



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

HELOISA VASQUES DA SILVA

**Modelos de Fluxo em Arcos para o Problema de Corte de Estoque com
Modos Alternativos de Manufatura**

Bauru

2022

HELOISA VASQUES DA SILVA

**Modelos de Fluxo em Arcos para o Problema de Corte de Estoque com
Modos Alternativos de Manufatura**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção.

Área de concentração: Pesquisa Operacional e Métodos de Análise de Sistemas Produtivos

Orientador: Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

Coorientador: Prof. Dr. Felipe Kesrouani Lemos

Bauru

2022

S586m Silva, Heloisa Vasques da
Modelos de fluxo em arcos para o problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura / Heloisa Vasques da Silva. -- Bauru, 2022
66 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, Bauru
Orientador: Silvio Alexandre de Araujo
Coorientador: Felipe Kesrouani Lemos

1. Modelagem matemática. 2. Problema de corte de estoque. 3. Programação inteira. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Engenharia, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE HELOISA VASQUES DA SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 13 dias do mês de abril do ano de 2022, às 14:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de HELOISA VASQUES DA SILVA, intitulada **Modelos de Fluxo em Arcos para o Problema de Corte de Estoque com Modos Alternativos de Manufatura**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. SILVIO ALEXANDRE DE ARAUJO (Orientador-Participação Virtual) do Departamento de Matemática/ UNESP Campus de São José do Rio Preto, Prof. Dr RAPHAEL HARRY FREDERICO RIBEIRO KRAMER (Participação Virtual) do Departamento de Engenharia de Produção/Universidade Federal de Pernambuco, Profa. Dra. ADRIANA CRISTINA CHERRI NICOLA (Participação Virtual) do Departamento de Matemática / UNESP Campus de Bauru. Após a exposição pela mestranda e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, a discente recebeu o conceito final: APROVADA. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. SILVIO ALEXANDRE DE ARAUJO



Dissertação de autoria de Heloisa Vasques da Silva, sob o título **“Modelos de Fluxo em Arcos para o Problema de Corte de Estoque com Modos Alternativos de Manufatura”**, apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, na área de concentração Pesquisa Operacional e Métodos de Análise de Sistemas Produtivos, aprovada em 13 de Abril de 2022 pela comissão julgadora constituída pelos doutores:

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
UNESP - São José do Rio Preto
Presidente

Prof. Dr. Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Adriana Cristina Cherri Nicola
UNESP - Bauru

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Maria Helena e Élio, por todo o suporte que me deram para os estudos ao longo da minha vida. Ao meu irmão, Daniel, pelo seu apoio. Agradeço aos três pelo incentivo, compreensão e amor em todos os momentos.

Ao meu orientador, Silvio, por ter me recebido tão bem como sua aluna. Agradeço pela sua orientação, paciência e confiança.

Ao meu coorientador, Felipe, pela confiança para que eu pudesse dar continuidade ao seu trabalho, pela sua disponibilidade e valiosa contribuição.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

SILVA, Heloisa Vasques da. **Modelos de Fluxo em Arcos para o Problema de Corte de Estoque com Modos Alternativos de Manufatura**. 2022. 66 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2022.

O problema de corte de estoque (PCE) apresenta importância reconhecida e crescente, tanto no meio acadêmico, como industrial. Por estar tipicamente imerso em processos produtivos, diversas características operacionais peculiares podem ser verificadas em diferentes sistemas de produção. Esta dissertação propõe-se a contribuir no estudo de uma característica operacional e sua integração com processos de corte unidimensionais, motivado por um estudo anterior: o problema de minimização de custos com modos alternativos de produção. Uma das maneiras de utilizar modos alternativos de manufatura se encontra quando um único produto pode ser produzido com diferentes materiais. O objetivo deste trabalho consiste em reformular o problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura, proposto na literatura, utilizando outros modelos baseados em fluxo em arcos, e realizar estudos de desempenho com o intuito de analisar os modelos propostos. Resultados computacionais da comparação dos modelos são apresentados utilizando instâncias aleatórias encontradas na literatura, as quais foram geradas com base nos dados coletados em uma indústria de construção civil. Este estudo traz contribuições teóricas e práticas, facilitando a visualização dos principais avanços nessa área. Particularmente, esta dissertação contribui com o desenvolvimento da literatura sobre PCE e modos alternativos de manufatura.

Palavras-chaves: Modelagem matemática. Problema de corte de estoque. Múltiplos modos de produção. Fluxo em arcos. *Meet in the middle*. *Reflect*.

ABSTRACT

SILVA, Heloisa Vasques da. **Arc Flow Models for the Cutting Stock Problem with Alternative Production Modes.** 2022. 66 p. Dissertation (Master of Production Engineering) – Faculdade de Engenharia de Bauru, São Paulo State University, Bauru, 2022.

The cutting stock problem (CSP) has a recognized and rising importance. Being present in different production processes, several operational features can be noticed in varied production systems. In this work, we propose a contribution to the study of an operational characteristic and its integration with one-dimensional cutting processes, motivated by a previous study: the problem of minimizing the total raw material costs with alternative production modes. One of the ways to use alternative production modes is when a product can be manufactured with different materials. This work aims to reformulate the cutting stock problem with multiple manufacturing modes found in the literature using arc flow-based models and carry out performance studies in order to analyze the proposed models. Computational results comparing the models are presented using random instances found in the literature, which were generated based on the data from a civil construction industry. This study brings theoretical and practical contributions, facilitating the visualization of the main advances in this area. In particular, this work contributes to the development of the literature on CSP and the multiple manufacturing modes.

Keywords: Mathematical modeling. Cutting stock problem. Multiple modes of production. Arc flow. Meet in the middle. Reflect.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de modos alternativos.	23
Figura 2 – (a) Fluxo em arcos. (b) <i>Meet-in-the-middle</i>	35
Figura 3 – Representação da formulação <i>reflect</i>	39
Figura 4 – Padrões de corte representados por pares de caminhos de colisão.	40
Figura 5 – Representação dos arcos formados pelo modelo de (a) fluxo em arcos, (b) <i>meet-in-the-middle</i> e (c) <i>reflect</i>	45
Figura 6 – Fluxos da solução ótima do exemplo com a formulação baseada em fluxo em arcos.	47
Figura 7 – Fluxos da solução ótima do exemplo com a formulação baseada no princípio <i>meet-in-the-middle</i>	47
Figura 8 – Fluxos da solução ótima do exemplo com a formulação baseada na <i>reflect</i>	48
Figura 9 – Perfil de desempenho dos modelos para o tempo de solução.	51

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Criação dos arcos para o modelo de <i>Fluxo em Arcos</i>	32
Algoritmo 2 – Criação do conjunto B	36
Algoritmo 3 – Criação do conjunto M	37
Algoritmo 4 – Criação dos arcos para o modelo <i>meet-in-the-middle</i>	38
Algoritmo 5 – Criação dos arcos para o modelo <i>reflect</i>	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Padrões de Corte.	27
Tabela 2 – Conjuntos dos padrões MIM ($t = 2$).	35
Tabela 3 – Quantidade de vértices e arcos dos exemplos.	40
Tabela 4 – Dados dos modos de produção de cada produto a ser fabricado.	44
Tabela 5 – Quantidade de vértices e arcos do exemplo ilustrativo.	46
Tabela 6 – Modos de produção por produto.	46
Tabela 7 – Quantidade e custo das barras utilizadas.	46
Tabela 8 – Média do tempo total (média do tempo para geração das colunas ou arcos) de cada modelo quando os parâmetros variam.	50
Tabela 9 – Resumo dos principais resultados dos modelos.	52
Tabela 10 – Comparação geral dos modelos MIM e RE com o modelo FA (em %).	53
Tabela 11 – Número de instâncias resolvidas na otimalidade (tempo médio em segundos) em cada modelo quando os parâmetros variam.	54
Tabela 12 – Porcentagem de redução no tempo de solução das instâncias resolvidas na otimalidade em cada modelo em comparação à GC quando os parâmetros variavam.	55
Tabela 13 – Número de instâncias em que não foi provada a otimalidade (<i>gap</i> percentual médio) de cada modelo quando os parâmetros variam.	56
Tabela 14 – Número de instâncias que não atingiram o valor ótimo separadas pelo tamanho dos itens e quantidades de espessuras de matéria-prima.	56
Tabela 15 – Porcentagem de superioridade média dos valores dos limitantes superiores das instâncias não ótimas em comparação à GC quando os parâmetros variam.	57
Tabela 16 – Porcentagem de superioridade média dos valores dos limitantes inferiores das instâncias não ótimas em comparação à GC quando os parâmetros variam.	58
Tabela 17 – Quantidade média de variáveis, restrições e tempo (em segundos) dos modelos baseados em fluxo em arcos quando os parâmetros variam.	60

SUMÁRIO

1	Introdução	12
2	Revisão de literatura	15
3	O problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura	21
3.1	Problema de corte de estoque unidimensional	21
3.2	Definição e modelagem matemática do PCE com modos alternativos de manufatura	22
4	Modelos matemáticos para o PCEMA-1D	26
4.1	Modelagem baseada em Geração de Colunas	26
4.2	Modelagem baseada no modelo clássico de fluxo em arcos	29
4.3	Formação dos arcos baseada no princípio <i>meet-in-the-middle</i>	33
4.4	Modelagem baseada no modelo <i>reflect</i>	38
4.5	Exemplo ilustrativo	43
5	Experimentos computacionais	49
5.1	Descrição dos dados	49
5.2	Resultados	49
5.2.1	Instâncias em que foi provada a otimalidade	53
5.2.2	Instâncias em que não foi provada a otimalidade	55
5.3	Discussões adicionais	58
6	Conclusão	61
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

Os problemas de Corte e Empacotamento, em inglês, *Cutting and Packing* (C&P), constituem uma área fundamental no campo da pesquisa operacional. O termo empacotamento é adotado em situações em que se busca determinar a melhor forma de arranjar um conjunto de itens dentro de objetos, e o termo corte é utilizado quando se quer determinar a melhor forma de cortar itens a partir de objetos em estoque (WÄSCHER; HAUßNER; SCHUMANN, 2007).

Uma solução para um problema de corte e empacotamento consiste, basicamente, em um conjunto de itens (uni ou multidimensionais) embalados em (ou cortados de) um ou mais objetos, satisfazendo algumas restrições e minimizando uma determinada função objetivo. As restrições típicas impõem que todos os itens devem estar inteiramente dentro do objeto em que são embalados (ou cortados) e não devem se sobrepor entre si (CÔTÉ; IORI, 2018).

Ambos os problemas estão relacionados a uma variedade de problemas do mundo real, incluindo roteamento de veículos capacitados, problemas de programação com restrição de recursos e sistemas de produção (DELORME; IORI, 2020).

