





**IFT**

**Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

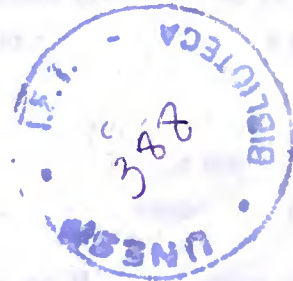
**IFT-D.007/03**

**Restrições Impostas à Radiação Cósmica de Fundo pela  
Topologia do Universo**

**William Santiago Hipolito Ricaldi**

**Orientador**

**Prof. Dr. Helio Vasconcelos Fagundes**



**Abril de 2003**

## Agradecimentos

- Aos meus pais Rúbel e Carmen, por terem me apoiado desde quando nasci, por sempre confiarem em mim, e aceitarem o meu “capricho” de estudar física.
- Aos meus irmãos Giovanni, Edwin e Alex, por estarem sempre do meu lado em cada momento, mesmo estando longe e sem eles saberem.
- A minha avó Dina, por ser sempre a “mamãe velha” e por a saudade que ela tem por este seu neto.
- Às minhas tias Marilú, Alicia e Celia, aos tios Alejandro e Pacco, que sempre estiveram, estão e estarão comigo.
- A minha família adotada no Brasil: os amigos irmãos da “Rocha 99”: Paulo, Vagner, Esdras e Eduardo, e aos da “Sala 4 do Galpão”: Gian e Wanderson. Ao Marcio, ao Bira e aos colombianos Hector e Oscar . Por estarem sempre comigo e serem tão amigos mesmo, pelas broncas, pelas musicas feitas, pelas saudades compartilhadas, pelas noites de cerveja, pelas contas nunca terminadas.....e pelas conversas sobre mulheres.
- Ao povo brasileiro, por me fazer sentir um “potencial brasileiro”, e pedir desculpas a todas aquelas pessoas que poderiam estar “matando a fome” com o dinheiro que me é dado.
- Ao Prof. Helio por sua paciência, ajuda e guia nestes dois anos no IFT. Por dar-me liberdade para trabalhar e sempre responder minhas perguntas mesmo sendo “obvias”.
- Aos meus amigos Peruanos: Casana, José, Teófilo e Zenaida por me ajudarem a matar a saudade da terra com álcool, música e conversas respectivamente.
- Ao amigo que caminha comigo desde a graduação, ao Walter Acosta da UNI em Lima, amigo, irmão, “afilhado”, por ter-me mostrado que não temos que esperar sentados e temos que conquistar nosso trabalho.
- À Natalia do IAG, pelos artigos de astronomia e astrofísica usados durante o trabalho.

- Aos amigos que deixei com o tempo e com a distância, para aqueles de quem aprendi como devo e como não devo ser.....
- À CAPES pelo apoio financeiro que tornou este trabalho possível.

*Foi com o apoio financeiro do Prof. Jorge Moreira Caldeira, por aqueles 8 anos de minha permanência e por ter me hospedado, no período 1960-61, na casa de Amélia, a mãe de João, durante os estudos, a partir de um apartamento chamado Serra de Pádua (Av. Paulista, número que não sei falar, próximo à rua J. Moreira).*

*[Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.]*

*[Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.]*

*Em homenagem póstuma ao Prof. Jorge Morales Galarza, por aqueles 6 anos de ensino fundamental e por ter me ensinado, na velha escola do bairro, lá nos Andes, a mais de 4300 metros de altitude, a amar uma cidadezinha chamada Cerro de Pasco. Onde tudo, incluído nós, seus filhos, temos a cor do cobre.*

*“Kunanpunchau yachaq’runa yanapanman llaq’tamazin-  
chik warmata gawaikaichispa, muyureikachinman, qain-  
inpa taytanchik, mamanchik yachasq’anta mana qunq’a-  
nanpaq, llaq’tanchikta munananpaq’...”*

*“Los “intelectuales” tienen entre sus principales ta-  
reas, el deber de ayudar a terminar con la alienación  
en que se pretende sumergir a nuestra juventud, es-  
clareciéndola ideológicamente y orientándola al servi-  
cio de su pueblo y su nación...”*

José María Arguedas  
escritor peruano

## Resumo

Este trabalho apresenta uma análise crítica da literatura de resistência em língua portuguesa, abordando o contexto histórico e social em que se desenvolveu. O estudo foca na relação entre a literatura e a luta social, destacando a importância da linguagem como instrumento de transformação e denúncia. A metodologia utilizada é a análise textual e contextual, permitindo uma compreensão mais profunda das motivações e dos efeitos da produção literária de resistência.

Palavras-chave: literatura de resistência, língua portuguesa, contexto histórico, linguagem, transformação social.

Abstract: This work presents a critical analysis of the literature of resistance in Portuguese, addressing the historical and social context in which it developed. The study focuses on the relationship between literature and social struggle, highlighting the importance of language as an instrument of transformation and denunciation. The methodology used is textual and contextual analysis, allowing for a deeper understanding of the motivations and effects of the production of literature of resistance.

*Hananpachata req'zisten...*

## **Resumo**

As flutuações da temperatura na Radiação Cósmica de Fundo em Universos com topologias multiplamente conexas são estudadas. Encontram-se algumas restrições que caracterizam cada tipo de topologia, trazendo como consequência uma diferença entre as funções de correlação e espectros de potência para cada caso. Essas diferenças podem em princípio nos ajudar a diferenciar o tipo de topologia à qual pertencem.

**Palavras Chaves:** Cosmologia; radiação de fundo; topologia cósmica.

**Áreas do conhecimento:** Gravitação e cosmologia.



## Abstract

Temperature fluctuations on the Cosmic Microwave Background in Universes with non-trivial topology are studied. We find some constraints that characterize each topology, which has as a consequence a difference between correlation functions and power spectra for each case. This can in principle help us to differentiate the type of topology to which they belong.

## Introdução

O modelo padrão da cosmologia, modelo de Friedmann-Lemaître, tem explicado satisfatoriamente vários fatos observacionais, algum dos quais são: a expansão do Universo, a observação de elementos primordiais no Universo e a existência da radiação cósmica de fundo(RCF). Apesar disso, ela ainda é insuficiente para dizer se a hipersuperfície espacial do Universo seria finita ou infinita. Apenas pode-nos dizer o tipo de geometria possível que teria. Surge assim o fato de que, associada a uma determinada geometria, tem-se várias topologias com volume finito que seriam múltiplamente conexas. A dinâmica local nos Universos múltiplamente conexas é igual à do caso conhecido simplesmente conexo, já que as equações de Einstein levam em conta só as propriedades locais, as quais estão contidas na métrica. Portanto, os Universos múltiplamente conexas também poderiam prever os três fatos observacionais e, ao menos em princípio, poderiam ser candidatos a descrever nosso Universo.

Em 1992, o satélite COBE, enviado pela NASA para medir a temperatura da radiação cósmica de fundo, confirmou que a radiação tinha algumas anisotropias. Estas anisotropias estão associadas a pequenas perturbações da métrica homogênea e isotrópica usada no modelo padrão. As medidas do COBE foram feitas numa escala angular de  $\theta \sim 10^\circ$  [16], que está na região da chamada grande escala\*. As anisotropias da radiação de fundo têm várias causas. Algumas delas são, por exemplo:(i) o movimento do observador com respeito ao sistema de referência comóvel, que dá origem ao termo dipolar da radiação cósmica;(ii) algumas velocidades, com respeito ao sistema comóvel, da matéria que espalha os fótons que vem da última superfície de espalhamento; (iii) variações nos campos gravitacionais pelos quais os fótons passaram antes de chegarem aos nossos detetores;(iv)algumas flutuações de potencial gravitacional na última superfície de espalhamento. Dessas causas, a grandes escalas, a contribuição dos potenciais gravitacionais predominam perante as outras [30], e é por isso que todas as outras são desprezadas na escala das observações

---

\*O estudo da estruturas no Universo se divide em pequenas escalas( $\theta < 1^\circ$ ) e grandes escalas ( $\theta > 1^\circ$ )[22].

do COBE.

Já que as anisotropias são consequência das propriedades locais, elas também aconteceriam em um Universo multiplamente conexo. A existência de anisotropias na radiação de fundo nos universos de topologia não trivial, traz como consequência restrições nas flutuações de temperatura, as quais são características para cada topologia. Esses resultados podem então ser comparados com as medições da RCF, o que pode eventualmente indicar que topologias são compatíveis com os dados observados.

Vários autores têm explorado este problema, artigos bem conhecidos como [28],[36],[37],[38],[39] apresentam um estudo destas anisotropias nos espaços com geometria euclidiana. Um estudo no caso esférico pode-se encontrar em [40]. No caso hiperbólico também tem-se varios trabalhos [43], porém é importante indicar que esta é uma área na qual a última palavra ainda não foi dita.

Nesta dissertação faremos o estudo, de uma maneira independente, destas anisotropias em espaços com geometria euclidiana, de modo a comparar nossos resultados com os de Scannapieco, Levin e Silk [37]. No primeiro capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos de topologia que dão lugar a termos técnicos usados na dissertação, e apresentamos algumas motivações em favor de um certo tipo de topologias. Também apresentamos uma muito breve classificação das triviedades com curvatura constante. Por questões de simplicidade nosso trabalho será feito só nos espaços compactos. No segundo capítulo apresentamos um estudo das perturbações cosmológicas, com duas finalidades: a primeira, de encontrar a equação de movimento com a qual evoluem; e a segunda, de associar-as com as anisotropias da radiação. No terceiro capítulo, estudamos a equação de movimento das perturbações e as anisotropias em um espaço com geometria euclidiana. Introduzimos este estudo nos Universos multiplamente conexos para encontrar as restrições sobre a RCF. Finalmente no quarto capítulo, são feitos alguns comentários sobre os resultados.

1	Introdução	16
1.1	Universos de Topologia Não Trivial	17
1.2	Perturbações e Modos de Ray	18
1.3	Perturbações e Modos de Ray	21
1.4	Topologia e Anisotropias	22
2	Restrições da RCF: Espaço Euclidiano	25
2.1	Topologia e Anisotropias	26
2.2	Topologia e Anisotropias	28
2.3	Topologia e Anisotropias	30

# Índice

<b>1</b>	<b>Topologia</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Definições Matemáticas Usadas . . . . .	2
1.2.1	Homeomorfismo e Isometrias . . . . .	2
1.2.2	Variedades Diferenciáveis e Variedades Quociente . . . . .	3
1.2.3	Variedades Orientáveis . . . . .	4
1.2.4	Homotopia, Grupo fundamental: Espaços Multipla e Simplesmente Conexos . . . . .	5
1.2.5	Espaço de Recobrimento e o Grupo de Holonomia . . . . .	6
1.2.6	Poliedro Fundamental . . . . .	7
1.3	Excluindo algumas Variedades . . . . .	8
1.4	Variedades Riemannianas Tridimensionais com Curvatura Constante: Classificação . . . . .	10
1.4.1	Espaços Tridimensionais Euclidianos . . . . .	10
1.4.2	Espaços Tridimensionais Esféricos . . . . .	10
1.4.3	Espaços Tridimensionais Hiperbólicos . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo</b>	<b>14</b>
2.1	A Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	14
2.2	Perturbações Cosmológicas . . . . .	16
2.2.1	Invariância de Gauge e Perturbações Cosmológicas . . . . .	17
2.2.2	Perturbando a Métrica de RW . . . . .	19
2.2.3	Perturbando o Tensor Energia-Momento . . . . .	21
2.2.4	Equações de Movimento . . . . .	22
2.3	Efeito de Sachs-Wolfe . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Restrições da RCF: Espaço Euclidiano</b>	<b>28</b>
3.1	Flutuações de Temperatura nos Espaços Euclidianos: Efeito de Sachs-Wolfe em $E^3$ . . . . .	28
3.2	Função de Correlação e Espectro de Potências: . . . . .	30

3.3	Gaussianidade . . . . .	31
3.4	RCF em um Universo Euclidiano . . . . .	32
3.4.1	RCF em um Universo Euclidiano Simplesmente Conexo . . . . .	32
3.4.2	RCF nos Universos Euclidianos Multiplamente Conexos . . . . .	33
3.4.3	Variedade $E_1$ : Universo Toroidal . . . . .	33
3.4.4	Variedade $E_2$ . . . . .	35
3.4.5	Variedade $E_3$ . . . . .	37
3.4.6	Variedade $E_4$ . . . . .	38
3.4.7	Variedade $E_5$ . . . . .	40
3.4.8	Variedade $E_6$ . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Comentários Finais</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Algumas Relações no Modelo de Friedmann-Lemaître</b> . . . . .	<b>48</b>
A.1	Relações a partir da métrica RW . . . . .	48
A.2	Equações de Friedmann . . . . .	49
<b>B</b>	<b>Expressões para <math>\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}</math>, <math>\delta R_{\alpha\beta}</math>, <math>\delta R</math> e <math>\delta G_{\beta}^{\alpha}</math></b> . . . . .	<b>51</b>
B.1	Para $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ . . . . .	51
B.2	Para $\delta R_{\alpha\beta}$ . . . . .	51
B.3	Para $\delta R$ . . . . .	52
B.4	Para $\delta G_{\beta}^{\alpha}$ . . . . .	52
<b>C</b>	<b>Transformação de Perturbações para Quantidades Escalares, Vetoriais e Tensoriais</b> . . . . .	<b>53</b>
C.1	Perturbações de Quantidades Escalares . . . . .	53
C.2	Perturbações de Quantidades Vetoriais . . . . .	53
C.3	Perturbações de Quantidades Tensoriais . . . . .	54
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>55</b>

## Relação das Figuras

1.1	Variedades diferenciáveis . . . . .	4
1.2	Variedades quociente . . . . .	5
1.3	A ação do grupo de holonomia do toro. . . . .	7
1.4	O poliedro fundamental do toro, com as identificações $AB \rightarrow DC$ e $AD \rightarrow BC$ . . . . .	8
1.5	Poliedros fundamentais das variedades euclidianas com lados iguais a $L$ . . . . .	11
2.1	Ilustração dos efeitos Sachs-Wolfe ordinário e integrado [19] . . . . .	26

# Relação das Tabelas

1.1 Geradores e identificações de 6 variedades compactas e orientáveis euclidianas, com referência à Fig. 1.5. . . . .	12
4.1 Valores de $k_{min}$ e $\lambda_{max}$ para cada variedade. . . . .	46

# Capítulo 1

## Topologia

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos de topologia, que serão necessários para o entendimento desta dissertação. Estes conceitos dão lugar a termos técnicos usados no contexto da topologia cósmica \*, os quais são amplamente conhecidos e podem ser encontrados na literatura corrente [1], [2], [3], [4], [5], etc. A maneira de como estas definições são apresentadas será mais intuitiva que matemática. Depois de apresentar os conceitos matemáticos básicos, estes são usados para tentar excluir algumas variedades que não modelariam de uma maneira real o Universo. Também, fazemos a escolha das propriedades locais que mais parecem estar de acordo com as observações astronômicas e astrofísicas atuais. Finalmente apresentamos uma classificação simplificada das triviedades com curvatura constante, as quais serão usadas no capítulo 3.

### 1.1 Introdução

Das equações de Einstein, se deduzem algumas soluções que podem ser usadas para estudar as propriedades do Universo. Com a Relatividade Geral, se faz um estudo local usando a métrica, e é por isso que ela não é suficiente para poder estudar globalmente o Universo. Aparecem entre nós agora, perguntas como: Quais são as propriedades globais do Universo e como as podemos estudar?, Será que podem ser estudadas? Certamente uma ferramenta que começou a ser usada algum tempo atrás foi a topologia. A topologia<sup>†</sup> é a parte da matemática que estuda a continuidade entre objetos geométricos. As propriedades topológicas são aquelas que não mudam através das transformações contínuas. Para fazer certos estudos topológicos, usamos homeomorfismos e mediante eles classificamos as variedades em

---

\* Área cujo objeto de estudo são as propriedades topológicas globais do Universo.

<sup>†</sup>No contexto da matemática o termo topologia pode indicar topologia local (como nos casos das vizinhanças), ou topologia global. A partir daqui o termo topologia indicará topologia global.



diferentes classes topologicamente equivalentes. Usando conceitos como: múltipla conectividade, homotopia, grupo fundamental, recobrimento universal, holonomia e poliedro fundamental, podem-se estudar aquelas propriedades globais que as variedades têm; em particular as tetravariiedades, que são as variedades mediante as quais na atualidade se modela o nosso Universo.

Neste trabalho, vamos tomar como solução das equações de Einstein a métrica isotrópica e homogênea de Robertson-Walker (RW). Esta solução é a que parece estar mais de acordo com as observações astronômicas feitas até agora. Ou seja que para nós, o Universo vai ser homogêneo e isotrópico. Não é possível determinar as propriedades globais do espaço-tempo a partir unicamente das suas propriedades locais, já que entre outras coisas, uma métrica dada pode em geral corresponder a duas ou mais variedades. Dito de outra maneira, duas variedades distintas podem ter as mesmas propriedades locais. Como vemos então, um dos problemas que temos para iniciar o estudo das propriedades globais do Universo, é saber quais das tetravariiedades são compatíveis com as soluções locais da Relatividade Geral assumidas e quais, ao mesmo tempo, são compatíveis com as observações astronômicas, astrofísicas e mesmo físicas que se têm hoje. Não considerando-se alguns destes critérios, vamos ter um número grande de possibilidades de variedades que podem representar globalmente o Universo. Neste capítulo, tentaremos explicar de forma resumida, quais variedades podem ser levadas em conta e quais não. Ao final apresentaremos uma classificação de variedades compatíveis com a nossa escolha e com as observações.

## 1.2 Definições Matemáticas Usadas

Aqui vamos apresentar algumas definições matemáticas da área da topologia que são importantes para entendermos a terminologia que se usa no estudo da topologia do Universo (topologia cósmica). Os conceitos e definições são apresentados em muitos casos de uma maneira mais intuitiva, deixando de lado o rigor matemático.

### 1.2.1 Homeomorfismo e Isometrias

**Homeomorfismo:** Na topologia, se diz que dois objetos geométricos são homeomorfos se é possível deformar um no outro de uma maneira contínua. Dados dois espaços topológicos  $X_1$  e  $X_2$  e um mapa  $f : X_1 \rightarrow X_2$ , diz-se que  $f$  é um homeomorfismo se ele é contínuo e tem inversa  $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$  que também é contínuo. Então, dizemos que  $X_1$  é homeomórfico a  $X_2$ . Se  $f$  for um homeomorfismo entre variedades e  $f$  e  $f^{-1}$  forem funções diferenciáveis, chamamos  $f$  de difeomorfismo.

