

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

**Instituto de Geociências e Ciências Exatas**

**Campus de Rio Claro**

**ANÁLISE DE VIBRAÇÕES EM SISTEMAS DISCRETOS DE  
MASSAS CONCENTRADAS E COM DOIS GRAUS DE  
LIBERDADE ATRAVÉS DA TRANSFORMADA WAVELET**

**Marcus Vinicius Monteiro Varanis**

**Orientador: Prof. Dr. José Roberto Campanha**

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Física - Área de Concentração em Física Aplicada, para obtenção do Título de Mestre em Física.

Rio Claro (SP)

2008

531.32 Varanis, Marcus Vinicius Monteiro.  
V288a Análise de vibrações em sistemas discretos de massas concentradas através da transformada wavelet / Marcus Vinicius Monteiro Varanis. -Rio Claro : [s.n.], 2008  
149 f. : il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista ,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: José Roberto Campanha

1. Vibração (Mecânica) 2. Análise wavelet. 3. Terremotos.  
I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP  
Campus de Rio Claro/SP

## **Comissão Examinadora**

Prof. Dr. José Roberto Campanha

Instituição: IGCE/RC

Prof. Dr. Roberto Eugenio Lagos Mônaco

Instituição: IGCE/RC

Prof. Dr. Robson Pederiva

Instituição: UNICAMP/SP

Marcus Vinicius Monteiro Varanis

Rio Claro, 10 de julho de 2008.

Resultado:

**Dedico este trabalho à minha Família.**

## Agradecimentos

Agradeço às seguintes pessoas e entidades:

A minha namorada Carola pela compreensão e incentivo para vencer mais este desafio.

Ao Prof. Dr. José Roberto Campanha, pela preciosa orientação deste trabalho, amizade e incentivo e pelos ensinamentos transmitidos.

Ao professor Jarbas Antonio Guedes, por ter me apresentado o fantástico mundo da matemática e da simulação computacional.

Ao Departamento de Física da UNESP de Rio Claro, pelo apoio e facilidades proporcionadas.

Aos professores do curso de pós-graduação em Física, área de concentração Física Aplicada, pela amizade e ensinamentos.

A todos que colaboraram de alguma forma na realização deste trabalho

# Sumário

Índice	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de figuras	viii
Nomenclatura	xii
I – Introdução	1
II – Métodos Matemáticos para Análise de Vibrações	6
III – Vibrações em Sistemas Mecânicos	32
IV – Simulações numéricas do sistema	60
V – Conclusões	111

# Índice

<b>Capítulo 1</b> – Introdução	1
1.1 – Tema e Motivação	1
1.2 – Objetivos	4
1.3 – Apresentação do trabalho	4
<b>Capítulo 2</b> – Métodos Matemáticos para Análise de Vibrações	6
2.1 – Introdução	6
2.2 – Série de Fourier	8
2.3 – Transformada de Fourier	10
2.4 – Definição de wavelet	14
2.4.1– Wavelet do tipo Haar	14
2.4.2– Wavelet do tipo chapéu mexicano	15
2.4.3– Wavelet do tipo Morlet	16
2.4.4– Wavelet do tipo Daubechies	17
2.4.5– Outros tipos de wavelets	18
2.5 – Escala e translação	19
2.6 – Transformada wavelet continua	23
2.7 – Transformada wavelet discreta	25
2.7 – Obtenção da transformada wavelet	27
<b>Capítulo 3</b> – Vibrações em Sistemas Mecânicos	32
3.1 – Introdução	32
3.1.1 – Componentes de um sistema vibratório	33
3.1.2 – Graus de liberdade	33
3.1.3 – Sistemas Discretos e Sistemas Contínuos	34
3.1.4 – Quanto à Existência ou não de Amortecimento	34
3.1.5 – Quanto à linearidade	34
3.2 – Sistema Massa Mola	35
3.3 – Frequências Naturais e Modos Normais de Vibração	39
3.4 – Vibrações em modelos bi-dimensionais de edifícios	40

3.4.1 – Forças Externas	41
3.4.2 – Edifícios submetidos a ondas de terremoto	46
3.5 – Método da superposição normal	50
3.6 – Métodos de Integração Direta	52
3.7.1 – Métodos de Integração de Newmark	53
3.7 – Ondas Sísmicas	56
<b>Capítulo 4 – Simulações numéricas do sistema</b>	<b>60</b>
4.1 – Introdução	60
4.2 – Resultados das simulações	62
4.2.1 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de um sinal do tipo degrau	62
4.2.2 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de um sinal do tipo seno	70
4.2.3 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de uma onda de terremoto	78
4.2.4 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de uma onda de terremoto e com alteração massa $m_3$	86
4.2.5 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de uma onda de terremoto e com alteração em $k_2$	94
4.2.6 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de uma onda de terremoto com alteração em $k_3$	102
<b>Capítulo 5 – Conclusões</b>	<b>111</b>
5.1 – Comentários sobre os métodos utilizados	111
5.2 – Sugestões para trabalhos futuros	112
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>113</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>116</b>

Apendice A: Mix.mws - Programa Desenvolvido em Maple 11 para analise do sistema excitado por uma onda de terremoto	116
Apendice B: earthquakes_hitting_scrycrapers.mws - Programa desenvolvido em Maple para analise do edificio excitado por uma força do tipo $f(t)=\text{sen}(2\pi\omega t)$	124
Apendice C: 3dOscillator.mws - Programa desenvolvido em Maple para analise de duas massas acopladas e excitada por uma onda de terremoto	130
Apendice D: Programa wavelet.m - Programa desenvolvido em Matlab para o calculo da transformada wavelet da estrutura analisada	124

## **Resumo**

O estudo de vibrações diz respeito aos movimentos oscilatórios de corpos e às forças que lhes são associadas. Todos os corpos dotados de massa e elasticidade são capazes de vibrar. Deste modo, a maior parte das máquinas e estruturas estão sujeitas a certos graus de vibração. A maioria das atividades humanas envolve alguma forma de vibração. O estudo do comportamento dinâmico dessas oscilações mecânicas é o objetivo deste trabalho e para isto propomos um sistema de massas concentradas e com dois graus de liberdade. O sistema será excitado por forças externas, entre elas ondas de terremoto. Com simulações numéricas estudamos o sistema, usando a transformada rápida de Fourier, transformada wavelet

Palavras-chave: vibrações, wavelet, análise wavelet.

## **Abstract**

The study of vibration concerns oscillatory movement of bodies and the forces they are associated. All bodies that have mass and elasticity are able to vibrate. Thus, most of the machines and structures are subject to certain degrees of vibration most human activities involve some form of vibration. The study of the dynamic behavior of these mechanical oscillations is the objective of this work and to propose that a system of weights and concentrated with two degrees of freedom. The system will be excited by external forces, including waves of earthquake. With numerical simulations studied the system, using the fast Fourier transform, wavelet transform.

Keyword: vibrations, wavelet, wavelet analysis.

## Lista de Figuras

Figura 1.1 Colapso da ponte Tacoma Narrows	03
Figura 2.1 Representação gráfica de $f_1(t)$	12
Figura 2.2 Transformada de Fourier aplicada a $f_1(t)$	12
Figura 2.3 Representação gráfica de $f_2(t)$	13
Figura 2.4 Transformada de Fourier aplicada a $f_2(t)$	13
Figura 2.5 Representação da wavelet do tipo Haar	15
Figura 2.6 Representação da wavelet do tipo chapéu mexicano	16
Figura 2.7 Representação da wavelet do tipo Morlet	17
Figura 2.8 Representação da família de wavelets do tipo Daubechies	18
Figura 2.9 Compressão da wavelet do tipo Haar para escalas (a) 1/4 (b) 1/2 e (c) 1	20
Figura 2.10 Dilatação da wavelet do tipo Morlet para escalas (a) 1/4 (b) 1/2 e (c) 1	21
Figura 2.11 Exemplo de translação de wavelets do tipo Morlet	21
Figura 2.12 Wavelets do tipo Haar geradas a partir da wavelet “mãe”	23
Figura 2.13 Diferentes tipos de wavelets podem ser utilizadas para obtenção da transformada wavelet.	28
Figura 2.14 Wavelet (em vermelho) comparada com o sinal (em azul)	29
Figura 2.15 Representação do 3º passo para obtenção da transformada wavelet	29
Figura 2.16 Representação do 4º passo para obtenção da transformada wavelet	29
Figura 2.17 Finalmente os passos 1º a 4º são repetidos para todas as escalas	30
Figura 2.18 Relação entre escalas e frequências na análise wavelet.	31
Figura 2.19 Escala de cores	31
Figura 2.20 Transformada wavelet aplicada a $f_1(t)$	32
Figura 2.21 Transformada wavelet aplicada a $f_2(t)$	32
Figura 3.1 Sistema com massa-mola com dois graus de liberdade, sem ação de forças externas e sem atrito	36
Figura 3.2 Esquema do deslocamento das massas do sistema analisado	37
Figura 3.3 Diagrama de corpo livre do sistema analisado	37
Figura 3.4 Idealização de um edifício de N andares.	42
Figura 3.5 Diagrama de corpo livre para um edifício de 2 pavimentos	44
Figura 3.6 Edifício de N andares submetido a forças externas	46

Figura 3.7 Estrutura submetida à aceleração do solo	50
Figura 3.8 Modos normais de vibração	51
Figura 3.9 Onda do Tipo P	58
Figura 3.10 Onda do Tipo S	59
Figura 3.11 Onda do Tipo L (Love)	59
Figura 3.12 Onda do Tipo R (Rayleigh)	60
Figura 4.1 Estrutura na qual será inserida uma onda de terremoto	63
Figura 4.2 (a) Modelo utilizado para a simulação	65
Figura 4.2 (b) Excitação externa aplicada ao piso térreo.	66
Figura 4.2 (c) Transformada de Fourier aplicada ao sinal	66
Figura 4.2 (d) Transformada wavelet aplicada ao sinal	67
Figura 4.2 (e) Deslocamento do primeiro pavimento (x1)	67
Figura 4.2 (f) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento (x1)	68
Figura 4.2 (g) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao primeiro pavimento	68
Figura 4.2 (h) Deslocamento do segundo pavimento (x2)	69
Figura 4.2 (i) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento (x2)	69
Figura 4.2 (j) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao segundo pavimento	70
Figura 4.2 (l) Deslocamento do terceiro pavimento (x3)	71
Figura 4.2 (m) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento (x3)	71
Figura 4.2 (n) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao terceiro pavimento	72
Figura 4.2 (o) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos	73
Figura 4.3 (a) Modelo utilizado para a simulação	74
Figura 4.3 (b) Excitação externa aplicada ao piso térreo	74
Figura 4.3 (c) Transformada de Fourier aplicada ao sinal	75
Figura 4.3 (d) Transformada wavelet aplicada ao sinal	75
Figura 4.3 (e) Deslocamento do primeiro pavimento (x1)	76
Figura 4.3 (f) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento (x1)	76
Figura 4.3 (g) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao primeiro pavimento	77
Figura 4.3 (h) Deslocamento do segundo pavimento (x2)	78
Figura 4.3 (i) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento (x2)	78
Figura 4.3 (j) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao segundo pavimento	79
Figura 4.3 (l) Deslocamento do terceiro pavimento (x3)	79
Figura 4.3 (m) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento (x3)	80
Figura 4.3 (n) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao terceiro pavimento	80

Figura 4.3 (o) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos	81
Figura 4.4 (a) Modelo utilizado para a simulação	82
Figura 4.4 (b) Excitação externa aplicada ao piso térreo	82
Figura 4.4 (c) Transformada de Fourier aplicada ao sinal.	83
Figura 4.4 (d) Transformada wavelet aplicada ao sinal.	83
Figura 4.4 (e) Deslocamento do primeiro pavimento (x1)	84
Figura 4.4 (f) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento (x1)	85
Figura 4.4 (g) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao primeiro pavimento	85
Figura 4.4 (h) Deslocamento do segundo pavimento (x2)	86
Figura 4.4 (i) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento (x2)	86
Figura 4.4 (j) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao segundo pavimento	87
Figura 4.4 (l) Deslocamento do terceiro pavimento (x3)	87
Figura 4.4 (m) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento (x3)	88
Figura 4.4 (n) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao terceiro pavimento	88
Figura 4.4 (o) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos	89
Figura 4.5 (a) Excitação externa aplicada ao piso térreo	90
Figura 4.5 (b) Deslocamento do primeiro pavimento (x1)	90
Figura 4.5 (c) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento (x1)	91
Figura 4.5 (d) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao primeiro pavimento	91
Figura 4.5 (e) Deslocamento do segundo pavimento (x2)	92
Figura 4.5 (f) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento (x2)	92
Figura 4.5 (g) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao segundo pavimento	93
Figura 4.5 (h) Deslocamento do terceiro pavimento (x3)	94
Figura 4.5 (i) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento (x3)	94
Figura 4.5 (j) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao terceiro pavimento	95
Figura 4.5 (l) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos	95
Figura 4.5 (m) Comparação entre os escalogramas da estrutura original e estrutura com alteração da massa m3.	96
Figura 4.6 (a) Excitação externa aplicada ao piso térreo	98
Figura 4.6 (b) Deslocamento do primeiro pavimento (x1)	98
Figura 4.6 (c) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento (x1)	99
Figura 4.6 (d) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao primeiro pavimento	99
Figura 4.6 (e) Deslocamento do segundo pavimento (x2)	100
Figura 4.6 (f) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento (x2)	100

Figura 4.6 (g) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao segundo pavimento	101
Figura 4.6 (h) Deslocamento do terceiro pavimento (x3)	101
Figura 4.6 (i) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento (x3)	102
Figura 4.6 (j) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao terceiro pavimento	102
Figura 4.6 (l) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos	103
Figura 4.6 (m) Comparação entre os escalogramas da estrutura original e estrutura com alteração da mola $k_2$	104
Figura 4.7 (a) Excitação externa aplicada ao piso térreo	106
Figura 4.7 (b) Deslocamento do primeiro pavimento (x1)	106
Figura 4.7 (c) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento (x1)	107
Figura 4.7 (d) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao primeiro pavimento	107
Figura 4.7 (e) Deslocamento do segundo pavimento (x2)	108
Figura 4.7 (f) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento (x2)	108
Figura 4.7 (g) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao segundo pavimento	109
Figura 4.7 (h) Deslocamento do terceiro pavimento (x3)	109
Figura 4.7 (i) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento (x3)	110
Figura 4.7 (j) Escalograma da Transformada wavelet aplicada ao terceiro pavimento	110
Figura 4.7 (l) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos	111
Figura 4.7 (m) Comparação entre os escalogramas da estrutura original e estrutura com alteração da mola $k_3$	112
Figura B.1 Estrutura analisada no programa de Stol e Klaus	128
Figura C.1 Estrutura analisada no programa de Kammerer.	133

## **Nomenclatura**

Os símbolos utilizados são identificados no transcorrer do trabalho, quando da sua primeira utilização ou quando se fizer necessário.

# **CAPÍTULO 1**

## **Introdução**

### **1.1 Tema e Motivação**

O estudo de vibrações diz respeito aos movimentos oscilatórios de corpos e às forças que lhes são associadas. Todos os corpos dotados de massa e elasticidade são capazes de vibrar. Deste modo, a maior parte das máquinas e estruturas estão sujeitas a certos graus de vibração. A maioria das atividades humanas envolve alguma forma de vibração (Rao, 1990).

Nós ouvimos porque o tímpano vibra, nós vemos porque ondas luminosas se propagam. A respiração está associada à vibração dos pulmões, os batimentos cardíacos são movimentos vibratórios do coração, a fala se fundamenta na vibração das cordas vocais e os movimentos humanos envolvem oscilações de braços e pernas. Em muitos outros campos da atividade humana, fenômenos apresentam variáveis cujo comportamento é oscilatório (economia, biologia, química, física, etc.).

Em engenharia, as aplicações das vibrações mecânicas são de grande importância nos tempos atuais. Projetos de máquinas, edifícios, fundações, estruturas, motores, turbinas, sistemas de controle e outros, exigem que questões relacionadas a vibrações sejam levadas em conta. Os primeiros estudos de vibrações em engenharia foram motivados pelo problema de balanceamento em motores. O desbalanceamento pode ser tanto devido a problemas de projeto como de fabricação e manutenção. O desbalanceamento em motores diesel, por exemplo, pode transmitir vibrações de tal grandeza através do solo que criam desconforto ambiental. Em turbinas, os engenheiros ainda não foram capazes de resolver uma grande parte dos problemas originados em pás e rotores. As estruturas projetadas para suportar máquinas centrífugas pesadas (motores, turbinas, bombas, compressores, etc.) também estão sujeitas a vibração. É possível que partes dessas estruturas sofram fadiga devido à variação cíclica de tensões induzidas.

As vibrações também causam o desgaste mais rápido de mancais e engrenagens, provocando ruído excessivo. Em máquinas, as vibrações provocam o afrouxamento de parafusos. Em processos de usinagem, as vibrações podem causar trepidação, conduzindo a um pobre acabamento superficial.

A literatura é rica de exemplos de falhas em sistemas causadas por vibrações excessivas em virtude de ressonância. Um destes exemplos é o da ponte de Tacoma Narrows, conforme Figura 1.1 (reproduzido de Resnick, Halliday, Krane, Physics V 1, 4th. ed.), nos Estados Unidos, que inaugurada em julho de 1940 colapsou em sete de novembro do mesmo ano quando entrou em ressonância induzida pelo vento. Em virtude dos efeitos devastadores que podem surgir em máquinas e estruturas, os testes vibratórios se tornaram um procedimento padrão no projeto e desenvolvimento da maioria dos sistemas em engenharia.



Figura 1.1 Colapso da ponte Tacoma Narrows

Em muitos sistemas de engenharia, o ser humano atua como parte integrante do mesmo. A transmissão de vibração para o ser humano resulta em desconforto e perda de eficiência. Vibrações de painéis de instrumentos podem produzir mal funcionamento ou dificuldade de leitura de medidores. Portanto, um dos propósitos importantes do estudo de vibração é a redução dos níveis vibratórios através de projeto e montagem adequados de máquinas. Nesta interface, o engenheiro mecânico tenta projetar a máquina para que a mesma apresente níveis vibratórios baixos, enquanto o engenheiro estrutural tenta projetar a base da máquina de forma a assegurar que o efeito da vibração não se transmita.

A vibração também pode ser utilizada com proveito em várias aplicações industriais. Esteiras transportadoras, peneiras vibratórias, compactadores, misturadores e outras, utilizam a vibração em seu princípio de funcionamento. Vibração também pode ser usada em testes de materiais, processos de usinagem, soldagem. Os ultra-sons são largamente utilizados também em medicina (obstetrícia destruição de cálculos renais). Também é empregada para simular terremotos em pesquisas geológicas e para conduzir estudos no projeto de reatores nucleares.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho de dissertação tem por objetivos:

A modelagem de uma forma didática utilizando os softwares *Maple* e *Matlab*, de uma estrutura de um edifício com dois graus de liberdade e das equações que governam seu movimento para compreensão da sua dinâmica.

A inserção de forças externas na estrutura, como por exemplo, uma onda provocada por um terremoto.

Análise da vibração da estrutura através da transformada *wavelet*, via simulação computacional.

## 1.3 Apresentação do trabalho

Apresenta-se neste item o conteúdo referente a cada capítulo. Os capítulos foram organizados, procurando quando possível uma seqüência baseada numa análise estrutural; e de forma clara e seqüencial objetivando a compreensão dos conceitos abordados e do assunto a ser discutido.

Então, no capítulo 2 discutimos as transformadas de Fourier e *wavelet*, a primeira pela sua larga utilização em problemas de vibração e análise de sinais, já a segunda por ser o foco desse trabalho uma vez que os principais resultados desse trabalho serão obtidos através desse método, como por exemplo, o comportamento da estrutura em movimento.

O capítulo 3 apresenta uma idéia geral sobre teoria das vibrações e nele também demonstramos as equações de movimento da estrutura com a explicitação das matrizes de rigidez, de massas e de amortecimento, bem como a relação de autovetores e autovalores com a mecânica de vibrações. Além de apresentar o método de integração de Newmark

No capítulo 4 serão apresentados os resultados da simulação computacional para análise dinâmica da estrutura.

O capítulo 5 apresenta as conclusões finais dos estudos desenvolvidos para esse trabalho e propõe sugestões para trabalhos futuros nessa mesma linha de pesquisa.

## CAPÍTULO 2

### Métodos Matemáticos para Análise de Vibrações

#### 2.1 Introdução

A grande motivação para a criação da teoria das *wavelets* foi o desenvolvimento de um método para análise de um sinal sísmico que satisfizesse as seguintes condições (Daubechies, 1992):

- A contribuição de cada uma das diferentes bandas de frequência deve ser razoavelmente separadas (no domínio da frequência).
- Esta separação deve ser alcançada sem a perda excessiva de resolução na variável tempo.
- A reconstrução da função original a partir de sua representação ou transformada deve ser obtida por um método que seja capaz de oferecer uma alta precisão e que ao mesmo tempo seja robusto, ou seja, que o mesmo seja estável para pequenas perturbações.

As duas primeiras condições caracterizam essencialmente a propriedade conhecida como localização no tempo e frequência.

Apresenta-se inicialmente um breve histórico das *wavelets* e maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em Mallat, 1998.

Em 1807, Fourier demonstrou que se pode desenvolver uma função periódica em uma soma de senos e cossenos, o que hoje se conhece como séries de Fourier.

A primeira menção de *wavelets* foi feita pelo físico Alfred Haar em 1909. Apesar de estas *wavelets* possuírem características interessantes, elas não eram continuamente diferenciáveis, o que limitava sua aplicabilidade. Posteriormente nos anos 30, pesquisadores descobriram outras vantagens das *wavelets* (Daubechies, 1992) realizando estudos de *funções-base com variação de escala*. Funções-base são um conjunto de funções que, somadas, compõem uma determinada função. A variação de escala significa a alteração do intervalo de análise do sinal

O termo *ondelette* foi introduzido pelo engenheiro geofísico Jean Morlet em 1980, sendo a base matemática de suas idéias formalizada pelo físico teórico de mecânica quântica Alex Grossmann, que o ajudou a encontrar a transformada *wavelet* em sua forma contínua. Os dados estudados por Morlet exibiam conteúdos de frequências que mudavam rapidamente ao longo do tempo. Nesse caso, a transformada de Fourier não era adequada como método de análise. Eles redescobriram e deram uma interpretação ligeiramente diferente do trabalho de Alberto Calderón sobre análise harmônica de 1946.

Foi Yves Meyer, um matemático francês, que em 1984 ressaltou uma semelhança entre o trabalho de Morlet e Calderón. Isto o levou, em 1985, a construir funções básicas (*wavelets* ortonormais) que, quando usadas na transformada *wavelet*, geravam um domínio de tempo e frequências satisfatórias na solução de problemas. Mas Meyer verificou que, cerca de cinco anos antes, J. O. Strömberg já havia descoberto as mesmas *wavelets*.

Em 1909, num apêndice de sua tese de doutorado, o físico alemão, Alfred Haar já propunha um conjunto de funções base de *wavelets* ortonormais. Suas *wavelets* eram de pequeno uso prático devido ao fato de possuírem baixa resolução no domínio de

frequência. Em 1930, Paul Levy utilizando o trabalho de Haar desenvolveu funções básicas ortonormais para estudar os sinais aleatórios do movimento browniano.

Desde então as *wavelets* tem-se desenvolvido com o aparecimento de novas funções-base de *wavelets*, novas aplicações e novos métodos, constituindo um novo e sólido campo de pesquisas.

Apesar de suas características, as *wavelets* somente atingiram a representação esperada após estudo realizado em 1985 por Stephane Mallat, que relacionava filtros-espelho de quadratura, algoritmos piramidais e *wavelets* de base ortonormal. Poucos anos depois, Ingrid Daubechies baseou-se no trabalho de Mallat para construir o conjunto de *wavelets* de base ortonormal mais utilizados atualmente.

## 2.2 Séries de Fourier

A evolução no tempo de qualquer sistema dinâmico pode ser representada por uma função  $f(t)$  dependente do tempo  $t$  ou por uma série temporal, com a condição de que  $t$  seja escolhido, em intervalos regulares de tempo.

Dependendo do tipo da função  $f(t)$ , sua representação pode ser feita de dois modos diferentes. Se  $f(t)$  é periódica, então o espectro deve ser expresso como uma combinação linear de senos e cossenos, cujas frequências são múltiplos inteiros de uma frequência básica. Essa combinação linear é denominada série de Fourier. Porém, se  $f(t)$  não é periódica, o espectro deve ser expresso pela transformada de Fourier de  $f(t)$  (Hsu, 1995).

O matemático francês, Joseph Fourier, em 1807 demonstrou que toda função periódica  $f(t)$ , de período  $2L$ , definida no intervalo  $[-L, L]$  com  $t \in \mathbb{R}$  pode ser expressa como uma somatória das funções trigonométricas seno e cosseno. Desse modo, a equação matemática que define  $f(t)$  assume a forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)] \quad (2.3)$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são chamados coeficientes de Fourier, cujos valores são deduzidos do fato de que as funções seno e cosseno formam uma base ortogonal e são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad n > 0; \quad (2.4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen}(\omega_n t) dt, \quad n > 0.$$

Se o intervalo  $[-L, L]$  é dividido em  $n$  partes iguais, então cada subintervalo resultante dessa divisão, terá período igual a:

$$T_n = \frac{2L}{n}. \quad (2.5)$$

Por conseqüência, a freqüência angular desse subintervalo é dada por:

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{2\pi}{T_n} \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) em (2.6) obtém-se:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\frac{2L}{n}} = \frac{n\pi}{L} \quad (\text{radianos por unidade de tempo}) \quad (2.7)$$

O período  $T_n$ , relacionado com a freqüência angular é obtido da equação (2.6) e dado por:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (\text{unidades de tempo}) \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) em (2.3), a série de Fourier assume a forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{\pi n}{L} t\right) \right] \quad (2.9)$$

Diz-se que a equação (2.9) é uma representação espectral de  $f(t)$ . O objetivo de usar a série de Fourier na análise de uma função periódica é obter a amplitude, em função da frequência para cada onda senoidal que compõe o sinal analisado e com isso, construir uma série discreta de frequências a partir de uma série temporal (TOLSTOV, 1962).

Utilizando a fórmula de Euler, pode-se reescrever a série de Fourier na sua forma complexa:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (2.10)$$

em que os coeficientes  $c_n$  são obtidos por:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (2.11)$$

## 2.3 Transformada de Fourier

A série de Fourier é utilizada para análise de funções periódicas, enquanto que, a transformada de Fourier deve ser usada para funções não periódicas.

Se a função é periódica, tal que  $f(t) = f(t + nT)$ , com  $n$  sendo inteiro positivo ou negativo e  $T$  sendo a periodicidade básica, então as frequências das várias componentes espectrais são todas inteiras, múltiplas da frequência básica  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Assim, a série de Fourier, na forma complexa, que representa a função  $f(t)$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (2.12)$$

onde  $c_n$  são as amplitudes das componentes de frequências  $n\omega_0$ .

$$c_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (2.13)$$

A transformada de Fourier é uma extensão da série de Fourier em que a periodicidade básica  $T$  de  $f(t)$  pode ficar infinitamente grande. Assim, quando  $T$  tende para infinito, o espaço entre as componentes das frequências torna-se infinitesimal e o espectro discreto das componentes da frequência torna-se contínuo. Por essa razão  $n\omega_0$  tende para  $\omega$  que é uma variável contínua e  $c_n$  tende para  $c(\omega)d\omega$  onde  $d\omega$  é um pequeno intervalo de frequência e  $c(\omega)$  é a amplitude dependente da frequência ou transformada de Fourier (Kerry, 2003).

Nessas condições a equação (2.12) é então escrita na forma:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.14)$$

e a equação dos coeficientes (2.13) torna-se:

$$c(\omega)d\omega = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega \quad (2.15)$$

de onde deduzimos o valor de  $c(\omega)$ , que é igual a:

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.16)$$

As equações (2.14) e (2.16) são, respectivamente, a função original  $f(t)$  e a transformada de Fourier. Com a equação (2.16) temos condição de converter um conjunto de sinais digitais, no domínio do tempo, em um conjunto de pontos no domínio das frequências como também, reconstruir os sinais gerados pela função original, multiplicando os coeficientes de Fourier por senos e cossenos de frequências apropriadas.

Para exemplificar o uso da transformada de Fourier, aplica-se ao sinal  $f_1(t) = \text{sen}(2\pi 10t)$  p/  $t < 1024$  e  $f_1(t) = \text{sen}(2\pi 30t)$  p/  $t > 1024$  mostrado na Figura 2.1.

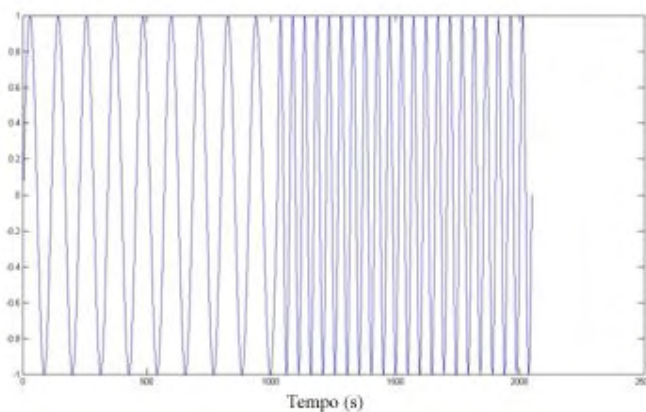


Figura 2.1 – Representação gráfica de  $f_1(t)$

Aplicando a transformada de Fourier obtem-se o resultado mostrado na Figura 2.2, ou seja, observamos um pico de frequência em 10 Hz e outro pico em 30 Hz, que são as frequências envolvidas no sinal descrito.

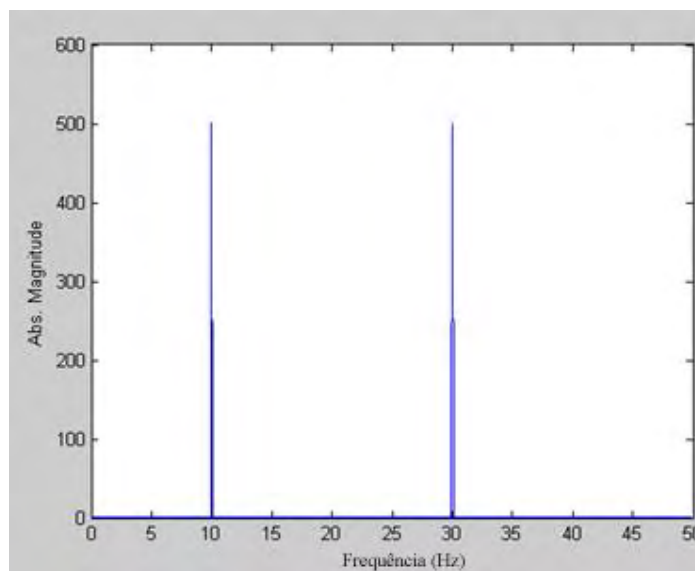
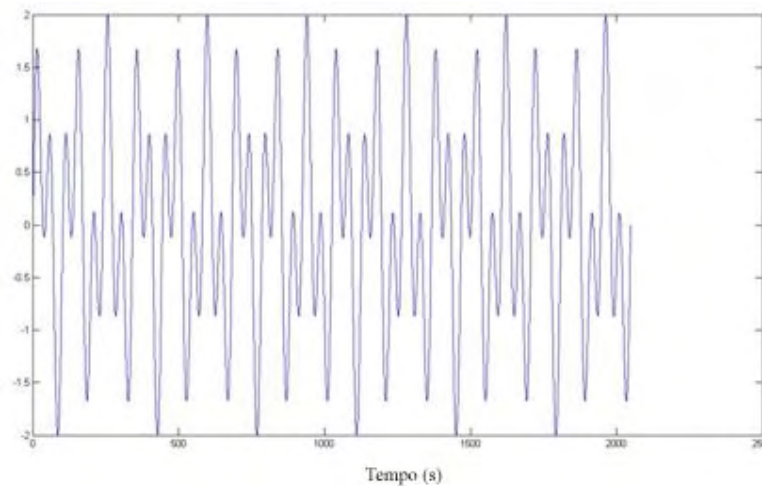
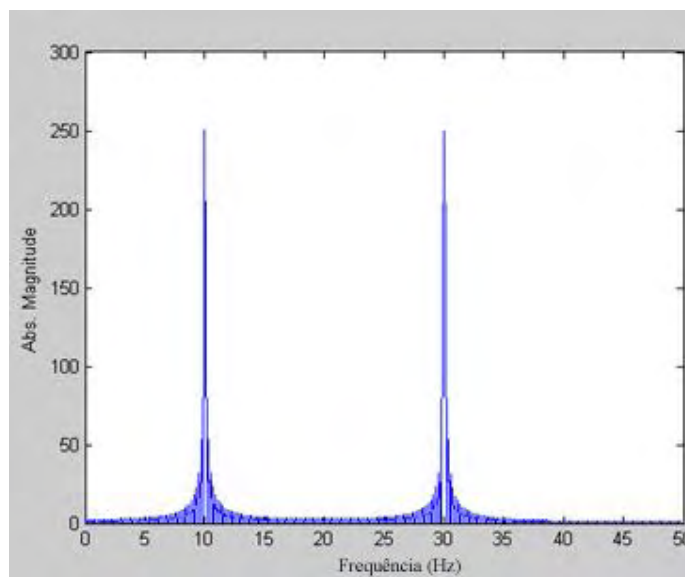


Figura 2.2 – Transformada de Fourier aplicada a  $f_1(t)$

Agora será analisado um segundo sinal dado por  $f_1(t) = \text{sen}(2\pi 10t) + \text{sen}(2\pi 30t)$ , para qualquer  $t$ , mostrado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Representação gráfica de  $f_2(t)$ 

Quando se aplica a transformada de Fourier ao sinal apresentado na Figura 2.3 observa-se novamente os picos de frequência em 10 Hz e 30 Hz.

Figura 2.4 – Transformada de Fourier aplicada a  $f_2(t)$ 

Com os resultados apresentados nas Figuras 2.2 e 2.4, podemos concluir que a transformada de Fourier identifica as frequências envolvidas em um dado sinal, mas não é capaz de mostrar quando essas frequências ocorrem.

## 2.4 Definição de wavelet

O termo *wavelet* significa uma “pequena onda” que, matematicamente, expressamos por uma função  $\psi(t)$ . Trata-se de uma função capaz de decompor e analisar funções em diferentes escalas de frequência e de tempo. A decomposição de uma função com o uso de *wavelets* é conhecida como transformada *wavelet* e tem suas variantes contínuas e discretas. Graças à capacidade de decompor as funções tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo, as funções *wavelet* são métodos poderosos para a análise de sinais e compressão de dados.

Cita-se a seguir alguns exemplos de funções *wavelets*.

### 2.4.1 Wavelet do tipo Haar

A função  $\psi(t)$  que define a *wavelet* de Haar é um pulso quadrado dado por:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.17)$$

e seu gráfico está representado na Figura 2.5.

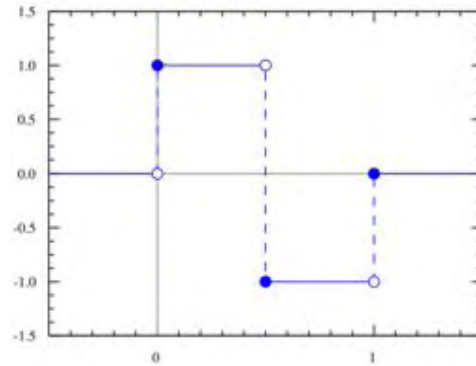


Figura 2.5 – Representação da *wavelet* do tipo Haar

A *wavelet* do tipo Haar é amplamente utilizada em muitas aplicações, especialmente em processamento de imagens digitais.

### 2.4.2 Wavelet do tipo chapéu mexicano

Essa *wavelet* recebe esse nome pelo fato de seu gráfico ser parecido ao de um chapéu mexicano, e consiste na derivada segunda da função densidade de probabilidade Gaussiana e expressa por:

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2} \quad (2.18)$$

e seu gráfico está representado na Figura 2.6.

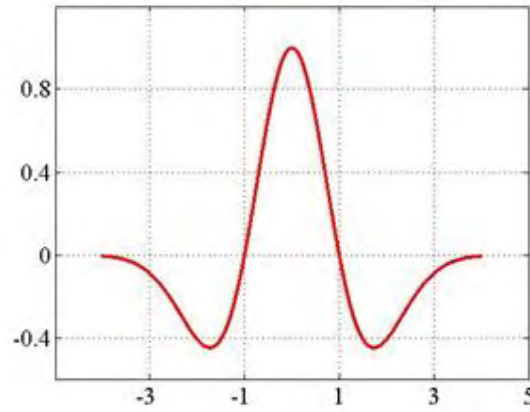


Figura 2.6 Representação da *wavelet* do tipo chapéu mexicano

Esse tipo de *wavelet* é amplamente usado para análise de sinais geofísicos.

### 2.4.3 Wavelet do tipo Morlet

Essa *wavelet* também denominada gaussiana modulada é uma função complexa, para  $\omega_0$  fixo e é definida por:

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2} \quad (2.19)$$

A equação (2.19), pela fórmula de Euler, pode ser decomposta em uma parte real e outra imaginária.

$$\psi(t) = (\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t) e^{-t^2/2} \quad (2.20)$$

onde a parte real da *wavelet* de Morlet é dada pela equação:

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} \cos(\omega_0 t) \quad (2.21)$$

Em (2.28), se atribuimos à frequência  $\omega_0$  um valor, como por exemplo  $\omega_0 = 5$ , temos a parte real da *wavelet* de Morlet, cujo gráfico está apresentado na Figura 2.7.

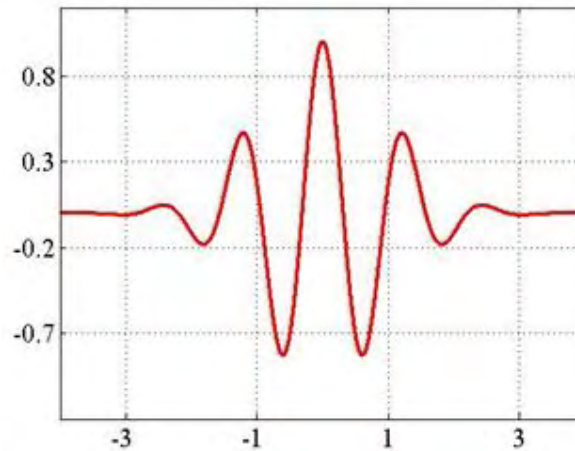


Figura 2.7 Representação da *wavelet* do tipo Morlet

Esse tipo de *wavelet* é muito utilizada para análise de sinais atmosféricos, e também indicada para a análise de sinais periódicos.

#### 2.4.4 Wavelet do tipo Daubechies

As *wavelets* de Daubechies apresentam uma capacidade de análise e síntese mais efetiva do que as de Haar por possuírem maior regularidade (suavidade) e aproximarem melhor funções (suaves) em  $L^2$ . Ao tentarmos aproximar funções regulares por *wavelets* do tipo Haar, que são descontínuas, introduz-se efeitos indesejados na representação do sinal.

