

IFT

Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

167

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.009/00

OK

**Espaço de Fase Quântico Discreto:  
Considerações Gerais e Evolução Temporal**

Maurizio Ruzzi

Orientador

*Diógenes Galetti*



Outubro de 2000

---

## Agradecimentos

- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, **FAPESP**;
- Aos funcionários do Instituto de Física Teórica;
- O Leonardo atrapalhou e ajudou; O Cristiano só atrapalhou;
- À Schumacher por trazer o título de volta a Maranello;
- À enorme paciência do Galetti, que com certeza precisou de toda a que tinha disponível;
- Ao *Rock and Roll*;
- E a minha mulher e minha filha.

## Resumo

O formalismo de espaço de fase quântico discreto é discutido em detalhe, onde é dada especial atenção a uma particular base no espaço de operadores. As propriedades desta base e a obtenção de um parênteses discreto, em conjunto com a discussão do limite para o contínuo – onde recupera-se o formalismo de Weyl-Wigner –, são seguidas da análise da evolução temporal governada pela equação de von Neumann-Liouville. Como consequência de algumas propriedades observadas na análise desta última, é introduzido um operador intervalo de tempo, e finalmente é apresentada uma aplicação do formalismo numa situação com conteúdo físico conhecido.

## Abstract

The discrete quantum phase space formalism is presented, and a given basis in operator space is considered in detail. The properties of this basis and the obtention of a discrete bracket, together with the discussion of the continuum limit – where the Weyl-Wigner formalism is recovered – are followed by the analysis of the time evolution governed by the von Neumann-Liouville equation. As a consequence of some properties then observed, a Time Interval Operator is introduced, and finally an application of the formalism to a known physical situation is presented.

**Keywords:** Mecânica Quântica; Espaço de Fase; Discreto

**Áreas do conhecimento:** 1050102-9; 1050400-1

**PACS:** 03.65.-w, 03.65.Bz, 03.65.Ca

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Espaço de fase quântico discreto</b>	<b>13</b>
2.1	Base no espaço de operadores . . . . .	13
2.2	A base de Schwinger . . . . .	14
2.3	Base de coordenadas e momentos no espaço de fase discreto . . . . .	17
2.4	Limite para o caso contínuo . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Evolução temporal de von Neumann-Liouville no espaço de fase</b>	<b>29</b>
3.1	Solução da equação de von Neumann-Liouville . . . . .	30
3.2	Sistemas de Spin . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Operador Intervalo de Tempo</b>	<b>39</b>
4.1	Evolução temporal como uma translação sobre sítios . . . . .	39
4.2	Operador Intervalo de Tempo . . . . .	46
4.2.1	O Comutador $[H,T]$ . . . . .	48
4.3	Relógio Quântico . . . . .	49
4.4	Algumas propriedades adicionais . . . . .	50
4.5	Análise e conclusões quanto ao operador intervalo de tempo. . . . .	52
<b>5</b>	<b>Aplicação: Dinâmica do modelo de Lipkin</b>	<b>54</b>
5.1	Descrição de espaço de fase discreto . . . . .	56

5.2	Evolução temporal . . . . .	58
5.2.1	Função de Wigner inicial localizada em ângulo . . . . .	62
5.2.2	Função de Wigner inicial localizada em momento angular . . . . .	69
5.3	Conexão com a representação semi-clássica contínua . . . . .	70
5.4	Discussão . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Perspectivas, Discussão e Conclusões</b>	<b>79</b>
6.1	Sobre a possibilidade de somas sobre trajetórias no espaço de fase quântico discreto . . . . .	79
6.1.1	O propagador de estados para tempos infinitesimais . . . . .	80
6.1.2	A reconstrução do propagador para tempos finitos . . . . .	81
6.2	Considerações finais, visão geral e conclusões propriamente ditas . . . . .	82
<b>A</b>	<b>Traço de três elementos de base</b>	<b>87</b>
	<b>Referências</b>	<b>90</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A mecânica quântica é fundamentada sobre os conceitos de estado, observável e medida, conceitos os quais foram por esta em larga medida dotados de novo significado. A teoria pode ser enfocada a partir de pontos de vista diferentes, e usualmente as descrições (*pictures*) de Schroedinger, Heisenberg, ou de interação são as adotadas. Nestas descrições, as variáveis que especificam um estado são muitas vezes denominadas *rótulos*, sendo necessário ao menos um rótulo para cada grau de liberdade do sistema. Isto torna natural que, quando da escolha de uma representação, um sistema seja descrito em função de uma variável dinâmica definida, por exemplo, no espaço de configurações.

Além das abordagens acima citadas, existe outra um tanto mais centrada em *operadores*. A linguagem de operadores, como será explorado em maior detalhe mais adiante, é naturalmente compatível com uma noção de *espaço de fase quântico*. De fato, pode-se dizer que há uma descrição de espaço de fase da mecânica quântica, cujo arquétipo básico é o formalismo de Weyl-Wigner [1, 2, 3, 4, 5].

O formalismo de Weyl-Wigner lida com graus de liberdade aos quais podem ser associados pares de operadores, com espectro contínuo, de posição e momento. Nestes casos, o formalismo permite que qualquer operador, associado a este grau de

liberdade, seja relacionado à sua *transformada de Weyl*, que é uma função numérica (*c-number*) de um par de variáveis  $\{q, p\}$  que define um espaço de fase. Esta é uma relação um-a-um, que define portanto um *mapeamento* entre um operador e uma função que o representa no espaço de fase. Esta relação é o resultado da decomposição de um dado operador numa base ortogonal e completa no espaço de operadores, a base de Weyl-Wigner, e a transformada de Weyl nada mais é que a função que descreve os coeficientes desta decomposição. Todas as especificidades do formalismo são portanto, em última análise, resultado das propriedades dos elementos de base. Entretanto, a base de Weyl-Wigner não é a única conhecida na literatura, e desenvolvimentos alternativos podem ser encontrados, por exemplo, em [6, 7].

O estado quântico de um sistema físico é descrito na linguagem de operadores pelo operador densidade. Entre outros aspectos, uma das virtudes do operador densidade é a de ser bastante apropriado a uma descrição estatística de um dado sistema quântico, através da introdução do conceito de estado misto, ou de mistura (*mixed states*), em adição ao de estado puro. Nesta tese, sempre que se fizer referência ao operador densidade, este estará relacionado a um estado puro, apesar de todos os resultados obtidos serem facilmente generalizáveis para o caso de estados mistos.

A transformada de Weyl do operador densidade é chamada de *função de Wigner*. Como se sabe, a função de Wigner é uma pseudo-distribuição, não tendo diretamente a ela relacionada nenhuma probabilidade. Por outro lado, as densidades de probabilidade tanto na representação de posição quanto de momento podem ser obtidas a partir da função de Wigner por meio de uma integração direta em uma das variáveis. Ainda mais, a função de Wigner mantém informação explícita do princípio de in-

certeza, sendo obrigatoriamente diferente de zero numa região do espaço de fase de área no mínimo igual a  $\frac{h}{2}$ .

No formalismo de Weyl-Wigner é possível escrever-se a expressão mapeada do produto de dois operadores em função das expressões mapeadas dos operadores individuais. Esta relação pode ser generalizada para o produto de  $n$  operadores, e ainda ao comutador e o anti-comutador de dois operadores. A expressão mapeada do comutador de dois operadores pode ser vista como a ação do *parênteses de Moyal* sobre duas funções definidas no espaço de fase. Em primeira ordem da série que o define, o parênteses de Moyal reduz-se ao parênteses de Poisson, dando clara indicação da utilidade do formalismo de Weyl-Wigner na discussão de aproximações semi-clássicas e do limite clássico propriamente dito.

No que se refere à evolução temporal de um sistema quântico, o operador densidade obedece a equação de von Neumann-Liouville. Esta, por sua vez, pode ser imediatamente mapeada no espaço de fase quântico definido pelo formalismo de Weyl-Wigner, sendo que nesta descrição a equação de von Neumann-Liouville relaciona a derivada temporal da função de Wigner com o parênteses de Moyal agindo sobre a transformada de Weyl do hamiltoniano e da própria função de Wigner. As soluções desta equação determinarão a evolução temporal das funções de Wigner, sendo que as soluções estacionárias serão naturalmente as referentes aos auto-estados do hamiltoniano.

Apesar de toda a sua utilidade, tanto operacional quanto conceitual, o formalismo de Weyl-Wigner tem a limitação inerente de ser aplicável apenas a sistemas com análogo clássico. Sistemas sem análogo clássico, associados a graus de liberdade descritos por operadores de espectro discreto e finito, como por exemplo graus de

liberdade de spin, simplesmente não podem ser descritos pelo formalismo de maneira direta.

Esta limitação, porém, pode ser superada. Não simplesmente tentando adaptar diretamente o formalismo de Weyl-Wigner a esses graus de liberdade, mas partindo-se de suposições básicas da mecânica quântica para, construtivamente, obter-se um formalismo naturalmente adaptado a tais graus de liberdade, o que permitirá definir um *espaço de fase quântico discreto* por construção, e que por sua vez tem o formalismo de Weyl-Wigner como caso limite.

A raiz deste processo está na identificação de bases de operadores apropriadas para a descrição desses graus de liberdade. Schwinger[8], partindo apenas da hipótese da existência de uma base de estados, mostrou como construir uma base de operadores, composta por produtos de potências de operadores unitários que obedecem relações de comutação particulares, por vezes denotadas como álgebra de Weyl-Schwinger. A partir disto, percebeu-se que através de uma dupla transformada de Fourier discreta da base de Schwinger, obtinha-se uma base de operadores bastante conveniente, capaz de definir um espaço de fase quântico discreto[9], e, concomitantemente, uma função de Wigner discreta\*.

Esta tese propõe-se basicamente a explorar mais detalhadamente esta idéia, ou seja, de que é possível definir um espaço de fase quântico discreto, sobre o qual mapeiam-se todos os operadores associados a um sistema quântico descrito por um grau de liberdade sem análogo clássico, e neste contexto *extrair as informações físicas relevantes associadas a estes sistemas*.

---

\*Na mesma época, Wooters[10] desenvolveu uma técnica, também baseada na construção de uma base de operadores, que permitia a obtenção de uma função de Wigner discreta, mas de natureza diferente, onde a interpretação de espaço de fase se faz um pouco mais difícil. Cohendet *et al.*[11] também propuseram uma função de Wigner discreta.

Inicialmente, partindo das idéias de Schwinger, irá se definir uma base de operadores com as propriedades desejadas, o que inclui uma pequena modificação com respeito ao que foi inicialmente proposto em [9] e desenvolvido em [12, 13]. Os elementos de base serão funções de variáveis inteiras, índices que definem o espaço de fase discreto. As propriedades desta base serão apresentadas, e será brevemente discutida a obtenção de um parênteses discreto, que desempenha, neste contexto, o papel que é do parênteses de Moyal nos casos com análogo clássico. Será obtido em detalhe o limite para o contínuo do formalismo, onde se mostra que os resultados de Weyl-Wigner são recuperados, através do limite executado nos elementos de base do formalismo de espaço de fase discreto. Analisar-se-á em detalhe também o processo de limite do parênteses discreto, que resulta naturalmente no parênteses de Moyal.

Uma vez que este formalismo estiver definido, é possível dar-se atenção à dinâmica dos graus de liberdade sem análogo clássico a partir do ponto de vista de espaço de fase quântico discreto [14, 15]. A solução da equação de von Neumann-Liouville será discutida em detalhe para tempos contínuos, e a partir da discussão da evolução temporal de um exemplo simples, irá se propor um *operador intervalo de tempo*, que desempenhará o papel de operador complementar ao hamiltoniano.

Apresentar-se-á também a discussão de uma aplicação mais detalhada do formalismo em um problema físico particular, a evolução temporal do modelo de Lipkin-Meshkov-Glick [16]. O estudo da evolução temporal, obtida numericamente através da equação de von Neumann-Liouville, de funções de Wigner específicas, é ponto de partida de uma discussão que culmina na identificação de um potencial efetivo, função de uma variável de ângulo discreta.

A discussão como um todo apresentada beneficia-se fortemente da simplicidade

conceitual da abordagem de espaço de fase. As quantidades discutidas são originalmente quânticas, e não obtidas através de um processo, normalmente ambíguo, de quantização. É discutindo os casos sem análogo clássico que, espera-se, seja possível obter algum tipo de ganho teórico, por pequeno e específico que seja, que vá contribuir para uma compreensão maior da mecânica quântica e da sua interface com outras teorias de escopo mais amplo. Este é o objetivo desta tese.

## Capítulo 2

### Espaço de fase quântico discreto

#### 2.1 Base no espaço de operadores

Como ressaltado na introdução, a obtenção de um espaço de fase quântico discreto é consequência do fato de ser possível construir-se bases ortogonais e completas no espaço de operadores [8]. Neste aspecto, um resultado de importância fundamental é que a operação de traço pode ser usada na definição de um produto interno no espaço de operadores, da forma

$$(A, B) = \text{Tr}[AB^\dagger], \quad (2.1)$$

onde  $A$  e  $B$  são dois operadores arbitrários que agem num espaço de estados aqui assumido  $N$ -dimensional. Tal definição satisfaz as quatro propriedades necessárias e suficientes para a definição de um produto interno, a saber [17]:

(a)  $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$ ;

(b)  $(cA, B) = c(A, B)$ ;

(c)  $(B, A) = (A, B)^*$ ;

(d)  $(A, A) > 0$  se  $A \neq 0$ .

De posse de um produto interno, pode-se obter uma base para o espaço ( $N^2$ -dimensional) de operadores, e a decomposição de um operador deste espaço nesta base terá a forma

$$O = \sum_{m,n=0}^{N-1} o(m,n)B(m,n), \quad (2.2)$$

onde os  $o(m,n)$  são coeficientes de decomposição respectivos a um dado elemento de base  $B(m,n)$ . Deste ponto em diante adotar-se-á a convenção de letras maiúsculas para operadores e minúsculas para números ordinários (*c-numbers*).

Os coeficientes de decomposição são obtidos valendo-se da ortogonalidade da base. Multiplicando ambos os lados da eq.(2.2) à direita por  $B^\dagger(j,l)$ , e tomando o traço, tem-se

$$Tr[OB^\dagger(j,l)] = \sum_{m,n=0}^{N-1} o(m,n)Tr[B(m,n)B^\dagger(j,l)], \quad (2.3)$$

e uma vez que a base seja ortonormal segue diretamente que

$$Tr[OB^\dagger(j,l)] = \sum_{m,n=0}^{N-1} o(m,n)\delta_{m,j}\delta_{n,l} \quad (2.4)$$

$$Tr[OB^\dagger(j,l)] = o(m,n), \quad (2.5)$$

de forma que os coeficientes de decomposição ficam perfeitamente definidos. Portanto, a equação (2.5) define um *mapeamento* um-a-um entre um operador e uma função de inteiros  $\{j,l\}$ .

## 2.2 A base de Schwinger

Na proposta de Schwinger [8], o conjunto de operadores

$$S(m,n) = \frac{U^m V^n}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{i\pi}{N}mn\right) \quad m,n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.6)$$

forma uma base segundo os critérios expostos acima. Os operadores  $U$  e  $V$  são unitários, e geram, cada um, um grupo cíclico de ordem  $N$ ,

$$U^N = V^N = 1, \quad (2.7)$$

de forma que seus auto-valores são raízes da unidade

$$v_n = u_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}n\right). \quad (2.8)$$

A ação de  $U$  nos auto-estados de  $V$  é da forma

$$U^s |v_m\rangle = |v_{m+s \pmod{N}}\rangle, \quad (2.9)$$

e, complementarmente,

$$V^s |u_m\rangle = |u_{m-s \pmod{N}}\rangle, \quad (2.10)$$

sendo que, a partir de agora, adotar-se-á em geral a notação mais compacta

$$|x_k\rangle \equiv |x_{k \pmod{N}}\rangle. \quad (2.11)$$

Os conjuntos completos de auto-estados  $\{|u_k\rangle\}$  e  $\{|v_k\rangle\}$  são ligados por uma transformada de Fourier

$$\langle u_k | v_{k'} \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left[\frac{2\pi i}{N}kk'\right], \quad (2.12)$$

e os operadores  $U$  e  $V$  satisfazem a álgebra de Weyl-Schwinger

$$V^l U^k = U^k V^l \exp\left(\frac{2\pi ikl}{N}\right). \quad (2.13)$$

Cabem aqui alguns comentários sobre a base de Schwinger: Em primeiro lugar, a obtenção desta não parte de nenhum pressuposto que não seja a simples existência de um conjunto finito, completo e ortonormalizado, de estados. Schwinger ainda demonstra a equivalência desta base com o que ele chama de ‘álgebra de medida’, a

qual se fundamenta basicamente apenas na existência de observáveis incompatíveis. Ou seja, a base de Schwinger segue diretamente de hipóteses quânticas fundamentais, ou seja, da existência de conjuntos completos *finitos* de estados e da incompatibilidade entre observáveis.

A base apresenta ainda uma simetria, análoga ao caso canônico, sendo invariante sob transformações do tipo

$$\begin{aligned} U &\rightarrow V & m &\rightarrow n \\ V &\rightarrow U^{-1} & n &\rightarrow -m. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Seu aspecto mais interessante, porém, é a fatoração em sub-bases independentes [8], ou seja

$$S(m, n) = S_1(m_1, n_1) \times S_2(m_2, n_2), \quad (2.15)$$

sob as condições

$$\begin{aligned} m_1, n_1 &= 0, 1, \dots, N_1 \\ m_2, n_2 &= 0, 1, \dots, N_2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

com  $N = N_1 N_2$  e  $N_1$  e  $N_2$  primos entre si, de maneira que

$$[S_1(m_1, n_1), S_2(m_2, n_2)] = 0 \quad (2.17)$$

para quaisquer valores dos índices  $\{m_1, n_1, m_2, n_2\}$ .

Schwinger identifica tal fatoração com uma divisão em graus de liberdade independentes [8], e demonstrou formalmente esta fatoração de bases para o caso descrito acima. Naturalmente tal processo de decomposição pode ser repetido até que um dado  $N$  seja decomposto em seus fatores primos (ou seja, de uma base em tantas

sub-bases independentes quantos forem os fatores primos de  $N$ ) se a propriedade de decomposição for válida também para  $N_1 = N_2$ . Schwinger afirma, de fato, que este processo pode ser implementado para os casos  $N_1 = N_2$ , porém sem oferecer demonstração. Aqui, isto não será assumido como verdade, e abstém-se de discutir este ponto, uma vez que não é essencial para os resultados obtidos.

Os índices relacionados à base de Schwinger podem, como notado em [18], ser usados na definição de um espaço de fase. Porém, por motivos que ficarão claros ao longo do texto, é mais conveniente trabalhar-se com uma nova base, definida a partir da base de Schwinger e relacionada com esta através de uma dupla transformada de Fourier discreta, realizada sobre um intervalo simétrico.

### 2.3 Base de coordenadas e momentos no espaço de fase discreto

Considerem-se portanto os operadores:

$$G(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{j,l=-h}^h U^j V^l \exp \left[ \frac{i\pi}{N} j l \right] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (mj + nl) \right] \times \exp [i\pi \phi(j + h, l + h; N)] \quad m, n \in [-h, h], \quad (2.18)$$

onde

$$h = \frac{N-1}{2} \quad (N \text{ ímpar}), \quad (2.19)$$

$$\phi(j, l; N) = NI_j^N I_l^N - jI_l^N - lI_j^N, \quad (2.20)$$

e  $I_k^N = \left[ \frac{k}{N} \right]$  extrai a parte inteira de  $k$  com relação a  $N$ .

O conjunto de operadores  $\{G(m, n)\}$  forma uma base completa e ortogonal no espaço de operadores, que, por construção, mantém a propriedade de fatoração em fatores primos e a simetria tipo canônica nos operadores  $U$  e  $V$  apresentadas

originalmente pela base de Schwinger [19]. O intervalo onde as somas são realizadas é um intervalo simétrico, assim como o intervalo de variação dos índices dos elementos de base, o que parece ser a escolha mais natural – no sentido do limite para o contínuo – na construção de um espaço de fase.

Esta escolha para os elementos de base é em linhas gerais uma pequena modificação sobre o que já foi proposto em [12]. Esta, como não definida em um intervalo simétrico, perde a hermiticidade e um ‘bom’ limite para o contínuo. Tem, por sua vez, virtudes próprias, podendo-se dizer que, enquanto (2.18) é conveniente para a construção de um espaço de fase quântico discreto do tipo coordenada-momento, a base definida em [12] é apropriada para lidar-se com variáveis de ação e ângulo.

Como indicado, a equação (2.18) é válida para valores ímpares de  $N$ . Por outro lado, para valores pares de  $N$  as somas enunciadas na definição da base de coordenadas e momentos discretos podem ser definidas nos intervalos  $\{-\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2}\}$  ou  $\{-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1\}$  (os dois intervalos são completamente equivalentes devido à presença de  $\phi$ ) sem qualquer consequência nos resultados subsequentes.

O termo  $\phi$  será denominado por fase modular, introduzida de modo a conservar explicitamente uma simetria módulo  $N$  nos índices de soma dos elementos de base, Eq.(2.18). Com ambos os índices correndo, em princípio, no intervalo  $[-h, h]$ , que trataremos por *intervalo fundamental*, a fase modular é igual a zero e sua exponencial é inócua em (2.18). Sua utilidade é que permite que sejam realizadas operações de simetria módulo  $N$  nos referidos índices, permitindo que as respectivas somas possam ser, se necessário, reescritas como

$$\sum_{j,l=-h}^h \Rightarrow \sum_{j=-h+kN}^{h+kN} \sum_{l=-h+k'N}^{h+k'N} \quad (2.21)$$

onde  $k$  e  $k'$  são quaisquer inteiros. Desta forma, fica claro que a fase modular encerra

em si toda a aritmética módulo  $N$ , que, como será visto, é necessária em cálculos envolvendo produtos de operadores. Também há uma simetria módulo  $N$  nos dois índices que definem um elemento da base de operadores,  $\{m, n\}$ , que induz uma topologia de toro no espaço de fase discreto a ser gerado por estes índices.

