamos  $w_j$  apenas de frequências.

Na próxima seção, estudamos métodos para determinar as frequências de um sinal trigonométrico discreto.

## 5.2 Polinômios de Szegő e análise de frequência

Seja  $x_N(m)$  definido em (5.2). Seja

$$n_0 = 2I + r < N, \quad \text{onde} \quad r = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha_0 > 0 \\ 0, & \text{se } \alpha_0 = 0 \end{cases},$$

a quantidade de pontos de frequência  $e^{iw_j}$ . Definimos a medida  $\psi_N$  em  $[-\pi, \pi]$  por

$$d\psi_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_N(k) e^{-ik\theta} \right|^2 d\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Para a medida  $\psi_N$ , o  $m$ -ésimo momento,  $\mu_m^{(N)}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), é dado por

$$\begin{aligned}
\mu_m^{(N)} &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} d\psi_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_N(k) e^{-ik\theta} \right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} \left( \sum_{k=0}^{N-1} x_N(k) e^{-ik\theta} \right) \left( \sum_{j=0}^{N-1} \overline{x_N(j)} e^{-ij\theta} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_N(k) \overline{x_N(j)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k-m)\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} x_N(k) \left( x_N(0) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-k-m)\theta} d\theta + x_N(1) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(1-k-m)\theta} d\theta \right. \\
&\quad \left. + \cdots + x_N(k+m) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta + \cdots + x_N(N-1) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(N-1-k-m)\theta} d\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} x_N(k) x_N(k+m) 2\pi,
\end{aligned}$$

pois  $\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi$  e as demais integrais são todas iguais a zero. Como  $x_N(k+m) = 0$ , para  $k+m > N-1$  (ou  $k > N-m-1$ ), obtemos

$$\mu_m^{(N)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} d\psi_N(\theta) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-m-1} x_N(k) x_N(k+m), & m \geq 0, \\ \mu_{-m}^{(N)}, & m \leq -1. \end{cases} \quad (5.4)$$

$\mu_m^{(N)}$  são chamados de coeficientes de auto-correlação do sinal.

A medida  $\psi_N$  define o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\psi_N} = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\psi_N(\theta), \quad f, g \in \Lambda.$$

Como o problema de momento trigonométrico para  $\{\mu_m^{(N)}\}$  tem uma solução  $\psi_N$ , a seqüência  $\{\mu_m^{(N)}\}_{m=-\infty}^{\infty}$  é hermitiana e positiva-definida. Daí, podemos aplicar (4.34) para calcular, sucessivamente, os coeficientes de reflexão  $\delta_n^{(N)}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , associados à medida  $\psi_N$  e, a partir disso, construir a PPC-fração associada a  $\psi_N$ ,

$$\delta_0^{(N)} - \frac{2\delta_0^{(N)}}{1} + \frac{1}{\overline{\delta_1^{(N)}} z} + \frac{(1 - |\delta_1^{(N)}|^2)z}{\delta_1^{(N)}} + \frac{1}{\overline{\delta_2^{(N)}} z} + \frac{(1 - |\delta_2^{(N)}|^2)z}{\delta_2^{(N)}} + \dots \quad (5.5)$$

Definimos  $P_n(\psi_N, z)$  e  $Q_n(\psi_N, z)$ ,  $n \geq 0$ , como sendo, respectivamente, o numerador e o denominador do  $n$ -ésimo convergente de (5.5) que satisfazem as relações de recorrência de (3.2) a (3.4).

Os polinômios de Szegő com relação a  $\psi_N$  são dados por

$$\rho_n(\psi_N, z) = Q_{2n+1}(\psi_N, z), \quad \rho_n^*(\psi_N, z) = Q_{2n}(\psi_N, z), \quad n \geq 0.$$

Eles também satisfazem relações de recorrência das formas, (3.17) e (3.18) e podem ser expressos pelos determinantes de Toeplitz (3.13).

Para determinar os pontos de frequência  $e^{iw_j}$  utiliza-se, essencialmente, as propriedades assintóticas ( $N \rightarrow \infty$ ) dos zeros dos polinômios de Szegő. Este método é conhecido por N-Processo.

Seja  $F$  uma função de Carathéodory da forma (4.37)

$$F(z) = \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2 \frac{e^{iw_j} + z}{e^{iw_j} - z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi(\theta), \quad (5.6)$$

onde

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 0, & -\pi < \theta < w_{-I}, \\ \sum_{j=-I}^{-I+k} |\alpha_j|^2, & w_{-I+k} \leq \theta \leq w_{-I+k+1}, \quad 0 \leq k \leq 2I-1, \\ \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2, & w_I \leq \theta < \pi. \end{cases} \quad (5.7)$$

Os momentos com relação a  $\psi$  são dados por

$$\mu_m = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} d\psi(\theta) = \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2 e^{-imw_j}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Por (5.6) vemos que  $F$  é uma função racional cujos pólos são os pontos de frequência no círculo unitário e obtemos pela parte (B) do Teorema 4.10 que

$$F(z) = L_0(z) = \mu_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k, \quad |z| < 1.$$

Em seguida mostraremos que se o  $\text{supp}(\psi)$  contém apenas  $n_0$  ( $n_0 = 2I + r$ ) pontos, então  $I_\psi$  é positivo- $n_0$ -definido.

De fato, seja  $\psi$  uma medida com  $n_0$  saltos definida por (5.7) e seja  $q_{n_0}$  um polinômio de grau  $n_0$  definido por

$$q_{n_0}(e^{i\theta}) = (e^{i\theta} - e^{iw_{-I}})(e^{i\theta} - e^{iw_{-I+1}}) \cdots (e^{i\theta} - e^{iw_I}) = \sum_{r=0}^{n_0} a_r e^{ir\theta}, \quad r \in \mathbb{C}.$$

Temos que  $|q_{n_0}(e^{i\theta})|^2 > 0$ , mas

$$I_\psi[|q_{n_0}(e^{i\theta})|^2] = \int_{-\pi}^{\pi} |q_{n_0}(e^{i\theta})|^2 d\psi(\theta) = \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2 |q_{n_0}(e^{iw_j})|^2 = 0.$$

Logo, existem  $a_0, a_1, \dots, a_{n_0}$ , nem todos nulos, tal que

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{r=0}^{n_0} a_r e^{ir\theta} \right|^2 d\psi(\theta) = \sum_{r=0}^{n_0} \sum_{s=0}^{n_0} a_r \bar{a}_s \mu_{s-r} = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_{-n_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n_0} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n_0} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz de Toeplitz

$$T_{n_0} = \begin{pmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_{-n_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n_0} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix}$$

não é positiva-definida. Em outras palavras, seu determinante (que é real) satisfaz,  $\Delta_{n_0} \leq 0$ . Pela integral de Stieltjes,

$$I_\psi[|q(e^{i\theta})|^2] = \int_{-\pi}^{\pi} |q(e^{i\theta})|^2 d\psi(\theta) = \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2 |q(e^{i\theta_j})|^2 > 0$$

para qualquer polinômio  $q \neq 0$  de grau menor que  $n_0$ . Assim, o determinante  $\Delta_n$  da matriz  $T_n$  é positivo para todo  $n < n_0$ .

Vamos mostrar que  $\Delta_{n_0} = 0$  e com isso provar que  $I_\psi$  é positivo- $n_0$ -definido. Sabemos que  $T_n$  é positiva-definida para  $0 \leq n \leq n_0 - 1$  e que  $T_{n_0}$  não é positiva-definida. Escrevemos

$$T_{n_0} = \begin{pmatrix} T_{n_0-1} & d_{n_0-1} \\ d_{n_0-1}^H & \mu_0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_{n_0-1} = G_{n_0-1}^H G_{n_0-1}, \quad (5.8)$$

onde

$$G_{n_0-1} = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n_0-1} \\ 0 & g_{2,2} & \cdots & g_{2,n_0-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{n_0-1,n_0-1} \end{pmatrix},$$

com  $g_{1,1} \neq 0, g_{2,2} \neq 0, \dots, g_{n_0-1,n_0-1} \neq 0$ .