Nas últimas décadas, vários artigos de revisão bibliográfica relacionados ao problema de corte e empacotamento foram publicados: Dyckhoff (1990), Sweeney e Paternoster (1992), Dowsland e Dowsland (1992), Dyckhoff, Scheithauer e Terno (1997) e Wäscher, Haußner e Schumann (2007), Delorme, Iori e Martello (2016). Edições especiais de jornais, por exemplo, o *European Journal of Operational Research*, foram publicadas: Bischoff e Wäscher (1995), Wang e Wäscher (2002) e Oliveira e Wäscher (2007).

O presente trabalho tem como tema de estudo um caso particular dos problemas de corte denominado Problema de Corte de Estoque (PCE), em inglês, *Cutting Stock Problem*, caracterizado por objetos de dimensões fixas, que devem ser cortados para satisfazer a demanda de um conjunto de itens fracamente heterogêneo e, tendo como objetivo, a minimização da quantidade de matéria-prima (WÄSCHER; HAUßNER; SCHUMANN, 2007).

O PCE aparece em diversos processos industriais, em que os itens são encomendados com dimensões especificadas, e os objetos, em geral disponíveis em estoque, podem corresponder, por exemplo, a barras de aço (LEMO; CHERRI; ARAUJO, 2021), bobinas

de papel (POLTRONIERE *et al.*, 2008; KALLRATH *et al.*, 2014), chapas metálicas ou de madeira (KOKTEN; SEL, 2020), ou peças de vidro (PARREÑO; ALONSO; ALVAREZ-VALDÉS, 2020).

O interesse de pesquisa intenso e crescente neste tipo de problema pode ser explicado por (i) sua aplicabilidade, (ii) diversidade de problemas reais e (iii) complexidade combinatória (SANTORO; LEMOS, 2015). De fato, a importância técnica e econômica das aplicações do PCE nos processos industriais e logísticos é uma das principais justificativas para o desenvolvimento dessa pesquisa.

O PCE pode ser modelado como um problema de programação linear inteira de grande porte, usando uma representação baseada em padrões de corte. Padrões de corte são as possíveis formas de se cortar o objeto em itens menores, respeitando seu limite de tamanho. Nesta representação, o número de vezes que os objetos são cortados segundo um padrão, ou seja, as frequências de utilização dos padrões, são as variáveis de decisão.

Nestes modelos, enumerar todos os padrões pode ser difícil, mesmo para instâncias de tamanho moderado. Uma das estratégias amplamente utilizada para superar o grande número de variáveis, é o procedimento de geração de colunas proposto pelos trabalhos de Gilmore e Gomory (1961, 1963), que buscam adicionar colunas (neste caso, padrões de corte) com potencial de melhorar a função objetivo do problema.

O número de variáveis e restrições nos modelos baseados em padrões de corte depende do número de itens do problema. Existem modelos em que a quantidade de variáveis e restrições depende não só da quantidade de itens, mas também do tamanho do objeto: são os modelos pseudo-polinomiais. A formulação de *fluxo em arcos* proposta por Valério de Carvalho (1999), em que um possível padrão de corte é representado como um caminho em um grafo, é um exemplo de modelo pseudo-polinomial. Entre esse tipo de formulação, a de fluxo em arcos é muito eficiente para resolver o PCE (DELORME; IORI; MARTELLO, 2016) e uma de suas vantagens é a possibilidade encontrar uma solução exata por meio de *softwares* comerciais de programação linear inteira mista (MILP). O forte desenvolvimento dessas ferramentas e o aumento do poder computacional nos últimos anos intensificaram o interesse nesse tipo de formulação (DELORME; IORI, 2020).

Enquanto as primeiras publicações do PCE se concentravam em modelos e métodos para o problema clássico, atualmente muita atenção tem sido voltada para a integração com outras condições operacionais encontradas em contextos produtivos (WUTTKE; HEESE, 2018), por exemplo, o problema de corte de estoque integrado ao problema de:

sequenciamento da produção (YANASSE; LAMOSA, 2007); dimensionamento de lotes (MELEGA; ARAUJO; JANS, 2018); ou modos alternativos de manufatura (LEMOS; CHERRI; ARAUJO, 2021). Esse último pode ser encontrado em situações em que há a possibilidade de mais de uma forma de fabricação distinta atender à mesma demanda, como, por exemplo, no caso em que o mesmo produto final pode ser produzido com diferentes itens (LEMOS; CHERRI; ARAUJO, 2021).

Este trabalho se insere no contexto da tendência de integração dos PCEs com condições operacionais, e escassez de estudos na literatura que integrem o PCE com o problema de modos alternativos de manufatura. Adicionalmente, esse trabalho visa contribuir com a literatura referente ao PCE, uma vez que reformulações para o problema de corte de estoque unidimensional integrado a características operacionais, no caso, o atendimento de ordens de produção de maneiras diferentes, serão propostas, bem como a realização de testes para avaliação de desempenho dos métodos de solução.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar os problemas de corte de estoque com modos alternativos de manufatura. Visando o estudo e a construção de um conhecimento científico, os objetivos específicos se desdobram em:

- reformular o problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura utilizando outros modelos encontrados na literatura;
- implementar os modelos e realizar testes computacionais objetivando estudos de desempenho, usando dados encontrados na literatura;
- comparar os modelos implementados quanto aos resultados alcançados e ao esforço computacional.

A organização do texto é feita da seguinte maneira: no Capítulo 2 é feita a revisão da literatura acerca de modelagens baseadas em fluxo em arcos; no Capítulo 3, o problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura é descrito; o Capítulo 4 apresenta os modelos matemáticos para o problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura e um exemplo ilustrativo; a descrição dos testes executados e a apresentação dos resultados estão no Capítulo 5; a conclusão do trabalho se encontra no Capítulo 6.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta revisão, serão abordadas características da formulação de fluxo em arcos, além de estratégias de redução e métodos de solução adotados para a mesma. Também serão apresentadas as recentes e diversas aplicações desta formulação encontradas na literatura.

O uso de modelos pseudo-polinomiais e da ideia de fluxo para resolver problemas C&P vem desde o trabalho de [Wolsey \(1977\)](#), que resolveu o PCE como um problema de fluxo em rede. A formulação de fluxo em arcos para o PCE foi formalmente proposta por [Valério de Carvalho \(1999\)](#), e é muito eficiente entre aquelas que usam modelos pseudo-polinomiais para resolver problemas de corte e empacotamento ([DELORME; IORI; MARTELLO, 2016](#)).

Desde então, a utilização dessas formulações cresceu consideravelmente em uma variedade de problemas de otimização combinatória, e o aumento do poder computacional atual estimula novas linhas de pesquisa para os modelos exatos ([DELORME; IORI; MARTELLO, 2016](#)). Uma das vantagens dessa formulação é que, muitas vezes, ela pode ser resolvida diretamente com um *solver* de programação linear inteira mista. Entretanto, sendo pseudo-polinomiais, podem atingir tamanhos grandes, dependendo dos parâmetros do problema. Nesses casos, é preciso contar com outros métodos mais sofisticados para resolvê-los.

A formulação clássica de fluxo em arcos foi proposta por [Valério de Carvalho \(1999\)](#) e modela um problema de corte de estoque em que os vértices correspondem a posições no objeto e os arcos correspondem a posições em que os itens devem ser cortados ou representam perdas no objeto. A combinação de arcos passando pelo vértice inicial até o final caracteriza um padrão de corte. Para resolver esse modelo de programação inteira, o autor propôs um algoritmo *branch-and-bound* baseado em geração de colunas. No contexto de modelos de fluxo em arcos, a geração de coluna e linha gera iterativamente arcos para entrar na base simplex, enquanto as restrições de conservação de fluxo são restritas a nós em que existe pelo menos um arco de entrada e um de saída no problema restrito.

[Valério de Carvalho \(1999\)](#) provou que o modelo de programação linear de fluxo em arcos para o problema de corte de estoque é equivalente ao modelo clássico de [Gilmore e Gomory \(1961, 1963\)](#), e portanto os limitantes dos modelos são os mesmos. Já [Martinovic,](#)

Scheithauer e Valério de Carvalho (2018) compararam o modelo de fluxo em arcos com a formulação *one-cut*, provando que as relaxações dos dois modelos são equivalentes.

Outro método de solução baseado na formulação de fluxo em arcos para o problema de corte e empacotamento foi proposto por Brandao e Pedroso (2016). O método exato constrói um grafo compacto que contém todos os caminhos necessários para determinar uma solução ótima do problema. Além disso, a relaxação linear do modelo é equivalente à de Gilmore e Gomory (1961, 1963).

Outros autores estudaram técnicas de relaxação no espaço para reduzir o tamanho das formulações de fluxo em arcos. Clautiaux *et al.* (2017) apresentaram uma estrutura geral para resolver modelos de fluxo em arcos por meio de um esquema iterativo de agregação e desagregação, que basicamente modifica a possibilidade de combinar, ou não combinar, os arcos em caminhos viáveis. Como consequência, uma solução viável pode ser obtida diretamente do modelo. A estrutura foi avaliada computacionalmente em algumas instâncias do PCE e roteamento de veículos, mas também pode ser aplicada para uma variedade de problemas.

Um elemento importante para melhorar a eficiência de resolução do modelo de fluxo em arcos provém da determinação dos seus arcos. Remover arcos redundantes é importante, pois uma rede menor pode levar a uma redução na simetria, uma relaxação mais forte e uma árvore *branch-and-bound* menor (LIMA *et al.*, 2022). Algumas técnicas de redução têm sido estudadas a fim de possibilitar a resolução de instâncias maiores dos problemas.

Valério de Carvalho (1999) propôs três critérios para reduzir a quantidade de arcos do modelo sem eliminar padrões de corte válidos. O primeiro critério aloca os itens em ordem decrescente de tamanho, o segundo não permite iniciar um padrão de corte com perda, e o terceiro determina que não são necessários mais arcos do que a demanda do item.

Na mesma linha, Côté e Iori (2018) propuseram uma técnica chamada *meet-in-the-middle*: cada fluxo representando um padrão de corte pode ser transformado em um caminho equivalente alinhando os itens à esquerda e à direita de um determinado valor t , que corresponde a uma posição no objeto. Os autores também apresentaram critérios de pré-processamento para reduzir ainda mais o tamanho do modelo, e o aplicaram em problemas C&P. A técnica pode ser aplicada para reduzir o número de padrões em

problemas multidimensionais e pode ser adaptada para diversas outras aplicações, como problemas de roteamento de veículos e *scheduling*.

Mais recentemente, para reduzir ainda mais a quantidade de variáveis e restrições do modelo, [Delorme e Iori \(2020\)](#) propuseram um modelo pseudo-polinomial para o PCE que considera vértices e arcos apenas para metade do tamanho do objeto. Na prática, esta formulação é significativamente menor do que o modelo de fluxo em arcos clássico. Além disso, sua relaxação linear provou ser tão forte quanto a relaxação linear do modelo de fluxo em arcos clássico. Os autores também apresentaram outras formas de melhorar o desempenho computacional do modelo usando técnicas baseadas em geração de colunas, cortes e heurísticas. Além do PCE, [Delorme e Iori \(2020\)](#) estenderam a formulação para resolver o problema da mochila de tamanho variável e o problema da mochila com fragmentação de itens. Na prática, diversas aplicações relevantes podem ser representadas por esta formulação.

