

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

STELAMARYS CAOBIANCO MODENUTTE

**ANALISANDO A POSSIBILIDADE DE UM ANEL
EM TORNO DE UM SATÉLITE E SUA
ESTABILIDADE**

Guaratinguetá
2013

STELAMARYS CAOBIANCO MODENUTTE

ANALISANDO A POSSIBILIDADE DE UM ANEL EM TORNO DE UM SATÉLITE E SUA ESTABILIDADE

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Silvia Maria Giuliatti Winter

Guaratinguetá
2013

M689a	Modenutte, Stelamarys Caobianco Analisando a possibilidade de um anel ao redor de um satélite / Stelamarys Caobianco Modenutte – Guaratinguetá, 2014. 54 f. : il. Bibliografia: f. 43 Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014. Orientadora: Profª Drª Silvia Maria Giuliatti Winter 1. Satélites 2. Órbitas I. Título CDU 629.783
-------	---

**ANALISANDO A POSSIBILIDADE DE UM ANEL AO REDOR DE UM
SATÉLITE E SUA ESTABILIDADE****STELAMARYS CAOBIANCO MODENUTTE**

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA”

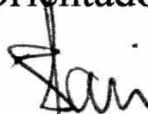
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.



Prof^a. Dr^a. ANA PAULA MARINS CHIARADIA
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:

Prof^a. Dr^a. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER
Orientadora/UNESP-FEG



Prof. Dr. RAFAEL SFAIR
UNESP-FEG



Pós Dr. ROSANA ARAÚJO
UNESP-FEG

Dados Curriculares

STELAMARYS CAOBIANCO MODENUTTE

NASCIMENTO 10.12.1977 - SÃO PAULO / SP

FILIAÇÃO Geraldo Modenutte
 Marina Caobianco Modenutte

FORMAÇÃO

2006 - 2013 Curso de Graduação
 Licenciatura em Matemática - Faculdade de Engenharia
 campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista

Dedico esse trabalho a minha mãe, amiga e inspiração de luta, Marina.

Agradecimentos

Agradeço pelos ensinamentos, dos mais básicos aos mais complexos, pelas oportunidades de participação, discussão e dúvida.

Agradeço à minha orientadora Dr^a Silvia Maria Giuliatti Winter por tanta serenidade e leveza em assuntos tão complexos.

À Rosana de Araújo e Rafael Sfair e Rita de Cássia, pela prontidão nos auxílios e pelo carinho com o trabalho.

Aos amigos, Thamiris de Santana e Rafael Cunha de Carvalho, por serem mais que irmãos.

À família, mãe, irmãos, sobrinhos, por nunca abandonar.

À pequena Sophia, que me fez parar inúmeras vezes o trabalho e os estudos, que apresentou uma quantidade considerável de reclamações sobre minha ausência, mesmo quando eu estava presente e que foi minha luz nas noites escuras e frias.

Ao Professor, pai e marido dedicado João Guilherme Giudice pelos ensinamentos, mesmo aqueles que eu não aceitei. Você tem minha admiração como Professor e como Matemático.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro que tornou possível a realização desse trabalho.

“O importante não é o que o mundo fez de você, mas o que você faz com o que o mundo fez de você. (Sartre)

MODENUTTE, S.C. **Analisando a possibilidade de um anel em torno de um satélite e sua estabilidade.** 2013. 54f. Trabalho de Graduação (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

Resumo

Em 26 de Novembro de 2005, Rhea, mais uma lua de Saturno, é encontrada pela sonda Cassini a aproximadamente 5×10^5 km de Saturno. Observações “in loco” realizadas pela sonda revelaram que os elétrons energéticos estariam esgotados nas imediações da lua. No entanto, Rhea é considerada massiva o suficiente para manter uma fina atmosfera. A suposição na época, foi a de que a atmosfera de Rhea não era composta exclusivamente de gás, que conteria material sólido, partículas da magnetosfera. Segundo Jones et al. (2008), essas partículas estariam numa determinada posição, de forma que no momento da observação impossibilitou a observação dos elétrons. Em oposição a essa ideia, há um grupo de pesquisa (Tiscareno et al. 2010, Cornell University Library) que realizou intensa busca por qualquer material que pudesse estar orbitando Rhea, utilizando imagens da Cassini, não obtendo qualquer evidência. Segundo recomendação feita por pesquisadores norte-americanos e de outros países, e aceita pelo Conselho Nacional de Pesquisa (National Research Council), a Cassini Equinox Mission continuará em órbita ao redor de Saturno até 2016, o que possibilitará mais observações sobre Rhea e seus possíveis anéis. A sonda executará várias manobras com alta inclinação até mergulhar no sistema principal de anéis, para então entrar na atmosfera de Saturno e colidir com o planeta. A presente pesquisa é de grande importância pois até hoje não foram encontrados anéis orbitando satélites. O objetivo deste trabalho é analisar a evolução orbital de um conjunto de partículas ao redor de Rhea sob a perturbação de Saturno, J_2 e J_4 e verificar pelas simulações numéricas e resultados a possibilidade de um anel estável orbitando Rhea.

Palavras-chave: Estabilidade, anel, Rhea.

MODENUTTE, S.C. **Analyzing the possibility of a ring around a satellite and its stability.** 2013. 54f. Trabalho de Graduação (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

Abstract

On November 26 th, 2005, Rhea, one of Saturn's moons, is found by Cassini spacecraft approximately at 5.10^5 km from Saturn. Observations in situ reveal that electrons are depleted in the moon's vicinity. However, Rhea is considered massive enough to retain a thin atmosphere. Assumption was that the atmosphere of Rhea was not composed exclusively of gas, its likely contains solid material that can absorb magnetospheric particles. According to Jones et al. (2008), these particles were in a specific position so that at the moment of observation the electrons could not be detected. In opposition to this idea there is a group, Tiscareno et al. 2010, Cornell University Library, that underwent intensive search for any material that might be orbiting Rhea using Cassini images, however the could not identify any. Second recommendation made by American researchers and other countries, and accepted by the National Board of Research the Cassini Equinox Mission will continue in orbit around Saturn until 2016. The probe will perform several maneuvers with high inclination to delve into the main ring system, and then enter in Saturn's atmosphere and collide with planet. This research is of great importance because until today no rings were found orbiting satellites. The goal of this work is to analyze the orbital evolution of a set of particles around Rhea disturbance of Saturn, J_2 e J_4 and check results by the numerical simulations and the possibility of a stable ring orbiting Rhea.

Keywords: Stability, ring, Rhea.

Lista de Figuras

2.1	Galileu Galilei foi o primeiro astrônomo a contemplar Saturno e seu sistema de anéis com um telescópio, em 1610. (Cassini Solstice Mission)	18
2.2	Simulação gráfica do anel de detritos que poderiam estar orbitando Rhea. O disco sugerido de material sólido está exagerado na sua densidade para maior clareza. Fonte: (Cassini Solstice Mission).	19
2.3	Superfície antiga: A superfície gelada de Rhea é coberta por crateras, sugerindo que ela data do período imediatamente após a formação dos planetas, as maiores crateras tem vários quilômetros de profundidade. Fonte: (Cassini Solstice Mission)	20
2.4	À primeira vista a foto lembra a aparência da Lua, embora a superfície de Rhea seja de gelo, brilhante. Grande parte de Rhea é coberta por crateras. Há evidências de modificação da superfície, embora, menos que o esperado para um satélite tão grande. Acredita-se que Rhea resfriou cedo em sua história e se tornou gelida. Desde então seu gelo comporta-se como rocha dura. Fonte: (Cassini Solstice Mission).	20
2.5	Imagem de Dione, tirada no final de julho a uma distância de aproximadamente 263000 km. Fonte: (Cassini Solstice Mission)	22
3.1	Na figura está representado um sistema de eixos coordenados XYZ e centro O. A partícula p de massa m tem coordenadas (X,Y,Z), em relação ao centro O. O corpo C de massa M, tem coordenadas centrais (X ₀ ,Y ₀ ,Z ₀). O elemento Q, do corpo C tem massa dM e coordenadas Q (ξ,η,ζ) relativas ao centro de massa E, E (X ₀ ,Y ₀ ,Z ₀) . . .	24
3.2	O sistema ξ,η,ζ foi transladado para o sistema (X,Y,Z) de forma que as novas coordenadas de E(X ₀ ,Y ₀ ,Z ₀) e p(X,Y,Z) são E(0,0,0) e p(x,y,z), respectivamente.	25
3.3	O vetor PQ representa a distância entre a partícula e o elemento de massa Q	25
3.4	Nesta figura Δ é a distância entre a partícula P e o centro de massa M do corpo C. . .	28
4.1	Gráfico da variação da excentricidade de p _d excluindo J ₂ e J ₄ . Nesta simulação, p _d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é e = 0. Aumento na excentricidade para 2.10 ⁻⁴	38
4.2	Gráfico da variação da excentricidade de p _d incluindo J ₂ e J ₄ . Nesta simulação, p _d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é e = 10 ⁻³ . Aumento de uma ordem na grandeza.	38
4.3	Gráfico da variação da excentricidade de p _D excluindo J ₂ e J ₄ . Nesta simulação, p _D está inicialmente localizada à aproximadamente 4097 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é e = 0. Aumento na excentricidade para 4.10 ⁻³ . . .	39
4.4	Gráfico da variação da excentricidade de p _D incluindo J ₂ e J ₄ . Nesta simulação, p _D esta inicialmente localizada a aproximadamente 4097 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é e = 10 ⁻³ . Houve um aumento na excentricidade de 3 vezes o valor inicial, não há mudança na ordem.	39

4.5	Gráfico da variação da excentricidade de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. Há aumento na excentricidade até 0 a 4×10^{-3}	40
4.6	Gráfico da variação da excentricidade de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. A excentricidade aumentou 4 vezes o valor inicial.	40
4.7	Gráfico da variação da excentricidade de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 1076 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. Aumento considerável na excentricidade de 0 a $4,5 \times 10^{-1}$	41
4.8	Gráfico da variação da excentricidade de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 1076 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. A excentricidade aumentou 4,5 vezes o valor inicial da excentricidade.	41
4.9	Gráfico da variação da excentricidade de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada a 20 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. A excentricidade aumenta até 6×10^{-2}	42
4.10	Gráfico da variação da excentricidade de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 20 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. Aumento na excentricidade de 1×10^{-3} para aproximadamente 7×10^{-2}	42
4.11	Gráfico da variação da excentricidade de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 80 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. Aumento na excentricidade para 10^{-1}	43
4.12	Gráfico da variação da excentricidade de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 80 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. Aumento na excentricidade de 1×10^{-3} para 1×10^{-1}	43
4.13	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$	44
4.14	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$	45
4.15	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 4097 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$	45
4.16	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 4097 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$	46
4.17	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$	47
4.18	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$	47

4.19	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 1076 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$	48
4.20	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 1076 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$	48
4.21	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à aproximadamente 20 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$	49
4.22	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à aproximadamente 20 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$	49
4.23	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 80 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$	50
4.24	Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 80 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$	50

Lista de Tabelas

2.1	Propriedades físicas de Saturno (Murray & Dermott, 1999). Massa (M), Raio (R), Período rotacional sideral (T_{rot}), Densidade (ρ), Obliquidade (ϵ), Gravitacionais harmônicos (J_2 e J_4)	17
2.2	Propriedades físicas de Titan, Rhea, Dione e Helene. Semi-eixo maior (a), período rotacional sideral (T), excentricidade (e), massa (m) e raio médio (r). (Murray & Dermott, 1999).	19
3.1	Tempo em dia e em anos, adimensionado, para os três sistema analisados no trabalho. .	33
3.2	Parâmetros do corpo secundário (Rhea), em relação ao corpo central (Saturno), que entram no arquivo <i>nome.sis</i>	33
3.3	Parâmetros da partícula, em relação ao corpo que orbitará (Rhea), que entram no arquivo <i>nome.sis</i>	33
3.4	Propriedades Físicas dos três sistemas utilizados nas simulações. Semi-eixo maior (a) do satélite em relação ao planeta, massa (M) e raio médio (R). Nesta tabela é possível observar que o Sistema 1 é o sistema em que o planeta e o satélite possuem maior massa e raio, enquanto que o Sistema 3 é o sistema que planeta e satélite apresentam menor massa e raio. (Murray & Dermott, 1999).	34
4.1	A tabela apresenta as mínimas e máximas distâncias de partículas ao redor dos satélites	37
4.2	A tabela apresenta mudanças nas excentricidades das partículas mais próximas e mais distantes dos satélites, devido a inclusão dos harmônicos.	44

Sumário

1	Introdução	15
2	Saturno	17
2.1	Satélites	19
2.1.1	Rhea	19
2.1.2	Dione	21
3	Metodologia	23
3.1	Atração Gravitacional entre Dois Corpos de Dimensões Finitas	23
3.1.1	Corpo e partícula	23
3.2	Polinômios de Legendre	28
3.3	Integrador Numérico	32
3.3.1	Dados Gerais	32
3.4	Simulações	32
3.4.1	Cálculo do Período orbital das Partículas	33
3.4.2	Procedimentos	34
4	Discussões e Resultados	36
4.1	Influência dos gravitacionais harmônicos na estabilidade da partícula	36
5	Conclusão	51
	Bibliografia	51
	Apêndices	53

Capítulo 1

Introdução

Rhea, satélite de Saturno, foi visualizada pela sonda Cassini, pela primeira vez em 2005. Observações “in loco” identificaram esgotamento de elétrons energéticos estendendo-se até aproximadamente 8 raios de Rhea, e distribuição esférica de poeira gerada por impactos de poeira interplanetária. Escalas de esgotamento indicam que algum material estaria absorvendo estes elétrons dentro do campo gravitacional de Rhea (Jones et. al., 2008). O grupo de pesquisa do qual Jones faz parte, no paper “The dust halo of Saturn’s largest icy moon, Rhea” (Science), afirmam que Rhea é massiva o suficiente para reter uma atmosfera gerada por efeitos externos (impactos com outros corpos gerando poeira, grãos que estariam confinados próximos a sua superfície) capaz de afetar a magnetosfera de Saturno.

Medidas realizadas pela sonda Voyager I, em 1980, já acusavam esgotamento na região. Em 2007, há mais registro de esgotamento pela sonda Cassini. O perfil do esgotamento observado nos gráficos mostra que o material candidato tem uma distribuição quase simétrica em torno de Rhea. Inicialmente os candidatos eram gás ionizado, gás neutro e poeira. No entanto, não foram encontradas evidências, pelos instrumentos, de grandes quantidades de gás ionizado e, simulações realizadas mostraram que as quantidades de gás neutro e poeira deveriam ser maiores que a quantidade captada pelos instrumentos. Assim o próximo possível candidato seriam obstáculos de aproximadamente 1 m de comprimento com baixa profundidade óptica, característica que dificultaria sua observação (Jones et. al., 2008).

Buscando alguma estrutura possível para a formação do anel, Tiscareno et. al. (2010) publica em “Cassini imaging search rules out rings around Rhea” (Geophysical Research Letters) que tanto formação de anel estreito como nuvem ampla são descartados segundo as observações realizadas por imagens enviadas pela Cassini. No paper são apresentados gráficos de comparação de raio de partículas por número de partículas, para o caso de anel estreito e nuvem ampla. Os gráficos mostram que, para anel estreito seriam necessárias partículas com raios de aproximadamente 10 a 10^4 cm para coeficiente de extinção (área transversal das partículas por unidade de comprimento, expresso por $\pi r^2 n$, onde (r) é o raio das partículas e (n) a densidade numérica de partículas) maior ou igual a $10^{-7} \pi r^2 n$ e para nuvem ampla seriam necessárias partículas com raios de aproximadamente 10^{-1} a 10^4 cm para coeficiente de extinção maior ou igual a $10^{-9} \pi r^2 n$. No entanto não há registro de estruturas com tais raios ou que cubram uma determinada área para respeitar o coeficiente de extinção.

O limite de detecção possível para os aparelhos utilizados é de c. e. de 10^{-13} para partículas de 10^{-4} a 10^{-2} cm de raio e c. e. de 10^{-12} para partículas de 10^{-2} a 10^4 cm de raio, no caso de anel estreito. Ou seja, qualquer material abaixo do limite de coeficiente de extinção não seria visualizado pelos equipamentos, no entanto, se existirem tais estruturas, não seriam suficientes para explicar o decaimento de elétrons. O mesmo acontece para nuvem ampla, em que o limite de detecção é maior ou igual a $10^{-3} \pi r^2 n$ para partículas de raio 10^{-4} a 10^{-2} cm e $10^{-12} \pi r^2 n$ para partículas de raio de 10^{-2} a 10^4 .

Até o momento não se sabe da existência de anéis orbitando satélites e a confirmação de anéis em torno de Rhea traria uma possibilidade a mais nos estudos em terra e nas observações realizadas por sondas, a busca por mais satélites portadores de anéis.