Os elementos de base propostos tem as seguintes propriedades básicas:

$$\text{Tr} [G(m, n)] = 1; \quad (2.22)$$

$$\text{Tr} [G^\dagger(m, n)G(r, s)] = N \delta_{m,r}^{[N]} \delta_{n,s}^{[N]}; \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} [G^\dagger(m, n)G(u, v)G(r, s)] &= \frac{1}{N^2} \sum_{a,b,c,d=-h}^h \exp [-i\pi\phi(a + c + h, b + d + h; N)] \times \\ &\exp \left[ \frac{i\pi}{N}(bc - ad) \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [a(u - m) + b(v - n) + c(u - r) + d(v - s)] \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde  $\delta_{a,b}^{[N]}$  indica uma delta de Kroenecker módulo  $N$ , ou seja

$$\delta_{a,b}^{[N]} = \begin{cases} 0, & \text{se } a \neq b \pmod{N} \\ 1, & \text{se } a = b \pmod{N}. \end{cases} \quad (2.25)$$

As eqs.(2.22) e (2.23) seguem diretamente, e a equação (2.24), por sua importância, é obtida em detalhe no apêndice A, onde fica claro o papel da fase modular.

Outra importante propriedade que pode ser imediatamente verificada é

$$G^\dagger(m, n) = G(m, n), \quad (2.26)$$

de onde segue que operadores hermiteanos têm representantes reais no espaço de fase quântico discreto.

Das propriedades acima seguem ainda alguns resultados importantes:

$$\text{Tr}[O_1] = \frac{1}{N} \sum_{m,n=-h}^h o_1(m, n) \quad (2.27)$$

$$Tr[O_1 O_2] = \frac{1}{N} \sum_{m,n}^h o_1(m,n) o_2(m,n), \quad (2.28)$$

e o resultado básico para o mapeamento do produto de dois operadores a partir das expressões mapeadas individuais

$$\begin{aligned} (O_1 O_2)(m,n) &= \frac{1}{N^4} \sum_{u,v,r,s=-h}^h \sum_{a,b,c,d=-h}^h o_1(u,v) o_2(r,s) \\ &\quad \exp \left[ \frac{i\pi}{N} (bc - ad) \right] \exp [-i\pi\phi(a+c, b+d; N)] \\ &\quad \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [a(u-m) + b(v-n) + c(u-r) + d(v-s)] \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

que segue diretamente de (2.24). Ainda é direto obterem-se as expressões mapeadas do comutador e do anti-comutador de dois operadores

$$\begin{aligned} [O_1, O_2](m,n) &= \frac{2i}{N^4} \sum_{u,v,r,s=-h}^h \sum_{a,b,c,d=-h}^h o_1(u,v) o_2(r,s) \\ &\quad \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [a(u-m) + b(v-n) + c(u-r) + d(v-s)] \right] \\ &\quad \sin \left[ \frac{\pi}{N} (bc - ad) \right] \exp [-i\pi\phi(a+c, b+d; N)], \end{aligned} \quad (2.30)$$

e

$$\begin{aligned} \{O_1, O_2\}(m,n) &= \frac{2}{N^4} \sum_{u,v,r,s=-h}^h \sum_{a,b,c,d=-h}^h O_1(u,v) O_2(r,s) \\ &\quad \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [a(u-m) + b(v-n) + c(u-r) + d(v-s)] \right] \\ &\quad \cos \left[ \frac{\pi}{N} (bc - ad) \right] \exp [-i\pi\phi(a+c, b+d; N)] \end{aligned} \quad (2.31)$$

A respectiva expressão para o mapeamento do comutador de dois operadores a partir das expressões mapeadas individuais pode ser vista como um parênteses discreto agindo sobre duas funções definidas no espaço de fase quântico discreto. Na formulação contínua de espaço de fase da mecânica quântica, este papel é desempenhado pelo parênteses de Moyal, que age sobre funções definidas num espaço

de fase indexado pelas variáveis  $\{q, p\}$ . O parênteses de Moyal pode ser escrito como uma série de derivadas, sendo que seu termo de ordem mais baixa é justamente o parênteses de Poisson clássico, embora ainda agindo sobre duas funções que preservam as correlações quânticas de incerteza. É bem sabido que a mecânica clássica pode ser formulada valendo-se do parênteses de Poisson, bem como que a mecânica quântica de graus de liberdade com análogo clássico pode ter suas equações dinâmicas definidas a partir do parênteses de Moyal. Portanto, parece natural identificar na eq.(2.30) um parênteses discreto, associado a transformações que preservam uma estrutura pré-simplética do espaço de fase discreto [20].

## 2.4 Limite para o caso contínuo

O limite para o contínuo dos elementos da base de operadores pode ser obtido diretamente. Considerando, inicialmente, um dado elemento de base, Eq. (2.18),

$$G(j, l) = \frac{1}{N} \sum_{m, n=-h}^h U^m V^n \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (mj + nl) \right] \exp \left[ \frac{i\pi}{N} mn \right], \quad (2.32)$$

onde está se omitindo a fase modular, pois os passos subseqüentes serão realizados apenas no intervalo fundamental das somas,  $[-h, h]$ . Associem-se agora ao par de operadores unitários os novos operadores  $Q$  e  $P$ , hermiteanos,

$$U = \exp[-i\epsilon Q], \quad V = \exp[i\epsilon P], \quad (2.33)$$

para os quais já se adotou uma notação conveniente ao resultado do processo de limite, com

$$\epsilon^2 = \frac{2\pi}{N}, \quad (2.34)$$

que se torna infinitesimal à medida em que  $N \rightarrow \infty$ . Realizando ainda a mudança de variáveis

$$-q = \epsilon j, \quad -p = \epsilon l, \quad (2.35)$$

$$u = \epsilon m, \quad v = \epsilon n, \quad (2.36)$$

e definindo os incrementos

$$\Delta u = \epsilon \Delta m \quad \text{e} \quad \Delta v = \epsilon \Delta n, \quad (2.37)$$

com  $\Delta m = \Delta n = 1$ , tem-se que

$$G(p, q) = \frac{1}{\epsilon^2 N} \sum_{u, v = \epsilon h}^{-\epsilon h} \Delta u \Delta v \exp[-iu\hat{Q}] \exp[+iv\hat{P}] \exp[i(qu + pv)] \exp\left[\frac{i}{2}uv\right]. \quad (2.38)$$

Considerando-se o limite  $N \rightarrow \infty$ , os incrementos tornam-se infinitesimais

$$\Delta u \rightarrow du, \quad \Delta v \rightarrow dv,$$

de forma que

$$G(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv \exp[-iu\hat{Q}] \exp[iv\hat{P}] \exp\left[\frac{i}{2}uv\right] \exp[i(qu + pv)], \quad (2.39)$$

ou ainda

$$G(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv \exp\left[iu\left(q + \frac{v}{2} - \hat{Q}\right)\right] \exp[iv(p + \hat{P})], \quad (2.40)$$

que, com a ajuda da identidade (obtida com um limite similar de  $|u_j\rangle\langle u_j| = \frac{1}{N} \sum_{k=-h}^h u_j^k U^k$ ),

$$|q\rangle\langle q| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[ix(q - \hat{Q})], \quad (2.41)$$

resulta em

$$G(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle \left\langle q + \frac{v}{2} \right| \exp [iv(p + \hat{P})] \quad (2.42)$$

ou

$$G(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp [ivp] \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{v}{2} \right|. \quad (2.43)$$

A expressão acima é identificada com os elementos de base de Weyl-Wigner,  $\Delta(p, q)$ , no espaço de fase contínuo [1]

$$G(p, q) = \Delta(p, q). \quad (2.44)$$

A partir deste resultado, pode-se ver que a própria decomposição de um determinado operador na base de coordenadas e momentos discretos, neste mesmo limite, pode ser reescrita de forma

$$\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{m,n=-h}^h \Delta m \Delta n A(m, n) G(m, n) \quad (2.45)$$

e chamando novamente

$$p = \epsilon m \quad e \quad q = \epsilon n$$

segue que

$$\hat{A} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n=-h}^h \Delta p \Delta q A(p, q) G(p, q). \quad (2.46)$$

No limite  $N \rightarrow \infty$  tem-se

$$\hat{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp dq A(p, q) \Delta(p, q), \quad (2.47)$$

que é exatamente a decomposição de Weyl-Wigner. Naturalmente, a partir do limite dos elementos de base, todo o formalismo de Weyl-Wigner pode ser imediatamente recuperado dentro do mesmo contexto.

Apesar do resultado geral mostrado acima, incluir-se-á aqui o cálculo do limite do representante no espaço de fase do produto de dois operadores, a partir do qual se obtém trivialmente o resultado para o anti-comutador e o comutador. O processo de limite sobre o representante do comutador, identificado como um parênteses discreto, resultará na recuperação do parênteses de Moyal. O parênteses de Moyal e o parênteses discreto desempenham papel fundamental na dinâmica nas respectivas situações onde se aplicam, afinal aparecem imediatamente uma vez que seja mapeada a equação de von Neumann-Liouville, válida em ambas situações (contínua e discreta). Logo, é de importância fundamental dentro da perspectiva em que se está trabalhando obter-se em detalhe a relação existente entre ambos.

Neste sentido, a partir do mapeamento do produto de dois operadores, Eq.(2.29),

$$\begin{aligned}
 (O_1 O_2)(m, n) &= \frac{1}{N^4} \sum_{u, v, r, s = -h}^h \sum_{a, b, c, d = -h}^h \Delta u \Delta v \Delta r \Delta s \Delta a \Delta b \Delta c \Delta d \\
 &O_1(u, v) O_2(r, s) \exp \left[ \frac{i\pi}{N} (bc - ad) \right] \exp [i\pi \Phi(a, b, c, d; N)] \\
 &\exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [a(u - m) + b(v - n) + c(u - r) + d(v - s)] \right] \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

realiza-se a transformação de variáveis

$$\begin{aligned}
 a + c &= j, & b + d &= l, \\
 a - c &= x, & b - d &= z,
 \end{aligned} \quad (2.49)$$

resultando em,

$$\begin{aligned}
 (O_1 O_2)(m, n) &= \frac{1}{N^4} \sum_{u, v, r, s = -h}^h \sum_{x = -(2h - |j|)}^{2h - |j|} \sum_{z = -(2h - |l|)}^{2h - |l|} \sum_{j, l = -h}^h \Delta u \Delta v \Delta r \Delta s \Delta j \Delta l \frac{\Delta x \Delta z}{4} \\
 &\exp \left[ \frac{\pi i}{N} [j(2u - m - r) + x(r - m) + l(2v - n - s) + z(s - n)] \right] \\
 &O_1(u, v) O_2(r, s) \exp \left[ \frac{i\pi}{2N} (jz - lx) \right] \exp [i\pi \phi(j + h, l + h; N)], \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

onde as somas nos índices  $\{x, z\}$  correm com passo 2 (ou seja, mantendo a paridade). Considerando o fato que a fase modular  $\phi$  assume valores constantes em regiões específicas do espaço de fase, é conveniente quebrar-se as somas em  $\{j, l\}$  em nove intervalos diferentes, de acordo com os diferentes valores assumidos por  $\phi$ , da forma

$$\begin{aligned} \sum_{j,l=-2h}^{2h} &= \sum_{j,l=-h}^h + \sum_{j,l=-2h}^{-(h+1)} + \sum_{j=-2h}^{-(h+1)} \sum_{l=-h}^h + \sum_{j=-2h}^{-(h+1)} \sum_{l=h+1}^{2h} \\ &+ \sum_{j=-h}^h \sum_{l=-2h}^{-(h+1)} + \sum_{j=-h}^h \sum_{l=h+1}^{2h} + \sum_{j=h+1}^{2h} \sum_{l=-2h}^{-(h+1)} + \sum_{j=h+1}^{2h} \sum_{l=-h}^h + \sum_{j,l=h+1}^{2h}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Como será visto, apenas a primeira destas nove somatórias dará uma contribuição não nula no limite do contínuo. Este termo será calculado em detalhe, juntamente com apenas um dos oito restantes, que se anulam, todos, de maneira similar.

Considere-se, portanto, a contribuição na Eq. (2.50) referente à primeira somatória na Eq. (2.51), denotada por  $(O_1 O_2)_1(m, n)$ . Como nesta somatória  $\{j, l\}$  correm no intervalo fundamental, a fase  $\phi$  é igual a zero e pode ser ignorada. Introduzam-se ainda as novas variáveis

$$\epsilon m = p, \quad \epsilon n = q, \quad (2.52)$$

e, similarmente para todos os demais índices de soma, de forma genérica,

$$\epsilon \zeta = \bar{\zeta}. \quad (2.53)$$

As somatórias novamente se tornam integrais à medida em que as variáveis escalonadas  $\bar{\zeta}$  tendem ao contínuo quando  $N \rightarrow \infty$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). Como a integração neste limite é realizada sobre todo o espaço de fase, os vínculos nos intervalos  $\{\bar{x}, \bar{z}\}$  (que apenas garantiam que as somas (integrais) eram realizadas num quadrado no espaço

de fase) podem ser suprimidos, da forma

$$\begin{aligned}
 (O_1 O_2)_1(p, q) &= \frac{1}{4\epsilon^8 N^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{u} d\bar{v} d\bar{r} d\bar{s} d\bar{j} d\bar{l} d\bar{x} d\bar{z} O_1(\bar{u}, \bar{v}) O_2(\bar{r}, \bar{s}) \\
 &\quad \exp\left\{\frac{i\bar{z}}{4} [\bar{j} + 2(\bar{s} - q)]\right\} \exp\left\{\frac{i\bar{x}}{4} [2(\bar{r} - q) - \bar{l}]\right\} \\
 &\quad \exp\left\{\frac{i}{2} [\bar{j}(2\bar{u} - p - \bar{r}) + \bar{l}(2\bar{v} - q - \bar{s})]\right\}. \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

A integração sobre  $\{\frac{\bar{x}}{4}, \frac{\bar{z}}{4}\}$  resulta no produto de funções delta de Dirac  $\delta[\bar{l} - (2\bar{r} - p)] \delta[j - (-2(\bar{s} - q))]$ , de forma que a integração em  $\{\bar{j}, \bar{l}\}$  fornece

$$\begin{aligned}
 (O_1 O_2)_1(p, q) &= \frac{4}{(2\pi)^2} \int d\bar{u} d\bar{v} d\bar{r} d\bar{s} O_1(\bar{u}, \bar{v}) O_2(\bar{r}, \bar{s}) \\
 &\quad \exp\left\{\frac{i}{2} [-(2\bar{s} - q)(2\bar{u} - \bar{r} - p) + 2(\bar{r} - p)(2\bar{v} - \bar{s} - q)]\right\}, \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

que finalmente pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 (O_1 O_2)_1(p, q) &= \frac{4}{(2\pi)^2} \int d\bar{u} d\bar{v} d\bar{r} d\bar{s} O_1(\bar{u}, \bar{v}) O_2(\bar{r}, \bar{s}) \\
 &\quad \exp\{2i[(p - \bar{r})(q - \bar{v}) - (p - \bar{u})(q - \bar{s})]\}, \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

que é exatamente a expressão do mapeamento do produto de dois operadores do formalismo de Weyl-Wigner [1], como esperado. Desta expressão é trivial obter-se a expressão mapeada do comutador de dois operadores, da qual segue diretamente a obtenção do parênteses de Moyal.

As oito somatórias restantes podem ser calculadas exatamente da maneira acima, todas com resultados análogos, exceto pela inclusão da fase  $\phi$ , agora diferente de zero. Por exemplo, considerando a contribuição

$$\begin{aligned}
 ((O_1 O_2)(m, n))_9 &= \frac{1}{N^4} \sum_{u,v,r,s=-h}^h \sum_{x=-(2h-|j|)}^{2h-|j|} \sum_{z=-(2h-|l|)}^{2h-|l|} \sum_{j,l=h+1}^{2h} \Delta u \Delta v \Delta r \Delta s \Delta j \Delta l \frac{\Delta x \Delta z}{4} \\
 &\quad \exp\left[\frac{\pi i}{N} [j(2u - m - r) + x(r - m) + l(2v - n - s) + z(s - n)]\right]
 \end{aligned}$$

$$O_1(u, v)O_2(r, s) \exp \left[ \frac{i\pi}{2N}(jz - lx) \right] \exp [i\pi\phi(j + h, l + h; N)], \quad (2.57)$$

é direto perceber-se que a presença do termo  $\exp[i\pi\phi(j, l; N)]$ , igual a  $\exp[i\pi(j + l + N)]$  neste intervalo, modifica o comportamento desta expressão em relação ao visto acerca da primeira contribuição. Portanto, antes de escalonar as variáveis de  $\{j, l\}$  para  $\{\bar{j}, \bar{l}\}$ , iremos separar estas somatórias de acordo com a paridade dos índices de soma. Desta maneira, reescreve-se a expressão acima como

$$\begin{aligned} (O_1 O_2)_9(m, n) &= \frac{1}{N^4} \sum_{u, v, r, s = -h}^h \sum_{x = -(2h - |j|)}^{2h - |j|} \sum_{z = -(2h - |l|)}^{2h - |l|} \left( \sum_{j, l = h}^{2h} \right) \Delta u \Delta v \Delta r \Delta s \Delta j \Delta l \frac{\Delta x \Delta z}{4} \\ &\exp \left[ \frac{\pi i}{N} [j(2u - m - r) + x(r - m) + l(2v - n - s) + z(s - n)] \right] \\ &O_1(u, v)O_2(r, s) \exp \left[ \frac{i\pi}{2N}(jz - lx) \right] \exp [i\pi\phi(j, l; N)], \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde

$$\left( \sum_{j, l = h}^{2h} \right) = \sum_{j=h, \text{par}}^{2h} \sum_{l=h, \text{par}}^{2h} + \sum_{j=h, \text{par}}^{2h} \sum_{l=h, \text{impar}}^{2h} + \sum_{j=h, \text{impar}}^{2h} \sum_{l=h, \text{par}}^{2h} + \sum_{j=h, \text{impar}}^{2h} \sum_{l=h, \text{impar}}^{2h}. \quad (2.59)$$

Como a exponencial  $\exp [i\pi(j + l + N)]$  depende apenas da paridade dos índices  $\{j, l\}$ , sua contribuição pode ser previamente calculada em  $+1$  para o primeiro e o último termo do lado direito da Eq.(2.59) e  $-1$  para os dois restantes. No limite para o contínuo porém, não faz sentido distinguir-se a paridade dos índices e as somatórias cancelam-se aos pares. Isto também pode ser visto simplesmente notando-se que o termo  $\exp [i\pi(j + l + N)]$  presente em (2.57) oscilará infinitamente rápido no limite do contínuo, anulando as integrações subsequentes. Argumentação similar é válida para todos os termos restantes em (2.51).

É importante ressaltar que este cancelamento acontece somente no contínuo. De outro modo, as demais somas não se anulam e têm uma contribuição significativa no parênteses discreto. O fato é que verificou-se que o parênteses de Moyal é

proveniente *apenas* da contribuição, no parênteses discreto, de uma região específica do espaço de fase, correspondente ao setor central do plano gerado pelas variáveis  $\{j, l\}$  definidas na transformação (2.49). As contribuições restantes, que guardam portanto informações da topologia de toro proveniente da base de coordenadas e momentos discretos, são de fato contribuições genuinamente quânticas do espaço de fase finito e discreto.

Ainda cabe destacar uma singularidade do caso discreto. No limite para o contínuo, são obtidas algumas funções delta de Dirac provenientes de expressões definidas no discreto como

$$f(x, y) = \sum_k \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} k \left( x - \frac{y}{2} \right) \right], \quad (2.60)$$

que originalmente *não* são representações da delta de Kroenecker devido à presença do argumento semi-inteiro. No limite para o contínuo esta limitação deixa de existir, as respectivas integrais são identificadas com deltas de Dirac e integrações subsequentes são direta e trivialmente realizadas.

Do que foi dito acima pode-se concluir que o equivalente discreto do parênteses de Moyal tem características próprias do espaço de fase discreto, e que adaptações mais diretas da estrutura de Moyal para o caso discreto são, com certeza, incompletas.

## Capítulo 3

### Evolução temporal de von Neumann-Liouville no espaço de fase

A partir dos resultados obtidos no capítulo anterior, é possível estudar-se a evolução temporal de um dado sistema quântico do ponto de vista de espaços de fase discretos. Se, por um lado, as informações referentes a um sistema físico em um dado estado quântico  $\psi$ , em um instante de tempo  $t$ , devem ser extraídas de um ket associado  $|\psi(t)\rangle$  (ou de um bra  $\langle\psi(t)|$ ), por outro lado estas mesmas informações estão contidas no operador densidade,

$$P(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|, \quad (3.1)$$

que por sua vez tem a evolução temporal determinada pela equação de von Neumann-Liouville

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} P(t) = [H(t), P(t)]. \quad (3.2)$$

Esta é uma equação entre operadores, e cada um destes operadores – associados a graus de liberdade sem análogo clássico – pode ser mapeado no espaço de fase discreto. Uma vez que a base de operadores é ortogonal, ou em outras palavras, que o mapeamento é um-a-um, a mesma equação será obedecida pelas expressões

mapeadas dos operadores,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_\omega(u, v; t) = ([H(t), P(t)])(u, v), \quad (3.3)$$

para quaisquer valores dos índices  $\{u, v\}$ . Denotou-se por  $([H(t), P(t)])(u, v)$  a expressão mapeada do operador  $[H(t), P(t)]$ , e  $\rho_\omega(u, v; t)$  é o representante no espaço de fase quântico discreto do operador densidade, denominado *função de Wigner discreta*. O uso da equação, obtida no capítulo anterior, (2.30) no lado direito de (3.3) leva diretamente a

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_\omega(u, v; t) = \sum_{r,s=-h}^h \mathcal{L}(u, v, r, s; t) \rho_\omega(r, s; t), \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, v, r, s; t) = & \frac{2i}{N^4} \sum_{m,n=-h}^h \sum_{a,b,c,d=-h}^h h(m, n; t) \\ & \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [a(u-m) + b(v-n) + c(u-r) + d(v-s)] \right] \\ & \sin \left[ \frac{\pi}{N} (bc - ad) \right] \exp [-i\pi\phi(a+c+h, b+d+h; N)], \quad (3.5) \end{aligned}$$

sendo  $h(m, n; t)$  a expressão mapeada do hamiltoniano.  $\mathcal{L}(u, v, r, s; t)$  é o liouvilliano do sistema, e por agir sobre um operador (no caso do espaço de fase discreto, sobre a expressão mapeada de um operador), é muitas vezes denominado como um superoperador.