Os modelos baseados em representações de fluxo em arcos são poderosas ferramentas e permitem modelar diversos problemas combinatórios, apresentando bons resultados ([LIMA et al., 2022](#)). Suas aplicações abrangem extensões para problemas de corte e empacotamento, roteamento de veículos e programação da produção, conforme mostrado a seguir.

[Alves e Valério de Carvalho \(2008\)](#) propuseram um algoritmo *branch-and-price-and-cut*, baseado em geração de colunas, *branch-and-bound* e planos de corte para resolver o PCE com minimização de padrões de corte. Uma nova formulação de fluxo em arcos para o problema foi proposta e utilizada para definir um esquema de ramificação no algoritmo, permitindo a geração de planos de corte fortes.

Uma formulação de fluxo em arcos para o PCE multi-período foi apresentada em [Poldi e Araujo \(2016\)](#). A equivalência da relaxação linear entre os modelos de fluxo em arcos e de [Gilmore e Gomory \(1961, 1963\)](#) para o problema também foi estabelecida.

O problema de empacotamento com rotação de itens foi estudado por [Delorme, Iori e Martello \(2017\)](#), que propuseram um método fundamentado na decomposição de Benders, no qual o problema mestre é resolvido por meio de um modelo de programação linear inteira baseada na formulação de fluxo em arcos. Para o *skiving stock problem*, [Martinovic et al. \(2020\)](#) propuseram duas formulações baseadas em técnicas de redução de arcos encontradas em [Delorme e Iori \(2020\)](#). A primeira formulação foi baseada em arcos de perda reversa, e a segunda, na ideia de arcos refletidos. Como consequência das

reduções obtidas nos números de vértices e arcos, os modelos levaram à redução no tempo de solução e ao aumento de instâncias resolvidas dentro de um limite de tempo razoável, quando comparados com outros modelos existentes.

Braga *et al.* (2016) exploraram uma formulação de fluxo em arcos para o problema de corte de estoque combinado com *scheduling* e propuseram uma matheurística baseada no modelo. Os autores ressaltaram que o modelo possui uma relaxação forte, porém o seu tamanho pseudo-polinomial o torna mais difícil de ser resolvido. Ma, Liu e Zhou (2019) estudaram uma combinação do problema de corte de estoque e dimensionamento de lotes com custo de configuração de padrão. Dois modelos foram propostos, um baseado em Gilmore e Gomory (1961, 1963), e o outro em fluxo em arcos. A partir dos resultados computacionais, os autores concluíram que o modelo de Gilmore e Gomory (1961, 1963) funciona melhor do que o de fluxo em arcos para o problema, resultado do grande número de variáveis e restrições do modelo.

Uma formulação de fluxo em arcos para o problema de sequenciamento de tarefas em um conjunto de máquinas paralelas idênticas, com o objetivo de minimizar o tempo ponderado total de conclusão, foi proposto por Kramer, Dell’Amico e Iori (2019). Os autores também combinaram procedimentos de redução encontrados na literatura com características específicas do problema estudado, resultando numa diminuição de 50% das variáveis em comparação com o modelo sem as reduções. Uma extensão do problema para o caso de tempos de preparação dependentes da família foi estudado em Kramer, Iori e Lacomme (2021). As formulações de fluxo em arcos propostas diminuíram o tempo de resolução e resolveram algumas instâncias abertas da literatura até a otimalidade.

Uma outra generalização do problema de sequenciamento em máquinas paralelas foi estudada em Kramer *et al.* (2020), onde se considerou as datas de lançamento de cada tarefa. O modelo de fluxo em arcos proposto funcionou bem para instâncias de pequeno e médio porte, enquanto que para instâncias maiores, os autores propuseram um algoritmo *branch-and-price* utilizando a decomposição Dantzig-Wolfe (DW) no modelo de fluxo em arcos. Modelos de fluxo em arcos pseudo-polinomiais são por vezes relacionados a decomposições DW, provendo relaxações lineares fortes (LIMA *et al.*, 2022).

Para o problema de sequenciamento de tarefas em máquina de processamento em lotes, em que o objetivo principal é agrupar as tarefas em lotes e processá-las simultaneamente em uma máquina, uma formulação de fluxo em arcos foi proposta por Trindade, Araújo e Fampa (2021). A vantagem da utilização dessa formulação para esse problema foi

que o número de variáveis e restrições não mudou quando o número de tarefas aumentou. Dessa forma, o modelo possibilitou encontrar a solução ótima para instâncias com 100 milhões de tarefas em 3,25 segundos, quando, anteriormente, o número máximo de tarefas tratado na literatura era 500.

Outra extensão do problema de programação de tarefas, que inclui deterioração dependente da sequência e eventos de manutenção, foi abordado em [Delorme, Iori e Mendes \(2021\)](#). A nova formulação de programação inteira mista baseada em fluxo em arcos obteve bons resultados para instâncias com poucas máquinas. Outra formulação de fluxo em arcos para um problema de *scheduling* foi estudada em [Kramer e Kramer \(2021\)](#). O problema combina localização de facilidades industriais com programação de tarefas, e consistiu em escolher a localização de múltiplas máquinas entre um conjunto de candidatos e sequenciar um conjunto de tarefas nessas máquinas, visando minimizar o tempo total de conclusão. Os resultados indicaram que a formulação de fluxo em arcos é mais forte do que as existentes atualmente na literatura. Para o problema de localização de facilidades, [Kramer, Iori e Vidal \(2020\)](#) propuseram uma formulação de fluxo em arcos para o caso de p facilidades com restrições de capacidade. O modelo levou à limitantes de maior qualidade, porém o alto consumo de tempo para resolução sugere que outros métodos sejam aplicados para se tornar uma opção viável.

Outros problemas incluem o trabalho de [Song et al. \(2017\)](#) que apresentou um algoritmo *branch-and-price-and-cut* para resolver uma formulação de fluxo em arcos de uma variante do problema de transporte de contêineres. O problema é equivalentemente transformado em uma variante do problema de roteamento de veículos assimétricos com janelas de tempo. Um problema integrado que combina um problema de produção e distribuição, roteamento de veículos e estoque foi estudado em [Ramos, Alves e Valério de Carvalho \(2022\)](#). Uma formulação baseada em fluxo em arcos foi proposta, em que os nós representavam instantes de tempo. O modelo se mostrou eficiente, porém a geração dos arcos se mostrou computacionalmente desvantajosa.

Mais recentemente, [Lima et al. \(2022\)](#) publicaram uma ampla revisão acerca das formulações de fluxo em arcos. Os autores apresentaram as diversas aplicações e métodos utilizados e enfatizaram a relação entre a formulação e programação dinâmica.

As pesquisas recentes mostram que a formulação de fluxo em arcos pode ser adaptada para diversos problemas, e que muitos de seus métodos de solução são gerais e podem ser aplicados para vários problemas. Além disso, *solvers* de programação linear inteira

conseguem resolver algumas instâncias menores até a otimalidade. Entretanto, instâncias grandes resultam em grande quantidade de variáveis e restrições, demandando empenho para a diminuição dos esforços computacionais do modelo. De fato, um corpo significativo da pesquisa atual está lidando com técnicas de redução, bem como melhorias teóricas e de algoritmos. Portanto, o estudo desse tipo de formulação se torna bastante atrativo, uma vez que tem potencial de avançar o estudo de diversos problemas combinatórios.

3 O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM MODOS ALTERNATIVOS DE MANUFATURA

O objetivo deste capítulo é apresentar o problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura. Para tanto, utilizaremos um modelo matemático que, em nossa opinião, consiste em uma forma didática e natural de descrever o problema. Enfatizamos que este modelo não será utilizado posteriormente neste texto e, nem tampouco, foi utilizado em [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#), artigo em que a presente dissertação foi inspirada. Assim, neste capítulo, o modelo matemático para o problema de corte de estoque unidimensional proposto por [Kantorovich \(1960\)](#) é apresentado. Em seguida, os aspectos operacionais que originaram o problema de corte de estoque unidimensional com modos alternativos de manufatura (PCEMA-1D) são descritos e, para fins didáticos, um modelo matemático baseado na formulação de [Kantorovich \(1960\)](#) para o PCEMA-1D é apresentado.

3.1 Problema de corte de estoque unidimensional

Para modelar o PCE e seus principais elementos, a formulação compacta para o caso unidimensional proposta por [Kantorovich \(1960\)](#) será apresentada. Essa formulação também é conhecida como modelo de atribuição generalizada para o PCE ([DEGRAEVE; PEETERS, 2003](#)).

Em um PCE unidimensional, deseja-se cortar objetos de comprimento L em itens de tamanhos $l_1, l_2, \dots, l_{NI}$ para atender às suas demandas $d_1, d_2, \dots, d_{NI}$. Considere os seguintes conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão para esse modelo.

Conjuntos:

O ($o \in O, o = 1, \dots, NO$): conjunto de objetos;

I ($i \in I, i = 1, \dots, NI$): conjunto de itens.

Parâmetros:

L : comprimento dos objetos;

l_i : tamanho do item i ;

d_i : demanda do item i

Variáveis de decisão:

$$y_o = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } o \text{ é usado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

x_{io} = número de itens de tamanho l_i cortado a partir do objeto o .

$$\min \quad \sum_{o \in O} y_o \quad (1)$$

$$s. \ a. : \quad \sum_{o \in O} x_{io} \geq d_i, \quad \forall i \in I, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} l_i x_{io} \leq L y_o, \quad \forall o \in O, \quad (3)$$

$$y_o \in \{0, 1\}, \quad \forall o \in O, \quad (4)$$

$$x_{io} \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in I, \forall o \in O. \quad (5)$$

No modelo (1)-(5), a função objetivo (1) minimiza o número de objetos cortados. O conjunto de restrições (2) garante que a demanda de cada item seja satisfeita. As restrições (3) são restrições da mochila e asseguram que se o objeto o é cortado, então a combinação dos tamanhos dos itens que serão cortados a partir do objeto não excedem o seu tamanho L . As restrições (4) e (5) definem o domínio das variáveis de decisão.

3.2 Definição e modelagem matemática do PCE com modos alternativos de manufatura

Em [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#), os autores apresentam a integração entre o problema de corte de estoque unidimensional com modos alternativos de manufatura (PCEMA-1D), com objetivo de minimizar o custo total de matérias-primas para um conjunto de produtos a serem produzidos.