Capítulo 2

Saturno

Saturno é o sexto planeta do sistema solar, está a 9,54 UA ¹ do Sol e com raio de 60.330 km é o segundo maior dos planetas(Murray & Dermott 1999). Possui massa de 94,983 massas da Terra ² e sua principal característica é o complexo sistema de anéis que o circula. O planeta é formado basicamente por hidrogênio e hélio, dispostos em camadas, além de pequenas quantidades de metano. Na camada externa este elementos são gasosos, em seu interior onde temperatura e pressão crescem com a profundidade, portam-se como um fluído e no centro possui um núcleo de rocha e gelo (Cassini Solstice Mission).

Galileu Galilei foi o primeiro astrônomo a contemplar Saturno e seu sistema de anéis com um telescópio, em 1610 (figura 2). Para Galileu os anéis representavam duas luas. Em 1659, Christian Huygens, físico, matemático e astrônomo, com um telescópio aperfeiçoado, verificou que as duas luas que Galileu havia encontrado era um sistema de anéis. Até os dias de hoje só se sabe da existência de anéis em planetas.

Para este trabalho somente quatro satélites de Saturno (Titan, Rhea, Dione e Helene) foram analisados para a montagem dos dados no simulador numérico (Everhart, E., 1985). Rhea é o satélite no qual foi sugerido um anel, Dione e Helene são os satélites internos mais próximos de Rhea em relação a distância de semi-eixo maior de Saturno e Titan é o satélite externo mais próximo. Neste capítulo serão apresentados os corpos utilizados para a montagem do sistema, assim como suas propriedades físicas e características relevantes (tabela 2.1).

¹UA - Uma unidade de comprimento de distância, definida pela *International Astronomical Union* (IAU), equivalente a $1,495978707 \times 10^{11}$ m.

²Massas da Terra - Unidade de massa equivalente a um número de massas da Terra. Uma massa da Terra equivale a $5,9736 \times 10^{24}$ kg.

	M	R	T_{rot}	ρ	ϵ	J_2	J_4
<i>Saturno</i>	($10^{24}kg$)	(km)	(h)	(gcm^{-3})	($^{\circ}$)	(10^{-6})	(10^{-6})
	568,46	60330	10,65622	0,6873	26,73	16298	-915

Tabela 2.1: Propriedades físicas de Saturno (Murray & Dermott, 1999). Massa (M), Raio (R), Período rotacional sideral (T_{rot}), Densidade (ρ), Obliquidade (ϵ), Gravitacionais harmônicos(J_2 e J_4)

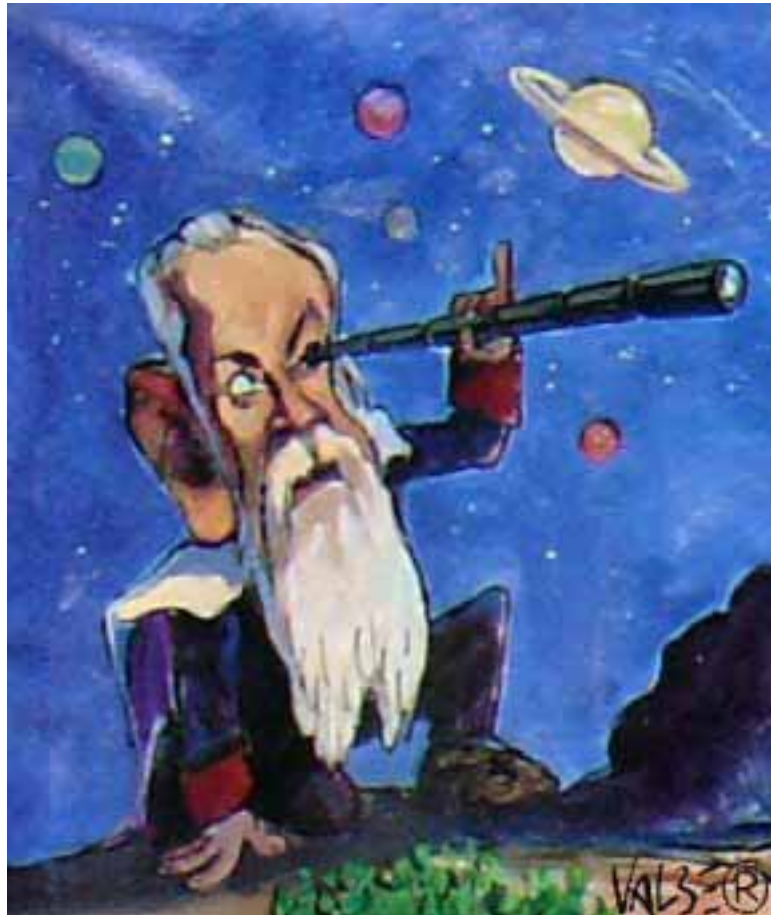


Figura 2.1: Galileu Galilei foi o primeiro astrônomo a contemplar Saturno e seu sistema de anéis com um telescópio, em 1610. (Cassini Solstice Mission)

<i>Satélites</i>	<i>a</i> (<i>km</i>)	<i>T</i> (<i>d</i>)	<i>e</i>	<i>m</i> ($10^{20}kg$)	<i>r</i> (<i>km</i>)
<i>Titan</i>	1221.850	15,945	0,029	1345,1	2575
<i>Rhea</i>	527.040	4,518	0,001	23,1	764
<i>Dione</i>	377.400	2,736	0,002	10,52	560
<i>Helene</i>	377.400	2,736	0,005	0,008	16

Tabela 2.2: Propriedades físicas de Titan, Rhea, Dione e Helene. Semi-eixo maior (*a*), período rotacional sideral (*T*), excentricidade (*e*), massa (*m*) e raio médio (*r*). (Murray & Dermott, 1999).

2.1 Satélites

Até o momento 62 satélites foram descobertos em órbita ao redor de Saturno, e 53 deles já foram nomeados oficialmente (Cassini Solstice Mission). Somente os 4 satélites localizados próximo a Rhea foram considerados para o estudo. Rhea, que é o satélite onde analisamos a possibilidade de existência de um anel, está localizada a 527.040 km de Saturno, Dione e Helene são satélites internos a Rhea, ou seja, estão localizados entre Saturno e Rhea, e Titan é satélite externo a Rhea (tabela 2.2).

Helene que está localizada a 377.400 km de Saturno possui uma característica incomum, circunda Saturno perto da órbita de Dione, também localizada a 377.400 km de Saturno (Murray & Dermott 1999). Dizemos que Helene esta situada no Ponto de Lagrange de Dione, isto é, um lugar de estabilidade de Dione. Titan, o satélite externo a Rhea, esta localizada a 1221.850 km de Saturno (Murray & Dermott 1999).

2.1.1 Rhea



Figura 2.2: Simulação gráfica do anel de detritos que poderiam estar orbitando Rhea. O disco sugerido de material sólido está exagerado na sua densidade para maior clareza. Fonte: (Cassini Solstice Mission).

Rhea é a segunda maior lua de Saturno, com raio de 764 km e só fica atrás de Titan, com 2575 km (Murray & Dermott 1999). Foi descoberta por Giovanni Cassini, matemático e astrônomo, em 1672. É composta principalmente de gelo, água e rocha, e apresenta uma superfície bombardeada de tal forma que crateras antigas são desconfiguradas por novos bombardeios. Além das inúmeras crateras, Rhea apresenta também linhas lineares em forma de valas com centenas de metros de profundidade e uma mancha branca em sua superfície que, segundo alguns astrônomos, é resultado de grande impacto

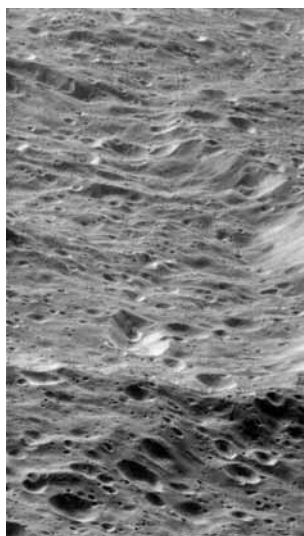


Figura 2.3: Superfície antiga: A superfície gelada de Rhea é coberta por crateras, sugerindo que ela data do período imediatamente após a formação dos planetas, as maiores crateras tem vários quilômetros de profundidade. Fonte: (Cassini Solstice Mission)

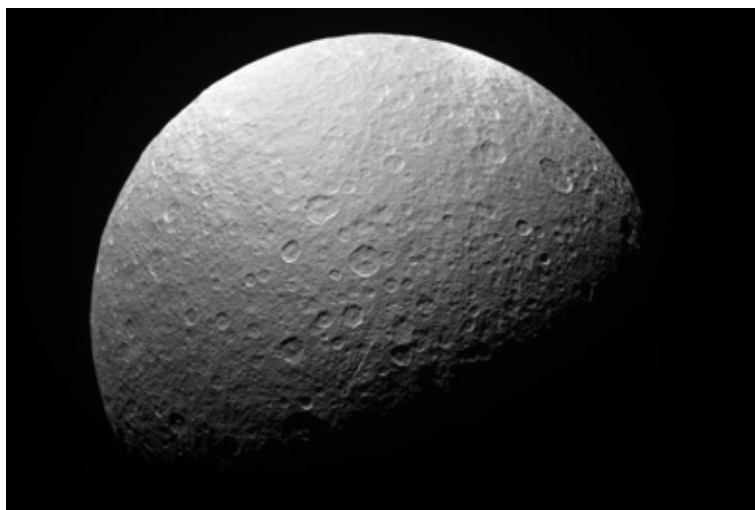


Figura 2.4: À primeira vista a foto lembra a aparência da Lua, embora a superfície de Rhea seja de gelo, brilhante. Grande parte de Rhea é coberta por crateras. Há evidências de modificação da superfície, embora, menos que o esperado para um satélite tão grande. Acredita-se que Rhea resfriou cedo em sua história e se tornou gélida. Desde então seu gelo comporta-se como rocha dura. Fonte: (Cassini Solstice Mission).

que ejetou material de cor clara para a parte escura. Rhea, assim como outras luas de Saturno, esta em ressonância como o planeta, isto é, esta sempre com o mesmo lado voltado para Saturno (Cassini Solstice Mission). Segundo Jones et al.(2008), em *The Dust Halo of Saturn's Largest Icy Moon, Rhea*, Rhea é massiva o suficiente para reter uma fina camada de atmosfera gerada externamente, capaz de afetar a magnetosfera de Saturno ³. No entanto, observações “in loco” revelaram ausência de elétrons energéticos na vizinhança de Rhea. Esta ausência de uma exosfera ⁴ substancial significa que a magnetosfera de Rhea contém, além de gases, material sólido que pode absorver partículas da magnetosfera. Combinando observação de vários instrumentos sugeriu-se que este material estaria na forma de grãos da ordem de decímetros e estariam orbitando Rhea como um disco equatorial de “debris” e dentro deste disco poderia haver anéis discretos.

Em 26 de Novembro de 2006 quando a sonda Cassini encontrou Rhea, detectou “in loco” uma distribuição aproximadamente esférica de pequenos grãos por sua superfície por impactos de poeira interplanetária.

Em agosto de 2007, num sobrevôo mais distante realizado pela sonda, um quadro de esgotamento de elétrons foi observado (Jones 2008). Evidências sobre o que estaria espalhando os elétrons não foram encontradas pela sonda, e os candidatos até o momento são gás neutro e grãos de poeira (partículas). Partículas carregadas chamam muito a atenção pois já foram utilizadas para inferir a presença do anel G de Saturno (van Allen, 1983), arco de anel coorbital a Methone (Roussos et al., 2008) e o anel de Júpiter (Fillius et al., 1975; Burns et al., 2004).

Até hoje não há dados sobre algum satélite possuir anel e é por isso que esta interpretação das características de Rhea têm despertado tanto interesse. Segundo Tiscareno et. al. (2010) em *Cassini Imaging Search Rules Out Rings Around Rhea* ainda não há evidências sobre o fato.

Desde a constatação de Jones et. al.(2008), o grupo de pesquisa liderado por Tiscareno et. al.(2010) realiza intensivas buscas, através de detectores de partículas, medições de elétrons no interior da sonda, cálculos, simulação de um anel sintético para comparação com as imagens obtidas pela sonda e grande parte dos resultados são contraditórios. No entanto existe a possibilidade de existir algum objeto que esteja abaixo do limiar de detecção dos equipamentos da sonda e concluem que a ideia de nuvem ou anéis estreitos em torno de Rhea não é consistente com as observações disponíveis, mas a detecção de partículas altamente carregadas é real e anuncia um novo mecanismo de formação ainda desconhecido. Sendo assim fica em aberto a explicação de existência de matéria sólida em torno da lua.

2.1.2 Dione

Dione está entre os maiores satélites de Saturno, foi descoberta por Giovanni Cassini em 1684. Dione é formada basicamente por gelo e água, mas sua alta densidade indica que

³Magnetosfera - Parte do espaço que rodeia um astro onde é significativo o campo magnético gerado pelo corpo celeste, gerado pelo núcleo metálico. A extensão da magnetosfera depende das propriedades internas do corpo (composição, tamanho e velocidade de rotação do núcleo)

⁴Exosfera - Camada atmosférica que se estende acima de 1.000 km e onde as moléculas escapam à Lei da gravidade e se elevam para o espaço interplanetário.



Figura 2.5: Imagem de Dione, tirada no final de julho a uma distância de aproximadamente 263000 km. Fonte: (Cassini Solstice Mission)

possui muita pedra em seu núcleo. A órbita de Dione abriga uma lua menor, Helene, situada num ponto de estabilidade. Helene precede Dione cerca de $1/6$ na órbita.

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo apresento o estudo realizado e os métodos utilizados para a realização do trabalho.

3.1 Atração Gravitacional entre Dois Corpos de Dimensões Finitas

Na seção 3.3 apresentamos o integrador numérico utilizado na realização das integrações. Em alguns dos programas que compõe o mesmo, são utilizadas equações do movimento, equação do potencial gravitacional, entre outras. Este capítulo destaca um estudo sobre atração gravitacional entre dois corpos de massas finitas e o desenvolvimento de cálculos para obter a forma da atração gravitacional entre uma partícula (ponto material) e um corpo de dimensão finita e está baseado no livro *Methods of Celestial Mechanics* de Brouwer and Clemence (1961).

3.1.1 Corpo e partícula

Suponhamos um corpo C de massa arbitrária M e dimensão finita e p uma partícula de massa m (ponto material) num sistema fixo de coordenadas cartesianas XYZ (figura 3.1). As coordenadas da partícula, $p(X,Y,Z)$ estão em relação ao centro do sistema cartesiano (O) e as coordenadas de qualquer ponto do corpo C estão em relação ao centro de massa (E) do corpo.

Seja Q elemento de massa do corpo C com coordenadas $Q(\xi, \eta, \zeta)$ relativas ao centro E e massa dM . Como a Lei da Atração Gravitacional é válida para pontos de massa, utilizaremos Q , que é representante de todo elemento de massa do corpo, para o cálculo. As coordenadas de P estão em relação a O e as coordenadas de Q em relação a E , então transladamos os eixos cartesianos de forma que O e E coincidam (figura 3.2).

Para estudar a atração gravitacional entre corpo e partícula, estudamos inicialmente a atração gravitacional entre um elemento de massa Q e partícula. Para isso, é necessário que as coordenadas de p e Q estejam relacionadas com o mesmo centro, e como visto na figura (3.1) as coordenadas de p estão descritas com relação ao centro O e as coordenadas de Q com relação ao centro E . Desse fato, transladamos o eixo ξ, η, ζ , sobre o eixo XYZ de forma que as novas coordenadas de E (X_0, Y_0, Z_0) e p (X, Y, Z) sejam E (0,0,0) e p (x, y, z), respectivamente (figura 3.2) onde

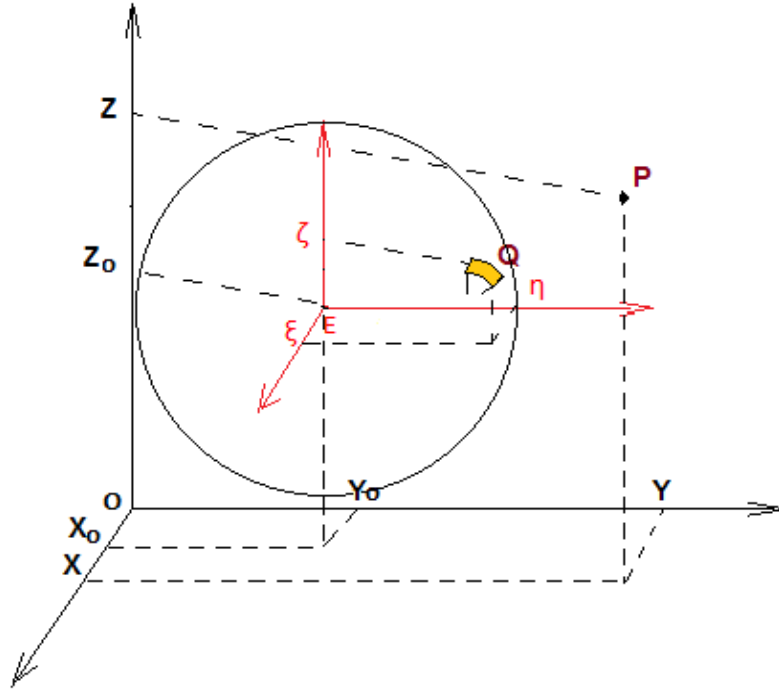


Figura 3.1: Na figura está representado um sistema de eixos coordenados XYZ e centro O. A partícula p de massa m tem coordenadas (X,Y,Z), em relação ao centro O. O corpo C de massa M, tem coordenadas centrais (X₀,Y₀,Z₀). O elemento Q, do corpo C tem massa dM e coordenadas Q (ξ,η,ζ) relativas ao centro de massa E, E (X₀,Y₀,Z₀)

$$\begin{aligned} x &= X - X_0 \\ y &= Y - Y_0 \\ z &= Z - Z_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Assim a distância entre p e Q (Fig. 3.3) é representada pela equação:

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad (3.2)$$

O módulo da força atuando sobre a partícula P de massa m, devido a atração gravitacional do elemento de massa dM é

$$F = \frac{fmdM}{\Delta^2} \quad (3.3)$$

onde f é uma constante.