Vamos procurar uma decomposição para  $T_{n_0}$  da seguinte forma,

$$T_{n_0} = G_{n_0}^H G_{n_0}, \quad \text{onde} \quad G_{n_0} = \begin{pmatrix} G_{n_0-1} & C_{n_0-1} \\ 0 & g_{n_0,n_0} \end{pmatrix}.$$

Escrevemos

$$G_{n_0}^H G_{n_0} = \begin{pmatrix} G_{n_0-1}^H & 0 \\ C_{n_0-1}^H & g_{n_0,n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n_0-1} & C_{n_0-1} \\ 0 & g_{n_0,n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{n_0-1} & d_{n_0-1} \\ d_{n_0-1}^H & \mu_0 \end{pmatrix} = T_{n_0}.$$

Então, temos três identidades,

- (i)  $G_{n_0-1}^H G_{n_0-1} = T_{n_0-1}$  (que é válida por (5.8)),
- (ii)  $G_{n_0-1}^H C_{n_0-1} = d_{n_0-1}$ ,
- (iii)  $C_{n_0-1}^H C_{n_0-1} + g_{n_0,n_0}^2 = a_{n_0,n_0} \Rightarrow g_{n_0,n_0} = \sqrt{a_{n_0,n_0} - C_{n_0-1}^H C_{n_0-1}}$ .



Como  $G_{n_0-1}^H$  é não-singular, a solução  $C_{n_0-1}$  em (ii) é única. Assim, tomando  $g_{n_0, n_0}$  como em (iii), obtemos a matriz  $G_{n_0}$  desejada. Daí

$$\Delta_{n_0} = \det(T_{n_0}) = \det(G_{n_0}^H G_{n_0}) = \det(G_{n_0}^H) \det(G_{n_0}) = |g_{1,1} g_{2,2} \cdots g_{n_0, n_0}|^2 \geq 0.$$

No entanto, observamos que  $\Delta_{n_0} \leq 0$ . Portanto,  $\Delta_{n_0} = 0$ .

Logo, como  $\psi$  definida em (5.7) tem somente um número finito de pontos de aumento (os saltos), a seqüência  $\{\mu_m\}_{-\infty}^{\infty}$  é hermitiana positiva- $n_0$ -definida, o que implica que

$$|\delta_n| < 1 \quad \text{para} \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1 \quad \text{e} \quad |\delta_{n_0}| = 1,$$

veja (4.27) na Observação 4.1.

Segue, do Teorema 4.10, que

$$F(z) = \delta_0 - \frac{2\delta_0}{1} + \frac{1}{\bar{\delta}_1 z} + \cdots + \frac{(1 - |\delta_{n_0-1}|^2)z}{\delta_{n_0-1}} + \frac{1}{\bar{\delta}_{n_0} z}. \quad (5.9)$$

O convergente  $n_0$ -truncado (5.9) tem  $n$ -ésimo numerador  $P_n$  e denominador  $Q_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, 2n_0 + 1$ . Como  $|\delta_{n_0}| = 1$ ,

$$P_{2n_0+1}(z) = P_{2n_0}(z) \quad \text{e} \quad Q_{2n_0+1}(z) = Q_{2n_0}(z). \quad (5.10)$$

Os polinômios de Szegő com relação a  $\psi$  são dados por

$$\rho_n(z) = Q_{2n+1}(z) \quad \text{e} \quad \rho_n^*(z) = Q_{2n}(z), \quad 0 \leq n \leq n_0. \quad (5.11)$$

De (5.6), (5.9), (5.10) e (5.11),

$$\rho_{n_0}(z) = Q_{2n_0+1}(z) = Q_{2n_0}(z) = (z-1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}).$$

Portanto, os zeros do polinômio de Szegő  $\rho_{n_0}$ , com relação à função escada  $\psi$ , são exatamente os pontos de frequência. No entanto, não se consegue construir a medida  $\psi$ , pois, tanto as amplitudes  $\alpha_j$ , como as frequências  $w_j$ , são desconhecidas.

O objetivo do próximo resultado, demonstrado por Jones e outros em [10], é mostrar que  $\frac{\psi_N}{N}$ , onde  $\psi_N$  é a medida definida em (5.3), converge fracamente para a medida  $\psi$  definida por (5.7) quando  $N$  tende ao infinito. Para demonstrar esse teorema usamos algumas propriedades do núcleo de Fejér, que definimos a seguir.

**Definição 5.1.** A função  $\Phi_N(t) = \frac{1}{2\pi N} \left( \frac{\text{sen}(Nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right)^2$  é conhecida como núcleo de Fejér de ordem  $N - 1$ .

Algumas propriedades da função  $\Phi_N(t)$ , cujas demonstrações são omitidas mas podem ser encontradas em Figueiredo [5], são

- (i)  $\Phi_N(t) \geq 0$  e  $\Phi_N(t) = \Phi_N(-t)$ ,
- (ii)  $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t) dt = 1$ , para todo  $N \in \mathbb{N}$ ,
- (iii) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua com período  $2\pi$ . Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t) f(x-t) dt = f(x).$$

**Teorema 5.1.** *Seja  $\psi_N$  a medida definida por (5.3). Então,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(\theta) = \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2 f(e^{iw_j}),$$

para toda  $f$  contínua no círculo unitário  $\mathcal{C}$ .

**Demonstração:** Escolhendo  $\varepsilon > 0$  tal que que o intervalo  $[w_s - \varepsilon, w_s + \varepsilon]$  não contenha  $w_j$  ( $j \neq s$ ), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \int_{w_s-\varepsilon}^{w_s+\varepsilon} f(e^{i\theta}) d\psi_N(\theta) &= \frac{1}{2\pi N} \int_{w_s-\varepsilon}^{w_s+\varepsilon} f(e^{i\theta}) \left| \sum_{m=0}^{N-1} x_N(m) e^{-im\theta} \right|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi N} \int_{w_s-\varepsilon}^{w_s+\varepsilon} f(e^{i\theta}) \left| \sum_{m=0}^{N-1} \left( \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{iw_j m} \right) e^{-im\theta} \right|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi N} \int_{w_s-\varepsilon}^{w_s+\varepsilon} f(e^{i\theta}) \left| \sum_{j=-I}^I \alpha_j \sum_{m=0}^{N-1} \frac{e^{imw_j}}{e^{im\theta}} \right|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Utilizando a soma da série geométrica, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \int_{w_s-\varepsilon}^{w_s+\varepsilon} f(e^{i\theta}) d\psi_N(\theta) &= \frac{1}{2\pi N} \int_{w_s-\varepsilon}^{w_s+\varepsilon} f(e^{i\theta}) \left| \sum_{j=-I}^I \alpha_j \frac{1 - e^{iN(w_j-\theta)}}{1 - e^{i(w_j-\theta)}} \right|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi N} \int_{w_s-\varepsilon}^{w_s+\varepsilon} f(e^{i\theta}) \left( \sum_{j=-I}^I \alpha_j \frac{1 - e^{iN(w_j-\theta)}}{1 - e^{i(w_j-\theta)}} \right) \left( \sum_{m=-I}^I \bar{\alpha}_m \frac{1 - e^{iN(w_m-\theta)}}{1 - e^{i(w_m-\theta)}} \right) d\theta. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Consideramos o termo em (5.12) quando  $m = j = s$  e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi N} \int_{w_s-\varepsilon}^{w_s+\varepsilon} f(e^{i\theta}) |\alpha_s|^2 \left| \frac{1 - e^{iN(w_s-\theta)}}{1 - e^{i(w_s-\theta)}} \right|^2 d\theta &= \frac{|\alpha_s|^2}{2\pi N} \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} f(e^{i(w_s-\theta)}) \left| \frac{1 - e^{iN\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right|^2 (-d\theta) \\ &= \frac{|\alpha_s|^2}{2\pi N} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(e^{i(w_s-\theta)}) \left( \frac{\text{sen}(N\theta/2)}{\text{sen}(\theta/2)} \right)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Pelo núcleo de Fejér, concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_s|^2}{2\pi N} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(e^{i(w_s-\theta)}) \left( \frac{\text{sen}(N\theta/2)}{\text{sen}(\theta/2)} \right)^2 d\theta = |\alpha_s|^2 f(e^{iw_s}).$$

Além disso, os termos restantes do lado direito de (5.12) são de ordem  $O(1/N)$  se  $j \neq m$  e  $j \neq s$ , e de ordem  $O(1/\sqrt{N})$  se  $j = s$  ou  $m = s$  (não ambos). Portanto, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{w_s - \varepsilon}^{w_s + \varepsilon} f(e^{i\theta}) d\psi_N(\theta) = |\alpha_s|^2 f(e^{iw_s}).$$