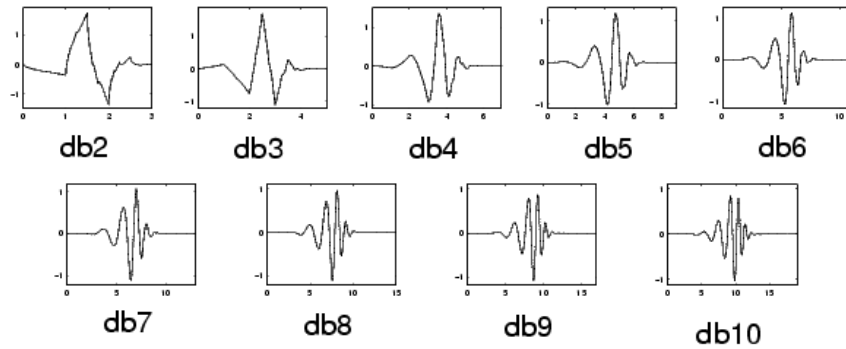


Figura 2.8 Representação da família de *wavelets* do tipo Daubechies

As *wavelets* de Daubechies têm grande aplicação na análise de sinais turbulentos, sinais que possuem grande variação ao longo do tempo e mesmo sinais caóticos, pois, verifica-se que para análise desses tipos de sinais a escolha deve ser a que menos desbalanceia a energia do sinal, isto é, a que necessita do menor número de coeficientes para representar o sinal (MALLAT, 1998).

A construção da wavelet do tipo Daubechies é dada pela Equação 2.22, conhecida como equação de dilatação.

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(2t - k) \quad (2.22)$$

## 2.4.5 Outros tipos de wavelets

Existe uma infinidade de *wavelets* que podem ser utilizadas. Em seguida faremos breves comentários sobre tipos de *wavelets*, uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em MALLAT, 1998, BURRUS, 1998

*Wavelets* do tipo *Coifman*, cujos "filtros" foram projetados tais que tanto a *wavelet* quanto a função escaladora tenham momentos nulos.

*Wavelets* do tipo *Vaidyanathan*, cujo filtro exibe reconstrução exata apesar de não satisfazer nenhuma condição de momentos; o filtro foi otimizado para aplicações de VOZ;

*Wavelets* do tipo *Meyer*, que derivam das chamadas *wavelets* de Shannon, ou *Sinc wavelets*, que são suavemente enjaneladas na frequência tal que o decaimento no tempo ( $t$ ) possa ser mais rápido que qualquer potência de  $t$ ;

*Wavelets* do tipo *biortogonais*, para as quais a restrição da ortogonalidade é relaxada;

*Wavelets* do tipo *simétricas* ou *Simlets* (*symmlets*), ou *wavelets* "menos assimétricas", de suporte compacto e número de momentos nulos variando de 4 a 10;

## 2.5 Escala e translação

Na análise de Fourier, o objetivo básico está em aproximar uma função  $f(t)$  por uma combinação linear de componentes senoidais, cada uma com uma frequência dada

O fato básico é que toda função periódica, de período  $2\pi$ , de quadrado integrável, é gerada por uma superposição de dilatações inteiras da função  $e^{i\omega t}$ .

No entanto a análise de Fourier é apropriada para analisar os processos estacionários. Para processos não estacionários e processos com características especiais, outros sistemas ortogonais podem ser úteis, como as *wavelets* (MORETTIN, 1979).

Enquanto a análise de Fourier consiste em decompor um sinal em senos e cossenos de várias frequências a análise *wavelet* é a decomposição por meio de escalas (dilatação e compressão) e de translações de uma função *wavelet*. (MALLAT, 1989)

Para interpretarmos a dilatação (ou compressão) de uma *wavelet*, consideremos  $\psi(t)$  a *wavelet* de Haar definida em (2.17).

Calculando  $\psi(2t)$  e  $\psi(4t)$  temos:

$$\psi(2t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \psi(4t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{8} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{8} \leq t < \frac{1}{4} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.23)$$

Os gráficos das *wavelets* de Haar  $\psi(t)$ ,  $\psi(2t)$  e  $\psi(4t)$  são apresentados na Figura 2.9:

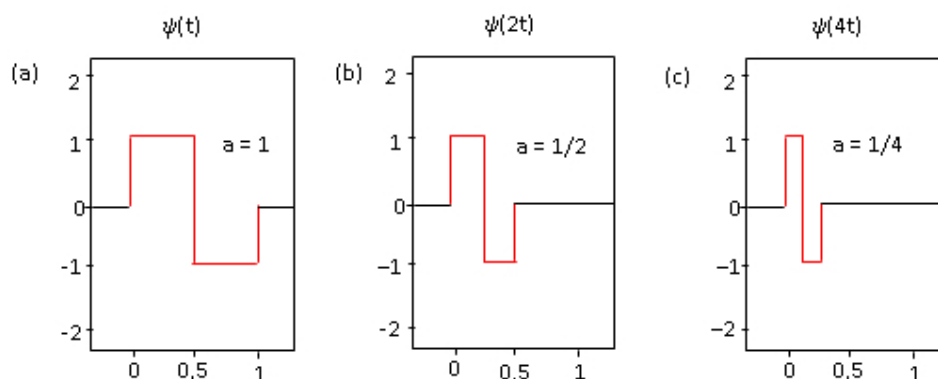


Figura 2.9 Compressão da *wavelet* do tipo Haar para escalas (a) 1/4 (b) 1/2 e (c) 1

Observando os domínios das *wavelets* de Haar  $\psi(t)$ ,  $\psi(2t)$  e  $\psi(4t)$  na Figura 2.9, notamos que cada domínio é obtido multiplicando o domínio da *wavelet* mãe por, respectivamente, 1, 1/2 e 1/4. Estes valores são denominados fatores de escala e são representados, genericamente, por  $a = \frac{1}{2^j}$  com  $j = 0, 1, 2, \dots$ . O valor  $a$  é denominado fator de escala.

Analogamente, o fator de escala é também aplicado em outras *wavelets*. Assim, fatores de escala decrescentes fazem a compressão da *wavelet* e fatores de escala crescentes fazem a sua dilatação. Isso pode ser observado quando aplicamos essas mesmas escalas na *wavelet* de Morlet conforme Figura 2.10.

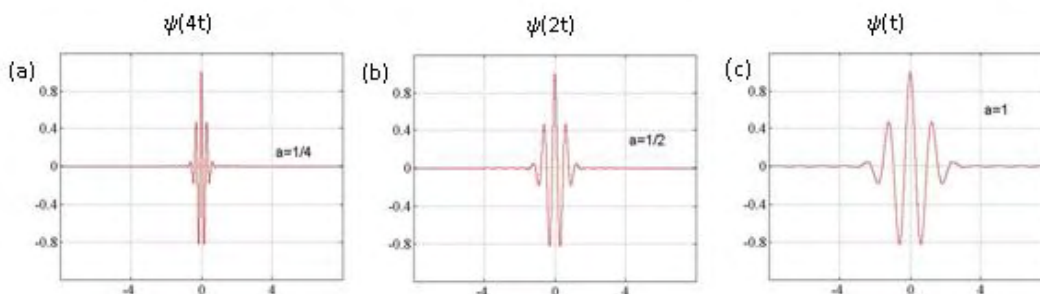


Figura 2.10 Dilatação da *wavelet* do tipo Morlet para escalas (a) 1/4 (b) 1/2 e (c) 1

Se quisermos deslocar uma *wavelet* para um ponto qualquer  $b$ , afastado da origem do eixo, basta calcularmos  $\psi(t - b)$ , conforme mostra a Figura 2.11.

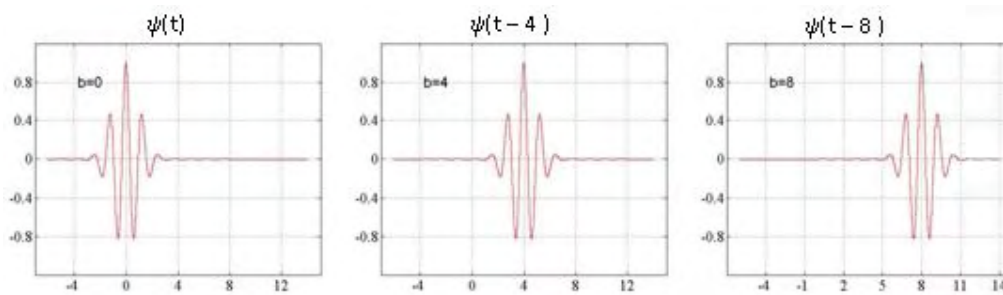


Figura 2.11 Exemplo de translação de *wavelets* do tipo Morlet

Na dilatação de uma *wavelet*  $\psi(t)$  usamos uma escala  $a$  que satisfaça a condição de  $a > 1$  para dilatar a *wavelet*, enquanto que, na translação usamos o parâmetro  $b$  para mudar a origem do eixo  $t$  para  $t - b$ . Alterando escala e posição da *wavelet*  $\psi(t)$ , denominada *wavelet* “mãe”, geramos uma família de *wavelets*, denominadas *wavelets* “filhas”, que são, matematicamente, definidas por:

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

onde, usualmente, os valores atribuídos à  $a$  e  $b$  são:  $a = 2^{-j}$  e  $b = k 2^{-j}$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

Usando a *wavelet* de Haar em (2.23) e atribuindo valores a  $j$  e  $k$ , obtemos algumas *wavelets* “filhas”. Por exemplo:

$$\Psi_{0,0} = 2^{0/2} \Psi(2^0 t - 0) = \Psi(t);$$

$$\Psi_{1,0} = 2^{1/2} \Psi(2^1 t - 0) = \sqrt{2} \Psi(2t);$$

$$\Psi_{1,1} = 2^{1/2} \Psi(2^1 t - 1) = \sqrt{2} \Psi(2t - 1);$$

$$\Psi_{2,0} = 2^{2/2} \Psi(2^2 t - 0) = 2\Psi(4t);$$

$$\Psi_{2,1} = 2^{2/2} \Psi(2^2 t - 1) = 2\Psi(4t - 1);$$

$$\Psi_{2,2} = 2^{2/2} \Psi(2^2 t - 2) = 2\Psi(4t - 2);$$

$$\Psi_{2,3} = 2^{2/2} \Psi(2^2 t - 3) = 2\Psi(4t - 3).$$

Os gráficos da *wavelet* “mãe” e de algumas *wavelets* “filhas” estão apresentados na Figura 2.12.

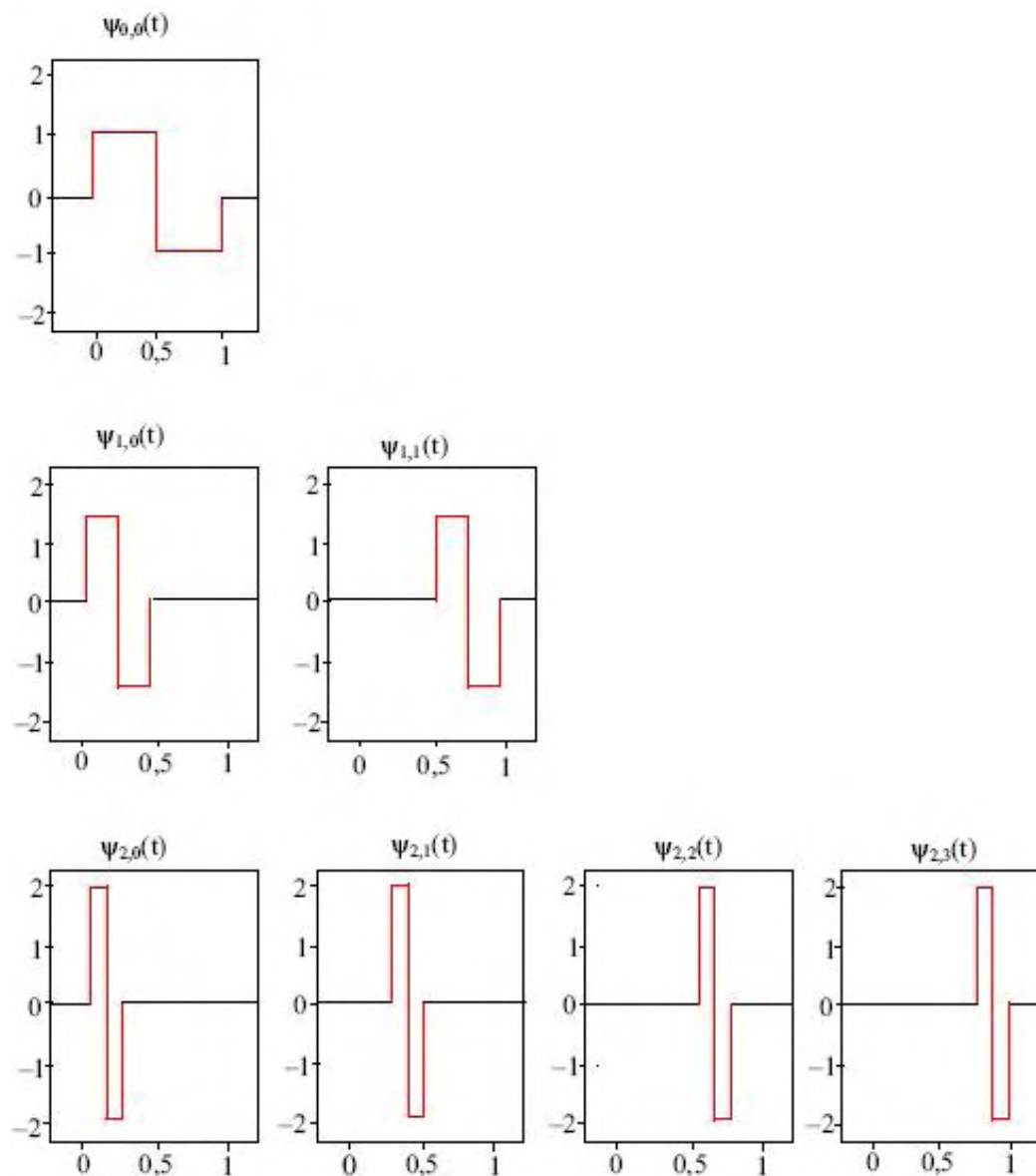


Figura 2.12 *Wavelets* do tipo Haar geradas a partir da *wavelet* “mãe”

Nos gráficos da Figura 2.12, à medida que os valores atribuídos a  $j$  crescem, notamos que as *wavelets* “filhas” tornam-se mais estreitas e mais alongadas, isto é, com amplitudes maiores.

Os valores crescentes atribuídos a  $k$  fazem as *wavelets* “filhas” se movimentarem para a direita, dentro do intervalo de tempo  $\Delta t$ . Dessa forma, quando  $j$  e  $k$  assumem uma grande quantidade de valores inteiros, o sinal a ser analisado que estiver dentro do intervalo de tempo  $\Delta t$  será varrido pelas *wavelets* “filhas”.

A transformada *wavelet* gera os coeficientes *wavelets*. Cada um dos coeficientes  $d_{j,k}$  multiplicados por *wavelets* apropriadas, dependentes de escala e posição, obtidas de uma *wavelet* “mãe”  $\psi(t)$  reconstróem o sinal original ou a função.

Assim, reconstruímos a função  $f(t)$  usando a relação abaixo:

$$f(t) = d_{0,0}\Psi_{0,0} + d_{1,0}\Psi_{1,0} + d_{1,1}\Psi_{1,1} + d_{2,0}\Psi_{2,0} + d_{2,1}\Psi_{2,1} + \dots \quad (2.25)$$

## 2.6 Transformada wavelet contínua

A análise obtida através da transformada *wavelet* representa o próximo passo lógico: uma técnica que utiliza uma janela com regiões de dimensão variável. A transformada *wavelet* permite o uso de longos intervalos onde queremos mais precisão sobre as baixas frequências, e regiões de tamanho menor para obter informações sobre as altas frequências (isto se deve ao princípio de incerteza de Heisenberg).

Na análise de Fourier é feita uma decomposição do sinal em funções senos e cossenos com frequências diversas e na análise usando a transformada *wavelet* a decomposição do sinal é feita por meio da função *wavelet* que será modificada com dilatações e compressões (uso da escala) e será transladada ao longo de todo sinal. Com isto, teremos indicação das frequências presentes no sinal, em que tempo elas ocorrem (informação não fornecida com a transformada de Fourier) e, também, evita a possibilidade de escolha errada da janela na transformada de Gabor.

Segundo DAUBECHIES, 1992, MALLAT, 1986, podemos definir a transformada *wavelet* como:

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}(t) dt \quad (2.26)$$

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.27)$$

onde  $\psi(t)$  é a função (*wavelet*) escolhida para se fazer a análise do sinal  $f(t)$ . O valor  $a$  é o parâmetro de escala e  $b$  o parâmetro de localização com  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Mudando o valor de  $a$  tem-se o efeito de dilatação ( $a > 1$ ) ou de contração ( $a < 1$ ), enquanto que mudanças no parâmetro  $b$  têm o efeito de analisar a função  $f(t)$  em torno deste ponto.

A função  $\psi(t)$  deve possuir as seguintes características (CHAN, 1995):

- a) satisfazer as condições de normalização;

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1 \quad (2.28)$$

- b) decair suficientemente rápido para se obter uma boa localização;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt < \infty \quad (2.29)$$

- c) satisfazer a condição de admissibilidade;

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.30)$$

onde  $\Psi(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $\psi(t)$ . As condições acima garantem a existência da transformada *wavelet* inversa:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2} \quad (2.31)$$

- d) a média de  $\psi(t)$  deve ser igual a zero,  $\psi(t)$  comporta-se como uma onda (daí o nome *wavelet*).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.32)$$

## 2.7 Transformada wavelet discreta

As propriedades de *wavelets*, descritas anteriormente de maneira geral, também são verdadeiras na análise de *wavelet* discreta.

Consideremos o conjunto de valores

$$X = (X_0, X_1, \dots, X_T) \quad (2.33)$$

que representam amostras de um sinal observado ou gerado por uma função  $f(t)$ .

Supondo  $T = 2^M$ ,  $M > 0$ , inteiro, definimos a transformada *wavelet* discreta de  $X$ , com respeito à *wavelet* “mãe”  $\psi(t)$ , como:

$$d_{j,k}^\psi = \sum_{t=0}^{T-1} X_t \psi_{j,k}(t/T) \quad (2.34)$$

que denotamos, simplesmente  $d_{j,k}$ . Essa transformada é calculada para  $j = 0, 1, \dots, M - 1$  e  $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$  (VALENS, 1999).

Assim, na transformada *wavelet* discreta, os sinais são representados por séries do tipo:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.35)$$

em que as funções bases são dadas por:

$$\psi_{j,k}(t) = \psi(2^j t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.36)$$

são chamadas *wavelets* “filhas” e são geradas a partir de dilatações e translações de uma única função  $\psi(t)$  também denominada *wavelet* “mãe”.

As funções *wavelets*  $\psi_{j,k}(t)$  são obtidas de  $\psi(t)$  por uma dilatação e uma translação. As funções  $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}$  formam uma base que não precisa ser necessariamente ortogonal. Uma das vantagens de se trabalhar com bases ortogonais é que elas permitem a reconstrução perfeita do sinal original a partir dos coeficientes da transformada *wavelet* de forma menos redundante.

Consideremos uma base ortogonal gerada por  $\psi(t)$  onde os coeficientes de *wavelets* são dados por

$$d_{j,k} = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(2^j t - k) dt \quad (2.37)$$

A transformada *wavelet* é a aplicação que associa um sinal aos seus coeficientes *wavelets*.

$$f(t) \rightarrow d_{j,k}. \quad (2.38)$$

Os índices  $j$  e  $k$  representam, respectivamente, escala e translação.

Assim, cada um desses coeficientes  $d_{j,k}$  multiplicados por apropriadas *wavelets*, dependentes de escala-posição, obtidas de uma *wavelet* “mãe”  $\psi(t)$ , reconstruem o sinal original.

A expansão de uma função ou sinal por funções base *wavelets* não é única. Existem várias funções *wavelets* diferentes que podem ser usadas como funções base.

## 2.8 Obtenção da transformada wavelet

Para obtenção da transformada *wavelet* continua podemos utilizar um pequeno algoritmo retirado de CHUI, 1992, composto de 5 passos que seguem abaixo.

Passo 1: Escolhe-se uma *wavelet* e faz-se a comparação com uma porção contida no sinal original.

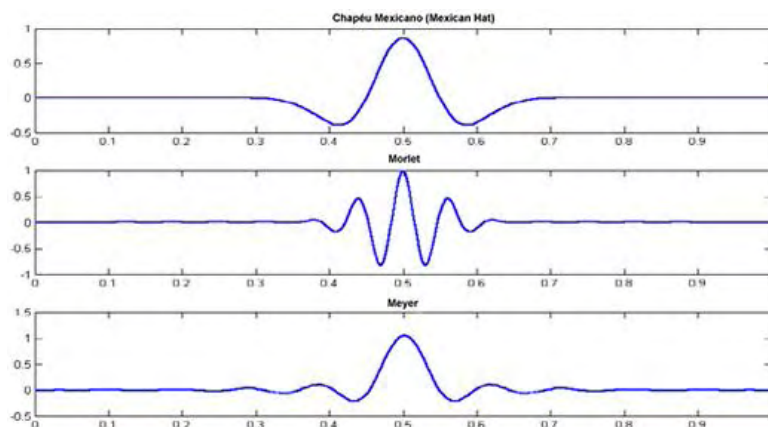


Figura 2.13 Diferentes tipos de *wavelets* podem ser utilizadas para obtenção da transformada *wavelet*.

2. Calcula-se então o número  $C$ , que representa a correlação da *wavelet* com a porção do sinal sendo analisado

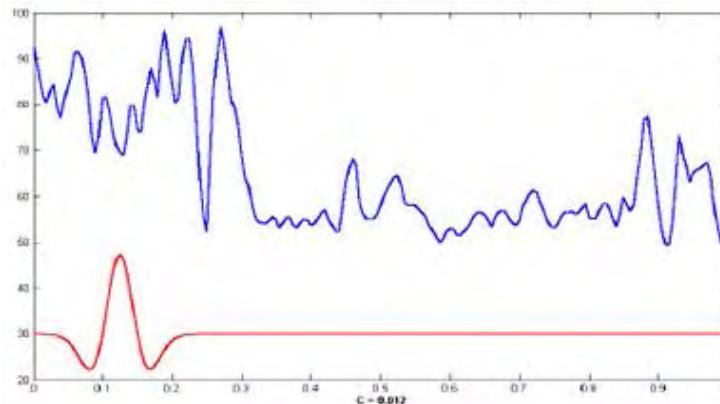


Figura 2.14 *Wavelet* (em vermelho) comparada com o sinal (em azul)

3. Move-se a *wavelet* para a direita e iniciam-se novamente os passos (1) e (2) até que todo o sinal seja percorrido pela *wavelet*.

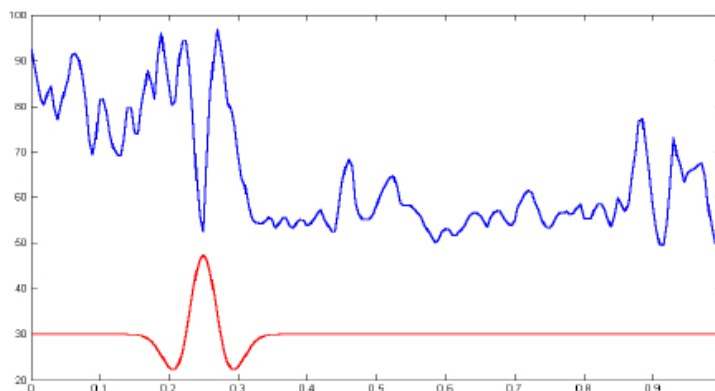


Figura 2.15 Representação do 3º passo para obtenção da transformada *wavelet*.

4. A *wavelet* é distendida e repetem-se os passos (1) a (3).

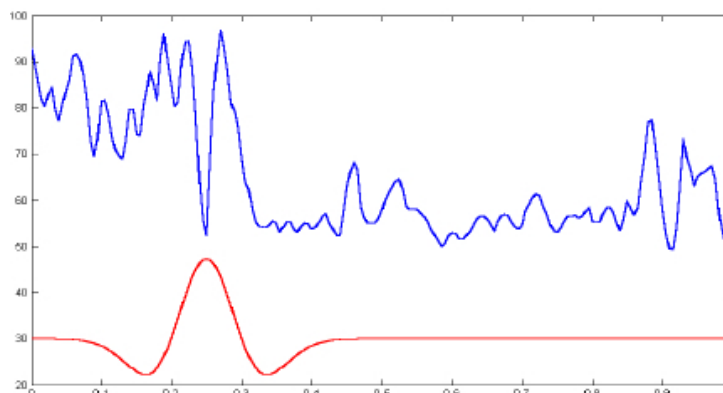


Figura 2.16 Representação do 4º passo para obtenção da transformada *wavelet*

5. Os passos de (1) a (4) são repetidos para todas as escalas.

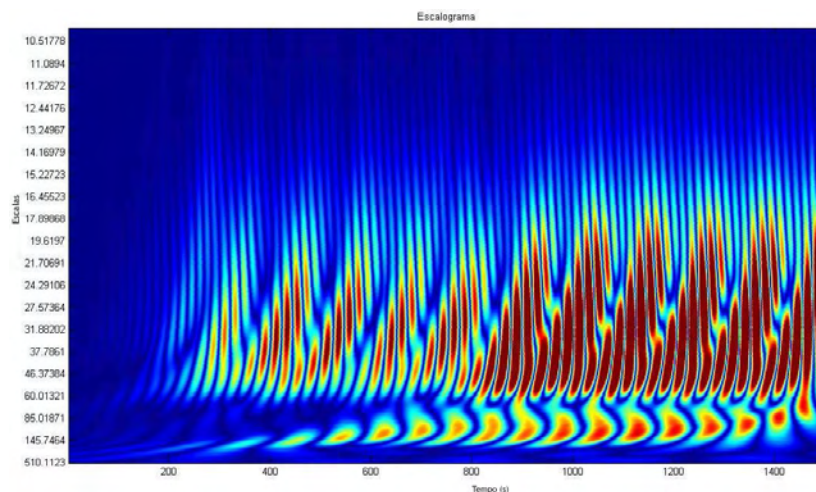


Figura 2.17 Finalmente os passos 1° a 4° são repetidos para todas as escalas

Quando terminamos todos os passos descritos acima, produzimos um escalograma com todas as escalas como, por exemplo, na Figura 2.17.

Os coeficientes *wavelets* das escalas maiores estão associados à *wavelets* mais dilatadas e, escalas menores, a *wavelets* mais comprimidas.

Note que quanto mais dilatada for a *wavelet*, maior será a seção do sinal com o qual ela estará sendo comparada e, deste modo, as características mais visíveis estão sendo medidas pelos coeficientes *wavelets*.

Assim, existe uma correspondência entre as escalas *wavelets* e a frequência revelada pela análise *wavelet*, conforme vemos na Figura 2.18 (MATHWORKS, 2007).

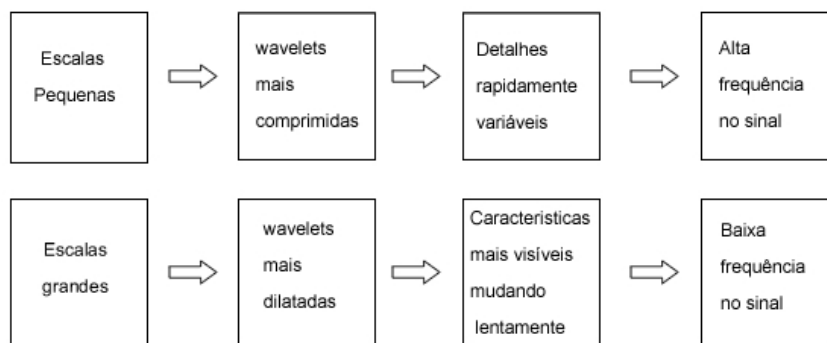


Figura 2.18 Relação entre escalas e frequências na análise *wavelet*.

A transformada *wavelet* permite representar um sinal por meio de um diagrama tempo-frequência, conhecido como escalograma, mostrado na Figura 2.17, no qual os coeficientes são representados por meio de intensidade de cores, a cor azul significa menor intensidade do coeficiente *wavelet* ou energia e a cor vermelha representa maior intensidade do coeficiente *wavelet* ou energia, como pode ser visto na Figura 2.19.

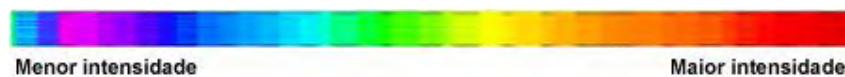


Figura 2.19 Escala de cores.

Aplica-se a transformada *wavelet* aos sinais mostrados nas Figuras 2.1 e 2.3, o primeiro  $f_1(t) = \text{sen}(2\pi 10t)$  p/  $t < 1024$  e  $f_1(t) = \text{sen}(2\pi 30t)$  p/  $t > 1024$ , e o segundo sinal  $f_2(t) = \text{sen}(2\pi 10t) + \text{sen}(2\pi 30t)$  p/ qualquer  $t$ .

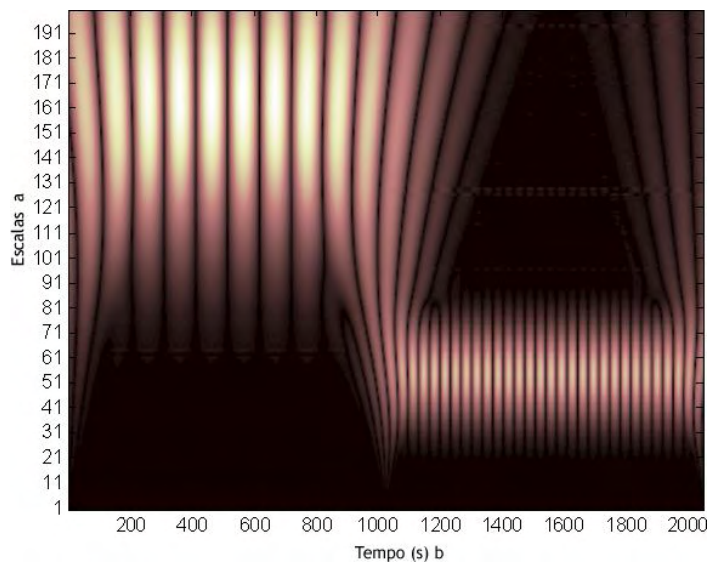


Figura 2.20 Transformada *wavelet* aplicada a  $f_1(t)$

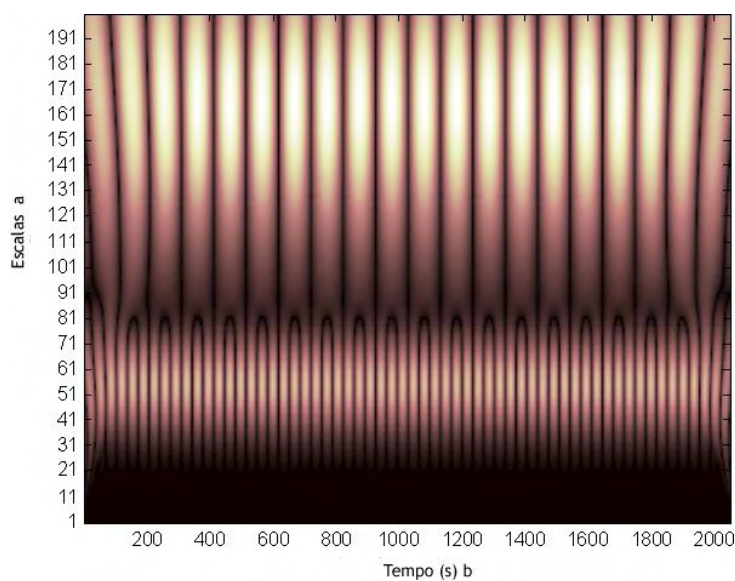


Figura 2.21 Transformada *wavelet* aplicada a  $f_2(t)$

Os escalogramas mostrados nas Figuras 2.20 e 2.21 mostram que temos um máximo dos coeficientes em torno da escala 55 e em torno da escala 165 e que no caso da função  $f_2$  acontece ao longo de todo o sinal e no caso de  $f_1$  há uma indicação de onde acontece outra frequência. Na Figura 2.20 o corte não ocorre exatamente no ponto 1024, devido a convolução que faz com que o resultado dos coeficientes dependem de valores nas proximidades do corte.

## **CAPÍTULO 3**

### **Vibrações em Sistemas Mecânicos**

#### **3.1 Introdução**

Uma vibração mecânica é produzida quando um sistema é deslocado de sua situação de equilíbrio estável. O sistema tende a retornar a esta posição sob a ação de forças restauradoras, mas geralmente atinge a posição original com certa velocidade, que o leva além desta posição. Em um sistema ideal e sem a presença de forças dissipativas, o sistema permaneceria indefinidamente em movimento oscilatório em torno de sua posição de equilíbrio. O intervalo de tempo necessário para o sistema completar um ciclo inteiro do movimento é chamado período de vibração. O número de ciclos por unidade de tempo define a frequência e o máximo deslocamento do sistema em relação à posição de equilíbrio é chamado amplitude. Quando o movimento é mantido somente por forças restauradoras, diz-se que a vibração é livre; quando uma força variando periodicamente no tempo é aplicada ao sistema, o movimento resultante é descrito como vibração forçada. Quando o efeito do atrito

pode ser desprezado, diz-se que a vibração é não-amortecida; caso contrário a vibração é amortecida. Embora toda vibração seja amortecida, na maioria das estruturas reais a frequência de vibração observada é essencialmente igual à frequência natural de um sistema não-amortecido (CHOPRA, 1995).

### **3.1.1 Componentes de um sistema vibratório.**

Segundo INMAN, 1996, em um sistema vibratório pode-se classificar seus elementos de acordo com a forma que esses manipulam a energia cinética. Podemos citar:

*Massas ou inércias:* armazenam energia gravitacional e energia cinética, sendo que a última pode ser de translação e ou rotação. Porém, em muitos casos a energia potencial gravitacional pode ser desprezada em comparação a energia cinética.

*Molas:* Armazenam energia potencial do tipo elástica.

*Amortecedores:* dissipam energia mecânica sob a forma de calor e som.

Importante ressaltar (RAO, 1990) que vibrações envolvem conversão de energia potencial em cinética e vice-versa. Caso haja amortecimento no sistema, alguma energia é dissipada em cada ciclo de vibração, a qual deve ser repostada caso o estado de vibração permanente deva ser mantido.

### **3.1.2 Graus de Liberdade.**

Graus de liberdade definem o número mínimo de coordenadas independentes (também chamadas de coordenadas generalizadas) que descrevem completamente o movimento de todos os elementos do sistema.

### **3.1.3 Sistemas Discretos e Sistemas Contínuos.**

*Sistemas discretos* são sistemas que possuem um número finito de graus de liberdade, tem suas propriedades físicas concentradas e são modelados por equações diferenciais ordinárias.

*Sistemas contínuos* são sistemas que possuem um número infinito de graus de liberdade, suas propriedades físicas estão dispostas ao longo da massa e são modelados por equações diferenciais parciais.

### **3.1.4 Quanto à Existência ou não de Amortecimento**

*Vibrações sem amortecimento:* em vibrações desse tipo não há perda de energia por atrito. Se a vibração for livre, não haverá diminuição da amplitude de oscilação e por consequência o sistema vibrará indefinidamente. No caso de vibrações forçadas, a excitação irá repor energia ao sistema podendo até ocorrer aumento da amplitude de vibração.

*Vibrações com amortecimento:* Nesse tipo de vibração há perda de energia por atrito. Caso a vibração sofra ação de forças externas, poderá haver, ou não, diminuição da amplitude de vibração, pois a excitação irá repor energia ao sistema.

### **3.1.5 Quanto à linearidade**

*Vibrações lineares:* Esse tipo de vibração obedece ao princípio da sobreposição, nesse caso existe proporcionalidade entre excitação e resposta.

*Vibrações não lineares*: Esse tipo de vibração não obedece ao princípio da sobreposição, por consequência não existe proporcionalidade entre a excitação e a resposta do sistema.

### 3.2 Sistema Massa-Mola

Sistemas com múltiplos graus de liberdade são aqueles que necessitam de duas ou mais coordenadas para descrever seu movimento (KELLY, 2000). O sistema massa-mola mostrado na Figura 3.1 é um sistema com dois graus de liberdade podendo oscilar de duas formas distintas e cada uma delas corresponde a uma frequência característica. Nesse exemplo temos duas massas e duas molas na posição de equilíbrio estático e os deslocamentos serão medidos através dessa posição, sendo que não existem forças externas e nem amortecimento no sistema.

Segundo GAWRONSKI, 2004, para a modelagem das equações do sistema proposto na Figura 3-1, podem ser usadas duas abordagens. A primeira delas seria usando a segunda Lei de Newton e o princípio de D'Alembert. E uma segunda abordagem poderia ser através das equações de Lagrange. Neste trabalho utilizaremos a primeira abordagem, porém a abordagem utilizando Lagrange pode ser vista em KELLY, 2000.

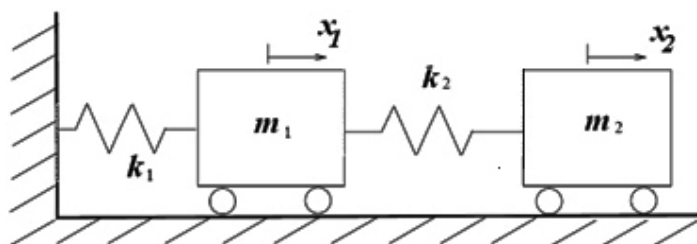


Figura 3.1 Sistema com massa-mola com dois graus de liberdade, sem ação de forças externas e sem atrito

Antes de construirmos o sistema de equações que regem o movimento do sistema mostraremos como os deslocamentos  $x_1$  e  $x_2$  contribuem com as equações. Da lei de Hook temos que:

$$F = -kx \quad (3.1)$$

Como mostrado na Figura 3.2,  $x_2$  é o deslocamento de  $m_2$  mais a contribuição do descolamento de  $m_1$ , portanto:

$$x_2 = x_1 + x_2' \quad (3.2)$$

Rearranjando (3.2), temos:

$$x_2' = x_2 - x_1 \quad (3.3)$$

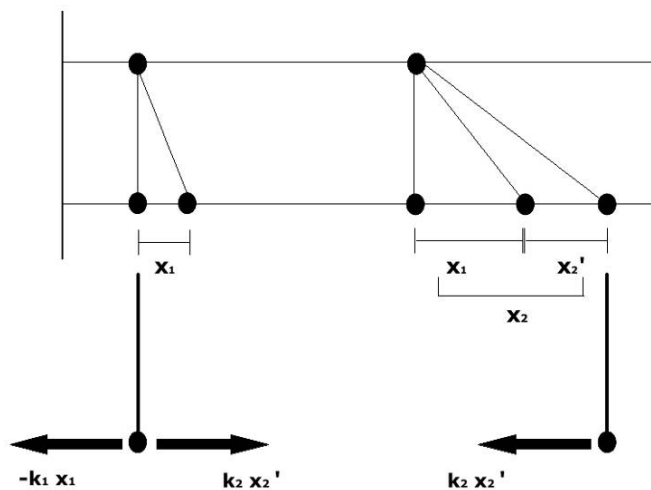


Figura 3.2 Esquema do deslocamento das massas do sistema analisado

Os diagramas de corpo livre apresentados na Figura 3.3, mostram como as forças estão atuando em cada uma das massas.