Seja $\vec{PQ} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$ o vetor direção da força $\vec{F}$, os cossenos diretores $(\frac{\xi - x}{\Delta}, \frac{\eta - y}{\Delta}, \frac{\zeta - z}{\Delta})$ são as coordenadas de $\vec{PQ}$ sobre seu módulo (equação 3.2).

As componentes da força $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ são obtidas multiplicando o módulo da força (F)

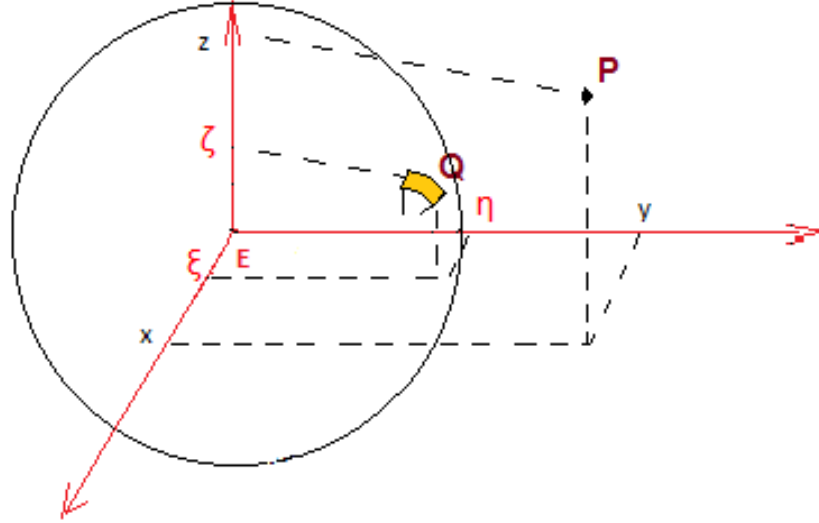


Figura 3.2: O sistema ξ, η, ζ foi translado para o sistema (X, Y, Z) de forma que as novas coordenadas de $E(X_0, Y_0, Z_0)$ e $p(X, Y, Z)$ são $E(0, 0, 0)$ e $p(x, y, z)$, respectivamente.

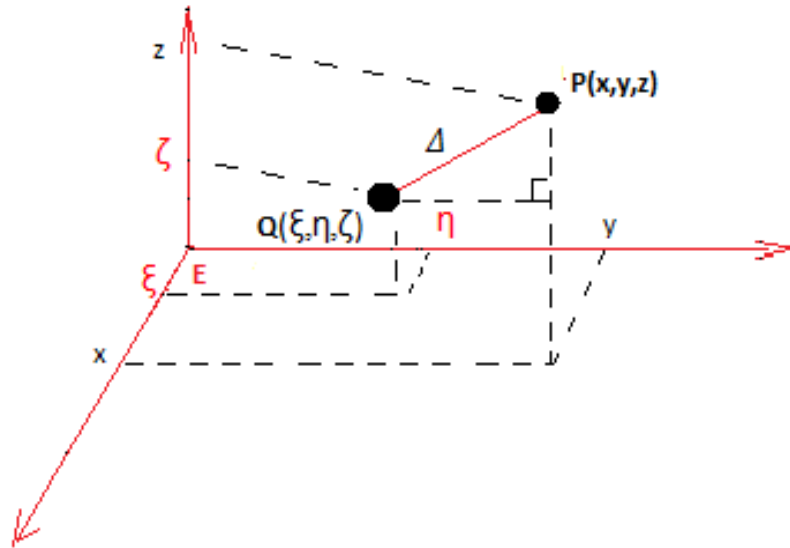


Figura 3.3: O vetor PQ representa a distância entre a partícula e o elemento de massa Q

(equação 3.3) pelo cosseno diretor correspondente.

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{fmdM(\xi - x)}{\Delta^3} \\ F_y &= \frac{fmdM(\eta - y)}{\Delta^3} \\ F_z &= \frac{fmdM(\zeta - z)}{\Delta^3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

As componentes da força são escritas para um elemento de C . A integração das três componentes da força resulta na integração de todo o corpo, ou seja, com a integração

das componentes da força cada elemento será considerado.

Consideremos a densidade, k , uma função finita de coordenadas ξ, η, ζ , então:

$$dM = k(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.5)$$

E substituindo dM nas equações (3.4) temos:

$$\begin{aligned} F_x &= fm \iiint \frac{(\xi - x)}{\Delta^3} k(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\ F_y &= fm \iiint \frac{(\eta - y)}{\Delta^3} k(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\ F_z &= fm \iiint \frac{(\zeta - z)}{\Delta^3} k(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (3.6)$$

Da forma como as equações são escritas é necessário calcular três integrais triplas. No entanto usaremos o diferencial da equação (3.2).

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \\ 2\Delta d\Delta &= 2(x - \xi)dx + 2(y - \eta)dy + 2(z - \zeta)dz \\ \frac{d\Delta}{\Delta^2} &= \frac{(x - \xi)}{\Delta^3} dx + \frac{(y - \eta)}{\Delta^3} dy + \frac{(z - \zeta)}{\Delta^3} dz \\ -\frac{d\Delta}{\Delta^2} &= \frac{(\xi - x)}{\Delta^3} dx + \frac{(\eta - y)}{\Delta^3} dy + \frac{(\zeta - z)}{\Delta^3} dz \end{aligned} \quad (3.7)$$

Temos que

$$d\frac{1}{\Delta} = -\frac{d\Delta}{\Delta^2}$$

e

$$d\frac{1}{\Delta} = -d(\Delta^{-1})$$

como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

então

$$d(\Delta^{-1}) = \frac{\partial(\Delta^{-1})}{\partial x} dx + \frac{\partial(\Delta^{-1})}{\partial y} dy + \frac{\partial(\Delta^{-1})}{\partial z} dz \quad (3.8)$$

Assim, comparando as equações temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta^{-1})}{\partial x} dx &= \frac{(\xi - x)}{\Delta^3} dx \\ \frac{\partial(\Delta^{-1})}{\partial y} dy &= \frac{(\eta - y)}{\Delta^3} dy \\ \frac{\partial(\Delta^{-1})}{\partial z} dz &= \frac{(\zeta - z)}{\Delta^3} dz \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo as equações (3.9) nas equações (3.6) e reescrevendo as equações de modo a calcular somente uma das três integrais triplas:

$$\begin{aligned} F_x &= fm \frac{\partial}{\partial x} \iiint \frac{k(\xi, \eta, \zeta)}{\Delta} d\xi d\eta d\zeta \\ F_y &= fm \frac{\partial}{\partial y} \iiint \frac{k(\xi, \eta, \zeta)}{\Delta} d\xi d\eta d\zeta \\ F_z &= fm \frac{\partial}{\partial z} \iiint \frac{k(\xi, \eta, \zeta)}{\Delta} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo $kdV = dM$ nas equações (3.10) e desenvolvendo, chegamos a

$$\begin{aligned} F_x &= fm \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{dM}{\Delta} = m \frac{\partial}{\partial x} \left(f \int \frac{dM}{\Delta} \right) \\ F_y &= fm \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{dM}{\Delta} = m \frac{\partial}{\partial y} \left(f \int \frac{dM}{\Delta} \right) \\ F_z &= fm \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{dM}{\Delta} = m \frac{\partial}{\partial z} \left(f \int \frac{dM}{\Delta} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dessa forma definimos potencial (U) por

$$U = f \int \frac{dM}{\Delta} \quad (3.12)$$

Assim, as componentes da força atuando em m são:

$$\begin{aligned} F_x &= m \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= m \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= m \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.13)$$

De forma similar, as forças atuando nos diferentes elementos de C (corpo de massa M) podem ser transferidos para o centro de massa de C e a força resultante será igual e oposta às forças atuando em p (corpo de massa m).

$$\begin{aligned} F_x^{(0)} &= -m \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y^{(0)} &= -m \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z^{(0)} &= -m \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Retornando ao sistema de coordenadas cartesianas, então U pode ser considerado uma função de diferenças (X-X_o, Y-Y_o, Z-Z_o), e as componentes da força sobre m tornam-se

$$\begin{aligned} F_x &= m \frac{\partial U}{\partial X} \\ F_y &= m \frac{\partial U}{\partial Y} \\ F_z &= m \frac{\partial U}{\partial Z} \end{aligned} \quad (3.15)$$

As componentes da força que determinam o movimento do centro de massa do corpo C, de massa M são:

$$\begin{aligned} F_x^{(0)} &= -m \frac{\partial u}{\partial X_0} \\ F_y^{(0)} &= -m \frac{\partial u}{\partial Y_0} \\ F_z^{(0)} &= -m \frac{\partial u}{\partial Z_0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assim, o problema de encontrar a atração mútua gravitacional entre o corpo C (corpo de massa arbitrária e dimensões finitas) e a partícula p (ponto material) é reduzido a obter o Potencial Gravitacional (U), definido por (3.12) como uma função de x, y, z.

$$U = f \int \frac{dM}{\Delta}$$

3.2 Polinômios de Legendre

Agora é preciso determinar uma forma de expressar U em função de x, y e z quando a distância (Δ) entre a partícula P e o centro de massa M seja grande quando comparado à dimensão de C. Isso será feito por meio do estudo dos Polinômios de Legendre.

Tínhamos inicialmente Δ definido como a distância entre a partícula P e um elemento de massa (Q) do corpo C. Como a atuação de todos os elementos de massa de um corpo C sobre um corpo externo é igual a atuação de toda a massa concentrada no centro de massa sobre este corpo externo, usaremos Δ como a distância entre P (partícula) e M (centro de massa do corpo C).

Seja

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad (3.17)$$

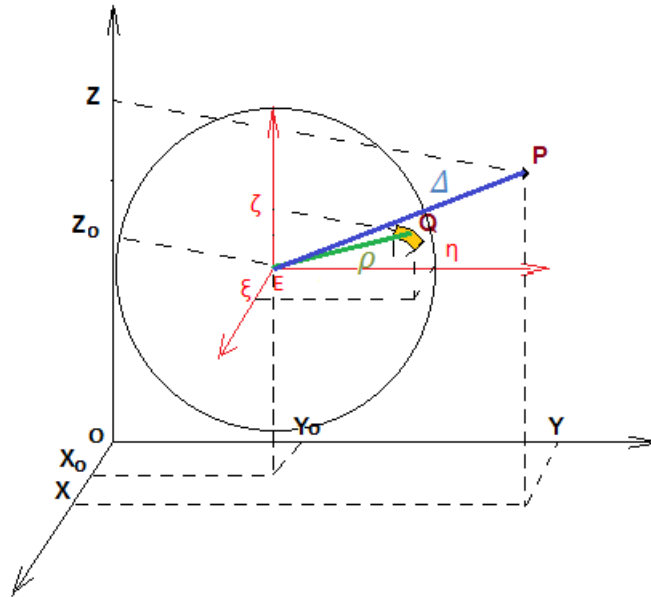


Figura 3.4: Nesta figura Δ é a distância entre a partícula P e o centro de massa M do corpo C.

ρ é a distância de um elemento de massa dM ao centro de massa do corpo M.

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (3.18)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.19)$$

Daí, reescrevemos a equação (3.17) e utilizando a equação (3.19),

$$\Delta^2 = r^2 \left[1 - 2 \left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\rho} \right) \frac{\rho}{r} + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

Seja

$$\frac{\rho}{r} = \alpha \quad (3.21)$$

e

$$\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\rho} = q \quad (3.22)$$

Reescrevendo 3.20 temos

$$\Delta^2 = r^2(1 - 2q\alpha + \alpha^2) \quad (3.23)$$

Substituindo a equação (3.23) na equação (3.12) temos o Potência Gravitacional escrito em função de α .

$$U = f \int \frac{dM}{r(1 - 2q\alpha + \alpha^2)^{1/2}} \quad (3.24)$$

A equação $\frac{1}{(1 - 2q\alpha + \alpha^2)^{1/2}}$, pode ser reescrita, com o auxílio dos Polinômios de Legendre $P_n(q)$, como

$$\frac{1}{(1 - 2q\alpha + \alpha^2)^{1/2}} = P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + P_3\alpha^3 + \dots + P_n\alpha^n \quad (3.25)$$

onde P_n são polinômios em q de grau n .

A expressão geral de $P_n(q)$ é obtida desenvolvendo o segundo membro da equação (3.25) e igualando os coeficientes de α^n .

$$\frac{1}{(1 - 2q\alpha + \alpha^2)^{1/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} (2q\alpha - \alpha^2)^k \quad (3.26)$$

Igualando as equações (3.25) e (3.26) e utilizando a notação para coeficientes binomiais

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \dots + P_n\alpha^n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} (2q\alpha - \alpha^2)^k \quad (3.27)$$

obtemos a expressão geral para $P_n(q)$ encontrando os coeficientes de α^n no desenvolvimento do lado direito da equação acima. Assim temos

$$k = 0 \implies (-1)^0 \binom{-1/2}{0} (2q\alpha - \alpha^2)^0 = 1\alpha^0$$

$$k = 1 \implies (-1)^1 \binom{-1/2}{1} (2q\alpha - \alpha^2)^1 = -1 \left(\frac{-1}{2} \right) (2q\alpha - \alpha^2) = q\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$k = 2 \implies (-1)^2 \binom{-1/2}{2} (2q\alpha - \alpha^2)^2 = \frac{3}{2}q^2\alpha^2 - q\alpha^3 + \frac{1}{4}\alpha^4$$

Logo

$$P_0(q) = 1$$

$$P_1(q) = q$$

$$P_2(q) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}q$$

Reescrevendo a integral (3.24) utilizando as equações (3.25) e (3.21) temos

$$U = \frac{f}{r} \int \left[1 + P_1(q) \frac{\rho}{r} + P_2(q) \frac{\rho^2}{r^2} + \dots \right] dM \quad (3.28)$$

Por definição

$$U = f \frac{M}{r} = \frac{f}{r} \int dM \quad (3.29)$$

Então

$$U_0 = \frac{f}{r} \int 1 dM$$

$$U_1 = P_1(q) \frac{\rho}{r}$$

$$U_2 = P_2(q) \frac{\rho^2}{r^2}$$

são funções que utilizam Polinômio de Legendre e a equação (3.29) pode ser escrita da forma

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots \quad (3.30)$$

Cada termo de U será reescrito utilizando a equação (3.22). Assim

$$U_0 = \frac{f}{r} \int dM = f \frac{M}{r}$$

$$U_1 = \frac{f}{r^2} \int \left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r} \right) dM = \frac{f}{r^2} \int \left(\frac{x}{r} \int \xi dM + \frac{y}{r} \int \eta dM + \frac{z}{r} \int \zeta dM \right)$$

Estas três integrais são zero se forem medidas no sistema de coordenadas em que o centro de massa de M for a origem. Assim

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = \frac{f}{r} \int \frac{3}{2} \left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{r^2} dM$$

$$U_2 = \frac{f}{r^3} \left(\frac{3x^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \left[\int \xi^2 dM + \left(\frac{3y^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \int \eta^2 dM + \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \int \zeta^2 dM + \right. \\ \left. + \frac{3yz}{r^2} \int \eta\zeta dM + \frac{3zx}{r^2} \int \zeta\xi dM + \frac{3xy}{r^2} \int \xi\eta dM \right] \quad (3.31)$$