### 3.1 Solução da equação de von Neumann-Liouville

A forma da solução da equação de von Neumann-Liouville irá depender do tipo de dependência temporal do liouvilliano, que por sua vez segue diretamente da dependência temporal do próprio hamiltoniano. Defina-se, com a finalidade de obter-se uma solução para a equação de von Neumann-Liouville, algumas quantidades que

se mostrarão úteis, como

$$L(u, v, r, s; t, t_0) = \int_{t_0}^t d\tau \mathcal{L}(u, v, r, s; \tau), \quad (3.6)$$

para  $t_0$  fixo. Ainda

$$L^2(u, v, r, s; t, t_0) = \sum_{x, z=-h}^h L(u, v, x, z; t, t_0) L(x, z, r, s; t, t_0) \quad (3.7)$$

$$L^3(u, v, r, s; t, t_0) = \sum_{x, z=-h}^h L(u, v, x, z; t, t_0) L^2(x, z, r, s; t, t_0), \quad (3.8)$$

e assim sucessivamente. Desta forma, propõe-se, como solução da equação de von Neumann-Liouville, uma função de Wigner da forma

$$\rho_w(u, v; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n! \hbar^n} \sum_{r, s=-h}^h L^n(u, v, r, s; t, t_0) \rho_w(r, s; t_0), \quad (3.9)$$

com a convenção  $L^0(u, v, r, s; t) = \delta_{u,r}^{[N]} \delta_{v,s}^{[N]}$  e com  $\rho_w(r, s; t_0)$  sendo a condição inicial.

A derivada temporal de (3.9) é uma soma de termos proporcionais a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} L^n(u, v, r, s; t, t_0) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{x, z=0}^{N-1} \sum_{x_2, z_2=0}^{N-1} \dots \sum_{x_{n-1}, z_{n-1}=0}^{N-1} \int_{t_0}^t d\tau_n \mathcal{L}(u, v, x_{n-1}, z_{n-1}; \tau_n) \right. \\ &\quad \left. \int_{t_0}^t d\tau_{n-1} \mathcal{L}(x_{n-1}, z_{n-1}, x_{n-2}, z_{n-2}; \tau_{n-1}) \dots \int_{t_0}^t d\tau \mathcal{L}(x, z, r, s; \tau) \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

e, usando a regra de Leibniz, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t d\tau \mathcal{L}(u, v, r, s; \tau) = \mathcal{L}(u, v, r, s; t). \quad (3.11)$$

Além disto, da definição do liouvilliano segue que

$$\sum_{r, s=-h}^h \left( \sum_{x, z=-h}^h \mathcal{L}(u, v, x, z; \tau_1) \mathcal{L}(x, z, r, s; \tau_2) \right) y(r, s) \rightleftharpoons [H(\tau_1), [H(\tau_2), Y]], \quad (3.12)$$

onde  $y(r, s)$  é o representante de um dado operador arbitrário  $Y$  do espaço e  $\rightleftharpoons$  indica a relação entre um operador e sua expressão mapeada no espaço de fase.

Agora, considerando a identidade

$$[H(\tau_1), [H(\tau_2), Y]] = [H(\tau_2), [H(\tau_1), Y]] + [[H(\tau_1), H(\tau_2)], Y], \quad (3.13)$$

vê-se que o segundo termo no lado direito,  $[[H(\tau_1), H(\tau_2)], Y]$ , será zero sempre que  $[H(\tau_1), H(\tau_2)] = f(\tau_1, \tau_2)$ . Neste caso

$$[H(\tau_1), [H(\tau_2), Y]] = [H(\tau_2), [H(\tau_1), Y]], \quad (3.14)$$

o que significa que é válida a comutação

$$\sum_{x,z=-h}^h \mathcal{L}(u, v, x, z; \tau_1) \mathcal{L}(x, z, r, s; \tau_2) = \sum_{x,z=-h}^h \mathcal{L}(u, v, x, z; \tau_2) \mathcal{L}(x, z, r, s; \tau_1). \quad (3.15)$$

As equações (3.11) e (3.15) aplicadas à Eq.(3.10) tem como consequência que

$$\frac{\partial}{\partial t} L^n(u, v, r, s; \tau, t_0) = n \sum_{x,z=-h}^h \mathcal{L}(u, v, x, z; t) L^{n-1}(x, z, r, s; \tau, t_0), \quad (3.16)$$

resultando finalmente, para a derivada temporal de (3.9),

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_w(u, v; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n! \hbar^n} n \sum_{x,z=-h}^h \mathcal{L}(u, v, x, z; t) \sum_{r,s=-h}^h L^{n-1}(x, z, r, s; t) \rho_w(r, s; t_0) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_w(u, v; t) = \sum_{x,z=-h}^h \mathcal{L}(u, v, x, z; t) \left( \frac{-i}{\hbar} \right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{n(n-1)! \hbar^{n-1}} n \times \sum_{r,s=-h}^h L^{n-1}(x, z, r, s; t) \rho_w(r, s; t_0) \right\}, \quad (3.18)$$

sendo que basta reindexar as somas em  $\{n\}$  para obter-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_w(u, v; t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_{x,z=-h}^h \mathcal{L}(u, v, x, z; t) \rho_w(x, z; t), \quad (3.19)$$

o que mostra que o *ansatz* (3.9) é uma solução da equação de von Neumann-Liouville quando o comutador de hamiltonianos em tempos diferentes é igual ao operador identidade multiplicado por uma função numérica de  $\tau_1$  e  $\tau_2$ .

As Eqs. (3.7) e (3.8) definem *produtos* de liouvillianos e, desta forma, a Eq.(3.9) pode ser denotada da forma mais compacta

$$\rho_w(u, v; t) = \sum_{r, s=-\hbar}^{\hbar} \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \mathcal{L}(u, v, r, s; \tau) \right] \rho_w(r, s; t_0), \quad (3.20)$$

onde naturalmente a exponencial é apenas uma representação de sua série de potências.

Um hamiltoniano independente do tempo imediatamente simplifica a Eq.(3.20) para a forma

$$\rho_w(u, v; t) = \sum_{r, s=-\hbar}^{\hbar} \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \mathcal{L}(u, v, r, s) \Delta t \right] \rho_w(r, s; t_0), \quad (3.21)$$

e, por outro lado, hamiltonianos para os quais a eq.(3.14) não é válida requerem uma solução de (4.19) na forma de uma série temporalmente ordenada à maneira de Dyson,

$$\rho_w(u, v; t) = \sum_{r, s=-\hbar}^{\hbar} \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} L(u, v, r, s; t, t_0) \right] \rho_w(r, s; t_0), \quad (3.22)$$

onde

$$L^n(u, v, r, s; t, t_0) = \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_{n-1}} \dots \int_{t_0}^{t_2} d\tau_n d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 \sum_{x_1, z_1=-\hbar}^{\hbar} \dots \sum_{x_{n-1}, z_{n-1}=-\hbar}^{\hbar} \mathcal{L}(u, v, x_1, z_1; \tau_1) \mathcal{L}(x_1, z_1, x_2, z_2; \tau_2) \dots \mathcal{L}(x_{n-1}, z_{n-1}, r, s; \tau_n) \quad (3.23)$$

o que pode ser direta, mas tediosamente verificado (novamente a exponencial em (3.22) significa sua série de potências, onde os produtos são definidos da maneira de (3.7) e (3.8)).

Pode-se traçar um paralelo entre os resultados obtidos até aqui com os resultados usuais envolvendo evolução temporal de estados. Para hamiltonianos independentes do tempo, enquanto  $\exp \left[ \frac{-i}{\hbar} H \Delta t \right]$  é responsável pela evolução temporal

de um dado estado,  $\exp\left[\frac{-i}{\hbar}\mathcal{L}\Delta t\right]$  representa o mesmo papel em relação à função de Wigner. Hamiltonianos que dependam do tempo, mas que comutem consigo próprios quando calculados em instantes diferentes ( $[H(t), H(t')] = 0$ ) têm associados um operador de evolução temporal da forma  $\exp\left[\frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^t d\tau H(\tau)\right]$ , em contrapartida à  $\exp\left[\frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^t d\tau \mathcal{L}(\tau)\right]$  no espaço de fase. Porém, neste último caso, no espaço de fase a condição  $[H(t), H(t')] = 0$  pode ser relaxada para  $[H(t), H(t')] = f(t, t')$ . Qualquer hamiltoniano que não comute consigo próprio em tempos diferentes, na linguagem usual de estados, deve ter um operador de evolução temporal descrito por uma série de Dyson, enquanto que na formulação de espaço de fase isto é necessário apenas quando o comutador de  $H(t)$  and  $H(t')$  não for proporcional ao operador identidade.

Há ainda uma maneira alternativa de descrever a evolução temporal da função de Wigner no espaço de fase. Ao invés de tentar-se somar a série de liouvillianos encadeados de maneira direta, como indicado pela eq.(3.9), é possível partir-se da definição

$$P(t) = K(t, t_0) P(t_0) K^\dagger(t, t_0), \quad (3.24)$$

sendo  $K(t, t_0)$  o operador de evolução temporal,

$$K(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H(t, t_0)\right], \quad (3.25)$$

onde  $H(t, t_0)$  representa a expressão responsável pela evolução temporal, apropriada a cada caso, envolvendo o hamiltoniano e o tempo (ou seja,  $H\Delta t$  para hamiltonianos independentes do tempo,  $\int H dt$  para hamiltonianos que comutem consigo próprios em instantes diferentes, ou uma série de Dyson para hamiltonianos absolutamente gerais). A respectiva versão mapeada da equação (3.24) pode ser escrita como

$$\rho_w(u, v; t) = Tr\left[G^\dagger(u, v) K(t, t_0) P(t_0) K^\dagger(t, t_0)\right], \quad (3.26)$$

que, usando a decomposição do operador de evolução temporal na base de operadores,

$$P(t_0) = \sum_{r,s=-\hbar}^{\hbar} G(r,s) \rho_w(r,s;t_0),$$

leva à expressão geral

$$\rho_w(u,v;t) = \sum_{r,s=-\hbar}^{\hbar} \mathcal{P}(u,v;t|r,s;t_0) \rho_w(r,s;t_0), \quad (3.27)$$

onde

$$\mathcal{P}(u,v;t|r,s;t_0) = Tr \left[ G^\dagger(u,v) K(t,t_0) G(r,s) K^\dagger(t,t_0) \right] \quad (3.28)$$

faz o papel do propagador da função de Wigner no espaço de fase. Por outro lado, a equação (3.24) pode ser escrita da forma

$$P(t) = P(t_0) + \frac{i}{\hbar} [H(t,t_0), P(t_0)] + \frac{i^2}{2!\hbar^2} [H(t,t_0), [H(t,t_0), P(t_0)]] + \dots \quad (3.29)$$

que, considerando-se a definição do liouvilliano, é mapeada diretamente em

$$\rho_w(u,v;t) = \sum_{r,s} \left\{ \delta_{r,u}^{[N]} \delta_{s,v}^{[N]} + \frac{i}{\hbar} L(u,v,r,s;t,t_0) + \frac{i^2}{2!\hbar^2} \sum_{x,y} L(u,v,x,y;t,t_0) L(x,y,r,s;t,t_0) + \dots \right\} \rho_w(r,s;t_0), \quad (3.30)$$

onde  $L(u,v,r,s;t,t_0)$  representa a expressão de evolução temporal apropriada a cada caso, o que reproduz a eq.(3.9). As equações (3.27) e (3.28) podem ser implementadas diretamente, porém é nos casos em que é conhecida a representação diagonal do hamiltoniano onde seu uso é mais conveniente.

### 3.2 Sistemas de Spin

Como uma primeira e direta aplicação dos resultados apresentados acima, no que segue será discutida a evolução temporal de um sistema físico consistindo de um

spin arbitrário num campo magnético. Considerando-se o hamiltoniano usual para este caso:

$$H = \frac{|e|\hbar}{m_p c} \vec{S} \cdot \vec{b}, \quad (3.31)$$

que, com uma escolha conveniente do eixo de quantização ( $\vec{b} = b_z \hat{k}$ ) e uma escolha apropriada da energia do estado fundamental, é associado ao espectro de Zeeman

$$H|n\rangle = \hbar\omega n|n\rangle, \quad (3.32)$$

onde  $\omega = \frac{|e|\hbar}{m_p c} |\vec{b}|$ .

A fim de fazer uma conexão com a álgebra de Schwinger, o que auxiliará na definição da base de operadores neste contexto, introduza-se o operador unitário  $U$ , que desloca os índices dos auto-estados de  $S_z$ ,  $|n\rangle$ , da forma

$$U|n\rangle = |n+1\rangle; \quad (3.33)$$

com a condição cíclica

$$U|N-1\rangle = |0\rangle.$$

A analogia com a álgebra de Schwinger segue diretamente e leva à identificação

$$|n\rangle = |v_n\rangle, \quad (3.34)$$

onde  $\{|v_n\rangle\}$  é o conjunto de auto-estados do operador unitário de Schwinger  $V$ . A partir disto, podemos obter a expressão mapeada do hamiltoniano,

$$h(m, n) = \text{Tr}[HG^\dagger(m, n)] = \hbar\omega n, \quad (3.35)$$

e deste resultado é possível escrever a Eq. (4.20) como

$$\mathcal{L}(u, v, r, s) = 2i \sum_{m, n=-\hbar}^{\hbar} \sum_{a, b, c, d=-\hbar}^{\hbar} \frac{\hbar\omega n}{N^4} \sin\left[\frac{\pi}{N}(bc - ad)\right] \times$$

$$e^{[i\pi\Phi(a,b,c,d;N)]} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{N} [a(u-m) + b(v-n) + c(u-r) + d(v-s)] \right\}. \quad (3.36)$$

A soma sobre  $\{m\}$  resulta numa delta de Kroenecker  $\delta_{a,0}^{[N]}$ , e uma vez que a soma sobre  $\{a\}$  seja efetuada, leva a

$$\mathcal{L}(u, v, r, s) = 2i \frac{\hbar\omega}{N^3} \sum_{n,b,c,d=-h}^h n \sin \left[ \frac{\pi}{N} bc \right] \times e^{[i\pi\Phi(0,b,c,d;N)]} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{N} [b(v-n) + c(u-r) + d(v-s)] \right\}. \quad (3.37)$$

O resultado

$$\sum_{m=-h}^h m \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} xm \right] = \begin{cases} \frac{N \cos[\frac{\pi x}{N}]}{2i \sin[\frac{\pi x}{N}]}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

aplicado à (3.37) resulta, finalmente, num liouvilliano da forma

$$\mathcal{L}(u, v, r, s) = \frac{\hbar\omega}{N^2} \sum_{b=-h(b \neq 0)}^h \sum_{c,d=-h}^h \sin \left[ \frac{\pi}{N} bc \right] \frac{\cos[\pi b]}{\sin[\frac{\pi b}{N}]} \exp [i\pi\phi(c, b + d; N)] \exp \left\{ \frac{2\pi i}{N} [bv + c(u-r) + d(v-s)] \right\}. \quad (3.39)$$

Como um comentário paralelo, pode-se observar que o sistema encontrando-se num auto-estado do hamiltoniano estará num estado estacionário, ou seja

$$\sum_{r,s=-h}^h \mathcal{L}(u, v, r, s) \rho_w^{\text{auto-est}}(r, s; t) = 0,$$

sendo que de fato qualquer quantidade conservada terá de obedecer

$$\sum_{r,s=-h}^h \mathcal{L}(u, v, r, s) o(r, s) = 0. \quad (3.40)$$

Voltando ao ponto da evolução temporal da função de Wigner, verifica-se que esta pode ser diretamente implementada nas ordens mais baixas de tempo,

$$\rho_w(u, v; t_0 + \delta t) = \rho_w(u, v; t_0) - \frac{i}{\hbar} \delta t \sum_{r,s=-h}^h \mathcal{L}(u, v, r, s) \rho_w(r, s; t_0)$$

ou pode-se buscar diretamente o resultado mais geral

$$\rho_w(u, v; t) = \rho_w(u, v; t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n! \hbar^n} (t - t_0)^n \sum_{r,s=-\hbar}^{\hbar} \mathcal{L}^n(u, v, r, s) \rho_w(r, s; t_0). \quad (3.41)$$

Um resultado interessante pode ser obtido tratando-se o mesmo problema sob o ponto de vista do propagador no espaço de fase. Para encontrar-se  $\mathcal{P}(u, v; t | r, s; t_0)$  para a interação descrita pela Eq.(4.33), basta considerar diretamente a Eq.(3.28).

Uma vez que o hamiltoniano é independente do tempo é direto obter-se

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u, v; t | r, s; t_0) = & \frac{1}{N} \sum_c \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} c(u - r) \right] \exp \left[ -i\mu c \frac{(t - t_0)}{\hbar} \right] \delta_{v,s}^{[N]} + \\ & \frac{1}{N^3} \sum_{bckd} \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} c(u - r) \right] \exp \left[ -i\mu c \frac{(t - t_0)}{\hbar} \right] \exp \left[ \frac{i\pi}{N} c(b - d) \right] \\ & \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} k(b - d) + bn - ds \right] \left\{ \exp \left[ i \frac{\mu N (t - t_0)}{\hbar} I_{k+c}^N \right] - 1 \right\}. \quad (3.42) \end{aligned}$$

Considerando-se a situação particular onde os intervalos de tempo são da forma (em analogia aos intervalos de tempos introduzidos em [21]):

$$t_k = t - t_0 = \frac{1}{\omega} \frac{2\pi}{N} k, \quad (3.43)$$

sendo  $k$  um número natural, tem-se para a Eq.(3.27)

$$\rho_w(u, v; t_k) = \frac{1}{N} \sum_{r,c=0}^{N-1} \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [c(u - r - k)] \right] \rho_w(r, v; 0).$$

Agora, a soma sobre  $\{c\}$  resulta na delta  $\delta_{u-k,r}^{[N]}$ , que leva em

$$\rho_w(u, v; t_k) = \rho_w(u - k, v; 0), \quad (3.44)$$

o que remete ao resultado que, quando são considerados estes intervalos de tempo discretos, a função de Wigner, para qualquer valor inicial  $\rho_w(u, v; 0)$ , é transladada na grade de pontos definidos no espaço de fase discreto. Este resultado bastante peculiar é o ponto de partida básico da discussão apresentada no próximo capítulo.

## Capítulo 4

### Operador Intervalo de Tempo

A discussão sobre a evolução temporal apresentada no capítulo anterior apontou para um resultado bastante interessante, a propagação da função de Wigner sob a forma de uma translação sobre determinados sítios do espaço de fase, uma vez que os intervalos de tempo sejam considerados como múltiplos de uma determinada unidade básica. Este resultado na verdade é consequência de uma estrutura algébrica envolvendo o hamiltoniano e um operador complementar, que ocorre em determinadas situações.

#### 4.1 Evolução temporal como uma translação sobre sítios

É possível discutir-se de forma bastante geral uma situação onde a evolução temporal ocorre à maneira da equação (3.44). Entretanto, é necessário em primeiro lugar ter bem definidos os elementos da base de operadores, Eq.(2.18), que será necessária ao longo da discussão. Para isto, será seguida uma prescrição análoga à feita no capítulo anterior, Eq.(3.34), utilizando-se agora, sem perda de generalidade, os auto-estados do operador de Schwinger  $U$ .

Considere-se um hamiltoniano arbitrário independente do tempo e seu conjunto

de  $N$  auto-estados,

$$H|u_k\rangle = E_k|u_k\rangle, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.1)$$

onde já se escolheu uma notação que se mostrará adequada no que segue. Introduza-se o operador,

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k\rangle\langle u_{k+1}|, \quad (4.2)$$

que age nos auto-estados de energia da forma

$$V^s|u_n\rangle = |u_{n-s}\rangle. \quad (4.3)$$

A partir disto, toda a álgebra de Weyl-Schwinger pode ser recuperada, com o conjunto  $\{|u_k\rangle\}$  diagonalizando simultaneamente o hamiltoniano em questão e o operador de Schwinger  $U$ . Com isto os elementos da base de operadores, Eq.(2.18), ficam bem definidos. Adota-se aqui uma convenção diferente da adotada no capítulo anterior (onde os auto-estados do hamiltoniano foram identificados com os auto-estados de  $V$ ), apenas para ilustrar a liberdade que existe na definição dos elementos de base. Por simplicidade assumir-se-á neste capítulo  $N$  primo.

O operador densidade para qualquer instante de tempo já foi introduzido no capítulo anterior,

$$P(t + \Delta\tau) = \exp\left[-\frac{iH\Delta\tau}{\hbar}\right] P(t) \exp\left[\frac{iH\Delta\tau}{\hbar}\right],$$

e procurar-se-á agora a expressão mapeada da equação acima com a condição que a hipótese

$$\mathcal{G}(\Delta\tau) = \exp\left[-\frac{iH\Delta\tau}{\hbar}\right] = U^{-k}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.4)$$

seja válida, ou seja, que o operador de evolução temporal, unitário por definição, venha a ser igual a uma potência *inteira* do operador unitário de Schwinger  $U$ , em

algum intervalo de tempo específico  $\Delta\tau$ . A escolha de uma potência negativa é mera conveniência, uma vez que, de acordo com a Eq.(2.7),  $U^{-k} = U^{N-k}$ . A razoabilidade desta hipótese será verificada *a posteriori*.