Podemos particionar o intervalo  $[-\pi, \pi]$  de modo a obtermos  $[w_s - \varepsilon, w_s + \varepsilon]$  como um intervalo contido nessa partição. Assim, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\psi_N(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(\theta) = \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2 f(e^{iw_j}).$$

■

**Teorema 5.2.** *Seja  $\{\mu_m^{(N)}\}$  a seqüência de momentos com relação a  $\psi_N$  e  $\{\mu_m\}$  a seqüência de momentos com relação a função escada  $\psi$ . Então, para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,*

$$\frac{1}{N} \mu_m^{(N)} = \mu_m + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

**Demonstração:** Substituindo (5.2) em (5.4) temos

$$\mu_m^{(N)} = \sum_{k=0}^{N-m-1} \left[ \sum_{j=-I}^I \sum_{n=-I}^I \alpha_j \alpha_n e^{i(w_j+w_n)k} e^{i(w_n m)} \right], \quad m \geq 0. \quad (5.13)$$

Somando os termos, sobre  $k$ , com  $j$  e  $n$  fixos tal que  $w_j + w_n \neq 0$  (sabemos que  $w_{-j} = -w_j$ , portanto se  $n = -j$  então  $w_j + w_n = 0$ ) temos a série geométrica

$$\begin{aligned} \alpha_j \alpha_n e^{i(w_n m)} \sum_{k=0}^{N-m-1} e^{i(w_j+w_n)k} &= \alpha_j \alpha_n e^{i(w_n m)} \frac{e^{i(w_j+w_n)(N-m)} - 1}{e^{i(w_j+w_n)} - 1} \\ &= \alpha_j \alpha_n e^{i[w_n(N/2+m/2-1/2)+w_j(N/2-m/2-1/2)]} \frac{\text{sen}[\frac{1}{2}(w_j+w_n)(N-m)]}{\text{sen}[\frac{1}{2}(w_j+w_n)]} \\ &= M_{j,n}(m, N). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como o termo do denominador não se anula, existe um número  $M$ , independente de  $j, n, m$  e  $N$ , tal que

$$\sup\{M_{j,n}(m, N) : w_j + w_n \neq 0, -I \leq j, n \leq I, m \in \mathbb{Z}, N \geq 1\} < M.$$

A soma de todos os outros termos em (5.13), isto é, quando  $w_j + w_n = 0$  (que ocorre para  $j = -n$ ), é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-m-1} \left[ \sum_{j=-I}^I \sum_{n=-I}^I \alpha_j \alpha_n e^{i(w_n m)} \right] &= (N-m) \sum_{n=-I}^I \alpha_{-n} \alpha_n e^{i(w_n m)} \\ &= (N-m) \sum_{n=-I}^I |\alpha_n|^2 e^{i(w_n m)} = (N-m) \mu_m. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Combinando (5.14) e (5.15), temos, para  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\mu_m^{(N)}}{N} = \left[ \sum_{\substack{j,n=-I \\ j \neq -n}}^{N-m-1} \frac{M_{j,n}(m, N)}{N} \right] + \left[ \frac{(N-m)\mu_m}{N} \right] = O\left(\frac{1}{N}\right) - \frac{m\mu_m}{N} + \frac{N\mu_m}{N} = \mu_m + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

como queríamos demonstrar. ■

O próximo teorema, extraído de [13], garante que os coeficientes de reflexão  $\delta_n^{(N)}$  e os polinômios  $\rho_n(\psi_N, z)$ ,  $n = 1, 2, \dots, n_0$ , associados a  $\psi_N$  definida em (5.3), convergem para seus correspondentes  $\delta_n$  e  $\rho_n$ , associados a  $\psi$  definida em (5.7), e que os zeros de  $\rho_{n_0}(\psi_N, z)$  convergem para os pontos de frequência  $e^{iw_j}$ , onde  $n_0$  é a quantidade de pontos de frequência.

**Teorema 5.3.** *Dados  $\delta_n^{(N)} = \rho_n(\psi_N, 0)$  e  $\delta_n = \rho_n(0)$ , então,*

(A) *para cada  $n = 1, 2, \dots, n_0$ , fixo,*

$$\frac{\delta_0^{(N)}}{N} = \delta_0 + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad e \quad \delta_n^{(N)} = \delta_n + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \text{com } N \rightarrow \infty;$$

(B) *para cada  $n = 0, 1, \dots, 2n_0 + 1$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} P_n(\psi_N, z) = P_n(z) \quad e \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Q_n(\psi_N, z) = Q_n(z),$$

*a convergência é localmente uniforme em  $\mathbb{C}$ ;*

(C) *em particular,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{n_0}(\psi_N, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_{2n_0+1}(\psi_N, z) = Q_{2n_0+1}(z) = (z-1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}),$$

*a convergência é localmente uniforme em  $\mathbb{C}$ ;*

(D) *se os zeros  $z(j, n_0, N)$  de  $\rho_{n_0}(\psi_N, z)$  são ordenados apropriadamente,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z(j, n_0, N) = e^{iw_j}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I.$$

*Se  $r \neq 0$  (isto é,  $\alpha_0 > 0$ ), então  $\lim_{N \rightarrow \infty} z(0, n_0, N) = 1 = e^{i0}$ .*

**Demonstração:** (A)  $\delta_n^{(N)}$  pode ser obtido por,  $\delta_0^{(N)} = \mu_0^{(N)}$  e

$$\delta_n^{(N)} = \frac{(-1)^n}{\Delta_{n-1}^{(N)}} \begin{vmatrix} \mu_{-1}^{(N)} & \mu_0^{(N)} & \cdots & \mu_{n-2}^{(N)} \\ \mu_{-2}^{(N)} & \mu_{-1}^{(N)} & \cdots & \mu_{n-3}^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-n}^{(N)} & \mu_{-n+1}^{(N)} & \cdots & \mu_{-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como  $\frac{1}{N}\mu_m^{(N)} = \mu_m + O\left(\frac{1}{N}\right)$ , para  $N \rightarrow \infty$  e  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , então

$$\frac{1}{N}\mu_0^{(N)} = \mu_0 + O\left(\frac{1}{N}\right) \Rightarrow \delta_0^{(N)} = N\delta_0 + O(1), \quad N \rightarrow \infty$$

e, para  $1 \leq n \leq n_0$ ,

$$\delta_n^{(N)} = \frac{(-1)^n \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} \\ \mu_{-2} & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{n-3} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1} \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{N}\right)}{\Delta_{n-1} + O\left(\frac{1}{N}\right)} = \delta_n + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

com  $N \rightarrow \infty$ .

(B) A seguir, usamos relações de recorrência de (3.2) a (3.4), para obter os numeradores e denominadores dos primeiros convergentes das frações contínuas de Perron-Carathéodory, associada a  $\psi_N$ .

$$\begin{aligned} P_0(\psi_N, z) &= \delta_0^{(N)}, & Q_0(\psi_N, z) &= 1, \\ P_1(\psi_N, z) &= -\delta_0^{(N)}, & Q_1(\psi_N, z) &= 1, \\ P_2(\psi_N, z) &= \delta_0^{(N)}[-\bar{\delta}_1^{(N)}z + 1], & Q_2(\psi_N, z) &= \bar{\delta}_1^{(N)}z + 1, \\ P_3(\psi_N, z) &= \delta_0^{(N)}[z + \delta_1^{(N)}], & Q_3(\psi_N, z) &= z + \delta_1^{(N)}, \\ P_4(\psi_N, z) &= \delta_0^{(N)}[-\delta_2^{(N)}z^2 + (\delta_1^{(N)}\delta_2^{(N)} - \bar{\delta}_1^{(N)})z + 1], & Q_4(\psi_N, z) &= \bar{\delta}_2^{(N)}z^2 + (\bar{\delta}_1^{(N)} + \delta_1^{(N)}\bar{\delta}_2^{(N)})z + 1. \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned}$$

Para a PPC-fração associada a  $\psi$  é análogo.