**Isometrias:** Dada uma variedade  $M$  com métrica conhecida, um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é uma isometria se ela preserva a métrica. A identidade, a composição de isometrias e a inversa de uma isometria também são isometrias. Todas elas formam um grupo que é chamado de grupo de isometrias  $G$ .

### 1.2.2 Variedades Diferenciáveis e Variedades Quociente

**Variedade Diferenciável:** As variedades diferenciais são muito importantes na física. No caso da Cosmologia estas servem-nos para a construção de modelos do Universo. A maneira mais intuitiva que podemos ter de uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional, é que ela é um espaço que é localmente idêntico a  $R^n$ ;  $n \in Z_+$ . Para apresentar melhor a definição de uma variedade diferenciável definamos primeiro o que é uma variedade topológica. Uma variedade topológica é um espaço que localmente é homeomorfo a  $R^n$  e que além disto, satisfaz duas propriedades: (i) que para dois pontos quaisquer  $p$  e  $q$ , existem duas vizinhanças disjuntas  $U$  e  $V$  tal que,  $p \in U$  e  $q \in V$  e (ii)  $M$  pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças, de modo que  $M$  é a união de todas elas.

Na Fig. 1.1 apresentamos a variedade topológica  $M$ . As funções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são homeomorfismos e elas mapeiam as vizinhanças  $U$  e  $V$  em  $R^n$ ; além disto, existe outro homeomorfismo entre  $\varphi_1(U)$  e  $\varphi_2(V)$ , que é a composição entre  $\varphi_2$  e  $\varphi_1^{-1}$  ( $\psi$ ). Se os homeomorfismos  $\psi$  são infinitamente diferenciáveis, dizemos que a variedade é diferenciável.

**Variedade Quociente:** Muitas vezes podemos encontrar uma relação entre os elementos de um conjunto ou de um espaço  $\tilde{M}$ . Se esta relação é refletiva, simétrica e transitiva, chama-se relação de equivalência  $\sim$  entre dois elementos do conjunto e escrevemos  $p \sim q$  ( $p$  é equivalente a  $q$ ). Mediante essa relação, podemos dividir  $\tilde{M}$  em subconjuntos mutuamente disjuntos chamados classes de equivalência  $[p]$ . O conjunto de todas as classes de equivalência chama-se espaço quociente  $\tilde{M}/\sim$ . Para visualizar melhor o espaço quociente vejamos o exemplo da Fig. 1.2. Nela se  $x$  e  $y \in R$ ,  $y \sim x$  se  $y = x + 2\pi n$ , com  $n \in Z$ . Na Fig. 1.2(a), a classe de equivalência é  $[x] = \{\dots, x - 2\pi, x, x + 2\pi, \dots\}$ . Na Fig. 1.2(b), vemos que a classe de equivalência  $[x]$  pode ser representada no intervalo  $[0, 2\pi)$ , o qual é homeomórfico a um círculo  $S^1$  (notemos que  $0 \sim 2\pi$ ). Portanto, o espaço quociente  $R/\sim$  de  $R$  é um círculo  $S^1$ .

No caso das variedades a relação de equivalência pode ser dada por um grupo  $G$  com elementos  $g$ , tais que  $q \sim p$  se e somente  $q = gp$ , para algum  $g \in G$ . Podemos então escrever que a classe de equivalência é:

$$[p] = \{q \in \tilde{M}; q = gp, g \in G\}, \quad (1.1)$$

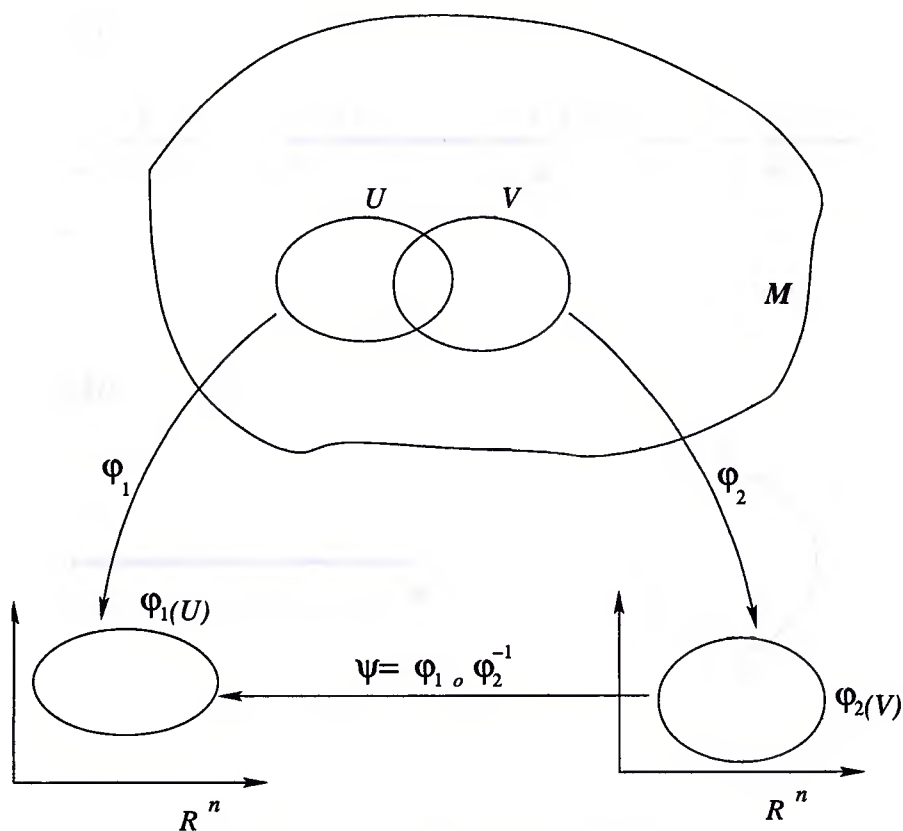


Figura 1.1: Variedades diferenciáveis

e o espaço quociente será:

$$\tilde{M}/G = \{[p]; p \in \tilde{M}\}. \tag{1.2}$$

O espaço quociente não é necessariamente uma variedade. Existe um teorema, cuja prova pode-se encontrar em [2], que diz que a condição para que o espaço quociente seja uma variedade, é que  $G$  atue de maneira livre (sem pontos fixos) e propriamente descontínua em  $\tilde{M}$ .

### 1.2.3 Variedades Orientáveis

Tendo-se uma variedade diferenciável  $M$  coberta por um conjunto de vizinhanças  $\{U_i\}$ , dizemos que  $M$  é orientável, se para qualquer  $U_i$  e  $U_j$  não disjuntos, existem coordenadas locais  $x^\mu \in U_i$  e  $y^\nu \in U_j$ , tal que o jacobiano  $J$  da transformação de  $x^\mu \rightarrow y^\nu$  é positivo; isto é  $J = \det\{\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\} > 0$ . A transformação, representa uma mudança de base  $\{e_\nu\} = \{\frac{\partial}{\partial y^\nu}\}$ , e o caráter positivo do jacobiano implica que aquelas

(a)



(b)

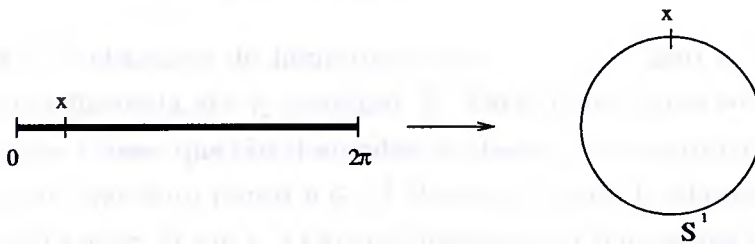


Figura 1.2: Variedades quociente

bases mantêm a orientação. Já que uma mudança de bases pode-se escrever como:

$$\{\tilde{e}_\nu\} = \left\{ \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} e_\mu \right\}, \tag{1.3}$$

dizemos que se  $J > 0$ , as duas bases têm a mesma orientação e que se  $J < 0$ , têm orientações opostas. Existe um jeito mais intuitivo de ver se uma variedade é ou não orientável, para isso consideremos o ponto  $p \in M$ , e com ela a curva fechada  $\gamma$  que passa por  $p$ . Definamos em  $p$  uma orientação para nosso sistema de coordenadas e levemos o sistema por todo  $\gamma$ . Dizemos que a variedade é orientável, se quando ao voltar a  $p$  a orientação do sistema de coordenadas é a mesma para todo  $\gamma \in M$ ; caso contrário dizemos que é não orientável.

### 1.2.4 Homotopia, Grupo fundamental: Espaços Multipla e Simplesmente Conexos

Existe um conjunto de invariantes topológicos, que podem ser usados para reconhecer certas classes de equivalência dos espaços; alguns deles são os grupos de

homotopia, e em particular o grupo fundamental. Imaginemos um ponto  $p$  na variedade  $M$  ( $p \in M$ ), e uma curva  $\gamma$  que começa e termina no ponto  $p$ , que é chamada de *loop*. Existem alguns loops que podem ser deformados continuamente em outros, formando assim classes de loops. Imaginemos dois loops no ponto  $p$ :  $\gamma_1 : I \rightarrow M$  e  $\gamma_2 : I \rightarrow M$ <sup>‡</sup>. Dizemos que eles são homotópicos se existe um mapa contínuo  $F : I \times I \rightarrow M$ , tal que:

$$F(s, 0) = \gamma_1(s), F(s, 1) = \gamma_2(s), \quad s \in I, \quad (1.4)$$

$$F(0, t) = F(1, t) = p, \quad t \in I, \quad (1.5)$$

onde o mapa  $F$  é chamado de homotopia entre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Isto é, que  $\gamma_1$  pode ser continuamente deformada até  $\gamma_2$  mediante  $F$ . Estas homotopias servem para juntar os loops em certas classes que são chamadas de classes de homotopia. Ao conjunto de classes de homotopias num ponto  $p \in M$  chama-se grupo fundamental ou primeiro grupo de homotopia de  $M$  em  $p$ . O grupo fundamental tem várias propriedades que podem ser encontradas em [1] e [3]. Destas, duas são as mais importantes para nós: (i) ele é invariante por homeomorfismos, ou seja, ele é um invariante topológico e pode ser usado para diferenciar duas variedades topologicamente não equivalentes e (ii) ele é isomorfo<sup>§</sup> ao grupo de holonomia  $G$  de um espaço quociente  $\tilde{M}/G$ . Usando as homotopias ou o grupo fundamental, podemos classificar as variedades em duas classes:

- **Variedades Simplesmente Conexas ou com Topologia Trivial:** Aquelas onde para todo ponto  $p \in M$ , cada loop é homotópico a um ponto. Ou equivalentemente, aquelas cujo grupo fundamental é o grupo trivial.
- **Variedades Multiplamente Conexas ou com topologia não trivial:** Quando não são simplesmente conexas.

### 1.2.5 Espaço de Recobrimento e o Grupo de Holonomia

**Espaço de Recobrimento:** Dizemos que  $\tilde{M}$  é um espaço de recobrimento da variedade  $M$  se existe um mapa contínuo  $f : \tilde{M} \rightarrow M$ , tal que: (i)  $f$  seja sobrejetor e (ii) para cada  $p \in M$  exista uma vizinhança  $U \subset M$  que contém  $p$ , tal que  $f^{-1}(U)$  seja uma união disjunta de vizinhanças em  $\tilde{M}$ , as quais são mapeadas

<sup>‡</sup> $I$  é o intervalo  $[0, 1]$

<sup>§</sup>Sejam dois conjuntos  $X$  e  $Y$  com estruturas algébricas. Se existe um mapa  $f : X \rightarrow Y$  que preserva a estrutura algébrica,  $f$  é chamado de homomorfismo. Se  $f$  é bijetivo, então é chamado de isomorfismo.

homeomorficamente em  $M$  por  $f$ . Por construção  $\tilde{M}$  é localmente indistinguível de  $M$  mas globalmente não [7]. Se  $\tilde{M}$  é simplesmente conexo é chamado de **Espaço de Recobrimento Universal**.

**Grupo de Holonomia:** Seja um ponto  $x$  na variedade  $M$ . No espaço de recobrimento universal,  $x$  gera um ponto  $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ . Se existem pontos adicionais  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \dots$  dizemos que estes são homólogos a  $\tilde{x}_0$  e que as transformações que levam  $x \rightarrow \tilde{x}_i$  são isometrias que formam o grupo de holonomia  $\Gamma$  em  $\tilde{M}$ . Se este grupo é descontínuo e os geradores do grupo não têm ponto fixo, dizemos que o grupo de holonomia atua livre e descontínuamente em  $\tilde{M}$ . Pode ser mostrado que o grupo de holonomia é isomorfo ao grupo fundamental da variedade quociente  $\tilde{M}/\Gamma$  [4]. Para ilustrar os conceitos de grupo de holonomia e espaço de recobrimento, na Fig. 1.3 apresentamos como se constrói o espaço de recobrimento  $\tilde{M} = E^2$  do toro  $T^2 = E^2/\Gamma$ , com grupo de holonomia  $\Gamma = \{g_1^m g_2^n\}$ , onde  $m$  e  $n \in Z$  e os geradores do grupo são:

$$g_1(x_1, x_2) = (x_1 + L, x_2), \quad g_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + L). \quad (1.6)$$

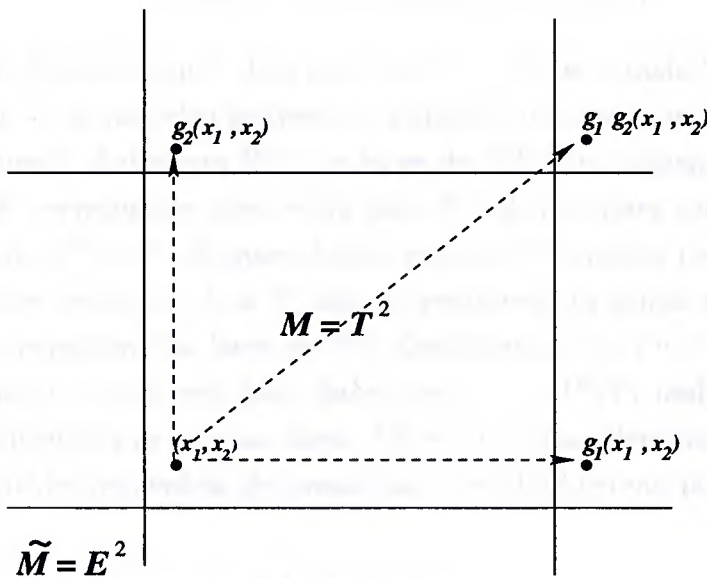


Figura 1.3: A ação do grupo de holonomia do toro.

### 1.2.6 Poliedro Fundamental

Nas subseções anteriores vimos que os conceitos do grupo de holonomia  $\Gamma$  são usados para, a partir de uma variedade quociente  $M$ , reproduzir o espaço de recobrimento

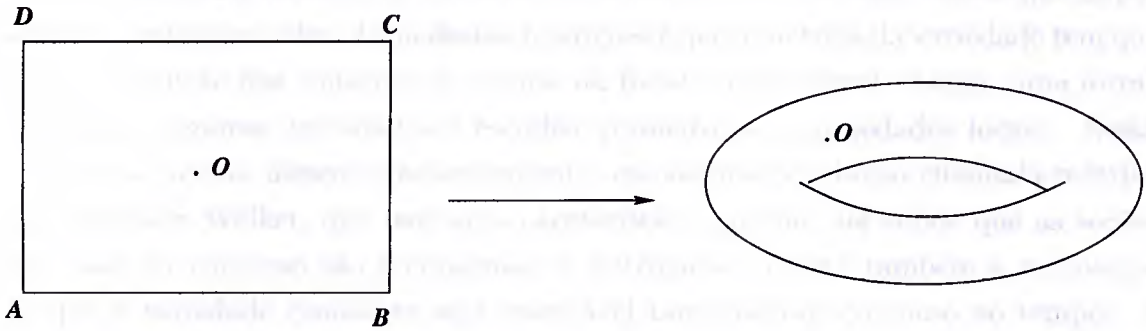


Figura 1.4: O poliedro fundamental do toro, com as identificações  $AB \rightarrow DC$  e  $AD \rightarrow BC$ .

$\tilde{M}$ . Na prática,  $M$  é descrita pelo maior domínio simplesmente conexo em  $\tilde{M}$ , que contenha os pontos que pertencem a  $M$ . Este domínio é chamado de Poliedro Fundamental (PF) da variedade  $M$ . Um tipo particular de  $PF$  é denominado poliedro fundamental de Dirichlet, que é definido para um *ponto base*  $x \in \tilde{M}$  como:

$$PF = \{y \in \tilde{M}, d(x, y) \leq d(y, g(x)), \forall g \in \Gamma\}, \quad (1.7)$$

onde  $d(a, b)$  é a distância entre dois pontos  $a$  e  $b$ . Se a variedade é compacta, o  $PF$  de Dirichlet é um poliedro convexo e compacto que tem um número finito de faces devido a que  $\Gamma$  é discreto [8]. As faces do  $PF$  são análogas por pares isto é, a cada face  $\mathcal{F}$  corresponde uma outra face  $\mathcal{F}'$  tal que, para cada ponto  $x \in \mathcal{F}$  existe outro ponto  $x' \in \mathcal{F}'$ , os quais foram gerados do mesmo ponto  $x \in M$ . Os deslocamentos que levam de  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}'$  são os geradores do grupo de holonomia  $\Gamma$ . Assim, podemos considerar as faces do  $PF$  identificadas. Na Fig. 1.4 é apresentado um caso ilustrativo, o toro em duas dimensões  $T^2 = R^2/\Gamma$ , onde as faces  $AD$  e  $BC$  estão identificadas por  $g_1$  e as faces  $AB$  e  $DC$  estão identificadas por  $g_2$ . Os domínios de Dirichlet dependem do ponto que é escolhido como ponto base.

### 1.3 Excluindo algumas Variedades

As soluções das equações de campo da Relatividade Geral são variedades do tipo  $(M^4, ds^2)$ , onde  $M^4$  é uma variedade tetradimensional e  $ds^2$  é uma métrica lorentziana. O número de variedades classificadas pela topologia compatíveis com aquelas soluções é grande. Como em todas as áreas da Física, vamos ter várias variedades sem relevância porque não estão de acordo com as observações e experiências que foram feitas até a atualidade.