Como sabido, a função de Wigner discreta pode ser diretamente obtida da expressão,

$$\rho_w(m, n; t + \Delta\tau) = Tr[G^\dagger(m, n)P(t + \Delta\tau)], \quad (4.5)$$

e, de acordo com a hipótese (4.4),

$$\rho(m, n; t + \Delta\tau) = Tr[G^\dagger(m, n)U^{-k}P(t)U^k], \quad (4.6)$$

e decompondo-se o operador densidade no instante  $t$  na base de operadores,

$$\rho(m, n; t + \Delta\tau) = Tr[G_{mn}^\dagger U^{-k} \left( \frac{1}{N} \sum_{r,s=-h}^h \rho_w(r, s; t) G(r, s) \right) U^k] \quad (4.7)$$

$$\rho_w(m, n; t + \Delta\tau) = \frac{1}{N^3} Tr \left[ \sum_{j,l=-h}^h V^{-l} U^{-j} \exp \left[ -\frac{i\pi}{N} jl \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (mj + nl) \right] \times \right. \\ \left. U^{-k} \sum_{r,s=-h}^h \rho_w(r, s; t) \times \sum_{x,z=-h}^h U^x V^z \exp \left[ \frac{i\pi}{N} xz \right] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (xr + zs) \right] U^k \right], \quad (4.8)$$

o que, usando a comutação de Weyl entre  $V^z$  e  $U^k$ , assume a forma

$$\rho_w(m, n; t + \Delta\tau) = \frac{1}{N^3} \sum_{j,l=-h}^h \sum_{r,s=-h}^h \sum_{x,z=-h}^h Tr[V^{-l} U^{-j} U^x V^z] \exp \left[ -\frac{i\pi}{N} jl \right] \\ \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (mj + nl) \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} zk \right] \\ \rho_w(r, s; t) \exp \left[ \frac{i\pi}{N} xz \right] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (xr + zs) \right]. \quad (4.9)$$

O traço no primeiro termo do lado direito de (4.9) pode ser trivialmente calculado como  $N \delta_{z,l}^{[N]} \delta_{x,j}^{[N]}$ , resultando em

$$\rho_w(m, n; t + \Delta\tau) = \frac{1}{N^2} \sum_{j,l=-h}^h \sum_{r,s=-h}^h \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (j(m-r) + l(n-s+k)) \right] \rho_w(r, s; t). \quad (4.10)$$

As somas em  $\{j, l\}$  também resultam em deltas, de forma que

$$\rho_w(m, n; t + \Delta\tau) = \frac{1}{N^2} \sum_{r, s=-h}^h \delta_{m,r}^{[N]} \delta_{s, n+k}^{[N]} \rho_w(r, s; t), \quad (4.11)$$

que dá finalmente

$$\rho_w(m, n; t + \Delta\tau) = \rho_w(m, n + k; t). \quad (4.12)$$

A equação (4.12) mostra que a hipótese (4.4) tem como consequência que a evolução temporal da função de Wigner será análoga à descrita pela eq.(3.44) . Observe-se que este resultado ocorre de fato em sistemas com realidade física palpável, como é o apresentado no capítulo anterior, onde apenas admitiu-se que os intervalos de tempo considerados fossem múltiplos de uma unidade básica específica.

A hipótese (4.4) tem ainda outras consequências. A mais direta é que, se de fato para um dado  $\Delta\tau$  a hipótese é verdadeira, segue diretamente que, para qualquer inteiro  $n$ ,

$$\left( \exp \left[ -\frac{iH\Delta\tau}{\hbar} \right] \right)^n = (U^{-k})^n \quad (4.13)$$

$$\exp \left[ -\frac{iH(n\Delta\tau)}{\hbar} \right] = U^{-kn}, \quad (4.14)$$

sendo que a ciclicidade de  $U$  implica que

$$\exp \left[ -\frac{iH(n\Delta\tau)}{\hbar} \right] = U^{-kn \pmod{N}}, \quad (4.15)$$

ou seja, uma vez que um intervalo de tempo obedeça (4.4), uma família infinita de intervalos, formada por todos seus múltiplos inteiros, obedecerá uma condição semelhante. Ainda, se o operador de evolução temporal é igual a uma potência  $-k$  do operador de Schwinger  $U$ , logo esse comutará *à la* Weyl com o operador complementar  $V$  através da relação

$$\exp \left[ \frac{-iH\Delta\tau}{\hbar} \right] V^{-j} = \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} jk \right] V^{-j} \exp \left[ \frac{-iH\Delta\tau}{\hbar} \right], \quad (4.16)$$

obtida diretamente da comutação de Weyl-Schwinger simplesmente substituindo-se  $U^{-k}$  por  $\exp\left[\frac{-iH\Delta\tau}{\hbar}\right]$ . Este, com certeza, é um resultado digno de nota ao qual se retornará no momento oportuno.

Agora que são conhecidas as consequências algébricas imediatas da hipótese (4.4), o passo seguinte consiste em procurar pelas situações físicas nas quais esta de fato se verifica. Neste ponto, lança-se mão do formalismo de espaço de fase discreto, mapeando-se os operadores envolvidos, obtendo-se

$$(U^{-k})(m, n) = \exp\left[-\frac{2\pi i}{N}km\right], \quad (4.17)$$

$$(\mathcal{G}(\Delta t))(m, n) = g(m, n; \Delta t) = \exp\left[-\frac{iE_m\Delta t}{\hbar}\right], \quad (4.18)$$

respectivamente, de modo que a hipótese inicial tem sua contraparte no espaço de fase da forma

$$\exp\left[-\frac{iE_m\Delta t}{\hbar}\right] = \exp\left[-\frac{2\pi i}{N}km\right], \quad (4.19)$$

o que significa que

$$\frac{E_m\Delta t}{\hbar} = \frac{2\pi}{N}km \pmod{2\pi}. \quad (4.20)$$

Ou seja, a igualdade (4.20) é equivalente à hipótese (4.4), com todas as suas consequências já discutidas.

A equação (4.20) é, de fato, um conjunto de  $N$  equações (uma para cada  $m$ ) que devem ser satisfeitas separadamente para um dado par  $\{k, \Delta t\}$  (ou seja, para um dado intervalo de tempo e uma dada potência de  $U$ ). Estas podem ser escritas como

$$\frac{E_m\Delta t}{\hbar} = \frac{2\pi}{N}km + 2\pi f(m), \quad (4.21)$$

onde  $f(m)$  é uma função inteira totalmente arbitrária. Finalmente

$$E_m \frac{N\Delta t}{2\pi\hbar} = km + Nf(m). \quad (4.22)$$

O lado direito da equação (4.22) é um número inteiro, enquanto o esquerdo é o produto de dois, em princípio, reais. É portanto claro que uma condição necessária para que a Eq.(4.22) apresente uma solução é que exista um dado número real  $\lambda$  para o qual o conjunto  $\left\{ \frac{E_m}{\lambda} \right\}$  seja um conjunto de inteiros. Para que tal condição se torne uma condição suficiente é necessário que este conjunto seja um conjunto completo de resíduos modulo  $N[22]$ , afinal, para  $N$  primo, o lado da direita desta equação pode ser facilmente verificado como de fato um conjunto completo de resíduos modulo  $N$ . Em suma, a Eq.(4.19) só terá soluções se for possível descrever o espectro do hamiltoniano na forma

$$E_m = \hbar\omega (km + Nf(m)), \quad (4.23)$$

onde  $k$  é um inteiro no intervalo  $[0, N - 1]$  e  $\omega$  uma constante definida de maneira conveniente a partir dos parâmetros do espectro. De (4.20) e (4.23) pode-se perceber que o menor valor para o qual  $\mathcal{G}(\Delta t) = U^{-k}$  é

$$\Delta\tau = \frac{2\pi}{N} \frac{1}{\omega}, \quad (4.24)$$

de maneira que todos os seus múltiplos inteiros associarão o operador de intervalo de tempo a determinadas potências de  $U^{-k}$ . Uma vez que  $N$  é primo, e dada a ciclicidade de  $U$ , o conjunto das  $N$  primeiras potências de  $U^{-k}$  será equivalente ao conjunto  $\{1, U, U^2, \dots, U^{N-1}\}$  em alguma ordem trocada, o mesmo valendo para o segundo conjunto de  $N$  potências de  $U$  e assim sucessivamente.

Desta forma, sempre que a evolução temporal for estudada considerando-se intervalos de tempo como sendo múltiplos da unidade definida em (4.24), nos casos onde a equação (4.23) é válida, a hipótese (4.4) será verificada.

Em particular, escolhendo-se um intervalo de tempo da forma  $\Delta\tau_r = N\Delta\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

tem-se,

$$\mathcal{G}(\Delta\tau_r) = U^{-kN(\text{mod } N)} = U^0 = \hat{1}, \quad (4.25)$$

significando que, para qualquer estado arbitrário  $|\psi(t)\rangle$ , haverá intervalos de tempo com a propriedade,

$$|\psi(t + n\Delta\tau_r)\rangle = \mathcal{G}(n\Delta\tau_r)|\psi(t)\rangle = |\psi(t)\rangle, \quad (4.26)$$

onde  $n$  é qualquer inteiro. O intervalo de tempo  $\Delta\tau_r$ , e todos os seus múltiplos inteiros, têm a propriedade de fazer com que o sistema retorne ao seu estado inicial, seja ele qual for. Portanto, estes intervalos de tempo serão denotados por ‘tempos de recorrência’.

A existência de tempos de recorrência, porém, pode ser observada mesmo quando a condição (4.23) não é válida. Para que existam tempos de recorrência basta que se observe a condição

$$\mathcal{G}(\Delta t) = \hat{1}, \quad (4.27)$$

que é um caso particular, mais restritivo, de (4.4). Como anteriormente, procurar-se-ão soluções desta equação com o auxílio das expressões mapeadas no espaço de fase de ambos operadores envolvidos. O representante no espaço de fase do operador identidade pode ser diretamente obtido,

$$(\hat{1})_{m,n} = 1, \quad (4.28)$$

de modo que a versão mapeada da equação (4.27) é

$$\exp\left[-\frac{iE_m\Delta t}{\hbar}\right] = 1. \quad (4.29)$$

De maneira similar ao que foi feito anteriormente vê-se que a condição para que a equação (4.27) se mantenha é

$$E_m = \hbar\omega g(m), \quad (4.30)$$

onde  $g(m)$  é uma função inteira arbitrária de  $m$ . A equação (4.30) simplesmente diz que todos os auto-valores de energia devem ser múltiplos de uma unidade básica  $\hbar\omega$ . É direto observar-se que qualquer espectro que satisfaça (4.23) satisfaz também (4.30) (embora o inverso não seja verdade).

## 4.2 Operador Intervalo de Tempo

Foi visto que, para hamiltonianos cujos espectros obedecem a equação (4.23) e, em valores de intervalo de tempo múltiplos do definido em (4.24), o operador de evolução temporal é equivalente a uma potência do operador unitário de Schwinger  $U^{-k}$  e a comutação de Weyl-Schwinger é, portanto, observada, ou seja,

$$\exp\left[\frac{-iH(n\Delta\tau)}{\hbar}\right] V^{-j} = \exp\left[\frac{2\pi i}{N}(nk)j\right] V^{-j} \exp\left[\frac{-iH(n\Delta\tau)}{\hbar}\right]. \quad (4.31)$$

O operador  $V^{-j}$  age re-rotulando ciclicamente os auto-estados do hamiltoniano, Eq. (4.3),

$$V^{-j}|u_n\rangle = |u_{n+j}\rangle,$$

onde os ciclos são evidenciados pela extração de módulo  $N$  do rótulo  $\{n + j\}$ . O operador de evolução temporal, por sua vez, age num estado arbitrário da forma

$$\exp\left[\frac{-iH(n\Delta\tau)}{\hbar}\right] |\psi(t)\rangle = |\psi(t + n\Delta\tau)\rangle \quad (4.32)$$

sendo que, levando-se em conta a existência do tempo de recorrência  $N\Delta\tau$ , para valores de  $n$  maiores que  $N$  ( $N$  é a dimensão do espaço de estados) tem-se

$$n = n(\text{mod } N) + lN, \quad (4.33)$$

onde  $l$  é um inteiro positivo arbitrário. Com isto,

$$\exp \left[ \frac{-iHn\Delta\tau}{\hbar} \right] = \exp \left[ \frac{-iH(n(\text{mod } N))\Delta\tau}{\hbar} \right] \exp \left[ \frac{-iH(l\Delta\tau_r)}{\hbar} \right] \quad (4.34)$$

$$\exp \left[ \frac{-iHn\Delta\tau}{\hbar} \right] = \exp \left[ \frac{-iH(n(\text{mod } N))\Delta\tau}{\hbar} \right] \quad (4.35)$$

e a equação (4.32) assume a forma

$$\exp \left[ \frac{-iHn\Delta\tau}{\hbar} \right] |\psi(t)\rangle = |\psi(t + (n(\text{mod } N))\Delta\tau)\rangle, \quad (4.36)$$

explicitando um comportamento cíclico na evolução temporal, consequência imediata da igualdade entre o operador de evolução temporal e o operador de Schwinger  $U$ .

Visto isso, é possível escrever o operador de Schwinger  $V$  com o auxílio do operador hermiteano

$$T = \frac{2\pi}{\omega k} \sum_{j=0}^{N-1} j |v_j\rangle \langle v_j|, \quad (4.37)$$

sendo que pode ser obtido que

$$\exp \left[ -\frac{iT(E_{m+s} - E_m)}{\hbar} \right] = V^{-s}, \quad (4.38)$$

sempre que o espectro  $\{E_m\}$  satisfizer (4.23). A equação (4.16) pode então ser reescrita

$$\exp \left[ \frac{-iHn\Delta\tau}{\hbar} \right] \exp \left[ \frac{-iT\Delta E_l}{\hbar} \right] = \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} nkl \right] \exp \left[ \frac{-iHn\Delta\tau}{\hbar} \right] \exp \left[ \frac{-iT\Delta E_l}{\hbar} \right], \quad (4.39)$$

onde  $\Delta E_l = E_{m+l} - E_m$ . Não pode-se deixar de notar a semelhança de (4.39) com a relação de comutação canônica entre os operadores unitários

$$\exp \left[ \frac{-iX\Delta p}{\hbar} \right] \exp \left[ \frac{-iP\Delta x}{\hbar} \right] = \exp \left[ \frac{i\Delta x\Delta p}{\hbar} \right] \exp \left[ \frac{-iP\Delta x}{\hbar} \right] \exp \left[ \frac{-iX\Delta p}{\hbar} \right], \quad (4.40)$$

onde  $X$  e  $P$  são os operadores usuais de posição e momento no caso contínuo.

Da eq.(4.37) não é difícil obter-se os auto-estados e os auto-valores de  $T$ , uma vez que este já está escrito em termos de sua representação diagonal,

$$T|v_k\rangle = t_k|v_k\rangle = \Delta\tau k|v_k\rangle. \quad (4.41)$$

#### 4.2.1 O Comutador $[H, T]$

As expressões mapeadas no espaço de fase do operador de intervalo de tempo e do hamiltoniano podem ser diretamente encontradas

$$(T)(m, n) = \Delta\tau n \quad (4.42)$$

$$(H)(m, n) = E_m, \quad (4.43)$$

e com isto em mãos é possível obter-se a expressão mapeada do comutador entre  $H$  e  $T$ , utilizando o resultado geral obtido no capítulo 2, Eq.(2.30)

$$[O_1, O_2](m, n) = \frac{2i}{N^4} \sum_{u,v,r,s=-h}^h \sum_{a,b,c,d=-h}^h o_1(u, v) o_2(r, s) \sin \left[ \frac{\pi}{N} (bc - ad) \right] \\ \exp [i\pi\Phi(a, b, c, d; N)] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [a(m - u) + b(n - v) + c(m - r) + d(n - s)] \right],$$

que, no caso, assume a forma

$$[H, T](m, n) = \frac{2i}{N^4} \sum_{u,v,r,s=-h}^h \sum_{a,b,c,d=-h}^h E_u \Delta\tau s \sin \left[ \frac{\pi}{N} (bc - ad) \right] \exp [i\pi\Phi(a, b, c, d; N)] \\ \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [a(m - u) + b(n - v) + c(m - r) + d(n - s)] \right]. \quad (4.44)$$

As somas em  $\{v\}$  e  $\{r\}$  podem ser efetuadas resultando em  $\delta_{b,0}^{[N]} \delta_{c,0}^{[N]}$ , que uma vez somadas levam a

$$[H, T](m, n) = \frac{2i}{N^2} \Delta\tau \sum_{u,s,a,d=-h}^h s E_u \sin \left[ -\frac{\pi}{N} ad \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [a(m - u) + d(n - s)] \right]. \quad (4.45)$$

No caso já discutido do espectro linear (capítulo 3), a equação (4.45), usando-se o resultado

$$\sum_{m=-h}^h m \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} am \right] = \begin{cases} \frac{N \cos[\pi a]}{2i \sin[\frac{\pi a}{N}]}, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

para as somas em  $\{u, s\}$ , assume finalmente a forma

$$[H, T](m, n) = \frac{1}{2i} \sum_{a, d \neq 0=-h}^h \frac{2\pi \hbar \sin \left[ -\frac{\pi}{N} ad \right] \cos[\pi d] \cos[\pi a]}{N \sin \left[ \frac{\pi}{N} a \right] \sin \left[ \frac{\pi}{N} d \right]} \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} [am + dn] \right]. \quad (4.47)$$

### 4.3 Relógio Quântico

O operador intervalo de tempo apresenta uma característica bastante interessante. Para detalhá-la, considere-se um dado sistema  $S$  descrito por um hamiltoniano cujo espectro obedeça (4.23). Em um dado instante  $t_0$ , assumase que o sistema encontra-se num auto-estado  $|v_i\rangle$  do operador de intervalo de tempo. A função de Wigner correspondente neste instante pode ser imediatamente calculada da forma

$$\rho_w(m, n; t_0) = Tr[G^\dagger(m, n)|v_i\rangle\langle v_i|] \quad (4.48)$$

resultando em

$$\rho_w(m, n; t_0) = \delta_{n,i}^{[N]}. \quad (4.49)$$

Usando o resultado da eq.(4.12) para a evolução temporal

$$\rho_w(m, n; t_0 + k\Delta\tau) = \rho_w(m, n + k; t_0)$$

que, considerando a eq.(4.49), leva a uma evolução temporal da forma

$$\rho_w(m, n; t_0 + k\Delta\tau) = \delta_{n,i+k}^{[N]}. \quad (4.50)$$

Este resultado demonstra que quando o sistema inicia sua evolução temporal em (ou visita num determinado instante) um auto-estado do operador intervalo de tempo, o mesmo estará em outro auto-estado do operador intervalo de tempo, *sem qualquer incerteza*, após qualquer número inteiro de intervalos  $\Delta\tau$ . Com isto, parece razoável adotarmos para os intervalos  $n\Delta\tau$  o termo de ‘tempos de relógio’, levando-se em conta que estes valores são auto-valores de um operador hermiteano, um observável portanto.

#### 4.4 Algumas propriedades adicionais

A evolução temporal de um sistema foi discutida em detalhes no capítulo 3, onde foi visto que esta envolve uma série de somas que podem tornar-se extremamente complicadas para serem executadas analiticamente. Por outro lado, a evolução temporal pode ser efetuada numericamente e, neste aspecto, a Eq.(4.12) tem uma consequência prática muito importante, na medida em que é sempre possível decompor um intervalo de tempo maior que  $\Delta\tau$  da forma

$$\Delta t = k(\Delta\tau) + \Delta t_{res} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.51)$$

onde  $\Delta t_{res} < \Delta\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ . Portanto, para evoluir-se um sistema de  $t$  até  $t + \Delta t$ , é possível antes evoluir-se trivialmente o sistema de  $t$  até  $t + k\Delta\tau$ , onde  $\Delta\tau$  é um auto-valor do operador de intervalo de tempo, para então evoluir o trecho residual de  $t + k\Delta\tau$  até  $t + k\Delta\tau + \Delta t_{res}$ .

Uma questão natural que se impõe neste ponto é a seguinte: existem relações de incerteza envolvendo intervalo de tempo e energia? Deve-se considerar que, como o comutador entre estes dois operadores não é, e não pode ser [23], proporcional ao operador identidade, não há como encontrar-se uma relação de incerteza simples

como, por exemplo, a relação canônica usual entre posição e momento contínuos. De fato, devido à finitude do espaço de estados, há casos onde o limite inferior para o produto das incertezas  $|\langle \Delta H \rangle|^2 |\langle \Delta T \rangle|^2$  é zero. Por outro lado, os auto-estados de ambos operadores são ligados por uma transformada de Fourier discreta, o que faz com que estes sejam estados de *máxima incompatibilidade* [8], o que é o ponto importante a ser observado. De fato, no caso discreto, a relação entre a largura de uma dada distribuição na representação  $\{|u_m\rangle\}$  (auto-estados de  $H$ ) e sua equivalente na representação  $\{|v_m\rangle\}$  (auto-estados de  $T$ ) mantém o mesmo caráter que o caso contínuo de duas representações com grau máximo de incompatibilidade. A diferença fundamental é que, no caso discreto, como já dito, não há um limite inferior para o produto das larguras (incertezas), afinal distribuições com largura zero numa representação, quando escritas na outra, ainda tem uma largura finita devido à própria finitude do espaço.

Quanto à amplitude de correlação, pode-se perceber que esta também tem um comportamento peculiar quando consideram-se intervalos de tempo múltiplos de  $\Delta\tau$ . De fato

$$\langle \psi(0) | \psi(k\Delta\tau) \rangle = \sum_{m,n} \langle E_n | a_n^* \hat{G}(k\Delta\tau) a_m | E_m \rangle \quad (4.52)$$

onde os  $\{a_m\}$  são coeficientes de decomposição de um dado estado na base de auto-estados de  $H$ . Seguindo,

$$\langle \psi(0) | \psi(k\Delta\tau) \rangle = \sum_{m,n} a_n^* a_m \langle u_n | U^{-k} | u_m \rangle \quad (4.53)$$

$$\langle \psi(0) | \psi(k\Delta\tau) \rangle = \sum_{m,n} a_n^* a_m \exp\left[-\frac{2\pi i}{N} km\right] \delta_{m,n}^{[N]} \quad (4.54)$$

$$\langle \psi(0) | \psi(k\Delta\tau) \rangle = \sum_m |a_m|^2 \exp\left[-\frac{2\pi i}{N} km\right]. \quad (4.55)$$

A equação (4.55) reflete, mais uma vez, a natureza cíclica da evolução temporal. Por outro lado, há uma analogia com o caso contínuo (entre tempo e energia) onde a amplitude de correlação é relacionada, em uma *aproximação*, à transformada de Fourier da distribuição de energias [24]. No caso discreto a amplitude de correlação, nos intervalos de tempo específicos considerados, é *exatamente* a transformada de Fourier discreta da distribuição de energia.