Podemos, então, observar que os coeficientes das potências de  $z$  em  $P_n(\psi_N, z)$  e  $Q_n(\psi_N, z)$  (ou  $P_n(z)$  e  $Q_n(z)$ ) são funções contínuas de  $\delta_k^{(N)}$  (ou  $\delta_k$ ),  $k = 0, 1, \dots, n$ . Portanto, com  $N \rightarrow \infty$ , os coeficientes de  $P_n(\psi_N, z)$  e  $Q_n(\psi_N, z)$  convergem para os coeficientes de  $P_n(z)$  e  $Q_n(z)$ ,  $n = 0, 1, \dots, 2n_0 + 1$ , respectivamente. Cabe observar, também, que em todos os numeradores  $P_n(\psi_N, z)$  aparece o fator  $\delta_0^{(N)}$ , por isto é necessário dividi-los por  $N$  para que haja convergência (veja item (A)).

(C) Sabemos que  $\rho_{n_0}(\psi_N, z) = Q_{2n_0+1}(\psi_N, z)$ ,  $n_0 \geq 0$ . Portanto este item é conseqüência de (B) e de

$$Q_{2n_0+1}(z) = \rho_{n_0}(z) = (z-1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}).$$

(D) Se  $f \not\equiv 0$  é a função limite para a seqüência  $\{f_n\}$  de funções contínuas, então cada zero de  $f$  é limite dos zeros das funções  $f_n$ . (veja Henrici [7], Corolário 4.10e, p.283). Logo, por (C), temos o resultado. ■

No exemplo a seguir, temos uma ilustração do fato que acabamos de mostrar.

**Exemplo 5.1.** Consideramos um sinal da forma

$$x_N(m) = e^{im0} + e^{-im\pi/4} + e^{im\pi/4} = 1 + 2 \cos(m\pi/4),$$

onde as amplitudes são  $\alpha_{-1} = \alpha_0 = \alpha_1 = 1$ , as únicas frequência são  $w_{-1} = -\pi/4$ ,  $w_0 = 0$  e  $w_1 = \pi/4$  e  $n_0 = 3$ . Através dos coeficientes de auto-correlação do sinal,(5.4), obtemos

$$\mu_m^{(N)} = \sum_{k=0}^{N-m-1} [1 + 2(\cos(k\pi/4) + \cos((k+m)\pi/4)) + 4\cos(k\pi/4)\cos((k+m)\pi/4)].$$

Então, podemos calcular os polinômios de Szegő  $\rho_n(\psi_N, z)$  com relação a  $\psi_N$  através das fórmulas determinantes (4.33). A seguir apresentamos os três zeros  $z(j, n_0, N)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , de  $\rho_{n_0}(\psi_N, z)$ .

$j$	$z(j, n_0, 10)$ ( $\diamond$ )	$z(j, n_0, 100)$ (+)	$z(j, n_0, 1000)$ ( $\square$ )	$z(j, n_0, 10000)$ ( $\circ$ )	pontos de frequência
1	-0,09740	0,59518	0,90151	0,98904	$e^{w_0} = 1$
2	0,54582-0,49611 $i$	0,60611-0,60763 $i$	0,67445-0,69396 $i$	0,70349-0,70612 $i$	$e^{w_{-1}} = 0,70711 - 0,70711 i$
3	0,54582+0,49611 $i$	0,60611+0,60763 $i$	0,67445+0,69396 $i$	0,70349+0,70612 $i$	$e^{w_1} = 0,70711 + 0,70711 i$

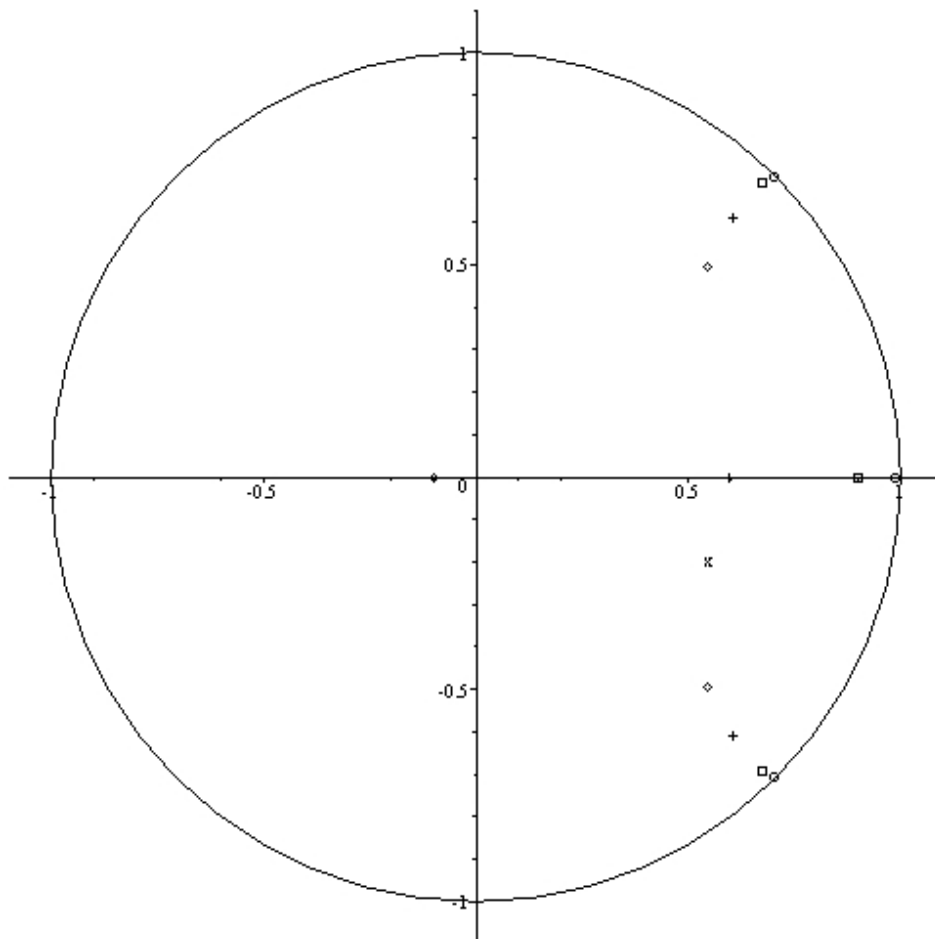


Figura 5.1: Convergência dos zeros

A utilidade do Teorema 5.3 é apenas teórica, pois, a quantidade de pontos de frequência  $n_0$  é desconhecida. Isto é, não sabemos qual o grau do polinômio de Szegő associado a  $\psi_N$  que devemos tomar para obter as frequências  $w_j$ , visto que a convergência se dá somente para o grau  $n_0$ .

É necessário, então, investigar a convergência para polinômios de grau  $n$  suficientemente grande ( $n \geq n_0$ ). É isso que apresentamos nos Teoremas 5.4 e 5.5. Estes resultados podem ser encontrados em [13].

No exemplo a seguir, dado em [18] por Pan e Saff, vemos que para  $n > n_0$ , a seqüência  $\{\rho_n(\psi_N, z)\}_{N=1}^\infty = \{Q_{2n+1}(\psi_N, z)\}_{N=1}^\infty$  pode não ser convergente.

**Exemplo 5.2.** *Consideramos um sinal da forma*

$$x_N(m) = e^{-im\pi/4} + e^{im\pi/4} = 2 \cos(m\pi/4),$$

onde as únicas frequência são  $w_{-1} = -\pi/4$  e  $w_1 = \pi/4$  e, as amplitudes são  $\alpha_{-1} = \alpha_1 = 1$ .

Vemos que

$$n_0 = 2 \quad \text{e} \quad \rho_2(z) = Q_5(z) = (z - e^{-i\pi/4})(z - e^{i\pi/4}) = z^2 - \sqrt{2}z + 1.$$

Vamos tomar duas subseqüências de  $\{N\}$  e calcular os respectivos momentos,

$$(a) \ N \equiv 0 \pmod{4} : \quad \mu_0^{(N)} = 2N, \quad \mu_1^{(N)} = \sqrt{2}(N-2), \quad \mu_2^{(N)} = -2, \quad \mu_3^{(N)} = -\sqrt{2}(N-2),$$

$$(b) \ N \equiv 2 \pmod{4} : \quad \mu_0^{(N)} = 2N+2, \quad \mu_1^{(N)} = \sqrt{2}N, \quad \mu_2^{(N)} = 0, \quad \mu_3^{(N)} = -\sqrt{2}(N-2).$$

Assim, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_3(\psi_{4k}, z) = \rho_2(z) \left( z + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_3(\psi_{4k+2}, z) = \rho_2(z) \left( z + \frac{\sqrt{2}}{4} \right),$$

ou seja, o limite de  $\{\rho_3(\psi_N, z)\}$ , com  $N \rightarrow \infty$ , não é único. Os momentos podem ser calculados através dos coeficientes de auto-correlação do sinal (5.4) e o polinômio  $\rho_3(\psi_N, z)$  através dos determinantes em (4.33). Devemos notar que, embora não sejam iguais, os limites encontrados são da forma  $\rho_2(z)U_1(z)$  onde  $U_1$  é um polinômio com zero em  $|z| < 1$ . Vemos adiante que isso não é uma mera coincidência.