Para construir modelos do Universo reais mediante variedades, tem-se que impor algumas restrições nelas. Uma destas restrições é que a métrica da variedade tem que ser uma solução das equações de campo da Relatividade Geral. Assim, uma forma de excluir algumas variedades é escolher primeiro as propriedades locais. Nesta dissertação, como dissemos anteriormente, escolhemos a solução chamada métrica de Robertson-Walker, que tem uma característica especial, ela supõe que as seções espaciais do Universo são homogêneas e isotrópicas. Existe também a motivação de que a variedade candidata seja orientável tanto no espaço como no tempo. A orientabilidade temporal tem muito a ver com a orientação do tempo do passado ao futuro no Universo. Este é mais um fato de senso comum, que também é imposto na relatividade especial e na relatividade geral. Para entender um pouco a motivação de que nosso Universo seja orientável no tempo, imaginemos que um astronauta começa uma viagem num ponto qualquer. Para ele como para todos nós, o tempo vai do passado ao futuro. Ele vai viajando e em cada ponto da sua trajetória a orientação continua a mesma; assim, quando voltar para o ponto de partida a orientação do tempo vai ter que ser a mesma para qualquer trajetória que ele faça. Uma variedade orientável no tempo é difeomorfa ao produto de um intervalo de reta e uma variedade tridimensional [7], ou seja:

$$M^4 = R \times M^3, \quad (1.8)$$

onde  $M^3$  é uma variedade Riemanniana tridimensional e  $R$  é uma reta.

Da Eq. 1.8 pode-se ver que a procura da topologia do Universo se reduz a procurar a trivariabilidade  $M^3$ . Existe outra motivação para considerar que  $M^3$  deve ser espacialmente orientada [9], baseada no teorema da invariância por transformações de  $CPT$  <sup>¶</sup> e dos produtos  $CP$ ,  $PT$  e  $CT$ . A invariância de  $PT$  indica que o espaço-tempo tem que ser orientável. Como ele é temporalmente orientado, segue que deve ser espacialmente orientável <sup>||</sup>. Com a nossa escolha da métrica RW, ela pode escrita como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\sigma^2. \quad (1.9)$$

Esta métrica faz que consideremos a homogeneidade e isotropia em qualquer ponto do Universo, o que implica que num certo instante de tempo qualquer observador medirá a mesma distribuição de matéria e radiação em qualquer direção que observe. Uma consequência disto é que o espaço teria curvatura seccional constante. Existem três tipos de geometrias que têm curvatura constante: a esférica, a euclidiana e a hiperbólica. Mas, para cada tipo de geometria pode existir um grande número de topologias (variedades).

<sup>¶</sup> $C$  inversão da carga,  $P$  inversão espacial e  $C$  inversão temporal.

<sup>||</sup>Não consideramos as violações do teorema  $CPT$  em casos isolados.



## 1.4 Variedades Riemannianas Tridimensionais com Curvatura Constante: Classificação

Na subseção anterior, vimos que a procura da topologia do Universo se reduz a estudar as triviedades espaciais, orientáveis e de curvatura constante. Nesta seção apresentamos de uma maneira rápida e sucinta a classificação destes três tipos de geometrias, que pertencem a uma classe mais geral de variedades chamadas *localmente homogêneas*. Estas variedades podem-se estudar como variedades quociente  $\tilde{M}/\Gamma$  onde  $\tilde{M}$  é o espaço de recobrimento universal de  $M$ , e  $\Gamma$  é um grupo discreto de isometrias de  $\tilde{M}$  sem pontos fixos, chamado grupo de holonomia de  $M$ .

### 1.4.1 Espaços Tridimensionais Euclidianos

A métrica para os espaços com geometria euclidiana é bem conhecida [15]:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (1.10)$$

O grupo total de isometrias é  $G = ISO(3) = R^3 \times SO(3)$  [7]. A classificação dos espaços euclidianos depende dos possíveis grupos de holonomia para reproduzir o espaço de recobrimento universal, neste caso  $\tilde{M} = E^3$ . Os elementos do grupo de holonomia podem incluir, além da identidade, quaisquer transformações discretas e sem ponto fixo. Estas podem ser: translações, movimentos helicoidais e suas combinações. Já é conhecido que existem 18 tipos diferentes de espaços tridimensionais localmente euclidianos, 8 deles não-compactos e 10 compactos. Destes 10 compactos, só 6 são orientáveis. Na Tab. 1.1 mostramos os geradores dos grupos de holonomia para cada um exemplo de cada família das triviedades compactas e orientáveis. As variedades compactas podem-se visualizar melhor com o *PF*. Na Fig 1.5 apresentamos seus poliedros fundamentais e na Tab. 1.1 as possíveis identificações para construir estas variedades. Para simplificar os cálculos, vamos considerar que os lados dos *PF* são iguais a  $L$ . Para calcular os geradores do grupo de holonomia, usamos como origem o ponto  $B'$  do cubo, e o centro da face  $A'B'C'D'E'F'$  no caso do prisma hexagonal.

### 1.4.2 Espaços Tridimensionais Esféricos

Considerando que a triessfera  $S^3$  de raio  $R$  é um conjunto de pontos em  $E^4$  equidistantes de um centro, pode-se ver que o grupo completo de isometrias, excluindo as inversões, é  $G = SO(4)$ . O espaço de recobrimento universal para o caso das variedades com geometria esférica é  $\tilde{M} = S^3$ . Todas estas variedades são necessa-

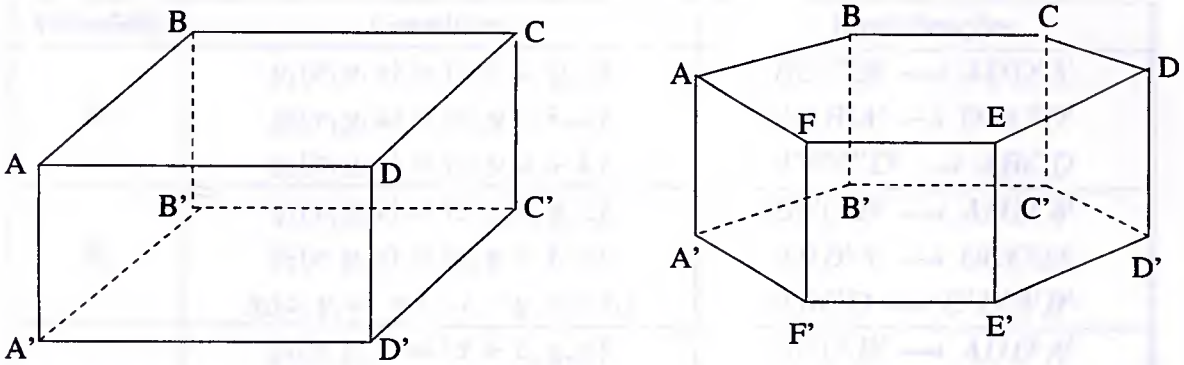


Figura 1.5: Poliedros fundamentais das variedades euclidianas com lados iguais a  $L$ .

riamente compactas [7]. A métrica para os espaços com geometria esférica é [15]:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \text{sen}^2\chi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2), \quad (1.11)$$

com  $0 \leq \chi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Apresentamos aqui só alguns exemplos de  $\Gamma$ .

- **O Grupo Cíclico de ordem  $p$  ( $\Gamma = Z_p, p \geq 2$ ):** Um grupo cíclico tem como elementos as potências de um elemento simples \*\*:  $\Gamma = \{g, g^2, g^3, \dots, g^p = I\}$ . Este tipo de holonomia origina os denominados espaços lentes ( $S^3/Z_p$ ). O espaço lente mais simples o chamado Espaço Projetivo ( $P^3$ ). Ele é formado pelo grupo cíclico de ordem 2, isto é  $P^3 = S^3/Z_2$ . É obtido pela identificação de pontos opostos de uma esfera. Ele é orientável.
- **O Grupo Diédrico de Ordem  $2m$  ( $\Gamma = D_p, m > 2$ ):** Ele é gerado por dois elementos:  $A$  e  $S$  tal que,  $A^m = I$ ,  $S^2 = I$  e  $SAS^{-1} = cA^{-1}$ , onde  $c$  é uma  $m$ -ésima raiz da unidade.
- **Os Grupos Poliédricos:** São os grupos de simetria isomorfos aos de poliedros fundamentais em  $R^3$ . Eles podem ser: o grupo  $T$  do tetraedro, o grupo  $O$  do octaedro e o grupo  $I$  do icosaedro.

O número de grupos de holonomias  $\Gamma$  nesta geometria, é infinito devido aos parâmetros  $p$  e  $m$ , fazendo com que o número de variedades esféricas também o seja. Para um estudo mais detalhado da classificação das trivariiedades com geometria esférica ver [10].

\*\*Um grupo cíclico  $Z_p$  pode, por exemplo, ser constituído por potências da raiz  $p$ -ésima da unidade,  $g_m = \exp(2\pi mi/p), m = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ .

Variedade	Geradores	Identificações
$E_1$	$g_1(x, y, z) = (x + L, y, z)$ $g_2(x, y, z) = (x, y + L, z)$ $g_3(x, y, z) = (x, y, z + L)$	$BCC'B' \rightarrow ADD'A'$ $ABB'A' \rightarrow DCC'D'$ $A'B'C'D' \rightarrow ABCD$
$E_2$	$g_1(x, y, z) = (x + L, y, z)$ $g_2(x, y, z) = (x, y + L, z)$ $g_3(x, y, z) = (-x, -y, z + L)$	$BCC'B' \rightarrow ADD'A'$ $ABB'A' \rightarrow DCC'D'$ $ABCD \rightarrow C'D'A'B'$
$E_3$	$g_1(x, y, z) = (x + L, y, z)$ $g_2(x, y, z) = (x, y + L, z)$ $g_3(x, y, z) = (y, -x, z + L)$	$BCC'B' \rightarrow ADD'A'$ $ABB'A' \rightarrow DCC'D'$ $ABCD \rightarrow B'C'D'A'$
$E_4$	$g_1(x, y, z) = (-x, z, y + L)$ $g_2(x, y, z) = (-x, z + L, y)$ $g_3(x, y, z) = (x + L, -y, -z)$	$BCC'B' \rightarrow C'D'DC$ $ABB'A' \rightarrow D'A'AD$ $ABCD \rightarrow C'D'A'B'$
$E_5$	$g_1(x, y, z) = (\frac{-x-y\sqrt{3}}{2}, \frac{x\sqrt{3}-y}{2}, z + L)$ $g_2(x, y, z) = (x + \frac{3L}{2}, y - \frac{L\sqrt{3}}{2}, z)$ $g_3(x, y, z) = (x + \frac{3L}{2}, y + \frac{L\sqrt{3}}{2}, z)$ $g_4(x, y, z) = (x, y + L\sqrt{3}, z)$	$ABCDEF \rightarrow C'D'E'F'A'B'$ $AA'F'F \rightarrow CC'D'D$ $EE'D'D \rightarrow AA'B'B$ $FF'E'E \rightarrow BB'C'C$
$E_6$	$g_1(x, y, z) = (\frac{x-y\sqrt{3}}{2}, \frac{x\sqrt{3}+y}{2}, z + L)$ $g_2(x, y, z) = (x + \frac{3L}{2}, y - \frac{L\sqrt{3}}{2}, z)$ $g_3(x, y, z) = (x + \frac{3L}{2}, y + \frac{L\sqrt{3}}{2}, z)$ $g_4(x, y, z) = (x, y + L\sqrt{3}, z)$	$ABCDEF \rightarrow B'C'D'E'F'A'$ $AA'F'F \rightarrow CC'D'D$ $EE'D'D \rightarrow AA'B'B$ $FF'E'E \rightarrow BB'C'C$

Tabela 1.1: Geradores e identificações de 6 variedades compactas e orientáveis euclidianas, com referência à Fig. 1.5.

### 1.4.3 Espaços Tridimensionais Hiperbólicos

A métrica dos espaços tridimensionais hiperbólicos com curvatura constante é [15]:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \text{sen}^2\chi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2), \tag{1.12}$$

com  $0 \leq \chi < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Ainda não existe uma classificação completa das variedades hiperbólicas. Portanto, nesta seção limitamo-nos a apresentar alguns comentários. Considerando que o espaço hiperbólico  $H^3$  é uma hipersuperfície no espaço de Minkowski, pode-se ver que os elementos dos grupos de holonomia nesta geometria são equivalentes a transformações de Lorentz em  $M^4$ . Existe um programa chamado SnapPea [11] no qual pode-se encontrar uma lista de 11031 variedades hiperbólicas compactas e orientáveis ordenadas pelo volume.

Nele podem-se obter os geradores do grupo de holonomia, o PF, o volume e outras informações adicionais. A variedade com o menor volume (com curvatura normalizada a  $K = -1$ ) da lista é conhecida como Espaço de Weeks. Aqui só falaremos, à maneira de exemplo, dessa variedade:

- Espaço de Weeks: O PF tem 26 vértices e 18 faces; 12 delas são pentágonos e 6 são tetrágonos. O volume é 0,942707....

## Capítulo 2

# Anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo

Neste capítulo vamos estudar algumas das pequenas anisotropias do Universo, associando-as a pequenas perturbações na métrica de um espaço-tempo, que é tomado como espaço-tempo de fundo. As perturbações, que em geral não são invariantes de gauge, podem ser invariantes fazendo a escolha de um gauge particular. Aqui faremos esta escolha e trabalharemos durante todo o capítulo com as perturbações invariantes. Com a métrica no gauge escolhido, vamos calcular as perturbações da conexão, do tensor de Ricci, da curvatura escalar e do tensor de Einstein, as quais serão consequência de ser perturbada a métrica. Por outro lado, encontraremos uma maneira invariante de escrever as perturbações do tensor energia-momento e introduziremos estes resultados nas equações de campo para as pequenas perturbações. Das equações de campo e mais algumas considerações termodinâmicas, vamos encontrar uma equação de movimento geral para as perturbações.

Na segunda parte deste capítulo, estudamos a propagação dos fótons no espaço-tempo perturbado, que tem como métrica a métrica perturbada no gauge escolhido. Encontraremos que a imposição destas perturbações, tem como consequência a aparição de anisotropias na temperatura da Radiação Cósmica de Fundo, efeito que é conhecido com o nome de *Efeito de Sachs-Wolfe*. A partir de agora, para todos os cálculos consideraremos  $c = 1$ .

### 2.1 A Radiação Cósmica de Fundo

Introduzindo o principio cosmológico\* e o postulado de Weyl† no formalismo da relatividade geral, e imaginando que a matéria no Universo pode-se tratar como um gás

---

\*O Universo é homogêneo e isotrópico em cada tempo particular.

†As linhas de mundo das galáxias designadas como observadores fundamentais, formam um conjunto de geodésicas que não se cortam, ortogonais a uma série de superfícies do tipo espaço [13].

ideal de poeira<sup>†</sup>, pode-se chegar a obter o modelo chamado de Friedmann-Lemaître com métrica Robertson Walker (FLRW). Até recentemente, o modelo FLRW estava de acordo com as observações astronômicas. O triunfo deste modelo apoiava-se na observação de alguns fatos preditos por ele. Entre estes fatos têm-se: a expansão do Universo, a observação das abundâncias primordiais de hidrogênio e hélio e a observação da Radiação Cósmica de Fundo (RCF).

A existência de uma RCF que estaria em todo o Universo e que seria isotrópica foi proposta em 1946 por Gamow, Alpher e Herman. No ano de 1965, acidentalmente, Penzias e Wilson detectaram pela primeira vez aquela radiação de fundo e confirmaram a sua natureza isotrópica, já que era a mesma em todas direções do céu. A temperatura que mediram foi  $T \sim 3K$ .

Entre 1965 e 1989, experiências feitas com balões indicaram que a radiação tinha um espectro de tipo planckiano, ou seja, equivalente a um espectro de corpo negro. Em 1989 o satélite COBE foi enviado à órbita pela NASA. Ele mediu outra vez a temperatura da RCF, agora com mais precisão. A temperatura medida foi de  $T = 2,735 \pm 0,06K$ .

Em 1992 o COBE encontrou algumas anisotropias no espectro da radiação de fundo. Essas anisotropias eram da ordem de  $\delta T/T \sim 10^{-5}$  numa escala angular de  $10^\circ$  [16]. Este fato, confirmou as suspeitas de que o Universo não é exatamente homogêneo e isotrópico, senão que existem algumas pequenas inhomogeneidades. Estas inhomogeneidades poderiam ter-se originado nos primórdios do Universo e foram evoluindo até hoje, formando algumas estruturas a grande escala como galáxias e seus aglomerados, etc. Isto também trouxe como consequência as anisotropias na radiação de fundo.

Para estudar a RCF, supomos que o Universo deve ter começado num estado de alta densidade e temperatura. O gás de fótons e matéria do qual o Universo estava composto nos primórdios, foi se esfriando até chegar à etapa da recombinação. Nesta etapa, os prótons e elétrons começaram formar hidrogênio; portanto, o caminho livre médio para os fótons aumentou e já não tinham muita interação com a matéria. Ocorreu assim, um desacoplamento entre matéria e radiação. Os fótons quase livres começaram a se propagar por todo o Universo com uma distribuição de corpo negro. O limite onde ocorreu o desacoplamento chama-se Última Superfície de Espalhamento (USE). A USE corresponde à região em que os fótons foram espalhados pela última vez antes de chegarem aos nossos detectores. Uma consequência do modelo padrão da Cosmologia (FLRW), é a relação entre o desvio para o vermelho

---

<sup>†</sup>Esta simplificação foi feita por A. Friedmann entre 1922 e 1924 [13].

e a temperatura, dada pela seguinte relação[13]:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{T(t)}{T(t_0)}. \quad (2.1)$$

A temperatura medida atualmente é  $T \sim 2.7K$  e a temperatura da USE é  $T_{USE} = 3000K$  com  $z_{USE} \sim 1100$ , que é equivalente a  $10^{10}$  ano luz.

## 2.2 Perturbações Cosmológicas

Vamos estudar agora aquelas anisotropias da RCF usando a teoria de perturbações cosmológicas. Esta teoria é importante na cosmologia moderna porque mediante ela pode-se explicar o crescimento de estruturas a grande escala no Universo e em particular, as pequenas anisotropias na RCF. Para fazer o estudo destas perturbações, vamos postular um pequeno desvio de um espaço-tempo, o qual é escolhido arbitrariamente e usado como um espaço-tempo de fundo com métrica  $g_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Neste caso, podemos escrever a métrica do espaço-tempo perturbado  $g_{\alpha\beta}$  como:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{(0)} + \delta g_{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

onde  $\delta g_{\alpha\beta}$  é chamada de perturbação da métrica de fundo  $g_{\alpha\beta}^{(0)}$ . As perturbações das métricas são construídas usando campos escalares, vetoriais ou tensoriais. Logo, elas podem ser de três tipos diferentes: “escalares”, “vetoriais” ou “tensoriais”, dependendo do tipo do campo com que são construídas [17]. Nesta dissertação vamos estudar só aquelas perturbações do tipo “escalar”, pois elas são suficientes para explicar as anisotropias da RCF. O modelo de Universo de fundo que vamos escolher será o FLRW, o que corresponde a dizer que a métrica  $g_{\alpha\beta}^{(0)}$  será desse tipo. No caso das perturbações “escalares”, a forma mais geral de que funções escalares entrem em  $\delta g_{ij}$  é:

- (i) Multiplicando o escalar por um tensor numa hipersuperfície com métrica igual à métrica do fundo num tempo constante, ou
- (ii) Calculando suas derivadas covariantes com respeito à métrica de fundo da hipersuperfície.