As seis integrais que aparecem na expressão (3.31) são momentos de segunda ordem relativos aos momentos de inércia do corpo C. Afim de chegarmos a uma forma mais conveniente chamamos de I o Momento de Inércia sobre o eixo que passa pelo centro de massa na direção do eixo de rotação e α , β e γ os cossenos diretores dos eixos. Então, se θ é o ângulo entre esses eixos e a linha que liga o elemento dM de coordenadas (ξ, η, ζ) , temos:

$$I = \int \rho^2 \sin^2 \theta dM$$

onde $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. A integral acima também pode ser desenvolvida utilizando $\rho \cos \theta = \xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma$

$$I = \int [\rho^2 - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2] dM$$

que por sua vez, pode ser reescrita

$$\begin{aligned} I &= \int [(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2] dM \\ &= \int [(\eta^2 + \zeta^2)\alpha^2 + (\xi^2\zeta^2)\beta^2 + (\xi^2 + \eta^2)\gamma^2] dM \end{aligned}$$

Chamaremos de Momentos de Inércia A, B e C sobre os eixos X, Y e Z, respectivamente, e os Produtos de Inércia por D, E e F, onde

$$\begin{aligned} A &= \int (\eta^2 + \zeta^2) dM \\ B &= \int (\xi^2 + \zeta^2) dM \\ C &= \int (\xi^2 + \eta^2) dM \\ D &= \int \eta\zeta dM \\ E &= \int \zeta\xi dM \\ F &= \int \eta\xi dM \end{aligned}$$

O momento de inércia pode ser escrito por

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \quad (3.32)$$

Consideremos uma superfície quadrática tendo a origem no seu centro

$$I = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = 1 \quad (3.33)$$

A equação (3.33) representa o elipsoide de inércia do corpo M. Comparando as equações (3.32) e (3.33) obtemos

$$\begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{\sqrt{I}}; \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}}; \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}} \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= \frac{1}{I} \end{aligned}$$

Por uma escolha adequada dos eixos, um elipsoide pode ser escrito da forma

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1 \quad (3.34)$$

Com essa escolha de eixos, temos que D=E=F=0. Isso faz com que as últimas integrais da equação (3.34) para U_2 desapareçam. As três integrais remanescentes podem ser expressas em termos de A, B e C. A partir da definição de A, B e C segue que

$$\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dM = \frac{A + B + C}{2}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int (\xi^2) dM &= \frac{C + B - A}{2} \\ \int (\eta^2) dM &= \frac{A - B + C}{2} \\ \int (\zeta^2) dM &= \frac{A + B - C}{2} \end{aligned}$$

Isto após resolução simples

$$U_2 = \frac{f}{r} \left[\frac{1}{2}(A + B + C) - \frac{3}{2} \left(\frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{r^2} \right) \right] \quad (3.35)$$

Como α , β e γ são os cossenos diretores da linha que une os pontos x, y e z com a origem, então

$$\frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{r^2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

Tendo em vista a equação (3.32), os eixos principais como eixos das coordenadas e o momento de inércia do corpo sobre a linha de união do centro de massa e os pontos x, y, z. Isto é denotado por I, então a equação (3.35) pode ser escrita da forma

$$U_2 = \frac{f}{r^3} = \frac{A + B + C}{2} \quad (3.36)$$

Após modificar alguns termos da equação e analisar U_0 , U_1 , U_2 e U_3 chegamos que a fórmula geral para o potencial é

$$U = -\frac{fM}{r} \left[1 - \sum J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \right]$$

onde r é a distância do ponto ao centro de massa, R é o raio equatorial do corpo principal, m é a massa do corpo principal e ϕ é o ângulo entre o equador do corpo e o raio. Os valores de J_n são constantes diferindo para cada corpo.

3.3 Integrador Numérico

3.3.1 Dados Gerais

O integrador numérico Radau (Everhart, 1985) é uma implementação do proposto por Everhart, feita por Vieira, E. N.¹, com modificações de Sfair, R.² e Araújo, R.³. O mesmo oferece muita facilidade com respeito à montagem dos arquivos, execução do programa, leitura dos arquivos de saída e aviso de erros.

O integrador utiliza posição e velocidade para a realização dos cálculos. Ele lê os elementos orbitais, a , e , I , Ω , ω , f e transforma para posição e velocidade x , y , z , $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ para realizar os cálculos. A saída, com o resultado da integração é um arquivo binário. A partir deste arquivo é possível obter tanto posição e velocidade quanto elementos orbitais do corpo. A descrição sobre os arquivos do programa se encontram em ANEXO A.

3.4 Simulações

No decorrer do trabalho muitas simulações foram realizadas com diferentes propósitos, e para três diferentes sistemas. Além do sistema Saturno-Rhea-partícula, que chamaremos de “Sistema 2” outros dois sistemas, Júpiter-Calisto-partícula (Sistema 1) e Urano-Miranda-partícula (Sistema 3), foram analisados. A sequência Sistema (1), Sistema (2) e Sistema

¹VIEIRA, E. N., Prof. Dr. da Faculdade de engenharia de Guaratinguetá - Feg/Unesp.

²SFAIR, R., Prof. Dr. da Faculdade de engenharia de Guaratinguetá - Feg/Unesp.

³ARAÚJO, R., Pós-Dr. da Faculdade de engenharia de Guaratinguetá - Feg/Unesp.

<i>Sistema</i>	<i>unitempdias</i>	<i>unitempanos</i>
<i>Jupiter – Calisto – part.</i>	$3.763530e - 01$	$1.373688e + 02$
<i>Saturno – Rhea – part.</i>	$1.390680e + 00$	$5.075982e + 02$
<i>Urano – Miranda – part.</i>	$4.447027e + 00$	$1.623163e + 03$

Tabela 3.1: Tempo em dia e em anos, adimensionado, para os três sistema analisados no trabalho.

<i>Rhea</i>	<i>M</i>	<i>R</i>		<i>a</i>	<i>e</i>	<i>I</i>	Ω	ω	<i>f</i>
	$(10^{20}kg)$	(km)	<i>Orb.</i>	(km)		$(^\circ)$	$(^\circ)$	$(^\circ)$	$(^\circ)$
	23,1	764	<i>Saturno</i>	527040	10^{-3}	0,35	0	0	0

Tabela 3.2: Parâmetros do corpo secundário (Rhea), em relação ao corpo central (Saturno), que entram no arquivo *nome.sis*.

(3) foi escolhida pelo fato de o Sistema (1) ser o sistema, entre os três, com maior planeta (Júpiter) e satélite (Calisto) e o Sistema (3) com menor planeta (Urano) e satélite (Miranda), tabela (3.4).

O princípio do trabalho foi analisar a possibilidade de formação de um anel em torno de Rhea, satélite de Saturno, que segundo Jones et. al. (2008) seria a causa da impossibilidade de detecção de elétrons próximos da superfície de Rhea.

Com o propósito de verificar características similares na estabilidade de partículas ao redor de outros satélites, utilizamos os Sistemas (1) e (2) nas simulações.

Entre os propósitos estão: determinar a menor e a maior distância entre a partícula e a superfície do satélite, de forma que a partícula se mantenha estável, ou seja, sem colidir com o planeta ou satélite e sem escapar do sistema por 100 períodos orbitais.; verificar o quanto os gravitacionais harmônicos J_2 e J_4 influenciam a estabilidade da partícula; verificar as variações de distância da partícula à superfície do satélite e variações da excentricidade da partícula. Algumas partículas foram escolhidas para a realização das simulações.

3.4.1 Cálculo do Período orbital das Partículas

Na seção 3.4 foi dito que algumas partículas seriam escolhidas e observadas completando a órbita em torno do satélite por 100 períodos orbitais (período escolhido). Como em cada sistema, a partícula tem um determinado período orbital, definido pela distância da partícula ao corpo, foi necessário encontrar os períodos orbitais das partículas escolhidas para a simulação. As equações para os cálculos serão apresentadas abaixo e os resultados para cada sistema na sequência, onde $\mathbf{P}$ é a fórmula para calcular o período orbital da

<i>P1</i>	<i>M</i>	<i>R</i>		<i>a(inicial)</i>	<i>e</i>	<i>I</i>	Ω	ω	<i>f</i>
	(kg)	(km)	<i>Orbita</i>	(km)		$(^\circ)$	$(^\circ)$	$(^\circ)$	$(^\circ)$
	0,00	0,00	<i>Rhea</i>	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 3.3: Parâmetros da partícula, em relação ao corpo que orbitará (Rhea), que entram no arquivo *nome.sis*.

<i>Sistema1</i>	<i>R</i> (km)	<i>M</i> (kg)	<i>a</i> (km)
<i>Júpiter</i>	71.398	1898,6.10 ²⁴	
<i>Calisto</i>	2.403	1076.10 ²⁰	1883000
<i>Partículas</i>	0	0	
<i>Sistema2</i>			
<i>Saturno</i>	60330	568,46.10 ²⁴	
<i>Rhea</i>	764	23,1.10 ²⁰	527040
<i>Partículas</i>	0	0	
<i>Sistema3</i>			
<i>Urano</i>	26200	86,832.10 ²⁴	
<i>Miranda</i>	235	0,659.10 ²⁰	129800
<i>Partículas</i>	0	0	

Tabela 3.4: Propriedades Físicas dos três sistemas utilizados nas simulações. Semi-eixo maior (a) do satélite em relação ao planeta, massa (M) e raio médio (R). Nesta tabela é possível observar que o Sistema 1 é o sistema em que o planeta e o satélite possuem maior massa e raio, enquanto que o Sistema 3 é o sistema que planeta e satélite apresentam menor massa e raio. (Murray & Dermott, 1999).

partícula, $\mathbf{d}$ é a distância entre a partícula e a superfície do satélite, $\mathbf{n}$ é o movimento médio da partícula, $\mathbf{M}_{sat}$ é a massa do satélite, $\mathbf{m}_{part}$ a massa da partícula (desconsiderada no cálculo) e $\mathbf{G}$ a constante gravitacional ($G=6,672.10^{11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$).

$$P = \frac{2\pi}{n} \quad (3.37)$$

$$n^2.a^3 = \mu \quad (3.38)$$

$$\mu = G(M_{sat} + m_{part}) \quad (3.39)$$

1. Júpiter-Calisto-partícula
2. Saturno-Rhea-partícula
3. Urano-Miranda-partícula

Com a intenção de integrá-los por 100 períodos orbitais e verificar a estabilidade das partículas, inicialmente com J_2 e J_4 nulos e posteriormente incluindo valores de J_2 e J_4 .

3.4.2 Procedimentos

As primeiras simulações foram realizadas com apenas uma partícula, inicialmente localizada a 100 km de distância da superfície do satélite, num plano de duas dimensões, com excentricidade nula e valor de harmônicos nulo com a intenção de aprender a utilizar o integrador, gerar gráficos, observar variações de parâmetros como posição, excentricidade e energia. Na sequência, novos valores para distância da partícula ao satélite foram

sugeridos até encontrar uma distância mínima (d), e máxima (D) para que a partícula orbitasse o satélite pelo período determinado de 100 períodos orbitais. A distância máxima se manteve dentro do limite de escape de cada sistema. Lembrando que foi escolhido como limite de escape a distância entre o satélite dos sistemas (1,2 ou 3) e os satélites mais próximos destes. Para os Sistema (1), Sistema (2) e Sistema (3), o valor de escape é de aproximadamente 807900 km, 148000 km e 43796 km respectivamente que é a distância entre os dois satélites descontando aproximadamente 10 km de cada superfície. O satélite próximo a Calisto é Ganimede, próximo a Rhea é Dione e próximo a Miranda é Puck. A partir dos resultados observados nas primeiras simulações foi sugerido valores iniciais para excentricidade de 10^{-3} .

Duas rotinas foram escritas, uma com a intenção de gerar o arquivo de entrada com uma grande quantidade de partículas e outra que realizasse a leitura do arquivo de saída e organizasse as informações numa determinada disposição. A rotina responsável por gerar o arquivo de entrada foi construída com comandos para variar o valor da distância da partícula ao satélite, a excentricidade e a anomalia verdadeira, e o resultado é um arquivo de entrada com uma grande quantidade de partículas com diversas distâncias, excentricidades e anomalias. Cerca de 18 partículas foram escolhidas aleatoriamente para compor um novo arquivo de entrada.

Novas simulações foram realizadas com o arquivo de entrada constando de 18 partículas escolhidas ao acaso. Para cada sistema são feitas duas simulações, uma com excentricidade nula e harmônicos nulos e outra com valor de excentricidade de 10^{-3} e valores de J_2 e J_4 de cada sistema.

Os resultados são descritos no capítulo a baixo.

Capítulo 4

Discussões e Resultados

4.1 Influência dos gravitacionais harmônicos na estabilidade da partícula

Para cada sistema são feitas duas simulações, uma com excentricidade nula e harmônicos nulos e outra com valor de excentricidade de 10^{-3} e valores de J_2 e J_4 de cada sistema. Com 18 partículas escolhidas aleatoriamente.

Ao realizar as simulações como citado acima sem os gravitacionais harmônicos e com sua inclusão foi possível identificar inicialmente nos arquivos de saída **colisão** e **escape** os seguintes resultados:

- Sistema (1): As partículas que escaparam na integração com excentricidade nula, J_2 e J_4 nulos foram as mesmas partículas que escaparam na integração que utilizava excentricidade inicial $e=10^{-3}$ e valores de J_2 e J_4 correspondentes ao sistema. As partículas que escaparam estavam a mais de 4097 km da superfície de Calisto. Não houve colisão.
- Sistema (2): As partículas que escaparam na integração com excentricidade nula, J_2 e J_4 nulos foram as mesmas partículas que escaparam na integração que utilizava excentricidade inicial $e=10^{-3}$ e valores de J_2 e J_4 correspondentes ao sistema. As partículas que escaparam estavam a mais de 2500 km da superfície de Rhea. Não houve colisão.
- Sistema (3): Na integração com excentricidade nula, J_2 e J_4 nulos 6 partículas colidiram. As mesmas partículas colidiram na integração que utilizava excentricidade inicial $e=10^{-3}$ e valores de J_2 e J_4 , com exceção de uma que encontrava-se a 90 km da superfície de Miranda. Partículas com distância menores que 20 km e maiores que 80 km foram as que colidiram com Miranda, com exceção da partícula a 90 km da sua superfície na situação de inclusão dos gravitacionais harmônicos. Não houve escape. Nesta simulação foi possível observar que a inclusão dos gravitacionais harmônicos gerou estabilidade para uma partícula 10 km mais distante.

Com este resultado inicial é possível afirmar que a inclusão dos gravitacionais harmônicos geram influência na estabilidade das partículas e também definir qual a menor e maior distância, da partícula à superfície do satélite (tabela 4.1), será analisada.

<i>Sistema1</i>	h_{min} (km)	$h_{máx}$ (km)
<i>Calisto</i>	6	4097
<i>Sistema2</i>		
<i>Rhea</i>	6	1706
<i>Sistema3</i>		
<i>Miranda</i>	20	80

Tabela 4.1: A tabela apresenta as mínimas e máximas distâncias de partículas ao redor dos satélites

As figuras (4.2) e (4.1) são os resultados mais expressivos da influência causada por gravitacionais harmônicos ao sistema. O Sistema (1) (Júpiter-Calisto-partícula) foi integrado duas vezes: na primeira não foram incluídos valores para J_2 e J_4 e na segunda é feita a inclusão. Na figura (4.1), J_2 , J_4 e excentricidade estavam inicialmente nulos, após a simulação a excentricidade aumentou para 2×10^{-4} . Na figura (4.2) os valores de J_2 , J_4 em relação a Júpiter são incluídos e a condição inicial da excentricidade é $e=10^{-3}$. Nesta simulação é possível observar que a excentricidade aumentou uma ordem na grandeza.

Nas figuras (4.3) e (4.4) as simulações foram realizadas para a partícula p_D (partícula distante) do Sistema (1) (Júpiter-Calisto-partícula), com a diferença de inclusão do valor dos gravitacionais harmônicos em (4.4). É possível verificar que os gráficos apresentam diferença com respeito a variação de excentricidade, enquanto que em (4.3), a excentricidade aumenta para 4×10^{-3} em (4.4) há um aumento de 3 vezes o valor inicial da excentricidade (10^{-3}). No entanto, analisando os gráfico de variação de semi-eixo maior do Sistema 1 para a partícula p_d (partícula próxima), figuras (4.13) e (4.14) e, partícula p_D , figuras (4.15) e (4.16) não é possível encontrar diferenças significativas.

No Sistema (2), a partícula p_d esta localizada a 6 km a superfície de Rhea. É possível observar um aumento de 4×10^{-3} na excentricidade com harmônicos nulos, figura (4.5) e aumento de 4 vezes o valor inicial da excentricidade com a inclusão dos harmônicos, figura (4.6). Para a partícula p_D à 1076 km da superfície de Rhea a variação da excentricidade foi bem alta. Na simulação sem os harmônicos o aumento da excentricidade é de $4,5 \times 10^{-1}$, figura (4.7), enquanto que com a inclusão dos harmônicos o aumento da excentricidade foi de duas ordens de grandeza, figura (4.8).