O próximo teorema, obtido em [18], garante a convergência de uma subseqüência de  $\{\rho_n(\psi_N, z)\}$ ,  $n > n_0$ . Para demonstrá-lo precisamos de dois lemas.

**Lema 5.1.** *Seja  $\alpha_0 > 0$ , então, para  $n \geq n_0$  e  $N \geq 1$ , o coeficiente do termo de maior grau  $c_{n,n}$  (veja(4.32)) do polinômio ortonormal  $\hat{\rho}_n(\psi_N, z)$  satisfaz*

$$c_{n,n} \geq 1/\tau > 0, \tag{5.16}$$

onde  $\tau = 2^{2I+1} \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 4.8 segue, para  $z = e^{i\theta}$ , que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{n,n}^2} &= \int_{-\pi}^{\pi} |\rho_n(\psi_N, z)|^2 d\psi_N(\theta) \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| z^{n-2I-1} \prod_{j=-I}^I (z - e^{iw_j}) \right|^2 |W_N(z)|^2 d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=-I}^I \alpha_j (z^N - e^{iNw_j}) \prod_{l \neq j} (z - e^{iw_l}) \right|^2 d\theta \leq \left( 2^{2I+1} \sum_{j=-I}^I |\alpha_j| \right)^2 = \tau^2, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

**Lema 5.2.** Para  $n \geq n_0$  e  $N \geq 1$ , os coeficientes de reflexão  $\delta_{n+1}^{(N)}$  satisfazem

$$|\delta_{n+1}^{(N)}| \leq [1 - (x(0)/\tau)^2]^{1/2} < 1,$$

onde  $\tau$  é dado pelo lema anterior.

**Demonstração:** De (3.25) e (4.32) vemos que

$$|\delta_{n+1}^{(N)}|^2 = 1 - c_{n,n}^2/c_{n+1,n+1}^2. \quad (5.17)$$

Como  $\rho_{n+1}^*(\psi_N, z)$  e  $W_N^*$  são polinômios, e portanto, funções analíticas em  $|z| < 1$ , pelo Teorema 4.8, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{n,n}^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{\rho_n(\psi_N, z)}|^2 |\overline{W_N(z)}|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{\rho_n(\psi_N, 1/z)}|^2 |\overline{W_N(1/z)}|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\rho_n^*(\psi_N, z)|^2 |W_N^*(z)|^2 d\theta \geq |\rho_n^*(\psi_N, 0) W_N^*(0)|^2 = x^2(0), \end{aligned}$$

que, junto com (5.16), fornece

$$c_{n,n}^2/c_{n+1,n+1}^2 \geq (x(0)/\tau)^2. \quad (5.18)$$

Portanto, de (5.17) e (5.18), temos o resultado. ■

**Teorema 5.4.** Seja  $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$  uma seqüência arbitrária de números naturais. Então, existe uma subseqüência  $\{N_{k_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$  de  $\{N_k\}$  tal que

(A) a subseqüência  $\{\delta_n^{(N_{k_\nu})}\}_{\nu=1}^{\infty}$  de  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k=1}^{\infty}$  é convergente, com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Para  $n > n_0$ , o limite de  $\{\delta_n^{(N_{k_\nu})}\}_{\nu=1}^{\infty}$  está em  $|z| < 1$ ;

(B) para todo  $m = 1, 2, 3, \dots$  e todo  $z \in \mathbb{C}$ , existem seqüências de polinômios  $\{U_m^{(0)}(z)\}_{m=1}^{\infty}$  e  $\{U_m^{(1)}(z)\}_{m=1}^{\infty}$ , dependendo de  $\{N_{k_\nu}\}$ , tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{k_\nu}} P_{2(n_0+m)+l}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = U_m^{(l)}(z) P_{2n_0}(z), \quad l = 0, 1,$$



e

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_{2(n_0+m)+l}(\psi_{N_{k\nu}}, z) = U_m^{(l)}(z)Q_{2n_0}(z), \quad l = 0, 1.$$

A convergência é localmente uniforme em  $\mathbb{C}$ ;

(C) como  $Q_{2(n_0+m)+1}(\psi_{N_{k\nu}}, z) = \rho_{n_0+m}(\psi_{N_{k\nu}}, z)$  e  $Q_{2n_0}(z) = (z-1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j})$ , então, para  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_{n_0+m}(\psi_{N_{k\nu}}, z) = U_m^{(1)}(z) (z-1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}),$$

onde  $U_m^{(1)}$  é um polinômio de grau  $m$  com todos os zeros no disco  $|z| < 1$ , e a convergência é localmente uniforme em  $\mathbb{C}$ ;

(D) para cada  $n \geq n_0$  e  $\nu \geq 1$ , existem zeros  $z(j, n, N_{k\nu})$  de  $\rho_n(\psi_{N_{k\nu}}, z)$  tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} z(j, n, N_{k\nu}) = e^{iw_j}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I.$$

Se  $r \neq 0$ , então  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z(0, n, N_{k\nu}) = 1 = e^{i0}$ .

**Demonstração:** (A) Como  $|\delta_n^{(N)}| < 1$  para todo  $n, N \geq 1$ , podemos aplicar o processo diagonal de Cantor para obter uma subsequência  $\{N_k\}_{k \in \Gamma} = \{N_{k\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$  de  $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ , onde  $\Gamma$  é um conjunto infinito de índices, com a propriedade que  $\{\delta_n^{(N_{k\nu})}\}_{\nu=1}^{\infty}$  é uma seqüência convergente, para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Temos, então, que

$$\{\delta_1^{(N_k)}\}_{k=1}^{\infty} = \{\delta_1^{(N_1)}, \delta_1^{(N_2)}, \delta_1^{(N_3)}, \dots, \delta_1^{(N_k)}, \dots\}$$

é limitada. Logo, existe uma subsequência de  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k=1}^{\infty}$  que converge com  $n = 1$ . Seja  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_1}$  esta subsequência. Mas,  $\{\delta_2^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_1}$  também é limitada. Então, existe uma subsequência  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_2}$  ( $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ ) de  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_1}$  que converge com  $n = 2$  e, também, com  $n = 1$  por ser subsequência da seqüência que converge com  $n = 1$ . Novamente,  $\{\delta_3^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_2}$  é limitada. Logo, existe uma subsequência  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_3}$  ( $\Gamma_3 \subset \Gamma_2$ ) de  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_2}$  que converge com  $n = 1, 2, 3$ . Continuando deste modo, obtemos seqüências

$$\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_1}, \quad \{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_2}, \quad \{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_3}, \dots, \{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_i}, \dots,$$

com  $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \Gamma_3 \supset \dots \supset \Gamma_i \supset \dots$ , tais que

- (a)  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_i}$  é uma subsequência de  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_{i-1}}$ ,  
 (b)  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_i} = \{\delta_1^{(N_{k_i,1})}, \delta_1^{(N_{k_i,2})}, \delta_1^{(N_{k_i,3})}, \dots, \delta_1^{(N_{k_i,i})}, \dots\}$  converge com  $n = 1, 2, 3, \dots, i$ .