Portanto, a forma mais geral de uma perturbação escalar é [18]:

$$\delta g_{\alpha\beta} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & -B_{;i} \\ -B_{;i} & 2(\psi\gamma_{ij} - E_{;ij}) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

onde:  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $E$  e  $B$  são campos escalares,  $a(\eta)$  é o parâmetro de expansão,  $\eta$  é o tempo conforme,  $d\eta = a^{-1}(t)dt$ , ";" indica uma derivada espacial covariante<sup>§</sup> com relação à métrica da seção espacial:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \left[ 1 + \frac{\mathcal{K}}{4} (x^2 + y^2 + z^2) \right]^{-2}, \quad (2.4)$$

com  $\mathcal{K} = -1, 0, 1$  dependendo se o Universo de fundo considerado seja hiperbólico, euclidiano ou esférico, respectivamente.

### 2.2.1 Invariância de Gauge e Perturbações Cosmológicas

As transformações de gauge, no contexto das perturbações cosmológicas, como em outras áreas da física, estão relacionadas com transformações infinitesimais de coordenadas. Consideremos assim, a seguinte transformação infinitesimal:

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x^\nu). \quad (2.5)$$

Na Eq. 2.2 apresentamos a forma da métrica perturbada no sistema de coordenadas  $x$ ; no novo sistema de coordenadas  $\tilde{x}$  escrevemos agora:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}^{(o)} + \delta\tilde{g}_{\alpha\beta}. \quad (2.6)$$

Temos que fazer a escolha da métrica de fundo  $\tilde{g}_{\alpha\beta}^{(o)}$ . Como essa escolha é arbitrária, podemos escolher que ela seja também homogênea e isotrópica, ou mesmo  $\tilde{g}_{\alpha\beta}^{(o)} = g_{\alpha\beta}^{(o)}$ . Agora, com a mudança de coordenadas da Eq. 2.5, obtemos:

$$\Delta g_{\alpha\beta} = \delta\tilde{g}_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

e vemos que, em geral, as perturbações métricas não são invariantes de gauge e que uma condição necessária para isto acontecer é que  $\Delta g_{\alpha\beta}$  seja nulo. Para estudar melhor as tranformações feitas é conveniente escrever [19]:

$$\varepsilon^\mu = (\varepsilon^0, \varepsilon^i), \quad (2.8)$$

onde a parte espacial pode ser escrita como:

$$\varepsilon^i = \varepsilon_{tr}^i + \gamma^{ij} \varepsilon_{;j}; \quad (2.9)$$

a função  $\varepsilon$  é solução da equação:

$$\varepsilon_{;i}^{;i} = \varepsilon_{;i}^i \quad (2.10)$$

---

<sup>§</sup>No caso dos escalares nas hipersuperfícies, a derivada covariante é igual à derivada comum denotada por ";".



e o vetor transversal  $\varepsilon_{tr}^i$  satisfaz a condição:

$$\varepsilon_{tr;i}^i = 0. \quad (2.11)$$

Continuando com o nosso estudo, uma transformação do tipo da Eq. 2.5 nos leva a que a perturbação  $\delta g_{\alpha\beta}$  transforma-se da seguinte maneira<sup>¶</sup>:

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \delta g_{\mu\nu}(x) - \varepsilon_{,\mu}^\alpha g_{\alpha\nu}^{(o)}(x) - \varepsilon_{,\nu}^\alpha g_{\mu\alpha}^{(o)}(x) - \varepsilon^\alpha g_{\mu\nu,\alpha}^{(o)}(x), \quad (2.12)$$

onde a vírgula denota a diferenciação com respeito à variável correspondente ao índice seguinte:  $g_{\mu\nu,\lambda} = \partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$ . Usando as Eqs. 2.9-2.11 e a Eq. 2.12, pode-se mostrar que os campos escalares a partir dos quais a perturbação foi construída, têm as seguintes leis de transformações:

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{a'}{a}\varepsilon^0 - \varepsilon^{0'}, \quad (2.13)$$

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\varepsilon^0, \quad (2.14)$$

$$\tilde{B} = B + \varepsilon^0 - \varepsilon', \quad (2.15)$$

$$\tilde{E} = E - \varepsilon, \quad (2.16)$$

onde  $\varepsilon' = \partial\varepsilon/\partial\eta$ . Bardeen em [17], procurou combinações lineares de  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $B$  e  $E$  que fossem independentes da escolha do gauge, isto é, que elas manteriam  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{B}$  e  $\tilde{E}$  invariantes [20]. Estas combinações são:

$$\Phi = \phi + (1/a)[(B - E')a]' \quad \Psi = \psi - (a'/a)(B - E'). \quad (2.17)$$

Peguemos agora, a variável  $\Phi$  da Eq. 2.17. Fazendo uma transformação do tipo da Eq. 2.5, no sistema  $\tilde{x}$  será:

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\phi} + (1/a)[(\tilde{B} - \tilde{E}')a]', \quad (2.18)$$

usando as leis de transformação das Eqs.2.16, chega-se a:

$$\tilde{\Phi} = \phi + (1/a)[(B - E')a]' = \Phi, \quad (2.19)$$

o que mostra que  $\Phi$  é uma variável invariante de gauge. Da mesma maneira podemos mostrar que  $\tilde{\Psi} = \Psi$ .

Nas transformações feitas, podemos fazer a escolha de um sistema  $(\varepsilon^0, \varepsilon^i)$  em particular. Nesta dissertação vamos escolher o chamado gauge longitudinal ou newtoniano, onde os cálculos tornam-se menos complicados. O gauge longitudinal é caracterizado pela escolha:

$$\varepsilon = E \quad \varepsilon^0 = E' - B. \quad (2.20)$$

<sup>¶</sup>Ver no apêndice C, como as perturbações de quantidades tensoriais se transformam.

Nele, os campos da perturbação ficam:

$$\begin{aligned}\phi_l &= \phi + (1/a)[(B - E')a]', \\ \psi_l &= \psi - (a'/a)(B - E'), \\ B_l &= 0, \\ E_l &= 0,\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde o subíndice “l” indica que as quantidades estão no gauge longitudinal. Note-mos que, com a nossa imposição, as variáveis  $\phi_l$  e  $\psi_l$  são equivalentes a  $\Phi$  e  $\Psi$  respectivamente. Vemos também que os graus de liberdades das variáveis da perturbação foram reduzidos de quatro a dois. Isto implica que, qualquer cálculo no gauge longitudinal é invariante se fizermos  $\phi_l = \Phi$  e  $\psi_l = \Psi$  [20]. Finalmente a perturbação métrica invariante de gauge coincide com a perturbação métrica no gauge longitudinal, que é:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j\}.\tag{2.22}$$

### 2.2.2 Perturbando a Métrica de RW

Como dissemos anteriormente, a nossa métrica de fundo será do tipo RW:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j).\tag{2.23}$$

Por outro lado, as equações de Einstein são:

$$G_{\tau\beta}^\alpha = 8\pi G T_{\beta}^\alpha,\tag{2.24}$$

com:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R,\tag{2.25}$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $G_{\alpha\beta}$  é o tensor de Einstein,  $R_{\alpha\beta}$  é o tensor de Ricci e  $R = R_{\alpha}^{\alpha}$  é a curvatura escalar. Para os cálculos consideramos o tensor de Ricci como:

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\lambda,\beta}^\lambda - \Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^\lambda + \Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma.\tag{2.26}$$

Se levarmos em consideração os tensores perturbados:

$$G_{\beta}^{\alpha} = G_{\beta}^{(o)\alpha} + \delta G_{\beta}^{\alpha} \quad T_{\beta}^{\alpha} = T_{\beta}^{(o)\alpha} + \delta T_{\beta}^{\alpha},\tag{2.27}$$

tem-se que as equações linearizadas para pequenas perturbações são:

$$\delta G_{\alpha\beta} = 8\pi\delta T_{\alpha\beta}.\tag{2.28}$$

Estas equações valem para qualquer gauge que escolhamos, em particular para o gauge longitudinal. Levando em conta o modelo FLRW, tem-se que as componentes do tensor de Einstein são<sup>||</sup>:

$$G_0^{(o)0} = 3a^2(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K}), \quad G_i^{(o)0} = 0, \quad G_j^{(o)i} = a^{-2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{K})\delta_j^i, \quad (2.29)$$

onde  $\mathcal{H} \equiv a'/a$ . Usando a métrica da Eq. 2.22, as relações do apêndice C, e tirando do espaço-tempo de fundo as quantidades necessárias, calculamos os  $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ :

$$\delta\Gamma_{00}^0 = \Phi', \quad \delta\Gamma_{0i}^0 = \Phi_{,i}, \quad (2.30)$$

$$\delta\Gamma_{00}^i = \gamma^{ij}\Phi_{,j}, \quad \delta\Gamma_{j0}^i = -\Psi'\delta_j^i, \quad (2.31)$$

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = [-2\mathcal{H}(\Phi + \Psi) - \Psi']\gamma_{ij}, \quad (2.32)$$

$$\delta\Gamma_{jk}^i = -\gamma^{il}(\Psi_{,k}\gamma_{jl} + \Psi_{,j}\gamma_{kl} - \Psi_{,l}\gamma_{jk}); \quad (2.33)$$

os  $\delta R_{\alpha\beta}$ :

$$\delta R_{00} = -\gamma_{,i}^{ij}\Phi_{,j} + \gamma^{ij}\Phi_{,ij} - \gamma^{ij}\Phi_{,j}\Gamma_{ik}^{(o)k} - 3\Psi'' - 3\mathcal{H}(\Psi' + \Phi'). \quad (2.34)$$

Para ver a forma de  $\Gamma_{ik}^{(o)k}$  ver apêndice A;

$$\delta R_{0i} = -2(\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{,i}, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{ij} = & [\Psi'' + \mathcal{H}(\Psi' + \Phi') + 2\mathcal{H}'(\Phi + \Psi) + \frac{1}{3}\nabla^2\Phi] - 4[2\mathcal{H}\Psi' \\ & + 2\mathcal{H}^2(\Psi + \Phi)]\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2(\Phi + 5\Psi) + (3\Psi + \Phi)_{,ij}; \end{aligned} \quad (2.36)$$

o  $\delta R$

$$\begin{aligned} \delta R = & -4a^{-2}(\nabla^2\Psi + 3\mathcal{K}\Psi - \frac{3}{2}\mathcal{H}(\Psi' + \Phi') - 6\mathcal{H}^2\Phi + \frac{3}{2}\Psi'' - \gamma_{,i}^{ij}\Phi_{,j} \\ & + \gamma^{ij}\Phi_{,ij} - \gamma^{ij}\Phi_{,j}\Gamma_{ik}^{(o)k}); \end{aligned} \quad (2.37)$$

e, finalmente os  $\delta G_{\beta}^{\alpha}$ :

$$\delta G_0^0 = 2a^{-2}[-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi + 3\mathcal{K}\Psi], \quad (2.38)$$

$$\delta G_i^0 = 2a^{-2}[\mathcal{H}\Phi + \Psi']_{,i}, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i = & -2a^{-2}\{[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{K}\Psi + \\ & \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi)]\delta_j^i - \frac{1}{2}\gamma^{ik}(\Phi - \Psi)_{,kj}\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

<sup>||</sup>Ver apêndice A.

### 2.2.3 Perturbando o Tensor Energia-Momento

Na subseção anterior, encontramos os  $\delta G_\beta^\alpha$  no gauge longitudinal. Voltando às equações para as perturbações (Eq. 2.28), vemos que para o estudo ser consistente, o lado direito dessas equações tem que estar também no gauge longitudinal, portanto tem que ser invariante. O lado direito é aquele que contém a variação do tensor energia-momento  $\delta T_\beta^\alpha$ . Para ele ser invariante de gauge, as suas componentes também têm que serem construídas por variáveis invariantes de gauge. Como o  $\delta T_\beta^\alpha$  é uma perturbação de um tensor, vai se transformar como:

$$\delta \tilde{T}_\beta^\alpha = \delta T_\beta^\alpha + \varepsilon_{,\mu}^\alpha T_\beta^{(o)\mu} - \varepsilon_{,\beta}^\mu T_\mu^{(o)\alpha} + \varepsilon^\mu T_{\beta,\mu}^{(o)\alpha}. \quad (2.41)$$

A diferença de sinais desta equação com relação à Eq. 2.12 está em que, neste caso os tensores perturbado e de fundo são mixtos.

Usando a Eq. 2.41 e considerando o tensor energia-momento de fundo em um Universo FLRW, tem-se as seguintes leis de transformações para as componentes da perturbação  $\delta T_\beta^\alpha$ :

$$\delta \tilde{T}_0^0 = \delta T_0^0 - \varepsilon^0 T_0'^{(o)0}, \quad (2.42)$$

$$\delta \tilde{T}_i^0 = \delta T_i^0 - \varepsilon_{,i}^0 (T_0^{(o)0} - \frac{1}{3} T_k^{(o)k}), \quad (2.43)$$

$$\delta \tilde{T}_j^i = \delta T_j^i + \varepsilon^0 T_j'^{(o)i}. \quad (2.44)$$

Por outro lado, impomos que o  $T_\beta^\alpha$  tenha a forma:

$$T_\beta^\alpha = (\varepsilon + p) u^\alpha u_\beta - p \delta_\beta^\alpha, \quad (2.45)$$

com:

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \delta\varepsilon, \quad (2.46)$$

$$p = p_o + \delta p, \quad (2.47)$$

$$u_\alpha = u_\alpha^{(o)} + \delta u_\alpha, \quad (2.48)$$

e consideramos que no espaço-tempo de fundo escolhido temos:

$$T_\beta^{(o)\alpha} = (\varepsilon_o + p_o) u^{(o)\alpha} u_\beta^{(o)} - p_o \delta_\beta^\alpha, \quad (2.49)$$

onde  $\delta\varepsilon$  e  $\delta p$  são as perturbações da densidade de energia e da pressão respectivamente;  $\varepsilon_o$  e  $p_o$  são a densidade de energia e a pressão no Universo de fundo e com:  $u^{(o)\mu} = (a^{-1}, 0, 0, 0)$  e  $u_\mu^{(o)} = (a, 0, 0, 0)$ .

Com a Eq. 2.45, o grupo de Eqs. 2.46-2.48 e a Eq. 2.49, chegamos a que a forma mais geral da perturbação do tensor energia-momentum, em primeira ordem é [19]:

$$\delta T_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon & (\varepsilon_o + p_o) a^{-1} \delta u_i \\ -(\varepsilon_o + p_o) a \delta u^i & -\delta p \delta_j^i \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Aqui pode-se associar um potencial escalar  $V$  à perturbação da trivelocity do fluido  $\delta u_i$ . Usando as Eqs. 2.42, 2.43, 2.44 e 2.50 temos que:

$$\delta\tilde{T}_0^0 = \delta\epsilon - \epsilon^0 \epsilon'_o, \quad (2.51)$$

$$\delta\tilde{T}_i^0 = (\epsilon_o + p_o)a^{-1}\delta u_i - \epsilon_{,i}a(\epsilon_o + p_o), \quad (2.52)$$

$$\delta\tilde{T}_j^i = (-\delta p + \epsilon^0 p'_o)\delta_j^i. \quad (2.53)$$

$\delta p$  e  $\delta\epsilon$  são perturbações de quantidades escalares, portanto suas transformações são\*\*:

$$\delta\tilde{\epsilon} = \delta\epsilon - \epsilon^0 \epsilon'_o, \quad (2.54)$$

$$\delta\tilde{p} = \delta p - \epsilon^0 p'_o. \quad (2.55)$$

$\delta u_i$  é uma perturbação de uma quantidade vetorial que se transforma como ††:

$$\delta\tilde{u}_i = \delta u_i - a\epsilon^o_{,i}. \quad (2.56)$$

Notemos que os grupos de Eqs. 2.51-2.53 e Eqs. 2.54-2.56 são equivalentes, e isto traz como consequência:

$$\delta\tilde{T}_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \delta\tilde{\epsilon} & (\epsilon_o + p_o)a^{-1}\delta\tilde{u}_i \\ -(\epsilon_o + p_o)a\delta\tilde{u}^i & -\delta\tilde{p}\delta_j^i \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Isto é,  $\delta\tilde{T}_\beta^\alpha$  tem a mesma forma de  $\delta T_\beta^\alpha$  (Eq.2.50), com os componentes no sistema  $\tilde{x}$ . Se agora, em particular, impomos que  $\epsilon^0$  e  $\epsilon$  sejam os mesmos do gauge longitudinal (Eq. 2.20), para as quantidades invariantes podemos escrever:

$$\delta T_0^{(inv)0} = \delta\epsilon^{(inv)}, \quad (2.58)$$

$$\delta T_i^{(inv)0} = -(\epsilon_o + p_o)a\delta u_i^{(inv)}, \quad (2.59)$$

$$\delta T_j^{(inv)i} = -\delta p^{(inv)}\delta_j^i. \quad (2.60)$$

### 2.2.4 Equações de Movimento

Agora que já conhecemos os  $\delta G$  e  $\delta T$  de uma maneira invariante, vamos usar as Eqs. 2.28 para encontrar as equações para  $\Phi$  e  $\Psi$ . Usando os conjuntos de Eqs. 2.38-2.40 e 2.58- 2.60 obtemos:

$$-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi + 3\mathcal{K}\Psi = 4\pi G a^2 \delta\epsilon^{(inv)}, \quad (2.61)$$

\*\*Ver apêndice C.