#### 4.5 Análise e conclusões quanto ao operador intervalo de tempo.

O resultado básico obtido neste capítulo é bastante simples: Foi identificado um operador hermiteano, portanto um observável físico, relacionado, de alguma forma, a *tempo*. De fato, este não é propriamente o parâmetro contínuo  $t$ , mas é relacionado a um conjunto finito de intervalos de tempo. Este operador, quando definido nas condições discutidas neste capítulo, tem as seguintes propriedades:

- i) é responsável por transformações cíclicas no espectro de energia;
- ii) sua exponencial obedece comutação de Weyl-Schwinger com o operador de evolução temporal;
- iii) é um operador hermiteano cujos auto-valores formam um conjunto de intervalos de tempo de papel importante na evolução temporal;
- iv) os auto-estados do operador de intervalo de tempo são ligados aos auto-estados de energia por uma transformada de Fourier discreta e, portanto, são estados que apresentam um grau máximo de incompatibilidade entre si.

A comutação de Weyl-Schwinger, porém, é obedecida apenas para certos valores de  $\Delta t$ , que são exatamente os auto-valores do operador intervalo de tempo. Com este conjunto discreto de intervalos de tempo *não* está se fazendo qualquer tipo de hipótese sobre o parâmetro de tempo  $t$ , apenas discutindo-se as propriedades destes intervalos específicos, que parecem suficientes para que estes sejam denotados por *tempos de relógio*.

A questão de observáveis relacionados a tempo em mecânica quântica é de longa data e ainda permanece em aberto. Não foi intenção deste texto fazer uma discussão mais aprofundada sobre as várias tentativas teóricas já existentes neste campo. Fez-se apenas referência ao resultado fundamental de Pauli, que afasta a possibilidade de encontrar-se um operador complementar (do tipo posição-momento, com um comutador proporcional ao operador identidade) ao operador hamiltoniano.

Como um comentário final, pode-se fazer uma breve digressão a respeito das subjetivas interpretações do conceito de tempo. Para medir-se tempo, é necessário fazer-se algum tipo de referência a alguma quantidade que ‘mude’ continuamente. De um ponto de vista quântico, um processo de medida deve estar relacionado aos auto-valores de algum operador hermiteano. Neste sentido, o que se fez neste capítulo foi mostrar-se como identificar uma quantidade variante relacionada a um dado sistema físico, quantidade que quando considera-se o tempo evoluindo em ‘saltos’ específicos, é capaz de servir, em princípio, como um relógio quântico.

## Capítulo 5

### Aplicação: Dinâmica do modelo de Lipkin

Neste ponto do desenvolvimento torna-se interessante aplicar o formalismo apresentado num modelo com conteúdo físico mais abrangente. O modelo solúvel de Lipkin-Meshkov-Glick [16] é bastante conhecido e tem servido como um confiável campo de testes de diferentes abordagens teóricas de sistemas de muitos corpos, sendo portanto, ideal para os propósitos deste capítulo. Originalmente, foi proposto sob a forma de um hamiltoniano de muitos férmions

$$H = \frac{\epsilon}{2} \sum_{q,\sigma} \sigma a_{q,\sigma}^\dagger a_{q,\sigma} + \frac{V}{2} \sum_{q,q',\sigma} a_{q,\sigma}^\dagger a_{q',\sigma}^\dagger a_{q',-\sigma} a_{q,-\sigma}, \quad (5.1)$$

onde uma coleção de um número par  $N_p$  de férmions é distribuída em dois níveis  $N_p$ -degenerados separados por uma energia  $\epsilon$ . Os estados degenerados de cada nível são rotulados por um número quântico  $q$ , que assume valores entre 1 e  $N_p$ ;  $\sigma$  rotula o nível, assumindo o valor  $+1$  para o mais alto e  $-1$  para o mais baixo.

O modelo pode ser descrito de maneira mais compacta uma vez que sejam introduzidos operadores de quase spin

$$J_+ = \sum_q a_{q,+1}^\dagger a_{q,-1}, \quad (5.2)$$

$$J_- = \sum_q a_{q,-1}^\dagger a_{q,+1}, \quad (5.3)$$

e

$$J_z = \frac{1}{2} \sum_{q,\sigma} \sigma a_{q,\sigma}^\dagger a_{q,\sigma}, \quad (5.4)$$

de maneira que o hamiltoniano assuma portanto a forma

$$H = \epsilon J_z + \frac{V}{2} (J_+^2 + J_-^2). \quad (5.5)$$

O termo  $J_z$  dá a diferença entre o número de partículas dos níveis superior e inferior, enquanto o segundo termo é associado à interação entre um par de partículas num mesmo nível de energia, movendo este par para outro nível sem alterar o número quântico  $q$  de cada partícula.

É direto verificar que estes operadores obedecem às relações de comutação da álgebra de  $su(2)$ ,

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad (5.6)$$

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm. \quad (5.7)$$

Finalmente, é útil escrever o hamiltoniano em unidades de  $\epsilon$  enquanto o termo de interação é escalonado pelo número de partículas da forma

$$H_L = \frac{H}{\epsilon} = J_z + \frac{\chi}{2N_p} (J_+^2 + J_-^2), \quad (5.8)$$

com a introdução de uma nova constante de acoplamento  $\chi = N_p V / \epsilon$ .

Estando o hamiltoniano escrito em termos dos operadores de quase spin e considerando o fato que  $[H, J^2] = 0$ , é imediato verificar que este pode ser diagonalizado dentro de cada multipletto de dimensão  $2J + 1$  rotulado pelos auto-valores de  $J^2$  e  $J_z$ . Note-se também que o estado fundamental pertence ao multipletto  $J = N_p/2 = \max J_z$ , rotulado pelos auto-valores  $\frac{N_p}{2} \left( \frac{N_p}{2} + 1 \right)$  e  $-\frac{N_p}{2}$  respectivamente.

Ainda, de considerações de simetria, é imediato perceber-se que o modelo apresenta algumas quantidades discretas conservadas. A constante de movimento mais simples é associada ao operador de paridade

$$\Pi = \exp(i\pi J_z), \quad (5.9)$$

indicando que a matriz do hamiltoniano na representação  $J_z$  se quebra em dois blocos disjuntos referentes a auto-valores pares e ímpares de  $J_z$ , respectivamente. Outra propriedade interessante do espectro de energia é consequência do fato do hamiltoniano anti-comutar com o operador

$$R = \exp\left(i\frac{\pi}{2}J_z\right)\exp(i\pi J_y) = \sum_{m=-N_p}^{N_p} | -m \rangle (-1)^{N_p+m} \langle m |. \quad (5.10)$$

Este operador corresponde a uma rotação no espaço de momentos angulares pelos ângulos de Euler  $(-\frac{\pi}{2}, \pi, 0)$ , transformando portanto  $H \rightarrow -H$ . Como resultado desta anti-comutação, verifica-se que se  $| E_j \rangle$  é um auto-estado de energia com auto-valor  $E_j$ , então o estado  $R | E_j \rangle$  também é um auto-estado de energia porém com auto-valor  $-E_j$ . Logo, o espectro é simétrico em torno de zero.

A solução exata deste problema quântico é conhecida de longa data e foi encontrada primeiramente por Lipkin, para diferentes  $N_p$ 's [16]. De posse do espectro obtém-se a quantidade  $(E_1 - E_0)/\epsilon$ , que caracteriza o comportamento do modelo em função do parâmetro de interação  $\chi$ . Esta quantidade é indicadora de uma *transição de fase*, para o estado fundamental, prevista pelo modelo no limite  $N_p \rightarrow \infty$ .

## 5.1 Descrição de espaço de fase discreto

Com o objetivo de descrever a dinâmica do modelo, como apresentado na secção anterior, considere-se portanto o multipletto do estado fundamental  $| \frac{N_p}{2}, m \rangle$ , com

$m$  assumindo valores entre  $-\frac{N_p}{2} \leq m \leq \frac{N_p}{2}$ , (logo, a dimensão do espaço de estados correspondente é  $N = N_p + 1$ ). Por simplicidade, será assumido neste capítulo  $\hbar = 1$ . Para bem definir os elementos da base de operadores Eq.(2.18), ou a ação destes sobre os estados pertinentes ao problema, analogamente ao que foi feito nos capítulos anteriores, constrói-se um operador  $V$  que re-rotule ciclicamente os estados do multiplete do estado fundamental *i.e.*,

$$V^s | \frac{N_p}{2}, m \rangle = | \frac{N_p}{2}, m - s \rangle,$$

de onde segue mais uma vez a álgebra de Weyl-Schwinger, onde é possível identificar-se os estados  $| \frac{N_p}{2}, m \rangle$  com os auto-estados do operador unitário de Schwinger  $U$ ,

$$U | \frac{N_p}{2}, m \rangle = \exp \left( \frac{2\pi i}{N} m \right) | \frac{N_p}{2}, m \rangle, \quad (5.11)$$

sendo que daqui em diante será adotada a notação  $| \frac{N_p}{2}, m \rangle \equiv | u_m \rangle$ .

Agora, é imediato obter-se a transformada do hamiltoniano de Lipkin[9, 12]

$$h_L(m, n) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left[ G^\dagger(m, n) H_L \right], \quad (5.12)$$

que tem a forma

$$h_L(m, n) = m + \frac{\chi}{N_p} \sqrt{\left( \frac{N_p}{2} + m \right) \left( \frac{N_p}{2} + m + 1 \right) \left( \frac{N_p}{2} - m \right) \left( \frac{N_p}{2} - m + 1 \right)} \cos \frac{4\pi n}{N}. \quad (5.13)$$

Por sua vez o liouvilliano pode ser obtido diretamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, v, r, s) = & 2i \sum_{m,n} \sum_{a,b,c,d} \frac{h(m, n)}{N^4} \sin \left[ \frac{\pi}{N} (bc - ad) \right] \exp [i\pi \Phi(a, b, c, d; N)] \\ & \exp \left\{ \frac{2\pi i}{N} [a(u - m) + b(v - n) + c(u - r) + d(r - s)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

que pode ser separado em duas contribuições

$$\mathcal{L}(u, v, r, s) = \mathcal{L}_1(u, v, r, s) + \mathcal{L}_2(u, v, r, s), \quad (5.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(u, v, r, s) = & -2i \sum_{m,a,c,d} \frac{m}{N^3} \sin\left(\frac{\pi}{N}ad\right) \exp[i\pi\Phi(a, 0, c, d; N)] \\ & \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}[a(u-m) + c(u-r) + d(r-s)]\right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(u, v, r, s) = & \chi \sum_{m,a,c,d} \frac{g(m, N)}{N^3} \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}[a(u-m) + d(r-s)]\right\} \\ & \left( \exp\left[4\pi i \frac{v}{N} + i\pi\Phi(a, 2, c, d; N)\right] \left\{ \exp\left[\frac{2\pi i}{N}c(u-r+1) - \frac{i\pi ad}{N}\right] - \right. \right. \\ & \exp\left[\frac{2\pi i}{N}c(u-r-1) + \frac{i\pi ad}{N}\right] \left. \right\} - \exp\left[-4\pi i \frac{v}{N} + i\pi\Phi(a, -2, c, d; N)\right] \\ & \left. \left\{ \exp\left[\frac{2\pi i}{N}c(u-r+1) + \frac{i\pi ad}{N}\right] - \exp\left[\frac{2\pi i}{N}c(u-r-1) - \frac{i\pi ad}{N}\right] \right\} \right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde

$$g(m, N) = \frac{\sqrt{\left(\frac{N_p}{2} + m\right) \left(\frac{N_p}{2} + m + 1\right) \left(\frac{N_p}{2} - m\right) \left(\frac{N_p}{2} - m + 1\right)}}{N_p}. \quad (5.18)$$

O primeiro termo do liouvilliano, descrito pela Eq. (5.16), corresponde ao termo de  $J_z$  do hamiltoniano de Lipkin, enquanto o segundo termo, Eq. (5.17), descreve a mistura dos auto-estados de  $J_z$  induzida pela presença de  $J_+^2$  e  $J_-^2$ .

## 5.2 Evolução temporal

Considerem-se dois casos particulares do operador densidade associado a estados puros, a saber  $\rho(t_0) = |u_k\rangle\langle u_k|$ , e  $\rho(t_0) = |v_k\rangle\langle v_k|$ , que podem ser mapeados diretamente no espaço de fase resultando nas funções de Wigner  $\rho_w(m, n; t_0) = \delta_{m,k}^{[N]}$ , e  $\rho_w(m, n; t_0) = \delta_{n,k}^{[N]}$  respectivamente. No primeiro caso, a função de Wigner é constante no momento angular e independente da variável de ângulo, enquanto o inverso ocorre no segundo caso. As distribuições de probabilidade de momento

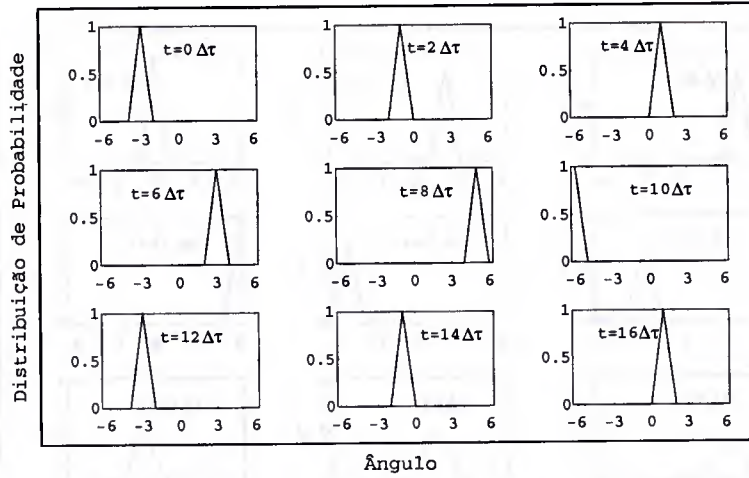


Figura 5.1: Distribuição de ângulo,  $\chi = 0$

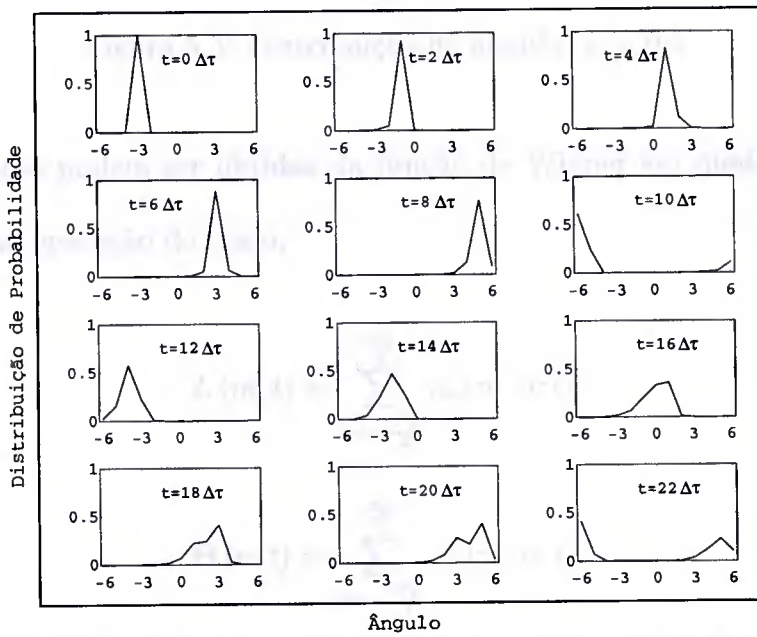
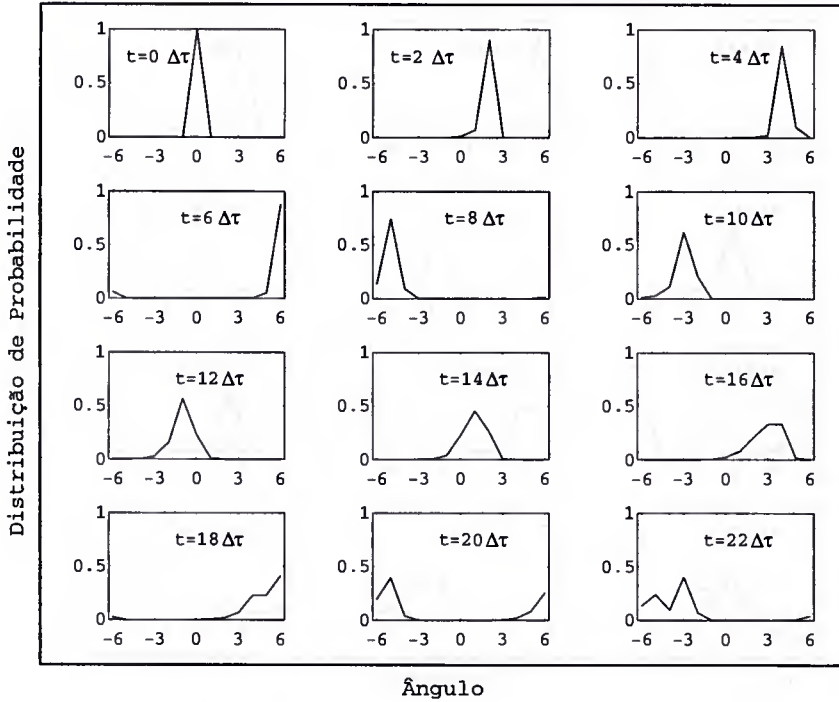


Figura 5.2: Distribuição de ângulo,  $\chi = 0.5$


 Figura 5.3: Distribuição de ângulo,  $\chi = 0.5$ 

angular e ângulo podem ser obtidas da função de Wigner em qualquer instante  $t$  através de uma operação de traço,

$$L(m; t) = \sum_{n=-\frac{N_p}{2}}^{\frac{N_p}{2}} \rho_w(m, n; t), \quad (5.19)$$

e

$$\Theta(n; t) = \sum_{m=-\frac{N_p}{2}}^{\frac{N_p}{2}} \rho_w(m, n; t), \quad (5.20)$$

respectivamente. A variável de ângulo é caracterizada por  $\theta_n = \frac{2\pi}{N}n$ .

No que segue irá se discutir a evolução temporal, obtida numericamente, destas duas funções de Wigner iniciais, e, neste sentido, de maneira a manter-se uma precisão razoável nos cálculos, a série de liouvillianos encadeados agindo sobre a função de Wigner inicial, Eq.(3.9), era truncada assim que cada contribuição atingia valores

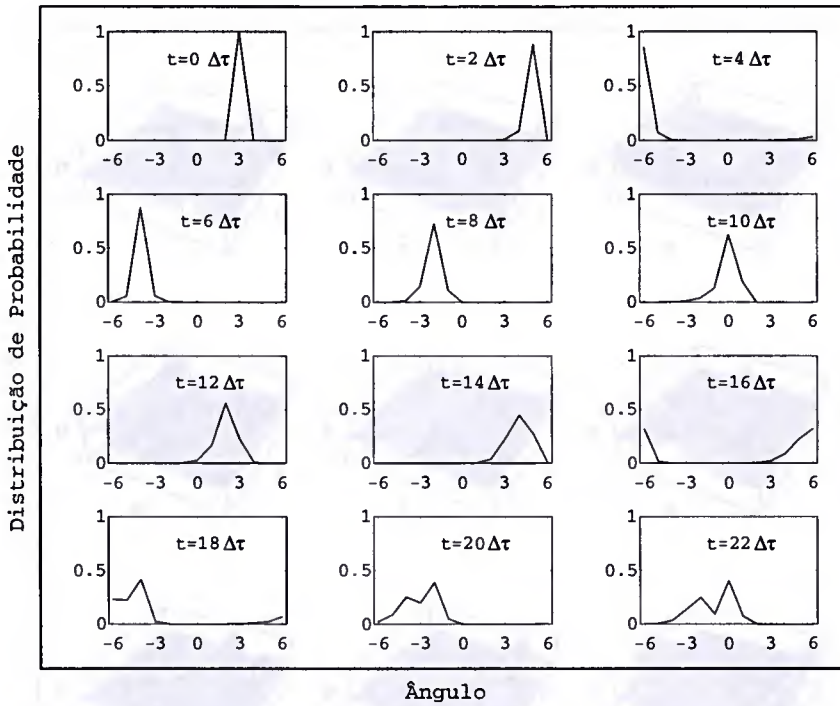


Figura 5.4: Distribuição de ângulo,  $\chi = 0.5$

inferiores a  $10^{-6}$  unidades arbitrárias. Além disto, os cálculos foram realizados com pequenos passos de tempo, fixados em  $\Delta\tau = \frac{2\pi}{N}$  unidades arbitrárias, de modo que as séries convergissem com um número pequeno de termos (em torno de dez). O passo de tempo foi escolhido propositalmente no valor do menor ‘tempo de relógio’ (de acordo com a nomenclatura introduzida no capítulo anterior) associado a um hamiltoniano contendo apenas o termo de  $J_z$ . Ou seja, o passo de tempo necessário para que o sistema, no caso não perturbado  $\chi = 0$ , se desloque para um sítio vizinho no espaço de fase (como ilustrado na figura 1). Escolheram-se sistemas com 12 partículas ( $N_p = 12$ ), uma vez que, nessa faixa de população, o modelo pode servir como um protótipo de um sistema mesoscópico e ao mesmo tempo ser tratável numericamente.