A motivação para o estudo foi o processo de corte de barras de ferro para montagem de armaduras estruturais na indústria de artefatos de concreto, sobretudo postes para iluminação urbana. A existência de diversas espessuras de barras de aço disponíveis e a possibilidade de combinação de mais de uma espessura em um mesmo produto, permite que um mesmo requisito técnico seja atendido com diferentes configurações de barras.

A Figura 1 ilustra o problema: um determinado esforço projetado é representado como um diagrama de cisalhamento. Os múltiplos modos de manufatura resultam da

possibilidade de configurar as barras de maneiras distintas, mas atendendo o mesmo requisito de forças cortantes.

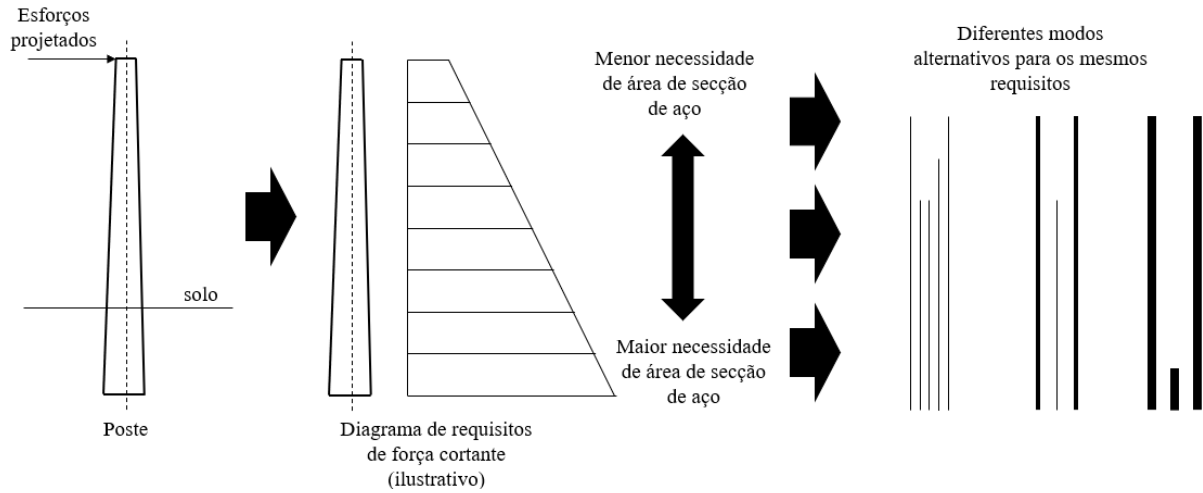


Figura 1 – Representação de modos alternativos.

Fonte: [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#).

A decisão de escolher um modo de fabricação para um produto isolado, considerando apenas o custo das matérias-primas, não parece complexa. Porém, ao se considerar um mix de produção com diferentes produtos e diferentes demandas, as possibilidades de combinações aumentam. Escolher uma combinação que minimize o desperdício de matéria-prima global, ainda que não se escolha a alternativa mais econômica para cada um dos produtos, pode ser vantajoso, tornando a possibilidade de modos alternativos de produção interessante ([LE MOS; CHERRI; ARAUJO, 2021](#)).

Para o PCEMA-1D, os objetos unidimensionais que serão cortados para serem utilizados como matérias-primas na produção de artefatos de concreto são as barras de ferro disponíveis com diferentes espessuras. Seja O ($o \in O$, $o = 1, \dots, NO$) o conjunto de barras de tamanho L a serem cortadas. Seja K ($k \in K$, $k = 1, \dots, NK$) o conjunto de espessuras das barras utilizadas na produção com custo de θ_k . Seja I ($i \in I$, $i = 1, \dots, NI$) o conjunto de tamanhos de itens a serem cortados. O conjunto de produtos a serem fabricados é dado por J ($j \in J$, $j = 1, \dots, NJ$). Cada produto deve atender uma demanda d_j . O conjunto M_j ($m \in M_j$) determina os modos alternativos de produção associados a cada produto j . Cada um desses modos m é caracterizado pela combinação de uma quantidade b_{ikm} de itens unidimensionais de tamanho l_i e de espessura k . O objetivo do modelo é atender todas as ordens de produção, escolhendo os modos de produção mais convenientes para minimizar o custo total de matéria-prima.

Para modelar esse problema de acordo com a formulação de Kantorovich (1960), as seguintes variáveis de decisão foram consideradas: Y_{ok} determina se a barra o de espessura k é utilizada, $X_{io k}$ determina a quantidade de itens de tamanho l_i cortados da barra o de espessura k e Z_{jm} determina a quantidade de produtos do tipo j produzidos em cada modo m .

O modelo do problema de corte de estoque unidimensional com modos alternativos derivado do modelo de Kantorovich (1960) está retratado em (6)-(12). Parte dos conjuntos e parâmetros que já foram apresentados anteriormente serão listados novamente a seguir, a fim de facilitar a leitura e compreensão do leitor.

Conjuntos:

O ($o \in O$, $o = 1, \dots, NO$): conjunto de barras a serem cortadas;

J ($j \in J$, $j = 1, \dots, NJ$): conjunto de produtos a serem fabricados;

K ($k \in K$, $k = 1, \dots, NK$): conjunto de espessuras das matérias-primas unidimensionais;

I ($i \in I$, $i = 1, \dots, NI$): conjunto de tamanhos de itens a serem cortados;

M_j ($m \in M_j$): conjunto de modos alternativos para fabricar o produto j .

Parâmetros:

L : tamanho da barra;

d_j : demanda do produto j ;

θ_k : custo da matéria-prima de espessura k ;

l_i : tamanho do item i ;

b_{ikm} : quantidade de itens de tamanho l_i e espessura k utilizada no modo de produção m ;

Variáveis de decisão:

$$Y_{ok} = \begin{cases} 1, & \text{se a barra } o \text{ de espessura } k \text{ é usada} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$X_{io k}$: quantidade do item i cortada em cada barra o de espessura k ;

Z_{jm} : quantidade do produto tipo j produzida no modo de produção m .

$$\min \quad \sum_{k \in K} \sum_{o \in O} \theta_k Y_{ok} \quad (6)$$

$$s. \ a. : \quad \sum_{i \in I} l_i X_{iok} \leq LY_{ok}, \quad k \in K, o \in O, \quad (7)$$

$$\sum_{m \in M_j} Z_{jm} \geq d_j, \quad j \in J, \quad (8)$$

$$\sum_{o \in O} X_{iok} \geq \sum_{j \in J} \sum_{m \in M_j} b_{ikm} Z_{jm}, \quad k \in K, i \in I, \quad (9)$$

$$Y_{ok} \in \{0, 1\}, \quad o \in O, k \in K, \quad (10)$$

$$X_{iok} \in \mathbb{Z}_+, \quad i \in I, o \in O, k \in K, \quad (11)$$

$$Z_{jm} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in J, m \in M_j. \quad (12)$$

No modelo (6)-(12), a função objetivo (6) minimiza o custo total com matérias-primas, totalizando a quantidade de barras utilizadas de cada espessura multiplicado pelo seu respectivo custo. O conjunto de restrições (7) é relativo ao conjunto de restrições da mochila derivadas do modelo de Kantorovich (1960), que garante que se a barra o de espessura k for utilizada, então a combinação de itens cortados a partir da barra não excede o seu tamanho. As restrições (8) garantem que a demanda de cada produto j seja atendida. As restrições (9) garantem o cumprimento da demanda de cada item i de espessura k , ou seja, a soma de todos os itens i cortados de todas as barras de espessura k deve atender a necessidade de itens de acordo com os modos de produção determinados. As restrições (10), (11) e (12) são de domínio das variáveis de decisão.

O modelo apresentado tem várias restrições da mochila, uma para cada barra o de espessura k . O desempenho computacional deste modelo é relativamente fraco, e sua solução terá muitas barras igualmente cortadas, o que sugere uma formulação alternativa a este problema. Melhores desempenhos computacionais para o PCE são encontrados na literatura, incluindo modelos baseados em padrões de corte (i.e., a maneira particular de se cortar uma barra) e modelos baseados em fluxo em arcos, ambos com relaxação linear mais forte.

No capítulo seguinte, as formulações alternativas ao PCEMA-1D, que incluem padrões de corte e a ideia de fluxo em arcos, serão apresentadas, sendo que a primeira foi proposta na literatura e as demais estão sendo propostas neste trabalho.

4 MODELOS MATEMÁTICOS PARA O PCEMA-1D

Neste capítulo, apresentaremos o modelo matemático para o problema de corte de estoque unidimensional com modos alternativos de manufatura (PCEMA-1D) proposto por [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#) que utiliza a ideia de padrões de corte e um método heurístico de resolução.

Em seguida, com o objetivo de reformular o PCEMA-1D para ser resolvido de maneira exata por pacotes computacionais, três abordagens de fluxo em arcos serão propostas:

- a primeira é baseada no modelo alternativo para o PCE unidimensional, apresentado por [Wolsey \(1977\)](#) e estudado em [Valério de Carvalho \(1999, 2002\)](#);
- a segunda é baseada no princípio *meet-in-the-middle* proposto por [Côté e Iori \(2018\)](#), que aprimora o modelo de fluxo em arcos clássico;
- a terceira é baseada no modelo de [Delorme e Iori \(2020\)](#), chamado *reflect*, que modela uma instância do PCE considerando somente metade do tamanho da barra.

Um exemplo ilustrativo comparando as abordagens pode ser encontrado ao final do capítulo.

4.1 Modelagem baseada em Geração de Colunas

Dado o problema descrito na Seção 3, o modelo para o PCEMA-1D proposto por [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#) utiliza a ideia de padrões de corte. Padrões de corte são as possíveis maneiras de se cortar uma barra para produção de itens menores, respeitando o seu limite de comprimento. Portanto, um padrão de corte p é representado por um vetor a_p de dimensão NI que diz a quantidade de cada item i cortada a partir da barra. Por exemplo, considere uma barra de comprimento $L = 10$ e itens de tamanho $l = [7, 6, 4, 3]$. A Tabela 1 apresenta alguns possíveis padrões de corte, por exemplo, o padrão de corte 1 considera que a barra é cortada em um item de tamanho 7 e um item de tamanho 3; o padrão 2 corta a barra em um item de tamanho 6 e um item de tamanho 4; o padrão 3 corta dois itens de tamanho 4.

Observe que cada padrão de corte deve satisfazer o comprimento do objeto. É importante notar também que o número de padrões de corte possíveis pode ser muito

Tabela 1 – Padrões de Corte.

l_i	P1	P2	P3
7	1	0	0
6	0	1	0
4	0	1	2
3	1	0	0

grande dependendo do tamanho do problema. Dessa forma, enumerar todos os possíveis padrões válidos pode se tornar muito difícil.