††Ver também o apêndice C.

$$(\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{,i} = 4\pi G a(\epsilon_o + p_o)\delta u_i^{(inv)}, \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} [(2\mathcal{H} + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{K}\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi)]\delta_j^i \\ - \frac{1}{2}\gamma^{ik}(\Phi - \Psi)_{,kj} = 4\pi G a^2\delta p^{(inv)}\delta_j^i. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Fazendo  $i \neq j$  na Eq. 2.63 e já que as perturbações têm que ter amplitude finita, chegamos a:  $\Phi = \Psi$ . Então, as equações de campo são:

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - 3(\mathcal{H}^2 - \mathcal{K})\Phi = 4\pi G a^2\delta\epsilon^{(inv)}, \quad (2.64)$$

$$(a\Phi)'_{,i} = 4\pi G a^2(\epsilon_o + p_o)\delta u_i^{(inv)}, \quad (2.65)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - \mathcal{K})\Phi = 4\pi G a^2\delta p^{(inv)}. \quad (2.66)$$

Por outro lado, se a pressão depende da densidade de energia e da entropia  $p = p(\epsilon, S)$ , podemos escrever as variações de  $p$  como [19]:

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_S \delta\epsilon + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\epsilon \delta S = c_s^2\delta\epsilon + \tau\delta S \quad (2.67)$$

onde  $c_s$  é a velocidade do som no fluido. Das equações 2.61, 2.63 e 2.67 chega-se a:

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' - c_s^2\nabla^2\Phi + (2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2))(\mathcal{H}^2 - \mathcal{K})\Phi = 4\pi G a^2\tau\delta S. \quad (2.68)$$

Esta é a equação de movimento que permite estudar a evolução das amplitudes de perturbação e voltaremos nela no Cap. 3.

### 2.3 Efeito de Sachs-Wolfe

As anisotropias observadas da RCF, a grande escala<sup>††</sup>, estão relacionadas com as perturbações da métrica como foi mostrado em 1967 por Sachs e Wolfe [23]. Já que a *USE* acontece depois do tempo em que a densidade de materia era aproximadamente igual que à de radiação, as equações para perturbações métricas na era dominada pela materia, podem ser usadas.

Sabe-se que os fótons viajam por geodésicas, então começamos estudando a geodésica num espaço-tempo perturbado. A equação geral para a geodésica de um fóton é:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.69)$$

<sup>††</sup>Escalas angulares maiores que  $1^\circ$  [22].

sendo  $\lambda$  um parâmetro afim. Nas coordenadas  $(\eta, x^i)$ , com:

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (2.70)$$

tem-se:

$$\frac{dx^i}{d\eta} = \frac{p^i}{p^0}. \quad (2.71)$$

Usando propriedades de simetria e antisimetria de tensores, e a relação da Eq. 2.71, a Eq. 2.69 toma a forma:

$$\frac{dp^\mu}{d\eta} = \frac{d\lambda}{d\eta} \frac{dp^\mu}{d\lambda} = \frac{1}{p^0} (-\Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta) = g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} - g_{\nu\alpha,\beta} \right) \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0}, \quad (2.72)$$

com  $p^\mu = (p^0, p^i)$ . Para fazer este estudo, vamos continuar trabalhando no gauge longitudinal, ou seja, nossa métrica vai ser a mesma da Eq. 2.22.

Por outro lado, sabemos que o módulo do trimomento é:

$$|\vec{p}| = p = \sqrt{-g_{ij} p^i p^j}, \quad (2.73)$$

e como, em qualquer espaço-tempo os fótons têm massa zero, podemos escrever:

$$g_{00} (p^0)^2 = p^2, \quad (2.74)$$

portanto:

$$p = a(1 + \Phi)p^0. \quad (2.75)$$

Usando as Eq. 2.72-Eq.2.74, encontramos:

$$\frac{dp^0}{d\eta} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} p^0 - 2\frac{a'}{a} p^0 - 2\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} p^i + \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} p^0. \quad (2.76)$$

Das Eqs.2.75 e 2.76 temos a seguinte equação para  $p$ :

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{d\eta} = -\frac{a'}{a} - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \frac{p^i}{p^0} + \frac{\partial\Psi}{\partial\eta}. \quad (2.77)$$

É sabido também, que a função de distribuição para a RCF num Universo FLRW é dada por [24]:

$$f(p_f) = \frac{1}{e^{p_f/T_f} - 1}, \quad (2.78)$$

onde  $p_f$  é o módulo do trimomento no espaço-tempo de fundo e  $T_f$  é a temperatura associada ao espectro, também no fundo.

Num espaço-tempo perturbado é conveniente expressar essa distribuição pela mesma forma, mas com um novo momento  $p$  e uma nova temperatura  $T$ , de tal modo que:

$$p = p_f + \delta p \quad T = T_f + \delta T. \quad (2.79)$$

Para que a distribuição planckiana em  $p$  associada à temperatura  $T$ , seja a mesma que à de  $p_f$  associada a  $T_f$ , tem-se que satisfazer:

$$\frac{p_f}{p} = \frac{T_f}{T}; \quad (2.80)$$

com isto, obtem-se:

$$1 + \frac{\delta p}{p} = 1 + \frac{\delta T}{T} \Rightarrow \frac{\delta p}{p} = \frac{\delta T}{T}. \quad (2.81)$$

Substituindo a Eq. 2.79 na Eq.2.77, e levando em conta a Eq. 2.81 e que em nosso Universo de fundo:

$$\frac{1}{p_f} \frac{dp_f}{d\eta} = -\frac{a'}{a}, \quad (2.82)$$

chega-se a:

$$\frac{d}{d\eta} \left( \frac{\delta T}{T} \right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{p^i}{p^0} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}. \quad (2.83)$$

Desta equação, a 2.71 e lembrando que  $\Psi = \Psi(\eta, x^i)$  e  $\Phi = \Phi(\eta, x^i)$ , obtem-se:

$$\frac{d}{d\eta} \left( \frac{\delta T}{T} + \Phi \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi + \Psi) \quad (2.84)$$

Integrando a Eq.2.84 entre  $x_{USE} = (\eta_{USE}, x_{USE}^i)$  e  $x_0 = (\eta_0, 0)$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T}(\eta_0, 0) + \Phi(\eta_0, 0) &= \frac{\delta T}{T}(\eta_{USE}, x_{USE}^i) + \Phi(\eta_{USE}, x_{USE}^i) \\ &+ \int_{\eta_{USE}}^{\eta_0} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi + \Psi) d\eta. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Calculemos agora o valor das flutuações de temperatura na  $USE$ . Como  $\eta_{USE} \sim 10^{-2}$ , podemos fazer a seguinte aproximação para as três geometrias:

$$a \propto t^{2/3}; \quad (2.86)$$

e como, pela expansão do Universo:

$$T \propto a^{-1}, \quad (2.87)$$



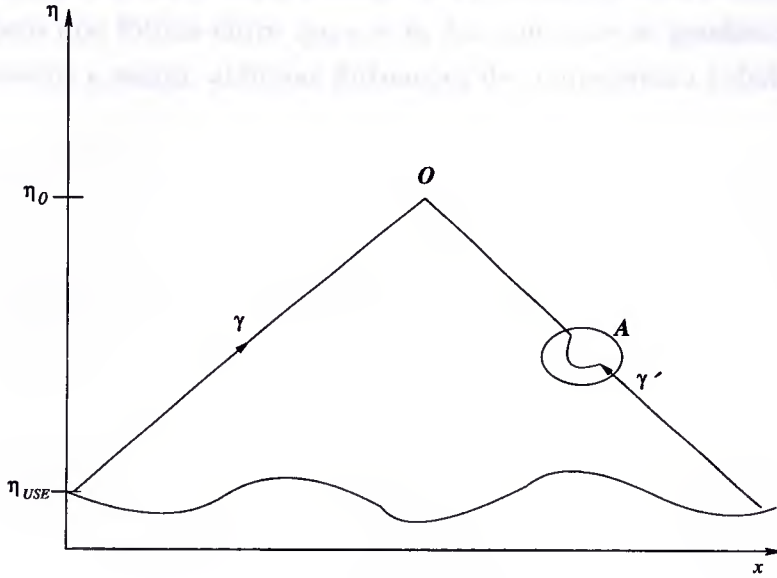


Figura 2.1: Ilustração dos efeitos Sachs-Wolfe ordinário e integrado [19]

chega-se a:

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{2}{3} \frac{\delta t}{t}. \quad (2.88)$$

Por outro lado, a dilatação do tempo está relacionada com  $\Phi$ , já que uma perturbação na parte temporal da métrica traz como consequência uma dilatação temporal [26]. Esta relação é dada por [27]:

$$\frac{\delta t}{t} = \Phi. \quad (2.89)$$

Das Eqs. 2.88 e 2.89 vemos que na era da  $USE$ :

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{2}{3} \Phi. \quad (2.90)$$

Portanto, a Eq. 2.85 toma a forma (notando que  $\Phi(\eta_0, 0)$  é desprezível) e como  $\Phi = \Psi$ :

$$\frac{\delta T}{T}(\eta_0, 0) = \frac{1}{3} \Phi(x_{USE}) + 2 \int_{\eta_{USE}}^{\eta_0} d\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad (2.91)$$

desta equação podemos ver dois tipos de contribuição para as anisotropias da RCF:

- (i) No primeiro termo da Eq. 2.91, as flutuações da densidade de perturbações  $\Phi$  na  $USE$ , faz que os fótons tenham percorrido geodésicas diferentes, geodésicas que os fótons seguem até serem observados no tempo presente (*efeito Sachs-Wolfe ordinário*);



## Capítulo 3

### Restrições da RCF: Espaço Euclidiano

No capítulo anterior realizamos um estudo das amplitudes de perturbação  $\Phi$  da métrica RW, encontrando a sua equação de movimento. Também estudamos a relação entre as flutuações de temperatura  $\delta T/T$  no Universo e essas amplitudes (feito Sachs-Wolfe). Neste capítulo, vamos estudar a equação de movimento para os  $\Phi$  e o efeito de Sachs-Wolfe no espaço euclidiano para um caso de Universo adiabático. Vamos fazer os estudos nos casos do espaço euclidiano simplesmente conexo e dos espaços multiplamente conexos. Usando os geradores  $g_i$  do grupo de holonomia  $\Gamma$  de cada um dos possíveis espaços euclidianos multiplamente conexos, orientáveis e compactos que foram apresentados no Cap. 1, estudaremos as restrições nas flutuações de temperatura. Desta forma, calcularemos a função de correlação e o espectro de potências para cada caso, incluindo o do simplesmente conexo. Veremos que impor as condições de contorno à equação de movimento traz como consequência estas restrições, o que por sua vez, fornece uma característica diferente às funções de correlação e aos espectro de potência para cada caso.

#### 3.1 Flutuações de Temperatura nos Espaços Euclidianos: Efeito de Sachs-Wolfe em $E^3$

A flutuação de temperatura  $\delta T/T$ , como foi apresentada na Eq. 2.91, está relacionada com as amplitudes de perturbação  $\Phi$ . Então, começamos estudando as equações de movimento para  $\Phi$  (Eq. 2.68) em um espaço euclidiano e em um Universo adiabático ( $\delta S = 0$ ). Para resolver esta equação, é útil fazer a seguinte separação de variáveis:

$$\Phi(\eta, \vec{x}) = F(\eta)\Psi(\vec{x}). \quad (3.1)$$

Introduzindo esta separação na Eq. 2.68, obtemos as seguintes equações:

$$F'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)F' + [2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)(\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}) + c_s^2 k^2]F = 0, \quad (3.2)$$

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0. \quad (3.3)$$

O estudo que faremos será na éra dominada pela matéria, nela a velocidade do som é nula ( $c_s = 0$ ). Em um espaço euclidiano a curvatura espacial é também nula ( $\mathcal{K} = 0$ ), então a equação para a parte temporal (Eq. 3.2) fica:

$$F'' + 3\mathcal{H}F' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)F = 0. \quad (3.4)$$

Por outro lado, o parâmetro  $\mathcal{H}$  (vide seção 2.2) no caso do espaço euclidiano, onde  $a(\eta) \propto \eta^2$ , é dado por:

$$\mathcal{H} = \frac{2}{\eta}, \quad \mathcal{H}' = \frac{-2}{\eta^2}, \quad (3.5)$$

com isto a Eq. 3.4 toma a forma:

$$F'' + \frac{6}{\eta}F' = 0, \quad (3.6)$$

a qual tem como solução a função:

$$F = A + \frac{B}{\eta^5}, \quad (3.7)$$

com  $A$  e  $B$  constantes. Introduzindo a solução da Eq. 3.7 na Eq. 2.91, vemos que o segundo termo da soma pode ser desprezado já que ela é proporcional a  $\eta^{-6}$ . Portanto, no espaço euclidiano, as flutuações de temperatura se devem só ao efeito de Sachs-Wolfe ordinário, isto é:

$$\frac{\delta T}{T}(x_0) = \frac{1}{3}\Phi(\eta_{USE}, \vec{x}_{USE}) = \frac{1}{3}F(\eta_{USE})\Psi(\vec{x}_{USE}). \quad (3.8)$$

Para um fóton no espaço euclidiano cumpre-se:

$$|\vec{x}_{USE}| = \eta_{USE} = \int_{t_{USE}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.9)$$

Já que  $t_{USE} \ll t_0$ , escrevemos:

$$\int_{t_{USE}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \approx \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \eta_0. \quad (3.10)$$

Então a Eq. 3.8 será:

$$\frac{\delta T}{T}(x_0) \propto \Psi(\vec{x}_{USE}), \quad |\vec{x}_{USE}| = \eta_0, \quad (3.11)$$

onde  $x_0 = (\eta_0, 0)$ . A Eq. 3.3 é chamada equação de Helmholtz, que pode ser resolvida através de uma combinação linear de autofunções  $\psi_{\vec{k}}$ :

$$\Psi(\vec{x}) = \int d^3\vec{k} \phi_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}(\vec{x}), \quad (3.12)$$

onde os  $\psi_{\vec{k}}$  são autofunções do laplaciano:

$$\nabla^2 \psi_{\vec{k}} = -k^2 \psi_{\vec{k}}. \quad (3.13)$$

Como é bem sabido, o laplaciano  $\nabla^2 = g_{\mu\nu} D^\mu D^\nu$  depende da curvatura e das derivadas covariantes  $D_\mu$ . Os  $\phi_{\vec{k}}$  são coeficientes onde estão contidas todas as informações para as perturbações iniciais em um tempo determinado.

### 3.2 Função de Correlação e Espectro de Potências:

Como ve-se na Eq. 3.10,  $\vec{x}_{USE}$  tem uma magnitude constante, por tanto a função  $\delta T/T$  é basicamente bidimensional, só depende de  $(\theta, \phi)$ .  $\delta T/T(\vec{x}_1)$  indica qual é a flutuação de temperatura em uma direção  $\vec{x}_1$ ,  $|\vec{x}_1| = \eta_0$ . Para que  $\delta T/T$  possa ser comparada com as observações, usa-se a chamada função de correlação  $C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , a qual indica a relação que existe entre a medida das flutuações em duas direções diferentes. Ela é definida como :

$$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \langle \frac{\delta T}{T}(\vec{x}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{x}_2) \rangle, \quad (3.14)$$

onde o  $\langle \rangle$  denota uma média sobre o ensemble tomado sobre a orientação das observações. As flutuações  $\delta T/T$  são observadas sobre uma esfera de raio constante  $\eta_0$  por tanto, elas podem ser descompostas em harmônicos esféricos:

$$\frac{\delta T}{T}(\vec{x}) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.15)$$

com  $\vec{x}$  na superfície da esfera de raio  $\eta_0$ . A propriedade de ortonormalidade dos harmônicos esféricos é \* :

$$\int Y_{l'm'}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (3.16)$$

e usando as Eqs. 3.15 e 3.16 tem-se que:

$$a_{lm} = \int \frac{\delta T}{T}(\vec{x}) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (3.17)$$

Por outro lado,  $C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  pode ser escrito como:

$$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_l C_l P_l(\cos\alpha), \quad (3.18)$$

---

\*Nesta dissertação, para as propriedades dos harmônicos esféricos usamos [29]

onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$  e  $P_l$  são os polinômios de Legendre. A função  $C_l$  é chamada espectro de potências, a qual esta relacionada com os coeficientes  $a_{lm}$ . Ela é dada por [24]:

$$C_l = \sum_{m=-l}^l \frac{\langle |a_{lm}|^2 \rangle}{2l+1}. \quad (3.19)$$

Teoricamente  $C_l$  pode ser calculada, e pode ser comparada estatisticamente com os dados observacionais.

### 3.3 Gaussianidade

As amplitudes da perturbação  $\Phi$  têm uma natureza estatística, mas pela expansão da Eq. 3.12 toda essa natureza fica contida nos coeficientes  $\phi_{\vec{k}}$ . Assim, todas as hipóteses e predições para as perturbações iniciais continuam válidas para os coeficientes da expansão. Em vários modelos se assume que o comportamento estatístico é de natureza gaussiana como qualquer outro processo randômico. Se os  $\phi_{\vec{k}}$  têm uma estatística gaussiana eles satisfazem:

$$\langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_\phi \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.20)$$

$P_\phi$  depende das condições iniciais que se impõem à USE. Existem vários modelos para explicar a aparição e evolução das estruturas a grande escala do Universo; um deles é o chamado Cold Dark Matter(CDM), o qual supõe que a densidade de massa está dominada por uma matéria escura. Ele é baseado nos seguintes pontos: (i)  $\Omega = 1$ ,  $\Lambda = 0$ ; (ii) condições iniciais adiabáticas, gaussianas e de escala invariante<sup>†</sup> [31]. Em [32] calculam-se as funções de correlação e o espectro angular de potências da RCF em um universo plano simplesmente conexo dominado pela matéria escura. Bond et al.[32] usam  $P_\phi$  igual à chamada escala invariante, a qual é associada ao modelo inflacionário. A partir de agora usaremos como espectro:

$$P_\phi(k) \propto k^{n-1}, \quad n \in Z, n \geq 0, \quad (3.21)$$

o qual é uma generalização do espectro  $P_\phi$  chamado de espectro de escala invariante de Harrison-Zel'dovich:

$$P_\phi(k) \propto k^{-1}. \quad (3.22)$$

A motivação para usar o espectro de escala invariante deve-se à coincidência dos cálculos feitos por Bond et al. em [32], com alguns resultados experimentais encontrados pelo COBE apresentados por Smoot et al. em [16].

<sup>†</sup>Tem-se outras condições que não vão ser relevantes para nossos estudos.

### 3.4 RCF em um Universo Euclidiano

O estudo da RCF vai ser no fundo, o estudo da função de correlação entre dois pontos do céu e do espectro de potências. Para isto, precisamos conhecer a forma das amplitudes de perturbação. Pelo efeito Sachs-Wolfe, estas estão relacionadas com as flutuações de temperatura. A parte espacial das amplitudes satisfaz a Eq. 3.3 com o operador  $\nabla^2$  no espaço euclidiano. Assim, vamos tratar estas soluções de duas maneiras: a primeira para um espaço euclidiano simplesmente conexo e a segunda, para espaços euclidianos multiplamente conexos. Usando a métrica da geometria euclidiana (Eq. 1.10) em coordenadas cartesianas na Eq. 3.13, temos que para um espaço euclidiano os  $\psi_{\vec{k}}$  satisfazem:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\psi_{\vec{k}} = -k^2\psi_{\vec{k}}. \quad (3.23)$$

#### 3.4.1 RCF em um Universo Euclidiano Simplesmente Conexos

No caso do espaço euclidiano simplesmente conexo, as soluções da equação de autovalores (Eq. 3.23) são ondas planas. Portanto, a parte espacial das perturbações  $\Phi$  é:

$$\Psi(\vec{x}) = \int d^3\vec{k}\phi_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (3.24)$$

Neste caso então, podemos escrever as flutuações de temperatura como:

$$\frac{\delta T}{T} \propto \Psi(\vec{x}) = \int d^3\vec{k}\phi_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (3.25)$$

com  $\vec{x} \in \text{à } USE$ .