No Sistema (3) (Urano-Miranda-partícula), assim como no Sistema (2) não é possível observar diferenças gráficas com a inclusão dos harmônicos. Para a partícula próxima de Miranda, à 20 km da superfície do satélite, o aumento da excentricidade foi de 6×10^{-2} sem inclusão dos harmônicos. Figura (4.9), e teve um aumento de uma unidade na ordem de grandeza com a inclusão dos harmônicos, figura (4.10). As simulações para a partícula 5, a 80 km da superfície de Miranda, apresentam grande variação na excentricidade, aumento de 10^{-1} , sem inclusão dos harmônicos, figura (4.11) e aumento de duas ordens de grandeza com a inclusão dos harmônicos, figura (4.12).

As variações em semi-eixo maior são sutis no Sistema (1), figuras (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16). Para o Sistema (2), figuras (4.17), (4.18), (4.19) e (4.20). E para o Sistema (3)

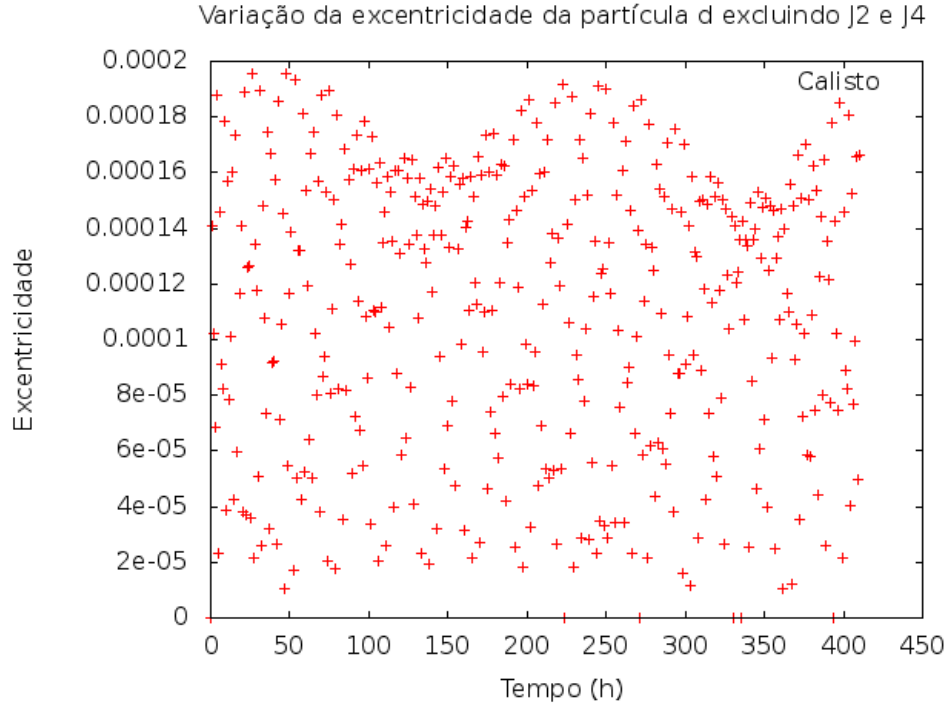


Figura 4.1: Gráfico da variação da excentricidade de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. Aumento na excentricidade para $2 \cdot 10^{-4}$.

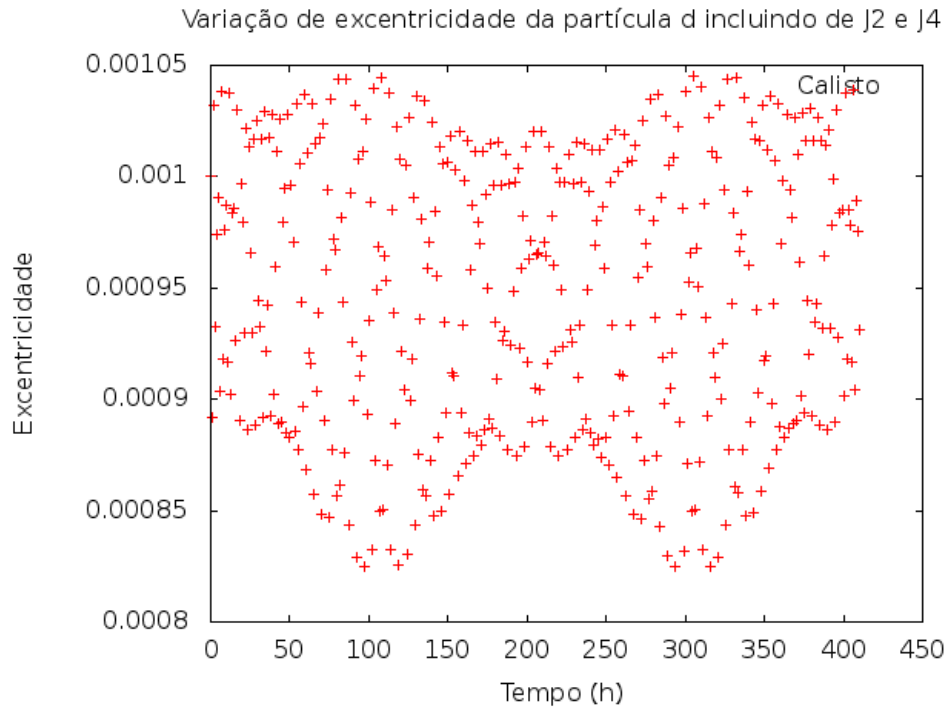


Figura 4.2: Gráfico da variação da excentricidade de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. Aumento de uma ordem na grandeza.

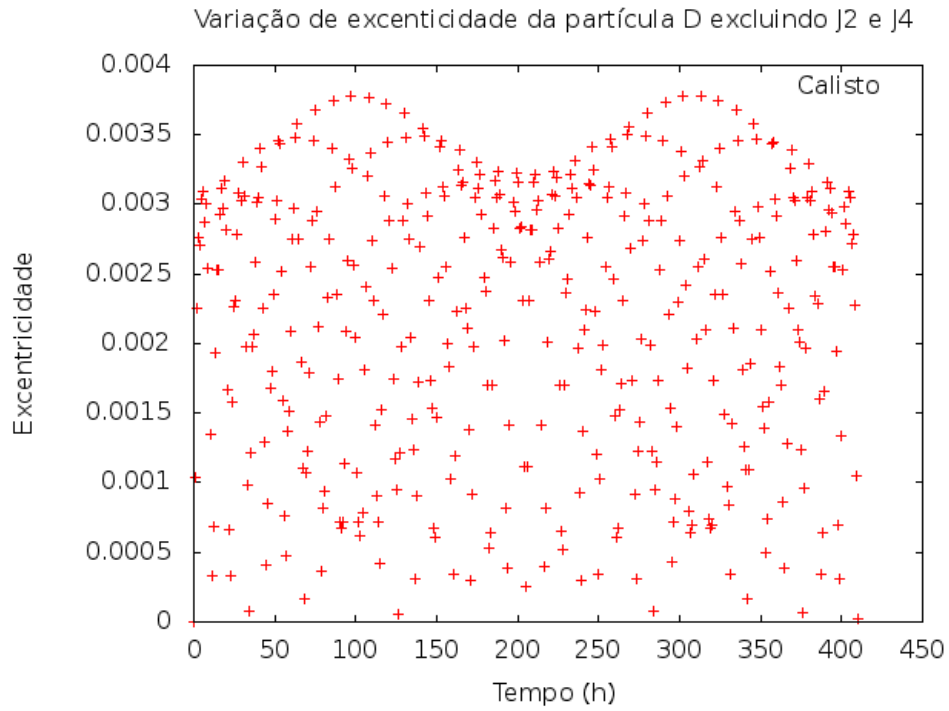


Figura 4.3: Gráfico da variação da excentricidade de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 4097 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. Aumento na excentricidade para $4 \cdot 10^{-3}$.

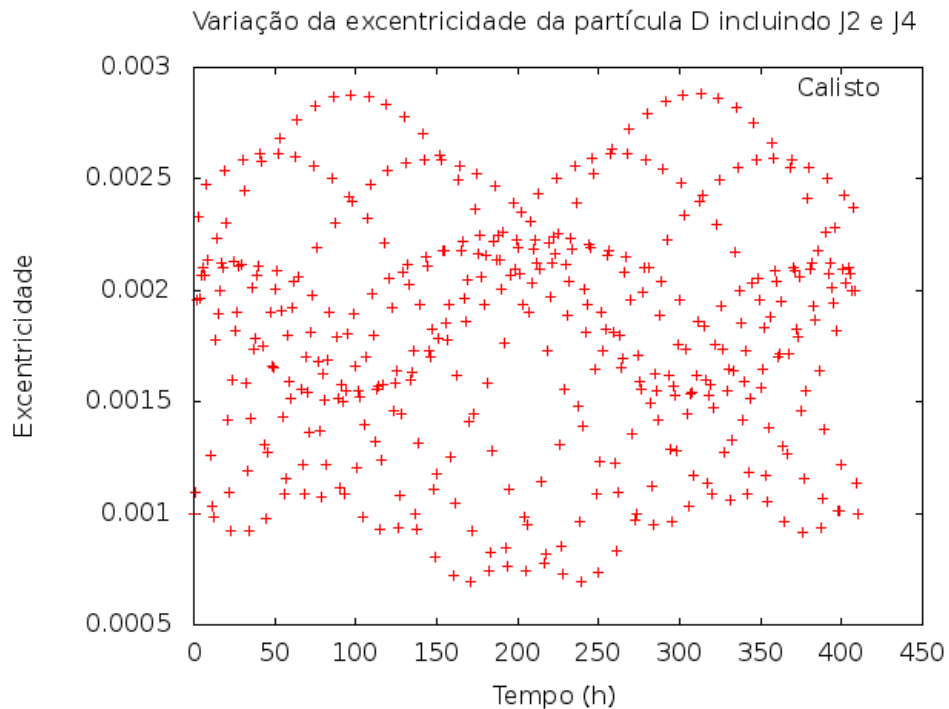


Figura 4.4: Gráfico da variação da excentricidade de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada a aproximadamente 4097 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. Houve um aumento na excentricidade de 3 vezes o valor inicial, não há mudança na ordem.

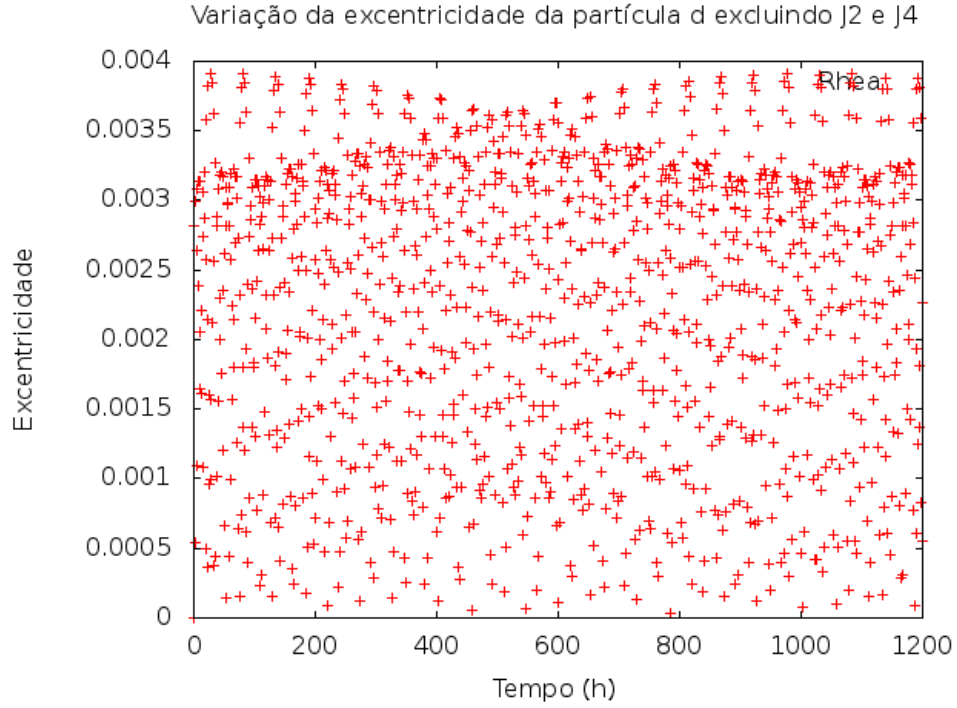


Figura 4.5: Gráfico da variação da excentricidade de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. Há aumento na excentricidade até 0 a 4×10^{-3} .

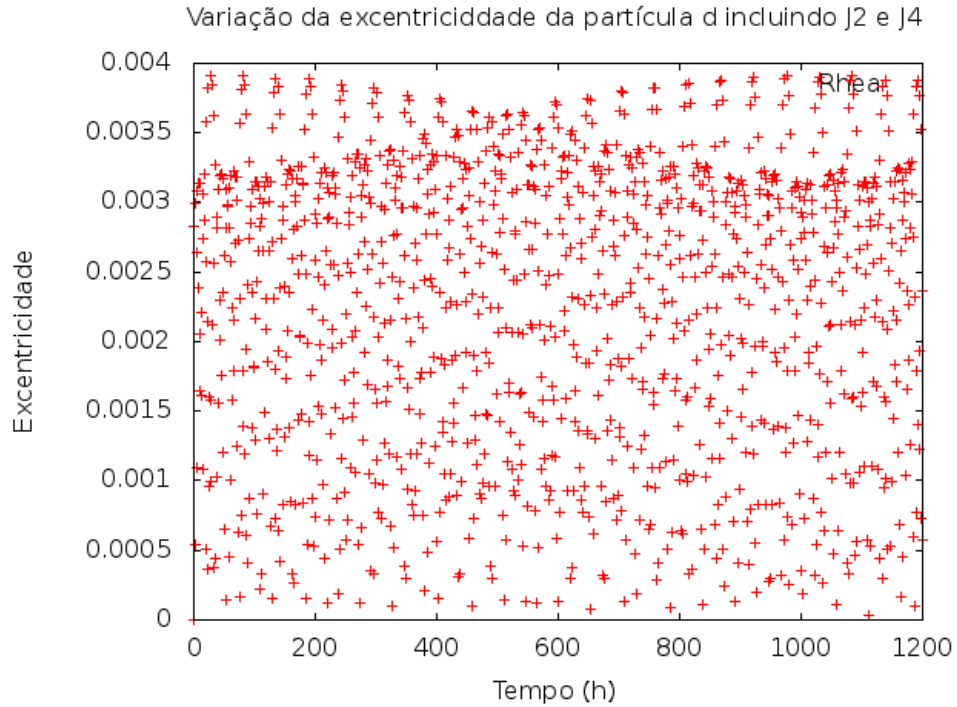


Figura 4.6: Gráfico da variação da excentricidade de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. A excentricidade aumentou 4 vezes o valor inicial.

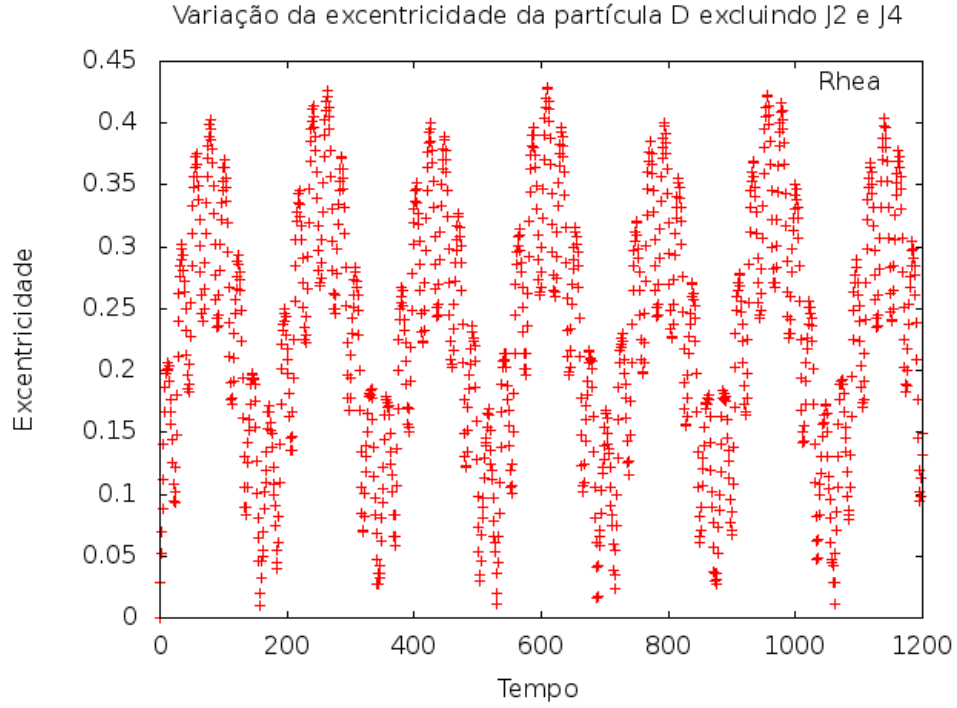


Figura 4.7: Gráfico da variação da excentricidade de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 1076 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. Aumento considerável na excentricidade de 0 a $4,5 \times 10^{-1}$.