Queremos construir uma subsequência de  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k=1}^{\infty}$  que converge para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Então, escrevemos

$$\begin{aligned}
\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_1} &= \{\delta_n^{(N_{k_1,1})}, \delta_n^{(N_{k_1,2})}, \delta_n^{(N_{k_1,3})}, \dots, \delta_n^{(N_{k_1,i})}, \dots\}, \\
\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_2} &= \{\delta_n^{(N_{k_2,1})}, \delta_n^{(N_{k_2,2})}, \delta_n^{(N_{k_2,3})}, \dots, \delta_n^{(N_{k_2,i})}, \dots\}, \\
\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_3} &= \{\delta_n^{(N_{k_3,1})}, \delta_n^{(N_{k_3,2})}, \delta_n^{(N_{k_3,3})}, \dots, \delta_n^{(N_{k_3,i})}, \dots\}, \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \\
\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_i} &= \{\delta_n^{(N_{k_i,1})}, \delta_n^{(N_{k_i,2})}, \delta_n^{(N_{k_i,3})}, \dots, \delta_n^{(N_{k_i,i})}, \dots\}.
\end{aligned}$$

Tomando os elementos da diagonal da tabela acima obtemos

$$\{\delta_n^{(N_{k_\nu})}\}_{\nu=1}^\infty = \{\delta_n^{(N_{k_1,1})}, \delta_n^{(N_{k_2,2})}, \delta_n^{(N_{k_3,3})}, \dots, \delta_n^{(N_{k_i,i})}, \dots\}$$

que é subsequência de  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k=1}^\infty$  e também de  $\{\delta_n^{(N_k)}\}_{k \in \Gamma_i}$ , exceto possivelmente pelos primeiros  $(i-1)$  termos. Portanto,  $\{\delta_n^{(N_{k_\nu})}\}_{\nu=1}^\infty$  converge com  $n = 1, 2, \dots, i$ . Fazendo  $i \rightarrow \infty$  mostramos que  $\{\delta_n^{(N_{k_\nu})}\}_{\nu=1}^\infty$  converge com  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

De acordo com o Lema 5.2,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\delta_n^{(N_{k_\nu})}| \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} [1 - (x(0)/\tau)^2]^{1/2} < 1, \quad n > n_0.$$

(B) A convergência é consequência do fato que, em

$$\frac{1}{N_{k_\nu}} P_{2(n_0+m)+l}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) \quad \text{e} \quad Q_{2(n_0+m)+l}(\psi_{N_{k_\nu}}, z),$$

os coeficientes das potências de  $z$  são funções contínuas dos coeficientes de reflexão  $\delta_n^{(N_{k_\nu})}$ .

Apresentamos a demonstração somente para o denominador, pois a demonstração para o numerador é análoga. Usamos indução finita sobre  $m$  nas relações de recorrência das frações contínuas de Perron-Carathéodory, (3.2) e (3.3), para mostrar que existem polinômios em  $z$  de grau no máximo  $m$ ,

$$U_m^{(l)}(\psi_N, z) \quad \text{e} \quad V_m^{(l)}(\psi_N, z), \quad l = 0, 1,$$

tal que, para  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$Q_{2(n_0+m)+l}(\psi_N, z) = U_m^{(l)}(\psi_N, z) Q_{2n_0}(\psi_N, z) + z(1 - |\delta_{n_0}^{(N)}|^2) V_m^{(l)}(\psi_N, z) Q_{2n_0-1}(\psi_N, z). \quad (5.19)$$

Para  $Q_{2(n_0+1)}$ , temos

$$\begin{aligned}
Q_{2(n_0+1)}(\psi_N, z) &= \bar{\delta}_{n_0+1}^{(N)} z Q_{2n_0+1}(\psi_N, z) + Q_{2n_0}(\psi_N, z) \\
&= [\bar{\delta}_{n_0+1}^{(N)} \delta_{n_0}^{(N)} z + 1] Q_{2n_0}(\psi_N, z) + z(1 - |\delta_{n_0}^{(N)}|^2) [\bar{\delta}_{n_0+1}^{(N)}] Q_{2n_0-1}(\psi_N, z),
\end{aligned}$$

por onde definimos

$$U_1^{(0)}(\psi_N, z) = \bar{\delta}_{n_0+1}^{(N)} \delta_{n_0}^{(N)} z + 1 \quad \text{e} \quad V_1^{(0)}(\psi_N, z) = \bar{\delta}_{n_0+1}^{(N)} z,$$

e para  $Q_{2(n_0+1)+1}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{2(n_0+1)+1}(\psi_N, z) &= \delta_{n_0+1}^{(N)} Q_{2(n_0+1)}(\psi_N, z) + (1 - |\delta_{n_0+1}^{(N)}|^2) z Q_{2(n_0+1)-1}(\psi_N, z) \\ &= [\delta_{n_0+1}^{(N)} U_1^{(0)}(\psi_N, z) + (1 - |\delta_{n_0+1}^{(N)}|^2) z \delta_{n_0}^{(N)}] Q_{2n_0}(\psi_N, z) \\ &\quad + z(1 - |\delta_{n_0}^{(N)}|^2) [\delta_{n_0+1}^{(N)} V_1^{(0)}(\psi_N, z) + (1 - |\delta_{n_0+1}^{(N)}|^2) z] Q_{2n_0-1}(\psi_N, z), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(\psi_N, z) &= \delta_{n_0+1}^{(N)} U_1^{(0)}(\psi_N, z) + (1 - |\delta_{n_0+1}^{(N)}|^2) z \delta_{n_0}^{(N)}, \\ V_1^{(1)}(\psi_N, z) &= \delta_{n_0+1}^{(N)} V_1^{(0)}(\psi_N, z) + (1 - |\delta_{n_0+1}^{(N)}|^2) z. \end{aligned}$$

Supondo que (5.19) vale para  $m = k$ , obtemos

$$\begin{aligned} Q_{2(n_0+k+1)}(\psi_N, z) &= \bar{\delta}_{n_0+k+1}^{(N)} z Q_{2(n_0+k+1)-1}(\psi_N, z) + Q_{2(n_0+k+1)-2}(\psi_N, z) \\ &= [\bar{\delta}_{n_0+k+1}^{(N)} z U_k^{(1)}(\psi_N, z) + U_k^{(0)}(\psi_N, z)] Q_{2n_0}(\psi_N, z) \\ &\quad + z(1 - |\delta_{n_0}^{(N)}|^2) [\bar{\delta}_{n_0+k+1}^{(N)} z V_k^{(1)}(\psi_N, z) + V_k^{(0)}(\psi_N, z)] Q_{2n_0-1}(\psi_N, z), \end{aligned}$$

onde  $U_{k+1}^{(0)}(\psi_N, z)$  e  $V_{k+1}^{(0)}(\psi_N, z)$ , definidos por

$$\begin{aligned} U_{k+1}^{(0)}(\psi_N, z) &= \bar{\delta}_{n_0+k+1}^{(N)} z U_k^{(1)}(\psi_N, z) + U_k^{(0)}(\psi_N, z), \\ U_{k+1}^{(0)}(\psi_N, z) &= \bar{\delta}_{n_0+k+1}^{(N)} z V_k^{(1)}(\psi_N, z) + V_k^{(0)}(\psi_N, z), \end{aligned}$$

são polinômios em  $z$  de grau no máximo  $k + 1$ . Portanto, provamos (5.19).

Observamos que os coeficientes das potências de  $z$  em  $U_m^{(l)}(\psi_N, z)$  e em  $V_m^{(l)}(\psi_N, z)$  são funções contínuas de  $\delta_{n_0}^{(N)}, \dots, \delta_{n_0+m}^{(N)}$ . Portanto, para  $m = 1, 2, 3, \dots$ , e  $l = 0, 1$ , os limites

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} U_m^{(l)}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = U_m^{(l)}(z), \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} V_m^{(l)}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = V_m^{(l)}(z),$$

existem e são polinômios em  $z$  de grau no máximo  $m$ .

Então, aplicando o limite em (5.19) com  $\nu \rightarrow \infty$  e com  $N_{k_\nu}$  no lugar de  $N$ , usando (A) e (B) do Teorema 5.3 e  $|\delta_{n_0}| = 1$ , obtemos

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_{2(n_0+m)+l}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = U_m^{(l)}(z) Q_{2n_0}(z),$$

como queríamos demonstrar.

(C) Para esta demonstração, usamos indução finita sobre  $m$ .