Dada a ideia de padrões de corte, o modelo de [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#) para o PCEMA-1D, busca atender a demanda de produtos finais escolhendo os modos de produção e as formas de cortar as barras mais convenientes a fim de minimizar o custo total com matérias-primas. Para isso, o modelo busca saber a quantidade X_{pk} de barras de espessura k cortadas de acordo com o padrão p , e a quantidade Z_{jm} de produto j produzida no modo de produção m . O modelo está retratado em (13)-(17), e seus conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão são descritos a seguir.

Conjuntos:

J ($j \in J$, $j = 1, \dots, NJ$): conjunto de produtos a serem fabricados;

K ($k \in K$, $k = 1, \dots, NK$): conjunto de espessuras das matérias-primas unidimensionais;

I ($i \in I$, $i = 1, \dots, NI$): conjunto de tamanhos de itens a serem cortados;

M_j ($m \in M_j$): conjunto de modos alternativos para fabricar o produto j ;

P ($p \in P$, $p = 1, \dots, NP$): conjunto de padrões de corte.

Parâmetros:

L : tamanho da barra;

d_j : demanda do produto j ;

θ_k : custo da matéria-prima de espessura k ;

l_i : tamanho do item i ;

b_{ikm} : quantidade de itens de tamanho l_i e espessura k utilizada no modo de produção m ;

a_{ip} : quantidade de itens de tamanho l_i cortada no padrão de corte p .

Variáveis de decisão:

X_{pk} : quantidade de barras de espessura k cortada utilizando o padrão de corte p ;

Z_{jm} : quantidade do produto tipo j produzida no modo de produção m .

$$\min \quad \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} \theta_k X_{pk} \quad (13)$$

$$s. \ a. : \quad \sum_{m \in M_j} Z_{jm} \geq d_j, \quad j \in J, \quad (14)$$

$$\sum_{p \in P} a_{ip} X_{pk} \geq \sum_{j \in J} \sum_{m \in M_j} b_{ikm} Z_{jm}, \quad k \in K, \ i \in I, \quad (15)$$

$$Z_{jm} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in J, \ m \in M_j, \quad (16)$$

$$X_{pk} \in \mathbb{Z}_+, \quad p \in P, \ k \in K. \quad (17)$$

No modelo (13)-(17), a função objetivo (13) busca minimizar o custo total com matérias-primas. As restrições (14) fazem com que a soma de todos os produtos j manufaturados em seus possíveis modos m ($m \in M_j$) seja igual ou superior à demanda deste produto (d_j). As restrições (15) garantem o cumprimento da demanda total de cada item i de cada matéria-prima k . As restrições (16) e (17) são de domínio das variáveis de decisão.

Para lidar com a grande quantidade de variáveis X_{pk} , devido às diversas possibilidades de padrões de corte, os autores utilizaram o procedimento de geração de colunas proposto por [Gilmore e Gomory \(1961, 1963\)](#). Para gerar os coeficientes das variáveis X_{pk} (colunas), as restrições (16) e (17) foram relaxadas e o problema (13)-(17) foi inicializado com padrões de corte com apenas um tipo de item com a quantidade máxima dele possível. Em cada iteração, os valores das variáveis duais referentes às restrições (15) foram usados em um subproblema que minimizava o custo reduzido associado com uma nova variável X_{pk} . Considerando π_{ik} como as variáveis duais associadas às restrições (15) e α_i como a variável de decisão que representava o número de itens i na coluna gerada, o custo reduzido associado com X_{pk} , representado por $\bar{c}_{pk}$, é calculado pela equação (18).

$$\bar{c}_{pk} = \theta_k - \sum_{i \in I} \pi_{ik} \alpha_{ip} \quad (18)$$

Para cada espessura k , o custo reduzido de uma nova coluna foi minimizado usando o subproblema (19)-(21) e uma nova coluna era gerada. As colunas foram adicionadas ao problema mestre restrito (13)-(17) enquanto o custo relativo era atrativo.

$$\min \quad \theta_k - \sum_{i \in I} \pi_{ik} \alpha_i \quad (19)$$

$$s. \ a. : \quad \sum_{i \in I} \alpha_i l_i \leq L, \quad (20)$$

$$\alpha_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i \in I. \quad (21)$$

No modelo (19)-(21), a função objetivo (19) minimiza o custo reduzido da barra de espessura k . As restrições (20) são restrições da mochila que asseguram que a dimensão das barras é respeitada. As restrições (21) definem o domínio das variáveis de decisão.

Posteriormente, as colunas geradas foram utilizadas no modelo (13)-(17) para obter uma solução inteira com o *solver* CPLEX. Trata-se, portanto, de um método heurístico, pois a solução inteira é obtida utilizando somente as colunas geradas durante o processo de geração de colunas, ou seja, algumas colunas que possivelmente fariam parte da solução ótima não estão disponíveis. Este tipo de estratégia tem sido bastante utilizada (por exemplo, Nascimento, Araujo e Cherri (2020), Melega, Araujo e Morabito (2020) e Kramer e Kramer (2021)) e tem obtido bons resultados.

4.2 Modelagem baseada no modelo clássico de fluxo em arcos

O problema de encontrar um padrão de corte válido é modelado por Valério de Carvalho (1999) como um problema de encontrar um caminho em um grafo acíclico direcionado $G = (V, A)$, para o qual $V = \{0, 1, \dots, L\}$, é o conjunto de vértices, onde L é o comprimento do objeto, e a distância de um vértice (a) ao vértice seguinte ($a + 1$) representa uma unidade de comprimento do objeto. O conjunto de arcos no grafo representa itens ou perdas no objeto e é definido como $A = \{(a, b) : a < b; b - a = l_i, i \in I; a, b \in V\} \cup \{(a, a + 1) : \min(l_i) \leq a, a \in V \setminus \{L\}\}$, em que l_i é o tamanho do item i . As perdas geradas do processo de corte são representadas pelos arcos adicionais entre os vértices $(a, a + 1)$.

O comportamento computacional do modelo depende do conjunto de arcos, que deve garantir otimização, mas ao mesmo tempo ser o menor possível (CÔTÉ; IORI, 2018). Como o modelo apresenta muitas soluções simétricas, Valério de Carvalho (1999) apresentou três

critérios de redução para eliminar arcos e reduzir o número de soluções simétricas sem eliminar padrões de cortes válidos do conjunto A . O primeiro critério consiste em alocar os itens em ordem decrescente de comprimento, ou seja, um item de comprimento l_1 só pode ser alocado depois de um item l_2 se $l_1 \leq l_2$, ou no início do objeto. O segundo critério não permite iniciar um objeto com perda e impõem que em cada padrão, arcos de perda não podem ser alocados antes de arcos de item. O último critério determina que, em cada padrão de corte, não são necessários mais arcos do que a demanda do item.

A Figura 2(a) ilustra um exemplo de grafo associado à formulação de fluxo em arcos para o PCE com os critérios de redução, onde o tamanho da barra é $L = 8$, os itens têm tamanho $l = (6, 5, 3, 2)$ e a demanda de cada item é $d = (1, 1, 2, 2)$. Os arcos de perda são ilustrados com as linhas pontilhadas.

Para adaptar essa formulação ao PCEMA-1D, em que existem objetos com diferentes espessuras, as variáveis de decisão F_k são as variáveis associadas ao fluxo no grafo e representam a quantidade total de barras de espessura k utilizadas. As variáveis X_{abk} representam o número de vezes que as barras de espessura k são cortadas nos vértices a e b , podendo representar itens ou perdas no objeto. As variáveis Z_{jm} representam a quantidade de produtos j manufaturados de acordo com o modo m .

O modelo de fluxo em arcos para o PCEMA-1D é apresentado em (22)-(30) e a seguir estão os conjuntos, parâmetros e as variáveis de decisão do modelo.

Conjuntos:

J ($j \in J$, $j = 1, \dots, NJ$): conjunto de produtos a serem fabricados;

K ($k \in K$, $k = 1, \dots, NK$): conjunto de espessuras das matérias-primas unidimensionais;

I ($i \in I$, $i = 1, \dots, NI$): conjunto de tamanhos de itens a serem cortados;

M_j ($m \in M_j$): conjunto de modos alternativos para fabricar o produto j .

Parâmetros:

L : tamanho da barra;

d_j : demanda do produto j ;

θ_k : custo da matéria-prima de espessura k ;

l_i : tamanho do item i ;

b_{ikm} : quantidade de itens de tamanho l_i e espessura k utilizada no modo de produção m .

Variáveis de decisão:

F_k : quantidade de barras de espessura k utilizada;

X_{abk} : número de vezes que a barra de espessura k é cortada nas posições a e b ;

Z_{jm} : quantidade de produto tipo j produzido no modo de produção m .

$$\min \sum_{k \in K} \theta_k F_k \quad (22)$$

$$s. a. : - \sum_{(0,b) \in A} X_{0bk} = -F_k, \quad \forall k \in K, \quad (23)$$

$$\sum_{(a,b) \in A} X_{abk} - \sum_{(b,c) \in A} X_{bck} = 0, \quad b = 1, \dots, L-1, k \in K, \quad (24)$$

$$\sum_{(a,L) \in A} X_{aLk} = F_k, \quad k \in K, \quad (25)$$

$$\sum_{m \in M_j} Z_{jm} \geq d_j, \quad j \in J, \quad (26)$$

$$\sum_{(a,a+l_i) \in A} X_{a,a+l_i,k} \geq \sum_{j \in J} \sum_{m \in M_j} b_{ikm} Z_{jm}, \quad i \in I, k \in K, \quad (27)$$

$$X_{abk} \in \mathbb{Z}_+, \quad (a,b) \in A, k \in K, \quad (28)$$

$$F_k \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in K, \quad (29)$$

$$Z_{jm} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in J, m \in M_j. \quad (30)$$

No modelo (22)-(30), a função objetivo (22) busca minimizar o custo total com matérias-primas. As restrições (23), (24), (25) são derivadas do modelo de [Valério de Carvalho \(1999\)](#). As restrições (24) garantem conservação do fluxo, isto é, o fluxo que entra em um vértice é igual ao fluxo que sai. As restrições (23) e (25) garantem que o fluxo que sai do vértice 0 é o mesmo que entra no vértice L . Por padrão, o fluxo que sai de um vértice é negativo, e o que entra é positivo. As restrições (26) fazem com que a soma de todos os produtos j manufaturados em seus possíveis modos m ($m \in M_j$) seja igual ou superior à demanda deste produto (d_j). As restrições (27) garantem o cumprimento da demanda total de cada item i de cada matéria-prima k . As restrições (28), (29), (30) são de integralidade e não negatividade das variáveis de decisão.

Para a formação dos arcos no PCEMA-1D, dois critérios de redução propostos por [Valério de Carvalho \(1999\)](#) foram utilizados. O primeiro critério consiste de alocar os itens em ordem decrescente de tamanho, e o segundo, impõem que os arcos de perda sejam alocados após os arcos de itens.