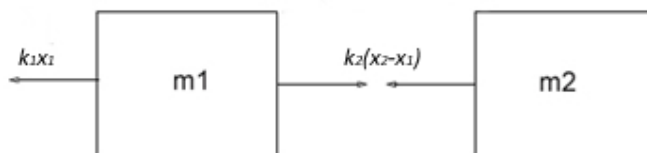


Figura 3.3 Diagrama de corpo livre do sistema analisado

A partir da segunda lei de Newton obtemos as equações para o movimento das suas massas que é dado por:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1(t) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Rearranjado (3.4), temos.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Outra forma de representar (3.5) é usando sua forma matricial, definindo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}; \quad \ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

As matrizes mostradas representam posição, velocidade e aceleração respectivamente e.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

são as matrizes de massa e rigidez respectivamente. Assim a equação matricial que descreve o movimento do sistema é dada por:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (3.8)$$

As condições iniciais do problema também serão escritas na forma vetorial, pelas equações (3.9) e (3.10).

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\dot{x}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Considerando que as duas massas descrevem um movimento harmônico como em um sistema de um grau de liberdade temos:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (3.11)$$

Das equações do movimento é sabido que:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 e^{i\omega t} \\ x_2 &= X_2 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_1 &= -\omega^2 X_1 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 &= -\omega^2 X_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituindo (3.11) nas equações do movimento teremos:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Multiplicando a Equação 3.13 por  $M^{-1}$ , pode-se escrever - lá da seguinte forma:

$$(M^{-1}K - \omega^2 I)X e^{i\omega t} = 0 \quad (3.14)$$

E concluímos que.

$$\text{Det}(M^{-1}K - \omega^2 I) = 0 \quad (3.15)$$

Da equação (3.15) a raiz quadrada dos autovalores associados à matriz  $M^{-1}K$  representam as frequências naturais do sistema. (BROWSON, 1989)

Quando em (3.15) o determinante é calculado obtém-se um polinômio de ordem 2 em  $\omega^2$ . Esta equação, conhecida como equação característica, tem duas raízes reais

positivas para  $\omega^2$ , devido ao fato que as matrizes de massa  $M$  e de rigidez  $K$  são simétricas e positivas definidas. Essas raízes são denominadas autovalores.

As duas raízes determinam as duas frequências de vibração  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Quando uma frequência natural, por exemplo,  $\omega_1$  é conhecida, a equação característica pode ser resolvida para o correspondente vetor  $X_1$  a menos de uma constante multiplicativa. O problema de valores próprios não determina o valor absoluto dos autovetores  $X$ . Em correspondência às duas frequências de vibração natural  $\omega_1$  e  $\omega_2$  de um sistema com 2 graus de liberdade, existem 2 vetores independentes  $X_1$  e  $X_2$  que são designados modos normais de vibração ou autovetores (CHOPRA, 1995).

Com isso duas soluções podem ser obtidas para o sistema:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{Bmatrix} e^{i\omega_1 t} \quad (3.16)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{Bmatrix} e^{i\omega_2 t} \quad (3.17)$$

Onde como já citado  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as frequências naturais de vibração  $X_1$  e  $X_2$  os modos normais de vibração

Qualquer combinação linear das duas soluções é uma solução para o problema proposto. A solução geral para equação pode ser escrita da seguinte forma.

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{Bmatrix} e^{i\omega_1 t} + C_2 \begin{Bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{Bmatrix} e^{i\omega_2 t} \quad (3.18)$$

Onde as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas pelas Equações (3.9) e (3.10).

### **3.3 Freqüências Naturais e Modos Normais de Vibração**

As freqüências naturais de um sistema são propriedades inerentes do sistema e que dependem de fatores como as características físicas do material, da sua conformação geométrica e das vinculações entre as partes do sistema.

Os modos normais de vibração descrevem as configurações assumidas por um sistema em vibração livre sob determinadas freqüências naturais.

Segundo CHOPRA, 1995, em vibrações livres sem amortecimento, espera-se que uma freqüência natural faça cada ponto da estrutura executar um movimento harmônico em relação a uma posição de equilíbrio estático.

A equação (3.15) é um importante problema matemático envolvendo autovalores e autovetores, que torna possível a separação das equações diferenciais que regem o movimento do sistema, obtendo-se, como já citado, os modos normais de vibração através dos autovetores e as freqüências naturais através dos autovalores associados ao sistema.

### **3.4 Vibrações em modelos de edifícios com dois graus de liberdade**

Para entendermos a dinâmica de edifícios, vamos idealizar um modelo de  $N$  andares, excitado por uma força externa, e governado por um sistema de equações diferenciais ordinárias que dependem do número de andares do edifício.

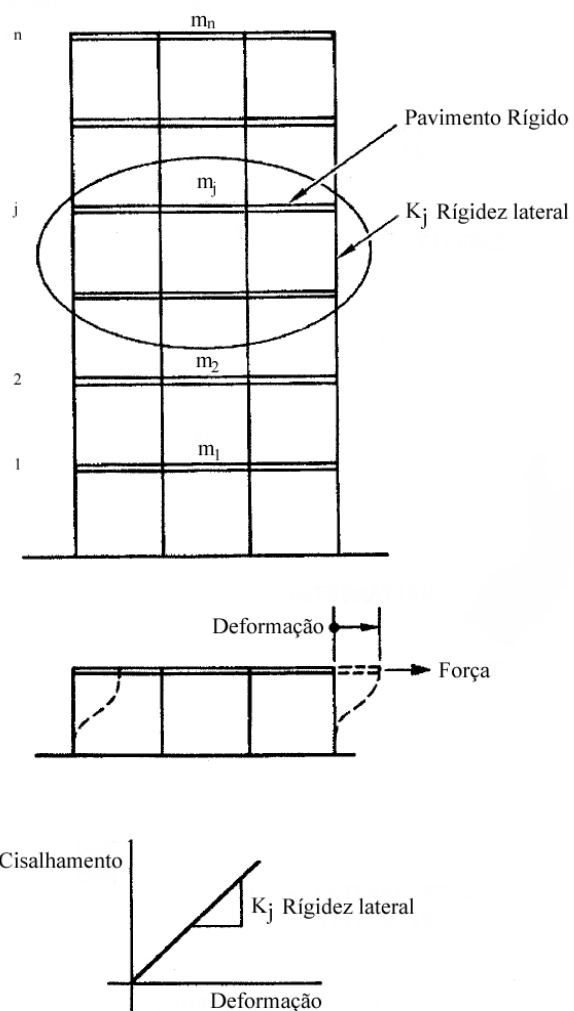


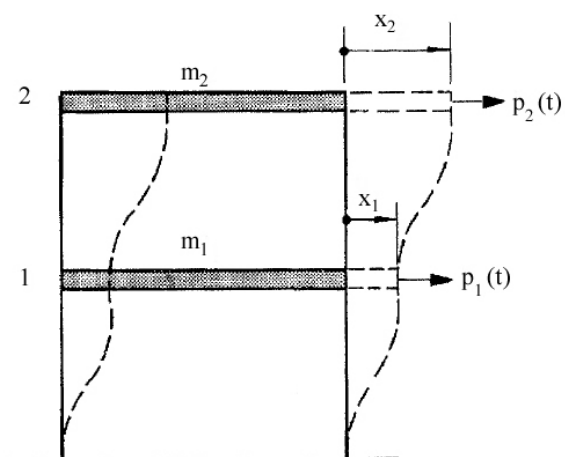
Figura 3.4 Idealização de um edifício de N andares (CHOPRA , 1995).

Inicialmente iremos encontrar o sistema de equações para um edifício de dois andares, composto de um pavimento térreo, o pavimento do primeiro e do segundo andar. Na seqüência será mostrado como é possível modelar o sistema para um edifício de N andares.

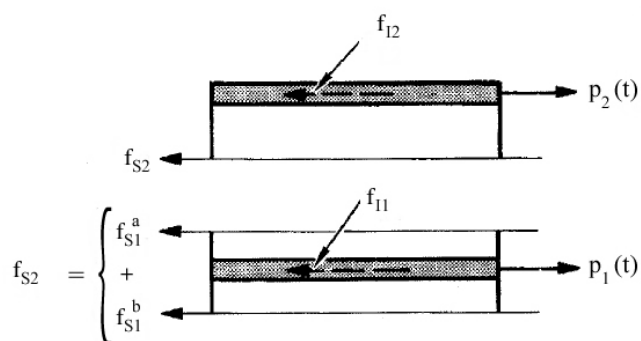
### 3.4.1 Forças Externas

A Figura 3.5 mostra um edifício de 2 andares submetido a forças externas denominadas  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$ , aplicadas respectivamente no pavimento do primeiro e do segundo andar respectivamente. Sob a ação dessas forças o edifício é deslocado na direção lateral. Os deslocamentos do pavimento do primeiro e do segundo andar são denominados  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , que denominaremos a partir de agora de deslocamentos do primeiro e do segundo andar respectivamente.

As forças que atuam nos dois andares podem ser visualizadas na Figura 3.5(b). Nessa visualização estão inclusas as forças externas  $p_n(t)$ , a força de inércia  $f_{ij}$  e a força de resistência elástica  $f_{sj}$ . As forças de inércia atuam para esquerda em oposição à aceleração positiva. As forças de resistência elástica também atuam para esquerda em oposição à deformação da estrutura que também está na direção positiva.



(a) Edifício de dois pavimentos submetido a forças externas



(b) Diagramas de corpo livre

Figura 3.5 Diagrama de corpo livre para um edifício de 2 pavimentos

A condição de equilíbrio para o primeiro andar é dado por:

$$f_{11} + f_{S1} = p_1(t) \quad (3.19)$$

E para o segundo andar temos:

$$f_{12} + f_{S2} = p_2(t) \quad (3.20)$$

As forças de inércia e a força elástica terão relação com a aceleração e deslocamento das massas. Para uma estrutura linear as forças de resistência elástica demonstram a relação de deslocamento e rigidez de cada andar.

$$\begin{aligned} f_{s1} &= f_{s1}^b + f_{s1}^a \\ f_{s1} &= k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$f_{s1} = k_2 (x_1 - x_2) \quad (3.22)$$

As forças de inércia associadas às massas  $m_1$  e  $m_2$ , do primeiro e do segundo andar respectivamente, submetidas às acelerações  $\ddot{x}_1$  e  $\ddot{x}_2$  são:

$$f_{I1} = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.23)$$

$$f_{I2} = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.24)$$

Substituindo as equações (3.23) e (3.24) na equação (3.19), obteremos:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) &= p_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= p_2(t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Esse conjunto de equações diferenciais apresentado na equação (3.25), não é independente, as equações são acopladas e precisam ser resolvidas simultaneamente para determinarmos a resposta dos deslocamentos. A equação do movimento pode ser escrita da seguinte forma (BEARDS, 1996).

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Mas que também pode ser escrita como mostrada na equação (3.27).

$$M\ddot{x} + Kx = p(t) \quad (3.27)$$

Onde  $x$  representa o deslocamento,  $\ddot{x}$  representa o vetor aceleração,  $p(t)$  é o vetor força externa  $M$  é a matriz de massa e  $K$  é a matriz de rigidez.

As considerações e deduções feitas acima levam em consideração um edifício de 2 andares. Vamos agora tratar o caso de um de  $N$  andares, generalizando o caso visto anteriormente (CHOPRA, 1995).

Vamos considerar que o edifício sofre a ação de forças externas em todos os seus andares. A força aplicada no  $j$ -ésimo andar é denotada  $p_j(t)$ .

Sobre a influência dessa forças, a configuração do deslocamento é dada em cada instante de tempo, e o deslocamento total é dado por  $x_j(t)$ , ( $j=1, 2, \dots, N$ ), onde  $N$  representa o número de andares do edifício.

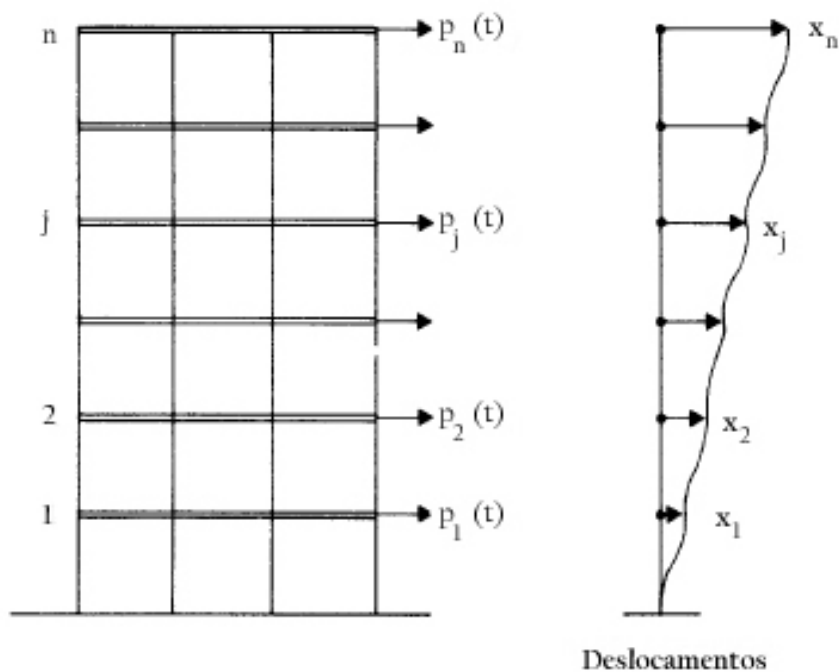


Figura 3.6 Edifício de  $N$  andares submetido a forças externas

Com isso o deslocamento e vetor força externa são dados por:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_j \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

$$p(t) = \begin{Bmatrix} p_{1(t)} \\ p_{2(t)} \\ \cdot \\ p_j(t) \\ \cdot \\ p_n(t) \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

A matriz de massa é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & m_j & & \\ & & & m_n & \\ & & & & \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Por sua vez a matriz de rigidez é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -k_3 & (k_3 + k_4) & \cdot & \cdot & -k_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

A Equação (3.27) é equivalente a Equação (3.8) considerando que nessa não existe ação de forças externas. Para análise de edifícios com N andares pode-se escrever a equação que governa o seu movimento da seguinte forma (GAWRONSKI, 1998).

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t) \quad (3.32)$$

Onde, agora  $C$  é a matriz de amortecimento estrutural, desconsiderada anteriormente em (3.8) e (3.27) e  $\dot{x}$  o vetor velocidade.

### 3.4.2 Edifícios submetidos a ondas de terremoto

Neste tópico vamos aplicar a um edifício de dois andares, (já apresentado anteriormente na Figura 3.4), não forças externas e sim excitaremos a estrutura através de uma onda produzida por um terremoto aplicada na sua base. Consideramos que a onda do terremoto tem apenas componente na horizontal com deslocamento  $x(t)$ , velocidade  $\dot{x}(t)$ , e aceleração  $\ddot{x}(t)$ .

Sob influencia semelhante à excitação por forças externas a base da estrutura desloca-se de  $x_g(t)$ , se o solo é rígido, e a estrutura será submetida à deformação, resultando em deslocamentos de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , (primeiro e segundo andares respectivamente) em relação ao solo.

O deslocamento total da estrutura é dado por:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x_g(t) + x_1(t) \\x_2'(t) &= x_g(t) + x_2(t)\end{aligned}\tag{3.33}$$

Dos diagramas de corpo livre mostrados na Figura 3.5, podemos escrever as equações de equilíbrio dinâmico como mostrado na equação (3.34).

$$\begin{aligned}f_{I1} + f_{S1} &= 0 \\f_{I2} + f_{S2} &= 0\end{aligned}\tag{3.34}$$

As equações (3.21) e (3.22) são aplicadas porque as forças elásticas dependem somente dos deslocamentos do solo, e não do deslocamento total.

Com as massas  $m_1$  e  $m_2$  sob ação das acelerações  $\ddot{x}_1(t)$  e  $\ddot{x}_2(t)$ , respectivamente, e das forças de inércia, então teremos:

$$\begin{aligned} f_{I1} &= m_1 \ddot{x}_1 \\ f_{I2} &= m_2 \ddot{x}_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

De forma que a equação (3.33) possa ser expressa da forma abaixo.

$$\begin{aligned} f_{I1} &= m_1(\ddot{x}_g + \ddot{x}_1) \\ f_{I2} &= m_2(\ddot{x}_g + \ddot{x}_2) \end{aligned} \quad (3.36)$$

As equações de equilíbrio dinâmico (3.34) após serem substituídas nas equações (3.22) e (3.44), podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + kx_1 + k_2(x_2 - x_1) &= -m_1 \ddot{x}_g(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= -m_2 \ddot{x}_g(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Esse conjunto de duas equações diferenciais governam o movimento de um edifício de 2 andares submetido à ação de uma onda de terremoto e pode ser expressa como.

$$M\ddot{x} + Kx = -M\ddot{x}_g(t) \quad (3.38)$$

Tendo como elementos o deslocamento com o vetor  $x$ , a aceleração com o  $\ddot{x}$ , a matriz de massa ( $M$ ), e a matriz de rigidez estrutural ( $K$ ), todas já definidas anteriormente e  $m$  é um vetor de dois elementos,  $m_1$  e  $m_2$ .

Das equações de movimento para um edifício de 2 andares retornaremos agora ao problema de um edifício com  $N$  andares também sob a influência de uma onda de terremoto, como mostrada na Figura 3.7. Sob excitação semelhante à de forças externas a base da estrutura desloca em  $x(t)$ , se o solo é rígido a deformação da estrutura é exatamente a deformação dos seus andares  $x_j(t)$ , (com  $j= 1, 2, \dots, N$ ) em relação à base. As  $N$  equações de movimento para essa estrutura podem ser expressa pela equação (3.38) com  $x$  sendo o deslocamento,  $M$  a matriz de massa,  $K$  a matriz de rigidez estrutural e  $m$  é o vetor de massas

$m_1, m_2 \dots m_N$ , todos iguais a uma unidade, incluindo também as forças de amortecimento mostradas na Equação (3.38) e representada pela matriz  $C$  e por fim a velocidade dada pelo vetor  $\dot{x}(t)$ .

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -m1\ddot{x}_g(t) \quad (3.39)$$

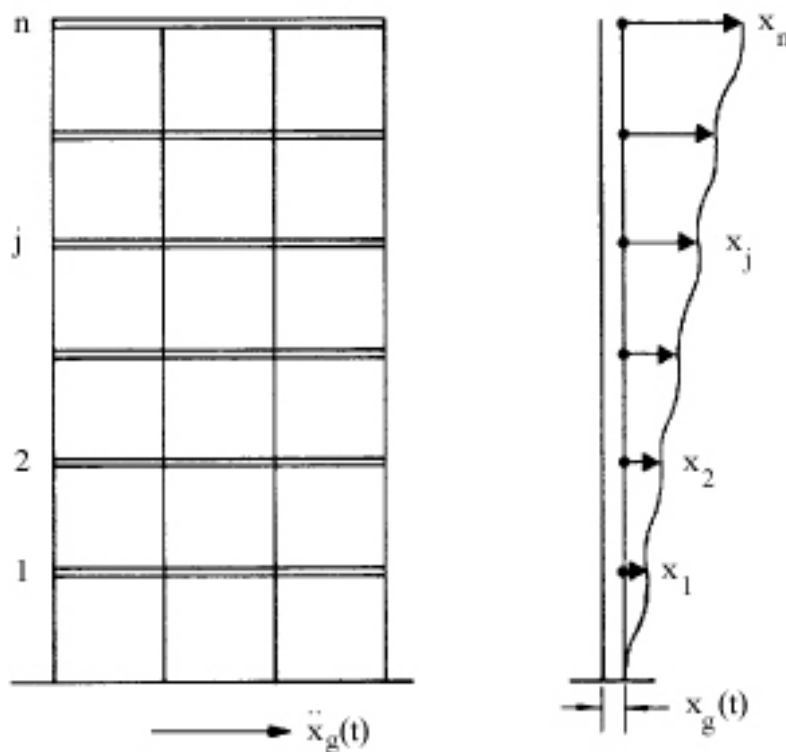


Figura 3.7 – Estrutura submetida à aceleração do solo.

Quando comparamos as equações (3.32) e (3.39) veremos que temos duas estruturas submetidas a dois tipos diferentes de excitação, porém vimos que o deslocamento  $x(t)$  apresentado na estrutura submetida à aceleração do solo  $\ddot{x}(t)$  é idêntica a estrutura que tem base fixa e estava submetida a forças externas.

Vamos considerar daqui para frente que o nosso modelo possui  $N$  pavimentos e sem amortecimento. Então partindo da Equação (3.27) temos:

$$M\ddot{x} + Kx = p(t) \quad (3.40)$$

Substituindo na equação acima  $x = Xe^{i\omega t}$  encontramos através da equação característica seus autovalores e autovetores, e após colocarmos em ordem crescente dos seus autovalores encontramos enfim a matriz modal  $\Phi$ , onde  $\Phi$  é a matriz modal formada pela coluna dos autovetores

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2 \dots] \quad (3.41)$$

E onde  $[\Lambda]$  é a matriz diagonal dos autovalores.

### 3.5 Método da Superposição Normal

Segundo PAZ, 1985, a solução direta do sistema de equações diferenciais proposto na equação (3.32) constitui-se em um problema de difícil tratamento. Objetivo da análise modal é transformar esse sistema de equações simultâneas em um numero equivalente de equações diferenciais independentes e de fácil integração. Considera-se que essa resposta seja uma combinação linear dos modos normais de vibração, como representado na Figura 3.8.

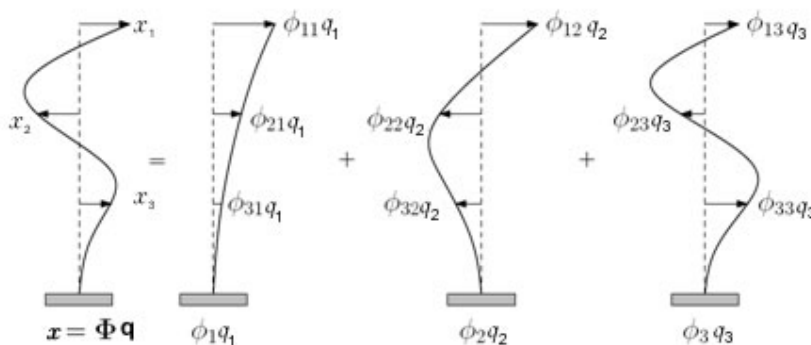


Figura 3.8 Modos normais de vibração (CHOPRA, 1995)

$$x = \phi q \quad (3.42)$$

Esta representação é baseada no fato de que os modos normais de vibração são ortogonais, formando um conjunto linearmente independente e, portanto, podem constituir uma base para qualquer vetor que pertença aquele espaço vetorial.

Para ilustrar melhor esse conceito, apresenta-se na Figura 3.5, um edifício de 2 andares, conforme esquematizado por CHOPRA, 1995, a sua configuração final pode definida pela superposição adequada dos modos normais de vibração.

Para esse caso o vetor deslocamento  $x$  é obtido pela soma de suas respectivas coordenadas modais, ficando:

$$x = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 \quad (3.43)$$

As velocidades e acelerações de cada andar também podem ser escritas como soma das coordenadas modais.

$$\dot{x} = \phi \dot{q} \quad \ddot{x} = \phi \ddot{q} \quad (3.44)$$

Substituindo os deslocamentos modais, dados pela equação (3.44), e suas derivadas na equação de movimento dadas pela equação (3.27), temos:

$$M\phi\ddot{q} + K\phi q = p(t) \quad (3.45)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.45) por  $\Phi^T$ , resulta:

$$\Phi^T M\Phi\ddot{q} + \Phi^T K\Phi q = \Phi^T p(t) \quad (3.46)$$

Resolvendo a parte homogênea da equação 3.46 é possível obter os autovalores associados ao sistema.

$$\Phi^T M\Phi\ddot{q} + \Phi^T K\Phi q = 0 \quad (3.47)$$

Tomando  $q = X e^{i\omega t}$ , obtêm-se.

$$\omega^2 M_D X e^{i\omega t} + K_D X e^{i\omega t} = 0 \quad (3.48)$$

Onde  $M_D$  e  $K_D$  são matrizes diagonais.

Obtendo:

$$\det(\omega^2 M_d - K_d) = 0 \quad (3.49)$$

De onde calcula-se as frequências dos modos normais de vibração.

Assim, pode-se reescrever a equação (3.45) da seguinte forma:

$$\ddot{q} (\phi^T M \phi) + \omega q (\phi^T M \phi) = \phi^T P \quad (3.50)$$

Que resulta em:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = p \quad (3.51)$$

onde

$$p = \frac{\phi^T P}{\phi^T M \phi} \quad (3.52)$$

As condições iniciais para que o processo seja iniciado são dadas por:

$$q(0) = \frac{\phi^T M x}{\phi^T M \phi} \quad (3.53)$$

$$\dot{q}(0) = \dot{p}(0) + \omega^2 q(0)$$

Desse modo desacoplamos o sistema de equações diferenciais, agora temos um conjunto de equações diferenciais lineares e independentes (INMAN, 1996).

### 3.6 Métodos de Integração Direta

Segundo CLOUGH, 1975, métodos de integração direta se utilizam de um procedimento numérico “passo-a-passo” ao longo do tempo, sem a necessidade de fazer transformações nas equações do sistema como as realizadas na superposição modal. Escolhe-se um incremento de tempo  $\Delta t$ , geralmente o mesmo para todo o processo em que o sistema será submetido, inclui-se o efeito da inércia, amortecimento e rigidez, ocorrendo variações da aceleração, velocidade e deslocamento em cada  $\Delta t$  assumido. A maneira como são feitas essas variações é o que determinará a precisão, estabilidade e custo computacional da solução.

Existem várias técnicas utilizadas na modelagem desses métodos de acordo com o instante do passo em que o equilíbrio dinâmico é realizado sendo classificados como métodos de integração explícitos ou implícitos (CHOPRA, 1995).

Os métodos explícitos têm a forma:

$$q_{k+1} = f(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, q_{k-1}, \dots) \quad (3.54)$$

permitindo que a resposta  $q_{k+1}$  seja fornecida completamente em função das respostas obtidas nos passos  $t_k$  e  $t_{k-1}$ . De maneira geral os métodos explícitos são condicionalmente estáveis e entre eles encontra-se o método das diferenças centrais, também chamado de método de passo duplo, pois em cada passo são envolvidas as variáveis anteriores no tempo  $t_k$  e  $t_{k-1}$ .

Os métodos implícitos têm a forma:

$$q_{k+1} = f(\ddot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+1}, q_k, \dots) \quad (3.55)$$

Necessitando das derivadas de  $q_{k+1}$  para que a resposta  $q_{k+1}$  seja obtida. Os métodos implícitos podem ser condicionalmente ou incondicionalmente estáveis. Vários métodos encontram-se dentro dessa classificação, sendo que um dos mais utilizados e que será estudado nesse trabalho é o Método de Newmark, também chamado de método de passo único, pois em cada passo são envolvidas as variáveis anteriores no tempo  $t_k$ .

### 3.6.1 Métodos de Integração de Newmark

Método de integração direta de Newmark, CLOUGH, 1975, refere-se a um processo implícito para solução da equação do movimento. Reescrevendo a Equação (3.32):

$$M\ddot{q}_{k+1} + Kq_{k+1} = P(t)_{k+1} \quad (3.56)$$

O método é baseado na expansão por séries de Taylor para deslocamento e velocidade, dadas respectivamente por:

$$q_{k+1} = q_k + \Delta t \dot{q}_k + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_k + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{q}_k + \dots \quad (3.57)$$

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + \Delta t \ddot{q}_k + \frac{\Delta t^2}{2} \dddot{q}_k + \dots \quad (3.58)$$

Newmark truncou essas duas séries no termo de terceira ordem, ficando:

$$q_{k+1} = q_k + \Delta t \dot{q}_k + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_k + \beta \Delta t^3 \dddot{q}_k + \dots \quad (3.59)$$

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + \Delta t \ddot{q}_k + \alpha \frac{\Delta t^2}{2} \dddot{q}_k + \dots \quad (3.60)$$

Onde os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  definem a variação da aceleração em um passo de tempo.

Se a aceleração é assumida linear dentro do incremento de tempo  $\Delta t$ , tem-se então:

$$\ddot{q}_{k+1} = \frac{(\ddot{q}_{k+1} - \ddot{q}_k)}{\Delta t} \quad (3.61)$$

Substituindo a Equação (3.61) nas Equações (3.60) e (3.59), resulta nas duas equações padrões do método que são dadas por:

$$q_{k+1} = \dot{q}_k + \Delta t \ddot{q}_k + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}_k + \beta \ddot{q}_{k+1} \right] \quad (3.62)$$

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + \Delta t [(1 - \alpha) \ddot{q}_k + \alpha \Delta t \ddot{q}_{k+1}] \quad (3.63)$$

A seguir é mostrado como o método é empregado em notação matricial. A idéia é tentar transformar o problema dinâmico de tal maneira que as técnicas empregadas para a solução de um problema estático também sejam válidas.

Primeiramente, a aceleração  $\ddot{q}_{k+1}$  é isolada da Equação (3.63), ficando:

$$\ddot{q}_{k+1} = \frac{q_{k+1} - q_k - \Delta t \dot{q}_k}{\Delta t^2 \beta} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{q}_k \quad (3.64)$$

Substituindo a Equação (3.64) na Equação (3.63), obtém-se:

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + \Delta t \left[ (1 - \alpha) \ddot{q}_k + \frac{\alpha}{\Delta t^2 \beta} (q_{k+1} - q_k - \Delta t \dot{q}_k) - \left( \frac{\alpha}{2\beta} - \alpha \right) \right] \quad (3.65)$$

Com a substituição das Equações (3.64) e (3.65) na Equação (3.54), e efetuando algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\left[ \frac{1}{\Delta t 2\beta} M + K \right] q_{k+1} = P_{k+1} + M \left[ \frac{1}{\Delta t^2 \beta} q_k + \frac{1}{\Delta t \beta} \dot{q}_k + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{q}_k \right] \quad (3.66)$$

Dessa maneira, chamando o termo do lado direito da igualdade (3.64) de  $\hat{K}$ , temos:

$$\hat{K} = K + a_0 M \quad (3.67)$$

por: E o termo esquerdo da mesma igualdade sendo chamado de  $\hat{P}_{k+1}$ , e dado

$$\hat{P}_{k+1} = P_{k+1} + M(a_0 q_k + a_2 \ddot{q}_k) \quad (3.68)$$

Chega-se ao sistema linear equivalente:

$$\hat{K} q_{k+1} = \hat{P}_{k+1} \quad (3.69)$$

O qual fornece a solução para os deslocamentos.

Tendo calculado o vetor de deslocamento  $q_{k+1}$ , os vetores da aceleração e da velocidade, são dados respectivamente por:

$$\ddot{q}_{k+1} = a_0 (q_{k+1} - q_k) - a_2 \ddot{q}_k \quad (3.66)$$

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + a_6 \ddot{q}_k + a_7 \ddot{q}_{k+1} \quad (3.67)$$

Onde  $a_1, a_2, \dots, a_7$  são constantes do método de Newmark.

### 3.7 Ondas Sísmicas

A energia de um terremoto, explosão ou outra fonte sísmica atravessa a Terra como uma frente de onda que se espalha em todas as direções (BERKHOUT, 1987).

Existem diversos tipos diferentes de ondas sísmicas. Cada tipo move-se de forma diferente. Os dois principais tipos de ondas são as ondas de volume e as ondas de superfície. As ondas de volume podem atravessar as camadas internas da Terra, mas as ondas de superfície podem propagar-se apenas pela superfície do planeta como ondulações na água.

Ondas de volume são caracterizadas pelas ondas do tipo P e S.

As ondas P (ondas primárias ou compressionais) são as ondas sísmicas com movimento mais rápido. Elas têm um movimento de empurrar e puxar, fazendo com que as partículas da rocha se movam para frente e para trás. À medida que a onda se afasta do foco, as partículas se aproximam e se afastam ao longo da direção para a qual a onda está se movendo, como mostrado na Figura 3.9.

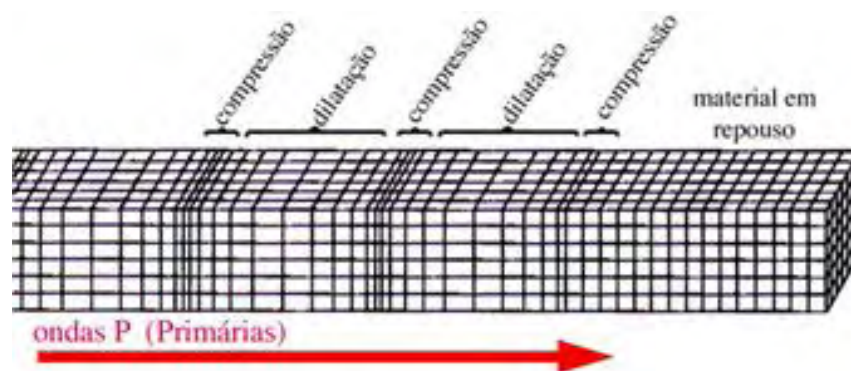


Figura 3.9 Onda do Tipo P

As ondas S (ondas secundárias, de cisalhamento, laterais ou transversas) propagam-se muito mais lentamente que as ondas P. Elas não passam por líquidos. As ondas S fazem com que as partículas se movam perpendicularmente a direção de propagação da onda, como mostrado na Figura 3.10.

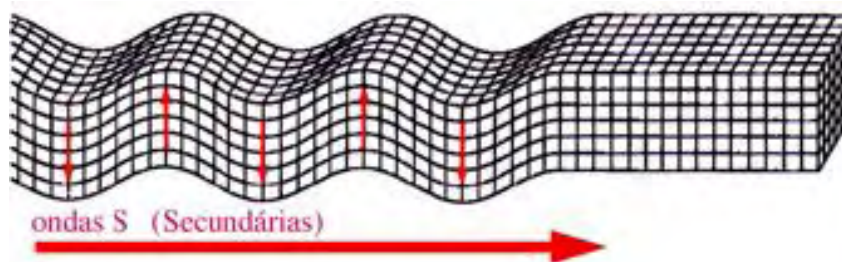


Figura 3.10 Onda do Tipo S

As ondas de superfície são caracterizadas pelas ondas do L e do tipo R.

As ondas de Love, mostradas na Figura 3.11, receberam esse nome em homenagem a A.E. H. Love, um matemático britânico que desenvolveu o modelo matemático para esse tipo de onda, em 1911. As ondas de Love se movem como uma cobra, estremecendo o solo de lado a lado. Elas andam lentamente a partir da fonte sísmica, mas são muito destrutivas. São essas ondas que na maioria das vezes são as maiores responsáveis por fazer com que prédios caiam durante um terremoto.

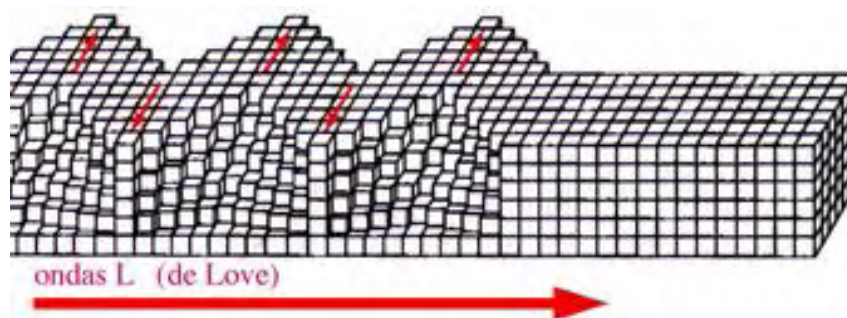


Figura 3.11 Onda do Tipo L (Love)

As ondas Rayleigh têm esse nome por causa de Lord Rayleigh (John William Strutt), que previu matematicamente a existência desse tipo de onda, em 1885. A onda Rayleigh se propaga pelo chão assim como uma onda em um lago ou oceano. Conforme ela viaja, ela move o chão para cima e para baixo e para os lados na mesma direção que a onda está se movendo, como mostrado na Figura 3.12. A maior parte do tremor sentido durante um terremoto se deve às ondas do Rayleigh (BERKHOUT, 1987).

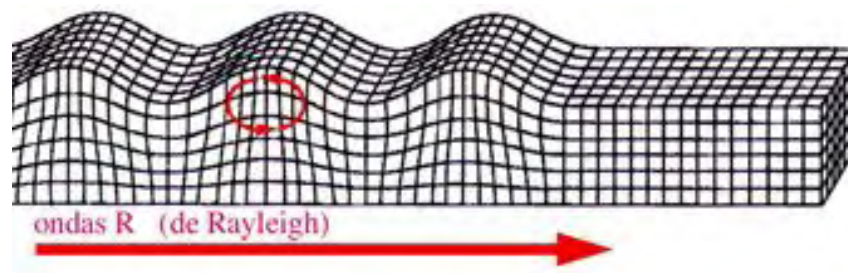


Figura 3.12 Onda do Tipo R (Rayleigh)

### 3.7.1 Freqüências das ondas sísmicas e Freqüências de vibração natural de edifícios

Como os vários tipos de ondas que se produzem quando ocorre um sismo têm velocidades e freqüências diferentes, em áreas afastadas da região epicentral é possível observar que as ondas estão organizadas em grupos. Todavia, próximo da área de geração, não há tempo suficiente para esta segregação em trens de ondas distintas, pelo que a movimentação das partículas induzida simultaneamente por diferentes tipos de ondas pode ser extremamente complexa (provocando grandes destruições).

Por outro lado, ao propagarem-se em diferentes tipos de rochas e à superfície, atravessando zonas de descontinuidade estrutural, as ondas são sujeitas, muitas vezes, a fenômenos de reflexão e de refração, o que pode conduzir a amplificação das ondas e, conseqüentemente, aumento do seu potencial de destruição

Por outro lado, a complexidade do estudo das ondas sísmicas é ainda acentuada pelo fato do tipo e condições do solo, bem como a topografia, poderem provocar amplificação ou redução das ondas sísmicas em locais específicos.

As ondas sísmicas volúmicas (quer as compressivas, quer as de corte) têm, na origem, vasta gama de freqüências. Todavia, devido à atenuação durante a propagação, as mais pronunciadas têm freqüências entre 0,5 e 20 Hertz (YASHINSKY, 2001). As ondas

superficiais têm, geralmente, frequências menores do que as ondas volúmicas, tipicamente inferiores a 1 Hertz.

Os edifícios têm frequências naturais de vibração específicas. As frequências naturais de vibração dos edifícios de menor altura são mais elevadas do que as dos prédios mais altos. Se a frequência das ondas sísmicas é análoga à frequência natural de vibração de certos edifícios, estes podem entrar em ressonância e ser gravemente danificados ou destruídos.

No entanto, as ondas com frequências elevadas sofrem atenuação mais rápida com o aumento de distância à zona epicentral do que as ondas com frequências mais baixas. Por essa razão, a distâncias relativamente grandes do epicentro (da ordem de 100km), os edifícios altos podem ser bastante mais danificados do que os baixos. As construções baixas são mais sensíveis às vibrações sísmicas quando se localizam próximo do local onde o sismo foi gerado.

## CAPÍTULO 4

### Simulações numéricas do sistema

#### 4.1 Introdução

Os resultados das simulações foram obtidos através do programa desenvolvido em *Maple 11* (Apêndice A), que teve como base dois outros trabalhos desenvolvidos também no *Maple*, o primeiro deles intitulado *Earthquakes hitting skyscrapers* (Apêndice B), encontrado em [http://www.maplesoft.com/ Applications](http://www.maplesoft.com/Applications/), de Thomas Stol e Klaus Thoni. E o segundo intitulado *3-D Oscillator with two masses, coupled by elastic springs* (Apêndice C), encontrado em <http://www.maplesoft.com/Applications/> de Harold Kammerer.