Para  $m = 0$ , (C) segue do Teorema 5.3. Supomos que (C) vale para algum  $m \geq 0$  e consideramos a relação de recorrência

$$\rho_{n_0+m+1}^*(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = \rho_{n_0+m}^*(\psi_{N_{k_\nu}}, z) + z \delta_{n_0+m+1}^{(N_{k_\nu})} \rho_{n_0+m}(\psi_{N_{k_\nu}}, z). \quad (5.20)$$

Supomos que

$$\rho_{n_0+m+1}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) \rightarrow R(z) \in \mathbb{P}_{n_0+m+1} \quad \text{e} \quad \rho_{n_0+m}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) \rightarrow S(z) \in \mathbb{P}_{n_0+m}.$$

Então, de (5.20),

$$R^*(z) = S^*(z) + z \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\delta_{n_0+m+1}^{(N_{k\nu})}) S(z). \quad (5.21)$$

Por hipótese de indução, temos que  $S(z) = U_m^{(1)}(z)\rho_{n_0}(z)$ , onde  $U_m^{(1)}$  é um polinômio de grau  $m$  com todos os zeros em  $|z| < 1$ . Assim, (5.21) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} R^*(z) &= \rho_{n_0}^*(z)U_m^{(1)*}(z) + z \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\delta_{n_0+m+1}^{(N_{k\nu})}) \rho_{n_0}(z)U_m^{(1)}(z) \\ &= \rho_{n_0}^*(z)[U_m^{(1)*}(z) + z \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\delta_{n_0+m+1}^{(N_{k\nu})}) U_m^{(1)}(z)], \end{aligned}$$

onde usamos o fato que  $\rho_{n_0} \equiv \rho_{n_0}^*$ .

A prova estará completa se mostrarmos que  $T(z) = U_m^{(1)*}(z) + z \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\delta_{n_0+m+1}^{(N_{k\nu})}) U_m^{(1)}(z)$  tem todos os zeros em  $|z| > 1$ . Pelo Lema 5.2,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\delta_{n_0+m+1}^{(N_{k\nu})}| = (1 - (x(0)/\tau)^2)^{1/2} < 1.$$

Logo, pelo Teorema 3.3, segue o resultado.

(D) Segue de (C), análogo à parte (D) do Teorema 5.3. ■

**Teorema 5.5.** *Para todo  $n \geq n_0$  e  $N \geq 1$ , os zeros  $z(j, n, N)$  de  $\rho_n(\psi_N, z)$  podem ser ordenados de maneira que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z(j, n, N) = e^{iw_j}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I,$$

se  $r \neq 0$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z(0, n, N) = 1 = e^{i0}.$$

**Demonstração:** Vamos supor que existe um  $n_1 \geq n_0$ , uma seqüência  $\{N_k\}$  de números naturais, um dos pontos críticos  $e^{iw_m}$ ,  $m \in \{0, \pm 1, \dots, \pm I\}$ , e um  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo zero  $z(j, n_1, k)$  de  $\rho_{n_1}(\psi_{N_k}, z)$ ,

$$|z(j, n_1, k) - e^{iw_m}| \geq \varepsilon, \quad \text{para todo } k = 1, 2, 3, \dots$$

Então, pelo Teorema 5.4(D), temos uma contradição. ■

Neste último teorema, vemos que, para  $n > n_0$ , existem  $n_0$  zeros de  $\rho_n(\psi_N, z)$  que convergem para os pontos de frequência  $e^{iw_j}$ . Obviamente, existem mais zeros do que pontos de frequências. A seguir, apresentamos um resultado, obtido em [9], que distingue os zeros que convergem para os pontos de frequência  $e^{iw_j}$ , que chamamos de zeros interessantes, dos zeros que não convergem para os pontos de frequência, que chamamos de zeros desinteressantes.

**Teorema 5.6.** *Seja  $n \geq n_0 + 1$  dado. Então, existem constantes  $K_n$ , com  $0 < K_n < 1$ , tais que os zeros desinteressantes  $z(j, n, N)$  de  $\rho_n(\psi, z)$ , satisfazem*

$$|z(j, n, N)| \leq K_n < 1 \quad \text{para } n_0 + 1 \leq j \leq n, \quad N \in \mathbb{N}.$$

**Demonstração:** Supomos que é possível encontrar uma subsequência  $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$  de  $\{N\}$  e, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , um índice  $j(k)$  com  $n_0 + 1 \leq j(k) \leq n$ , tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z(j(k), n, N_k)| = 1, \quad (5.22)$$

onde  $z(j(k), n, N_k)$  são os zeros que não convergem para os pontos de frequência. Como  $|z(j(k), n, N_k)| < 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , e  $|z| < 1$  é um conjunto compacto, existe uma subsequência  $\{N_{k(m)}\}_{m=1}^{\infty}$  de  $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$  e um ponto  $z^*$  satisfazendo  $|z^*| = 1$ , tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z(j(k(m)), n, N_{k(m)}) = z^*.$$

Pelo Teorema 5.5, existe uma subsequência  $\{N_{k(m_\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$  de  $\{N_{k(m)}\}_{m=1}^{\infty}$  tal que, para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_{N_{k(m_\nu)}}, z) = U_{n-n_0}(z) \rho_{n_0}(z),$$

onde  $U_{n-n_0}$  é um polinômio de grau  $(n - n_0)$  com todos os zeros em  $|z| < 1$  e a convergência é uniforme em subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ . Portanto, existe uma subsequência  $\{z(j(k(m_\nu)), n, N_{k(m_\nu)})\}$  de  $\{z(j(k), n, N_k)\}$ , tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |z(j(k(m_\nu)), n, N_{k(m_\nu)})| < 1,$$

contrariando (5.22). ■

Finalizamos esta seção com a exposição de outros processos utilizados para resolver o problema de análise de frequência. Desejamos, futuramente, continuar estudando esses métodos.

Observamos no Exemplo 5.1 que no N-processo, quando  $n > n_0$ , a seqüência de polinômios de Szegő  $\{\rho_n(\psi_N, z)\}_{N=1}^{\infty}$  pode não ser convergente. Em atenção a este fato, algumas extensões do N-processo foram estudadas. Fazemos uma breve descrição de duas dessas extensões.

Em [14], Jones, Njåstad e Waadeland consideraram perturbações  $R^{|m|}$ ,  $0 < R < 1$  nos momentos  $\mu_m^{(N)}$  que resultou em uma seqüência de polinômios de Szegő convergente ( $N \rightarrow \infty$ ) quando essa perturbação se aproximava de 0. Este método passou a ser chamado de R-processo.

A seqüência de momentos no R-processo  $\{\mu_m^{(N)}(R)\}_{m=-\infty}^{\infty}$  é dada por

$$\mu_m^{(N)}(R) = \mu_m^{(N)} R^{|m|}, \quad 0 < R < 1, \quad N \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Em [14], verificou-se que esta seqüência é hermitiana positiva-definida. Portanto, o problema de momento trigonométrico para  $\{\mu_m^{(N)}(R)\}_{m=-\infty}^{\infty}$  tem solução, ou seja, existe uma medida  $\psi_N^{(R)}$  que gera esta seqüência. Além disso, existem os coeficientes de reflexão  $\delta_n^{(N)}(R)$ , os polinômios de Szegő  $\rho_n(\psi_N^{(R)}, z)$  e uma PPC-fração associada a  $\psi_N^{(R)}$ . Assim foi mostrado que

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) \right) = (z-1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}) \prod_{p=1}^{n-n_0} (z - z_{n,p}),$$

onde  $|z_{n,p}| \leq 1$ , para  $1 \leq p \leq n - n_0$  e  $r = 0$  ( $r = 1$ ) se  $\alpha_0 = 0$  ( $\alpha_0 > 0$ ). Segue que, para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\lim_{R \rightarrow 1^-} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} z_k(n, N, R) \right) = z_{n,k}, \quad |z_{n,k}| \leq 1,$$

onde  $z_k(n, N, R)$  é o  $k$ -ésimo zero de  $\rho_n(\psi_N^{(R)}, z)$ . O conjunto  $\{z_{n,k} : k = 1, 2, \dots, n\}$  contém todos os pontos de frequência  $e^{iw_j}$ . Em [24], Li mostra que os zeros desinteressantes de  $\rho_n(\psi_N^{(R)}, z)$  estão limitados num disco  $|z| \leq K < 1$ .

Tanto o N-processo, quanto o R-processo, possuem desvantagens. No N-processo, como observamos através de um exemplo, a seqüência de polinômios de Szegő pode não ser convergente. Isso não acontece no R-processo, no entanto, um parâmetro  $R$  é incorporado ao problema. Petersen, em [19], combinou as vantagens desses dois métodos tomando  $R = R(N)$  como uma função de  $N$ , tal que  $N \rightarrow \infty \Leftrightarrow R \rightarrow 1^-$ .