Vamos agora, calcular a função de correlação para este caso. Usando a Eq. 3.14 e a Eq. 3.20 tem-se que:

$$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 2\pi^2 \int \frac{P_\phi}{k^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} dk. \quad (3.26)$$

Para obtermos o espectro de potência temos que conhecer primeiro a forma dos coeficientes  $a_{lm}$ . Da Eq. 3.17, com algumas propriedades dos harmônicos esféricos e levando em consideração que<sup>†</sup> [33]:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kx) Y_{lm}^*(\alpha, \beta) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.27)$$

chegamos a:

$$a_{lm} = 4\pi i^l \int d^3k \phi_{\vec{k}} j_l(k\eta_0) Y_{lm}^*(\alpha, \beta). \quad (3.28)$$

<sup>†</sup>Notemos que os ângulos  $(\alpha, \beta)$  estão no espaço dos momentos e  $(\theta, \varphi)$  no espaço de coordenadas.

Para calcular o espectro de pontências usamos a Eq. 3.28 e algumas propriedades dos harmônicos esféricos e encontramos:

$$C_l = 8\pi^3 \int \frac{d^3k}{k^3} P_\phi j_l^2(k\eta_0). \quad (3.29)$$

Se integrarmos esta equação, usando a forma do espectro  $P_\phi$  da forma da Eq. 3.21 obtemos:

$$C_l \propto \frac{\Gamma(\frac{3-n}{2})\Gamma(l + \frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{4-n}{2})\Gamma(l + \frac{5-n}{2})}, \quad l \geq 2, 0 < n < 4. \quad (3.30)$$

Se agora, normalizarmos  $C_l$  com respeito ao espectro de potências do dipolo ( $l = 2$ ) ela toma a forma conhecida e apresentada em [32], [28]:

$$C_l = C_2 \frac{\Gamma(\frac{9-n}{2})\Gamma(l + \frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{3+n}{2})\Gamma(l + \frac{5-n}{2})}, \quad l \geq 2. \quad (3.31)$$

Este resultado é compatível com as observações do COBE [16].

### 3.4.2 RCF nos Universos Euclidianos Multiplamente Conexos

Nesta seção vamos estudar a Eq. 3.13 nos espaços multiplamente conexos. Este estudo será feito no poliedro fundamental de cada trivariiedade euclidiana orientável e compacta apresentada na Tab. 1.1, com a imposição das condições de contorno em cada caso. As condições de contorno para todos os casos vão ter a forma:

$$\frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_i(x, y, x)], \quad (3.32)$$

onde os  $g_i$  são os geradores do grupo de holonomia  $\Gamma$  de uma topologia dada. Por outro lado, a expressão de  $\delta T/T$  vai ser uma soma (em vez de integral) de soluções da Eq. 3.13. Ou seja:

$$\frac{\delta T}{T}(\vec{x}) \propto \sum_k \phi_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (3.33)$$

Analisemos cada uma das variedades multiplamente conexas.

### 3.4.3 Variedade $E_1$ : Universo Toroidal

Da Tab. 1.1 temos três geradores. Usemos agora, o gerador  $g_1$  na condição da Eq. 3.32:

$$\frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1(x, y, z)] = \frac{\delta T}{T}(x + L, y, z), \quad (3.34)$$

usando a Eq. 3.33 teremos:

$$\sum_{k_1 k_2 k_3} \phi_{k_1 k_2 k_3} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} e^{ik_3 z} = \sum_{k_1 k_2 k_3} \phi_{k_1 k_2 k_3} e^{ik_1(x+L)} e^{ik_2 y} e^{ik_3 z}, \quad (3.35)$$



com  $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ . A Eq. 3.35 será válida se e somente se:

$$e^{ik_1L} = 1; \quad (3.36)$$

portanto:

$$k_1 = \frac{2\pi n_1}{L}, \quad n_1 \in Z. \quad (3.37)$$

Semelhantemente, usando os outros geradores na condição da Eq. 3.32, obtemos as seguintes restrições para as componentes do vetor de onda:

$$g = g_2 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_2(x, y, z)] = \frac{\delta T}{T}(x, y + l, z), \quad (3.38)$$

portanto:

$$k_2 = \frac{2\pi n_2}{L}, \quad n_2 \in Z, \quad (3.39)$$

$$g = g_3 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3(x, y, z)] \longrightarrow k_3 = \frac{2\pi n_3}{L}, \quad n_3 \in Z. \quad (3.40)$$

O módulo do vetor de onda é:

$$k(n_1, n_2, n_3) = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}, \quad (3.41)$$

daí, pode-se encontrar um valor mínimo:

$$k_{min} = k(1, 0, 0) = k(0, 1, 0) = k(0, 0, 1) = \frac{2\pi}{L}. \quad (3.42)$$

Neste caso a função de correlação, supondo também que as flutuações iniciais são do tipo gaussiano, é:

$$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 2\pi^2 \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}, \quad (3.43)$$

e os coeficientes  $a_{lm}$ :

$$a_{lm} = 4\pi i^l \sum_k \phi_{\vec{k}} j_l(k\eta_0) Y_{lm}^*(\alpha, \beta). \quad (3.44)$$

O espectro de potências tem a forma<sup>§</sup>:

$$C_l = 8\pi^3 \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0), \quad (3.45)$$

e para o espectro da forma da Eq. 3.21, o espectro de potências será:

$$C_l \propto \sum_k k^{n-4} j_l^2(k\eta_0). \quad (3.46)$$

<sup>§</sup>Estes coeficientes devem ser comparados com os obtidos das observações do COBE, o que leva a restrições sobre os valores de  $L$ . Aqui não faremos essas comparações. Para isso ver [28], [39], [36] e [37].

### 3.4.4 Variedade $E_2$

Na Tab. 1.1 temos os geradores  $g_i$  do grupo de holonomia  $\Gamma$  para esta variedade. Além de  $g_i$ , os elementos  $g \in \Gamma$  também podem ser produtos dos  $g_i$ , os quais são chamadas de *palavras*. Com estas palavras construímos o espaço  $E_1$ , que é um espaço de recobrimento comum a todas as variedades da Tab. 1.1. O procedimento para os geradores  $g_1$  e  $g_2$  é igual ao do caso anterior, e obtemos:

$$g = g_1 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1(x, y, z)] \longrightarrow k_1 = \frac{2\pi n_1}{L}, \quad n_1 \in Z, \quad (3.47)$$

$$g = g_2 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_2(x, y, z)] \longrightarrow k_2 = \frac{2\pi n_2}{L}, \quad n_2 \in Z. \quad (3.48)$$

Para o caso de  $g_3$  temos:

$$\frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3(x, y, z)] = \frac{\delta T}{T}(-x, -y, z + L), \quad (3.49)$$

o qual, pela Eq. 3.33 nos leva a:

$$\sum_{k_1 k_2 k_3} \phi_{k_1 k_2 k_3} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} e^{ik_3 z} = \sum_{k_1 k_2 k_3} \phi_{k_1 k_2 k_3} e^{-ik_1 x} e^{-ik_2 y} e^{ik_3(z+L)}; \quad (3.50)$$

renomeando os índices das somas e passando ao primeiro membro temos:

$$\sum_{k_1 k_2 k_3} (\phi_{k_1 k_2 k_3} - \phi_{-k_1 -k_2 k_3} e^{ik_3 L}) e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} e^{ik_3 z} = 0; \quad (3.51)$$

isto é verdadeiro se e somente se:

$$\phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{-k_1 -k_2 k_3} e^{ik_3 L}. \quad (3.52)$$

Por outro lado, para a palavra  $g_3^2$  temos que:

$$\frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3^2(x, y, z)] = \frac{\delta T}{T}(x, y, z + 2L), \quad (3.53)$$

a qual e verdadeira se:

$$e^{2ik_3 L} = 1; \quad (3.54)$$

portanto:

$$g = g_3^2 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3^2(x, y, z)] \longrightarrow k_3 = \frac{\pi n_3}{L}, \quad n_3 \in Z. \quad (3.55)$$

Usando a Eq. 3.55 na Eq. 3.52 tem-se a condição:

$$g = g_3 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3(x, y, z)] \longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{-k_1 -k_2 k_3} e^{i\pi n_3}. \quad (3.56)$$

Para este espaço o módulo do vetor de onde  $\vec{k}$  é:

$$k = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \left(\frac{n_3}{2}\right)^2}. \quad (3.57)$$

As únicas condições que tem que cumprir  $n_1$  e  $n_2$  é que sejam inteiros (Eqs. 3.47 e 3.48), no entanto  $n_3$  tem que cumprir com as Eqs. 3.55 e 3.56 assim, se fazemos  $n_1 = n_2 = 0$  temos que o mínimo valor de  $n_3$ , seria  $n_3 = 2$ . Desta forma, pode-se encontrar que existe um valor mínimo:

$$k_{min} = k(1, 0, 0) = k(0, 1, 0) = k(0, 0, 2) = \frac{2\pi}{L}. \quad (3.58)$$

Voltando à definição da função de correlação na Eq. 3.14, pode-se ver que ela esta diretamente relacionada com  $\langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle$  da Eq. 3.20, que nos indica que não existe relação entre os  $\phi_{\vec{k}}$ . No caso de um Universo simplesmente conexo e no caso do Universo Toroidal ( $E_1$ ), esta afirmação continua sendo válida. No caso de um Universo do tipo  $E_2$  existe uma relação entre alguns  $\phi_{\vec{k}}$  dada pela Eq. 3.56, então podemos escrever:

$$\langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_\phi (\delta_{\vec{k}\vec{k}'} + \delta_{(-k_1-k_2, k_3)(k_1', k_2', k_3')} e^{i n_3 \pi}), \quad (3.59)$$

com isto, a função de correlação é:

$$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 2\pi^2 \sum_{\vec{k}} \frac{P_\phi}{k^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_1} (e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_2} + e^{i\pi n_3} e^{-i\vec{k}_o\cdot\vec{x}_2}), \quad (3.60)$$

onde  $\vec{k}_o = (-k_1, -k_2, k_3)$ . Os coeficientes  $a_{lm}$  têm a mesma forma que para  $E_1$  (Eq. 3.44). Usando a Eq. 3.59 temos que espectro de potências toma a forma:

$$C_l = \frac{32\pi^4}{2l+1} \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0) \sum_m Y_{lm}^*(\alpha, \beta) (Y_{lm}(\alpha, \beta) + Y_{lm}(\alpha_o, \beta_o) e^{i\pi n_3}), \quad (3.61)$$

onde  $\alpha_o$  e  $\beta_o$  são os ângulos da direção do vector  $\vec{k}_o$ . Pode-se encontrar que:

$$\alpha_o = \alpha, \quad \beta_o = \beta + \pi. \quad (3.62)$$

Se usamos a Eq. 3.62 na Eq. 3.61 e levamos em consideração que para os harmônicos esféricos cumpre-se:

$$Y_{lm}(\alpha_o, \beta_o) = Y_{lm}(\alpha, \beta + \pi) = Y_{lm}(\alpha, \beta) e^{im\pi}, \quad (3.63)$$

tem-se que a expressão para o espectro de potências fica:

$$C_l = \frac{32\pi^4}{2l+1} \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0) \sum_m |Y_{lm}(\alpha, \beta)|^2 (1 + e^{i\pi(n_3+m)}). \quad (3.64)$$

Finalmente, para o espectro da Eq. 3.21, o espectro de potências será:

$$C_l \propto \sum_k k^{n-4} j_l^2(k\eta_0) \sum_m |Y_{lm}(\alpha, \beta)|^2 (1 + e^{i\pi(n_3+m)}). \quad (3.65)$$

Este resultado, como quase todos os obtidos para  $C_l$  neste capítulo, concordam com os de Levin et al.[37]. Existe uma pequena diferença para um Universo de tipo  $E_4$ .

### 3.4.5 Variedade $E_3$

Como no caso do  $E_2$ , vamos usar os geradores e outras palavras para gerar o espaço de recobrimento  $E_1$ . Para o caso de  $g_1$  e  $g_2$  o procedimento é o mesmo que para  $g_1$  de  $E_1$ , então:

$$g = g_1 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1(x, y, z)] \longrightarrow k_1 = \frac{2\pi n_1}{L}, \quad n_1 \in Z, \quad (3.66)$$

$$g = g_2 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_2(x, y, z)] \longrightarrow k_2 = \frac{2\pi n_2}{L}, \quad n_2 \in Z. \quad (3.67)$$

Para os seguintes casos os procedimentos são parecidos aos casos de  $g_3$  e  $g_3^2$  de  $E_2$ , portanto:

$$g = g_3^4 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3^4(x, y, z)] \longrightarrow k_3 = \frac{\pi n_3}{2L}, \quad n_3 \in Z. \quad (3.68)$$

$$g = g_3 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3(x, y, z)] \longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{k_2 - k_1 k_3} e^{i\pi n_3/2}, \quad (3.69)$$

$$g = g_3^2 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3^2(x, y, z)] \longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{-k_1 - k_2 k_3} e^{i\pi n_3}, \quad (3.70)$$

$$g = g_3^3 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3^3(x, y, z)] \longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{-k_2 k_1 k_3} e^{3i\pi n_3/2}. \quad (3.71)$$

Neste caso o módulo do vetor  $\vec{k}$  será:

$$k = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \left(\frac{n_3}{4}\right)^2}. \quad (3.72)$$

Para encontrar o valor mínimo de  $k$  temos que levar em conta que o  $n_3$  tem que cumprir com o grupo de Eqs. 3.68- 3.71. Com isto, o valor mínimo para o módulo de  $\vec{k}$  é:

$$k_{min} = k(1, 0, 0) = k(0, 1, 0) = k(0, 0, 4) = \frac{2\pi}{L}. \quad (3.73)$$

Neste tipo de Universo a função de correlação e o espectro de potências terão três contribuições em  $\langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle$ . Estas contribuições são consequência das relações das Eqs. 3.69, 3.70 e 3.71. Podemos escrever então:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle = & \frac{2\pi^2}{k^3} P_\phi (\delta_{\vec{k}\vec{k}'} + \delta_{(k_2 - k_1 k_3)(k'_1 k'_2 k'_3)} e^{in_3/2} + \delta_{(-k_1 - k_2 k_3)(k'_1 k'_2 k'_3)} e^{in_3\pi} \\ & + \delta_{(-k_2 k_1 k_3)(k'_2 k'_1 k'_3)} e^{3in_3/2}). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Agora a função de correlação será:

$$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 2\pi^2 \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_1} (e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_2} + e^{i\pi n_3/2} e^{-i\vec{k}_o \cdot \vec{x}_2} + e^{i\pi n_3} e^{-i\vec{k}'_o \cdot \vec{x}_2} + e^{3i\pi/2} e^{-i\vec{k}''_o \cdot \vec{x}_2}), \quad (3.75)$$

com:  $\vec{k}_o = (k_2, -k_1, k_3)$ ,  $\vec{k}'_o = (-k_1, -k_2, k_3)$  e  $\vec{k}''_o = (-k_2, k_1, k_3)$ .

Os coeficientes  $a_{lm}$  têm a mesma forma que para  $E_1$  (Eq. 3.44). O espectro de potências é:

$$C_l = \frac{32\pi^4}{2l+1} \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0) \sum_m Y_{lm}^*(\alpha, \beta) (Y_{lm}(\alpha, \beta) + Y_{lm}(\alpha_o, \beta_o) e^{i\pi n_3/2} + Y_{lm}(\alpha'_o, \beta'_o) e^{i\pi n_3} + Y_{lm}(\alpha''_o, \beta''_o) e^{3i\pi n_3/2}), \quad (3.76)$$

onde os ângulos  $(\alpha_o, \beta_o)$ ,  $(\alpha'_o, \beta'_o)$  e  $(\alpha''_o, \beta''_o)$  estão relacionados aos vetores  $\vec{k}_o$ ,  $\vec{k}'_o$  e  $\vec{k}''_o$  respectivamente. Pode-se encontrar que:

$$\alpha = \alpha_o = \alpha'_o = \alpha''_o, \quad (3.77)$$

e:

$$\beta = \beta_o - \frac{\pi}{2} = \beta'_o - \pi = \beta''_o - 3\frac{\pi}{2}. \quad (3.78)$$

Usando as Eq. 3.77 e 3.78, temos que o  $C_l$  toma a forma:

$$C_l = \frac{32\pi^4}{2l+1} \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0) \sum_m |Y_{lm}(\alpha, \beta)|^2 (1 + e^{i\pi/2(n_3+m)} + e^{i\pi(n_3+m)} + e^{3i\pi/2(n_3+m)}), \quad (3.79)$$

para o espectro da Eq. 3.21, o espectro de potências é:

$$C_l \propto \sum_k k^{n-4} j_l^2(k\eta_0) \sum_m |Y_{lm}(\alpha, \beta)|^2 (1 + e^{i\pi/2(n_3+m)} + e^{i\pi(n_3+m)} + e^{3i\pi/2(n_3+m)}). \quad (3.80)$$

### 3.4.6 Variedade $E_4$

À parte os geradores do grupo de holonomia dados na Tab. 1.1, temos que os  $g_i$  também podem ser palavras com as quais construímos o espaço de recobrimento  $E_1$ <sup>¶</sup>, que é um espaço de recobrimento de todas as variedades da Tab. 1.1, então as formas que o  $g_i$  e os  $\phi_{\vec{k}}$  podem tomar são:

$$g = g_2^2 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_2^2(x, y, z)] \longrightarrow e^{ik_2 L} e^{ik_3 L} = 1 \quad (3.81)$$

<sup>¶</sup>Aqui usamos os geradores de  $E_4$  obtidos por Gomero (vide [35]) e os geradores de  $E_1$  obtidos pelo mesmo autor. Um  $E_1$  com estes geradores tem volume menor do que os recobrimentos anteriores do tipo  $E_1$ .

$$g = g_1^{-1}g_2 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1^{-1}g_2(x, y, z)] \longrightarrow e^{-ik_2L}e^{ik_3L} = 1 \quad (3.82)$$

Usando as Eqs. 3.81 e 3.82 tem-se que:

$$k_2 = \frac{n_2\pi}{L}, \quad n_2 \in Z; \quad (3.83)$$

com  $g_1$  e  $g_2$  temos:

$$g = g_1 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1(x, y, z)] \longrightarrow \phi_{k_1k_2k_3} = \phi_{-k_1k_3k_2}e^{ik_2L}, \quad (3.84)$$

$$g = g_2 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_2(x, y, z)] \longrightarrow \phi_{k_1k_2k_3} = \phi_{-k_1k_3k_2}e^{ik_3L}. \quad (3.85)$$

Com as Eqs. 3.84 e 3.85 encontramos:

$$k_3 = k_2 + \frac{2p\pi}{L}, \quad p \in Z. \quad (3.86)$$

Finalmente temos mais duas restrições:

$$g = g_3^2 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3^2(x, y, z)] \longrightarrow k_1 = \frac{\pi n_1}{L}, \quad n_1 \in Z, \quad (3.87)$$

$$g = g_3 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3(x, y, z)] \longrightarrow \phi_{k_1k_2k_3} = \phi_{k_1-k_2-k_3}e^{in_1\pi}. \quad (3.88)$$

Da Eq. 3.86 vemos que as restrições das Eqs. 3.84 e 3.85 são equivalentes. Usando a Eq. 3.83 nelas obtém-se:

$$\phi_{k_1k_2k_3} = \phi_{-k_1k_3k_2}e^{in_2\pi}. \quad (3.89)$$

Assim, a forma do módulo do vetor de onda é:

$$k = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{n_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{2}\right)^2}. \quad (3.90)$$

Levando em conta as restrições encontradas, pode-se achar o valor mínimo de  $k$ :

$$k_{min} = k(1, 1, 1) = \frac{\pi\sqrt{3}}{L}, \quad (3.91)$$

A relação entre os  $\phi_{\vec{k}}$  está dada por:

$$\langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_\phi (\delta_{\vec{k}\vec{k}'} + \delta_{(k_1-k_2-k_3)(k_1'k_2'k_3')} e^{i\pi n_1} + \delta_{(-k_1k_3k_2)(k_1'k_2'k_3')} e^{i\pi n_2}). \quad (3.92)$$

A função de correlação é, neste caso:

$$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 2\pi^2 \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_1} (e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_2} + e^{i\pi n_1} e^{-i\vec{k}_o\cdot\vec{x}_2} + e^{i\pi n_2} e^{-i\vec{k}'_o\cdot\vec{x}_2}), \quad (3.93)$$

com:  $\vec{k}_o = (k_1, -k_2, -k_3)$  e  $\vec{k}'_o = (-k_1, k_3, k_2)$ .