O trabalho de Stol e Klaus analisa um prédio sob ação de uma onda produzida por um terremoto, porém essa onda é aplicada através de uma função do tipo

$f(t) = \text{sen}(2\pi ft)$ . Como resultado final o programa apresenta a animação da estrutura sob efeito do sinal introduzido.

O trabalho de Kammerer, já apresenta uma complexidade maior, pois se trata de um problema envolvendo duas massas acopladas por molas e essa estrutura é excitada externamente por uma onda de terremoto. A integração do sistema é feita através do método de Newmark e além disso é feita toda análise modal da estrutura.

Como nosso objetivo é analisar a dinâmica de um modelo de edifício com dois graus de liberdade sob efeito de uma onda de terremoto, nosso trabalho foi adaptar os dois programas, ou seja, simular o efeito de uma onda de terremoto no prédio, visualizar sua animação e extrair os resultados possíveis da análise modal, como frequências naturais da estrutura, seus modos de vibração e os deslocamentos sofridos.

O modelo proposto é muito simplificado, o maior interesse está na obtenção dos escalogramas de frequência-tempo e não na análise estrutural, por esse motivo desconsiderou-se o amortecimento.

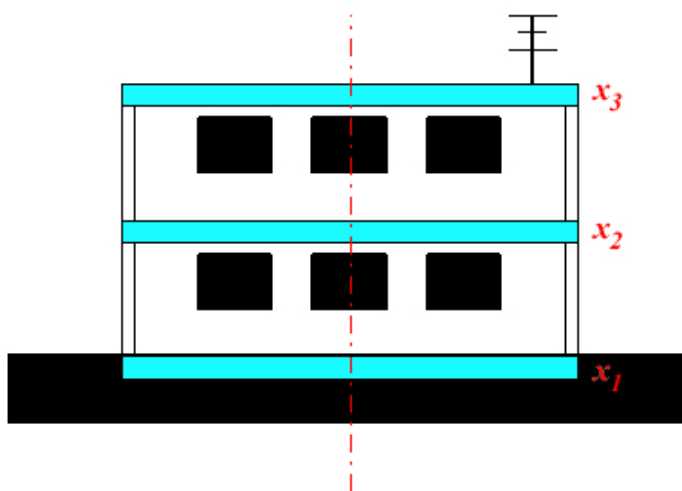


Figura 4.1 Estrutura na qual será inserida uma onda de terremoto

Uma vez feita à adaptação do programa no *Maple*, partimos para uma segunda análise, que seria a aplicação da transformada *wavelet* na estrutura. Como não foi possível fazer essa aplicação no *Maple* pelo fato de não possuir uma biblioteca para o uso da

transformada *wavelet*, a solução encontrada foi exportar os resultados para *Matlab 2007a* e fazer a transformada *wavelet* a partir dele, pois seus *Toolboxes* para esse tipo de aplicação são amplamente conhecidos e utilizados. O cálculo da transformada de Fourier também foi implementado no *Matlab 2007 a*.

Para fazer a exportação dos dados foi utilizado um programa chamado *Maple Toolbox for Matlab* versão 1. Esse programa basicamente permite o trabalho do *Maple 11* e do *Matlab 2007a* em conjunto, através da passagem de comandos e de variáveis entre os *softwares*.

As Figuras 4.2 (a), 4.3(a) e 4.4 (a), têm como objetivo apenas ilustrar o problema, pois nas simulações realizadas considera-se apenas o efeito de aceleração no eixo horizontal.

O tipo de *wavelet* utilizado para todas as simulações foi Daubechies de ordem 5.

## **4.3 Resultados das simulações**

### **4.3.1 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de um sinal do tipo degrau**

Para a primeira simulação foram usados os parâmetros descritos abaixo.

Estrutura com 3 pavimentos:

A massa dos três pavimentos igual a  $10^5$  kg. ( $m_1=m_2=m_3$ ).

A rigidez de do primeiro pavimento  $k_1=2*10^7$  N/m e do segundo e terceiro pavimentos  $k_2=k_3=10^7$  N/m.

Neste modelo foi desconsiderado o amortecimento.

Excitaremos o primeiro pavimento com um sinal do tipo degrau como mostrado na Figura 4.2 (b), lembrando que esta onda tem componente apenas no eixo horizontal.

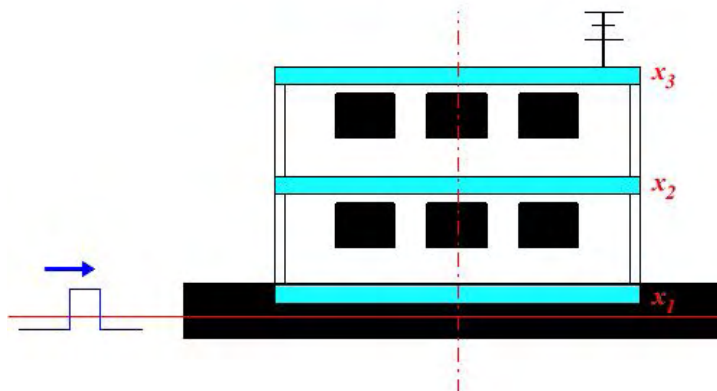


Figura 4.2 (a) Modelo utilizado para a simulação

Uma vez que as frequências naturais da estrutura são conhecidas ( $f_1=0,71$  Hz,  $f_2= 1,98$  Hz e  $f_3=2,86$  Hz), o objetivo desta primeira simulação era apenas excitar a estrutura de forma a obtermos essas frequências nos escalogramas da transformada *wavelet*, como pode ser vistos nas Figuras 4.2 (e ), (h) e (l), e através também via transformada de Fourier apresentado nas Figuras 4.2 (g), (j) e (n).

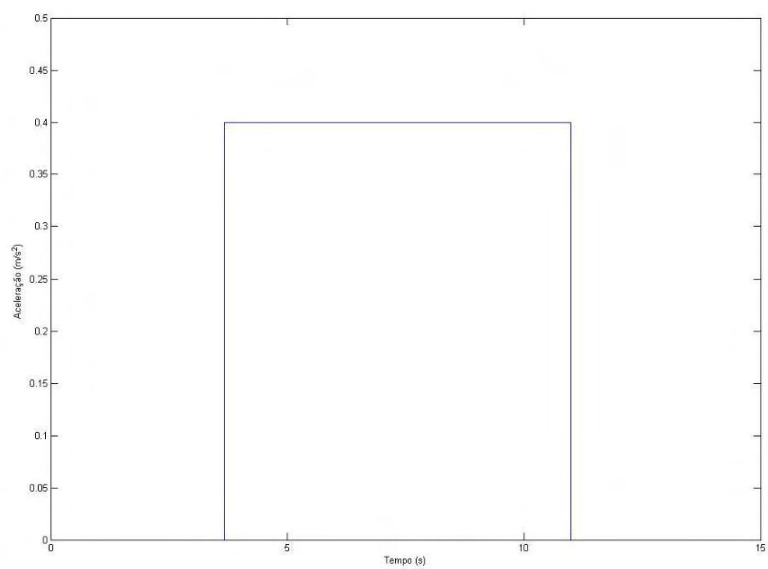


Figura 4.2 (b) Excitação externa aplicada ao piso térreo.

Nas Figuras 4.2 (c) e 4.2 (d) apresentam-se as transformadas de Fourier e *wavelet* aplicadas ao sinal.

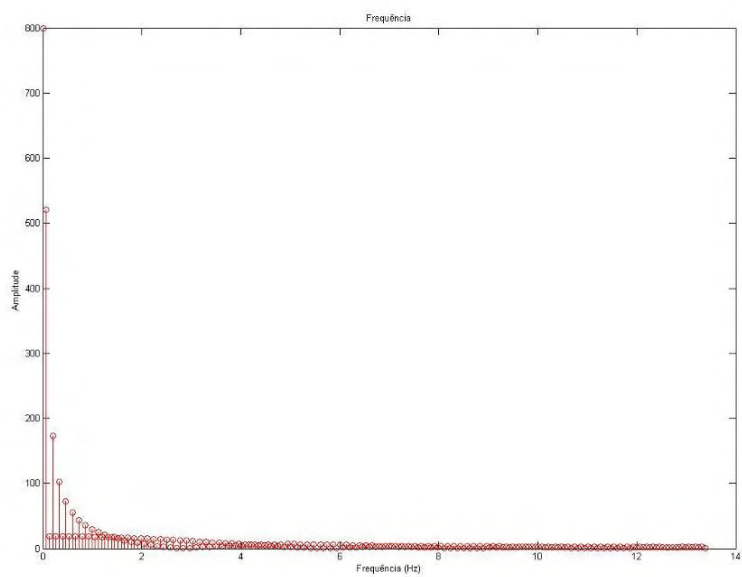


Figura 4.2 (c) Transformada de Fourier aplicada ao sinal

O escalograma obtido com a transformada *wavelet* apresenta-se na Figura 4.2 (d), mostra coloração vermelha próxima de 5 e 10 segundos, próximo aos picos dois do sinal.

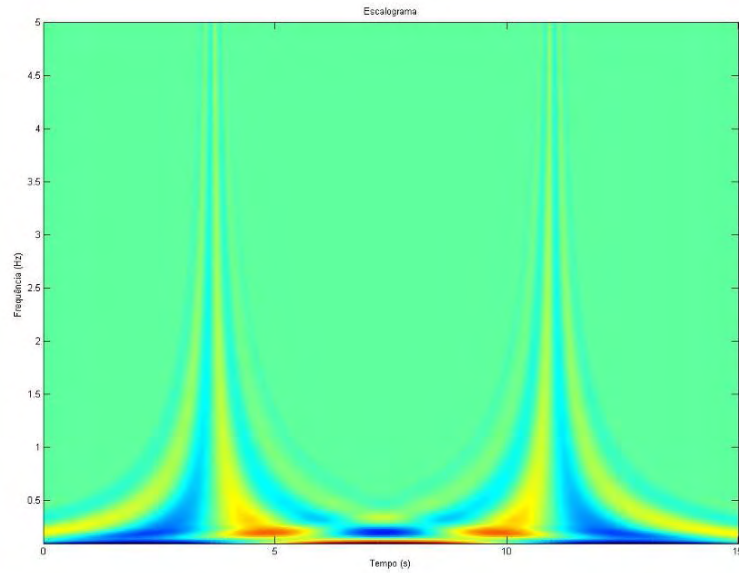


Figura 4.2 (d) Transformada *wavelet* aplicada ao sinal

As Figuras 4.2 (e), (h) e (l), mostram os deslocamentos de cada um dos pavimentos

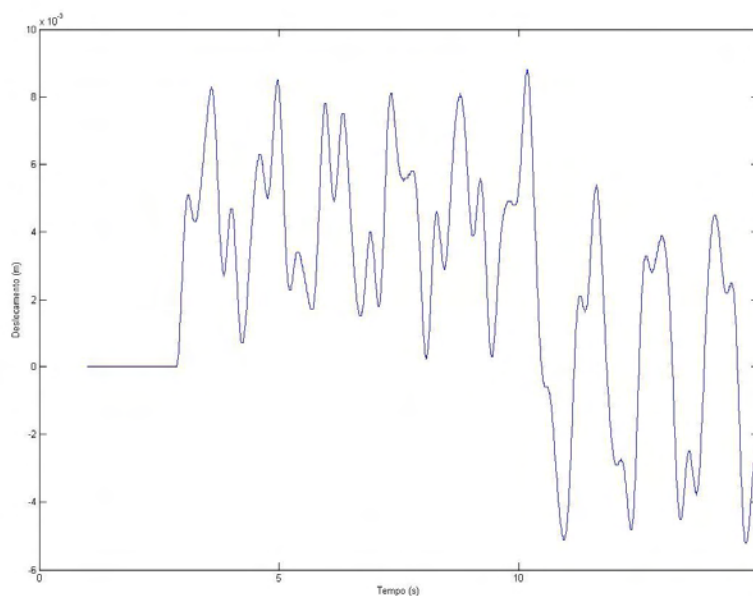


Figura 4.2 (e) Deslocamento do primeiro pavimento ( $x_1$ )

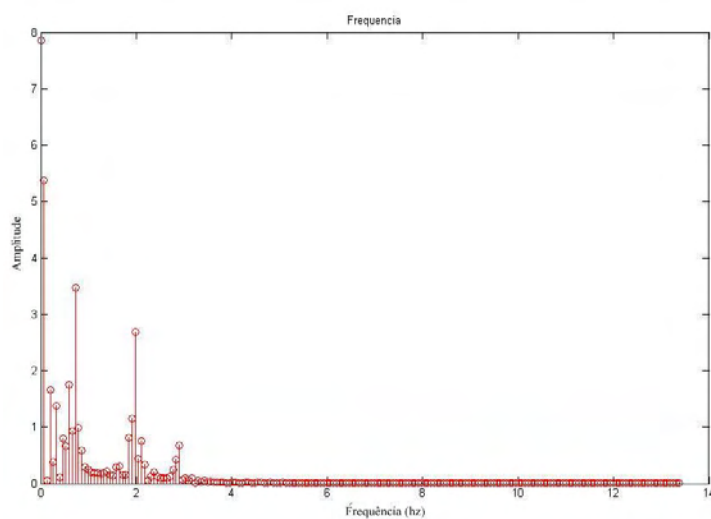


Figura 4.2 (f) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.2 (f), apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento, que apresenta a frequência 0,71 Hz, no seu primeiro modo normal de vibração, é possível identificá-la no gráfico, porém existem outras frequências que influenciam a estrutura.

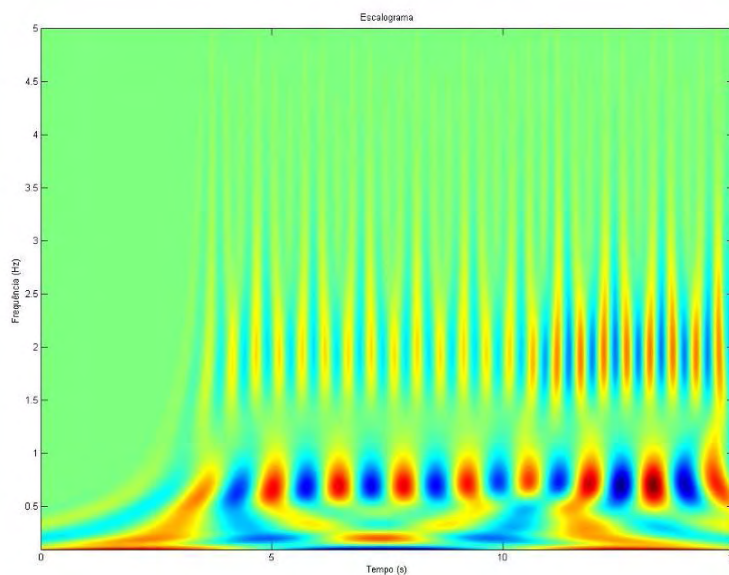


Figura 4.2 (g) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.2 (g), apresenta-se o escalograma da transformada *Wavelet* aplicada ao primeiro pavimento que como já foi dito tem em seu primeiro modo normal de vibração frequência de 0,71 Hz, é possível identificá-la no gráfico, as regiões vermelhas próximas a escala 0,7 Hertz no eixo de frequência, podem indicar a frequência do primeiro modo normal. Pode-se observar as frequências do segundo e o terceiro modos normais de vibração (com valores de 1,98 Hz e 2,86 Hz, respectivamente) já têm influencia na estrutura, isso pode ser visto nas regiões em vermelho e nas regiões em amarelo entre os valores de 1,5 e 3 Hz no eixo de frequência.

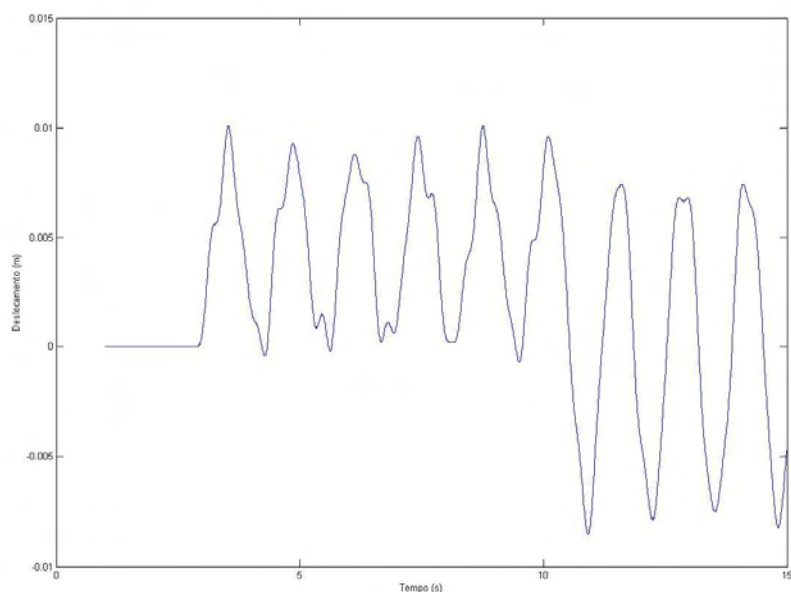


Figura 4.2 (h) Deslocamento do segundo pavimento ( $x_2$ )

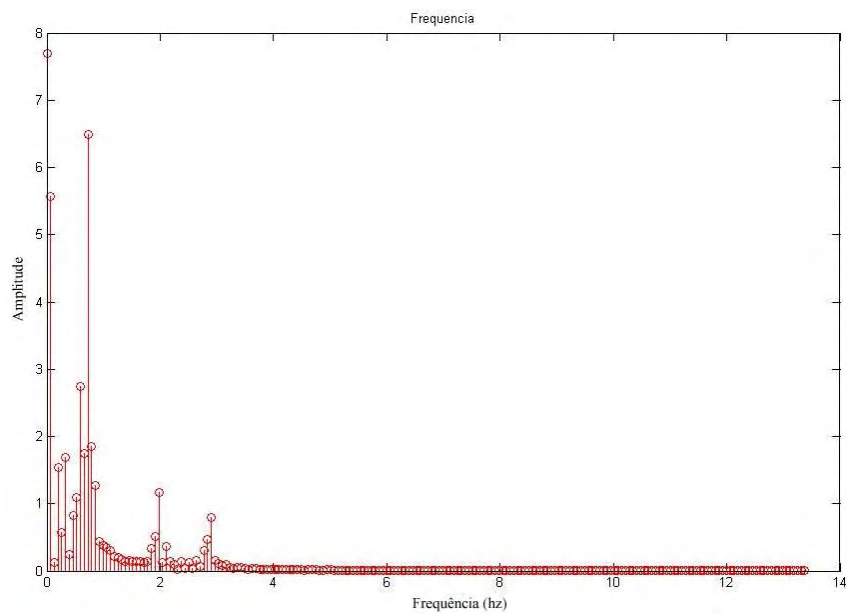


Figura 4.2 (i) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.2 (i), apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento que tem frequência natural de 1,98 Hz, é possível identificá-la no gráfico, porém existem outras frequências que influenciam a estrutura.

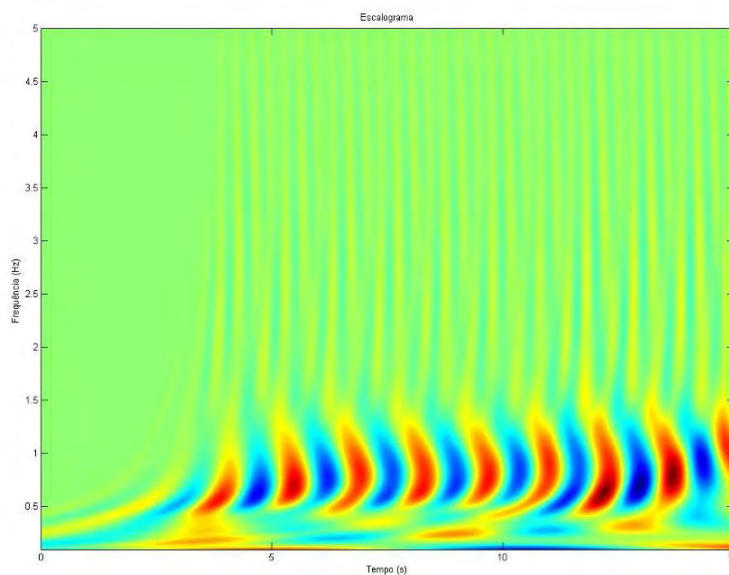


Figura 4.2 (j) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.2 (j), apresenta-se o escalograma da transformada *Wavelet* aplicada ao segundo pavimento que como já foi dito tem no seu segundo modo normal de vibração frequência igual a 1,98 Hz, é possível identificá-la no gráfico, as regiões vermelhas e amarelas entre os valores de 1,5 e 3 Hz no eixo de frequência,. Pode-se observar que a frequência do primeiro modo normal de vibração ( com valor de 0,71 Hz) tem influência na estrutura, isso pode ser visto nas regiões vermelhas e amarelas entre os valores de 0,5 e 1 Hz no eixo de frequência.

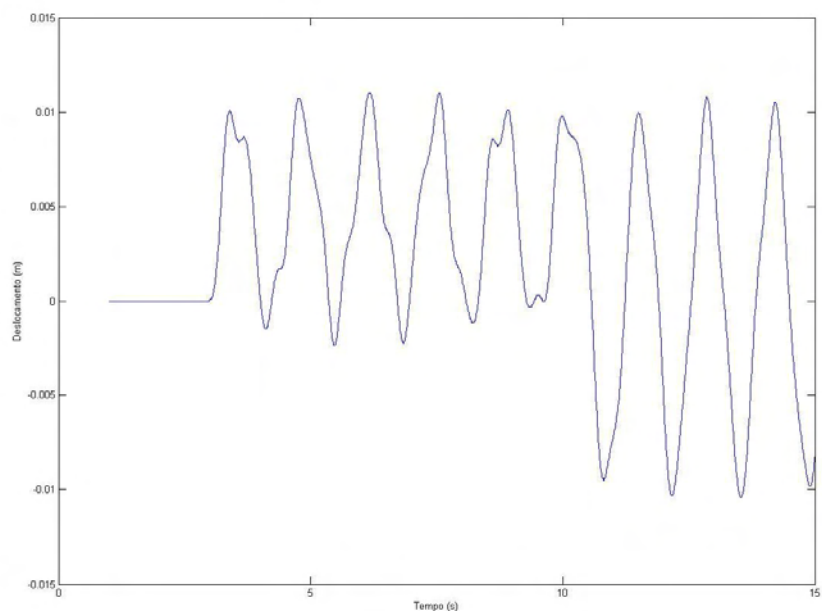


Figura 4.2 (l) Deslocamento do terceiro pavimento ( $x_3$ )

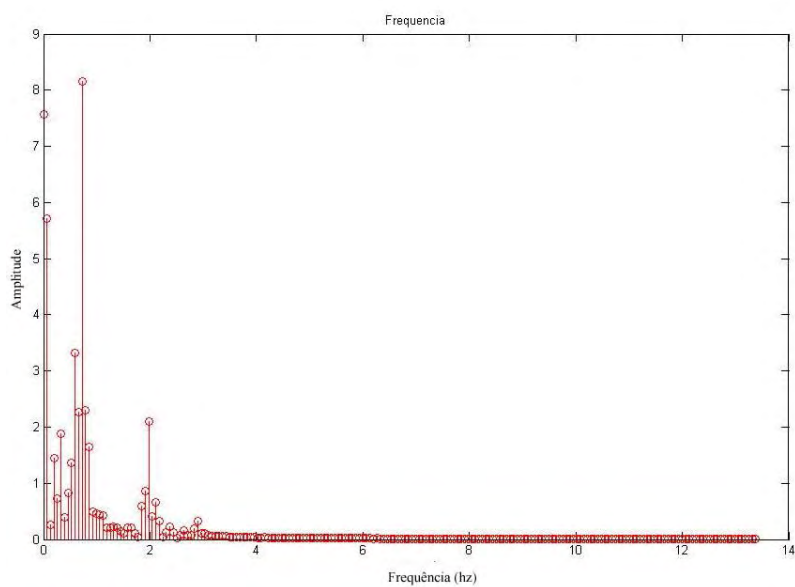


Figura 4.2 (m) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.2 (m), apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento que tem no terceiro modo normal de vibração frequência igual a 2,86 Hz, é possível identificá-la no gráfico, porém existem outras frequências que tem maior influencia sobre o pavimento.

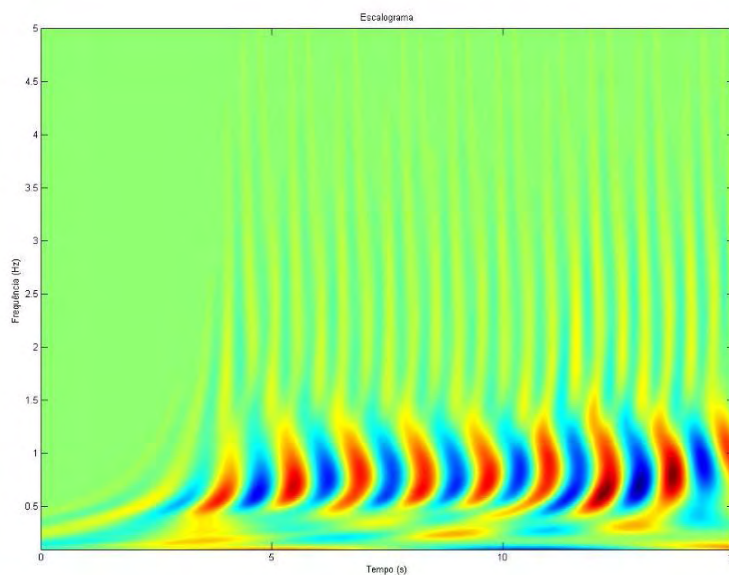


Figura 4.2 (n) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.2 (n), apresenta-se o escalograma da transformada *Wavelet* aplicada ao terceiro pavimento que tem em seu terceiro modo normal de vibração frequência igual a 2,86 Hz, é possível identificá-la no gráfico, as regiões vermelha e amarela entre os valores de 1,5 e 3 Hz no eixo de frequência, porém como na análise anterior vê-se a influência mais efetiva das frequências do segundo e principalmente do primeiro modos normais de vibração.

Na Figura 4.2 (h) mostra a comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos, vê-se que o terceiro pavimento tem maior deslocamento.

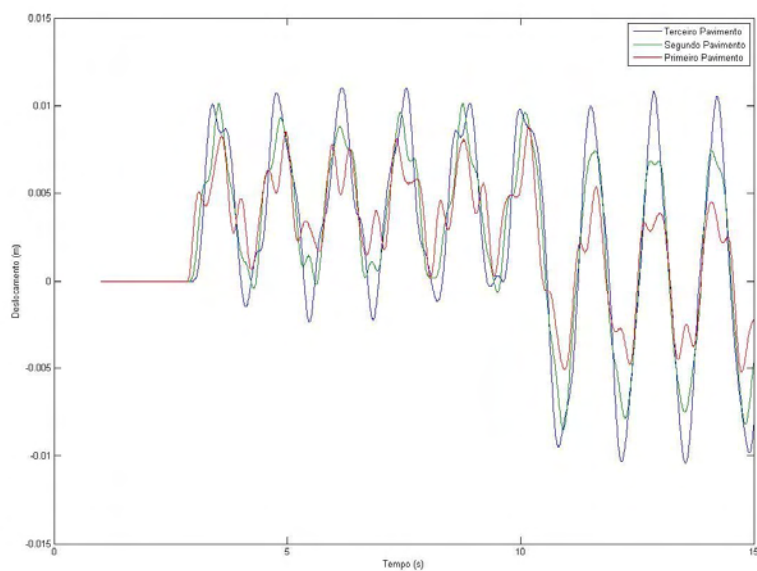


Figura 4.2 (o) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos

### 4.3.2 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de um sinal do tipo seno

Para a segunda simulação foram usados os mesmo parâmetros descritos abaixo.

Estrutura com 3 pavimentos:

A massa dos três pavimentos igual é  $10^5$  kg. ( $m_1=m_2=m_3$ ).

A rigidez de do primeiro pavimento  $k_1=2*10^7$  N/m e do segundo e terceiro pavimentos  $k_2=k_3=10^7$  N/m.

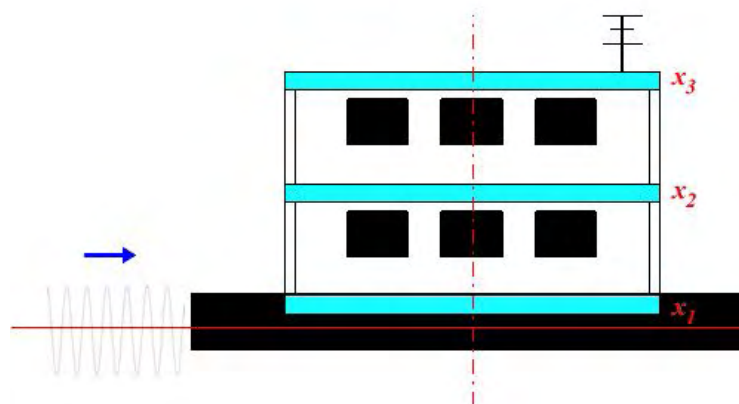


Figura 4.3 (a) Modelo utilizado para a simulação

Sob a estrutura foi inserido um sinal do tipo senoidal como mostrado na Figura 4.3 (a) e com uma freqüência de 2,86 Hz, bem próximo da freqüência natural do terceiro modo normal de vibração, e que tem ação apenas no eixo horizontal.

Os resultados podem ser vistos nos escalogramas da transformada *wavelet*, nas Figuras 4.3 (d ), (g) e (j), e através também via transformada de Fourier apresentado nas Figuras 4.3 (c), (f) e (i).

A Figura 4.3 (b) mostra o sinal inserido para excitar a estrutura.

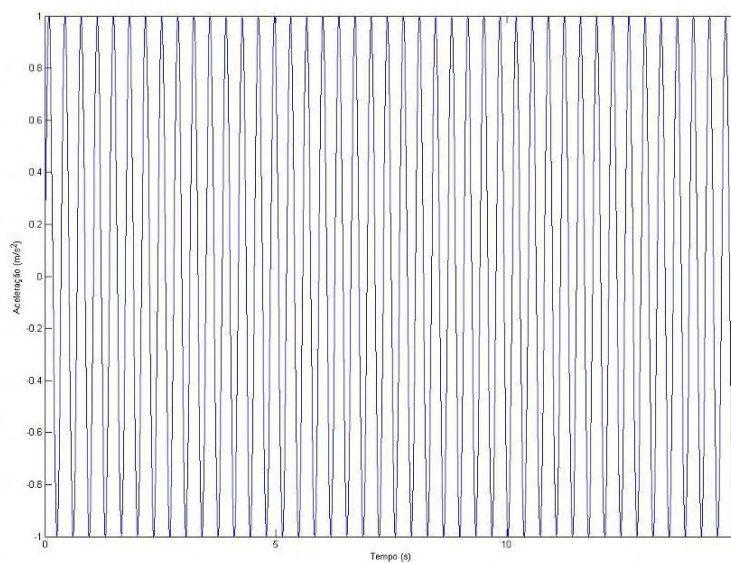


Figura 4.3 (b) Excitação externa aplicada ao piso térreo

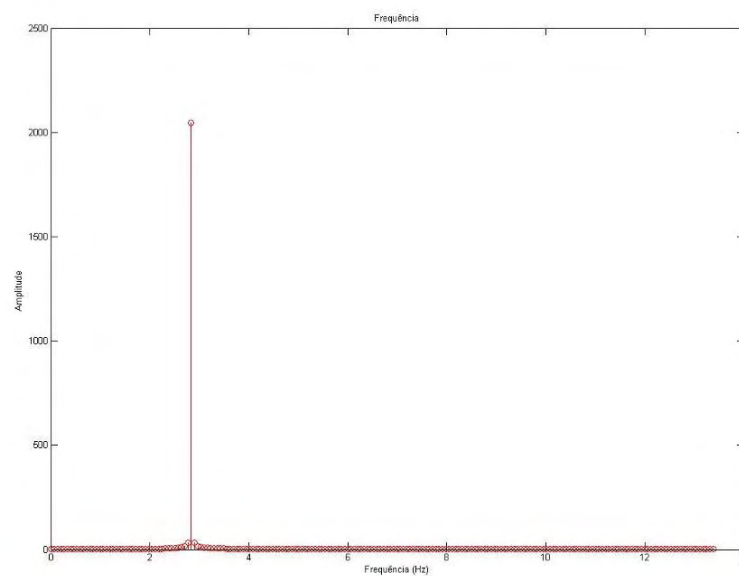


Figura 4.3 (c) Transformada de Fourier aplicada ao sinal

Na Figura 4.3 (c), apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao sinal, sua frequência no valor de 2,86 Hz pode ser claramente identificada no gráfico.

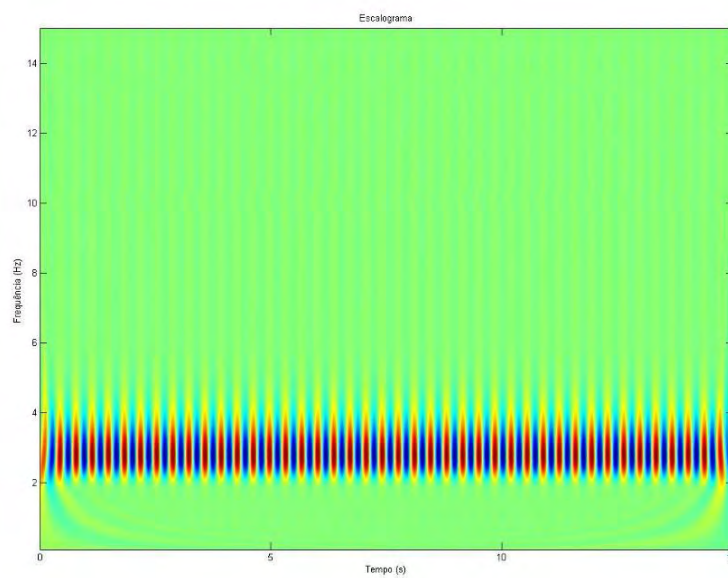


Figura 4.3 (d) Transformada *wavelet* aplicada ao sinal

Na Figura 4.3 (d), apresenta-se o escalograma obtido a partir da transformada de *wavelet* aplicada ao sinal, sua frequência no valor de 2,86 Hz pode ser identificada no gráfico nas regiões em vermelho nos valores entre 2 e 4 Hz no eixo de frequência.

As Figuras 4.3 (e), (h) e (l), mostram os deslocamentos de cada um dos pavimentos

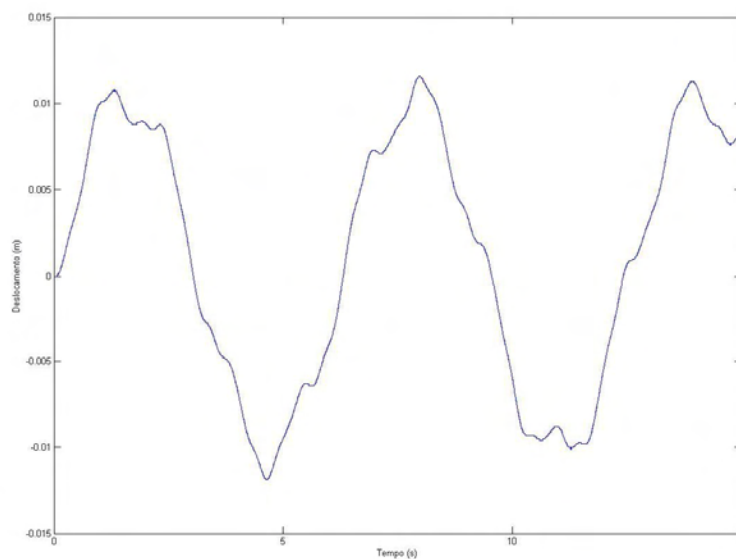


Figura 4.3 (e) Deslocamento do primeiro pavimento ( $x_1$ )

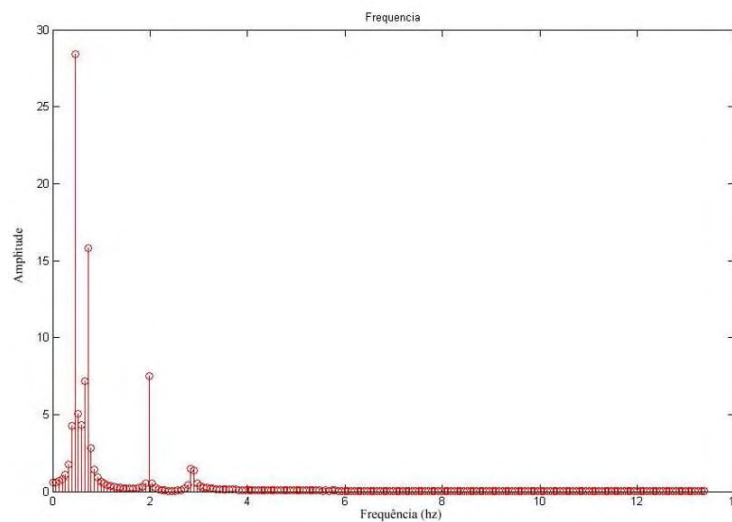


Figura 4.3 (f) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.3 (f) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento, é possível observar que a frequência do primeiro modo normal de vibração é a que tem maior influência.

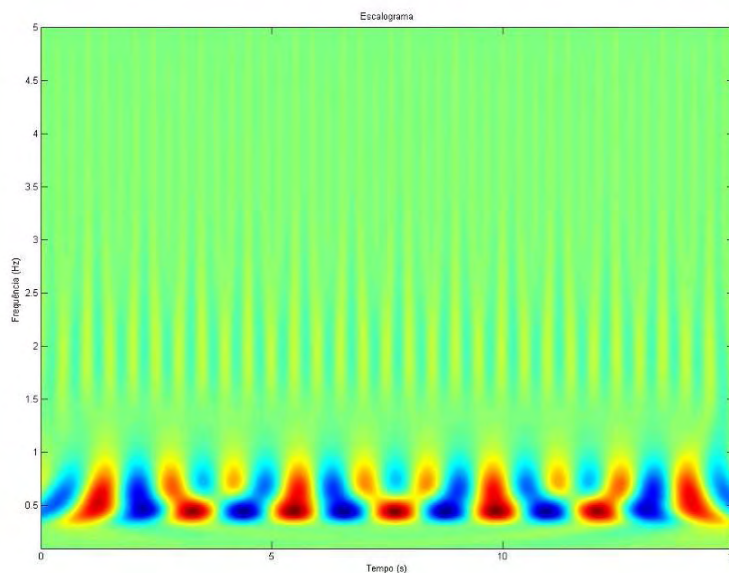


Figura 4.3 (g) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.3 (g), apresenta-se o escalograma da transformada *Wavelet* aplicada ao primeiro pavimento que como já foi dito tem em seu primeiro modo normal de vibração frequência igual a 0,71 Hz, e possível identificá-la no gráfico, as regiões vermelhas próximas a escala 0,7 Hertz no eixo de frequência. Pode-se observar que as frequências do sinal têm influencia na estrutura, isso pode ser visto nas regiões em amarelo entre os valores de 1,5 e 3 Hz no eixo de frequência.