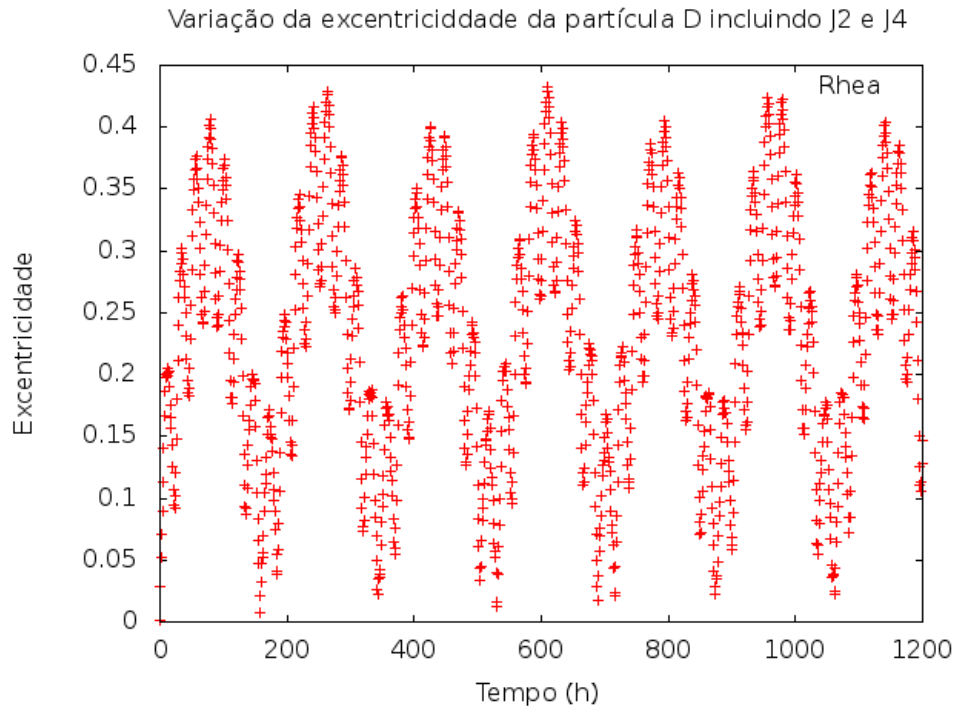


Figura 4.8: Gráfico da variação da excentricidade de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 1076 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. A excentricidade aumentou 4,5 vezes o valor inicial da excentricidade.

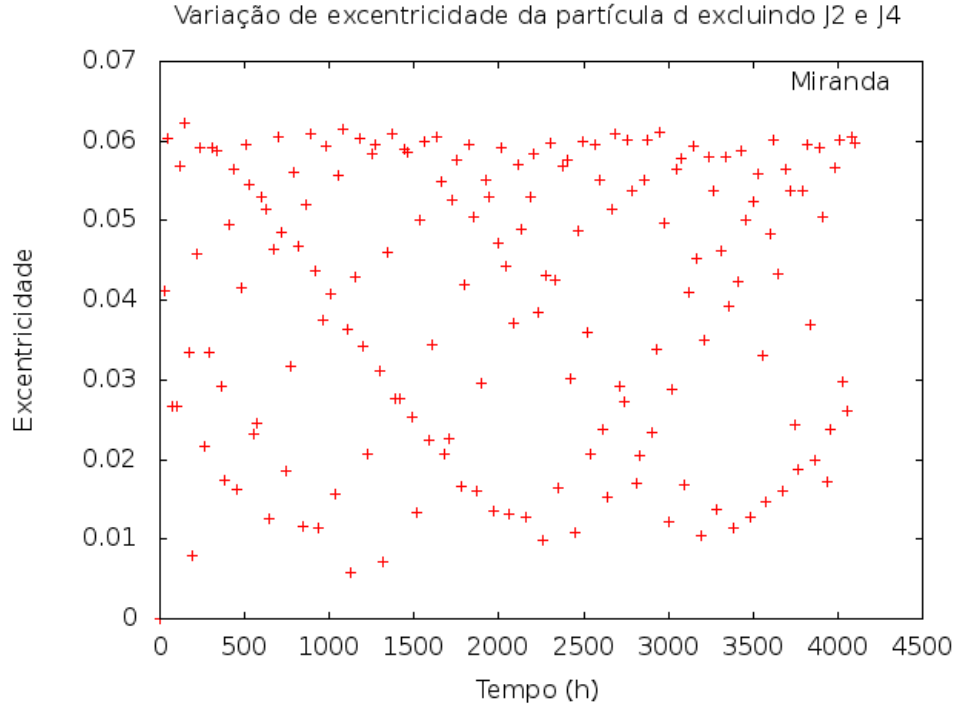


Figura 4.9: Gráfico da variação da excentricidade de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada a 20 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. A excentricidade aumenta até 6×10^{-2} .

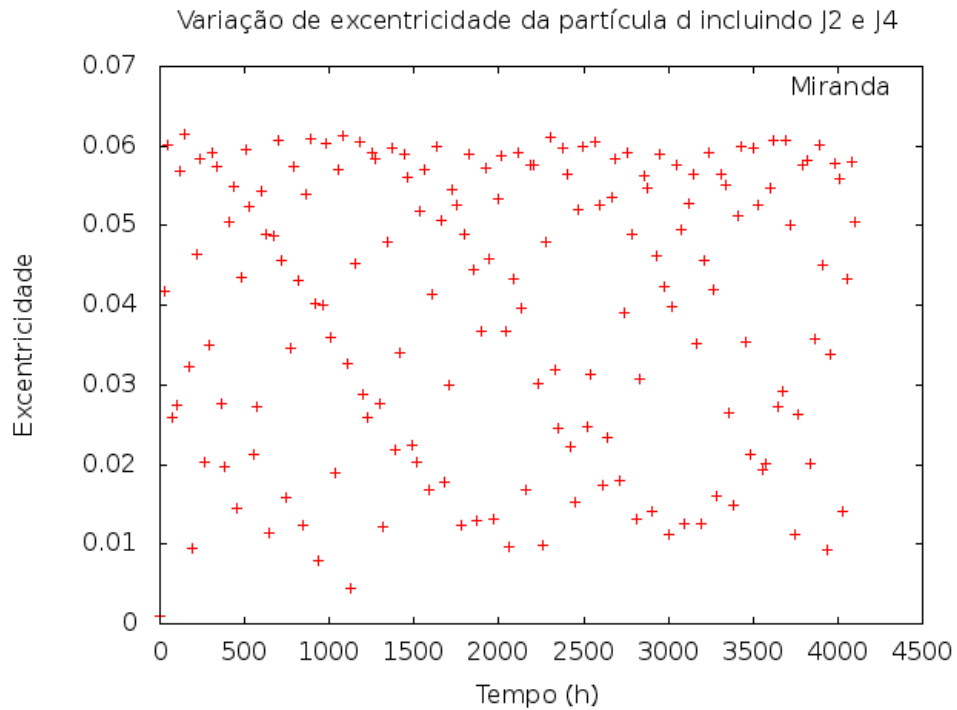


Figura 4.10: Gráfico da variação da excentricidade de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 20 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. Aumento na excentricidade de 1×10^{-3} para aproximadamente 7×10^{-2} .

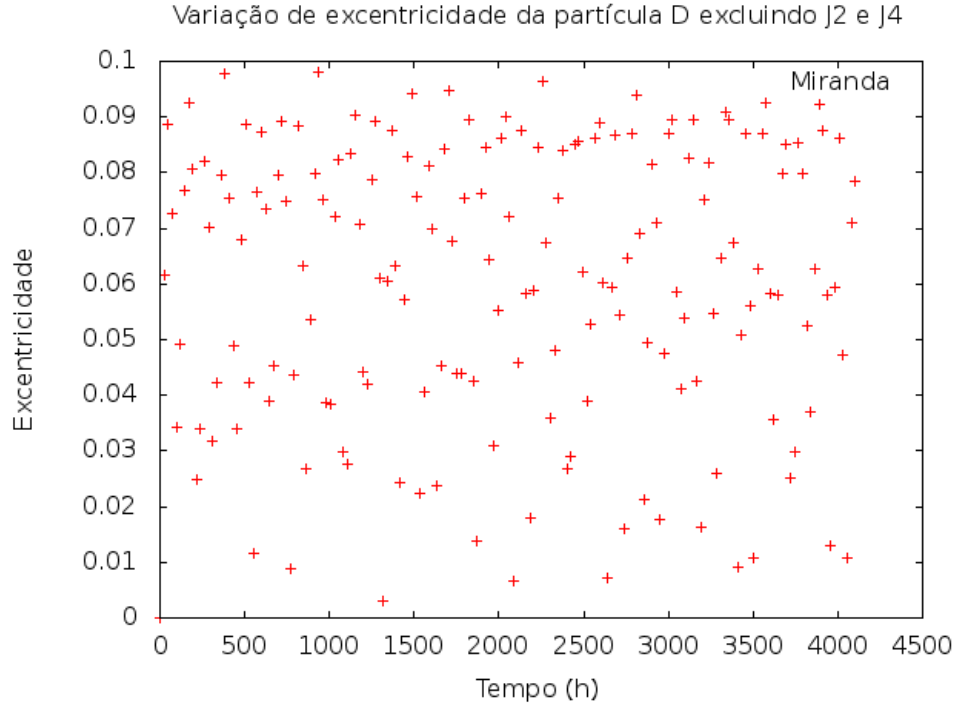


Figura 4.11: Gráfico da variação da excentricidade de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 80 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$. Aumento na excentricidade para 10^{-1} .

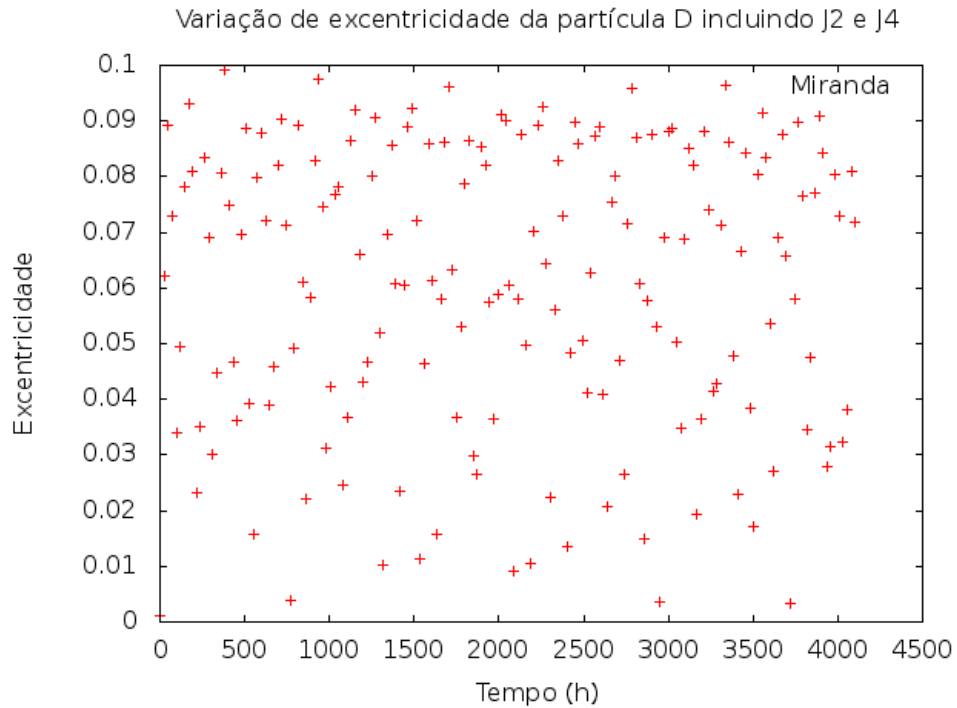


Figura 4.12: Gráfico da variação da excentricidade de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 80 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$. Aumento na excentricidade de 1×10^{-3} para 1×10^{-1} .

		<i>Sistema1</i>	<i>Sistema2</i>	<i>Sistema3</i>
<i>p.próxima.</i>	<i>s/J</i>	$0.000000 \rightarrow 2 \times 10^{-4}$	$0.000000 \rightarrow 4 \times 10^{-3}$	$0.000000 \rightarrow 6 \times 10^{-2}$
	<i>c/J</i>	$1 \times 10^{-3} \rightarrow 1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-3} \rightarrow 4 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3} \rightarrow 1 \times 10^{-2}$
<i>p.distante</i>	<i>s/J</i>	$0.000000 \rightarrow 2 \times 10^{-3}$	$0.000000 \rightarrow 4 \times 10^{-1}$	$0.000000 \rightarrow 1 \times 10^{-1}$
	<i>c/J</i>	$1 \times 10^{-3} \rightarrow 3 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^{-3} \rightarrow 4.5 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^{-3} \rightarrow 1 \times 10^{-1}$

Tabela 4.2: A tabela apresenta mudanças nas excentricidades das partículas mais próximas e mais distantes dos satélites, devido a inclusão dos harmônicos.

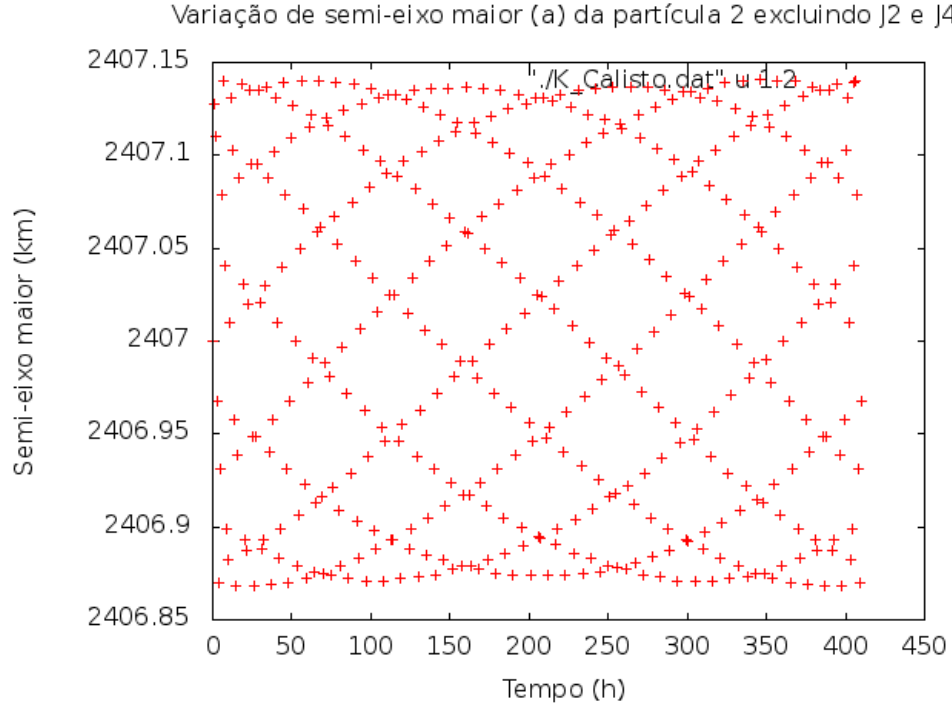


Figura 4.13: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$.

(4.21), (4.22), (4.23) e (4.24).

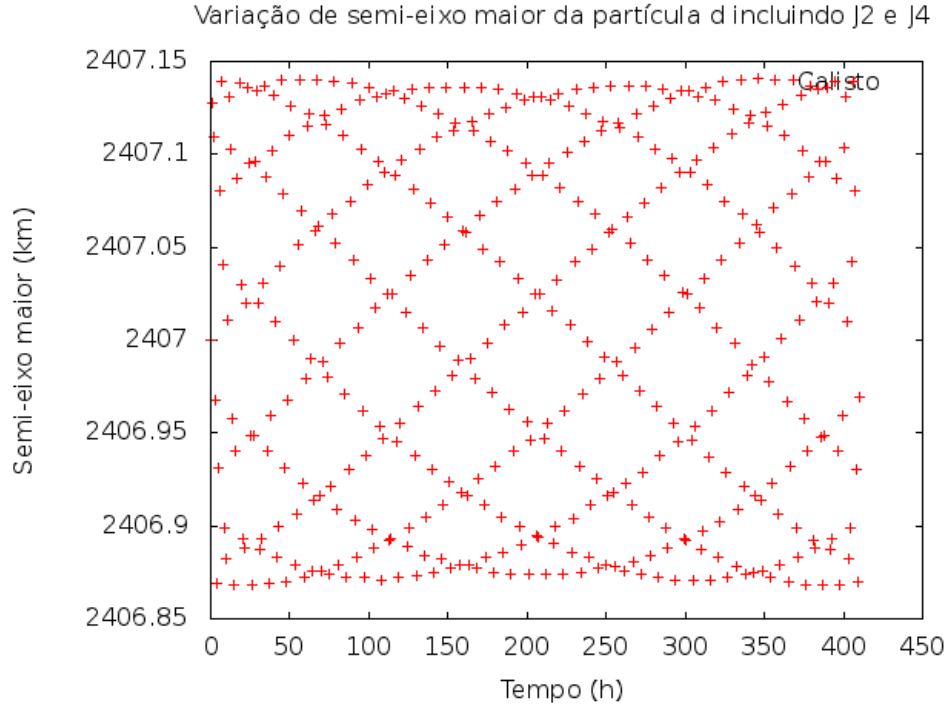


Figura 4.14: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$.