Os coeficientes  $a_{lm}$  têm a mesma forma que para  $E_1$  (Eq. 3.44). Usando a Eq. 3.92, o espectro de potências será:

$$C_l = \frac{32\pi^4}{2l+1} \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0) \sum_m Y_{lm}^*(\alpha, \beta) (Y_{lm}(\alpha, \beta) + Y_{lm}(\alpha_o, \beta_o) e^{i\pi n_1} + Y_{lm}(\alpha'_o, \beta'_o) e^{i\pi n_2}), \quad (3.94)$$

onde  $(\alpha_o, \beta_o)$  e  $(\alpha'_o, \beta'_o)$  estão relacionados com os vetores  $\vec{k}_o$  e  $\vec{k}'_o$  respectivamente<sup>||</sup>. Pode-se encontrar que:

$$\alpha_o = \alpha, \quad \beta_o = \beta + \pi, \quad (3.95)$$

e:

$$\alpha'_o = \pi - \alpha, \quad \beta'_o = \frac{\pi}{2} - \beta. \quad (3.96)$$

Usando as Eqs. 3.95 e 3.96, mais algumas propriedades dos harmônicos esféricos, tem-se que o  $C_l$  toma a forma:

$$C_l = \frac{32\pi^4}{2l+1} \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0) \sum_m Y_{lm}^*(\alpha, \beta) \{Y_{lm}(\alpha, \beta)(1 + e^{i\pi(n_1+m)}) + e^{i\pi} Y_{l-m}(\alpha, \beta) e^{i\pi(n_2-m/2)}\}, \quad (3.97)$$

com a Eq. 3.21, o espectro de potências será:

$$C_l \propto \sum_k k^{n-4} j_l^2(k\eta_0) \sum_m Y_{lm}^*(\alpha, \beta) \{Y_{lm}(\alpha, \beta)(1 + e^{i\pi(n_1+m)}) + e^{i\pi} Y_{l-m}(\alpha, \beta) e^{i\pi(n_2-m/2)}\}. \quad (3.98)$$

### 3.4.7 Variedade $E_5$

Os geradores do grupo  $\Gamma$  neste caso são quatro. Os  $g_i$  também são as palavras com as quais geramos o espaço de recobrimento  $E_1$ , pois este é um espaço de recobrimento comum de todas as variedades. Então temos para  $g_2$  e  $g_3$ :

$$g = g_2 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_2(x, y, z)] \longrightarrow e^{\frac{3ik_1L}{2}} e^{-\frac{i\sqrt{3}k_2L}{2}} = 1, \quad (3.99)$$

$$g = g_3 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3(x, y, z)] \longrightarrow e^{\frac{3ik_1L}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}k_2L}{2}} = 1. \quad (3.100)$$

<sup>||</sup>Neste caso, excepcionalmente, o eixo polar ( $\alpha = 0$ ) foi escolhido na direção  $k_1$ .

Das Eqs 3.99 e 3.100 tem-se:

$$k_1 = \frac{2\pi n_1}{3L}. \quad (3.101)$$

Para  $g_4$  e  $g_1^3$  temos:

$$g = g_4 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_4(x, y, z)] \longrightarrow k_2 = \frac{2n_2\pi}{L\sqrt{3}}, \quad n_2 \in Z, \quad (3.102)$$

$$g = g_1^3 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1^2(x, y, z)] \longrightarrow k_3 = \frac{2\pi n_3}{3L}, \quad n_3 \in Z. \quad (3.103)$$

Finalmente para  $g_1$  e  $g_1^2$ , levando em conta as formas de  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  encontradas, tem-se que:

$$g = g_1 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1(x, y, z)] \quad (3.104)$$

$$\longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{\left(\frac{-k_1+k_2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-k_1\sqrt{3}-k_2}{2}\right)k_3} e^{\frac{2in_3\pi}{3}},$$

$$g = g_1^2 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1^3(x, y, z)] \quad (3.105)$$

$$\longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{\left(\frac{-k_1-k_2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{k_1\sqrt{3}-k_2}{2}\right)k_3} e^{\frac{4in_3\pi}{3}}.$$

Portanto, o módulo do vetor de onda será:

$$k = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{n_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{3}\right)^2}. \quad (3.106)$$

O valor mínimo, que não contradiz as restrições, para este módulo é:

$$k_{min} = k(1, 0, 0) = \frac{2\pi}{3L}. \quad (3.107)$$

A função de correlação, como nos casos anteriores, também vai depender das relações entre  $\phi_{\vec{k}}$ . Esta relação pode-se escrever como:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}'}^* \rangle = & \frac{2\pi^2}{k^3} P_\phi (\delta_{\vec{k}\vec{k}'} + \delta_{\left(\frac{-k_1+k_2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-k_1\sqrt{3}-k_2}{2}\right)k_3}\left(k_1'k_2'k_3'\right) e^{2in_3\frac{\pi}{3}} \\ & + \delta_{\left(\frac{-k_1-k_2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{k_1\sqrt{3}-k_2}{2}\right)k_3}\left(k_1'k_2'k_3'\right) e^{4in_3\frac{\pi}{3}}), \end{aligned} \quad (3.108)$$

de onde se obtém  $C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  como acima.

Os  $a_{lm}$  têm a mesma forma que para  $E_1$  (Eq. 3.44). No entanto, os espectro de potências tem a forma:

$$\begin{aligned} C_l = \frac{32\pi^4}{2l+1} \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0) \sum_m Y_{lm}^*(\alpha, \beta) (Y_{lm}(\alpha, \beta) + Y_{lm}(\alpha_o, \beta_o) e^{\frac{2i\pi n_3}{3}} \\ + Y_{lm}(\alpha'_o, \beta'_o) e^{\frac{4i\pi n_3}{3}}), \end{aligned} \quad (3.109)$$

onde  $(\alpha_o, \beta_o)$  e  $(\alpha'_o, \beta'_o)$  são as coordenadas angulares dos vetores:



$$\vec{k}_o = \left( \frac{-k_1 + k_2\sqrt{3}}{2}, \frac{-k_1\sqrt{3} - k_2}{2}, k_3 \right)$$

e

$$\vec{k}'_o = \left( \frac{-k_1 - k_2\sqrt{3}}{2}, \frac{k_1\sqrt{3} - k_2}{2}, k_3 \right).$$

Os ângulos satisfazem:

$$\alpha = \alpha_o = \alpha'_o, \quad (3.110)$$

$$\beta = \beta_o + \frac{2\pi}{3} = \beta'_o + \frac{4\pi}{3}. \quad (3.111)$$

Com as Eqs. 3.110 e 3.111 tem-se que  $C_l$  é:

$$C_l = \frac{32\pi^4}{2l+1} \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0) \sum_m |Y_{lm}(\alpha, \beta)|^2 (1 + e^{\frac{2i\pi}{3}(n_3+m)} + e^{\frac{4i\pi}{3}(n_3+m)}). \quad (3.112)$$

Usando a Eq. 3.21, o espectro de potências será:

$$C_l \propto \sum_k k^{n-4} j_l^2(k\eta_0) \sum_m |Y_{lm}(\alpha, \beta)|^2 (1 + e^{\frac{2i\pi}{3}(n_3+m)} + e^{\frac{4i\pi}{3}(n_3+m)}). \quad (3.113)$$

### 3.4.8 Variedade $E_6$

Os geradores de  $\Gamma$  neste caso, também são quatro (vide Tab. 1.1). Os  $g_i$  também são as palavras com as quais geramos o espaço de recobrimento  $E_1$ . Então temos para  $g_2$  e  $g_3$ :

$$g = g_2 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_2(x, y, z)] \longrightarrow e^{ik_1 \frac{3L}{2}} e^{-ik_2 \frac{\sqrt{3}L}{2}} = 1, \quad (3.114)$$

$$g = g_3 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_3(x, y, z)] \longrightarrow e^{ik_1 \frac{3L}{2}} e^{ik_2 \frac{\sqrt{3}L}{2}} = 1, \quad (3.115)$$

Das Eq. 3.114 e 3.115 temos:

$$k_1 = \frac{2n_1\pi}{3L}, \quad n_1 \in Z. \quad (3.116)$$

Para  $g_4$  e  $g_1^6$  temos:

$$g = g_4 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_4(x, y, z)] \longrightarrow k_2 = \frac{2n_2\pi}{L\sqrt{3}}, \quad n_2 \in Z, \quad (3.117)$$

$$g = g_1^6 : \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1^6(x, y, z)] \longrightarrow k_3 = \frac{n_3\pi}{3h}, \quad n_3 \in Z. \quad (3.118)$$

Finalmente, com ajuda das Eqs. 3.116, 3.117 e 3.118, para os outros casos de  $g_i$ , temos:

$$g = g_1 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1(x, y, z)] \quad (3.119)$$

$$\longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{\left(\frac{k_1+k_2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{k_2-k_1\sqrt{3}}{2}\right)k_3} e^{\frac{in_3\pi}{3}},$$

$$g = g_1^2 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1^2(x, y, z)] \quad (3.120)$$

$$\longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{\left(\frac{k_2\sqrt{3}-k_1}{2}\right)\left(\frac{-k_2-k_1\sqrt{3}}{2}\right)k_3} e^{\frac{2in_3\pi}{3}},$$

$$g = g_1^3 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1^3(x, y, z)] \longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{-k_1-k_2 k_3} e^{in_3\pi}, \quad (3.121)$$

$$g = g_1^4 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1^4(x, y, z)] \quad (3.122)$$

$$\longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{\left(\frac{-k_1-k_2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{k_1\sqrt{3}-k_2}{2}\right)k_3} e^{\frac{4in_3\pi}{3}},$$

$$g = g_1^5 : \quad \frac{\delta T}{T}(x, y, z) = \frac{\delta T}{T}[g_1^5(x, y, z)] \quad (3.123)$$

$$\longrightarrow \phi_{k_1 k_2 k_3} = \phi_{\left(\frac{k_1-k_2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{k_1\sqrt{3}+k_2}{2}\right)k_3} e^{\frac{5in_3\pi}{3}}.$$

O módulo do vetor de onda será:

$$k = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{n_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{6}\right)^2}. \quad (3.124)$$

Concordando com as restrições, pode-se encontrar que existe um mínimo valor de  $k$ , que é:

$$k_{min} = k(1, 0, 0) = \frac{2\pi}{L\sqrt{3}}. \quad (3.125)$$

Levando em conta as relações entre os  $\phi_{\vec{k}}$  neste caso, obtém-se a função de correlação.

Os  $a_{lm}$  têm a mesma forma que para  $E_1$  (Eq. 3.44). No entanto, levando em conta as relações entre os ângulos  $(\alpha, \beta)$ , e os ângulos relacionados com os vetores  $\left(\frac{k_1+k_2\sqrt{3}}{2}, \frac{k_2-k_1\sqrt{3}}{2}, k_3\right)$ ,  $\left(\frac{k_2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-k_2-k_1\sqrt{3}}{2}, k_3\right)$ ,  $(-k_1, -k_2, k_3)$ ,  $\left(\frac{-k_1-k_2\sqrt{3}}{2}, \frac{k_1\sqrt{3}-k_2}{2}, k_3\right)$  e  $\left(\frac{k_1-k_2\sqrt{3}}{2}, k_1\sqrt{3}+k_2, k_3\right)$ , os espectro de potências tem a forma:

$$C_l = \frac{32\pi^4}{2l+1} \sum_k \frac{P_\phi}{k^3} j_l^2(k\eta_0) \sum_m |Y_{lm}(\alpha, \beta)|^2 \left(1 + e^{\frac{i\pi(n_3+m)}{3}} + e^{\frac{2i\pi(n_3+m)}{3}} + e^{i\pi(n_3+m)} + e^{\frac{4i\pi(n_3+m)}{3}} + e^{\frac{5i\pi(n_3+m)}{3}}\right), \quad (3.126)$$

para o espectro de escala do tipo da Eq. 3.21, o espectro de potências se é:

$$C_l \propto \sum_k k^{n-4} j_l^2(k\eta_0) \sum_m |Y_{lm}(\alpha, \beta)|^2 (1 + e^{\frac{i\pi(n_3+m)}{3}} + e^{\frac{2i\pi(n_3+m)}{3}} + e^{i\pi(n_3+m)} + e^{\frac{4i\pi(n_3+m)}{3}} + e^{\frac{5i\pi(n_3+m)}{3}}). \quad (3.127)$$

Essas expressões para  $C_l$  podem ser comparadas com os dados do COBE (e agora também do satélite WMAP), para estabelecer os limites de cada modelo. Mas, para ter uma forma mais real dos  $C_l$  e fazer essa comparação, precisamos levar em conta um modelo com constante cosmológica.

Vamos caracterizar as flutuações da temperatura da RCF sendo discutidas a seguir no Capítulo 4 por meio de um exemplo: flutuações de densidade.

O espectro das flutuações é derivado, em vez de restringir-se a um único Universo simplesmente conexo. A parte central das flutuações é derivada da geometria (ver Eq. 3.2). Na realidade, a parte espacial deriva de densidades locais da equação de Helmholtz (Eq. 3.2) dentro de quocientes euclidianos, o que impõe as condições de contorno para cada caso. Sem essas condições, não há como lidar as soluções dentro dessa equação para o caso de um Universo simplesmente conexo, independentemente da geometria euclidiana, e sem resultados cosmológicos. Com um entendimento que a forma de Galois (Eq. 3.2) que tem flutuações de densidade para as perturbações (Eq. 3.2) é um tipo de distribuição das flutuações que aproximam a MSF (forma de onda euclidiana).

A generalização parece ser quebra. Continuando com o exemplo mencionado a respeito de flutuações de densidade, as equações de onda de densidade do RCF (Universo trivial) e a generalização (Eq. 3.2) tem flutuações de densidade diferentes das euclidianas. No entanto, no caso das equações euclidianas, como mostrado no que uma distribuição euclidiana parece ser sempre diferente de  $\pi^2$ . Poderíamos estar falando que isso é um tipo de equação como uma equação de "generalidade por erro". No caso da Eq. 3.2 por exemplo, as flutuações que estão dentro a relação da Eq. 3.2 é derivada um grupo independente de equações que são a relação de um grupo de equações independentes. Assim também, em outros casos.

A existência de um comprimento de onda limite. Outros exemplos de flutuações de densidade são a existência de um limite encontrado em cada caso.

The content is for Eq. 3.2 is a type of wave function in a euclidean space.

## Capítulo 4

### Comentários Finais

Várias características das flutuações de temperatura da RCF serão alteradas se a topologia do Universo for múltiplamente conexa. Essas diferenças são :

- \* **O espectro das flutuações é discreto**, em vez de contínuo como no caso de um Universo simplesmente conexo. A parte temporal das flutuações depende só da geometria (ver Eq. 3.2). No entanto, a parte espacial depende das autofunções da equação de Helmholtz (Eq. 3.3) dentro do poliedro fundamental, as quais cumprirão as condições de contorno para cada caso. Em nosso estudo, foram encontradas as soluções destas duas equações para o caso das topologias múltiplamente conexas, orientáveis e compactas de geometria euclidiana, e sem constante cosmológica. Com isto encontramos que o efeito de Sachs-Wolfe, que está diretamente relacionado com as perturbações (Eq. 2.91) e só tem contribuição das flutuações que apareceram na  $USE$  (efeito Sachs-Wolfe ordinário).
- \* **A gaussianidade parece ser quebrada**. Continuando com o estudo, encontramos a existência de relações entre os  $\phi_{\vec{k}}$  para todos os casos com exceção do  $E_1$  (Universo toroidal). A gaussianidade (Eq. 3.20) nos indica que duas diferentes flutuações são independentes. No entanto no caso dos espaços múltiplamente conexos encontra-se que duas flutuações diferentes podem ter alguma relação entre si\*. Poderíamos dizer então que neste tipo de espaço existe uma espécie de “gaussianidade por grupos”. No caso do  $E_2$  por exemplo, as flutuações que satisfazem a relação da Eq. 3.56 formariam um grupo independente daquelas que não a obedecem, isto é, esses grupos não estariam relacionados. Assim também, nos outros casos.
- \* **A existência de um comprimento de onda limite**. Outra consequência das relações entre os  $\phi_{\vec{k}}$ , é a existência de um  $k_{min}$  encontrado em cada caso.