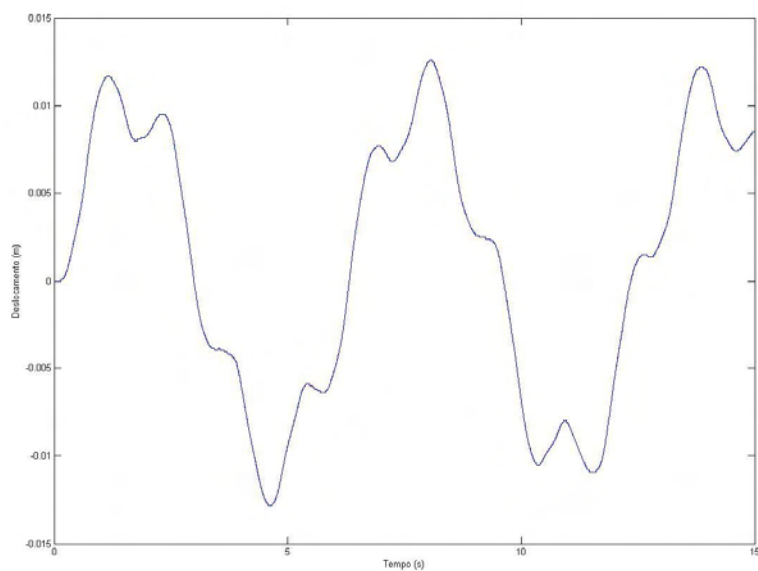


Figura 4.3 (h) Deslocamento do segundo pavimento ( $x_2$ )

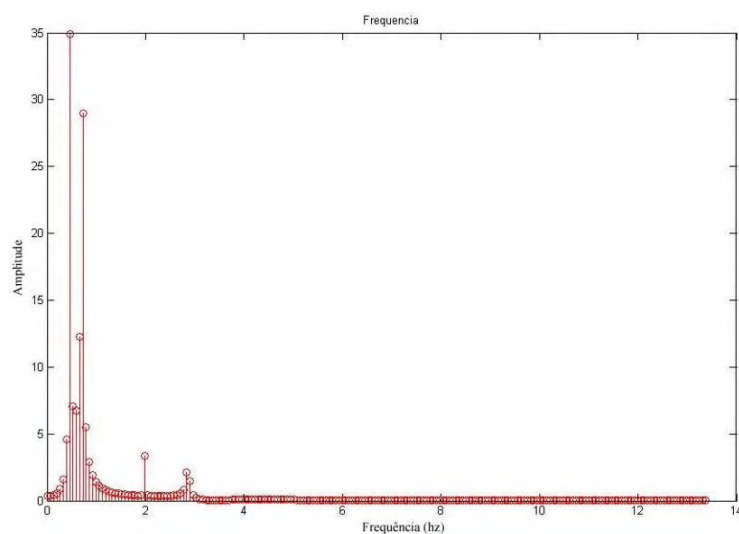


Figura 4.3 (i) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.3 (i), apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento que tem em seu segundo modo normal de vibração frequência igual a 1,98 Hz. É possível identificá-la no gráfico, porém existem outras frequências que influenciam a estrutura, como a frequência natural do primeiro modo normal de vibração e a frequência do sinal.

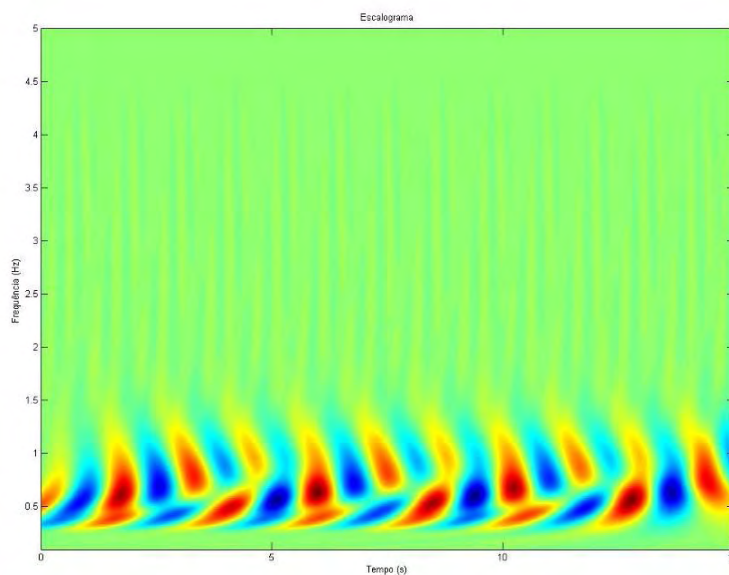


Figura 4.3 (j) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.3 (g), apresenta-se o escalograma da transformada *Wavelet* aplicada ao segundo pavimento. Pode observar-se que as frequências do sinal passam a ter menor sob influencia na estrutura, isso pode ser visto nas regiões em amarelo entre os valores de 1,5 e 3 Hz no eixo de frequência, que estão bem mais enfraquecidas. A frequência do primeiro modo normal de vibração ainda é predominante.

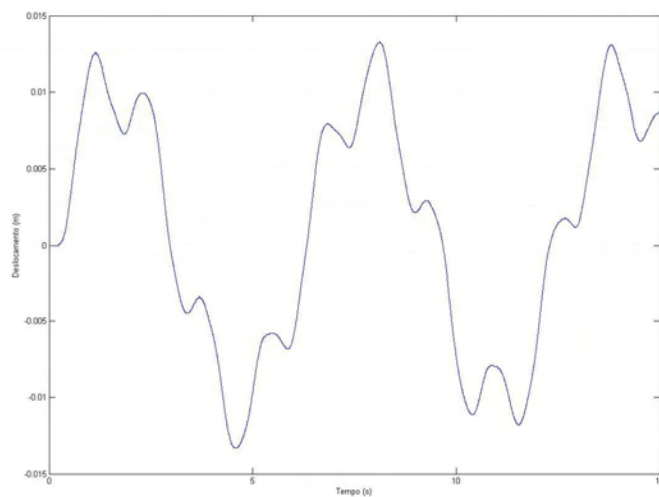


Figura 4.3 (l) Deslocamento do terceiro pavimento ( $x_3$ )

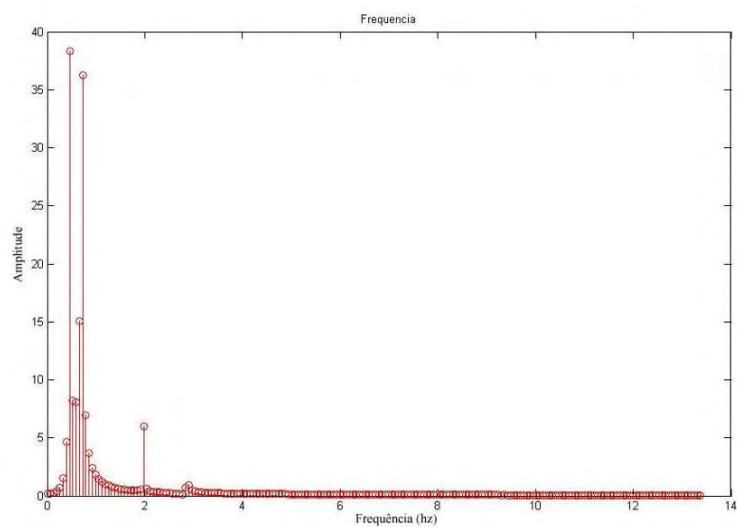


Figura 4.3 (m) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.3 (m), apresenta-se o escalograma da transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento. Pode observar-se que a frequência do primeiro modo normal de vibração é predominante.

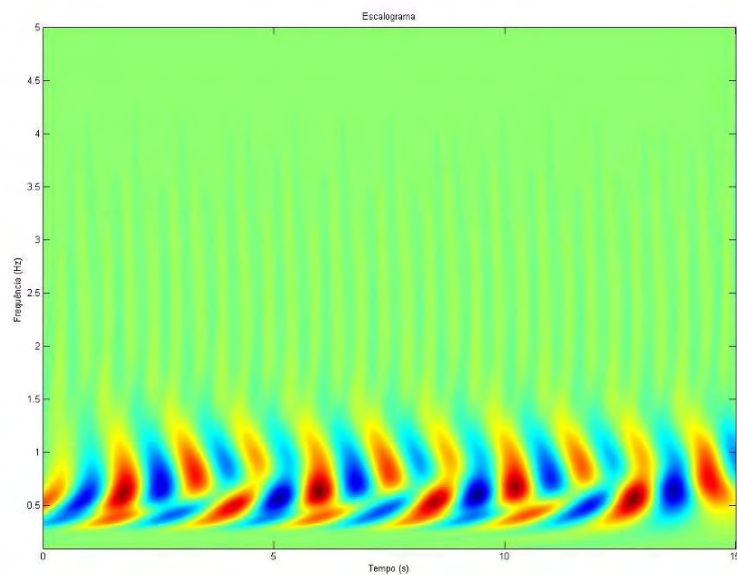


Figura 4.3 (n) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.3 (n), apresenta-se o escalograma da transformada *Wavelet* aplicada ao terceiro pavimento. Pode observar-se que as frequências do sinal passam há ter um pouco mais influência na estrutura, isso pode ser visto nas regiões amarelas entre os valores de 1,5 e 3 Hz no eixo de frequência, são mais visíveis. A frequência do primeiro modo normal de vibração ainda é predominante.

Na Figura 4.3 (o) mostra a comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos.

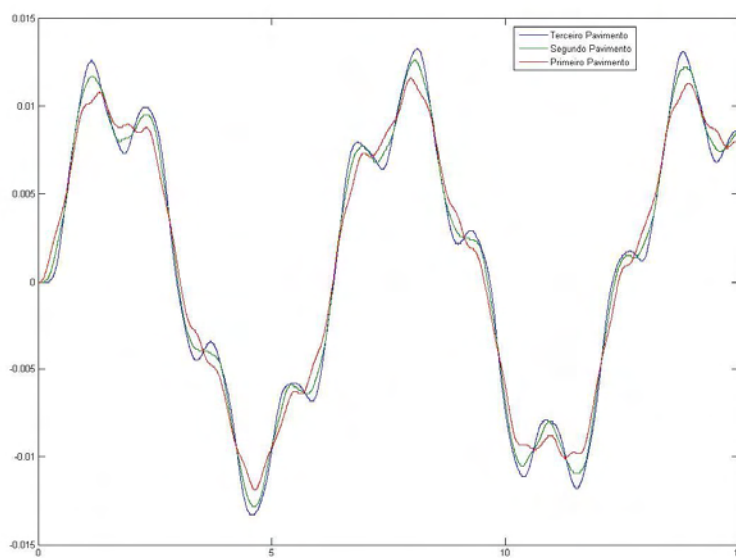


Figura 4.3 (o) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos

### 4.3.3 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de uma onda de terremoto

Para a terceira simulação foram usados os parâmetros descritos abaixo.

Estrutura com 3 pavimentos:

A massa dos três pavimentos igual a  $10^5$  kg. ( $m_1=m_2=m_3$ ).

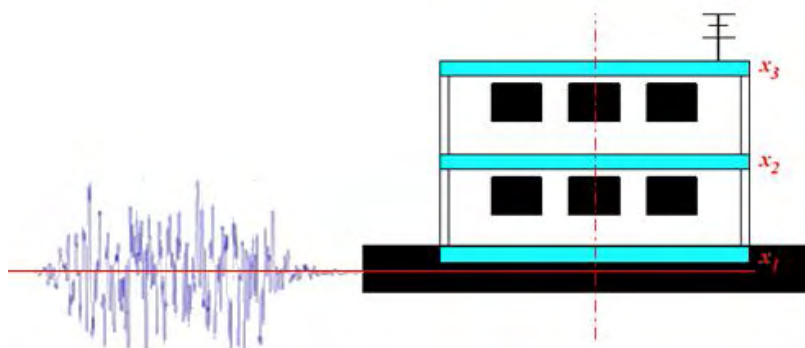


Figura 4.4 (a) Modelo utilizado para a simulação

A rigidez de do primeiro pavimento  $k_1=2 \times 10^7$  N/m e do segundo e terceiro pavimentos  $k_2=k_3=10^7$  N/m.

Nessa simulação inserimos uma onda de terremoto, mostrada na Figura 4.4(a), a Figura 4.4(b) mostra onda que irá agir apenas no eixo horizontal.

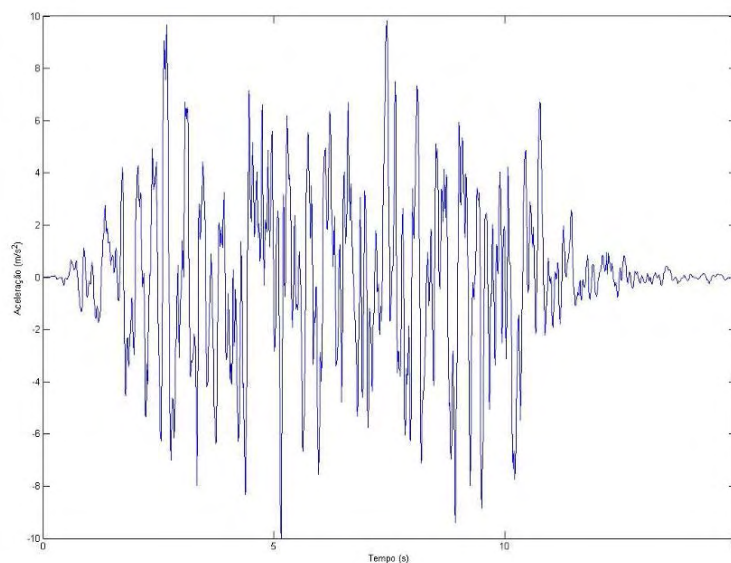


Figura 4.4 (b) Excitação externa aplicada ao piso térreo

As Figuras 4.4 (e), (h) e (l), mostram os deslocamentos de cada um dos pavimentos

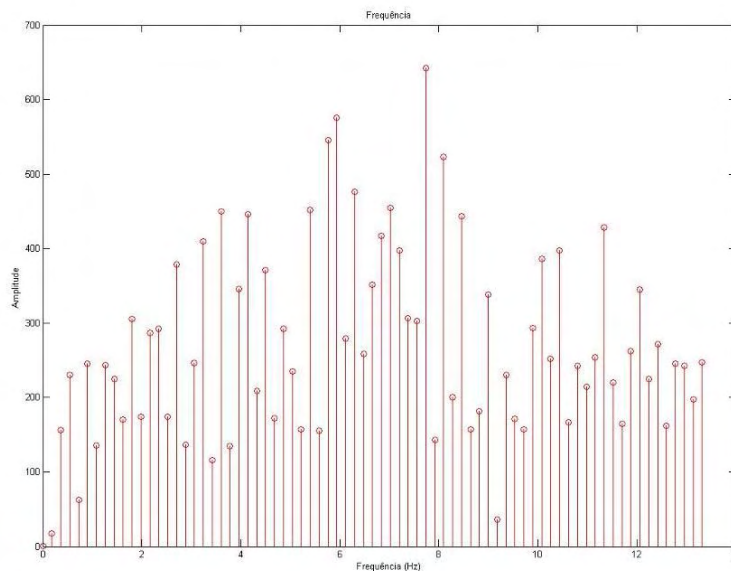


Figura 4.4 (c) Transformada de Fourier aplicada ao sinal.

Na Figura 4.4 (c), apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao sinal pode-se observar as diversas frequências envolvidas, com valores variando 0,5 a 13 Hertz.

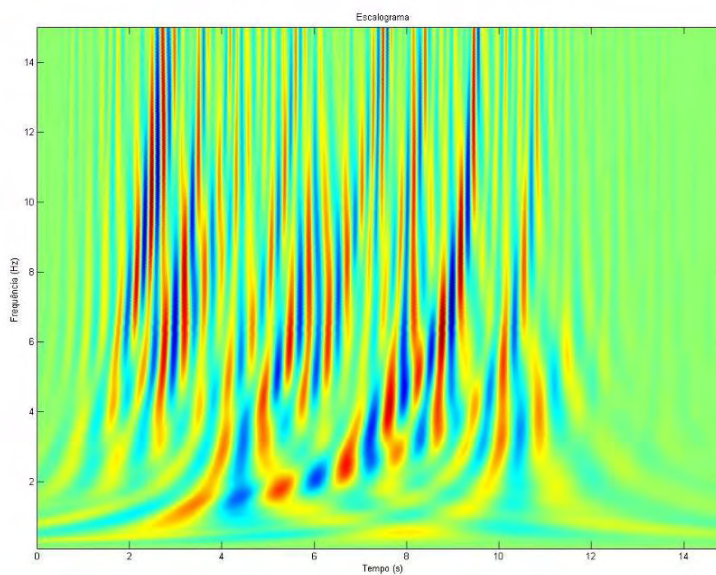


Figura 4.4 (d) Transformada *wavelet* aplicada ao sinal.

O escalograma obtido com a transformada *wavelet* e apresenta-se na Figura 4.4 (d) e mostra coloração vermelha intensa entre o tempo de 1 a 10 segundos com influência de frequências 0,5 a 13 Hertz.

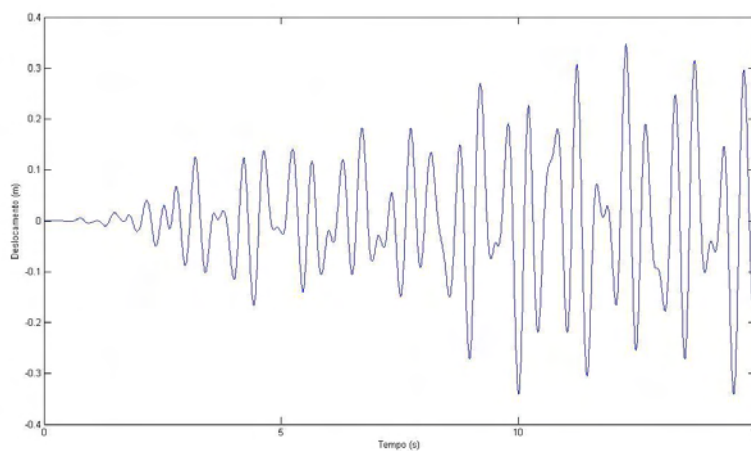


Figura 4.4 (e) Deslocamento do primeiro pavimento ( $x_1$ )

As Figuras 4.4 (g), (j) e (h) mostram os escalogramas da transformada *wavelet* aplicada a cada um dos pavimentos da estrutura e mostrando as frequências de vibração da estrutura.

As Figuras 4.4 (f), (i) e (m), mostram as frequências de vibração da estrutura obtidas através da transformada de Fourier.

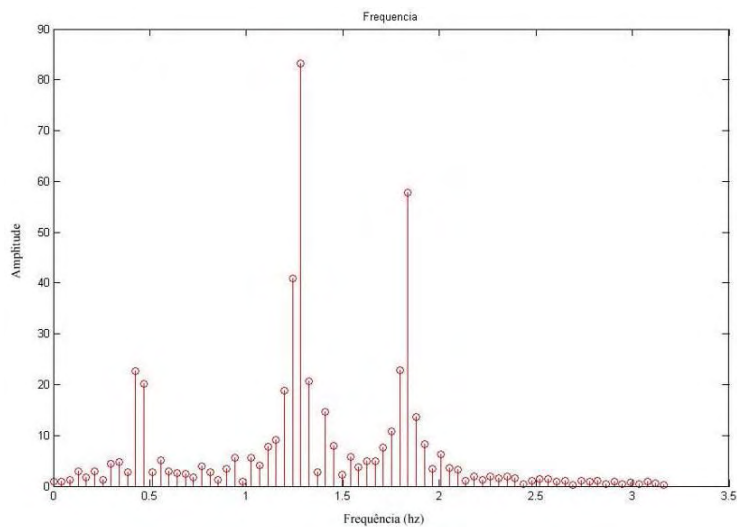


Figura 4.4 (f) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.4 (f) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento, é possível observar um pico de frequência próximo de 1,3 Hz que tem maior influência no pavimento analisado.

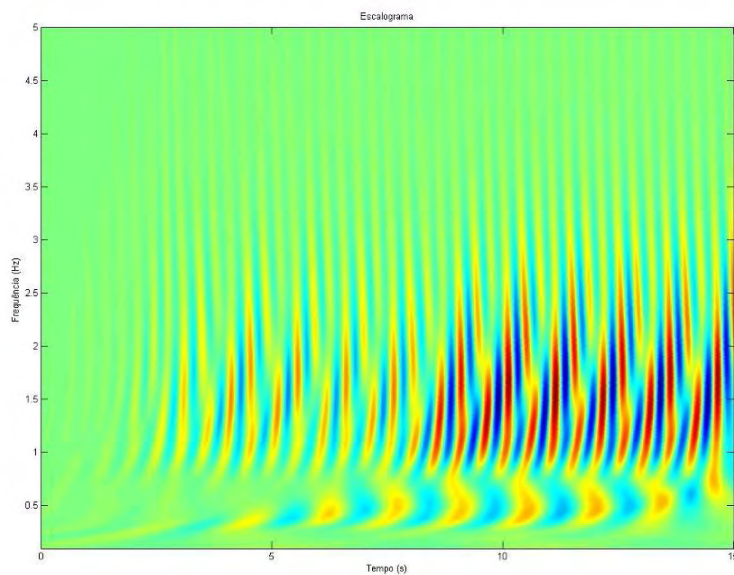


Figura 4.4 (g) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.4 (g) apresenta-se o escalograma da transformada *wavelet* aplicada primeiro pavimento, é possível observar uma frequência próxima de 1,3 Hz, agindo mais intensamente no período de 8 a 15 segundos, isso se mostra através da intensa coloração

vermelha nessa região, vê-se também que a frequência do primeiro modo normal de vibração passa a ser menos intensa como mostrado na coloração amarela na faixa de frequência próximo a 0,7 Hz.

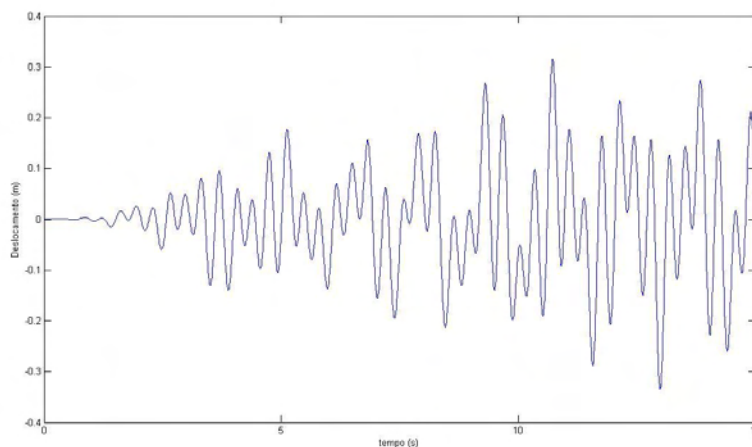


Figura 4.4 (h) Deslocamento do segundo pavimento ( $x_2$ )

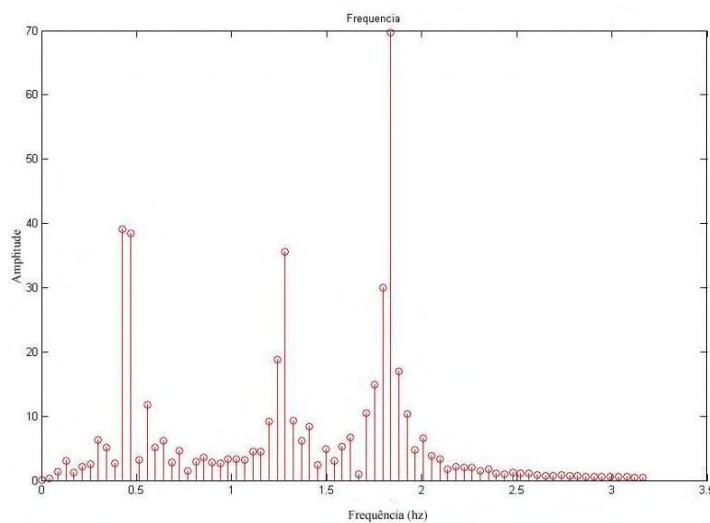


Figura 4.4 (i) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.4 (i) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento, é possível observar um pico de frequência próximo de 1,7 Hz que tem maior influência no pavimento analisado, porém temos várias outras frequências na faixa de 0,1 a 3 Hz influenciando o pavimento.

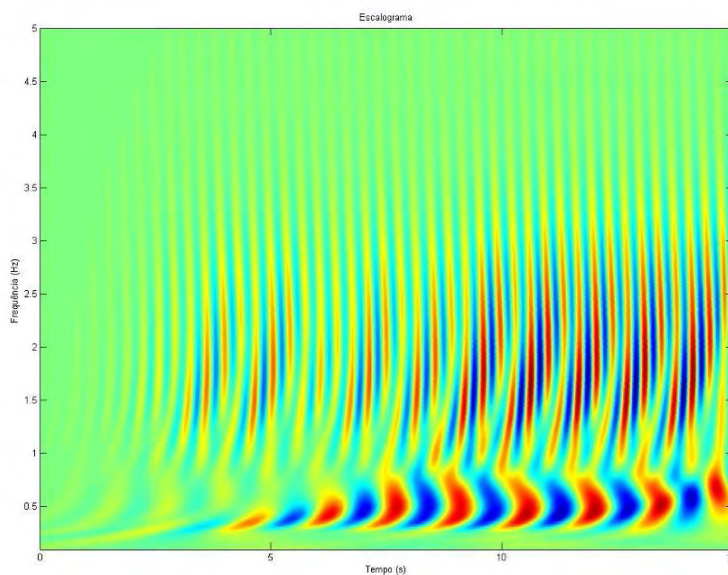


Figura 4.4 (j) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.4 (j) apresenta-se o escalograma da transformada *wavelet* aplicada primeiro pavimento, é possível observar uma frequência próxima de 1,7 Hz, indicada no escalograma pela coloração vermelha nessa faixa de frequência, porém a frequência natural do primeiro modo normal de vibração volta a ter uma influência maior.

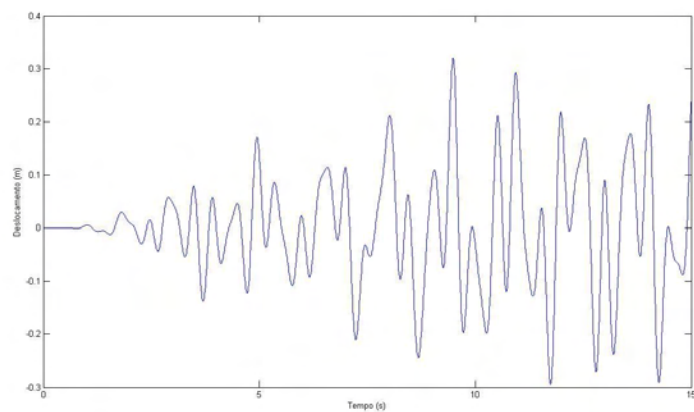


Figura 4.4 (l) Deslocamento do terceiro pavimento ( $x_3$ )

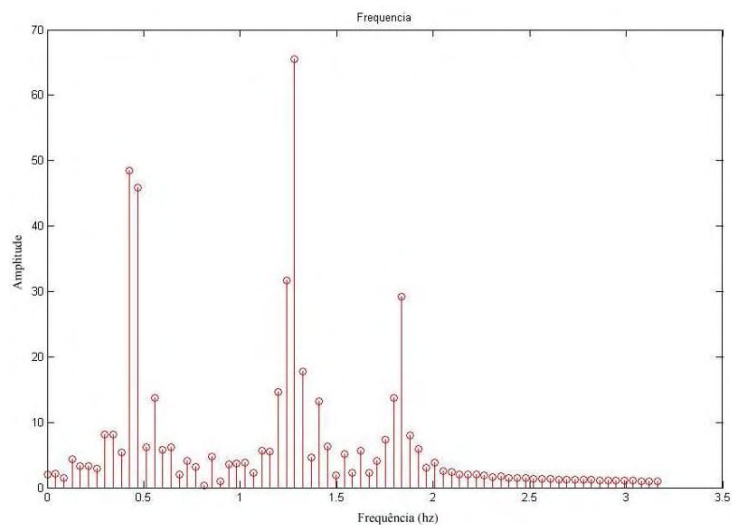


Figura 4.4 (m) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

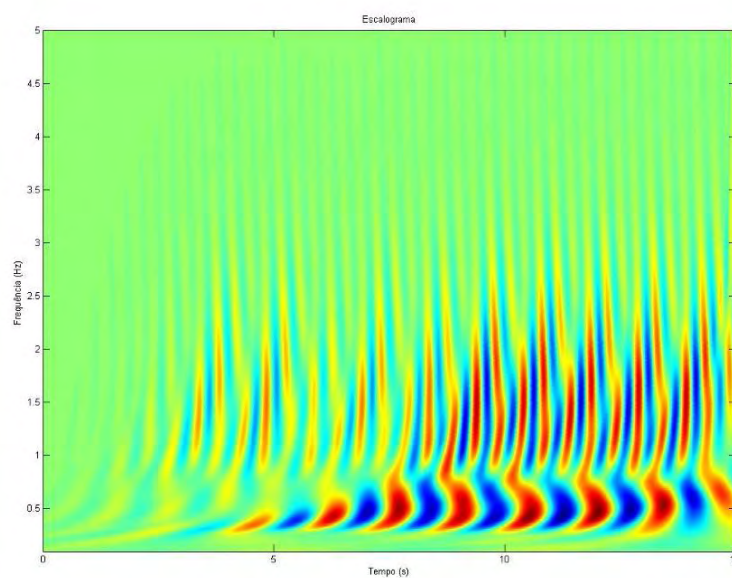


Figura 4.4 (n) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.4 (n) apresenta-se o escalograma da transformada *wavelet* aplicada ao terceiro pavimento, é possível observar uma frequência próxima de 1,3 Hz, indicada no escalograma pela coloração vermelha nessa faixa de frequência, porém a frequência natural do primeiro modo normal de vibração volta a ter uma influência maior.

Na Figura 4.4 (o) mostra a comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos.

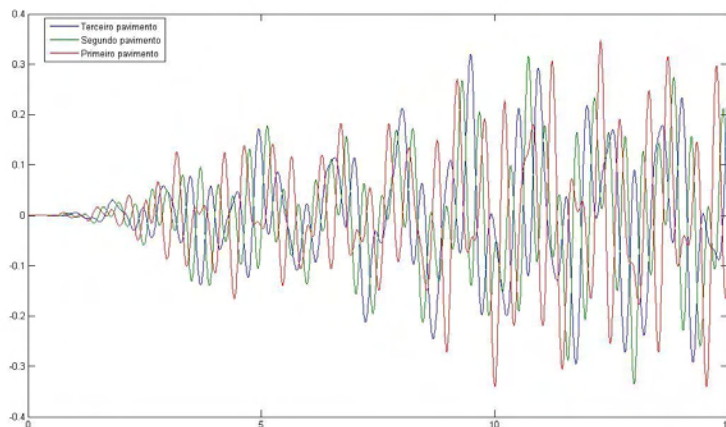


Figura 4.4 (o) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos

#### 4.3.4 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de uma onda de terremoto e com alteração massa $m_3$

Para a quarta simulação foram usados os parâmetros descritos abaixo.

Estrutura com 3 pavimentos:

A massa dos do primeiro e do segundo pavimentos igual  $10^5$  kg ( $m_1=m_2$ ) e a massa do terceiro pavimento quatro vezes maior  $m_3=4 \times 10^5$  kg

A rigidez de do primeiro pavimento  $k_1=2 \times 10^7$  N/m e do segundo e terceiro pavimentos  $k_2=k_3=10^7$  N/m.

Nessa simulação inserimos a mesma onda de terremoto usada na simulação anterior, mostrada novamente na Figura 4.5(b), e que tem ação apenas na componente horizontal.

Com a alteração feita na massa  $m_3$ , temos agora as seguintes frequências naturais  $f_1=0.42$  Hz,  $f_2=1.69$  Hz,  $f_3=2.77$  Hz, do primeiro, segundo e terceiro modos normais de vibração respectivamente.

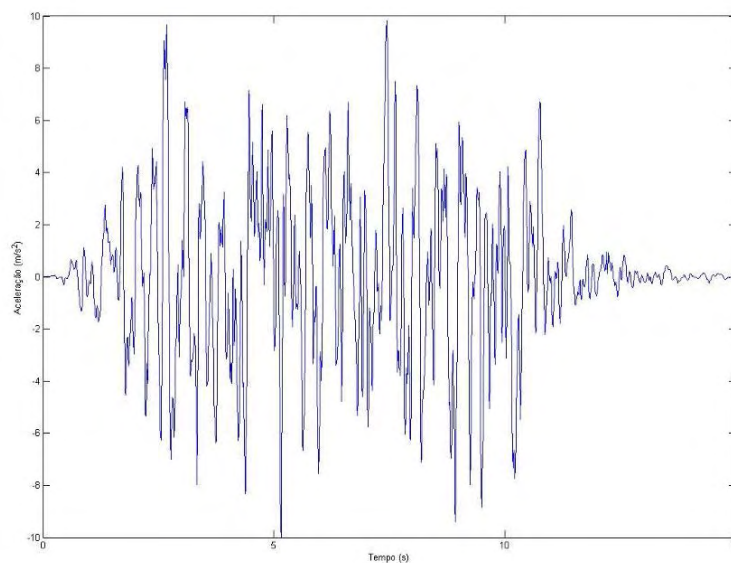


Figura 4.5 (a) Excitação externa aplicada ao piso térreo

A Figura 4.5(b) mostra o deslocamento do primeiro pavimento.

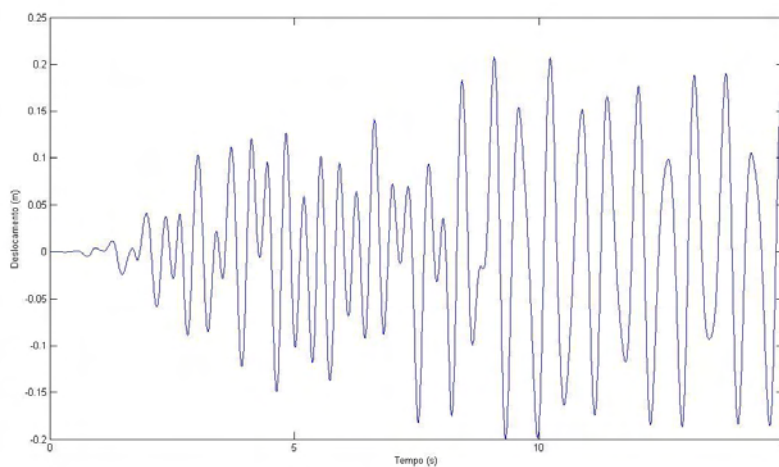


Figura 4.5 (b) Deslocamento do primeiro pavimento ( $x_1$ )

Nos escalogramas da transformada *wavelet* mostrados nas Figuras 4.5 (d), (g) e (j), e através também via transformada de Fourier apresentado nas Figuras 4.5 (c), (f) e (i).

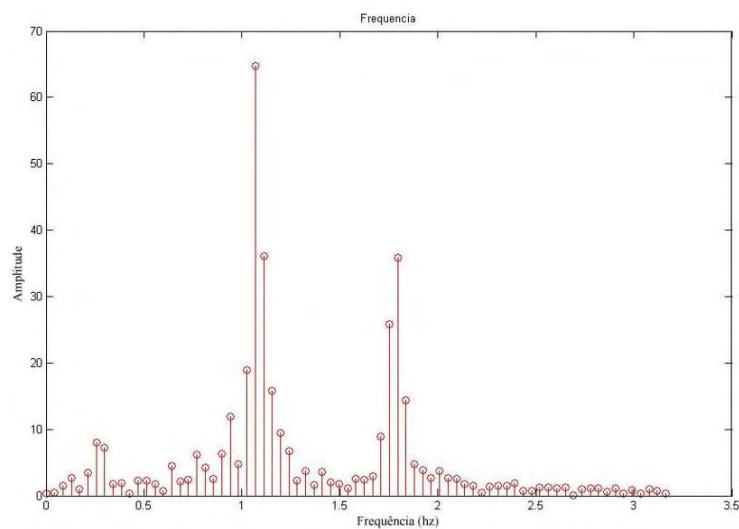


Figura 4.5 (c) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.5 (c) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento, é possível observar que as freqüências apresentadas não coincidem com as freqüências naturais da estrutura.

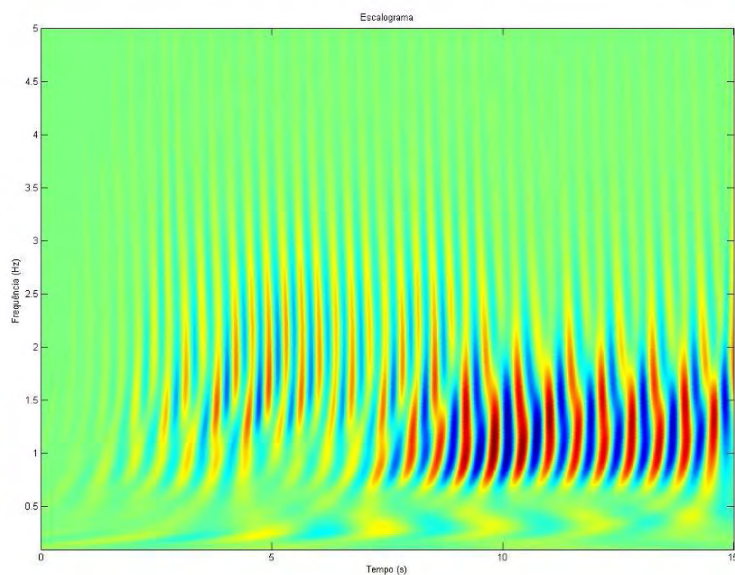


Figura 4.5 (d) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.5 (d) apresenta-se a transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento, é possível ver que as maiores partes das freqüências envolvidas estão em torno de 0.5 e 1 Hz.

A Figura 4.5(e) mostra o deslocamento do segundo pavimento.

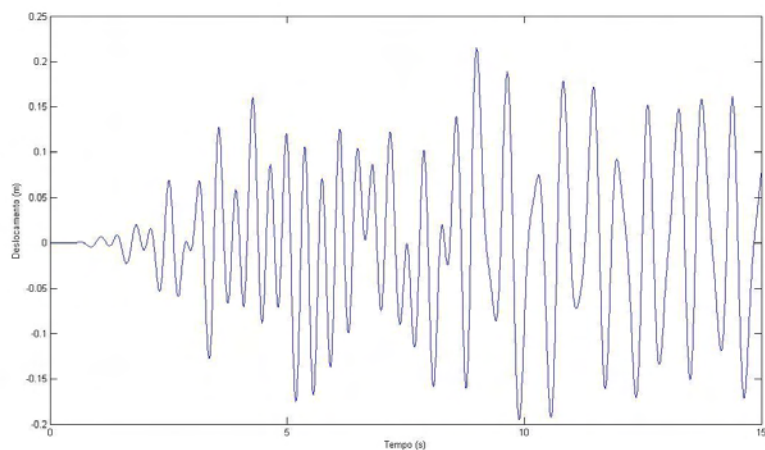


Figura 4.5 (e) Deslocamento do segundo pavimento ( $x_2$ )

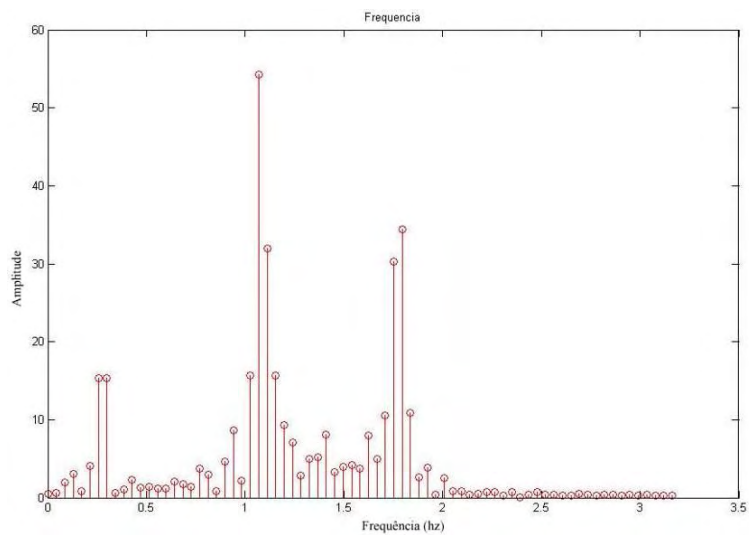


Figura 4.5 (f) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.5 (f) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento, é possível ver que a maior parte das frequências envolvidas estão em torno de 0.5 e 2 Hz.