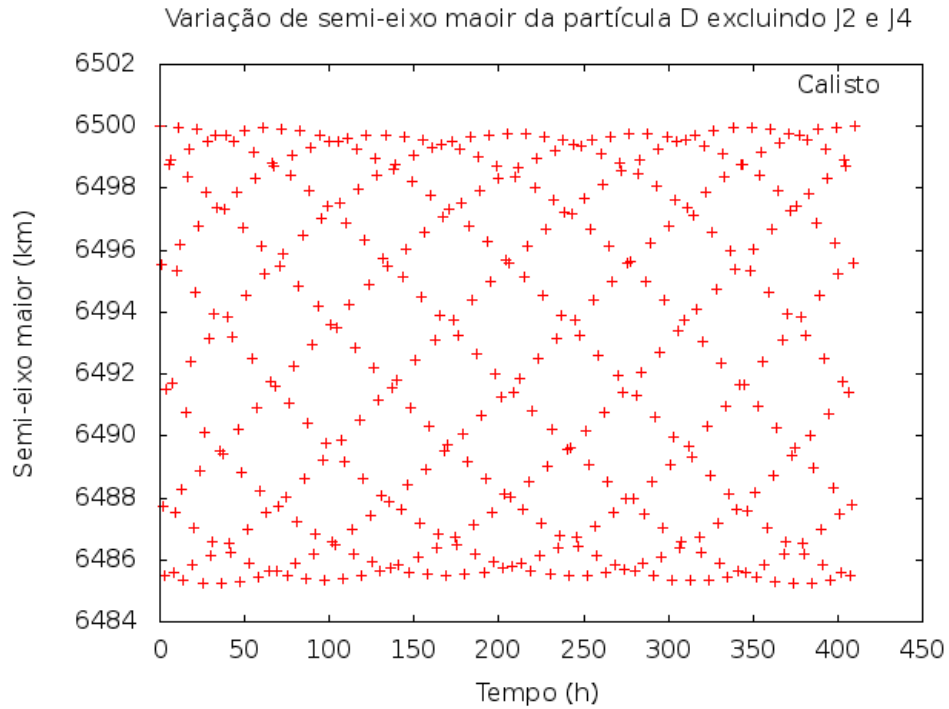


Figura 4.15: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 4097 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$.

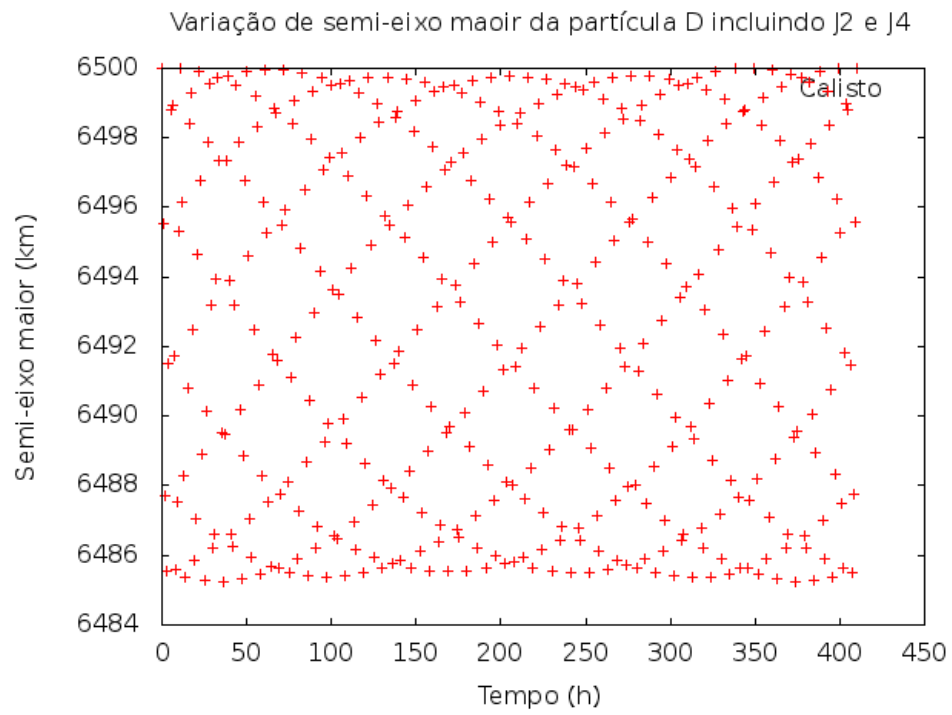


Figura 4.16: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 4097 km da superfície de Calisto e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$.

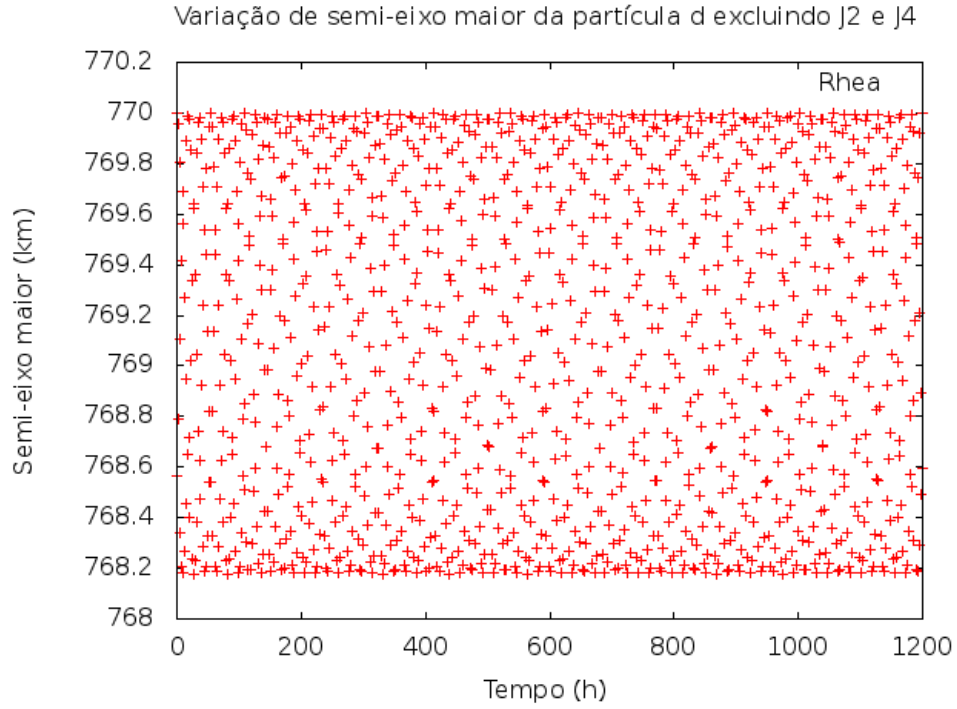


Figura 4.17: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$.

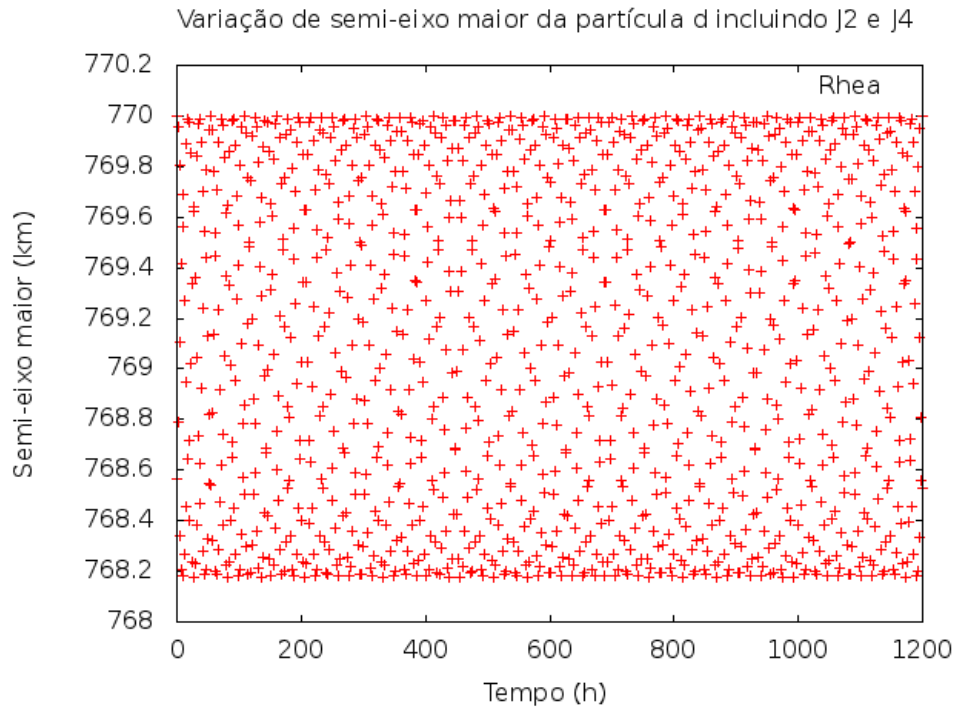


Figura 4.18: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à 6 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$.

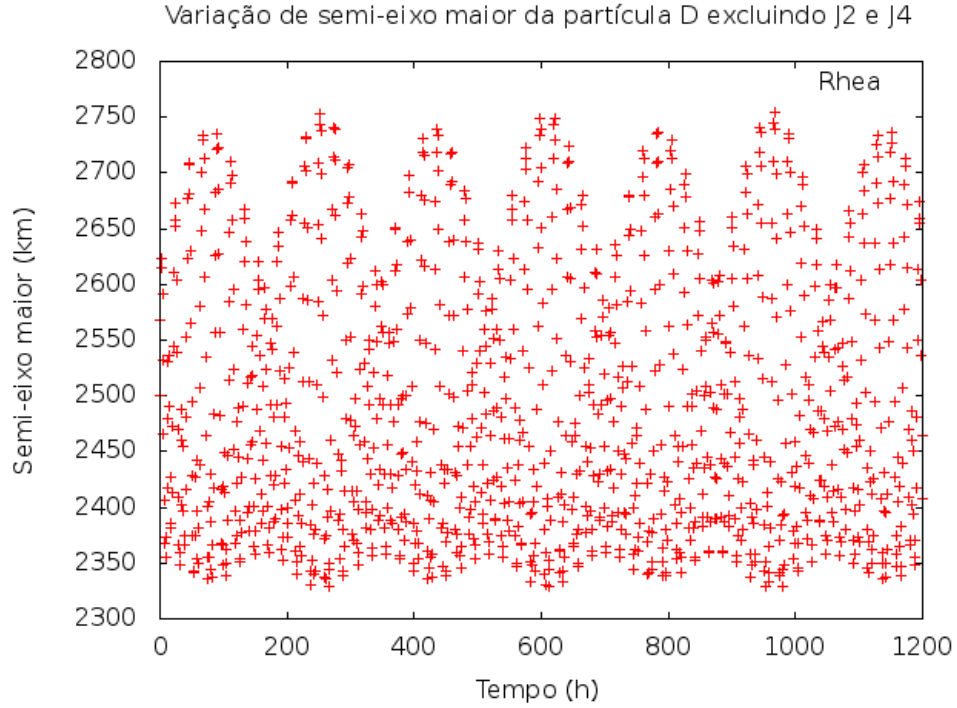


Figura 4.19: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 1076 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$.

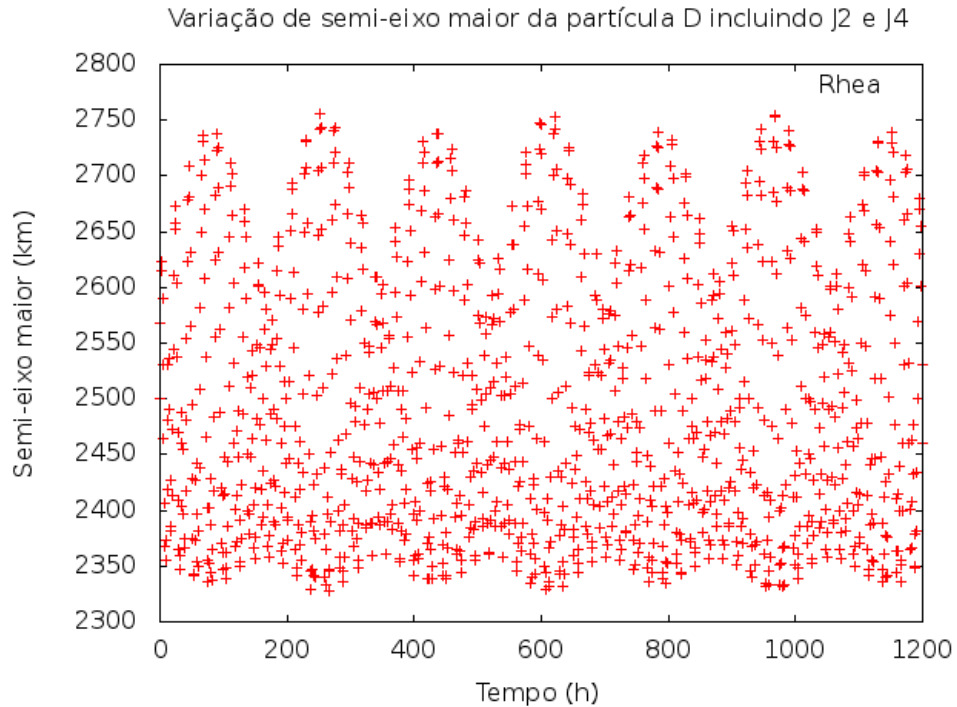


Figura 4.20: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 1076 km da superfície de Rhea e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$.

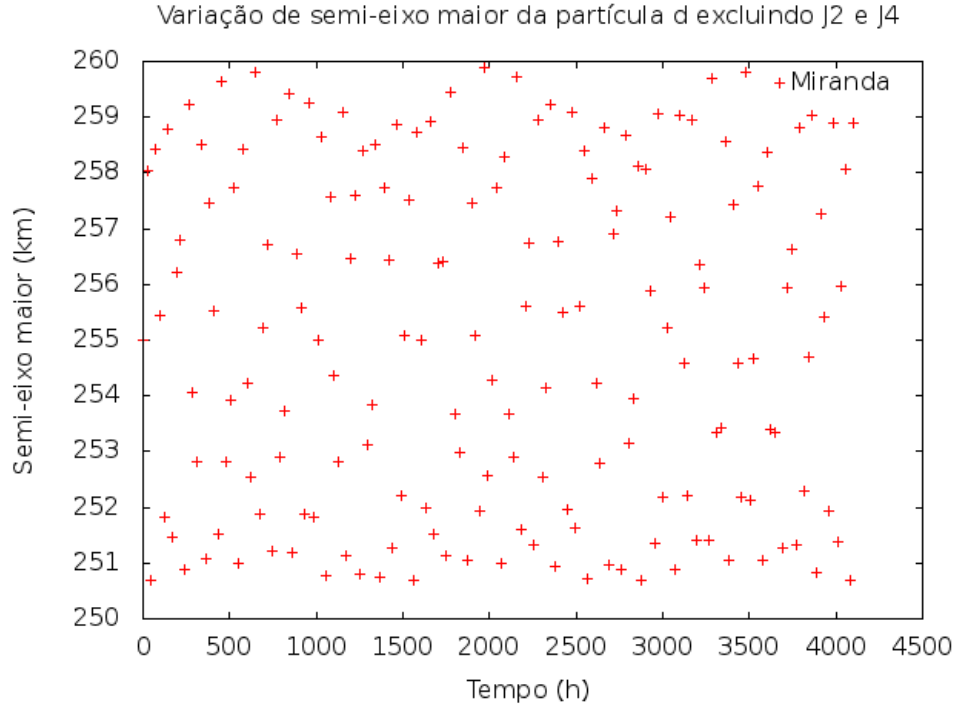


Figura 4.21: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à aproximadamente 20 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$.