O resultado da evolução temporal pode ser melhor compreendido com auxílio

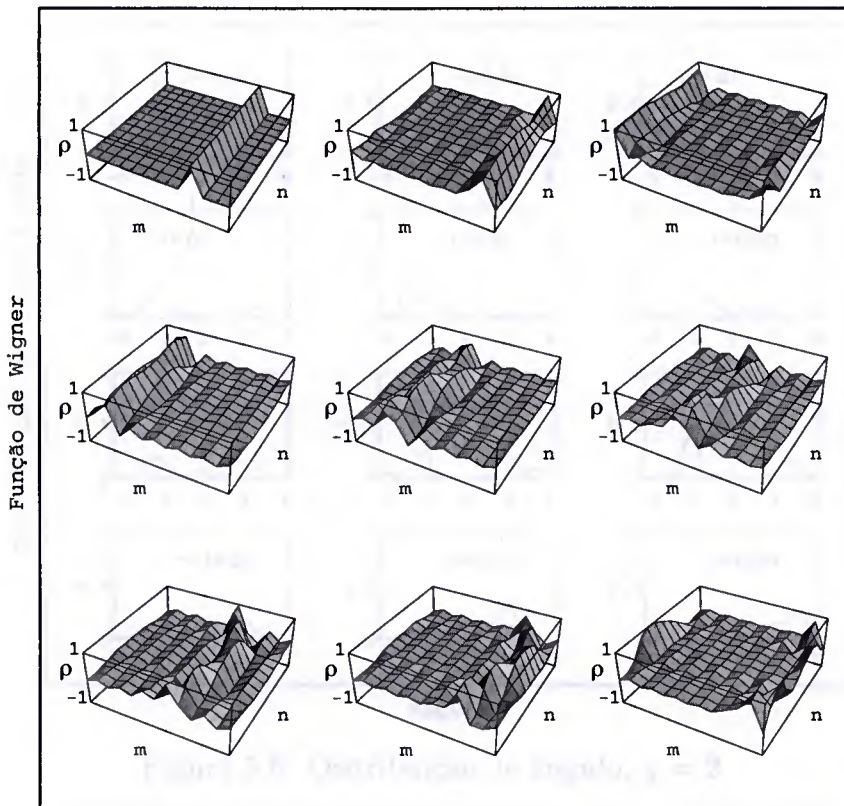


Figura 5.5: Função de Wigner,  $\chi = 0.5$

das figuras, que ilustram a evolução temporal das funções de Wigner e das distribuições de probabilidade de ângulo e momento angular, para diferentes valores de  $\chi$  e diferentes condições iniciais.

### 5.2.1 Função de Wigner inicial localizada em ângulo

Em geral, os casos onde a função de Wigner inicial é localizada na variável de ângulo são os mais interessantes. Para valores pequenos do acoplamento  $\chi$ , o espectro ainda é razoavelmente dominado pelo termo de  $J_z$ , e sua evolução temporal, como pode ser visto nas figuras (tanto as que mostram a distribuição de probabilidade como as que mostram a função de Wigner), é basicamente uma progressão do pico de

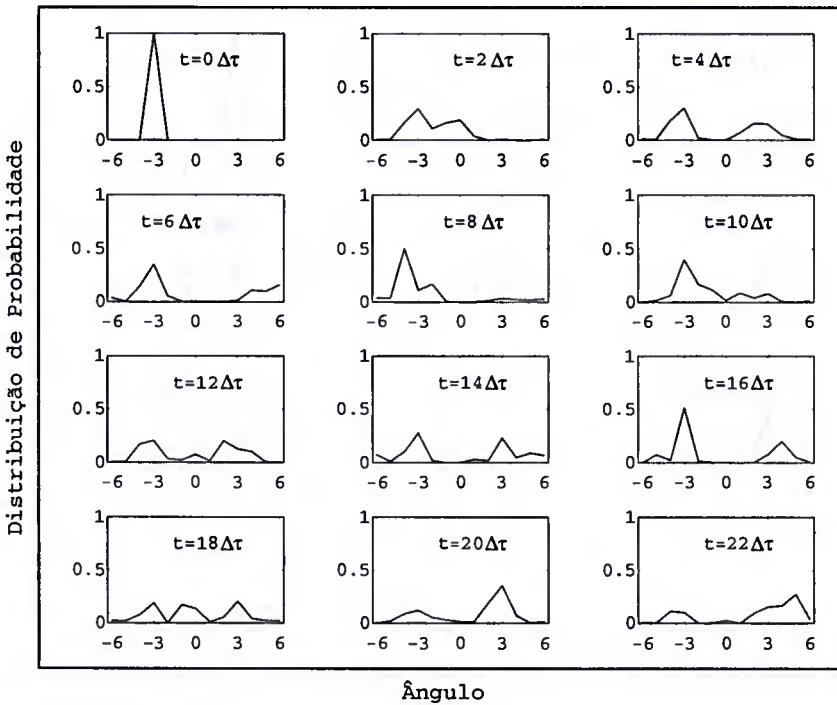


Figura 5.6: Distribuição de ângulo,  $\chi = 2$

probabilidade pelos valores de ângulo, obedecendo uma condição cíclica de contorno. As figuras 2, 3 e 4 mostram a progressão da distribuição de probabilidade na variável de ângulo, localizadas inicialmente nos valores de  $\theta_n = -\frac{2\pi}{N}3, 0$  e  $\frac{2\pi}{N}3$ , para um valor de  $\chi = 0.5$ . As figuras apresentam linhas cheias apenas para melhor visualização, não sendo preciso relembrar que as funções são definidas apenas sobre índices inteiros. Nestas figuras iniciais, nota-se apenas um pequeno alargamento da distribuição de probabilidade com o passar do tempo, o que também pode ser visto na figura 5, que mostra a função de Wigner correspondente ao caso  $\theta_n = \frac{2\pi}{N}3$ . A função de Wigner ainda mostra informação da mistura de valores de momento angular, evidenciada pelas trocas de sinal do valor da função de Wigner com a variação do índice  $n$ .

As figuras 6 e 7 mostram os casos de  $\theta_n$  iniciais iguais a  $-\frac{2\pi}{N}3$  e  $\frac{2\pi}{N}3$ ,

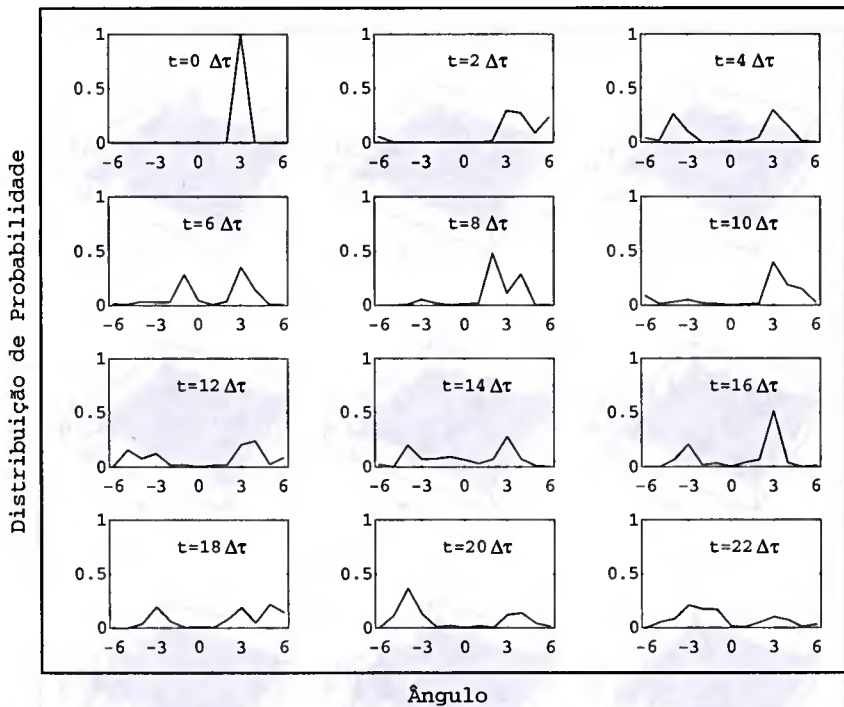


Figura 5.7: Distribuição de ângulo,  $\chi = 2$

respectivamente, para  $\chi = 2$ . No primeiro caso, não é difícil perceber que a distribuição de probabilidade se ‘quebra’ quando o centro da distribuição ocupa os sítios vizinhos ao correspondente ao valor zero do ângulo, dividindo a distribuição de probabilidade numa parcela transmitida e numa refletida. No segundo caso o mesmo acontece quando a distribuição de probabilidade atinge o valor máximo de ângulo, emergindo na região negativa do gráfico (devido à condição cíclica de contorno imposta pela topologia de toro da base) uma parcela transmitida, enquanto uma parcela refletida permanece na região positiva. A figura 8 mostra a evolução da função de Wigner correspondente a  $\theta_n = -\frac{2\pi}{N}3$ .

As figuras de 9 a 14 mostram a evolução temporal das distribuições de probabilidade de ângulo para um valor inicial de  $\theta_n$  igual a  $-\frac{2\pi}{N}3$ , com a constante

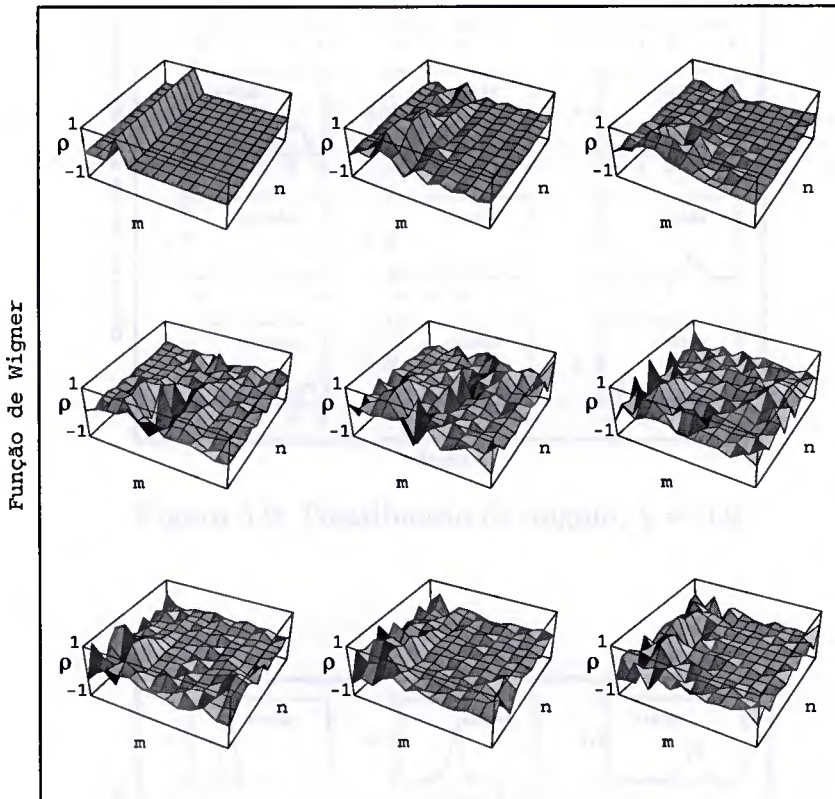


Figura 5.8: Função de Wigner,  $\chi = 2$

de acoplamento  $\chi$  assumindo os valores 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4. Pode-se perceber nesta sequência o aparecimento de uma parcela refletida da distribuição de probabilidade com o aumento de  $\chi$ . A análise detalhada dos gráficos mostra que este comportamento, enquanto se considera a região em torno do sítio zero, começa a se manifestar nas vizinhanças do valor  $\chi = 1$ . Quanto à região próxima da condição de contorno, este comportamento já se manifesta em valores mais baixos de  $\chi$  (na figura 9, por exemplo, a distribuição de probabilidade alarga-se ao passar pelo zero, mas efetivamente se quebra apenas ao atravessar a condição de contorno).

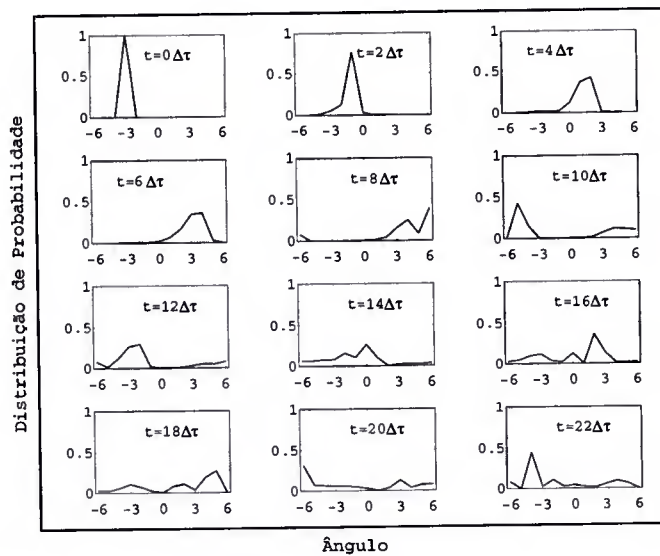


Figura 5.9: Distribuição de ângulo,  $\chi = 0.9$

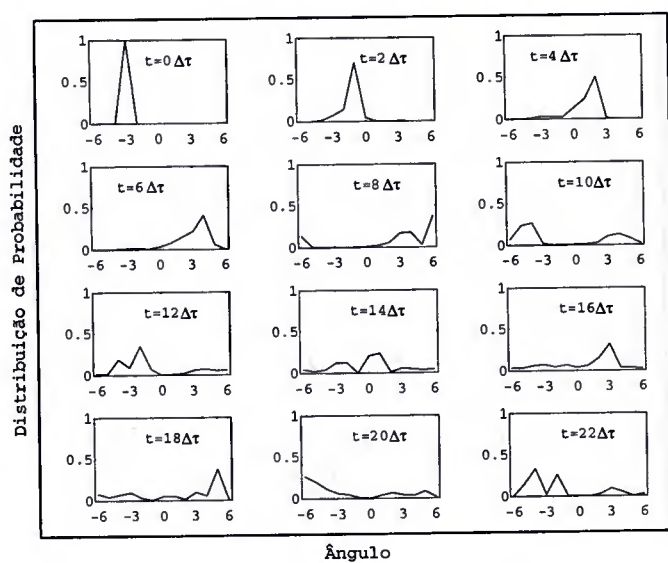


Figura 5.10: Distribuição de ângulo,  $\chi = 1$

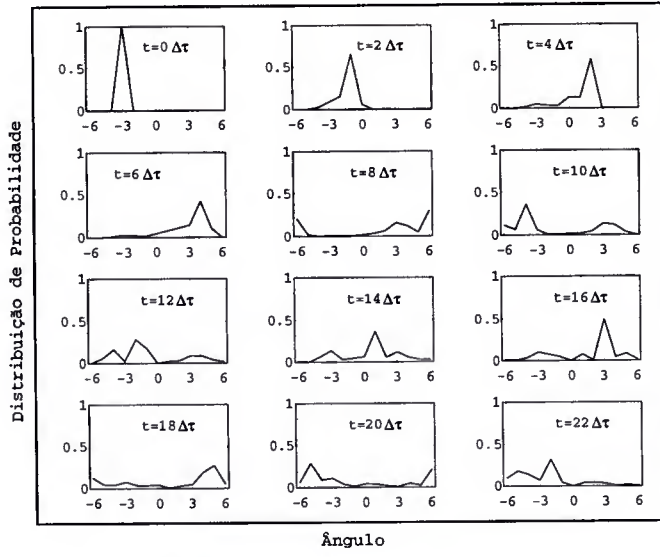


Figura 5.11: Distribuição de ângulo,  $\chi = 1.1$

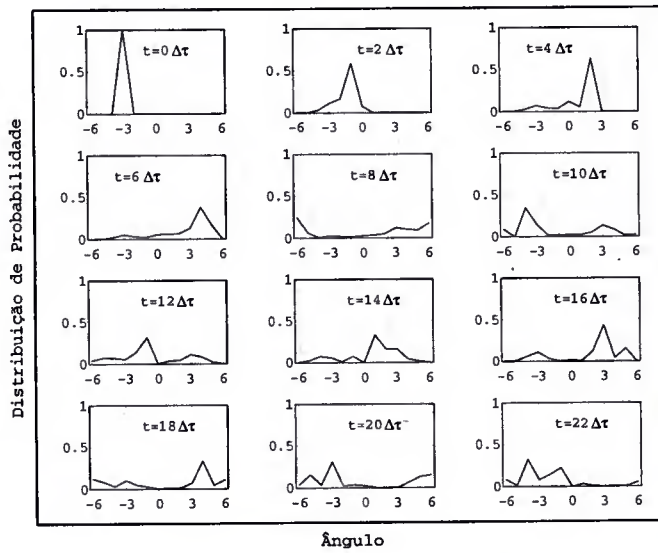


Figura 5.12: Distribuição de ângulo,  $\chi = 1.2$

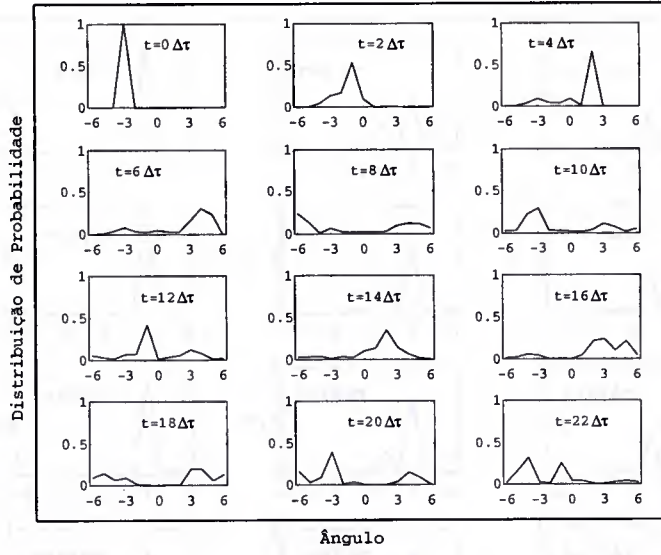


Figura 5.13: Distribuição de ângulo,  $\chi = 1.3$

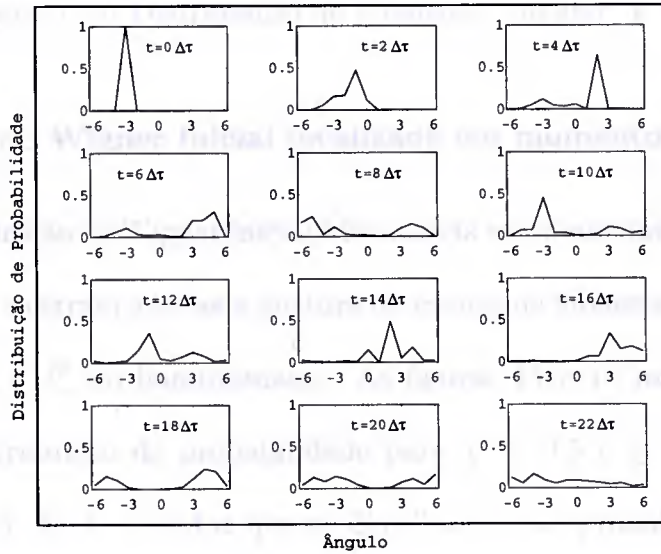


Figura 5.14: Distribuição de ângulo,  $\chi = 1.4$

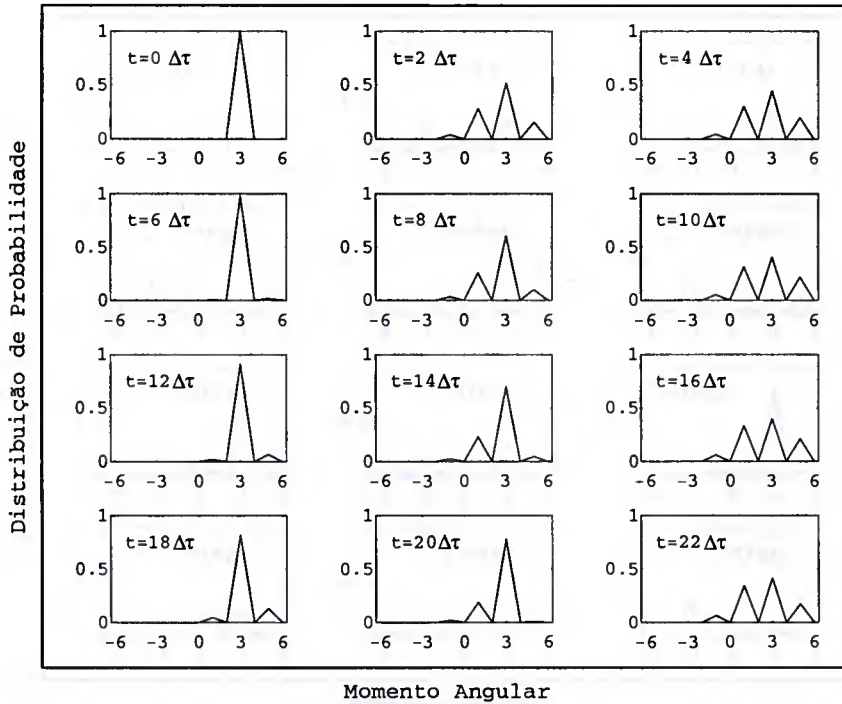


Figura 5.15: Distribuição de Momento Angular,  $\chi = 0.5$

### 5.2.2 Função de Wigner inicial localizada em momento angular

Os casos onde a função de Wigner inicial é localizada em momento angular são menos reveladores, pois mostram apenas a mistura de valores de momento angular induzida pelos termos  $J_+^2$  e  $J_-^2$  do hamiltoniano. As figuras 15 e 16 mostram a evolução temporal da distribuição de probabilidade para  $\chi = 0.5$  e  $\chi = 2$ , para valores iniciais de  $J_z = 3$ . Pode-se notar que as distribuições de probabilidade se anulam ao atingirem os valores máximos de  $J_z$ . As funções de Wigner correspondentes são mostradas nas figuras 17 e 18. A figura 17 evidencia que, para valores mais baixos do acoplamento, a região do espaço de fase correspondente a valores de  $J_z$  com sinal invertido em relação ao inicial, não é visitada durante a evolução temporal. Esta situação já não é observada na figura 18.