---

\*Por exemplo, ver Eq. 3.59 e as suas análogas nas outras variedades.

Var.	$k_{min}$	$\lambda_{max}$
$E_1$	$2\pi/L$	$L$
$E_2$	$2\pi/L$	$L$
$E_3$	$2\pi/L$	$L$
$E_4$	$\sqrt{3}\pi/L$	$2\sqrt{3}L/3$
$E_5$	$2\pi/3L$	$3L$
$E_6$	$2\pi L\sqrt{3}$	$\sqrt{3}L$

Tabela 4.1: Valores de  $k_{min}$  e  $\lambda_{max}$  para cada variedade.

Usando a relação:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{4.1}$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda associada ao vetor  $\vec{k}$ , pode-se encontrar a seguinte tabela: Com estes valores de  $\lambda_{max}$  pode-se ver a existência de um limite superior para os comprimentos de onda. Isto é, que comprimentos de onda maiores que esses não poderiam existir dentro das topologias não triviais. Em todos os casos aqui estudados, este limite é da ordem de  $L$ .

- \* **Diferenças nas funções de correlação e espectros de potências.** Uma espécie de assinatura é apresentada na função de correlação e espectro de potência para cada caso. Estas funções já não dependem só do ângulo entre as direções de observação.

À parte as características citadas acima, pode-se comparar estatisticamente as funções encontradas para o espectro de potências com os dados do COBE. Um trabalho pioneiro nesse contexto para um Universo Toroidal foi feito por Stevens et. al.[28], onde chega-se a estimar que o tamanho do poliedro fundamental para o  $E_1$  teria que ser maior que  $0.8\eta_0$ , para poder concordar com as observações. Valor que ainda é menor do que o diâmetro da USE ( $2\eta_0$ ). Com isto, teríamos 8 cópias do Universo dentro do horizonte observável. Um trabalho realizado por Costa et al. [39] para um Universo toroidal mas com os lados do poliedro fundamental diferentes, chega à conclusão de que os lados seriam maiores que  $1.2\eta_0$ .

Para as outras topologias no espaço euclidiano o trabalho foi realizado por Bond et. al. [41] e Levin et. al.[36],[37] e recentemente em [38]. Nossos cálculos coincidem totalmente com os de Levin et. al. para os três primeiros tipos de Universo; no quinto e no sexto os espectros de potência são os mesmos. Para o quarto tipo de

Universo os resultados são parcialmente diferentes. Aparentemente eles deixaram de considerar uma das relações entre as amplitudes.

Estudos nos espaços hiperbólicos também estão sendo feitos atualmente[43], mas neste caso o fato de que a equação de Helmholtz não tem soluções analíticas nos espaços multiplamente conexos é uma dificuldade e é por isso que os trabalhos neste tipo de espaços é eminentemente numérico.

É importante notar que nesta dissertação foi estudado o caso de um Universo sem aceleração (sem constante cosmológica), um estudo mais detalhado dos  $C_l$  levando em conta a aceleração do Universo nos permitiria fazer uma comparação mais fina com os dados observacionais.

## Apêndice A

### Algumas Relações no Modelo de Friedmann-Lemaître

A métrica que concorda com o princípio cosmológico e o postulado de Weyl é a chamada Robertson-Walker:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j\}, \quad (\text{A.1})$$

com:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}\left[1 + \frac{\mathcal{K}}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^{-2}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\mathcal{K} = -1, 0, 1$  dependendo da geometria.

#### A.1 Relações a partir da métrica RW

Com a métrica da Eq. A.1 e com:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}); \quad (\text{A.3})$$

temos as seguintes quantidades:

$$\Gamma_{00}^0 = \mathcal{H} \quad \Gamma_{00}^i = \Gamma_{i0}^0 = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma_{j0}^i = \mathcal{H}\delta_j^i \quad \Gamma_{ij}^0 = \mathcal{H}\gamma_{ij}, \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\gamma_{jl,k} + \gamma_{kl,j} - \gamma_{jk,l}). \quad (\text{A.6})$$

Com:

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda,\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^{\lambda}, \quad (\text{A.7})$$

e com as conexões encontradas, tem-se:

$$R_{00} = -3\mathcal{H}' \quad R_{i0} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$R_{ij} = (\mathcal{H}' + 2\mathcal{K} + 2\mathcal{H}^2)\gamma_{ij}. \quad (\text{A.9})$$

Usando os  $R_{\alpha\beta}$  e:

$$R = R_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.10})$$

temos que a curvatura escalar é da forma:

$$R = -6a^{-2}(\mathcal{H}' + \mathcal{K} + \mathcal{H}^2). \quad (\text{A.11})$$

Usando:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \quad (\text{A.12})$$

chegamos a:

$$G_{00} = 3(\mathcal{K} + \mathcal{H}^2), \quad (\text{A.13})$$

$$G_{ij} = -(2\mathcal{H}' + \mathcal{K} + \mathcal{H}^2)\gamma_{ij}. \quad (\text{A.14})$$

## A.2 Equações de Friedmann

As equações de Einstein são:

$$G_{\beta}^{\alpha} = 8\pi GT_{\beta}^{\alpha}. \quad (\text{A.15})$$

O tensor energia momento para um fluido perfeito é:

$$T_{\beta}^{\alpha} = (\epsilon + p)u^{\alpha}u_{\beta} - p\delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (\text{A.16})$$

onde  $\epsilon$  é a densidade de energia,  $p$  é a densidade de pressão e com tetravelocidades:  $u^{(o)\mu} = (a^{-1}, 0, 0, 0)$  e  $u_{\mu}^{(o)} = (a, 0, 0, 0)$  no sistema comóvel. Com a Eq. A.16 e os  $G_{\alpha\beta}$  encontrados acima, obtemos as seguintes equações:

$$\mathcal{K} + \mathcal{H}^2 = \frac{8\pi}{3}Ga^2\epsilon, \quad (\text{A.17})$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{K} + \mathcal{H}^2 = -\frac{8\pi}{3}Gpa^2. \quad (\text{A.18})$$



Para a era dominada pela matéria, Friedmann supôs:

$$p = 0 \quad \epsilon = \epsilon_o(\eta), \tag{A.19}$$

Portanto as Equações de Friedmann serão:

$$\mathcal{K} + \mathcal{H}^2 = \frac{8\pi}{3}Ga^2\epsilon_o, \tag{A.20}$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{K} + \mathcal{H}^2 = 0, \tag{A.21}$$

e têm as seguintes soluções (Ver por ex. [13]):

- Para  $\mathcal{K} = 1$ ,

$$a(\eta) \propto 1 - \cos\eta, \tag{A.22}$$

- para  $\mathcal{K} = 0$ ,

$$a(\eta) \propto \eta^2/2, \tag{A.23}$$

- Para  $\mathcal{K} = -1$ ,

$$a(\eta) \propto \cosh\eta - 1. \tag{A.24}$$

## Apêndice B

### Expressões para $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ , $\delta R_{\alpha\beta}$ , $\delta R$ e $\delta G_{\beta}^{\alpha}$

Considerando:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{(o)} + \delta g_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.1})$$

em primeira ordem em  $\delta g_{\alpha\beta}$ , pode-se encontrar as seguintes relações:

#### B.1 Para $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$

A forma geral do  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  é:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}); \quad (\text{B.2})$$

se escrevemos  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  como:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{(o)\mu} + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}, \quad (\text{B.3})$$

levando em conta que:

$$(\delta g_{\alpha\beta})_{,\mu} = \delta(g_{\alpha\beta,\mu}) = \delta g_{\alpha\beta,\mu} \quad (\text{B.4})$$

e usando as Eqs. B.1, B.2 e B.3 tem-se:

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\lambda}(g_{\alpha\lambda,\beta}^{(o)} + g_{\beta\lambda,\alpha}^{(o)} - g_{\alpha\beta,\lambda}^{(o)}) + \frac{1}{2}g^{(o)\mu\lambda}(\delta g_{\alpha\lambda,\beta} + \delta g_{\beta\lambda,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\lambda}). \quad (\text{B.5})$$

#### B.2 Para $\delta R_{\alpha\beta}$

Neste caso:

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\lambda,\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma}. \quad (\text{B.6})$$

Escrevendo:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^{(o)} + \delta R_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.7})$$

usando a Eq. B.3 e levando em conta a Eq. B.4 tem-se:

$$\delta R_{\alpha\beta} = -\delta\Gamma_{\alpha\beta,\mu}^{\mu} + \delta\Gamma_{\alpha\mu,\beta}^{\mu} - \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}^{(o)\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{(o)\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\mu} + \delta\Gamma_{\lambda\beta}^{\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^{(o)\lambda} + \Gamma_{\lambda\beta}^{(o)\mu}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}. \quad (\text{B.8})$$

### B.3 Para $\delta R$

Agora:

$$R = R_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.9})$$

com:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \quad (\text{B.10})$$

$$R = R^{(o)} + \delta R, \quad (\text{B.11})$$

e com as Eqs. B.4 e B.7, encontra-se:

$$\delta R = \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(o)} + g^{(o)\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.12})$$

### B.4 Para $\delta G_{\beta}^{\alpha}$

Com:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \quad (\text{B.13})$$

com as Eqs. B.7 e B.11 e com:

$$G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}^{(o)} + \delta G_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.14})$$

temos:

$$\delta G_{\alpha\beta} = \delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta g_{\alpha\beta}R^{(o)} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}^{(o)}\delta R. \quad (\text{B.15})$$

## Apêndice C

### Transformação de Perturbações para Quantidades Escalares, Vetoriais e Tensoriais

Apresentamos as transformações das perturbações por uma translação infinitesimal em primeira ordem, de quantidades escalares, vetoriais e tensoriais:

#### C.1 Perturbações de Quantidades Escalares

Para uma quantidade escalar  $q$ , que é a perturbação de  $q^{(o)}$ , podemos escrever:

$$q(x) = q^{(o)}(x) + \delta q(x), \quad \tilde{x} = x + \varepsilon. \quad (\text{C.1})$$

As quantidades escalares se transformam com:

$$\tilde{q}(\tilde{x}) = q(x). \quad (\text{C.2})$$

Fazendo a expansão:

$$\tilde{q}(\tilde{x}) = \tilde{q}(x) + \varepsilon^\alpha \tilde{q}_{,\alpha}(x), \quad (\text{C.3})$$

e usando a Eq. C.2, obtem-se:

$$\tilde{q}(x) = q(x) - \varepsilon^\alpha q_{,\alpha}(x) = \tilde{q}^{(o)}(x) + \delta \tilde{q}(x). \quad (\text{C.4})$$

Finalmente, uma perturbação de uma quantidade escalar  $q$ , transforma-se como:

$$\delta \tilde{q}(x) = q^{(o)}(x) - \tilde{q}^{(o)}(x) + \delta q(x) - \varepsilon^\alpha q_{,\alpha}^{(o)}(x). \quad (\text{C.5})$$

#### C.2 Perturbações de Quantidades Vetoriais

No caso da quantidade vetorial perturbada  $v_\mu$  pode-se escrever:

$$v_\mu(x) = v_\mu^{(o)}(x) + \delta v_\mu(x), \quad \tilde{x} = x + \varepsilon, \quad (\text{C.6})$$

onde  $v_\mu^{(o)}$  é a campo vetorial de fundo. Uma quantidade vetorial transfoma-se como:

$$\tilde{v}_\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} v_\alpha(x). \quad (\text{C.7})$$

Fazendo a expansão:

$$\tilde{v}_\mu(\tilde{x}) = \tilde{v}_\mu(x) + \varepsilon^\alpha \tilde{v}_{\mu,\alpha} \quad (\text{C.8})$$

e usando a Eq. C.7, chega-se a:

$$\tilde{v}_\mu(x) = v_\mu(x) - \varepsilon_{,\mu}^\alpha v_\alpha(x) - \varepsilon^\lambda v_{\mu,\lambda}(x). \quad (\text{C.9})$$

Portanto, a perturbação de uma quantidade vetorial se transforma assim:

$$\delta \tilde{v}_\mu(x) = v_\mu^{(o)}(x) - \tilde{v}_\mu^{(o)}(x) + \delta v_\mu(x) - \varepsilon_{,\mu}^\alpha v_\alpha^{(o)}(x) - \varepsilon^\alpha v_{\mu,\alpha}^{(o)}. \quad (\text{C.10})$$

### C.3 Perturbações de Quantidades Tensoriais

Para uma quantidade tensorial perturbada escrevemos:

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}^{(o)}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x), \quad \tilde{x} = x + \varepsilon. \quad (\text{C.11})$$

As quantidades tensoriais se tranformam como:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \quad (\text{C.12})$$

Fazendo uma expansão, como nos casos anteriores, e usando a Eq. C.12, chegamos a:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \varepsilon_{,\mu}^\alpha g_{\alpha\nu}(x) - \varepsilon_{,\nu}^\beta g_{\mu\beta}(x) - \varepsilon^\lambda g_{\mu\nu,\lambda}(x). \quad (\text{C.13})$$

Com isso, uma perturbação de uma quantidade tensorial cumpre com:

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}^{(o)}(x) - \tilde{g}_{\mu\nu}^{(o)}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) - \varepsilon_{,\mu}^\alpha g_{\alpha\nu}^{(o)}(x) - \varepsilon_{,\nu}^\beta g_{\mu\alpha}^{(o)}(x) - \varepsilon^\alpha g_{\mu\nu,\alpha}^{(o)}. \quad (\text{C.14})$$

Pode-se ver que em nenhum dos casos falamos das componentes das perturbações, que podem ser em geral escalares, vetores ou tensores dando origem às perturbações do mesmo nome, independentemente do tipo de quantidade que é perturbada.

## Referências

- [1] W.S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology* (Springer-Verlag, 1991).
- [2] W.P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology Vol.1* (Princeton University Press, 1991).
- [3] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Institute of Physics Publishing, 1990).
- [4] M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*(Academic Press, 1975).
- [5] J.A. Wolf, *Spaces of Constant Curvature 5th Ed.*(Perish Inc., 1984).
- [6] T. Frankel, *The Geometry of Physics: An Introduction* ( Cambridge University Press,1997).
- [7] M. Lachièze-Rey and J.-P. Luminet, *Phys. Rep.* **254**, 135 (1995).
- [8] G.I. Gomero, *Busca da Topologia do Universo Usando Fontes Cósmicas Discretas*, Tese de Doutorado (CBPF, 2000).
- [9] G.F.R. Ellis, *Gen. Rel. Grav.* **2**, 7 (1971).
- [10] E. Gausmann, R. Lehoucq, J.-P. Luminet, J.-P. Uzan and J.Weeks, *Class.Quant.Grav.* **18**, 5155 (2001).
- [11] J.R. Weeks, *SnapPea: a Computer Program for Creating and Studying Hyperbolic 3-manifolds*, disponível em: <http://www.northnet.org/weeks/>.
- [12] A.O. Costa, *Vínculos à Topologia do Universo Obtidos através da Análise dos Dados do Satélite COBE/DMR*, Tese de Doutorado (INPE,1996).
- [13] J.V. Narlikar, *Introduction to Cosmology* (Cambridge University Press, 1993).
- [14] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, 1972).

- [15] J.N. Islam, *An Introduction to Mathematical Cosmology* (Cambridge University Press, 1993).
- [16] G. Smoot et al., *Astrophys. J. Lett.* **396**, L1 (1992).
- [17] J.M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
- [18] R.H. Brandenberger, R. Kahn and W. Press, *Phys. Rev. D* **28**, 1809 (1983).
- [19] V.F. Mukhanov, H.A. Feldman and R.H Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).
- [20] J.M. Stewart, *Class. Quant. Grav.* **7**, 1169 (1990).
- [21] K.T. Inoue, *Exploring Topology of the Universe in the Cosmic Microwave Background*, Doctoral Thesis (YITP-KU, 2001).
- [22] J.E. Peebles, *The Large Scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, 1980).
- [23] R.K. Sachs and A.M. Wolfe, *Astrophys. J.* **147**, 73 (1967).
- [24] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The Early Universe* (Westview Press, 1990).
- [25] V.F. Mukhanov and G.V. Chibisov, *Sov. Astron. Lett.* **10**, 374 (1984).
- [26] L. Landau e E. Lifchitz, *Teoria do Campo* (Hemus).
- [27] J.A. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, 1999).
- [28] D. Stevens, D. Scott and J. Silk, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 20 (1993).
- [29] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley and Sons, 1975).
- [30] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe* (Cambridge University Press, 1993).
- [31] A.R. Liddle and D.H. Lyth, *Phys. Rep.* **231**, 1 (1993).
- [32] J.R. Bond and G. Efstathiou, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **226**, 655 (1987).
- [33] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* (John Wiley and Sons, 1998).
- [34] H.V. Fagundes, *Gen. Rel. Grav.* **24**, 199 (1992).
- [35] H.V. Fagundes and E. Gausmann, *Phys. Lett. A* **238**, 235 (1998).

- [36] J. Levin, E. Scannapieco and J. Silk, *Phys. Rev. D* **58**, 103516 (1998).
- [37] E. Scannapieco, J. Levin and J. Silk, *astro-ph/9811226*.
- [38] J. Levin, *Phys. Rep.* **365**, 251 (2002).
- [39] A. de Oliveira-Costa and G.F. Smoot, *Astrophys. J.* **448**, 477 (1995).
- [40] R. Lehoucq, J. Weeks, J.P. Uzan, E. Gausmann, J.P. Luminet, *Class. Quantum Grav.* **19**, 4683(2002).
- [41] J.R. Bond, D. Pogosyan and T. Souradeep, *Phys. Rev D* **62**, 043005(2000).
- [42] N. Gouda, N. Sugiyama and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **85**, 1023 (1991); D.H. Lyth and A. Woszczyna, *Phys. Rev. D* **52**, 3338 (1995).
- [43] N.J. Cornish, D. Spergel and G. Starkman, *Phys. Rev. D* **57**, 5982 (1998); N.J. Cornish, D. Spergel and G. Starkman, *Class. Quantum Grav.* **15**, 2657 (1998); referência [21]; K.T. Inoue, *astro-ph/9810034*; J.R. Bond, D. Pogosyan and T. Souradeep, *Class. Quantum Grav.* **15**, 2671 (1998); J.R. Bond, D. Pogosyan and T. Souradeep, *Phys. Rev D* **62**, 043005(2000); J.R. Bond, D. Pogosyan and T. Souradeep, *Phys. Rev D* **62**, 043006(2000); J. Levin, E. Scannapieco and J. Silk, *Class. Quantum Grav.* **18**, 2689(1998); R. Aurich, *Astrophys. J.* **524**, 497(1999) ; R. Aurich and F. Steiner, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **323**, 1016(2001).