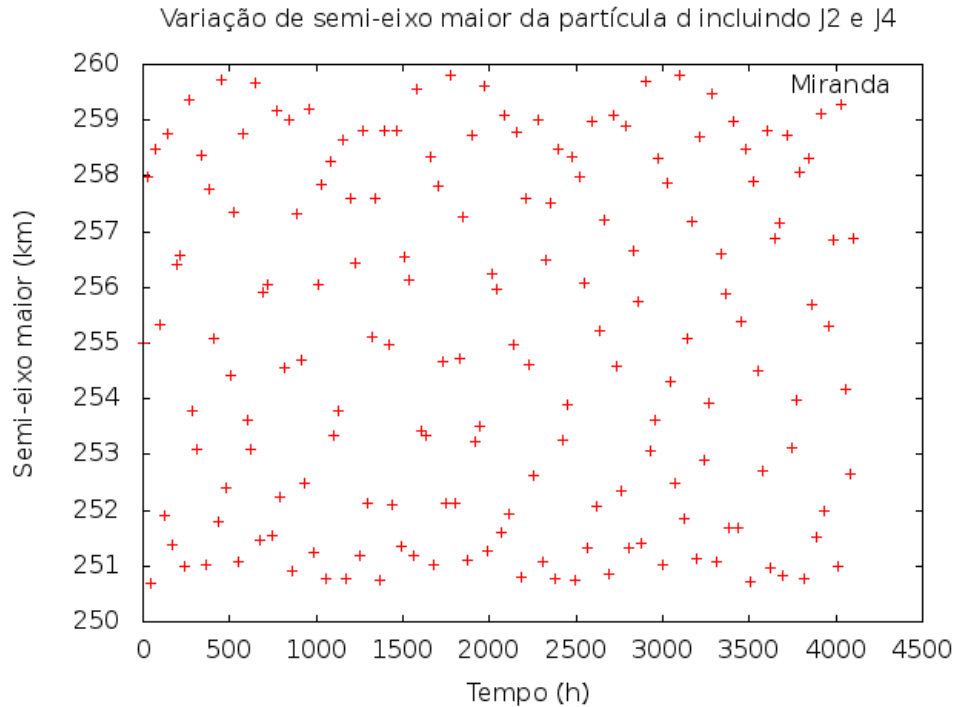


Figura 4.22: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_d incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_d está inicialmente localizada à aproximadamente 20 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$.

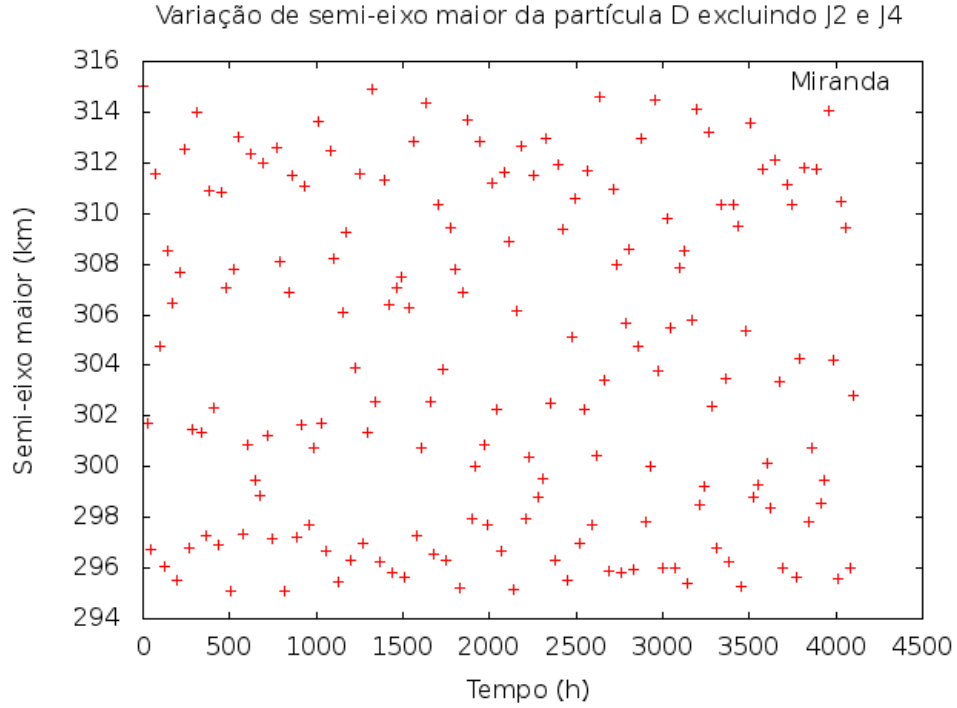


Figura 4.23: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D excluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 80 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 0$.

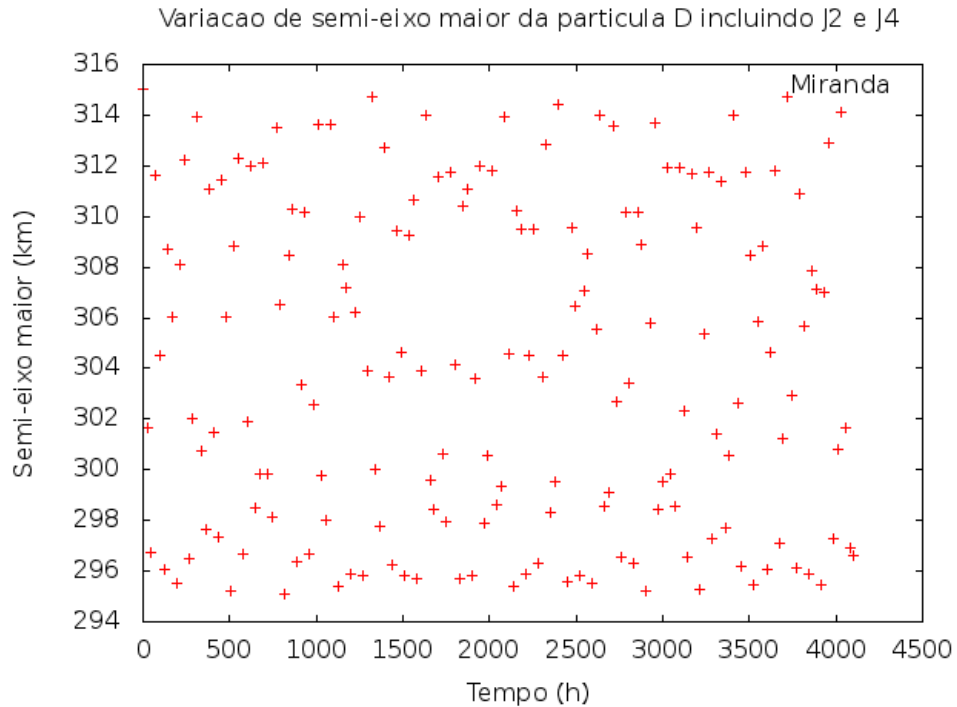


Figura 4.24: Gráfico da variação de semi-eixo maior de p_D incluindo J_2 e J_4 . Nesta simulação, p_D está inicialmente localizada à aproximadamente 80 km da superfície de Miranda e o valor inicial da sua excentricidade é $e = 10^{-3}$.

Capítulo 5

Conclusão

É possível observar pela tabela (4.1) que a inclusão dos harmônicos provoca alteração no valor da excentricidade dos três sistemas.

No Sistema (1) a mudança na excentricidade das partículas com exclusão dos harmônicos é alta, partindo de zero e chegando a até 10^{-3} , enquanto que a mudança na excentricidade das partículas com inclusão dos harmônicos não ultrapassa uma ordem na grandeza.

O Sistema (2) apresenta a mesma característica que o Sistema (1) com o detalhe de apresentar uma mudança muito brusca na excentricidade antes mesmo da inclusão dos harmônicos, chegando a 4×10^{-1} , ou seja, as partículas mais distantes de Rhea sofrem muita influência de Saturno.

O Sistema (3) apresentou uma característica diferente dos demais. Com a inclusão dos harmônicos o espaço para formação do anel aumenta aproximadamente 10 km.

Na análise sobre a possibilidade de formação de um anel em torno de um satélite, em específico Rhea, foi possível notar que incluir valores para os gravitacionais harmônicos provoca pequena mudança na excentricidade da partícula próxima ao satélite e considerável mudança na partícula mais distante, o que é esperado visto que a partícula mais distante de Rhea é a que recebe mais influência de Saturno.

O Sistema (1), maior em valores de raio (de planeta e satélite), de distância entre planeta e satélite, é o sistema que embora apresente maior variação na excentricidade tanto da partícula mais interna como da mais externa, apresenta maior raio de estabilidade para o agrupamento de partículas em torno do satélite, de 4091 km. O Sistema (2), intermediário entre os três sistemas apresentou um raio de estabilidade mediano, de 1700 km. E o Sistema (3), o menor dos três, apresentou um raio de estabilidade para partículas de 60 km.

O achatamento de um planeta é só um tipo de perturbação que a partícula sofre e possivelmente incluindo outras perturbações ao sistema seja certa a mudança de resultados.

Bibliografia

- [1] BROUWER, D., CLEMENCE, G. M. **Methods of Celestial Mechanics**. Academic Press, 1961.
- [2] BURNS, J. A., SIMONELLI, D. P., SHOWALTER, M. R., HAMILTON, D. P., PORCO, C. D., THROOP, H., and ESPOSITO, L. W. **Jupiter's ring-moon system, in Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere**. Edited by F. Bagenal, T. E. Dowling, and W. B. McKinnon, pp. 241–262, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U. K., 2004.
- [3] EVERHART, E. **An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacing. In: dynamics of comets their origin and evolution** . Proceedings of IAU Colloquium 83, vol. 115, p. 185.
- [4] FILLIUS, R.W., MACLLAWAM, C.E., and MOGRO-CAMPERO, A. **Radiation belts of Júpiter: a second look**, Science, 188, 465-467, 1975.
- [5] JONES, G. H., ROUSSOS, N., BECKMANN, U., COATES, A. J., CRARY, F., DANDOURAS, I., DIKAREV, V., DOUGHERTY, M. K., GARNIER, P., HANSEN, C. J., HENDRIX, A. R., HOSPODARSKY, G. B., JOHNSON, R. E., KEMPF, S., KHURANA, K. K., KRIMINGIS, S. M., KRÜGER, H., KURTH, W. S., LAGG, A., McANDREWS, H. J., MITCHELL, D. G., PARANICAS, C., POSTBERG, F., RUSSEL, C. T., SAUR, J., SEIB, M., SPAHN, F., SRAMA, R., STROBEL, D. F., TOKAR, R., WAHLUND, J. E., WILSON, R. J., WOCH, J., YOUNG, D. **The dust halo of Saturn's largest icy moon, Rhea**. Science, Vol. 319, p. 1380-1384, 2008.
- [6] MURRAY, C. D., DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. New York. Cambridge University Press, 1999.
- [7] ROUSSOS, E., JONES, G.H., KRUPP, N., PARANICAS, C., MITCHELL, D.G, KRIMIGIS, S.M., WOCH, J., LAGG, A., and KHURANA, K. **Energic electron signatures of Saturn's smaller moons: Evidence of an arc of material at Methone**, Icarus, 193, 455-464, 2008.
- [8] STEINER, J., DAMINELI, A. **O Fascínio do Universo**. São Paulo. Odysseus Editora, 2010.
- [9] TISCARENO, M. S., BURNS, J. A., CUZZI, J.N., HEDMAN, M.M. **Cassini imaging search rules out rings around Rhea**. Geophysical Research Letters, Vol. 37, L14205, 2010.
- [10] VAN ALLEN, J.A., **An upper limit on the sizes of shepherding satellites at Saturn's ring G**. J. Geophys Res. 92, 1153-1159, 1987.

Apêndices

ANEXO A - Descrição dos arquivos do Integrador Numérico

Arquivos

- Arquivo de entrada de dados - (nome.sis) escrito em formato de texto puro, onde é discriminado o número total de corpos do sistema, o número total de corpos massivos, os parâmetros do corpo central (tabela 2.1), do corpo secundário (tabela 3.2) e das partículas (tabela 3.3), tempo inicial e final de integração, passo de saída e passo de integração.

Parâmetros do corpo central: nome, massa(kg) e raio(km).

Parâmetros do corpo secundário: nome, massa(kg), raio(km), a (km), e , I (graus), Ω (graus), ω (graus), f (graus), dados em relação ao corpo central.

Parâmetros partícula: nome, massa(kg), raio(km), corpo que orbita, a (km), e , I (graus), Ω (graus), ω (graus), f (graus), dados em relação ao corpo secundário.

Neste integrador todo sinal de igual é uma entrada, logo todo sinal de igual deve ser seguido de uma informação ou removido.

Os valores dos parâmetros do corpo central e corpo secundário não mudam. Os parâmetros das partículas (distância da partícula à superfície do satélite (d) e excentricidade (e)) mudarão no decorrer das simulações.

- *Dinamica.c* - Arquivo onde são incluídos ou modificados os valores de J_2 , J_4 e J_6 . Neste arquivo estão as rotinas: Interação de todos os corpos com o corpo central; Escape; Interação entre massivos; Interação das partículas com os massivos; Colisão.

Normalização: O programa leva em conta somente a massa e o raio dos massivos para adimensionalizar o tempo. Para todo novo sistema, é necessário realizar uma integração, via terminal, com apenas uma partícula, para os tempos (1 dia) e (1 ano), os resultados deverão ser incluídos neste mesmo arquivo, em *unitempanos*, *unitempdias*. Estes valores para o sistema de Saturno estão na tabela 3.1. Também para todo novo sistema é necessário incluir uma distância de escape *descape*, medida que deve ser colocada em metros. Para o nosso sistema foi incluída um *descape* de 148.10^6 m, visto que entre a órbita de Dione esta a aproximadamente esta distância, situação considerada para escape do corpo.

- *OtoPF.c* - Subrotina que transforma elementos orbitais em planetocentricos.
- *Inicializa.c* - Esta rotina é responsável pela leitura do arquivo nome.sis, por adimensionalizar a massa dos primários, adimensionalizar a distância (encontra o maior semi-eixo para normalização) e adimensionalizar o tempo. Transforma elementos keplerianos em elementos retangulares.
- *PtoO.c* - Programa que transforma componentes de posição e velocidade, em relação ao planeta, para elementos orbitais a , e , I , Ω , ω , f (anomalia verdadeira), $C3$ (energia), R (distância entre Rhea e a partícula).

- PtoB2.c - Translada as coordenadas de um partícula, de um sistema fixo genérico, para um sistema com origem no centro de massa de dois corpos e que se move junto com eles.
- LeCl.c - Rotinas para leitura, em arquivo, dos elementos orbitais e parâmetros do integrador.
- QCK.c - Recebe como parâmetro um ângulo e retorna a primeira determinação dele.
- Trajetoria.c - É o programa principal que gera os arquivos de saída e o executável, após o comando *make*.
- Conf_Tr_nome.bin - Arquivo criado durante a integração pelo comando *./Grafico_Tr_nome.sis*. Traz a relação de corpos existentes no sistema e os possíveis tipos de saída (1-Trajatória em torno do corpo ou 2-Elementos orbitais em relação ao corpo). Neste arquivo é preciso escolher quem será o corpo central, ou seja, este arquivo dá a possibilidade do corpo central ser qualquer corpo. É pedido o número de corpos para a trajetória sobre o corpo central escolhido, unidade de distância e unidade de tempo.
- K_corpo.dat - Arquivo de saída de dados em elementos orbitais.
- T_corpo.dat - Arquivo de saída de dados em posição e velocidade.

Comandos no terminal

Nesta seção é apresentada a sequência de comandos para a integração utilizando o integrador Gauss Radau. Para iniciar a integração é necessário que os arquivos nome.sis e Dinamica.c estejam preenchidos corretamente, do contrário, informações erradas serão geradas.

1. **cd** + (caminho para o arquivo): Ex.: *cd/Área de trabalho/ Rhea/Programas*
2. **ls**: (aparece em tela todos os arquivos e programas)
/ Dinamica.c / Grafico.c / Inicializa.c / Inicializa.h / Le Arquivo.c / Le Arquivo.h / LeCl.c / LeCl.h / Makefile / OtoPF.c / OtoPF.h / PtoB2.c / PtoB2.h / PtoO.c / PtoO.h / QCK.c / Radau.c / Radau.h / Trajetoria.c / Trajetoria.h / Unidades3.c / Unidades3.h
3. **make clean**: Limpa o que for desnecessário para iniciar uma nova simulação.
4. **make**: Compila e cria os executáveis executáveis. */ Dinamica.o / Inicializa.o / Le Arquivo.o / LeCl.o / OtoPF.o / PtoO.o / QCK.o / Radau.o / Trajetoria (executável) / Trajetoria.o / Unidades3.o*
5. **make Grafico**: Gera o executável Grafico. Esta pronto para rodar.
6. **./Trajetoria nome.sis**: Integra, gera arquivos (.dat) e cria o arquivo *Tr_a1.bin* (arquivo binário).
7. **./Grafico Tr_a1.bin**: Gera o arquivo de configuração **Conf_Tr_a1.bin**.
8. **./Grafico Tr_a1.bin Conf_Tr_a1.bin**: Gera **K_corpo.dat** ou **T_corpo.dat** e finaliza esta integração.