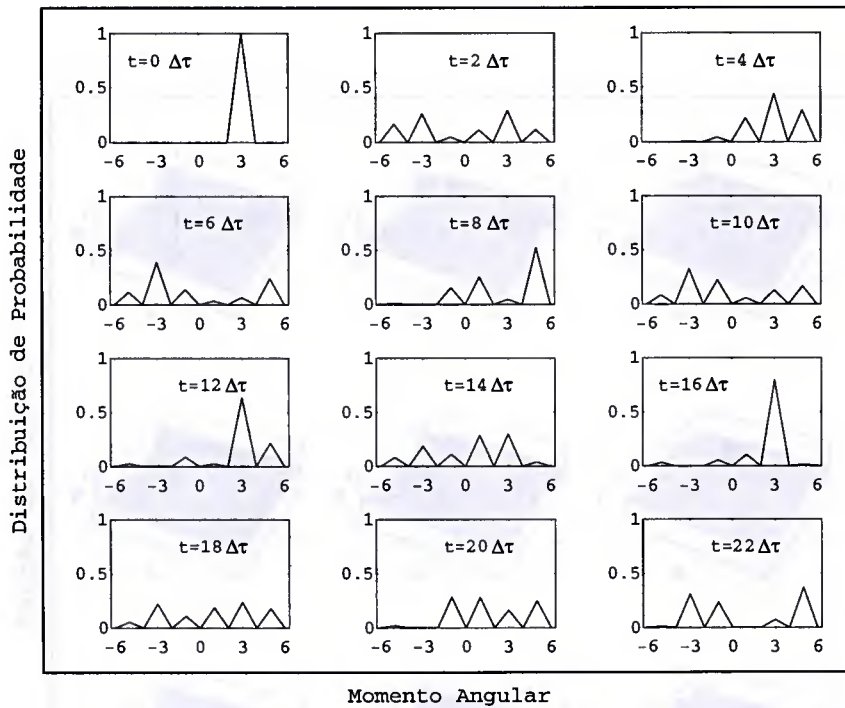


Figura 5.16: Distribuição de Momento Angular  $\chi = 2$

### 5.3 Conexão com a representação semi-clássica contínua

Como fica claro da discussão acima, é na distribuição de ângulo que os efeitos mais interessantes, como o aparecimento de reflexões para certos valores de  $\chi$ , podem ser observados. Neste sentido, é conveniente discutir-se a possibilidade de obtenção de um potencial nesse contexto. De fato, vai-se mostrar, no que segue, que tal potencial dá conta do aparecimento das reflexões obtidas e, ao mesmo tempo, no limite  $N \rightarrow \infty$ , recupera a forma do potencial semi-clássico obtido por um tratamento de coordenadas geradoras [25].

É bem estabelecida a proposta de representar-se o hamiltoniano de Lipkin em termos de uma variável contínua de ângulo numa descrição de estados coerentes de

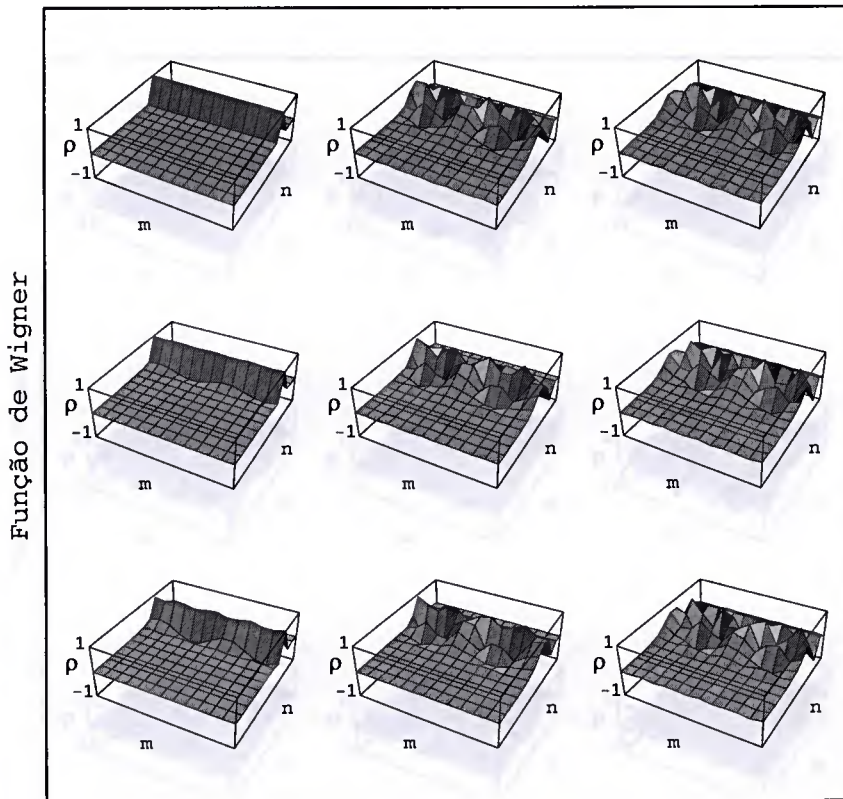


Figura 5.17: Função de Wigner,  $\chi = 0.5$

$su(2)$  [25], a saber

$$|\phi\rangle = \cos^{N_p} \left( \frac{\phi}{2} \right) \exp \left( \tan \frac{\phi}{2} J_+ \right) |0\rangle, \quad (5.21)$$

onde  $|0\rangle$  é o vácuo do operador  $J_-$ . Como tal, estes estados não são ortonormalizados, apresentando uma lei de superposição do tipo

$$\langle \phi' | \phi \rangle = \cos^{N_p} \left( \frac{\phi' - \phi}{2} \right). \quad (5.22)$$

Definindo-se novas variáveis  $\varphi = \frac{(\phi' + \phi)}{2}$  e  $\theta = \phi' - \phi$ , o hamiltoniano de Lipkin pode

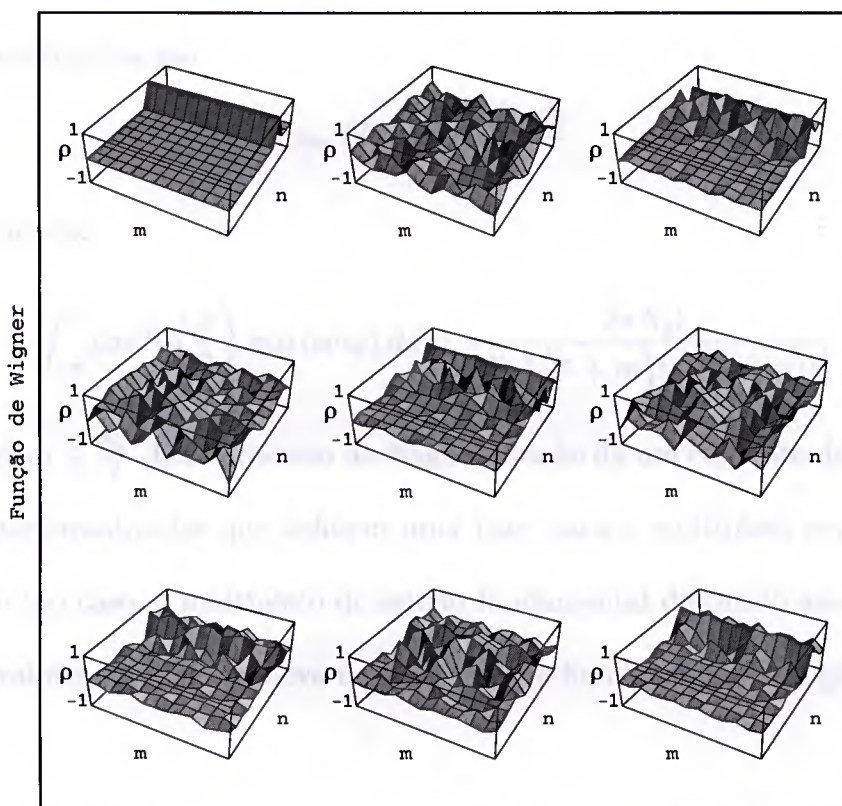


Figura 5.18: Função de Wigner,  $\chi = 2$

ser escrito na representação de estados coerentes,  $H(\varphi, \theta) \equiv \langle \phi'(\varphi, \theta) | H | \phi(\varphi, \theta) \rangle$ ,

$$H(\varphi, \theta) = -\frac{\epsilon N_p}{2} \cos^{N_p} \frac{\theta}{2} \left\{ \cos \varphi \cos^{-1} \frac{\theta}{2} + \frac{\chi_h}{2} \left[ \cos^{-2} \frac{\theta}{2} (1 + \sin^2 \varphi) - 1 \right] \right\}, \quad (5.23)$$

onde, observe-se, adotou-se agora  $\chi_h = \chi(N_p - 1)/N_p$ , o que é diferente do parâmetro de acoplamento utilizado na seção anterior.

É interessante observar-se que é possível ir desta representação contínua não ortogonal para uma discreta e ortonormal se for encontrada uma transformação que diagonalize a função de superposição (*overlap kernel*), Eq. (5.22) [26]. Isto pode ser

implementado diretamente através da transformada de Fourier

$$\int_{-\pi}^{\pi} \langle \phi' | \phi \rangle u_m(\phi') d\phi' = \lambda_m u_m(\phi), \quad (5.24)$$

onde as auto-funções são

$$u_m(\phi) = \frac{\exp(im\phi)}{\sqrt{2\pi}} \quad (5.25)$$

e os auto-valores

$$\lambda_m = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{N_p} \left( \frac{\phi}{2} \right) \exp(im\phi) d\phi = \frac{2\pi N_p!}{2^{N_p} \left( \frac{N_p}{2} + m \right)! \left( \frac{N_p}{2} - m \right)!}, \quad (5.26)$$

com  $-\frac{N_p}{2} \leq m \leq \frac{N_p}{2}$ . Este processo de diagonalização dá um conjunto de  $N = N_p + 1$  estados ortonormalizados que definem uma base para o multiplete em que se está interessado (no caso, o multiplete de estado fundamental discutido anteriormente), com auto-valores  $\lambda_m$ . Nesta nova representação o hamiltoniano de Lipkin é escrito como

$$H(m, m') = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\varphi(m' - m)] \exp\left[-i\frac{\theta}{2}(m' + m)\right] \frac{H(\varphi, \theta) d\varphi d\theta}{\sqrt{\lambda_m \lambda_{m'}} 2\pi}, \quad (5.27)$$

que explicitamente tem a forma

$$H(m, m') = \frac{-\epsilon N_p}{4\pi \sqrt{\lambda_m \lambda_{m'}}} \left\{ \frac{2\pi^2 (N_p - 1)! \delta_{m', m \pm 1}}{2^{N_p - 1} \Gamma\left(\frac{N_p + 1}{2} - \frac{m'}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N_p + 1}{2} + \frac{m'}{2} + \frac{m}{2}\right)} + \right. \\ \left. + \frac{\chi \hbar}{2} \left[ \frac{\left(3\pi \delta_{m', m} - \frac{\pi}{2} \delta_{m', m \pm 2}\right) 2\pi (N_p - 2)!}{2^{N_p - 2} \Gamma\left(\frac{N_p}{2} - \frac{m'}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N_p}{2} + \frac{m'}{2} + \frac{m}{2}\right)} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4\pi^2 N_p! \delta_{m', m}}{2^{N_p} \Gamma\left(\frac{N_p}{2} - \frac{m'}{2} - \frac{m}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{N_p}{2} + \frac{m'}{2} + \frac{m}{2} + 1\right)} \right] \right\}. \quad (5.28)$$

A diagonalização desta matriz naturalmente fornece o espectro exato de Lipkin, uma vez que apenas houve uma mudança de representação.

Agora, uma vez que o espaço de momento angular é representado por um número finito de estados, é possível obter-se ainda uma *representação discreta* do hamiltoniano de Lipkin, a representação de ângulo discreto, através de uma dupla transformada discreta de Fourier,

$$H(k, k') = \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\exp(im\theta_k)}{\sqrt{N}} H(m, m') \frac{\exp(-im'\theta_{k'})}{\sqrt{N}}, \quad (5.29)$$

onde agora  $\theta_k$  rotula a variável de ângulo, com  $\theta_k = \frac{2\pi k}{N}$ .

A matriz do hamiltoniano escrita nesta representação não deve ser comparada diretamente à Eq. (5.23), escrita em termos de um ângulo contínuo. Por outro lado, é possível extrair-se informação sobre o sistema fermiônico/de quase spins se for notado que o momento de ordem zero desta matriz, com respeito à variável  $\theta_k - \theta_{k'}$ , representa um potencial (de uma variável de ângulo discreta) na variável  $(\theta_k + \theta_{k'})/2$ . Desta forma, definam-se

$$\theta_k - \theta_{k'} = u \quad (5.30)$$

e

$$\theta_k + \theta_{k'} = 2v. \quad (5.31)$$

O intervalo de soma sobre a variável  $u$  será definido como  $-\frac{N-1}{N}\pi \leq u \leq \frac{N-1}{N}\pi$ , com passos de  $\Delta u = \frac{2\pi}{N}$ . Desta forma, o momento de ordem zero será calculado como

$$M_0(v) = \sum_{u=-\frac{N-1}{N}\pi}^{\frac{N-1}{N}\pi} \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{m, m'=-\frac{N_p}{2}}^{\frac{N_p}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp[i(v - \varphi)(m - m')]}{2\pi\sqrt{\lambda_m\lambda_{m'}}} \times \exp\left[i(u - \theta) \frac{(m' + m)}{2}\right] H(\varphi, \theta) d\varphi d\theta. \quad (5.32)$$

Definindo as variáveis  $r = m' - m$  e  $s = \frac{(m'+m)}{2}$ , e usando o resultado geral

$$\sum_{m=-\frac{N_p}{2}}^{\frac{N_p}{2}} \sum_{m'=-\frac{N_p}{2}}^{\frac{N_p}{2}} = \sum_{r=-N_p}^{-1} \sum_{s=-N_p-r}^{N_p+r} + \sum_{r=1}^{N_p} \sum_{s=r-N_p}^{N_p-r} + \sum_{r=0, s=-N_p}^{N_p}, \quad (5.33)$$

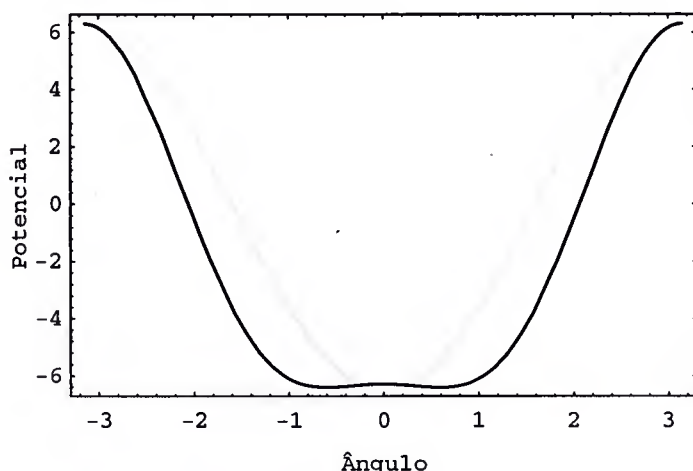


Figura 5.19: Potencial discreto,  $\chi_h = 1$

onde as somas sobre  $s$  são restritas a valores que concordem com a paridade de  $r$ , é possível efetuar todas as somas e integrações. Esta expressão fornece um potencial *discreto* associado ao modelo de Lipkin para a variável angular  $v$ . Este potencial é apresentado nas figuras 19, 20 e 21 para diferentes valores de  $\chi_h$ .

Para estudar-se o comportamento dos férmions/quase spins no limite de grandes valores de  $N_p$  (espaços de alta dimensão), deve-se efetuar o limite correspondente nas respectivas somas. Em primeiro lugar, considere-se a soma em  $u$ . Esta é escrita na forma

$$\sum_{u=-\frac{N-1}{N}\pi}^{\frac{N-1}{N}\pi} \frac{\Delta u}{2\pi} \exp \left[ i \left( \frac{m' + m}{2} \right) u \right], \quad (5.34)$$

o que, para grandes valores de  $N$ , tende à integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[ i \frac{ul}{2} \right] du = \begin{cases} 0 & \text{se } l = \text{par} \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } l = 0 \\ \frac{4}{l} (-1)^j & \text{se } l = \text{ímpar}, \quad l = 2j + 1 \end{cases} \quad (5.35)$$

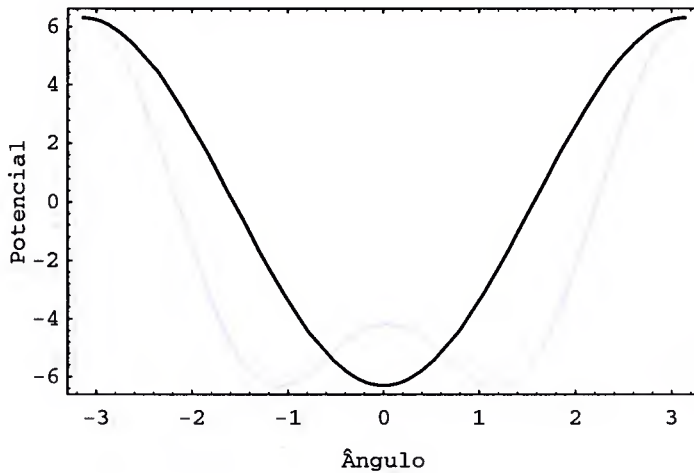


Figura 5.20: Potencial discreto,  $\chi_h = 0$

Com estes resultados, tem-se

$$\frac{M_0(v)}{\epsilon} = \frac{N_p \chi_h}{4} - \frac{N_p^2 \chi_h}{4(N_p - 1)} \left[ \frac{3}{2} - \cos(2v) \frac{(N_p + 2)}{2N_p} \right] + \frac{\cos(v)}{2\pi} \sum_{r=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \frac{(-1)^{r+1}}{2r+1} \sqrt{\left(\frac{N_p}{2} + r + 1\right) \left(\frac{N_p}{2} - r\right)}. \quad (5.36)$$

Para  $N_p \gg 1$ ,

$$\frac{N_p \chi_h}{4} - \frac{3N_p^2 \chi_h}{8(N_p - 1)} \rightarrow -\frac{\chi_h}{8} (N_p + 3), \quad (5.37)$$

$$\frac{N_p \chi_h (N_p + 2)}{8(N_p - 1)} \cos(2v) \rightarrow \frac{\chi_h (N_p + 3)}{8} \cos(2v), \quad (5.38)$$

e

$$\cos(v) \sum_{r=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \frac{(-1)^{r+1}}{2r+1} \sqrt{\left(\frac{N_p}{2} + r + 1\right) \left(\frac{N_p}{2} - r\right)} \rightarrow -(N_p - 1) \frac{\pi}{4} \cos(v). \quad (5.39)$$

Portanto, em sua forma final para  $N_p \gg 1$ , o potencial tem a forma

$$\frac{M_0(v)}{\epsilon} = -\frac{(N_p - 1)}{2} \cos(v) - \frac{\chi_h}{8} (N_p + 3) + \frac{\chi_h (N_p + 3)}{8} \cos(2v), \quad (5.40)$$

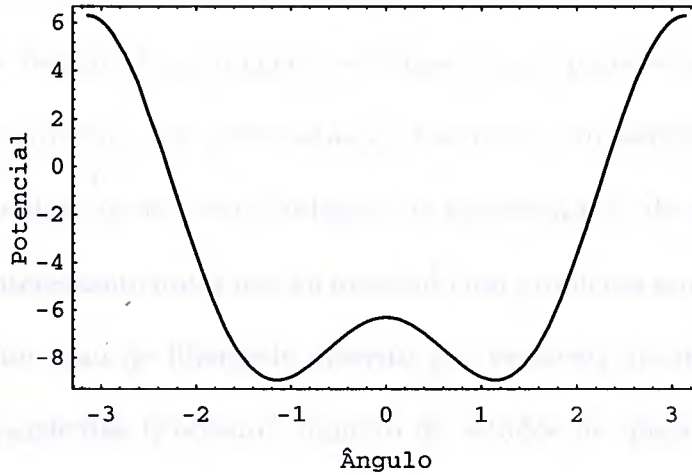


Figura 5.21: Potencial discreto,  $\chi_h = 2$

que pode ser reescrita como

$$V(v) = -\frac{(N_p - 1)}{2} \cos(v) - \frac{\chi_h(N_p + 3)}{4} \sin^2(v). \quad (5.41)$$

É interessante observar que este resultado coincide com o resultado obtido, através do método de coordenadas geradoras, por Holzwarth [25]. Aqui é o caso limite para altos valores de  $N$ . Isto é consequência do fato de, no âmbito do modelo de Lipkin, o limite clássico ser obtido justamente no limite  $N \rightarrow \infty$ [27].

## 5.4 Discussão

A análise acima mostra que é possível associar-se um potencial coletivo *discreto* ao hamiltoniano do modelo de Lipkin. O potencial geral, obtido do momento de ordem zero do elemento de matriz do hamiltoniano na representação de ângulo, obtido com auxílio de estado coerentes e de uma ortogonalização tipo coordenadas geradoras, tem como caso particular (no limite para alto número de partículas) o resultado tradicional de coordenadas geradoras. A forma que este potencial

apresenta, inclusive com o esperado aparecimento de dois mínimos para valores do acoplamento superiores a 1, concorda qualitativamente com o tipo de análise feita sobre a evolução temporal das funções de Wigner, onde percebeu-se um comportamento típico de problemas de penetração de barreira, com parcelas transmitidas e refletidas da distribuição de probabilidades (na representação de ângulo).

É bastante interessante notar que foi discutido um problema sem análogo clássico, bem definido num grau de liberdade descrito por variáveis discretas, onde o valor do número de partículas (portanto, número de estados de quase spin),  $N_p = 12$ , caracteriza um sistema mesoscópico no qual o limite semi-clássico ainda não é válido e dificilmente faz algum sentido falar-se numa região classicamente proibida. Ainda assim, o comportamento com características de penetração de barreira foi identificado, considerando-se a propagação das distribuições de probabilidade e a forma do potencial *discreto* discutido acima. Isto pode ser a indicação de que certos efeitos (como o tunelamento), podem ser na verdade primordialmente consequências das características peculiares de graus de liberdade sem análogo clássico. Ainda resta por discutir qual quantidade faz o papel de inércia dentro deste contexto.

## Capítulo 6

### Perspectivas, Discussão e Conclusões

#### 6.1 Sobre a possibilidade de somas sobre trajetórias no espaço de fase quântico discreto

Poder-se-ia dizer que até este ponto traçou-se um paralelo completo entre as formulações tradicionais da mecânica quântica e o formalismo de espaço de fase discreto, não fosse pela ausência de uma contraparte ao formalismo de integrais de trajetória de Feynman. O formalismo de Feynman trata primordialmente de graus de liberdade com análogo clássico, sendo o conceito de *trajetória* fundamental no cálculo do propagador que leva um estado rotulado por  $x_a, t_a$  a outro rotulado por  $x_b, t_b$ .