O pseudo-código utilizado para construir o conjunto de arcos A é apresentado no Algoritmo 1. Considera-se que o conjunto de itens está ordenado em ordem decrescente de tamanho. No momento da formação dos arcos, um limitante associado a quantidade máxima de itens que cabem em cada barra de comprimento L é utilizado, conforme a equação (31). Por exemplo, para itens de tamanho $l_i = 3$ cortados a partir de barras de tamanho $L = 10$, o limite utilizado é $lim_i = 3$ unidades.

$$lim_i = \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor \quad (31)$$

O vetor M é usado para controlar os possíveis vértices finais dos arcos. Para cada item, o vetor H é usado para controlar os vértices e evitar operações desnecessárias. Então, para cada item i e para cada limitante desse item, os vértices são percorridos (etapa 9), e são adicionados de acordo com o controle dos vetores H e M (etapa 10). Por fim, os arcos de perda são adicionados (etapa 18).

Algoritmo 1 Criação dos arcos para o modelo de *Fluxo em Arcos*

```

1: procedure CRIARARCOS
2:   Input:  $I$ : conjunto de itens;  $L$ : tamanho da barra.
3:    $A \leftarrow \emptyset$ .
4:    $M[0 \dots L] \leftarrow 0$            ► um vetor que mantém o controle dos possíveis vértices
5:    $M[0] \leftarrow 1$                  ► vértice 0 é um início possível
6:   for  $i = 1$  to  $NI$  do
7:      $H[0 \dots L] \leftarrow 0$        ► um vetor que mantém o controle dos vértices já processados
8:     for  $j = 1$  to  $lim_i$  do
9:       for  $k = L - l_i$  to  $0$  do           ► percorre os vértices
10:        if  $H[k] = 0$  and  $M[k] = 1$  then       ► se k ainda não foi processado
11:           $H[k] \leftarrow 1$                      ► k é processado
12:           $M[k + l_i] \leftarrow 1$ 
13:           $A \leftarrow A \cup (k, k + l_i)$ 
14:        end if
15:      end for
16:    end for
17:  end for
18:  for  $k = min(l_i)$  to  $L - 1$  do  $A \leftarrow A \cup (k, k + 1)$            ► arcos de perda
19:  return  $A$ 

```

Fonte: Adaptado de [Delorme e Iori \(2020\)](#).

4.3 Formação dos arcos baseada no princípio *meet-in-the-middle*

Assim como Valério de Carvalho (1999) incluiu critérios a fim de reduzir a quantidade de arcos e, conseqüentemente, o número de variáveis do modelo, aqui mostramos as reduções obtidas com o princípio *meet-in-the-middle* (MIM) proposto por Côté e Iori (2018).

Basicamente, a ideia é separar os padrões em direito e esquerdo a partir de uma certa posição no objeto. Resumidamente, considera-se o comprimento do objeto e fixa-se um certo valor limite (t) ao longo dele (por exemplo, o comprimento correspondente a metade do objeto), e força-se todos os itens cuja borda esquerda está à esquerda de t ($x \leq t - 1$) a serem alinhados à esquerda e todos os itens restantes ($x \geq t$) a serem alinhados à direita.

Para isso, os autores inicialmente consideraram o conjunto de combinações de itens que não excedem o limite L do objeto, chamado de padrões normais. Os padrões normais tentam reduzir o espaço de busca produzindo apenas soluções nas quais cada item está alinhado à parte inferior de cada dimensão. Em problemas unidimensionais, os itens são alinhados à esquerda do objeto.

Côté e Iori (2018) se utilizam da ordenação dos itens em ordem decrescente de tamanho para reduzir esse número de padrões em cada item, definindo, assim, um conjunto de padrões normais reduzidos. A equação (32) define formalmente o conjunto de padrões B'_i para qualquer item $i \in I$. Suponha que os itens estão ordenados em ordem decrescente e que para qualquer item $i = 1, \dots, NI$, $\overline{d}_j^i = d_j$ para qualquer $j = 1, \dots, i - 1$ e $\overline{d}_i^i = d_i - 1$. Uma cópia do item i pode ter seu canto inferior em um padrão criado por combinações dos itens anteriores e das primeiras $d_i - 1$ cópias do item i . Na prática, o conjunto $B' = \cup_{i \in I} B'_i$ define um conjunto de posições nas quais os itens podem ser cortados e B'_i define um conjunto de posições nas quais o item i pode ser cortado, considerando que itens maiores que i ou outras cópias de i já podem ter sido cortadas.

$$B'_i = \left\{ x = \sum_{j=1}^i l_j \xi_j : 0 \leq x \leq L - l_i, \xi_j \in \{0, 1, \dots, \overline{d}_j^i\}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, i \right\} \quad (32)$$

Os padrões MIM são definidos para cada item $i \in I$ e para cada limitante $t \in \{1, 2, \dots, L\}$ como uma combinação de dois tipos de padrões: esquerdos e direitos, definidos formalmente por (33) e (34), respectivamente. A função “min” em (33) impõe que um

item i não é cortado depois de $L - l_i$. Observa-se também que qualquer item grande tendo $l_i > L - t$ é sempre alinhado à esquerda.

$$L'_{it} = \{x = \sum_{j=1}^i l_j \xi_j : 0 \leq x \leq \min\{t-1, L - l_i\}, \xi_j \in \{0, 1, \dots, \overline{d_j^i}\},$$

para $j = 1, 2, \dots, i\}$ (33)

$$R'_{it} = \{L - l_i - x : x = \sum_{j=1}^i l_j \xi_j, 0 \leq x \leq L - l_i - t, \xi_j \in \{0, 1, \dots, \overline{d_j^i}\},$$

para $j = 1, 2, \dots, i\}$ (34)

O conjunto de padrões MIM para o item i é então definido pela equação (35) e o conjunto geral para todos os itens pela equação (36).

$$M'_{it} = L'_{it} \cup R'_{it} \quad (35)$$

$$M'_t = \bigcup_{i \in I} M'_{it} \quad (36)$$

$$M' = \{M'_t : t = \arg \min_{s \in \{1, \dots, L\}} \sum_{i \in I} |M'_{is}|\}. \quad (37)$$

A partir dos conjuntos (36), o conjunto de padrões MIM (M') a ser utilizado na formulação deve ser determinado como aquele que tem o menor número de padrões, de acordo com a equação (37). Portanto, o valor do limitante t escolhido, que separará os padrões em esquerdo e direito, deverá ser aquele que minimize a quantidade total de padrões.

Os autores adicionaram outras três reduções ao modelo:

1. Os arcos de perda agora conectam pares de vértices consecutivos no conjunto de padrões normais B' , sendo removidos os arcos de perda unitários existentes na formulação de Valério de Carvalho (1999);
2. Um arco de perda que conecta dois vértices consecutivos é removido se existe um arco representando um item que conecta os mesmos dois vértices;
3. Itens de largura maior que $L/2$ devem iniciar no vértice 0.

Na Figura 2 é possível comparar os arcos associados à formulação de fluxo em arcos (2(a)) e à formulação com os critérios de redução *meet-in-the-middle* (2(b)), para o mesmo conjunto de parâmetros, em que o tamanho da barra é $L = 8$, os itens têm

tamanho $l = (6, 5, 3, 2)$ e a demanda de cada item é $d = (1, 1, 2, 2)$. Os arcos são formados com limitante $t = 2$ e contém quatro arcos esquerdos (linhas inteiras), cinco arcos direitos (linhas tracejadas) e quatro arcos de perda (linhas pontilhadas).

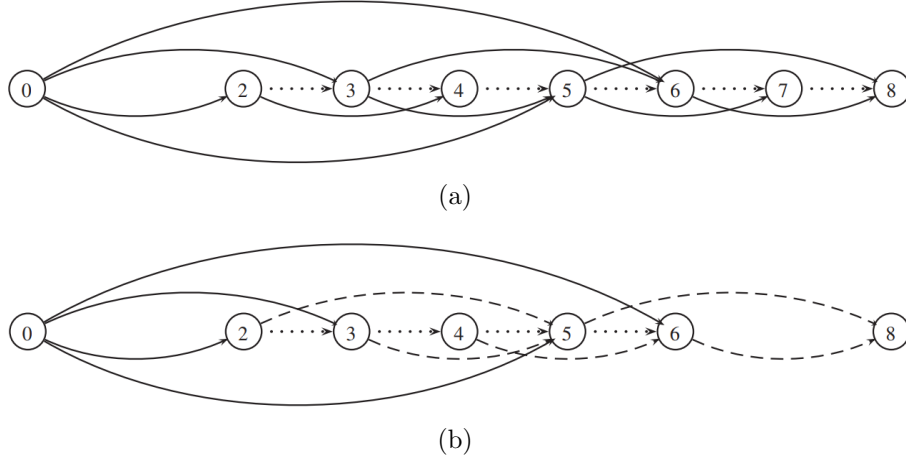


Figura 2 – (a) Fluxo em arcos. (b) *Meet-in-the-middle*.

Fonte: Côté e Iori (2018).

Basicamente, a partir dos padrões B'_i , o valor do limitante t_{min} é calculado (no caso do exemplo, $t = 2$). Então, os padrões esquerdos são determinados como $p < t_{min}$, $p \in B'_i$, enquanto que os padrões direitos são aqueles em que $L - l_i - p \geq t_{min}$, para $p \in B'_i$ e $l_i \leq L/2$, ou seja, não podem iniciar em vértices menores que t_{min} e não podem ser maiores que $L/2$. Por exemplo, o arco $(3, 6)$ na Figura 2(a), é transformado no arco $(2, 5)$ na Figura 2(b). O mesmo acontece com o arco $(2, 4)$ que passa a ser alinhado à direita no arco $(4, 6)$. O arco $(5, 7)$ não pode ser alinhado à direita, pois ultrapassaria o limite t . Além disso, os arcos de perda $(6, 7)$ e $(7, 8)$ são removidos. A Tabela 2 mostra os conjuntos de vértices para a formação dos padrões MIM normais, esquerdos e direitos para cada item i do exemplo utilizado na Figura 2.

Tabela 2 – Conjuntos dos padrões MIM ($t = 2$).

i	B'_i	L'_{it}	R'_{it}	M'_{it}
1	0	0	—	0
2	0	0	—	0
3	0,3,5	0	2,5	0,2,5
4	0,2,3,5,6	0	3,4,6	0,3,4,6

Para utilizar o princípio *meet-in-the-middle* no PCEMA-1D, o conjunto de padrões B' pode ser obtido por meio do Algoritmo 2. O valor de lim_i é definido anteriormente na equação (31). Um vetor suporte T é utilizado para armazenar as combinações viáveis

de tamanhos de itens. No *loop* principal (etapa 6), T é atualizado considerando todas as combinações de tamanhos de itens e o conjunto B'_i é calculado a partir de T obtido com o conjunto anterior B'_{i-1} .