Com objetivo de manter a ordem em que os limites são aplicados no R-processo, foi tomado

$$R(N) = 1 - \frac{1}{N^\alpha},$$

onde  $\alpha \in (0, 1)$ , pois desta forma,  $\frac{1}{N} \rightarrow 0$  mais rápido que  $R(N) \rightarrow 1^-$ , e foi mostrado que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R(N))}, z) = \lim_{R \rightarrow 1^-} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N^{(R)}, z) \right).$$

Além disso, foi mostrado que se  $\alpha \geq 1$ , então a seqüência de polinômios de Szegő  $\rho_n(\psi_N^{(R(N))}, z)$  nem sempre é convergente.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos dois resultados que ressaltam as ligações entre as HPC-frações e os polinômios de Szegő. No primeiro, consideramos um funcional linear quase-definido  $\mathcal{L}$  e sua correspondente seqüência de polinômios de Szegő  $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$  e mostramos que existe uma HPC-fração com os denominadores  $Q_n$  dos  $n$ -ésimos convergentes satisfazendo  $Q_{2n+1} = \rho_n$  e  $Q_{2n} = \rho_n^*$ . No segundo resultado, tomamos uma HPC-fração com denominador  $Q_n$  do  $n$ -ésimo convergente e mostramos que existe um funcional linear quase-definido  $\mathcal{L}$  tal que  $\{Q_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$  é a seqüência de polinômios de Szegő com relação a  $\mathcal{L}$ . Em ambos os resultados vemos que a HPC-fração é uma PPC-fração se, e somente se,  $\mathcal{L}$  é positivo-definido. Neste caso, os zeros dos polinômios de Szegő satisfazem  $|z| < 1$ .

Obtemos um sistema de relações de recorrência para as HPC-frações e para os polinômios de Szegő que nos mostra que a seqüência  $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ , ou  $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ , é inteiramente determinada pelos coeficientes de reflexão  $\delta_n = \rho_n(0) = Q_{2n+1}(0)$ .

Vemos que, para uma seqüência  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  de números complexos, que satisfaz  $\Delta_n \neq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , onde  $\Delta_n$  são os determinantes de Toeplitz, existe uma seqüência de polinômios de Szegő  $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$  e obtemos uma outra maneira de calcular os polinômios  $\rho_n$ .

Mostramos que os polinômios de Szegő e as PPC-frações, aplicados à quadratura no círculo unitário, possibilitam resolver o problema de momento trigonométrico. Para este problema, vemos que a condição necessária e suficiente para a existência de solução é que  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  seja hermitiana positiva-definida. Mostramos que a solução do PMT é única.

Resolvido o PMT, podemos definir a seqüência de polinômios de Szegő em termos de um funcional integral  $I_{\psi}$  dado por

$$I_{\psi}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\psi(\theta),$$

onde  $f$  é um polinômio de Laurent e  $\psi$  é a única medida obtida pela solução do PMT.

Os polinômios de Szegő também foram usados para resolver o problema de análise de freqüência, que significa encontrar as freqüências  $-\pi < w_{-I} < \dots < w_I < \pi$  de um sinal trigonométrico dis-

creto  $x_N(m)$  para  $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Na técnica utilizada neste trabalho, vemos que existe zeros dos polinômios de Szegő  $\rho_n(\psi_N, z)$ , gerados pela medida  $\psi_N$  construída à partir de  $x_N(m)$ , convergindo para todos os pontos de frequências  $e^{iw_j}$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Para isto, necessitamos tomar polinômios de grau  $n \geq n_0$ , onde  $n_0$  indica a quantidade de pontos de frequência. Quando  $n = n_0$ , vemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{n_0}(\psi_N, z) = (z - 1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}), \quad \forall z,$$

onde  $r = 0$  se a amplitude  $\alpha_0$  de  $x_N(m)$  é nula e  $r = 1$  se  $\alpha_0 = 1$ . Assim, todos os zeros desses polinômios convergem para os pontos de frequência. No entanto, quando o grau de  $\rho_n(\psi_N, z)$  é maior que  $n_0$ , temos

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = U_{n-n_0}(z) (z - 1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}), \quad \forall z,$$

onde  $\{N_{k_\nu}\}_{\nu=0}^\infty$  é uma subsequência da seqüência dos números naturais e  $U_{n-n_0}$  é um polinômio de grau  $n - n_0$  com todos os zeros em  $|z| < 1$ .  $U_{n-n_0}$  depende da subsequência  $\{N_{k_\nu}\}_{\nu=0}^\infty$ , ou seja, para  $n > n_0$ , fixo, os polinômios de Szegő  $\rho_n(\psi_N, z)$ , com  $N \rightarrow \infty$ , podem não ser convergentes. Porém, existe exatamente  $n_0$  zeros de  $\rho_n(\psi_N, z)$  convergindo para os pontos de frequência  $e^{iw_j}$ . Os  $n - n_0$  zeros restantes satisfazem  $|z| \neq K < 1$ .

No final do estudo sobre análise de frequência, apresentamos outras duas técnicas, que pretendemos continuar estudando, que geram polinômios de Szegő convergentes para todo  $n$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] N.I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem*, Hafner Publ. Co., New York, 1965.
- [2] N.I. Akhiezer, M. Krein, Über Fourierschen Reihen beschränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem, *Comm. Soc. Math. Kharkov*, 9 (1934), 3-28; 10 (1934), 3-32.
- [3] J.L. Boldrini e outros, *Álgebra Linear*, 3 ed., Editora Harbra, São Paulo, 1980.
- [4] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications Series*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [5] D.G. Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, 4 ed., Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [6] G. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Pregamon Press, New York, 1971.
- [7] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. 1, Wiley-Interscience, 1988.
- [8] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. 2, Wiley-Interscience, 1988.
- [9] W.B. Jones, V. Petersen, Continued fractions and Szegő polynomials in frequency analysis and related topics, *Acta Applicandae Mathematicae*, 61 (2000) 149-174.
- [10] W.B. Jones, O. Njåstad, E.B. Saff, Szegő polynomials associated with Wiener-Levinson filters, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 32 (1990) 387-407.
- [11] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, Orthogonal Laurent polynomials and strong Hamburger moment problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 98 (1984) 528-554.
- [12] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21 (1989) 113-152.

- 
- [13] W.B. Jones, W.J. Thron, O. Njåstad, H. Waadeland, Szegő polynomials applied to frequency analysis, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 46 (1993) 217-228.
- [14] W.B. Jones, O. Njåstad, H. Waadeland, An alternative way of using Szegő polynomials in frequency analysis, In S.C. Cooper and W.J. Thron (eds), *Continued Fractions and Orthogonal Funtions*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1994, pp. 141-152.
- [15] W.B. Jones, W.J. Thron, Survey of continued fractions methods of solving moment problems and related topics, *Lecture notes in mathematics*, 932 (1982) 04-37.
- [16] W.B. Jones, W.J. Thron, H. Waadeland, A strong Stieltjes moment problem, *Transctions of the American Mathematical Society*, 261 (2) (1980) 503-528.
- [17] T.H. Kjeldsen, The early history of the moment problem, *Historia Mathematica*, 20 (1993) 19-44.
- [18] K. Pan, E.B. Saff, Asymptotics for zeros of Szegő polynomials associated with trigonometric polynomial sinal, *Journal of Approximation Theory*, 7 (1992) 239-251.
- [19] V. Petersen, A combination of two methods in frequency analysis: The R(N)-process, In: W.B. Jones and Sri Ranga (eds), *Orthogonal Funtions, Moment Theory and Continued Fractions: Theory and Applications*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 199, Marcel Dekker, New York, 1992 pp. 387-398.
- [20] J.A. Shohat, J.D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, Mathematical Surveys n.1, Amer. Math. Soc., New York, 1950.
- [21] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Providence, 1975.
- [22] G. Szegő, *Collected Papers*, R Askey (ed.), vol 1, Birkhäuser, Basel, 1982.
- [23] W. Van Assche, Orthogonal polynomials in the complex plane and the real line, in Field Institute Communications 14, *Special Functions, q-series and related topics* (M.E.H. Ismail et al., eds) pp. 211-245, American Mathematical Society, 1997.
- [24] X. Li, Asymptotycs of columns in the table of orthogonal polynomials whith vaying measure, *Methods and Applications of Analysis*, 2 (2) (1995), 222-236.