O formalismo de Feynman originalmente prevê uma integral funcional sobre todas as trajetórias no *espaço de configurações*, onde o peso estatístico destas trajetórias é dado pela integral de ação calculada sobre esta trajetória, e a lagrangeana levada em questão é a lagrangeana clássica. É possível, porém, elaborar-se uma abordagem semelhante onde a integral funcional é realizada sobre trajetórias no *espaço de fase* [28]. Esta abordagem parte do formalismo de Weyl-Wigner e considera, naturalmente, a transformada de Legendre da expressão mapeada do hamiltoniano quântico. Em princípio, esta mesma abordagem pode ser adaptada ao caso discreto

e finito.

O caso discreto, porém, apresenta dificuldades inerentes que aqui não foram resolvidas. O cerne de todo o problema está no fato de, partindo de um índice  $k$  que assume um conjunto discreto e finito de valores, não fazer sentido pensar-se numa ‘trajetória’  $k(t)$ , uma vez que o tempo  $t$  seja contínuo.

### 6.1.1 O propagador de estados para tempos infinitesimais

Como já dito, é possível tentar seguir de perto as idéias apresentadas em [28], procurando proceder de maneira análoga no espaço de fase discreto de acordo com o que foi proposto no espaço de fase contínuo.

A fim de simplificar-se a notação, será adotada brevemente a convenção  $|u_k\rangle \equiv |k\rangle$ . A intenção nesta secção é calcular o propagador

$$\langle k_x, t_x | k_0, t_0 \rangle = \langle k_x | \exp \left[ -\frac{iH(t_x - t_0)}{\hbar} \right] | k_0 \rangle \quad (6.1)$$

para valores pequenos de  $(t_x - t_0)$ , onde  $H$  é o hamiltoniano do sistema. Denotando  $(t_x - t_0)$  por  $\epsilon$ , pode-se escrever a expansão em série de Taylor do operador de evolução temporal,

$$\exp \left[ -\frac{iH\epsilon}{\hbar} \right] = \hat{1} - \frac{iH}{\hbar}\epsilon \quad (6.2)$$

para calcular-se a expressão mapeada do operador acima diretamente da forma

$$\left( \exp \left[ -\frac{iH\epsilon}{\hbar} \right] \right) (m, n) = 1 - \frac{ih(m, n)}{\hbar}\epsilon \quad (6.3)$$

onde mais uma vez  $h(m, n)$  é o representante no espaço de fase discreto do hamiltoniano. Agora, invertendo o argumento, para valores infinitesimais de  $\epsilon$  é verdade que

$$1 - \frac{ih(m, n)}{\hbar}\epsilon = \exp \left[ -\frac{ih(m, n)\epsilon}{\hbar} \right], \quad (6.4)$$

ou seja,

$$\left( \exp \left[ -\frac{iH\epsilon}{\hbar} \right] \right) (m, n) = \exp \left[ -\frac{ih(m, n)\epsilon}{\hbar} \right]. \quad (6.5)$$

Com isto é possível calcular-se o propagador (o elemento de matriz do operador de evolução temporal) para tempos pequenos

$$\langle k_b, t_b | k_a, t_a \rangle = \langle k_b | \exp \left[ -\frac{iH\epsilon}{\hbar} \right] | k_a \rangle, \quad t_b - t_a = \epsilon \quad (6.6)$$

$$\langle k_b, t_b | k_a, t_a \rangle = \frac{1}{N} \langle k_b | \sum_{m, n=-h}^h G(m, n) \exp \left[ -\frac{ih(m, n)\epsilon}{\hbar} \right] | k_a \rangle, \quad (6.7)$$

o que, pode ser visto, tem a forma

$$\begin{aligned} \langle k_b, t_b | k_a, t_a \rangle = & \frac{1}{N^2} \sum_{m, n, j=-h}^h \exp \left[ \frac{i\pi}{N} j \left( (k_b + k_a) - N I_{k_a - k_b + h}^N \right) \right. \\ & \left. + \frac{2\pi i}{N} (mj + n(k_a - k_b)) - \frac{ih(m, n)\epsilon}{\hbar} \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

### 6.1.2 A reconstrução do propagador para tempos finitos

De maneira a obter-se o propagador para intervalos de tempos arbitrários, introduz-se o ordenamento

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{f-1} < t_f, \quad (6.9)$$

e fazendo-se valer da resolução da unidade  $\sum_{k_n=-h}^h |k_n, t_n\rangle \langle k_n, t_n| = \hat{1}$  é possível escrever

$$\begin{aligned} \langle k_f, t_f | k_0, t_0 \rangle = & \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{f-1}=-h}^h \langle k_f, t_f | k_{f-1}, t_{f-1} \rangle \langle k_{f-1}, t_{f-1} | k_{f-2}, t_{f-2} \rangle \dots \\ & \dots \langle k_2, t_2 | k_1, t_1 \rangle \langle k_1, t_1 | k_0, t_0 \rangle, \end{aligned} \quad (6.10)$$

ou seja,

$$\langle k_f, t_f | k_0, t_0 \rangle = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{f-1}=-h}^h \prod_{x=0}^{f-1} \langle k_{x+1}, t_{x+1} | k_x, t_x \rangle. \quad (6.11)$$

Admitindo que a expressão (6.8) seja válida, o propagador assume a forma

$$\langle k_f, t_f | k_0, t_0 \rangle = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{f-1} = -h}^h \prod_{x=0}^{f-1} \frac{1}{N^2} \sum_{m, n, j = -h}^h \exp \left[ \frac{i\pi}{N} j (k_{x+1} + k_x) - i\pi j I_{k_{x+1} - k_x + h}^N + \frac{2\pi i}{N} (mj + n(k_x - k_{x+1})) - \frac{i\hbar(m, n)\epsilon}{\hbar} \right] \quad (6.12)$$

$$\langle k_f, t_f | k_0, t_0 \rangle = \frac{1}{N^{2f}} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{f-1} = -h}^h \sum_{m_0, m_1, \dots, m_{f-1} = -h}^h \sum_{n_0, n_1, \dots, n_{f-1} = -h}^h \sum_{j_0, j_1, \dots, j_{f-1} = -h}^h \exp \left[ \sum_{x=0}^{f-1} \frac{i\pi}{N} j_x ((k_{x+1} + k_x) - N I_{k_{x+1} - k_x + h}^N) + \frac{2\pi i}{N} (m_x j_x + n_x (k_x - k_{x+1})) - \frac{i\hbar(m_x, n_x)\epsilon}{\hbar} \right]. \quad (6.13)$$

Esta expressão será rigorosamente válida apenas no limite  $f \rightarrow \infty$  ( $\epsilon$  indo a zero). O estudo deste limite é o ponto crucial onde encontra-se toda a dificuldade conceitual desta abordagem. No limite em questão pode ser assumido que o índice de soma  $x$  dentro da exponencial varie continuamente, porém as variáveis  $k_x$ ,  $j_x$ ,  $m_x$  e  $n_x$  ainda assumirão valores inteiros. O fato destas variáveis assumirem valores inteiros dificulta a identificação das infinitas somas com, por exemplo, uma soma sobre todas as trajetórias no espaço de fase. Todavia, estas dificuldades não são necessariamente intransponíveis, e a continuidade desta análise pode trazer ganhos teóricos dignos de nota, como a definição do peso das diferentes trajetórias no espaço de fase e a definição de uma *ação discreta*. Por ora, porém, estas dificuldades não foram resolvidas e a questão permanece em aberto.

## 6.2 Considerações finais, visão geral e conclusões propriamente ditas

A conclusão mais direta que segue desta tese é a reafirmação que existe de fato uma maneira bem definida de abordar a mecânica quântica a partir da construção de

um espaço de fase quântico discreto e de uma respectiva técnica de mapeamento. Em particular, se explorou principalmente uma base específica, que tem como uma característica conveniente o fato de ser hermiteana e de conter, no limite para o contínuo, os elementos de base de Weyl-Wigner. Ainda assim, é perfeitamente factível abordar as mesmas questões sob o ponto de vista da base definida em [12] ou da própria base de Schwinger.

Os critérios para a escolha da base utilizada, referida como base de coordenadas e momentos no espaço de fase discreto, não podem deixar de ser um tanto subjetivos. Os aqui utilizados são inúmeros e referem-se a resultados espalhados ao longo de todo o texto. Dentre estes, destacam-se a hermiticidade dos elementos de base e o limite para o contínuo, além da preservação de algumas características e simetrias convenientes presentes na base de Schwinger.

Ainda, em relação a esta ‘escolha apropriada’ da base de operadores, foi identificado um parênteses agindo em funções definidas no espaço de fase discreto, relacionado ao comutador de dois operadores e portanto presente na expressão mapeada da equação de von Neumann-Liouville. Como já discutido no passado, este parênteses guarda informações sobre uma estrutura pré-simplética presente no espaço de fase discreto [20].

No limite para o contínuo – implementado de maneira direta – os elementos de base propostos reproduzem os elementos de base de Weyl-Wigner. O limite, em princípio, é tomado fazendo-se a dimensão do espaço de estados ir para o infinito, e seus rótulos variarem de maneira contínua. Ou seja, de forma que o grau de liberdade em questão, uma vez que o referido limite seja tomado, tenda justamente para um grau de liberdade com análogo clássico, para o qual o formalismo de Weyl-Wigner

se aplica sem problemas.

Como consequência, todo o formalismo de Weyl-Wigner deve ser recuperado a partir do formalismo de espaço de fase quântico discreto. E, neste aspecto, o parênteses de Moyal, agindo sobre duas funções definidas num espaço de fase contínuo, é obtido a partir do limite do parênteses discreto. Dos detalhes deste processo de limite em particular, fica claro que apenas uma, dentre nove contribuições diferentes que compoem o parênteses discreto, é responsável pela recuperação do parênteses de Moyal. Isto é mais uma evidência indicando que graus de liberdade discretos e finitos têm características singulares que não estão presentes no contínuo.

Desta forma, outra conclusão imediata, e extemamente importante, é a que o formalismo apresentado aqui, se tomado em conjunto com seu já bem desenvolvido caso limite para graus de liberdade com análogo clássico (o formalismo de Weyl-Wigner), permite que se afirme sem dúvidas ou restrições que de fato há uma descrição de espaço de fase da mecânica quântica.

No que toca a evolução temporal, fica evidente que o formalismo de espaço de fase permite que esta seja obtida de maneira direta, uma vez que seja conhecido o hamiltoniano. A praticidade de uma ou outra maneira de realizá-la, dentre as apresentadas, é que deve ser levada em questão em casos práticos. A forma da solução da equação de von Neumann-Liouville, ainda, varia de acordo com a dependência temporal do hamiltoniano, e quanto a isto um paralelo entre o operador de evolução temporal de estados e a série responsável pela propagação da função de Wigner foi traçado no capítulo 3. Nota-se que nos casos onde o hamiltoniano não comuta consigo próprio em tempos diferentes é possível realizar a evolução temporal de maneira mais simples no espaço de fase. Esta virtude, porém, não se manifesta no caso dis-

creto, onde não faz sentido considerar-se um comutador entre dois operadores como proporcional ao operador identidade.

A implementação explícita da evolução temporal, conforme o ponto de vista do espaço de fase quântico discreto, foi efetuada numericamente para sistemas descritos pelo modelo de Lipkin, e explorada em detalhe no capítulo 4. O importante a ressaltar neste ponto é: i) a simplicidade da abordagem; ii) o ganho conceitual consequente desta abordagem, que permitiu a identificação de um potencial *discreto* associado ao modelo de Lipkin.

Outro desdobramento proveniente da discussão sobre a evolução temporal é o operador intervalo de tempo. Como mostrado, o formalismo de espaço de fase quântico discreto não acrescenta nada mais que uma perspectiva diferente à abordagem usual da mecânica quântica, mas neste caso, extremamente ilustrativo no que tange a intenção desta tese, é justamente esta perspectiva diferente que permitiu a identificação do operador intervalo de tempo. Ainda, o uso das expressões mapeadas permitiu identificar, de maneira simples, os casos onde a hipótese (4.4) era satisfeita.

Existem, naturalmente, ainda outras possibilidades a serem exploradas dentro da abordagem. Uma delas é a obtenção do formalismo de espaço de fase discreto através de um princípio dinâmico. Sabe-se de longa data que a descrição quanto-mecânica de um grau de liberdade com análogo clássico pode ser obtida de um princípio variacional [29, 30], onde a função de onda é a quantidade sobre a qual realizam-se variações arbitrárias a fim de minimizar-se uma determinada lagrangeana. As questões imediatas que se impoem neste caso são: i) é possível escolher-se a função de Wigner como variável através da qual realizar-se-á a minimização de uma dada lagrangeana? ii) podem ser escritas variações arbitrárias da função de Wigner em

função de variações de dois índices inteiros? Estas questões também permanecem em aberto e, pode-se dizer com certeza, são de natureza fundamental.

4. Conclusões

Três de três elementos da base

Equação

$$G(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i k m}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i k (m+n)}{N}\right) \quad (1)$$

Equação

$$\exp\left(\frac{2\pi i k (m+n)}{N}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i k m}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i k (m+n)}{N}\right) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i k m}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i k m}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i k m}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \end{aligned}$$

$$\exp\left(\frac{2\pi i k (m+n)}{N}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i k m}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i k (m+n)}{N}\right) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i k m}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \\ \exp\left(\frac{2\pi i k (m+n)}{N}\right) &= \exp\left(\frac{2\pi i k m}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \\ \exp\left(\frac{2\pi i k (m+n)}{N}\right) &= \exp\left(\frac{2\pi i k m}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

## Apêndice A

### Traço de três elementos de base

Da definição,

$$G(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{j,l=-h}^h U^j V^l \exp \left[ \frac{\pi i}{N} j l \right] \exp [i\pi\phi(j, l; N)] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (mj + nl) \right], \quad (\text{A.1})$$

é possível escrever-se explicitamente

$$\begin{aligned} \text{Tr}[G^\dagger(m, n) G(u, v) G(r, s)] = \\ \sum_{k=0}^{N-1} \langle v_k | \frac{1}{N} \sum_{j,l=-h}^h U^{-j} V^{-l} \exp \left[ \frac{\pi i}{N} j l \right] \exp [-i\pi\phi(j + h, l + h; N)] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (mj + nl) \right] \times \\ \frac{1}{N} \sum_{a,b=-h}^h U^a V^b \exp \left[ \frac{\pi i}{N} a b \right] \exp [i\pi\phi(a + h, b + h; N)] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (ua + bv) \right] \times \\ \frac{1}{N} \sum_{c,d=-h}^h U^c V^d \exp \left[ \frac{\pi i}{N} c d \right] \exp [i\pi\phi(c + h, d + h; N)] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (cr + ds) \right] |v_k \rangle \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

$$\text{Tr}[G^\dagger(m, n) G(u, v) G(r, s)] =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^3} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j,l=-h}^h \sum_{a,b,c,d=-h}^h \langle v_k | U^{-j} V^{-l} U^a V^b U^c V^d |v_k \rangle \times \\ \exp [-i\pi(\phi(j + h, l + h; N))] \exp [i\pi\phi(a + h, b + h; N)] \exp [i\pi\phi(c + h, d + h; N)] \times \\ \exp \left[ \frac{\pi i}{N} (j l + a b + c d) \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (mj + nl - ua - bv - cr - ds) \right]. \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Agora, calculando-se em detalhe o elemento de matriz em (A.3) usando a comutação de Weyl-Schwinger  $V^x U^y = U^y V^x \exp(\frac{2\pi i}{N} xy)$ , tem-se

$$\langle v_k | U^{-j} V^{-l} U^a V^b U^c V^d | v_k \rangle = \langle v_k | U^{a+c-j} V^{b+d-l} | v_k \rangle \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (cb - cl - al) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\langle v_k | U^{-j} V^{-l} U^a V^b U^c V^d | v_k \rangle = \langle v_k | v_{k+a+c-j} \rangle \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} k(b+d-l) \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (cb - cl - al) \right] \quad (\text{A.5})$$

$$\langle v_k | U^{-j} V^{-l} U^a V^b U^c V^d | v_k \rangle = \delta_{a+c-j,0}^{[N]} \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} k(b+d-l) \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (cb - cl - al) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Daí, reescreve-se (A.3),

$$\begin{aligned} \text{Tr}[G^\dagger(m, n) G(u, v) G(r, s)] &= \frac{1}{N^3} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j,l=-h}^h \sum_{a,b,c,d=-h}^h \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} k(b+d-l) \right] \delta_{a+c-j,0}^{[N]} \\ &\exp[-i\pi(\phi(j+h, l+h; N))] \exp[i\pi\phi(a+h, b+h; N)] \exp[i\pi\phi(c+h, d+h; N)] \\ &\exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (cb - cl - al) \right] \exp \left[ \frac{\pi i}{N} (+jl + ab + cd) \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (mj + nl - ua - bv - cr - ds) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

e a somatória em  $\{k\}$  resulta numa delta de Kroenecker

$$\begin{aligned} \text{Tr}[G^\dagger(m, n) G(u, v) G(r, s)] &= \frac{1}{N^2} \sum_{j,l=h}^h \sum_{a,b,c,d=-h}^h \delta_{a+c-j,0}^{[N]} \delta_{b+d-l,0}^{[N]} \\ &\exp[-i\pi(\phi(j+h, l+h; N))] \exp[i\pi\phi(a+h, b+h; N)] \exp[i\pi\phi(c+h, d+h; N)] \\ &\exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (cb - l(c+a)) \right] \exp \left[ \frac{\pi i}{N} (jl + ab + cd) \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (mj + nl - ua - bv - cr - ds) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Somando-se em  $\{j, l\}$ , e fazendo-se uso da Eq. (2.21), obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Tr}[G^\dagger(m, n) G(u, v) G(r, s)] &= \frac{1}{N^2} \sum_{a,b,c,d=-h}^h \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (cb - (b+d)(a+c)) \right] \\ &\exp[-i\pi(\phi(a+c+h, b+d+h; N))] \exp[i\pi\phi(a+h, b+h; N)] \exp[i\pi\phi(c+h, d+h; N)] \end{aligned}$$

$$\exp \left[ \frac{\pi i}{N} ((a+c)(b+d) + ab + cd) \right] \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (m(a+c) + n(b+d) - ua - bv - cr - ds) \right]. \tag{A.9}$$

Reordenando e recordando que  $\exp [i\pi\phi(a+h, b+h; N)] = \exp [i\pi\phi(c+h, d+h; N)] =$

1 nos intervalos considerados,

$$\begin{aligned} \text{Tr}[G^\dagger(m, n) G(u, v) G(r, s)] &= \frac{1}{N^2} \sum_{a,b,c,d=-h}^h \exp [-i\pi\phi(a+c+h, b+d+h; N)] \\ &\exp \left[ \frac{\pi i}{N} (bc - ad) \right] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (a(u-m) + b(v-n) + c(r-m) + d(s-n)) \right]. \end{aligned} \tag{A.10}$$

## Referências

- [1] B. Leaf, J. Math. Phys. **9** (1968) 65.
- [2] S. R. de Groot and L.G. Suttorp, Foundations of Electrodynamics (North Holland, Amsterdam, 1972).
- [3] H Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, New York, 1978).
- [4] E. Wigner, Phys. Rev. **40** (1932) 749.
- [5] J.E. Moyal, Proc. Camb. Phil. Soc. **45** (1949) 99.
- [6] J.G. Kirkwood, Phys. Rev. **44** (1933) 31.
- [7] S.S. Mizrahi, Physica **A127** (1984) 241.
- [8] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **46** (1960) 570,893,1401; **47** (1961) 1075;  
J. Schwinger, *Quantum Kinematics and Dynamics* (Benjamin, New York, 1970).
- [9] D. Galetti and A. F. R. de Toledo Piza, Physica **149A** (1988) 267.
- [10] W.K. Wothers, Ann. Phys. **176** (1987) 1.
- [11] O. Cohendet, Ph. Combe, M. Sirugue and M. Sirugue-Collin, J. Phys. **A21** (1988) 2875.

- [12] D. Galetti and A. F. R. de Toledo Piza, *Physica* **A186** (1992) 513.
- [13] D. Galetti and A. F. R. de Toledo Piza, *Physica* **A214** (1995) 207.
- [14] D. Galetti and M. Ruzzi, *Physica* **A264** (1999) 473.
- [15] D. Galetti and M. Ruzzi, *J Phys A: Math. and General* **33** (2000) 2799.
- [16] H.J. Lipkin, N. Meshkov and A.J. Glick, *Nucl. Phys.* **62** (1965) 188.
- [17] F.W. Byron, R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, (Dover Publications, New York, 1992).
- [18] B. Hiley, N. Monk, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 3625
- [19] M. Ruzzi, D. Galetti, *J. Phys. A: Math. and General* **33** (2000) 1065; Corrigendum *J. Phys. A: Math. and General* **33** (2000) 1305.
- [20] R. Aldrovandi and D. Galetti, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 2987.
- [21] G. 't Hooft, Equivalence Relations between deterministic and quantum mechanical systems, Utrecht preprint 88-9.
- [22] G.E. Andrews, *The Theory of Partitions*, in *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol.2, Ed. G.-C. Rotta (Addison-Wesley, USA, 1976).
- [23] W. Pauli, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellen-mechanik*, in *Encyclopedia of Physics*, Ed. S. Flügge (Springer, 1958), Vol. V, Part 1.
- [24] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, New York, 1994).
- [25] G. Holtzwarth, *Nucl. Phys.* **A207** (1973) 545.

- 
- [26] A.F.R. de Toledo Piza, E.J.V. de Passos, D. Galetti, M.C. Nemes and M.M. Watanabe, *Phys. Rev.* **C15** (1977) 1477.
- [27] L. Jaffe, *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982) 497.
- [28] M. Mizrahi, *J. Math. Phys.* **11** (1975) 2201.
- [29] P.A.M. Dirac, *Quantum Mechanics* (Oxford Univ. Press, 1947)
- [30] A.K. Kerman, S.E. Koonin, *Ann. of Phys.* **100** (1976) 332.