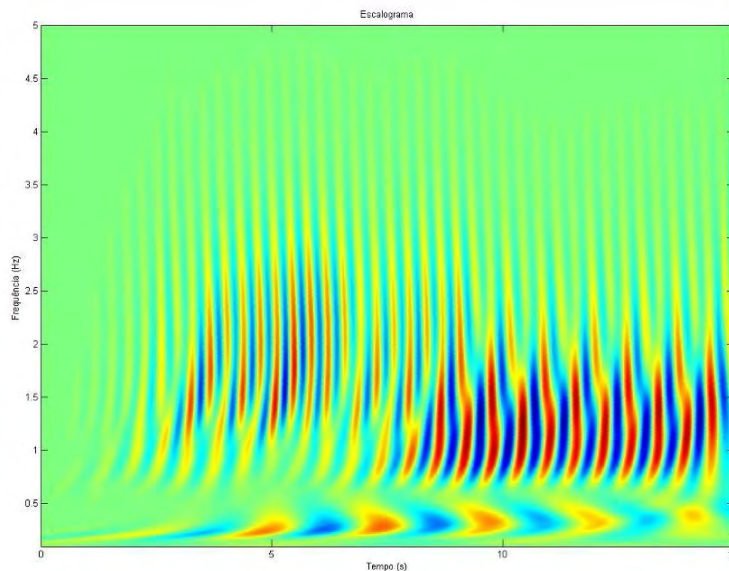


Figura 4.5 (g) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.5 (g) apresenta-se a transformada *wavelet* aplicada ao segundo pavimento, é possível ver que a maior parte das frequências envolvidas estão em torno de 0.5 e 2 Hz. É possível notar que a frequência natural do primeiro modo normal de vibração com valor de 0.42 Hz, passa a ter maior influência conforme se mostra na coloração em vermelho um pouco abaixo de 0,5 Hz.

A Figura 4.5(h) mostra o deslocamento do terceiro pavimento.

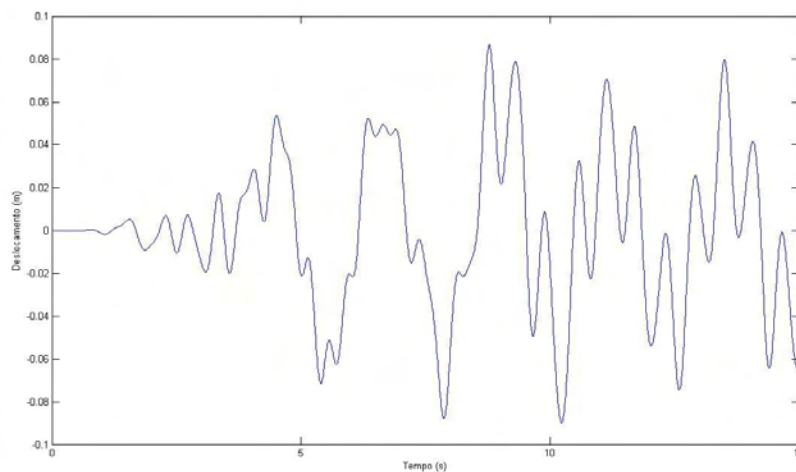


Figura 4.5 (h) Deslocamento do terceiro pavimento ( $x_3$ )

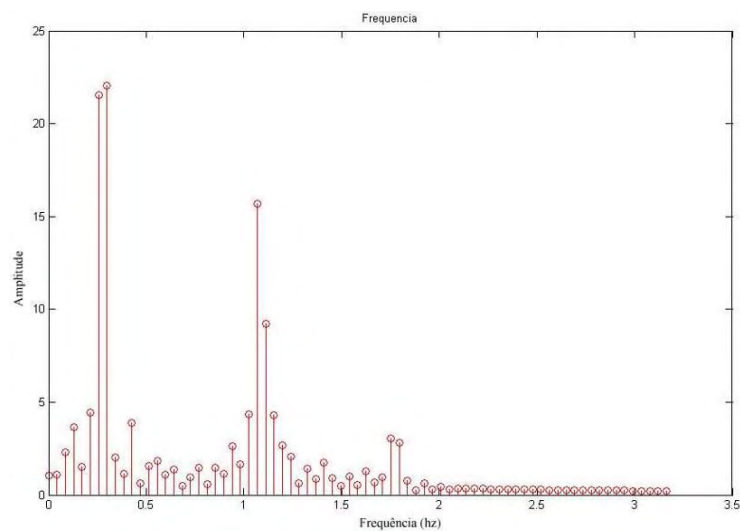


Figura 4.5 (i) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.5 (i) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento, é possível ver de um modo geral as frequências apresentadas são mais intensas em valores próximos as frequências naturais do primeiro e do segundo modos normais de vibração ( $0,42$  Hz,  $f_2=1,69$  Hz respectivamente) e isso se torna mais evidente no escalograma da transformada *wavelet* apresentado na Figura 4.5 (j).

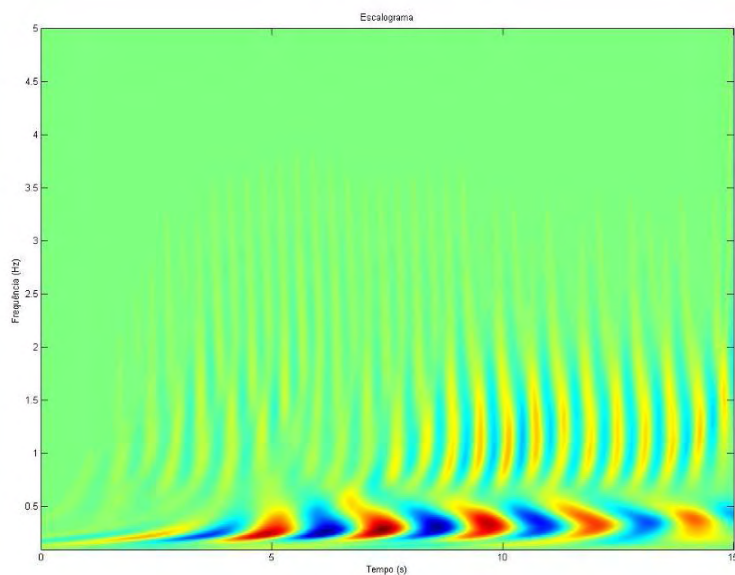


Figura 4.5 (j) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.5 (l) mostra a comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos, vemos claramente que o deslocamento do terceiro pavimento, mostrado em vermelho, é bem menor que os dois primeiros.

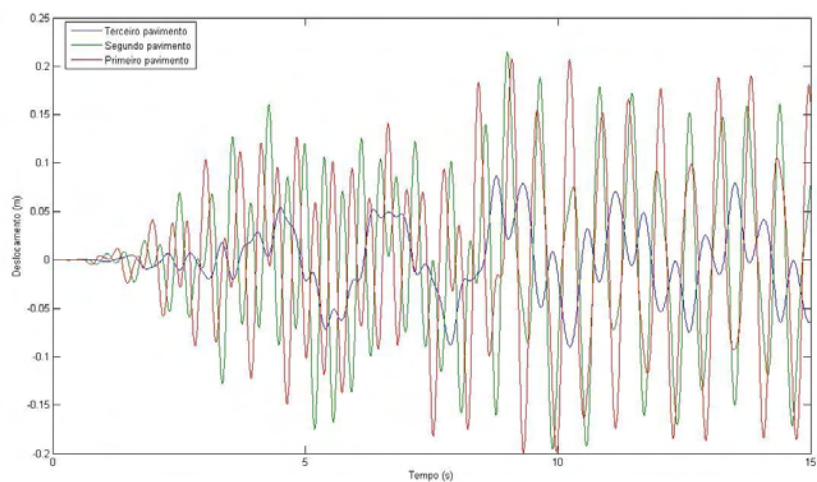


Figura 4.5 (l) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos

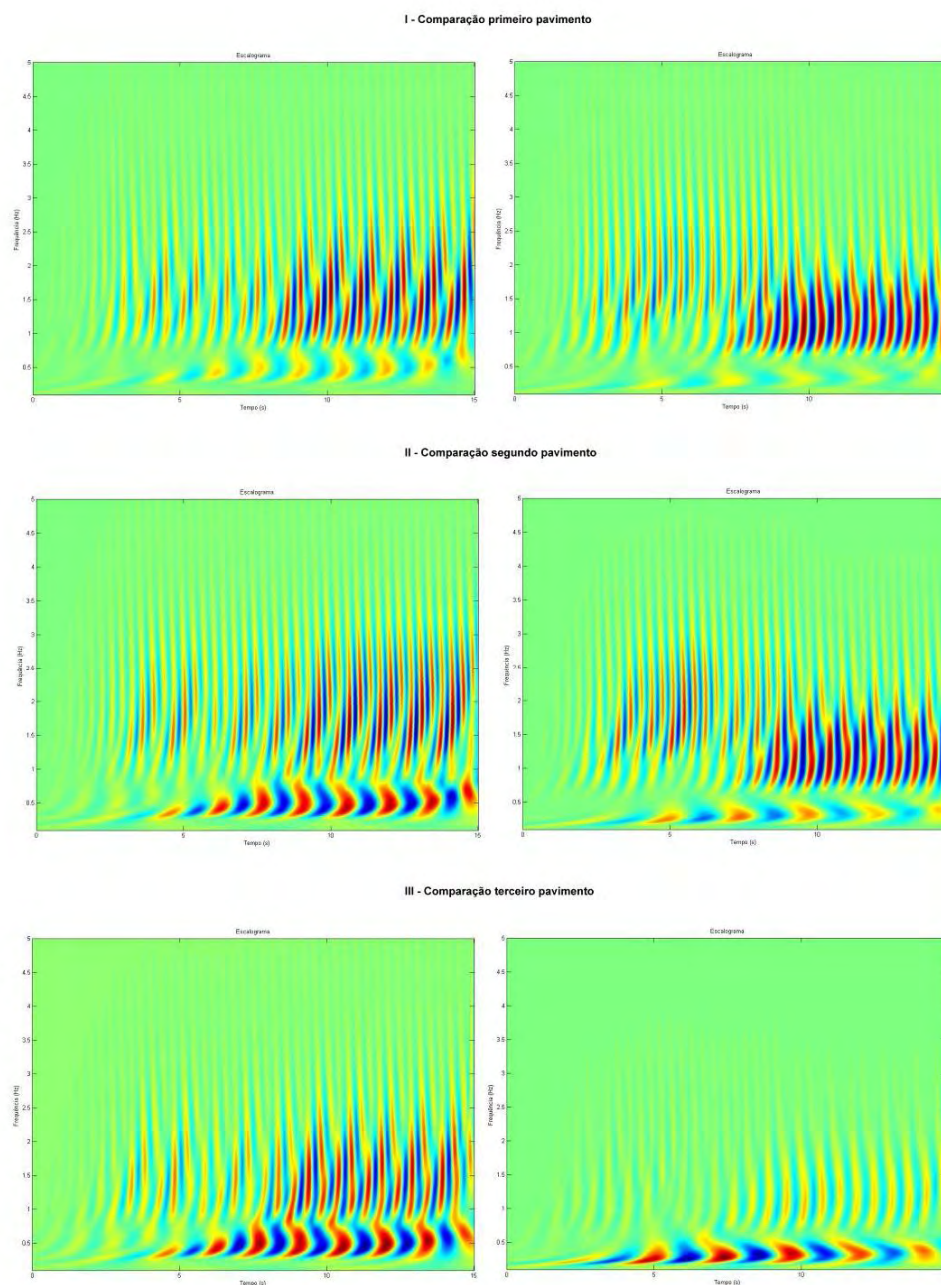


Figura 4.5 (m) Comparação entre os escalogramas da estrutura original (à esquerda) e estrutura com alteração da massa  $m_3$  (à direita).

Na Figura 4.5 (m) faz-se a comparação entre os escalogramas dos três pavimentos da estrutura original simulados em 4.3.3 e os escalogramas simulados em 4.3.4, submetidos à excitação da mesma onda de terremoto, vemos claramente que ambos os casos a influência da primeira frequência natural é bastante acentuada em todas as simulações.

Outra informação importante é a análise dos escalogramas do terceiro pavimento, onde na simulação em que a massa  $m_3$  é aumentada percebe-se que a maior influência no terceiro pavimento passa a ser a da frequência natural do primeiro modo normal de vibração.

#### **4.3.5 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de uma onda de terremoto e com alteração em $k_2$**

Para a quinta simulação foram usados os parâmetros descritos abaixo.

Estrutura com 3 pavimentos:

A massa dos três pavimentos é igual a  $10^5$  kg ( $m_1=m_2=m_3$ ).

A rigidez de do primeiro pavimento  $k_1=2 \times 10^7$  N/m, diminuimos o elemento de rigidez do segundo para  $k_2=10^3$  N/m. e mantivemos a rigidez do terceiro pavimento em  $k_3=10^7$  N/m

As frequências naturais da estrutura são  $f_1=1.59$  Hz,  $f_2=2.24$  Hz,  $f_3=2.25$  Hz, para o primeiro, segundo e terceiro pavimento respectivamente.

Nessa simulação inserimos a mesma onda de terremoto dos dois exemplos anteriores, mostrada na Figura 4.6(a), com ação apenas no eixo horizontal.

Como era esperado o terceiro pavimento teve uma vibração maior que os outros dois e isto pode ser mais bem visto nas Figuras 4.6 (b), (e) e (h).

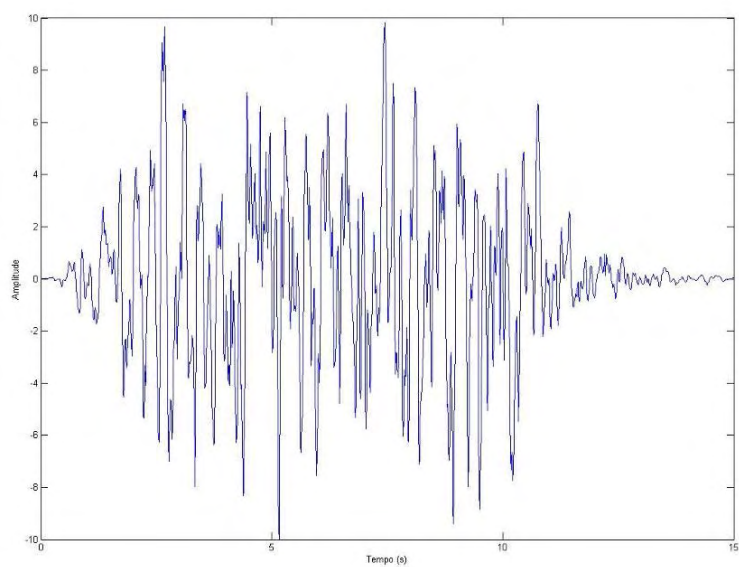


Figura 4.6 (a) Excitação externa aplicada ao piso térreo

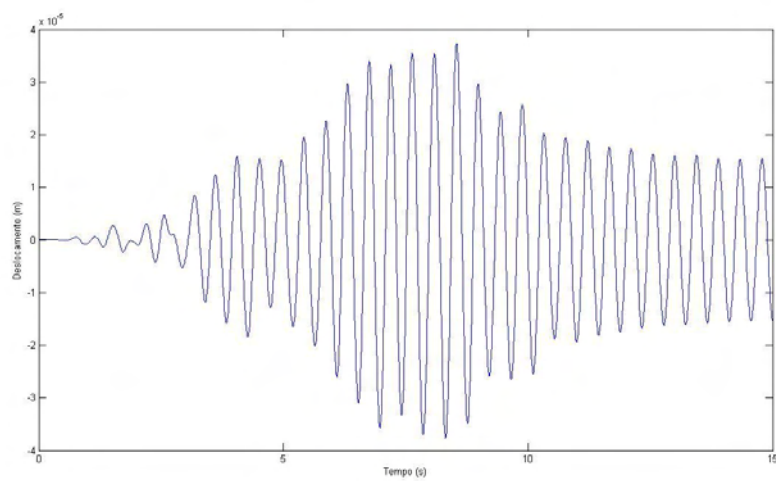


Figura 4.6 (b) Deslocamento do primeiro pavimento ( $x_1$ )

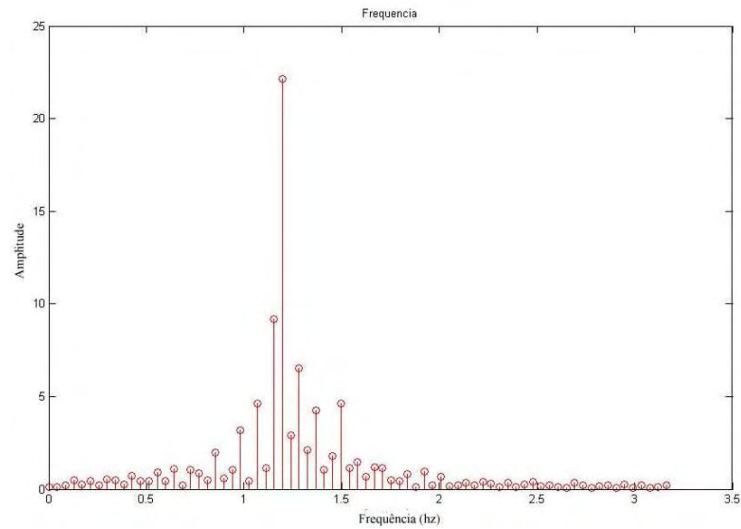


Figura 4.6 (c) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.6 (c) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento, é possível ver de um modo geral que as frequências apresentadas têm maior amplitude em valores entre 1 e 1,5 Hz.

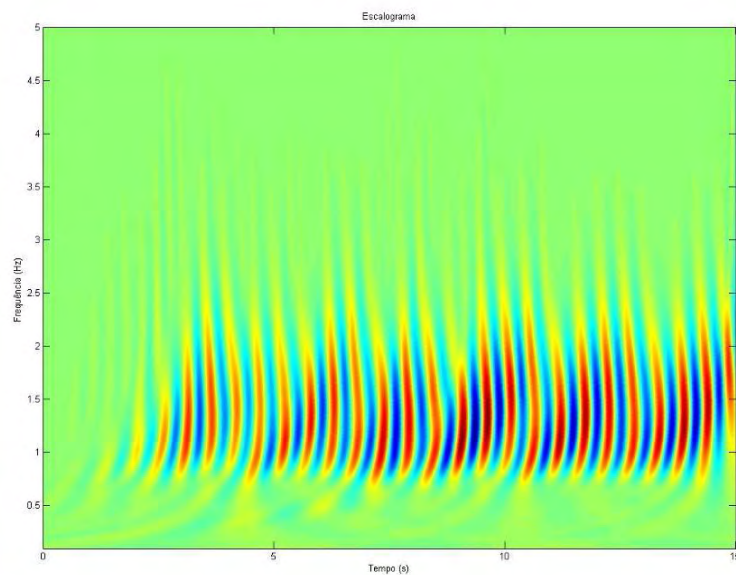


Figura 4.6 (d) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.6 (d) apresenta-se o escalograma da transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento, é possível ver de um modo geral que as frequências apresentadas têm estão em torno de 1 e 1,5 Hz.

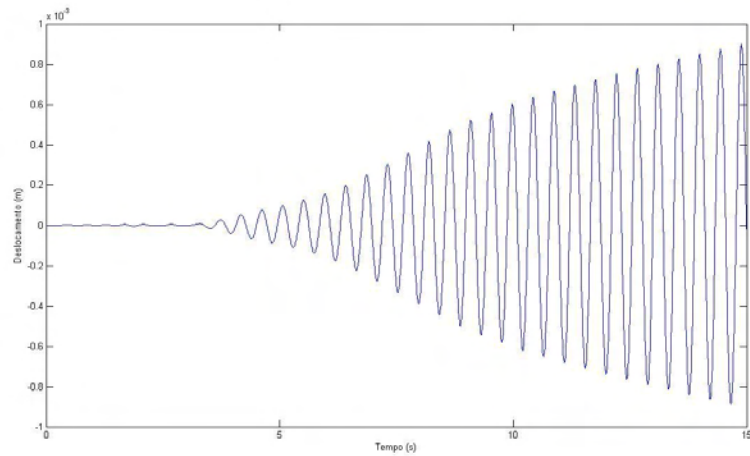


Figura 4.6 (e) Deslocamento do segundo pavimento ( $x_2$ )

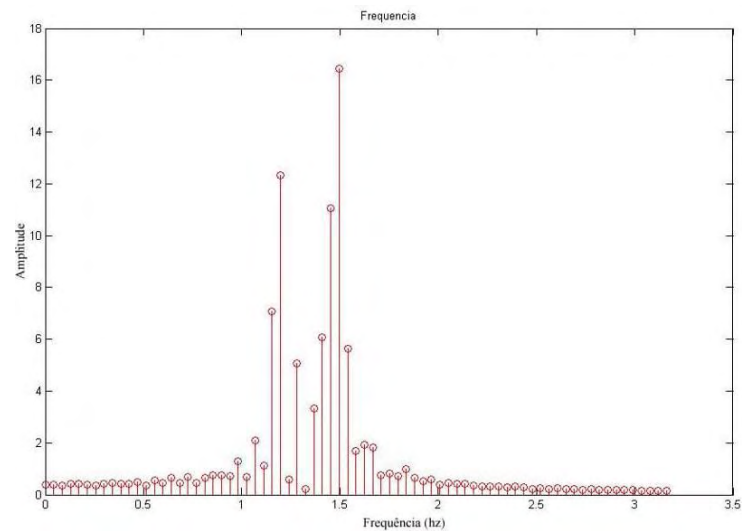


Figura 4.6 (f) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.6 (f) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento, é possível ver- que as frequências apresentadas têm maior amplitude em valores entre 1 e 1,5 Hz, novamente bem próximos da frequência natural do primeiro modo normal de vibração.

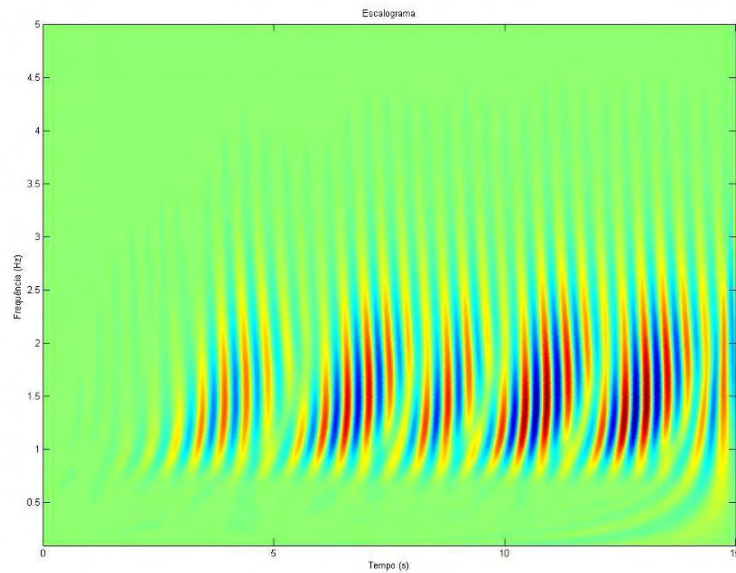


Figura 4.6 (g) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

A Figura 4.6 (g) apresenta-se a transformada *wavelet* aplicada ao segundo pavimento, é possível ver- que as frequências apresentadas são mais intensa em valores entre 1 e 2 Hz, novamente bem próximos da frequência natural do primeiro modo normal de vibração, e uma indicação de frequência menos intensa próximo do valor da frequência natural do segundo modo normal de vibração (2.24 Hz) indicada no escolograma pela cor amarela.

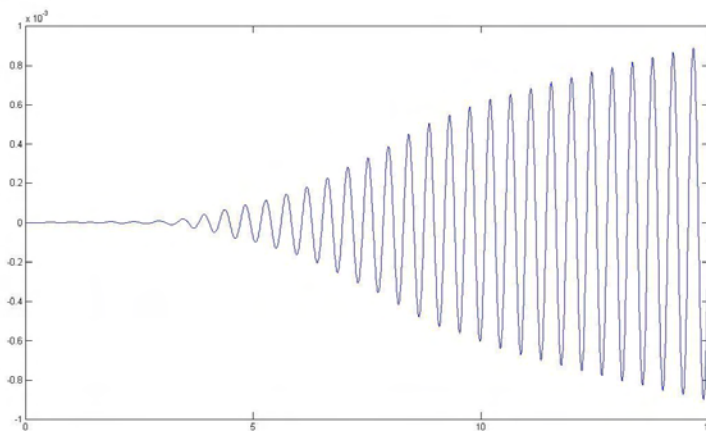


Figura 4.6 (h) Deslocamento do terceiro pavimento ( $x_3$ )

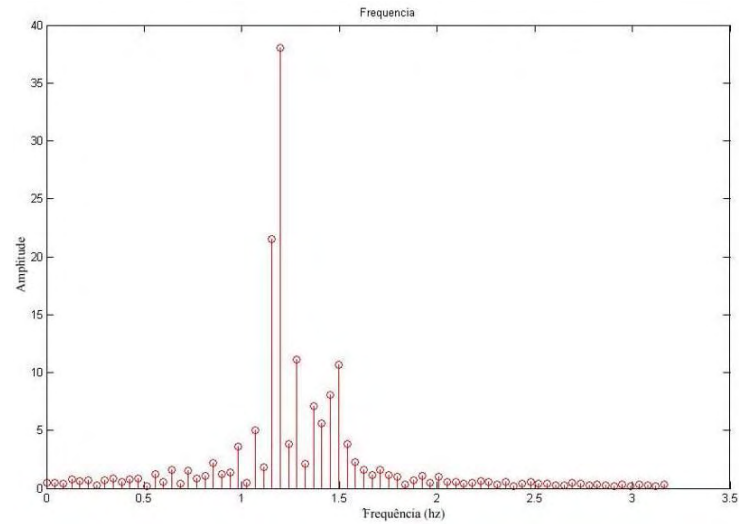


Figura 4.6 (i) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.6 (i) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento, é possível ver as frequências apresentadas tem maior amplitude em valores entre 1 e 1,5 Hz, novamente bem próximos da frequência natural do primeiro modo normal de vibração.

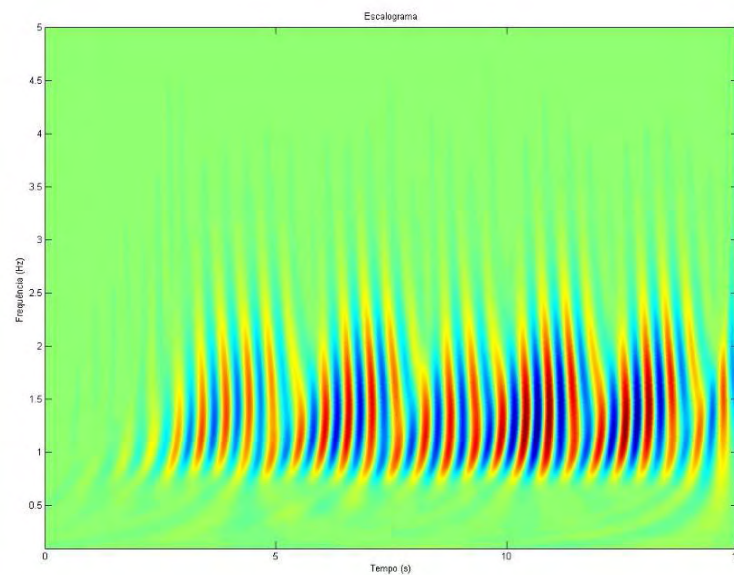


Figura 4.6 (j) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.6 (j) apresenta-se a transformada *wavelet* aplicada ao segundo pavimento, é possível ver de um modo geral as freqüências apresentadas de forma mais intensa em valores entre 1 e 2 Hz, novamente bem próximos da freqüência natural do primeiro modo normal de vibração, e uma indicação de freqüência menos intensa próximo do valor da freqüência natural do terceiro pavimento (2.25 Hz) indicada no escolograma pela cor amarela.

A Figura 4.6 (j) compara o deslocamento dos três pavimentos.

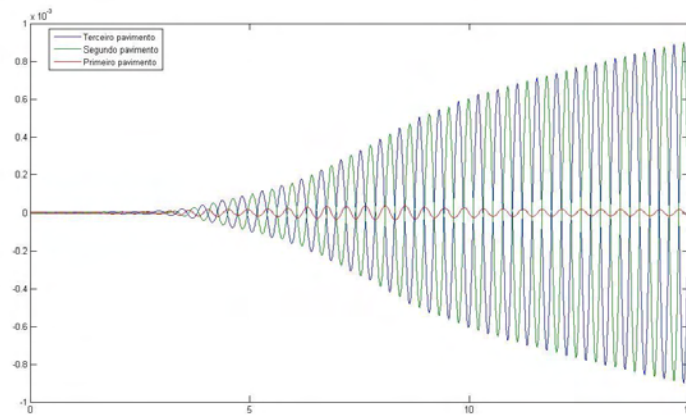


Figura 4.6 (l) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos

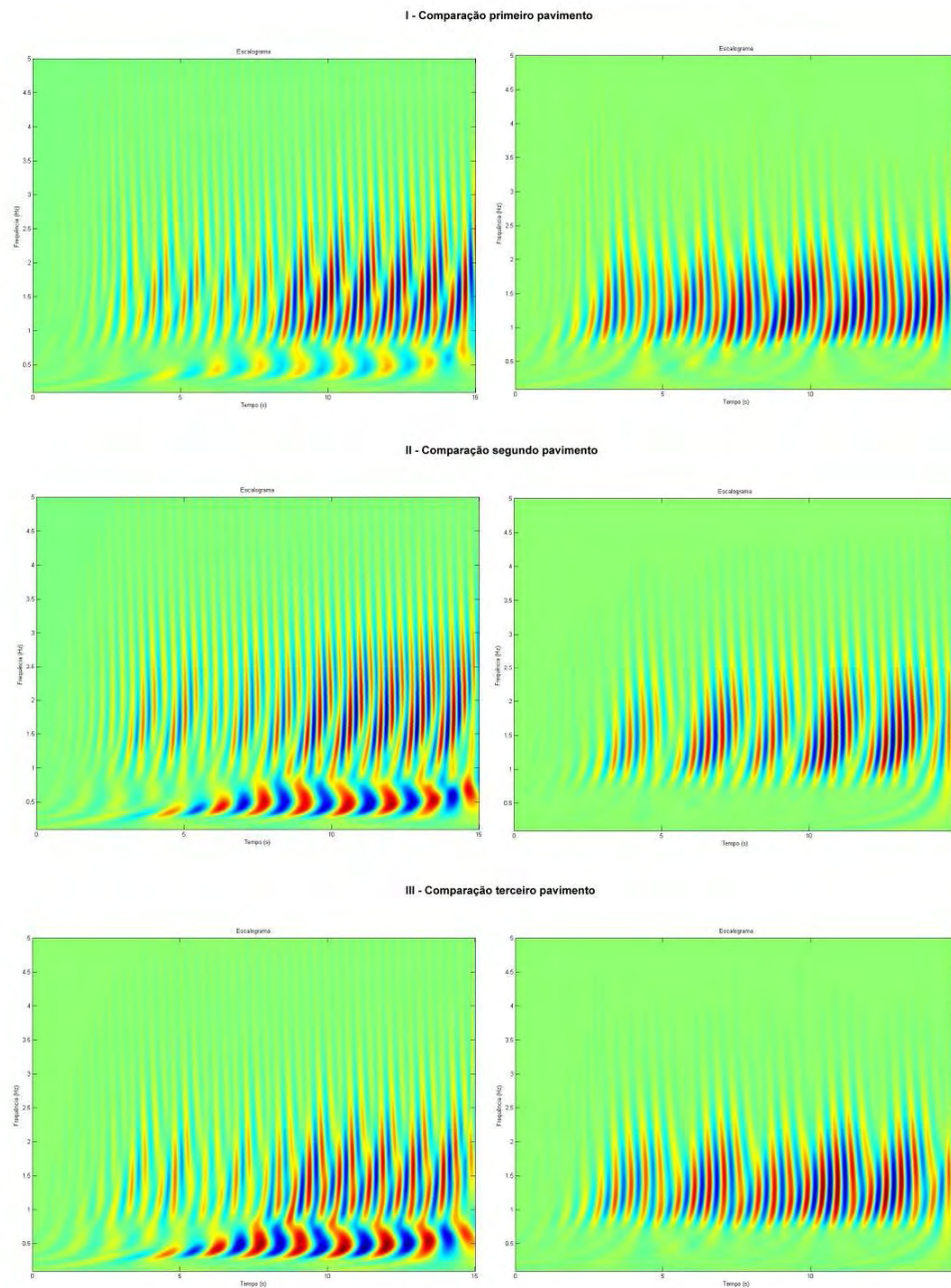


Figura 4.6 (m) Comparação entre os escalogramas da estrutura original e estrutura (à esquerda) com alteração da mola  $k_2$  (à direita).

Na Figura 4.5 (m) faz-se a comparação entre os escalogramas dos três pavimentos da estrutura original simulados em 4.3.3 e os escalogramas simulados em 4.3.5, submetidos à excitação da mesma onda de terremoto, vemos que ambos os casos a influência

da frequência natural do primeiro modo normal de vibração é bastante acentuada em todas as simulações.

Outra informação importante é a análise dos escalogramas, e que na simulação em que alteramos o parâmetro  $k_2$ , as frequências mostradas no escalograma sempre estão muito próximas das frequências naturais da estrutura.

#### **4.3.6 Simulação para o caso da excitação da estrutura através de uma onda de terremoto e com alteração em $k_3$**

Para a sexta simulação foram usados os parâmetros descritos abaixo.

Estrutura com 3 pavimentos:

A massa dos três pavimentos é igual  $10^5$  kg ( $m_1=m_2=m_3$ ).

A rigidez de do primeiro pavimento  $k_1=2*10^7$  N/m, mantivemos o elemento de rigidez do segundo para  $k_2=10^7$  N/m. e diminuimos o elemento de rigidez do terceiro pavimento para  $k_3=10^3$  N/m

As frequências naturais da estrutura são  $f_1=1.59$  Hz,  $f_2=2.24$  Hz,  $f_3=2.25$  Hz, para o primeiro, segundo e terceiro pavimentos respectivamente

Nessa simulação inserimos a mesma onda de terremoto dos três exemplos anteriores, mostrada na Figura 4.7(a), com ação apenas no eixo horizontal.

Como era esperado o primeiro pavimento teve uma vibração maior que os outros dois e isto pode ser mais bem visto nas Figuras 4.7 (b), ( d) e (g).

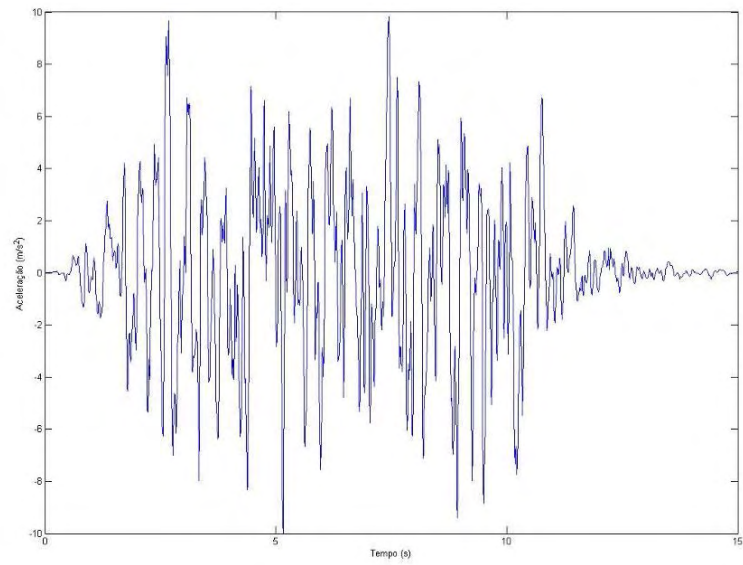


Figura 4.7 (a) Excitação externa aplicada ao piso térreo

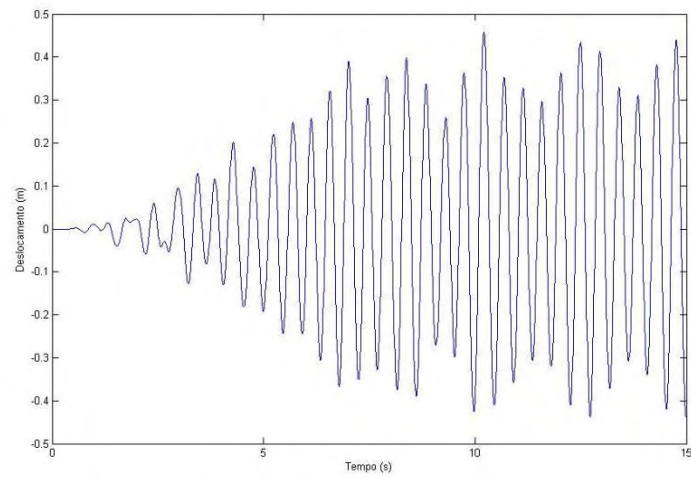


Figura 4.7 (b) Deslocamento do primeiro pavimento ( $x_1$ )

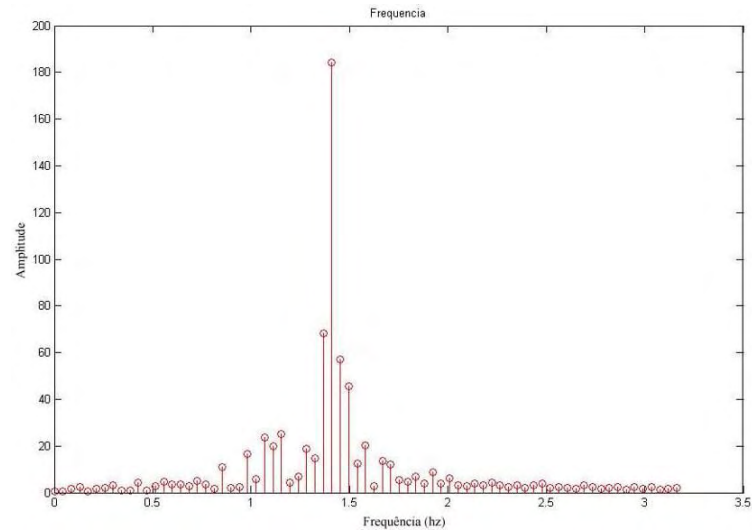


Figura 4.7 (c) Transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.7 (c) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao primeiro pavimento, é possível observar que as frequências apresentadas têm maior amplitude em valores em torno de 1,5 Hz, ou seja, próximos ao valor da frequência natural do primeiro modo normal de vibração que é 1,59 Hz.