Algoritmo 2 Criação do conjunto B .

```

1: procedure PADROESB
2:   Input:  $I$ : conjunto dos itens ordenados,  $L$ : tamanho da barra.
3:    $B' \leftarrow \emptyset$ 
4:    $T[0 \dots L] \leftarrow 0$ 
5:    $T[0] \leftarrow 1$ 
6:   for  $i = 1$  to  $NI$  do
7:      $B'_i \leftarrow \emptyset$ 
8:     for  $k = L - l_i$  to  $0$  do
9:       if  $T[k] = 1$  then
10:        for  $j = 1$  to  $lim_i$  do
11:          if  $k + l_i * j > L$  then break
12:           $T[k + l_i * j] \leftarrow 1$ 
13:           $B'_i \leftarrow B'_i \cup \{k + l_i * (j - 1)\}$ 
14:        end for
15:      end if
16:    end for
17:     $B' \leftarrow B' \cup B'_i$ 
18:  end for
19:  return  $B'$ 

```

Fonte: Côté e Iori (2018).

Com o conjunto B' computado, o conjunto de padrões M' pode ser obtido pelo Algoritmo 3. O cálculo do conjunto mínimo de padrões MIM utilizará o conjunto de itens ordenados e os padrões normais reduzidos calculados pelo Algoritmo 2. Os vetores T_{dir} e T_{esq} dão suporte ao cálculo dos padrões direitos e esquerdo e são preenchidos nas etapas 5-14. Observe que a etapa 8 impõe que itens maiores que $L/2$ iniciem no vértice 0. O cálculo do limitante t_{min} é feito nas etapas 15-22. O conjunto M' é construído nas etapas 23-31.

Algoritmo 3 Criação do conjunto M .

```

1: procedure PADROESMIM
2:   Input:  $I$ : conjunto dos itens ordenados,  $B'$ : conjunto de padrões.
3:    $T_{esq}[0...L] \leftarrow 0$ 
4:    $T_{dir}[0...L] \leftarrow 0$ 
5:   for  $i = 1$  to  $NI$  do
6:     for  $k \in B'_i$  do
7:        $T_{esq}[k] \leftarrow T_{esq}[k] + 1$ 
8:       if  $l_i \leq L/2$  then  $T_{dir}[L - l_i - k] \leftarrow T_{dir}[L - l_i - k] + 1$ 
9:     end for
10:  end for
11:  for  $k = 1$  to  $L$  do
12:     $T_{esq}[k] \leftarrow T_{esq}[k] + T_{esq}[k - 1]$ 
13:     $T_{dir}[L - k] \leftarrow T_{dir}[L - k] + T_{dir}[L - (k - 1)]$ 
14:  end for
15:   $t_{min} \leftarrow 1$ 
16:   $\min \leftarrow T_{esq}[0] + T_{dir}[1]$ 
17:  for  $k = 2$  to  $L$  do
18:    if  $T_{esq}[k - 1] + T_{dir}[k] < \min$  then
19:       $\min \leftarrow T_{esq}[k - 1] + T_{dir}[k]$ 
20:       $t_{min} \leftarrow k$ 
21:    end if
22:  end for
23:   $M' \leftarrow \emptyset$ 
24:  for  $i = 1$  to  $NI$  do
25:     $M'_i \leftarrow \emptyset$ 
26:    for  $k \in B'_i$  do
27:      if  $k < t_{min}$  then  $M'_i \leftarrow M'_i \cup \{k\}$ 
28:      if  $(L - l_i - k \geq t_{min} \text{ and } l_i \leq L/2)$  then  $M'_i \leftarrow M'_i \cup \{L - k - l_i\}$ 
29:    end for
30:     $M' \leftarrow M' \cup M'_i$ 
31:  end for
32:  return  $M'$ 

```

Fonte: Côté e Iori (2018).

Uma vez que o conjunto mínimo M' é obtido, ele será usado para construir o conjunto de arcos reduzidos considerando, para cada item i , apenas aqueles arcos que se iniciam em um padrão MIM. A construção dos arcos pode ser feita diretamente pelo Algoritmo 3, nas etapas 23-31. O Algoritmo 4 mostra em detalhe como construir o conjunto de arcos a partir do conjunto M' . O vetor V controla os vértices que serão usados para construir os arcos de perda. Os arcos de perda construídos na etapa 11 ligam vértices consecutivos e, além disso, são eliminados se já existir um arco de item ligando os mesmos dois vértices.

Com os arcos construídos conforme o princípio *meet-in-the-middle*, os dados são submetidos ao modelo (22)-(30), o mesmo modelo da formulação de fluxo em arcos.

Algoritmo 4 Criação dos arcos para o modelo *meet-in-the-middle*

```

1: procedure CRIARARCOS
2:   Input:  $M'$ : padrões MIM,  $I$ : conjunto de itens.
3:    $A \leftarrow \emptyset$ ;  $V \leftarrow \emptyset$ ;
4:   for  $i = 1$  to  $NI$  do
5:     for  $k \in M'_i$  do
6:        $A \leftarrow A \cup (k, k + l_i)$ 
7:        $V \leftarrow V \cup \{(k + l_i)\}$ 
8:     end for
9:   end for
10:   $V \leftarrow V \cup \{(L)\}$ 
11:  for  $i \in V$  do  $A \leftarrow A \cup (i, j) : j = \min(k \in V : k > i); (i, j) \notin A \blacktriangleright$  arcos de perda
12:  return  $A$ 

```

Fonte: Adaptado de [Delorme e Iori \(2020\)](#).

4.4 Modelagem baseada no modelo *reflect*

[Delorme e Iori \(2020\)](#) propuseram uma nova formulação de fluxo em arcos para o PCE, chamada *reflect*, que requer apenas metade do tamanho do objeto. A formulação é construída em um multi-grafo $G = (V, A)$, sendo $V = \{0, 1, \dots, L/2\}$ o conjunto de vértices que compreende somente a metade do tamanho da barra. Em termos de arcos, a *reflect* considera os mesmos da formulação clássica, mas: (i) “reflete” cada arco de item (d, e) tendo $d < L/2$ e $e > L/2$ em um arco $(d, L - e)$; (ii) remove todos os arcos de itens e de perda (d, e) com $d \geq L/2$; (iii) cria um último arco de perda conectando o vértice mais à direita antes de $L/2$ com $L/2$. Essas características resultam, portanto, numa diminuição do número de variáveis e restrições requisitadas.

Desta forma, a formulação modela uma instância do problema em uma rede reduzida, onde um caminho que modela um padrão de corte é substituído por um par de caminho, chamado de “par de caminho de colisão”. Ou seja, um padrão de corte é representado por dois caminhos que começam no vértice 0 e terminam em um mesmo vértice ($v \in V \setminus \{0\}$), porém só um dos caminhos passa pela “reflexão” do arco.

Formalmente, o conjunto de arcos é dividido entre o conjunto de arcos padrão (A_s) e o conjunto de arcos refletidos (A_r). Os arcos padrão correspondem a todos aqueles itens e perdas que procedem da esquerda para a direita definidos como (d, e, s) , tal que

$d < e < L/2$. Os arcos refletidos são os arcos de item (d, e) , tal que $e > L/2$, definidos por $(d, L - e, r)$. Também incluí-se em A_r um arco $(L/2, L/2, r)$ para expressar pares de caminhos que colidem em $L/2$.

Os autores também consideraram as duas reduções do princípio MIM referentes aos arcos de perda. Portanto, os arcos de perda serão formados por pares de vértices ativos consecutivos, e, se existir um arco de item ligando os mesmos dois vértices, o arco de perda será removido. Os resultados dos testes de performance executados por [Delorme e Iori \(2020\)](#) para o *reflect* que modela um PCE tradicional mostraram que o algoritmo é bastante efetivo e diminui significativamente a quantidade de variáveis e restrições em relação à formulação de fluxo em arcos clássica, resultando, por vezes, em uma redução no tempo de resolução do problema.

A Figura 3 exemplifica os arcos formados pelo modelo para uma instância com quatro itens de tamanho $l = (6, 5, 3, 2)$ e demanda $d = (1, 1, 2, 2)$, onde o comprimento do objeto é $L = 8$. Observa-se que na formulação *reflect* pode haver um arco padrão e um arco refletido com os mesmos vértices de início e fim, como é o caso dos arcos $(0, 3, s)$ e $(0, 3, r)$ da figura, onde o primeiro representa um arco padrão associado ao item de tamanho 3, e o segundo representa um arco refletido associado ao item de tamanho 5.

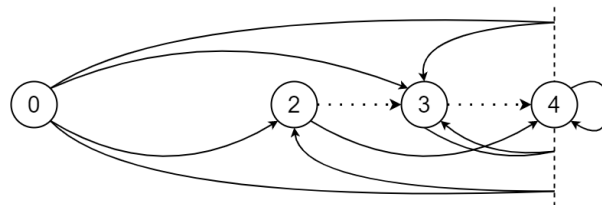


Figura 3 – Representação da formulação *reflect*.

A Figura 4 mostra dois possíveis padrões de cortes oriundos do exemplo anterior. Considerando que um padrão de corte é representado por um par de caminhos de colisão, o par de caminhos $(0, 3, r)$ (em vermelho) e $(0, 3, s)$ (em azul) da Figura 4(a) representa um padrão de corte com um item de tamanho 5 e um item de tamanho 3. Na Figura 4(b) o caminho $(0, 3, s)$ e $(3, 3, r)$ (em vermelho) com o caminho $(0, 2, s)$ e $(2, 3, s)$ (em azul) representa um padrão de corte com um item de tamanho 3 e 2 itens de tamanho 2. Observe que cada caminho começa no vértice 0 e termina no vértice 3, mas apenas um deles tem a presença de um arco refletido.

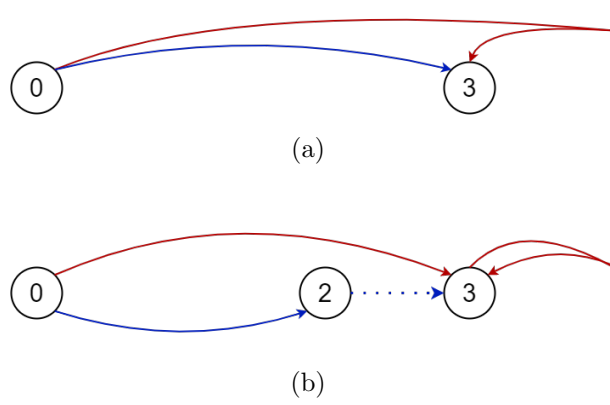


Figura 4 – Padrões de corte representados por pares de caminhos de colisão.

A Tabela 3 compara a Figura 2 com a Figura 3, quanto a diferença de arcos e vértices entre as formulações de fluxo em arcos clássica, *meet-in-the-middle* e *reflect* para o mesmo exemplo do PCE.

Tabela 3 – Quantidade de vértices e arcos dos exemplos.