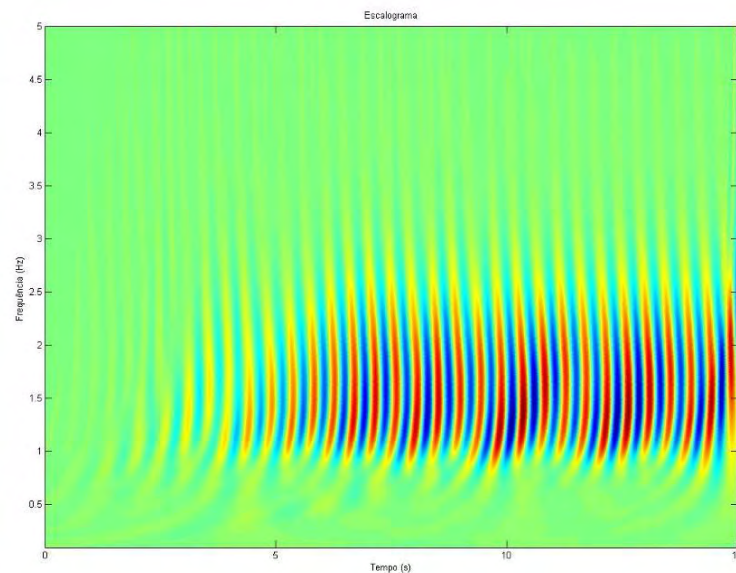


Figura 4.7 (d) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento ( $x_1$ )

Na Figura 4.7 (d) apresenta-se a transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento, assim como na transformada de Fourier é possível observar que frequências

próximas de 1,5 Hz, ou seja, bem próximas a frequência natural do primeiro modo normal de vibração.

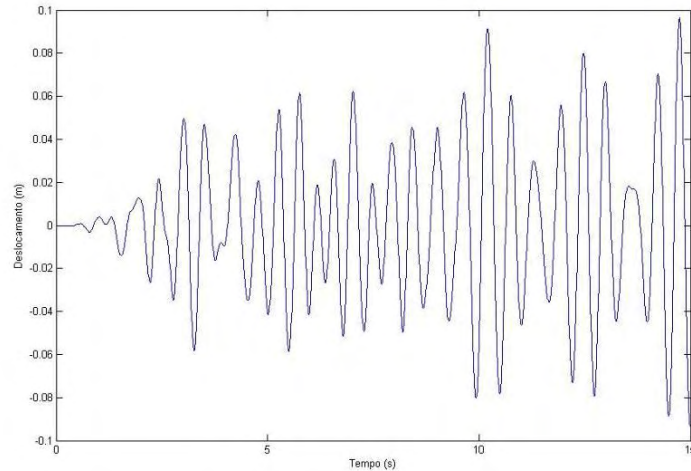


Figura 4.7 (e) Deslocamento do segundo pavimento ( $x_2$ )

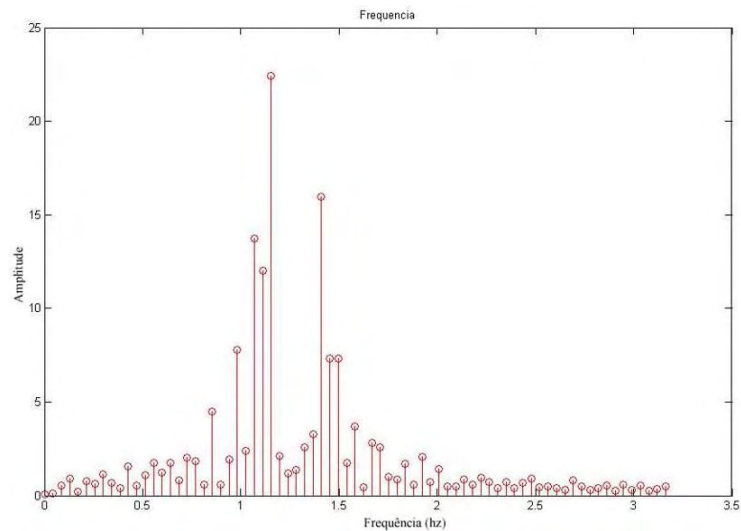


Figura 4.7 (f) Transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.7 (f) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento, é possível ver que as frequências apresentadas têm maior amplitude em valores em torno de 1 e 1,5 Hz.

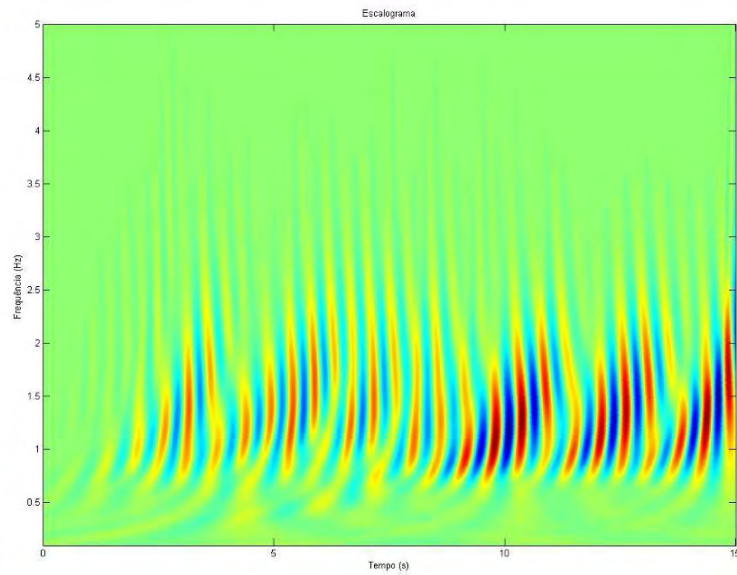


Figura 4.7 (g) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao segundo pavimento ( $x_2$ )

Na Figura 4.7 (g) apresenta-se a transformada *wavelet* aplicada ao primeiro pavimento, assim como na transformada de Fourier é possível observar maior intensidade de frequências próximas de 1 Hz, e outras indicações de frequências de menor intensidade entre 2 e 2,5 Hz.

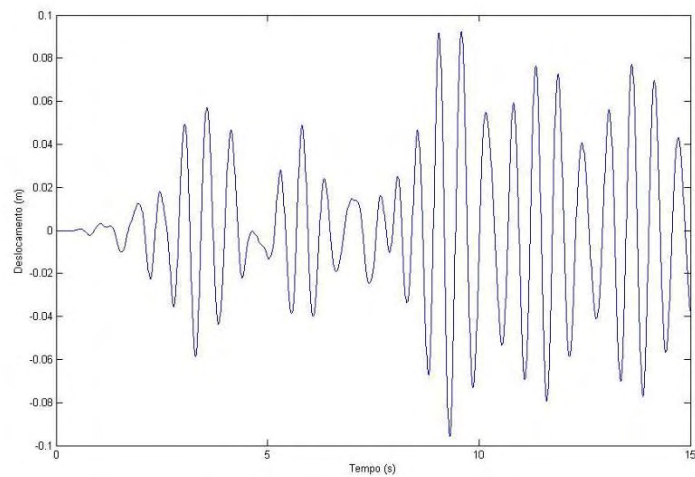


Figura 4.7 (h) Deslocamento do terceiro pavimento ( $x_3$ )

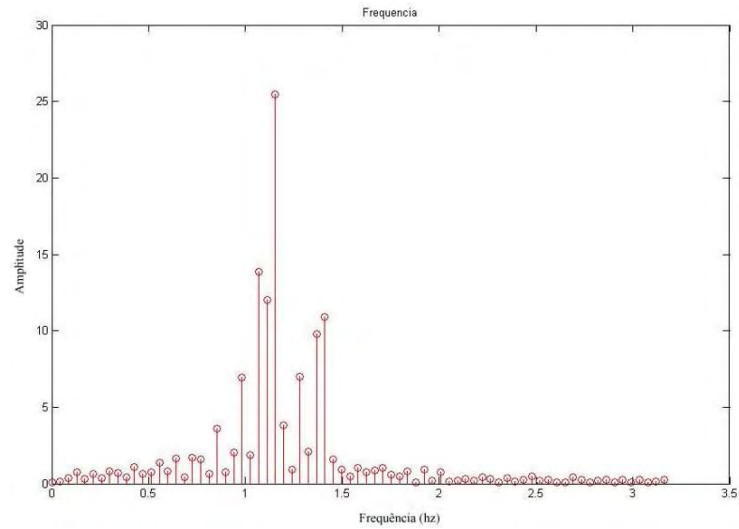


Figura 4.7 (i) Transformada de Fourier aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

Na Figura 4.7 (i) apresenta-se a transformada de Fourier aplicada ao segundo pavimento, é possível ver que as freqüências apresentadas têm maior amplitude em valores em torno de 1 Hz

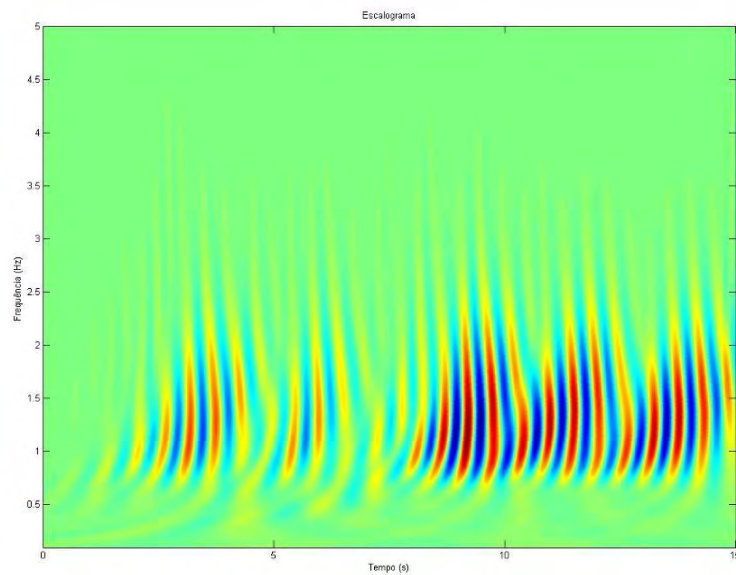


Figura 4.7 (j) Escalograma da Transformada *wavelet* aplicada ao terceiro pavimento ( $x_3$ )

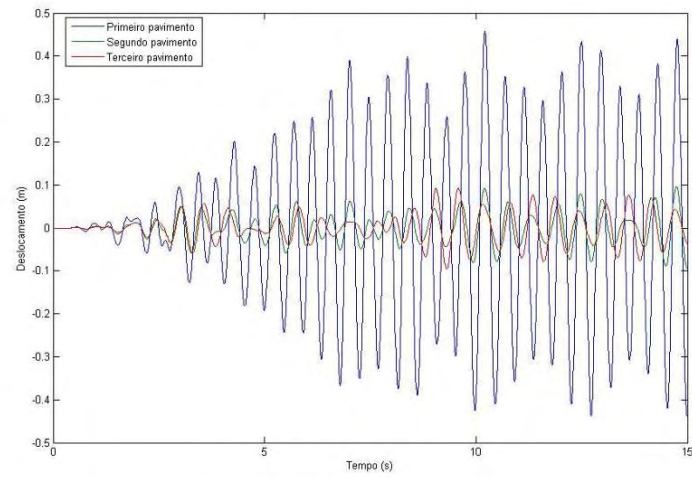


Figura 4.7 (l) Comparação entre os deslocamentos dos três pavimentos

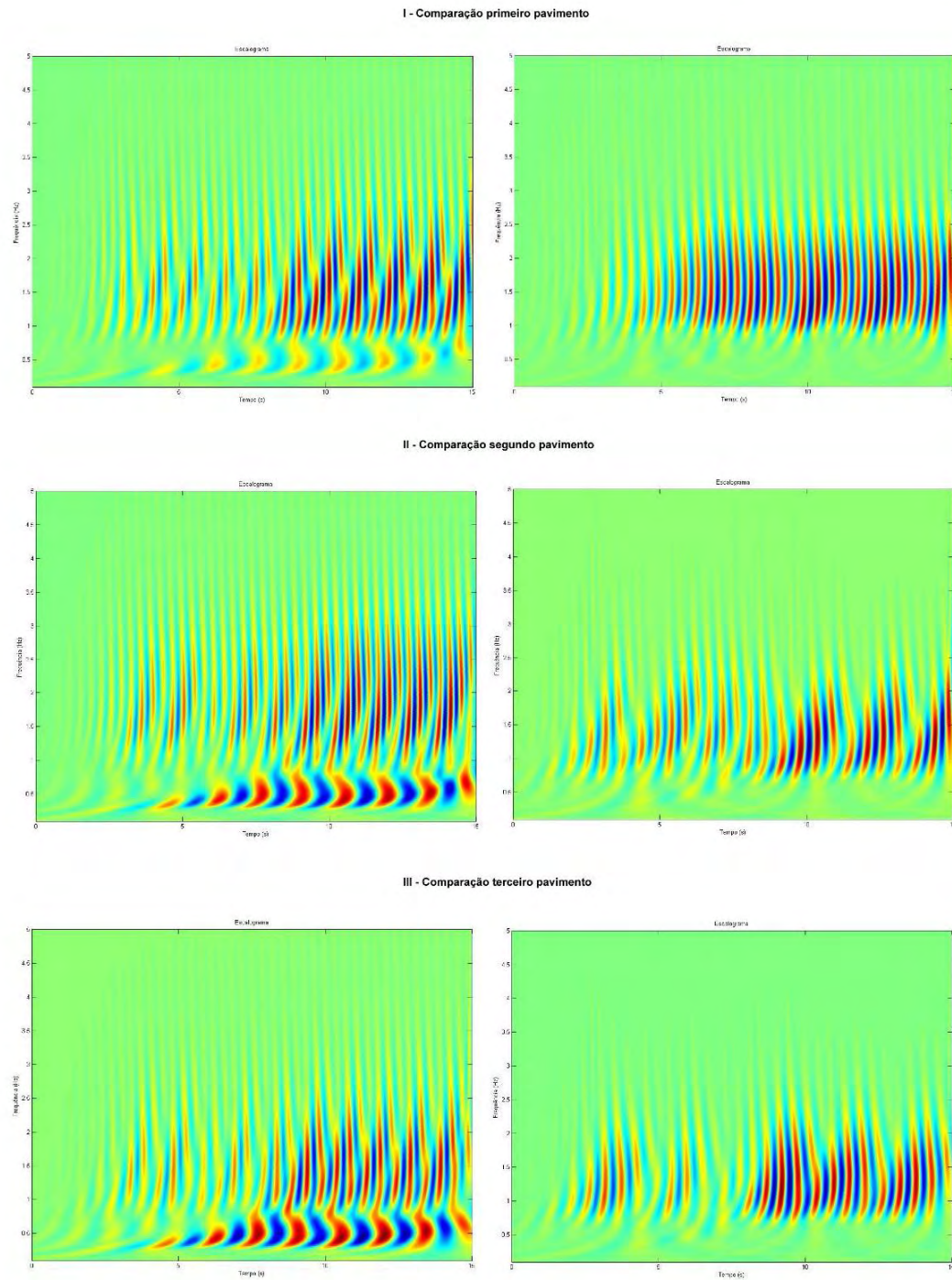


Figura 4.7 (m) Comparação entre os escalogramas da estrutura original (à esquerda) e estrutura com alteração da mola  $k_3$  (à direita)

Na Figura 4.7 (m) faz-se a comparação entre os escalogramas dos três pavimentos da estrutura original simulados em 4.3.3 e os escalogramas simulados em 4.3.7, submetidos à excitação da mesma onda de terremoto, vemos que ambos os casos a influência

da frequência natural do primeiro modo normal de vibração é bastante acentuada em todas as simulações.

Outra informação importante é a análise dos escalogramas, e que na simulação em que alteramos o parâmetro  $k_3$ , as frequências mostradas no escalograma sempre estavam próximas das frequências naturais da estrutura.

## CAPÍTULO 5

### Conclusões

#### 5.1 Comentários sobre os métodos utilizados

Neste trabalho apresentamos os conceitos envolvidos na análise dinâmica de um sistema discreto de massas concentradas e com 2 graus de liberdade.

O método de integração utilizado foi o de Newmark, e isso se justifica pelo fato de ser um método de integração direta onde usamos a aceleração.

Procuramos mostrar de forma didática e usando programas ( apêndice B e C) “livres” desenvolvidos em softwares comerciais (*Maple 11*, *Matlab 2007a* e *Maple toolbox for Matlab 1*), e usamos a transformada *wavelet* para visualizar as frequências de vibração dos pavimentos da estrutura usando escalogramas e também se faz esta análise usando a transformada de Fourier.

Os principais resultados deste trabalho são a obtenção das frequências de vibração da estrutura quando submetidas a forças externas, e o uso da transformada *wavelet* é eficaz para a visualização, como apresentado no Capítulo 4, através dos resultados de simulações computacionais.

Em relação ao uso da transformada de Fourier vimos que seu uso é eficiente para encontrar as frequências envolvidas, porém sem relação com o tempo.

Com relação à simulação computacional vale destacar o uso do *Maple toolbox for Matlab*, que permitiu integrar o *Maple* e *Matlab*, dando acesso direto a todos os comandos, funções e variáveis de cada um dos softwares, permitindo assim a aplicação da transformada *wavelet* através do *Matlab* para análise da estrutura em questão.

## 5.2 Sugestões para trabalhos futuros

A continuidade desse projeto pode ser feita a partir da simulação de estruturas mais complexas, como por exemplo, análise de uma estrutura tri-dimensional através da transformada *wavelet*.

Simulações que levem em consideração o amortecimento podem ser consideradas.

Comparações com outros sistemas semelhantes também podem ser feitas, tentando fazer alguma analogia aos métodos aqui utilizados. Essas são as novas possibilidades de pesquisa que podem ser exploradas futuramente.

## Referências bibliográficas

A. J. BERKHOUT. **Applied Seismic Wave Theory**, Elsevier, 1987

B. HANHN, D. VALENTINE. **Matlab for Engineers and Scientists 3 Edition**, Elsevier, 2007.

BLEVINS, ROBERT D. **Formulas for Natural Frequency and Mode Shape**, Florida, Krieger Publ, Co, 1979.

BRONSON, R. **Scham's Outline of Theory and problems of Matrix Operations**, Schaum, 1989.

BURRUS, C, ETA AL. **Introduction to Wavelets and Wavelet Transform – A Primer**, Prentice Hall, 1998.

C. F. BEARDS. **Structural Vibrations: Analysis and Damping**, John Wiley & Sons, 1996.

CHAN, Y T. **Wavelets Basics**, Boston, Kluwer Academic Publisher, 1995.

CHOPRA, A K. **Dynamical of structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**, Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995 .

- CHUI, C.K. **Wavelets: An Introduction to Wavelets**, Academic Press, 1992.
- DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets**, Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- DIMAROGONAS, A. **Vibration for Engineers**, Prentice Hall, 2 Edition, 1996.
- GAWROSKI, W. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**, Springer-Verlag, 1998.
- HATCH, M. **Vibration Simulation using Matlab and Ansys**, Chapman & Hall, 2000.
- HORN, R, JOHNSON, C.R. **Matrix Analysis**, Cambridge University Press, 1985.
- INMAN, DANIEL J. **Engineering Vibration**, Prentice Hall, 1996.
- KELLY, S.G. **Fundamental of Mechanical Vibrations** 2 Edition, McGraw-Hill, 2000.
- KERRIS, S. **Signal and Systems with Matlab Applications**, Orchard Publications, 2003.
- MALLAT, S. **Wavelet Tour of Signal Processing** McGraw-Hill, 2000.
- MALLAT, S. **A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: Wavelet Representation**, IEEE Trans. Pattern anal. Mach Intellig, no, 11, pp. 674-693, 1989.
- MATHWORKS, INC. **Wavelet Toolbox: User's Guide**, internet, 2007.
- MORETTIN, P. A. **Ondas e ondaletas: Da análise de Fourier à análise de ondaletas**, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1999.
- PAZ, M. **Structural Dynamics Theory and Computation**, Van Nostrand, 2 Edition, 1985.
- RAO, S.S. **Mechanical Vibrations**, Addison-Wesley, 1990.

STRANG, G, NGUYEN, T. **Wavelets and Filters Banks**, Wellesley-Cambridge Press, 1996.

THOMSON, W.T. **Theory of Vibrations With Applications**, 5 Edition ed, Prentice-Hall, 1998.

TIMOSHENKO, S. **Vibrations Problems in Engineering**. 2, Van Nostrand Co, 1937.

TOLSTOV, G. P. **Fourier series**. New York: Dover Publication, INC, 1962. 336 p.

VALENS, C. **A Really Friendly Guide to wavelets**, internet, 1999.

YASHINSKY, M. **Earthquake Damage to Structures**,: CRC Press LLC, 2001

## Apêndice

### Apêndice A Mix.mws - Programa Desenvolvido em Maple 11 para análise do sistema excitado por uma onda de terremoto

Programa responsável pela análise dinâmica e modal da estrutura analisada, baseado nos programas descritos nos Apêndices C e D.

```
> restart;
```

#### Início

#### Carregando os pacotes necessários

```
> with(linalg): with(plots): with(plottools):
```

#### Parâmetros Iniciais

Número de pavimentos:

```
> n:=3:
```

Número de quadros utilizado na animação:

```
> numpict:=50:
```

Período de tempo entre dois únicos quadros

```
> dtime:=3.5/numpict;
```

#### Descrição do sistema mecânico

## Matrizes envolvidas

Matriz de Massa (M)

```
> M:=diag(seq(10^5,i=1..n));
```

Matriz Rigidez (stiffness) (K)

```
> K:=matrix(n,n,0):
```

```
K[n,n]:=10^7:
```

```
for i from 1 to n-1 do
```

```
  K[i,i]:=2*10^7; K[i,i+1]:=-10^7; K[i+1,i]:=-10^7;
```

```
od:
```

```
> print(K);
```

```
> SM:=multiply(inverse(M),K);
```

## Autovalores e Autovetores

Frequências Naturais:

A linha fornece os valores de  $\omega^2$

```
> lambda:=evalf(Eigenvals(SM,vecs));
```

```
omega:=sort([seq(abs(lambda[i])^(1/2),i=1..n)],`<`);
```

Matriz Modal (Matriz dos autovetores formada por  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ ):

```
> Ubar:=convert(vecs,matrix);
```

## Problema do Autovalor

### Autovalores e autovetores

```
> for i from 1 by 1 to n do
```

```
> v||i := linalg[submatrix](vecs, 1..n, i..i):
```

```
> od:
```

```
> print(v1);
```

Ordenando os respectivos autovalores

```
> lstsrt:=sort([lambda[1],lambda[2],lambda[3]]):
```

```
> print(lstsrt);
```

```
> for i from 1 by 1 to n do
```

```
> for j from 1 by 1 to n do
```

```
> if (lstsrt[i]=lambda[j]) then
```

```
> num[i]:=j:
```

```
> if (i>1 and num[i]<>num[i-1]) then j:=n fi:
```

```
> fi:
```

```
> od:
```

```
> od:
```

```
> for i from 1 by 1 to 3 do
```

```
> j:=num[i]:
```

```

> ev||i:=evalm(v||j):
> od:

> ew:=vector(3,[lstsrt[1],lstsrt[2],lstsrt[3]]);

```

### Frequências Naturais

```

> for i from 1 by 1 to n do
> omega||i:=sqrt(ew[i]): // Essa linha fornece o  $\omega$ 
> od:
> for i from 1 by 1 to 6 do
> f||i:=evalf(omega||i/2/Pi): // Essa linha fornece a
frequência ( $f=\omega/2\pi$ )
> od:
> print(f1,f2,f3);

```

### Matrix Modal

```

> phi:=matrix(n,n):
> for i from 1 by 1 to n do
> for j from 1 by 1 to n do
>
phi[j,i]:=ev||i[j,1]/max(abs(ev||i[1,1]),abs(ev||i[2,1]),abs(e
v||i[3,1])): //Essa linha faz a construção da matriz modal  $\Phi$ 
> od:
> od:
> phit:=transpose(phi): // Essa linha faz a construção da
matriz modal transposta  $\Phi^t$ 
> print(phit);

```

### Modal Mass and Modal Stiffness

```

> Ms:=multiply(multiply(phit,M),phi): // Essa linha faz a
relação  $\Phi^t M \Phi$ 
> Ks:=multiply(multiply(phit,K),phi): // Essa linha faz a
relação  $\Phi^t K \Phi$ 

> for i from 1 by 1 to n do
> for j from 1 by 1 to n do
> if (i<>j) then Ks[i,j]:=0 fi:
> if (i<>j) then Ms[i,j]:=0 fi:
> od:
> od:
> print(Ms); // Essa linha mostra a matriz M na sua forma
diagonal
> print(Ks); // Essa linha mostra a matriz K na sua forma
diagonal

```

## Solução Numérica para equação de movimento

### Time-History of the Ground Motion

Será lido de um arquivo com quatro colunas:

```
. tempo, 2. x-aceleração> loaddat:=readdata("mov.dat",4) :

>
Passo de integração
> dt:=loaddat[4][1]-loaddat[3][1];
number of samples
> ndt:=nops(loaddat);
total time
> maxT:=ndt*dt;
discrete timesteps
> for i from 0 by 1 to ndt do t||i:=i*dt od:
> for i from 1 by 1 to 3 do a0||i[0]:=0 od:
association of the datas
> for i from 1 by 1 to ndt do
> a01[i]:=loaddat[i][2]:a02[i]:=0:a03[i]:=0: // Essa linha
constrói o vetor aceleração
> od:

> for i from 1 by 1 to 5 do
> print(loaddat[i][2]):
> od:
> for i from 1 by 1 to 5 do
> print(a01[i]):
> od:
```

O bloco de código abaixo representa o prédio no seu estado de repouso

```
> for i from 1 by 1 to 3 do
> v0||i[0]:=0:
> x0||i[0]:=0:
> od:

> for j from 1 by 1 to ndt do
> for i from 1 by 1 to 1 do
```

Abaixo temos a integração de Newmark

```
> v0||i[j]:=v0||i[j-1]+(a0||i[j]+a0||i[j-1])*dt/2:
> x0||i[j]:=x0||i[j-1]+(v0||i[j]+v0||i[j-1])*dt/2:
> od:
> od:

>
```

**Graphic**

```
> clax:=red:clay:=blue:claz:=green:
```

time History, x-direction

acceleration

```
> SSax:=[seq([t||j,a01[j]],j=0..ndt)]:
> Pax:=curve(SSax,color=blue):
> listplot([seq([t||j,a01[j]],j=0..ndt)],color=blue);

>
```

displacement

```
> SSdx:=[seq([t||j,x01[j]],j=0..ndt)]:
> Pdx:=curve(SSdx,color=clax):
> listplot([seq([t||j,x01[j]],j=0..ndt)],color=green);
```

**Transform Ground Motion into the Substitute Force**

(no ground rotations are considered)

```
> for i from 1 by 1 to ndt do
```

**O bloco abaixo constrói o vetor aceleração**

```
> a0vec||i:=vector(3):
> a0vec||i[1]:=a01[i]:
> a0vec||i[2]:=0:
> a0vec||i[3]:=0:
> od:
> for i from 1 by 1 to ndt do
> F||i:=-multiply(M,a0vec||i):
> od:
```

**Substituição das forças em coordenadas modais**

```
> for i from 1 by 1 to ndt do
> Fs||i:=multiply(phit,F||i):
> od:
>
```

```
>
```

**Algoritmo de Newmark**

A partir da aceleração obtemos velocidade e posição.

```
> alpha:=0.25:delta:=0.5:
modified mass matrix
> Mn:=matadd(Ms,Ks,1,alpha*dt**2):
> print(Mn);
```

calculation on all time steps

```
> for j from 1 by 1 to 3 do
> Rs||j[1]:=0:q||j[1]:=0:qp||j[1]:=0:qpp||j[1]:=0:
> od:
```

```
> for i from 2 by 1 to ndt do
> for j from 1 by 1 to 3 do
> Rs||j[i]:=Fs||i[j]-Ks[j,j]*(q||j[i-1]+qp||j[i-1]*dt+qpp||j[i-1]*(1/2-alpha)*dt**2):
```

Abaixo temos  $\ddot{q}$

```
> qpp||j[i]:=Rs||j[i]/Mn[j,j]:
```

Abaixo temos  $\dot{q}$

```
> qp||j[i]:=qp||j[i-1]+dt*(qpp||j[i-1]*(1-delta)+qpp||j[i]*delta):
```

Abaixo temos  $q$

```
> q||j[i]:=q||j[i-1]+dt*qp||j[i-1]+dt**2*(qpp||j[i-1]*(1/2-alpha)+qpp||j[i]*alpha):
> od:
> od:
```

Armazenando a solução em um vetor

```
> for i from 1 by 1 to ndt do
> Q||i:=matrix(3,1,[q1[i],q2[i],q3[i]]):
> t||i:=i*dt:
> od:
```

>

Transformando a solução em coordenadas reais

```
> for i from 1 by 1 to ndt do
> x||i:=multiply(phi,Q||i):
> od:
```

>

## Animation

### Components

Coloring functions: Great stress of a column is expressed by a darker color of the neighbouring ceilings:

```
> cfnc_r := x->-.29*x+0.15;
cfnc_b := x->.31*x+0.5;
> print(x2);
```

```

> op(x1);
>
> dtime*5;
> x2[1,1];
> unassign('xact');
> unassign('yact');
Calculating the position of the solutions on equidistant time intervals:
> for i from 1 to n do
  yact[i]:=3*(i-1);
  for j from 1 to numpict-1 do
    xact[i,j]:=evalm(x|(10*j)[i,1]);
  od;
od:
> dtime;
>
>
>
> for i from 1 to n do
  print(yact[i]);
  for j from 1 to 9 do
    print(xact[i,j]);
  od;
od:
> unassign('rel');
Calculating the relative displacement of two ceilings:
> for j from 1 to numpict-10 do
  for i from 2 to n-1 do
rel[i,j]:=max(abs(xact[i-1,j]-xact[i,j]),abs(xact[i+1,j]-
xact[i,j]));
  od;
  rel[1,j]:=abs(xact[1,j]);
  rel[n,j]:=abs(xact[n,j]-xact[n-1,j]);
od:
>
>
>
Axis of the building:
> ax:=line([0,-3],[0,3*n-1.5],linestyle=4,color=red);
Calculating the coordinates of the ground, groundline, the column deflection splines, the
antenna, the ceilings and of the windows, respectively:
> xpl:=1.1*Ubar[n,1]/Ubar[1,1]+5;
>
> for j from 1 to numpict-10 do

# ground:
P0:=[xpl+xact[1,j],0]: P1:=[-xpl+xact[1,j],0]:
P2:=[-xpl+xact[1,j],-1.5]: P3:=[xpl+xact[1,j],-1.5]:
ground[j]:=POLYGONS([P0,P1,P2,P3],STYLE(PATCHNOGRID));
groundline[j]:=line(P0,P1,thickness=2,color=black);

# column splines:

```

```

for i from 1 to n-1 do
  unassign('a','b','c','d');
  sols1:=
  solve({xact[i,j]=a*yact[i]^3+b*yact[i]^2+c*yact[i]+d,
xact[i+1,j]=a*(yact[i+1]-0.5)^3+b*(yact[i+1]-
0.5)^2+c*(yact[i+1]-
0.5)+d,0=3*a*yact[i]^2+2*b*yact[i]+c,0=3*a*(yact[i+1]-
0.5)^2+2*b*(yact[i+1]-0.5)+c},{a,b,c,d});
  assign(sols1);
  stplot[i,j]:=plot([a*y^3+b*y^2+c*y+d-
5,y,y=yact[i]..yact[i+1]-0.5],color=black,thickness=1),
plot([a*y^3+b*y^2+c*y+d-4.7,y,y=yact[i]..yact[i+1]-
0.5],color=black,thickness=1),
plot([a*y^3+b*y^2+c*y+d+5,y,y=yact[i]..yact[i+1]-
0.5],color=black,thickness=1),
plot([a*y^3+b*y^2+c*y+d+4.7,y,y=yact[i]..yact[i+1]-
0.5],color=black,thickness=1):
  od;

# antenna:
if (j+1)*dtime>=1.7 then
  antenna[j]:=line([xact[n,j]+4,yact[n]],
[xact[n,j]+4,yact[n]+0.65],thickness=2),
  line([xact[n,j]+3.1,yact[n]+0.55],
[xact[n,j]+4,yact[n]+0.65],thickness=2),
  line([xact[n,j]+3.6,yact[n]+0.1],
[xact[n,j]+4.1,yact[n]+1.1]),
  line([xact[n,j]+3.45,yact[n]+0.3],
[xact[n,j]+3.5,yact[n]+0.9]),
  line([xact[n,j]+3.2,yact[n]+0.1],
[xact[n,j]+3.0,yact[n]+1.1]);
else
  antenna[j]:=line([xact[n,j]+4,yact[n]],
[xact[n,j]+4,yact[n]+1.5],thickness=2),
  line([xact[n,j]+3.5,yact[n]+0.75],
[xact[n,j]+4.5,yact[n]+0.75]),
  line([xact[n,j]+3.7,yact[n]+1.125],
[xact[n,j]+4.3,yact[n]+1.125]),
  line([xact[n,j]+3.5,yact[n]+1.5],
[xact[n,j]+4.5,yact[n]+1.5]);
fi;

# ceilings, window:
for i from 1 to n do
  PLSt[i,j]:=POLYGONS([[xact[i,j]-5,yact[i]-0.5],
[xact[i,j]+5,yact[i]-0.5],[xact[i,j]+5,yact[i]], [xact[i,j]-
5,yact[i]]],COLOR(HUE,cfnc_b(rel[i,j])), THICKNESS(1));
  PLStw[i,j]:=seq(POLYGONS([[xact[i,j]+k*2.5-0.8,yact[i]-
0.75],
[xact[i,j]+2.5*k+0.8,yact[i]-0.75],
[xact[i-1,j]+2.5*k+0.8,yact[i]-1.95],

```

```

        [xact[i-1,j]+2.5*k-0.8,yact[i]-1.95]],
THICKNESS(2)), k=-1..1);
  # crack of window:
  if (j+1)*dtime>=1.7 then
    crk[i,j]:=seq(CURVES([
      [xact[i,j]+2.5*k+0.16,yact[i]-0.8], [xact[i,j]+2.5*k-
0.114,yact[i]-1.05],
      [xact[i,j]+2.5*k+0.2,yact[i]-0.93], [xact[i,j]+2.5*k-
0.2,yact[i]-1.35],
      [xact[i,j]+2.5*k+0.16,yact[i]-1.35], [xact[i,j]+2.5*k-
0.16,yact[i]-1.9]]), k=-1..1);
    else
      crk[i,j]:=NULL;
    fi
  od;
od:

```

### Display animation

```

> display([seq(display([
  ax, seq(PLSt[i,j],i=1..n), seq(PLStw[i,j],i=2..n),
seq(crk[i,j],i=2..n),
  seq(stplot[i,j],i=1..n-1), antenna[j], groundline[j],
ground[j])), j=1..numpict-10)],
  axes=none, scaling=constrained, insequence=true,
title=`Earthquake hitting Skyscraper`);

```

## Apêndice B . earthquakes\_hitting\_scrycrapers.mws - Programa desenvolvido em Maple para análise de edifício excitado por uma força do tipo $f(t)=\text{sen}(2\pi\omega t)$

Programa desenvolvido por Stol e Klaus e brevemente descrito no Capítulo

4.

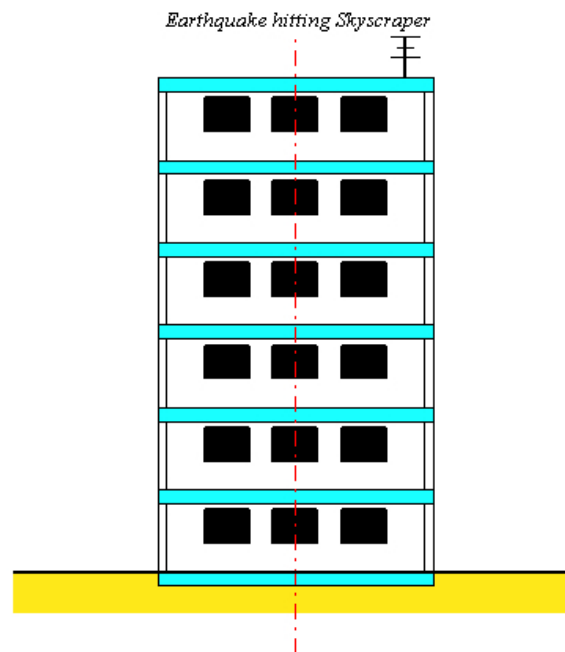


Figura B.1 Estrutura analisada no programa de Stol e Klaus

### Introduction

Consider the case of a skyscraper being affected by an earthquake. We assume that the ceilings of the floors are rigid and the corresponding columns have no mass, so that the vibration is just caused by inner elastic reaction forces of the columns. Further, we suppose that all ceilings have the same mass and are homogeneous.

```
> restart;
```

## Initialisation

### Loading of the packages

```
> with(linalg): with(plots): with(plottools):
```

### Setting the parameters

Number of floors:

```
> n:=7:
```

Number of single pictures in animation sequence:

```
> numpict:=40:
```

Period of time between two single pictures:

```
> dtime:=3.5/numpict:
```

### Earthquake function

The earthquake function is assumed to be a superposition of two sinus functions damped by an symmetric exponential function:

```
> eq:=t->0.6*exp(-1.3*(t-1.7)^2)*(0.3*sin(35*(t-1.7))+0.25*sin(130*t)):
plot(eq(t),t=0..3.5);
```

### Initial conditions

```
> iq:=vector(n,[eq(0),seq(0,i=1..n-1)]):
iqv:=vector(n,[D(eq)(0),seq(0,i=1..n-1)]):
```

## Description of the mechanical system

### Involved matrices

Mass matrix:

```
> M:=diag(seq(10^5,i=1..n)):
```

Stiffness matrix:

```
> S:=matrix(n,n,0):
```

```
S[n,n]:=10^7:
```

```
for i from 1 to n-1 do
```

```
  S[i,i]:=2*10^7; S[i,i+1]:=-10^7; S[i+1,i]:=-10^7;
```

```
od:
```

### Eigenvalues and Eigenvectors

Frequencies of the free vibrations:

```
> invM:=diag(seq(1/10^5,i=1..n)):
```

```
A:=evalm(invM*S):
```

```
lambda:=evalf(Eigenvals(A,vecs)):
```

```
omega:=sort([seq(abs(lambda[i])^(1/2),i=1..n)],`<`);
```

Modal matrix (matrix of Eigenvects):

```
> Ubar:=convert(vecs,matrix):
```

### Solution of the system of linear differential equations

Diagonalisation of the system and transformation of the initial conditions iq and iqv:

```

>
S_diag:=diag(seq(evalm(transpose(Ubar)*S*Ubar)[i,i],i=1..n))
:
q0:=evalm(inverse(Ubar)*iq):
q0v:=evalm(inverse(Ubar)*iqv):
Solution of the uncoupled linear dynamical system:
> sols:=evalf(value(dsolve({
    sum(Ubar[1,k]*q[k](t),k=1..n)=eq(t),

seq(diff(q[i](t),t$2)+(0.1+0.05*lambda[i])*diff(q[i](t),t)+lam
bda[i]*q[i](t)=0, i=2..n),
    seq(q[i](0)=q0[i], i=2..n),
    seq(D(q[i])(0)=q0v[i], i=2..n)}),
    {seq(q[i](t),i=1..n)})))
assign(sols):
Calculation of the motions x[i] of the i-th floors (i=1..n):
> x[1]:=eq(t):
for i from 2 to n do
    x[i]:=sum(Ubar[i,k]*q[k](t),k=1..n);
od:
Visualization of the n solutions x[i] (i=1..n):
> plot([seq(x[i],i=1..n)],t=0..3.5);

```

## Animation

### Components

Coloring functions: Great stress of a column is expressed by a darker color of the neighbouring ceilings:

```
> cfnc_r := x->-.29*x+0.15:
```

```
cfnc_b := x->.31*x+0.5:
```

Calculating the position of the solutions on equidistant time intervals:

```

> for i from 1 to n do
    yact[i]:=3*(i-1);
    for j from 0 to numpict-1 do
        xact[i,j]:=evalf(subs(t=dtime*j,x[i]));
    od;
od:

```

Calculating the relative displacement of two ceilings:

```

> for j from 0 to numpict-1 do
    for i from 2 to n-1 do
        rel[i,j]:=max(abs(xact[i-1,j]-xact[i,j]), abs(xact[i+1,j]-
xact[i,j]));
    od;
    rel[1,j]:=abs(xact[1,j]);
    rel[n,j]:=abs(xact[n,j]-xact[n-1,j]);
od:

```

Axis of the building:

```
> ax:=line([0,-3],[0,3*n-1.5],linestyle=4,color=red):
```

Calculating the coordinates of the ground, groundline, the column deflection splines, the antenna, the ceilings and of the windows, respectively:

```

> xpl:=1.1*Ubar[n,1]/Ubar[1,1]+5:

for j from 0 to numpict-1 do

  # ground:
  P0:=[xpl+xact[1,j],0]: P1:=[-xpl+xact[1,j],0]:
  P2:=[-xpl+xact[1,j],-1.5]: P3:=[xpl+xact[1,j],-1.5]:
  ground[j]:=POLYGONS([P0,P1,P2,P3],
COLOR(HUE,cfnc_r(rel[1,j])), STYLE(PATCHNOGRID));
  groundline[j]:=line(P0,P1,thickness=2,color=black);

  # column splines:
  for i from 1 to n-1 do
    unassign('a','b','c','d');
    sols1:=
    solve({xact[i,j]=a*yact[i]^3+b*yact[i]^2+c*yact[i]+d,
           xact[i+1,j]=a*(yact[i+1]-0.5)^3+b*(yact[i+1]-
0.5)^2+c*(yact[i+1]-0.5)+d,
           0=3*a*yact[i]^2+2*b*yact[i]+c,
           0=3*a*(yact[i+1]-0.5)^2+2*b*(yact[i+1]-
0.5)+c},{a,b,c,d});
    assign(sols1);
    stplot[i,j]:=plot([a*y^3+b*y^2+c*y+d-
5,y,y=yact[i]..yact[i+1]-0.5],color=black,thickness=1),
           plot([a*y^3+b*y^2+c*y+d-
4.7,y,y=yact[i]..yact[i+1]-0.5],color=black,thickness=1),

plot([a*y^3+b*y^2+c*y+d+5,y,y=yact[i]..yact[i+1]-
0.5],color=black,thickness=1),

plot([a*y^3+b*y^2+c*y+d+4.7,y,y=yact[i]..yact[i+1]-
0.5],color=black,thickness=1):
    od;

  # antenna:
  if (j+1)*dtime>=1.7 then
    antenna[j]:=line([xact[n,j]+4,yact[n]],
[xact[n,j]+4,yact[n]+0.65],thickness=2),
           line([xact[n,j]+3.1,yact[n]+0.55],
[xact[n,j]+4,yact[n]+0.65],thickness=2),
           line([xact[n,j]+3.6,yact[n]+0.1],
[xact[n,j]+4.1,yact[n]+1.1]),
           line([xact[n,j]+3.45,yact[n]+0.3],
[xact[n,j]+3.5,yact[n]+0.9]),
           line([xact[n,j]+3.2,yact[n]+0.1],
[xact[n,j]+3.0,yact[n]+1.1]);
  else
    antenna[j]:=line([xact[n,j]+4,yact[n]],
[xact[n,j]+4,yact[n]+1.5],thickness=2),
           line([xact[n,j]+3.5,yact[n]+0.75],
[xact[n,j]+4.5,yact[n]+0.75]),

```

```

        line([xact[n,j]+3.7,yact[n]+1.125],
[xact[n,j]+4.3,yact[n]+1.125]),
        line([xact[n,j]+3.5,yact[n]+1.5],
[xact[n,j]+4.5,yact[n]+1.5]);
    fi;

    # ceilings, window:
    for i from 1 to n do
        PLSt[i,j]:=POLYGONS([[xact[i,j]-5,yact[i]-0.5],
[xact[i,j]+5,yact[i]-0.5],
                                [xact[i,j]+5,yact[i]], [xact[i,j]-
5,yact[i]]],
                                COLOR(HUE,cfnc_b(rel[i,j])),
THICKNESS(1));
        PLStw[i,j]:=seq(POLYGONS([[xact[i,j]+k*2.5-0.8,yact[i]-
0.75],
                                [xact[i,j]+2.5*k+0.8,yact[i]-0.75],
                                [xact[i-1,j]+2.5*k+0.8,yact[i]-1.95],
                                [xact[i-1,j]+2.5*k-0.8,yact[i]-1.95]],
THICKNESS(2)), k=-1..1);
        # crack of window:
        if (j+1)*dtime>=1.7 then
            crk[i,j]:=seq(CURVES([
                [xact[i,j]+2.5*k+0.16,yact[i]-0.8], [xact[i,j]+2.5*k-
0.114,yact[i]-1.05],
                [xact[i,j]+2.5*k+0.2,yact[i]-0.93], [xact[i,j]+2.5*k-
0.2,yact[i]-1.35],
                [xact[i,j]+2.5*k+0.16,yact[i]-1.35], [xact[i,j]+2.5*k-
0.16,yact[i]-1.9]]), k=-1..1);
        else
            crk[i,j]:=NULL;
        fi
    od;
od:

```

### Display animation

```

> display([seq(display([
    ax, seq(PLSt[i,j],i=1..n), seq(PLStw[i,j],i=2..n),
seq(crk[i,j],i=2..n),
    seq(stplot[i,j],i=1..n-1), antenna[j], groundline[j],
ground[j])), j=0..numpict-1]),
    axes=none, scaling=constrained, insequence=true,
title=`Earthquake hitting Skyscraper`);

```

## Apêndice C – 3dOscillator.mws - Programa desenvolvido em Maple para análise de duas massas acopladas e excitada por uma onda de terremoto

Programa desenvolvido por Kammerer, apresentado no Capítulo 4

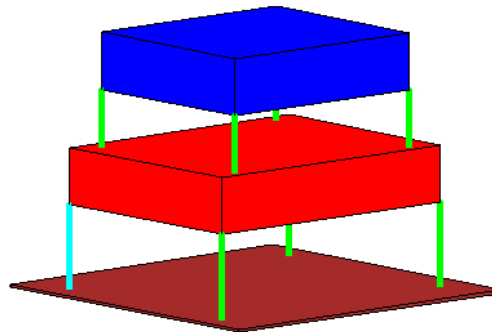


Figura C.1 Estrutura analisada no programa de Kammerer.

### Introduction

This worksheet shows the calculation of the motion of a system with 12 degrees of freedom excited by ground motion.

The following Maple techniques are highlighted:

- Developing a general model
- Reading in specific data from a file
- Calculation of system matrices
- Creating a 3D animation of the system
-

## Problem Description

Consider a system of two masses. Both masses are described by rectangular prisms. The support for the two masses are elastic. The ground motion is known and is stored in the file "motion.dat".

Note: The file "motion.dat" includes four columns. First the discrete time steps, second the values of the ground acceleration in x-direction, third in y-direction and fourth in z-direction.

### Contents

- 1) In the first section of the worksheet the mechanical system is described. All data points are in m, kg, N and sec.
- 2) In the second section, the system matrices are calculated. The stiffness matrix is calculated according [1].
- 3) In section three, the eigenvalue problem is solved and the modal matrix is calculated.
- 4) In section four, the time history of the system movement is calculated numerically. The NEWMARK-algorithm is used to solve the incremental equations of motion [2].
- 5) In the last section, the solutions are displayed. First, the eigenvalues and eigenmodes are listed. Then the time history of the motion in every direction relative to the ground are plotted. Finally, the system motion is illustrated in the form of a small animation (which is duplicated at the top of this worksheet).

The lower mass and the lower spring in general are described by the index "u", the upper ones by the index "o".

The coordinates 1, 2 and 3 are the translation of the lower mass in x-, y- and z-direction, 4, 5 and 6 the corresponding rotations. The coordinates 7, 8 and 9 are the translations of the upper mass, 10, 11 and 12 the rotations.

## Initialization

```
> restart:
interface( warnlevel = 0 ):
with( LinearAlgebra ):
with( plots ):
with( plottools ):
with( VectorCalculus ):
```

## Description of the Mechanical Model

### Dimensions of the Bodies

x-direction:  $l_u$ ;  $l_o$  [m]  
 y-direction:  $b_u$ ;  $b_o$  [m]  
 z-direction:  $h_u$ ;  $h_o$  [m]  
 mass:  $m_u, m_o$  [kg]

### *lower mass*

```
> l_u:=10.0:b_u:=8.0:h_u:=2.0:
> m_u:=1000000:
```

End points of the diagonal

```
> ENDu1:=[-lu/2,-bu/2,-hu/2]:
> ENDu2:=[lu/2,bu/2,hu/2]:
```

### ***upper mass***

```
> lo:=8.0:bo:=7.0:ho:=2.0:
> mo:=100000:
End points of the diagonal
> ENDo1:=[-lo/2,-bo/2,-ho/2]:
> ENDo2:=[lo/2,bo/2,ho/2]:
```

### ***distance between the centers of gravity***

this is necessary to know for the animation later

```
> DSuo:=[0,0,ho+hu]:
```

## **General Spring Characteristics**

The general characteristics in the horizontal and vertical direction for the lower and the upper springs are given.

This general data can be modified in the following subsection for each individual spring.

coh/cuh: stiffness of the upper/lower spring in horizontal direction [N/m]

cov/cuv: stiffness of the upper/lower spring in vertical direction [N/m]

### ***lower springs***

```
> coh:=5.0*10**6: cuv:=5.0*10**6:
```

### ***upper springs***

```
> coh:=1.0*10**6: cov:=1.0*10**6:
```

## **Position of the Bodies Supporting Springs and their Individual Characteristics**

all positions in metres (m), the stiffness of the individual springs can be manipulated in the following (see e.g. 1. spring of lower mass)

### ***lower mass***

a[ i, j ]: position of the lower spring i in direction j

cu[ i, j ]: stiffness of the lower spring i in direction j

#### ***Spring 1***

Note: The stiffness are varied from the general stiffness defined previously.

```
> a[1,x] := -lu/2: a[1,y] := -bu/2: a[1,z]:=-hu/2:
```

```
cu[1,x] := cuh*0.9: cu[1,y] := cuh*0.85: cu[1,z] := cuv*0.8:
```

### *Spring 2*

Notice that we assume the stiffness (in the z direction) of this spring is significantly different from that of the others. This could be caused by damage to the spring.

```
> a[2,x] := lu/2: a[2,y] := -bu/2: a[2,z]:=-hu/2:
cu[2,x] := cuh: cu[2,y] := cuh: cu[2,z] := cuv/10:
```

### *Spring 3*

```
> a[3,x] := lu/2: a[3,y] := bu/2: a[3,z]:=-hu/2:
cu[3,x] := cuh: cu[3,y] := cuh: cu[3,z] := cuv:
```

### *Spring 4*

```
> a[4,x] := -lu/2: a[4,y] := bu/2: a[4,z]:=-hu/2:
cu[4,x] := cuh: cu[4,y] := cuh: cu[4,z] := cuv:
```

### *Overall Parameters*

Here, we will display the two sets of parameters in matrix form

```
> a = Matrix( [seq( [seq(a[j,i],i in [x,y,z])], j=1..4 ) ] );
> cu = Matrix( [seq( [seq(cu[j,i],i in [x,y,z])], j=1..4 ) ] );
```

### ***upper mass***

b[ i, j ]: position of the upper spring i in direction j  
 co[ i, j ]: position of the upper spring i in direction j  
 bzq||i: z position of the lower mass support

### *Spring 1*

Notice that the upper springs here need additional information on the position of the lower mass support.

```
> b[1,x] := -lo/2: b[1,y] := -bo/2: b[1,z] := -ho/2:
bzq1:=hu/2:
co[1,x] := coh: co[1,y] := coh: co[1,z] := cov:
```

### *Spring 2*

```
> b[2,x] := lo/2: b[2,y] := -bo/2: b[2,z] := -ho/2:
bzq2:=hu/2:
co[2,x] := coh: co[2,y] := coh: co[2,z] := cov:
```

### *Spring 3*

```
> b[3,x] := lo/2: b[3,y] := bo/2: b[3,z] := -ho/2:
bzq3:=hu/2:
co[3,x] := coh: co[3,y] := coh: co[3,z] := cov:
```

### Spring 4

```
> b[4,x] := -lo/2: b[4,y] := bo/2: b[4,z] := -ho/2:
bzq4:=hu/2:
co[4,x] := coh: co[4,y] := coh: co[4,z] := cov:
```

#### Overall Parameters

Here, we will display the two sets of parameters in matrix form

```
> b = Matrix( [seq( [seq(b[j,i],i in [x,y,z])], j=1..4 )] );
> co = Matrix( [seq( [seq(co[j,i],i in [x,y,z])], j=1..4 )] );
```

## Calculate the System Matrices

### System Stiffness

#### *deformation of the lower springs*

Here, we describe the deformation of the lower springs in terms of the position and orientation of the lower body.

$q_1, q_2, \dots, q_6$  are the degrees of freedom ( $q_1, q_2, q_3$  being the linear motion in  $x, y, z$  direction respectively and  $q_4, q_5$  and  $q_6$  being the rotation about the  $x, y, z$  axis) of the lower body.

$u_1, u_2$  and  $u_3$  are the spring displacement in the  $x, y$  and  $z$  direction respectively.

```
> u1:=q1 +akz*q5 -aky*q6:
u2:=q2 -akz*q4 +akx*q6:
u3:=q3 +aky*q4 -akx*q5:
> uq1:=expand(simplify(u1^2));
uq2:=expand(simplify(u2^2));
uq3:=expand(simplify(u3^2));
```

#### *deformation of the upper springs*

For the upper springs, the deformation is described in terms of the position and orientation of the upper and lower body.

$p_1, p_2, \dots, p_6$  are the degrees of freedom of the upper body (similar to the  $q$  defined for the lower body).

$o_1, o_2$  and  $o_3$  are the spring displacement in the  $x, y,$  and  $z$  direction respectively.

```
> o1:=-q1 -bqkz*q5 +bky*q6 +p1 +bkz*p5 -bky*p6:
o2:=-q2 +bqkz*q4 -bkx*q6 +p2 -bkz*p4 +bkx*p6:
o3:=-q3 -bky*q4 +bkx*q5 +p3 +bky*p4 -bkx*p5:
> oq1:=expand(simplify(o1^2));
oq2:=expand(simplify(o2^2));
```

```
oq3:=expand(simplify(o3^2));
```

### ***general form of stiffness matrix for individual spring directions***

Using the above deformation equations, we can extract the general form of the spring stiffness components for each direction from the potential energy according to [1]

cu1, cu2, cu3: 12 x 12 stiffness matrices for the lower springs in x, y, and z direction respectively.

co1, co2, co3: 12 x 12 stiffness matrices for the upper springs in x, y, and z direction respectively.

```
> xlist:= [seq(q||i,i=1..6),seq(p||i,i=1..6)]:
x2list:= [seq(xlist[i]^2,i=1..nops(xlist))]:
> for k from 1 to 3 do
  cu||k := evalm( DiagonalMatrix( [ seq( coeff( uq||k,
x2list[i] ), i=1..12 ) ] ) +
                (Matrix( [ seq( [seq( coeff( coeff(
uq||k, xlist[i] ), xlist[j] ),
                                j=1..12 )],
                                i=1..12 )
                ] )
                )/2
  ):
  co||k := evalm( DiagonalMatrix( [ seq( coeff( oq||k,
x2list[i] ), i=1..12 ) ] ) +
                (Matrix( [ seq( [seq( coeff( coeff(
oq||k, xlist[i] ), xlist[j] ),
                                j=1..12 )],
                                i=1..12 )
                ] )
                )/2
  ):
end do:
```

### ***stiffness matrix for every spring in every direction***

With the above general form of the stiffness matrices in the x, y, and z direction, we can generate the stiffness matrix associated with each spring by substituting the parameters corresponding to each of the springs.

The follow index notion are used for the resulting table of stiffness matrices:

first index: 1, 2, 3 and 4 for lower springs; 5, 6, 7 and 8 for upper springs,  
second index: for direction x, y and z

```
> for s_index from 1 to 4 do
  n := 1;
  for d_index in [x,y,z] do
    k[s_index,d_index] := cu[s_index,d_index].
```

```

                                Matrix(eval( cu||n,
                                                { seq( ak||i=a[s_index,i], i
in {x,y,z} ),
                                                seq( bk||i=b[s_index,i], i
in {x,y,z} ),
                                                bqkz=bzq||s_index } )):
    k[s_index+4,d_index] := co[s_index,d_index].
                                Matrix(eval( co||n,
                                                { seq( ak||i=a[s_index,i],
in {x,y,z} ),
                                                seq( bk||i=b[s_index,i],
in {x,y,z} ),
                                                bqkz=bzq||s_index } )):
    n := n+1;
    end do:
end do:

```

### ***overall stiffness matrix***

Finally, to get the overall system stiffness matrix, we add up all of the individual stiffness matrices.

```

> K := Matrix( 12, 12, 0 ):
for i from 1 to 8 do
    K := evalm(K + k[i,x]+k[i,y]+k[i,z])
end do:

```

## **System Mass**

### ***matrix of one body***

To obtain the system mass matrix, we first define the mass matrix for one body.

```

> Mr := DiagonalMatrix( [m, m, m, m/12*(b^2+h^2),
m/12*(l^2+h^2), m/12*(l^2+b^2)] );

```

### ***general mass matrix***

Then we combine them to get the overall system mass matrix.

```

> M1:=evalm(subs({m=mu,l=lu,b=bu,h=hu},evalm(Mr))):
> M2:=evalm(subs({m=mo,l=lo,b=bo,h=ho},evalm(Mr))):
> M:=DiagonalMatrix( [M1,=-0-] );

```

## **System Matrix**

Finally, the system matrix is the product of the inverse of the mass matrix and the system stiffness matrix.

```
> SM:=convert(evalm(MatrixInverse(M).K), Matrix);
```

## Eigenvalue Problem Solution

With the system matrix, we can now look at the eigenvalue problem.

### Eigenvalues and Eigenmodes

First, we compute the eigenvalues and eigenvectors of the system matrix using the Eigenvectors procedure from the LinearAlgebra package.

```
> lambda, vecs := Eigenvectors(SM):
```

Here, we split the eigenvector matrix into individual vectors so that we can sort them based on the associated eigenvalues.

```
> for i from 1 by 1 to 12 do
  v||i := SubMatrix(vecs, [1..12], [i]);
end do:
```

Sorting with respect to eigenvalues:

```
> lstsrt := sort( [ seq( lambda[i], i=1..12 ) ] ):
> for i from 1 by 1 to 12 do
  for j from 1 by 1 to 12 do
    if (lstsrt[i]=lambda[j]) then
      num[i]:=j:
      if (i>1 and num[i]<>num[i-1]) then j:=12 fi:
    fi:
  end do:
end do:
> for i from 1 by 1 to 12 do
  ev||i:=(v||(num[i]));
end do:
> ew:=Vector([ seq( lstsrt[i],i=1..12) ]):evalm(%);
```

### Eigenfrequencies

We can also extract the eigenfrequencies from the eigenvalues.

```
> omega := [ seq( sqrt( ew[i] ), i=1..12 ) ]:
> f := [ seq( evalf(omega[i]/(2*Pi)), i=1..12 ) ]:
```

## Modal Matrix

We obtain the modal matrix by normalizing the eigenvectors.

```
> for i from 1 to 12 do
  phi||i := Normalize( convert(ev||i[1..12, 1], Vector) );
end do:
phi := Matrix( [ seq( phi||i, i=1..12 ) ] );
> phit:=Transpose(phi);
```

## Modal Mass and Modal Stiffness

```
> Ms:=phit.M.phi:
Ms := DiagonalMatrix( [ seq( Ms[i,i], i=1..12 ) ] );
> Ks:=phit.K.phi:
Ks := DiagonalMatrix( [ seq( Ks[i,i], i=1..12 ) ] );
```

## Numeric Solution of the Equation of Motion

Here, we will obtain the numeric solution to the equation of motion using the NEWMARK algorithm [2]

### Time-History of the Ground Motion

#### *Reading in data from file*

First, we will read in the ground motion from the data file motion.dat.

Recall that the data is listed in 4 columns:

1. time, 2. x-acceleration, 3. y-acceleration, 4. z-acceleration

```
> loaddat:=readdata("motion.dat",4):
```

Extract the time step from the data

```
> dt:=loaddat[4][1]-loaddat[3][1];
```

Getting the number of samples

```
> ndt:=nops(loaddat);
```

Setting the total time

```
> maxT:=(ndt-1)*dt;
```

Setting up the discrete time variables for use later.

```
> for i from 0 by 1 to ndt do t||i:=i*dt end do:
```

Assigning the direction data into separate variables.

```
> a0x := [seq( loaddat[i][2], i=1..ndt)]:
a0y := [seq( loaddat[i][3], i=1..ndt)]:
```

```
a0z := [seq( loaddat[i][4], i=1..ndt)]:
```

For the animation later, the ground acceleration is numerically integrated twice to get the ground displacement. For the numeric integration, it is assumed that the acceleration between two discrete time steps is linear. Additionally, we assume that the velocities and the displacement at the beginning of the time period is zero.

```
> v0x := Vector[column]( ndt, 0 ):
v0y := Vector[column]( ndt, 0 ):
v0z := Vector[column]( ndt, 0 ):
> x0x := Vector[column]( ndt, 0 ):
x0y := Vector[column]( ndt, 0 ):
x0z := Vector[column]( ndt, 0 ):
> for j from 2 by 1 to ndt do
  for i in [x,y,z] do
    v0[i[j]]:=v0[i[j-1]]+(a0[i[j]]+a0[i[j-1]])*dt/2;
    x0[i[j]]:=x0[i[j-1]]+(v0[i[j]]+v0[i[j-1]])*dt/2;
  end do:
end do:
```

### ***Plotting the input data***

Setting up the line colour.

```
> clax:=red:clay:=blue:claz:=green:
Ground Acceleration
x - direction
> SSax:=[seq([t|j,a0x[j]],j=1..ndt)]:
Pax:=curve(SSax,color=clax):
y - direction
> SSay:=[seq([t|j,a0y[j]],j=1..ndt)]:
Pay:=curve(SSay,color=clay):
z-direction
> SSaz:=[seq([t|j,a0z[j]],j=1..ndt)]:
Paz:=curve(SSaz,color=claz):
Ground Displacement
x - direction
> SSdx:=[seq([t|j,x0x[j]],j=1..ndt)]:
Pdx:=curve(SSdx,color=clax):
y - direction
> SSdy:=[seq([t|j,x0y[j]],j=1..ndt)]:
Pdy:=curve(SSdy,color=clay):
z - direction
> SSdz:=[seq([t|j,x0z[j]],j=1..ndt)]:
Pdz:=curve(SSdz,color=claz):
Plots
Accelerations
> display({Pax,Pay,Paz},title="Ground Acceleration, red: x;
blue: y; green: z");
Displacement
> display({Pdx,Pdy,Pdz},title="Ground Displacement, red: x;
blue: y; green: z");
```

## Computing the ground forces from the ground motion

We will transform the ground motion into the substitute force, assuming no ground rotations, using  $F = ma$ .

```
> for i from 1 by 1 to ndt do
  a0vec||i := Vector(12, 0);
  a0vec||i[1]:=a0x[i];a0vec||i[7]:=a0x[i];
  a0vec||i[2]:=a0y[i];a0vec||i[8]:=a0y[i];
  a0vec||i[3]:=a0z[i];a0vec||i[9]:=a0z[i];
end do:
> for i from 1 by 1 to ndt do
  F||i:=- (M.a0vec||i);
end do:
```

Transform the Substitute Force into Modal Coordinates

```
> for i from 1 by 1 to ndt do
  Fs||i:=phit.F||i;
end do:
```

## NEWMARK-Algorithm

Now, apply the NEWMARK algorithm

First, setup the NEWMARK-constants

```
> alpha:=0.25:delta:=0.5:
```

Then, we compute the modified mass matrix

```
> Mn:=Ms+(Ks*alpha*dt^2);
```

Next initialize the vectors.

```
> RS||1 := Vector[column]( 12, 0 );
```

```
Q||1 := Vector[column]( 12, 0 );
```

```
Qp||1 := Vector[column]( 12, 0 );
```

```
Qpp||1 := Vector[column]( 12, 0 );
```

Then compute the output one step at a time.

```
> for i from 2 by 1 to ndt do
```

```
  RS||i := Vector[column]( [ seq( Fs||i[j] - Ks[ j, j ] * (
Q||(i-1)[j] +
```

```
Qp||(i-1)[j]*dt +
```

```
Qpp||(i-1)[j]*(1/2-alpha)*dt^2 ),
```

```
      j=1..12 ) ] );
```

```
  Qpp||i := Vector[column]( [ seq( RS||i[j]/Mn[j,j], j=1..12
) ] );
```

```
  Qp||i := Vector[column]( [ seq( Qp||(i-1)[j] +
dt*( Qpp||(i-1)[j]*(1-
delta) + Qpp||i[j]*delta ),
```

```
      j=1..12 ) ] );
```

```

    Q||i := Vector[column]( [ seq( Q||(i-1)[j] + dt*Qp||(i-
1)[j] +
                                dt^2*( Qpp||(i-1)[j]*(1/2-
alpha) + Qpp||i[j]*alpha ),
                                j=1..12 ) ] ):
end do:

```

Finally, we can transform the solution into back real coordinates

```

> for i from 1 by 1 to ndt do
    X||i := map( Re, (phi.Q||i) );
end do:

```

## Viewing the Solution

### Eigenmodes

The modes are shown numerically.

```

> for i from 1 by 1 to 12 do
    print(i, 'Eigenvalue');
    f[i];
    print(i, 'Eigenmode');
    evalm(ev||i);
    print('xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx')
end do;

```

### Graphical View of the Time History of the Motion

#### Translations

*x* - direction (relative to ground motion)

Setup the data points.

```

> SSXu:=[seq([t||j, (X||j[1])], j=1..ndt)]:
SSXo:=[seq([t||j, (X||j[7])], j=1..ndt)]:

```

Setup the plot.

```

> PXu:=curve(SSXu,color=red):
PXo:=curve(SSXo,color=blue):
> display({PXu,PXo},title="x-Translation, (red: lower, blue:
upper)");

```

*y* - direction (relative to ground motion)

Setup the data points.

```

> SSYu:=[seq([t||j, (X||j[2])], j=1..ndt)]:
SSYo:=[seq([t||j, (X||j[8])], j=1..ndt)]:

```

Setup the plot.

```

> PYu:=curve(SSYu,color=red):
PYo:=curve(SSYo,color=blue):

```

```
> display({PYu,PYo},title="y-Translation, (red: lower, blue:
upper)");
```

*z -direction (relative to ground motion)*

Setup the data points.

```
> SSZu:=[seq([t||j,(X||j[3])],j=1..ndt)]:
SSZo:=[seq([t||j,(X||j[9])],j=1..ndt)]:
```

Setup the plot.

```
> PZu:=curve(SSZu,color=red):
PZo:=curve(SSZo,color=blue):
> display({PZu,PZo},title="z-Translation, (red: lower, blue:
upper)");
```

## **Rotations**

*Rotation about x*

Setup data points.

```
> SRXu:=[seq([t||j,(X||j[4])],j=1..ndt)]:
SRXo:=[seq([t||j,(X||j[10])],j=1..ndt)]:
```

Setup the plot.

```
> RXu:=curve(SRXu,color=red):
RXo:=curve(SRXo,color=blue):
> display({RXu,RXo},title="x-Rotation, (red: lower, blue:
upper)");
```

*Rotation about y*

Setup data points.

```
> SRYu:=[seq([t||j,(X||j[5])],j=1..ndt)]:
SRYo:=[seq([t||j,(X||j[11])],j=1..ndt)]:
```

Setup the plot.

```
> RYu:=curve(SRYu,color=red):
RYo:=curve(SRYo,color=blue):
> display({RYu,RYo},title="y-Rotation, (red: lower, blue:
upper)");
```

*Rotation about z*

Setup data points.

```
> SRZu:=[seq([t||j,(X||j[6])],j=1..ndt)]:
SRZo:=[seq([t||j,(X||j[12])],j=1..ndt)]:
```

Setup the plot.

```
> RZu:=curve(SRZu,color=red):
RZo:=curve(SRZo,color=blue):
> display({RZu,RZo},title="z-Rotation, (red: lower, blue:
upper)");
```

## Animation

To reduce execution time, only some time steps are used for the animation. If you have a fast machine, you can increase this number.

```
> nmx:=50:
```

Setting the number of plots used for the animation.

```
> if (ndt>nmx) then nplot:=nmx else nplot:=ndt fi:
```

Animation stepsize

```
> ds:=round(ndt/nplot);
```

Maximal motion

```
> maxm := max( seq( seq( (X||j[i]),i=1..12 ), j=1..ndt ) );
```

Calculate the normalization factor of the motion for the animation (using the Maximal motion magnitude).

```
> nor:=DSuo[3]/(maxm)/10:
```

### **Setting up the basic elements**

*Nominal ground plate location*

```
> GROUND := translate( display( cuboid( [ -(max(lu,lo)/2+1),
                                         -(max(lu,lo)/2+1),
                                         -(max(lu,lo)/2+1)/100
],
                                         [ (max(lu,lo)/2+1),
                                         (max(lu,lo)/2+1),
                                         (max(lu,lo)/2+1)/100
],
                                         color=brown)),0,0,-DSuo[3]):
```

*Nominal Diagonal Points for each prism at each animation time*

```
> iplot:=0:
> for j from 1 by ds to ndt do
  # Animation index
  iplot:=iplot+1:
  i:=iplot:
  # Ground Motion
  xg[i]:=x0x[j]: yg[i]:=x0y[j]: zg[i]:=x0z[j]:
  # Cuboids rotation
  rotu||i := sqrt( (X||j[4])^2 + (X||j[5])^2 + (X||j[6])^2 )
* nor:
```

```

    roto||i := sqrt( (X||j[10])^2 + (X||j[11])^2 + (X||j[12])^2
) * nor:
    diru||i := [ (X||j[4]), (X||j[5]), (X||j[6]) ];
    diro||i := [ (X||j[10]), (X||j[11]), (X||j[12]) ];
    # Diagonal end points position of the cuboids
    ENDu1t||i := [ ENDu1[1] + ( (X||j[1])+xg[i] ) * nor,
                  ENDu1[2] + ( (X||j[2])+yg[i] ) * nor,
                  ENDu1[3] + ( (X||j[3])+zg[i] ) * nor ];
    ENDu2t||i := [ ENDu2[1] + ( (X||j[1])+xg[i] ) * nor,
                  ENDu2[2] + ( (X||j[2])+yg[i] ) * nor,
                  ENDu2[3] + ( (X||j[3])+zg[i] ) * nor ];
    ENDo1t||i := [ ENDo1[1] + ( (X||j[7])+xg[i] ) * nor,
                  ENDo1[2] + ( (X||j[8])+yg[i] ) * nor,
                  ENDo1[3] + ( (X||j[9])+zg[i] ) * nor ];
    ENDo2t||i := [ ENDo2[1] + ( (X||j[7])+xg[i] ) * nor,
                  ENDo2[2] + ( (X||j[8])+yg[i] ) * nor,
                  ENDo2[3] + ( (X||j[9])+zg[i] ) * nor ];
end do:

```

Creating the plot objects.

```

> for j from 1 by 1 to nplot do
    CUBuc[j] := cuboid( ENDu1t||j, ENDu2t||j, color=red ):
    CUBoc[j] := cuboid( ENDo1t||j, ENDo2t||j, color=blue ):
end do:

```

## ***Translate and Rotation the basic elements***

### *Ground and the Cuboids*

Create the plots of the translated cuboids and the ground.

The plot of the upper cuboid must be translated by the constant distance between both bodies in the initial position, because all motions are calculated with respect of the bodies' center of gravity. Finally, the cuboids are rotated around the rotation vectors.

```

> G[1]:=GROUND:
> CUBu[1]:=CUBuc[1]:
CUBo[1]:=translate( CUBoc[1], DSuo[1], DSuo[2], DSuo[3] ):
> for j from 2 by 1 to nplot do
    G[j] := translate( GROUND, xg[j]*nor, yg[j]*nor, zg[j]*nor
):
    CUBu[j] := rotate( CUBuc[j], rotu||j, [ [0,0,0], diru||j ]
):
    CUBo[j] := translate( rotate( CUBoc[j], roto||j,
[[0,0,0],diro||j] ),
                        DSuo[1],DSuo[2],DSuo[3]):
end do:

```

### *Spring Connection Positions*

Next, we calculate the spring connections between the cuboids. We use the spring deformation relationships derived above in the calculation.

```

> iplot:=0:
> for j from 1 by ds to ndt do
  iplot:=iplot+1:
  i:=iplot:
  # Ground and lower spring connections
  FSgx||i := [ seq( x0x[j]*nor + a[n,x], n=1..4 ) ]:
  FSgy||i := [ seq( x0y[j]*nor + a[n,y], n=1..4 ) ]:
  FSgz||i := [ seq( x0z[j]*nor - DSuo[3], n=1..4 ) ]:
  # Lower spring and lower cuboid connections
  FSux||i := [ seq( eval( Re((u1+x0x[j])*nor+a[p,x]), { seq(
q||n=X||j[n], n=1..6 ),
                                                                    seq(
ak||n=a[p,n], n in {x,y,z} ) } ),
                                                                    p=1..4 ) ]:
  FSuy||i := [ seq( eval( Re((u2+x0y[j])*nor+a[p,y]), { seq(
q||n=X||j[n], n=1..6 ),
                                                                    seq(
ak||n=a[p,n], n in {x,y,z} ) } ),
                                                                    p=1..4 ) ]:
  FSuz||i := [ seq( eval( Re((u3+x0z[j])*nor+a[p,z]), { seq(
q||n=X||j[n], n=1..6 ),
                                                                    seq(
ak||n=a[p,n], n in [x,y,z] ) } ),
                                                                    p=1..4 ) ]:
  # Lower cuboid and upper spring connections
  FTux||i := [ seq( eval( Re((u1+x0x[j])*nor+b[p,x]), { seq(
q||n=X||j[n], n=1..6 ),
                                                                    seq(
ak||n=a[p,n], n in [x,y] ),
akz=bzq||p } ),
                                                                    p=1..4 ) ]:
  FTuy||i := [ seq( eval( Re((u2+x0y[j])*nor+b[p,y]), { seq(
q||n=X||j[n], n=1..6 ),
                                                                    seq(
ak||n=a[p,n], n in [x,y] ),
akz=bzq||p } ),
                                                                    p=1..4 ) ]:
  FTuz||i := [ seq( eval( Re((u3+x0z[j])*nor+bzq||p), { seq(
q||n=X||j[n], n=1..6 ),
                                                                    seq(
ak||n=a[p,n], n in [x,y] ),
akz=bzq||p } ),
                                                                    p=1..4 ) ]:
  # Upper spring and upper cuboid connections
  FSox||i := [ seq( eval( Re((u1+x0x[j])*nor+b[p,x]+DSuo[1]),
{ seq( q||n=X||j[n+6], n=1..6 ),
seq( ak||n=b[p,n], n in [x,y,z] )

```

```

} ),
      p=1..4 ) ]:
  FSoy||i := [ seq( eval( Re((u2+x0y[j])*nor+b[p,y]+DSuo[2])),
{ seq( q||n=X||j[n+6], n=1..6 ) },
seq( ak||n=b[p,n], n in [x,y,z] )
} ),
      p=1..4 ) ]:
  FSoz||i := [ seq( eval( Re((u3+x0z[j])*nor+b[p,z]+DSuo[3])),
{ seq( q||n=X||j[n+6], n=1..6 ) },
seq( ak||n=b[p,n], n in [x,y,z] )
} ),
      p=1..4 ) ]:
end do:

```

### ***Connecting the Bodies***

```

> for j from 1 by 1 to nplot do
  SU[j] :=
line([FSgx||j[1],FSgy||j[1],FSgz||j[1]],[FSux||j[1],FSuy||j[1]
,FSuz||j[1]],color=green,thickness=3),

line([FSgx||j[2],FSgy||j[2],FSgz||j[2]],[FSux||j[2],FSuy||j[2]
,FSuz||j[2]],color=cyan,thickness=3),

line([FSgx||j[3],FSgy||j[3],FSgz||j[3]],[FSux||j[3],FSuy||j[3]
,FSuz||j[3]],color=green,thickness=3),

line([FSgx||j[4],FSgy||j[4],FSgz||j[4]],[FSux||j[4],FSuy||j[4]
,FSuz||j[4]],color=green,thickness=3);
  SO[j] :=
line([FSox||j[1],FSoy||j[1],FSoz||j[1]],[FTux||j[1],FTuy||j[1]
,FTuz||j[1]],color=green,thickness=3),

line([FSox||j[2],FSoy||j[2],FSoz||j[2]],[FTux||j[2],FTuy||j[2]
,FTuz||j[2]],color=green,thickness=3),

line([FSox||j[3],FSoy||j[3],FSoz||j[3]],[FTux||j[3],FTuy||j[3]
,FTuz||j[3]],color=green,thickness=3),

line([FSox||j[4],FSoy||j[4],FSoz||j[4]],[FTux||j[4],FTuy||j[4]
,FTuz||j[4]],color=green,thickness=3);
end do:

```

### ***Displaying the Animation***

```
>  
ANIM:=seq(display({CUBu[j],CUBo[j],G[j],SU[j],SO[j]}),j=1..nplot):  
>  
>  
display(ANIM,insequence=true,style=patch,scaling=constrained,axes=none,orientation=[50,80]);  
>
```

## Apêndice D – wavelet.m - Programa desenvolvido em Matlab para o cálculo da transformada wavelet da estrutura analisada.

```

load mov.mat;
sf = 64.1026;
N = 1500; %
wave = 'Db5'; % Tipo de Wavelet utilizada

t = time; % tempo
f = ( (0:(N-1))/N) * sf; % frequências
half = 1:(N/20);

% Série

x = x1;

fx = abs(fft(x));
plot(t,x);
xlabel('Tempo (s)');
title('Deslocamento');
pause;

figure;

stem(f(half),fx(half),'Color','r');
xlabel('frequência');
title('Frequência');

pause;

factor = 5/(2*pi);

freq = [0.1:0.2:5];
scale = factor * sf ./ freq;

figure;
coef=cwt(x, scale, wave, 'plot');
colormap(jet(104));
title('Escalograma');
%orient landscape;
%print -depsc fig7d.eps;
pause;

% make a "spectrogram" type plot
figure;
imagesc(t, freq, coef) ;
colormap(jet)
axis('xy'); % flip the vertical axis over

```

```
xlabel('tempo');  
ylabel('frequência');  
  
title('Escalograma');  
%orient landscape;  
%print -depsc fig7e.eps;  
pause;
```