	Vértices	Arcos
Fluxo em arcos (Figura 2(a))	8	16
<i>Meet-in-the-middle</i> (Figura 2(b))	7	13
<i>Reflect</i> (Figura 3)	4	9

Para adaptar a formulação *reflect* para o PCEMA-1D, em que existem diferentes espessuras de barras, a variável de decisão ξ_{degk} é utilizada para representar a quantidade de arcos (d, e, g) presentes na matéria prima de espessura k . Usamos (d, e, g) para indicar um arco genérico que pode pertencer tanto ao conjunto de arcos padrão quanto ao conjunto de arcos refletidos. Para definir um subconjunto de arcos de itens associados ao tipo de item i , utiliza-se $A_i = \{(d, d + l_i, s) \in A_s \cup (d, L - (d + l_i), r) \in A_r\}$. Usamos $\delta_s^-(e)$ e $\delta_r^-(e)$ para indicar os arcos padrão e refletidos, respectivamente, que entram no vértice e .

Além disso, a variável de decisão Z_{jm} que indica a quantidade de produto tipo j produzida no modo de produção m também é adicionada ao modelo.

O PCEMA-1D baseado no modelo *reflect* é mostrado em (38)-(44) e a seguir estão os conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão utilizados.

Conjuntos:

J ($j \in J$, $j = 1, \dots, NJ$): conjunto de produtos a serem fabricados;

K ($k \in K$, $k = 1, \dots, NK$): conjunto de espessuras das matérias-primas unidimensionais;

I ($i \in I$, $i = 1, \dots, NI$): conjunto de tamanhos de itens a serem cortados;

M_j ($m \in M_j$): conjunto de modos alternativos para fabricar o produto j .

Parâmetros:

L : tamanho da barra;

d_j : demanda do produto j ;

θ_k : custo da matéria-prima de espessura k ;

l_i : tamanho do item i ;

b_{ikm} : quantidade de itens de tamanho l_i e espessura k utilizada no modo de produção m .

Variáveis de decisão:

ξ_{degk} : número de vezes que o arco (d, e, g) é escolhido na matéria-prima de espessura k ;

Z_{jm} : quantidade de produto tipo j produzido no modo de produção m .

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(d,e,r) \in A_r} \theta_k \xi_{derk} \quad (38)$$

$$s. \ a. : \sum_{(d,e,s) \in \delta_s^-(e)} \xi_{desk} = \sum_{(d,e,r) \in \delta_r^-(e)} \xi_{derk} + \sum_{(e,f,g) \in \delta^+(e)} \xi_{efgk}, \quad k \in K, \ e \in V \setminus \{0\}, \quad (39)$$

$$\sum_{(0,e,g) \in \delta^+(0)} \xi_{0egk} = 2 \sum_{(d,e,r) \in A_r} \xi_{derk}, \quad k \in K, \quad (40)$$

$$\sum_{m \in M_j} Z_{jm} \geq d_j, \quad j \in J, \quad (41)$$

$$\sum_{(d,e,g) \in A_i} \xi_{degk} \geq \sum_{j \in J} \sum_{m \in M_j} b_{imk} Z_{jm}, \quad i \in I, \ k \in K, \quad (42)$$

$$\xi_{degk} \in \mathbb{N}, \quad (d, e, g) \in A, \ k \in K, \quad (43)$$

$$Z_{jm} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in J, \ m \in M_j. \quad (44)$$

No modelo (38)-(44), a função objetivo (38) minimiza o custo total com matérias-primas. Observe que a quantidade de arcos refletidos é equivalente ao número de barras utilizadas. As restrições (39) e (40) são relativas à conservação de fluxo e foram derivadas do modelo *reflect*. As restrições (39) garantem que a quantidade de fluxo nos arcos padrão que entram em um nó e seja igual à quantidade de fluxo (nos arcos padrão e refletido) que sai de e somados à quantidade de fluxo dos arcos refletidos que entram em e para cada espessura de matéria-prima. Observe que é incomum que as restrições de conservação de fluxo tenham fluxos de entrada em ambos os lados das equações. No entanto, isso é

necessário para a exatidão do modelo, porque cada arco refletido deve ser combinado com um arco padrão. As restrições (40) impõem condições de contorno ao forçar a quantidade de fluxo proveniente de 0 ser duas vezes a quantidade de barras utilizadas, já que um padrão de corte válido é representado como um par de caminhos que começam em 0 e terminam em um mesmo vértice, mas somente um deles passa pelo ponto de reflexão. As restrições (41) fazem com que a soma de todos os produtos j manufaturados em seus possíveis modos m ($m \in M_j$) seja igual ou superior à demanda deste produto (d_j). As restrições (42) garantem o cumprimento da demanda total de cada item i de cada matéria-prima k . As restrições (43) e (44) são de domínio das variáveis de decisão.

O Algoritmo 5 foi utilizado para construir o conjunto de arcos (A_s e A_r) do modelo. O conjunto V mantém o conjunto de vértices ativos que serão usados para construir arcos de perda. Os vetores M e H são usados para controlar os possíveis vértices dos arcos. Para cada tipo de item e para cada limitante lim_i (calculado de acordo com a equação (31)), percorremos todas os possíveis vértices que ainda não foram processados (etapa 10). Se for um arco padrão (etapa 12), o arco $(k, k + l_i, s)$ é armazenado em A_s e $k + l_i$ se torna um possível vértice de início de arcos (etapa 13). Se for um arco refletido (etapa 16), o arco $(k, L - (k + l_i), r)$ é armazenado em A_r . Pode-se notar que o algoritmo não cria nenhum arco refletido (d, e, r) com $d > e$ (etapa 16). Esse é uma proposição feita por Delorme e Iori (2020) que garante que os arcos refletidos tenham $d \leq e$. Na etapa 25, os nós ativados armazenados no conjunto V são utilizados para construir os arcos de perda. Por fim, o arco $(L/2, L/2, r)$ é adicionado em A_r .

Algoritmo 5 Criação dos arcos para o modelo *reflect*

```

1: procedure CRIARARCOS
2:   Input:  $I$ : conjunto de itens;  $L$ : tamanho da barra.
3:    $A_s \leftarrow \emptyset$ ;  $A_r \leftarrow \emptyset$ ;  $V \leftarrow \emptyset$ ;
4:    $M[0 \dots L/2] \leftarrow 0$  ► um vetor que mantém o controle dos possíveis vértices
5:    $M[0] \leftarrow 1$  ► vértice 0 é um início possível
6:   for  $i = 1$  to  $NI$  do
7:      $H[0 \dots L/2] \leftarrow 0$  ► um vetor que mantém o controle dos vértices já processados
8:     for  $j = 1$  to  $lim_i$  do
9:       for  $k = L/2 - 1$  to  $0$  do ► percorre os vértices
10:        if  $H[k] = 0$  and  $M[k] = 1$  then ► se k ainda não foi processado
11:           $H[k] \leftarrow 1$  ► k é processado
12:          if  $k + l_i \leq L/2$  then ► se o arco é padrão
13:             $M[k + l_i] \leftarrow 1$ 
14:             $A_s \leftarrow A_s \cup (k, k + l_i, s)$ 
15:             $V \leftarrow V \cup \{(k + l_i)\}$ 
16:          else if  $k \leq L - (k + l_i)$  then ► se o arco é refletido + redução
17:             $A_r \leftarrow A_r \cup (k, L - (k + l_i), r)$ 
18:             $V \leftarrow V \cup \{(L - (k + l_i))\}$ 
19:          end if
20:        end if
21:      end for
22:    end for
23:  end for
24:   $V \leftarrow V \cup \{(L/2)\}$ 
25:  for  $i \in V$  do  $A_s \leftarrow A_s \cup (i, j, s) : j = \min(k \in V : k > i)$  ► arcos de perda
26:   $A_r \leftarrow A_r \cup (L/2, L/2, r)$  ► permite caminhos que colidem em L/2
27:  return  $V, A_s, A_r$ 

```

Fonte: Delorme e Iori (2020).

4.5 Exemplo ilustrativo

Nesta seção, um exemplo ilustrativo é apresentado. Os dados deste exemplo são os mesmos apresentados por Lemos, Cherri e Araujo (2021). O intuito, aqui, é exemplificar as diferenças nas redes dos três modelos.

Considera-se, nesse exemplo, que o comprimento L das barras é de 10 metros. Existem 4 possíveis espessuras de matéria-prima ($NK = 4$), e o preço de cada uma é $\theta_k = [40, 25, 20, 10]$. Considera-se uma carteira de pedidos com dois produtos ($NJ = 2$), cada um deles com demanda de 100 unidades ($d = [100, 100]$). A produção de cada um dos produtos é possível com 4 modos alternativos ($M_1 = M_2 = 4$). Os itens devem ser cortados em quatro tamanhos diferentes ($l = [7, 6, 4, 3]$). A Tabela 4 apresenta as combinações de tamanhos de itens e espessuras que cada modo de produção demanda.

Tabela 4 – Dados dos modos de produção de cada produto a ser fabricado.

Produtos (j)	Modo de Manufatura (m)	Matéria prima (k)	Tamanho do item (l_i)	Quantidades requeridas (b_{ikm})
1	1	1	7 m	4
		2	3 m	2
		3	—	—
		4	—	—
	2	1	—	—
		2	7 m	6
		3	4 m	2
		4	—	—
	3	1	—	—
		2	—	—
		3	7 m	6
		4	6 m	8
	4	1	7 m	4
		2	—	—
		3	—	—
		4	7 m	2
2	1	1	7 m	4
		2	6 m	2
		3	—	—
		4	—	—
	2	1	—	—
		2	4 m	8
		3	6 m	6
		4	—	—
	3	1	—	—
		2	—	—
		3	3 m	16
		4	4 m	12
	4	1	3 m	8
		2	—	—
		3	—	—
		4	7 m	8

Fonte: [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#).

O conjunto de Figuras 5 mostra os arcos gerados como parâmetros para resolução dos modelos de fluxo em arcos clássico (5(a)), *meet-in-the-middle* (5(b)) e *reflect* (5(c)). Cada vértice representa uma unidade de comprimento da barra. Os arcos representam itens ou perdas no objeto. Os arcos de perda são representados com linhas pontilhadas.

Na abordagem MIM os arcos tracejados representam os padrões direitos, sendo que o limite que minimiza a quantidade de arcos necessários é $t = 3$. Dessa forma, os arcos que se iniciam em vértices $x \leq 2$, fazem parte dos padrões esquerdos (linhas inteiras) e, os arcos iniciados em $x \geq 3$, são padrões direitos.

No modelo *reflect*, é utilizada apenas metade do tamanho da barra. São quatro arcos refletidos, contando o arco $(5, 5, r)$, dois arcos padrão e dois arcos de perda. Arcos refletidos que representam objetos de tamanho l_1 só podem ser iniciados em vértices que sejam o fim de arcos padrão que representam objetos de tamanho l_2 , sendo $l_1 \leq l_2$, ou no vértice 0.

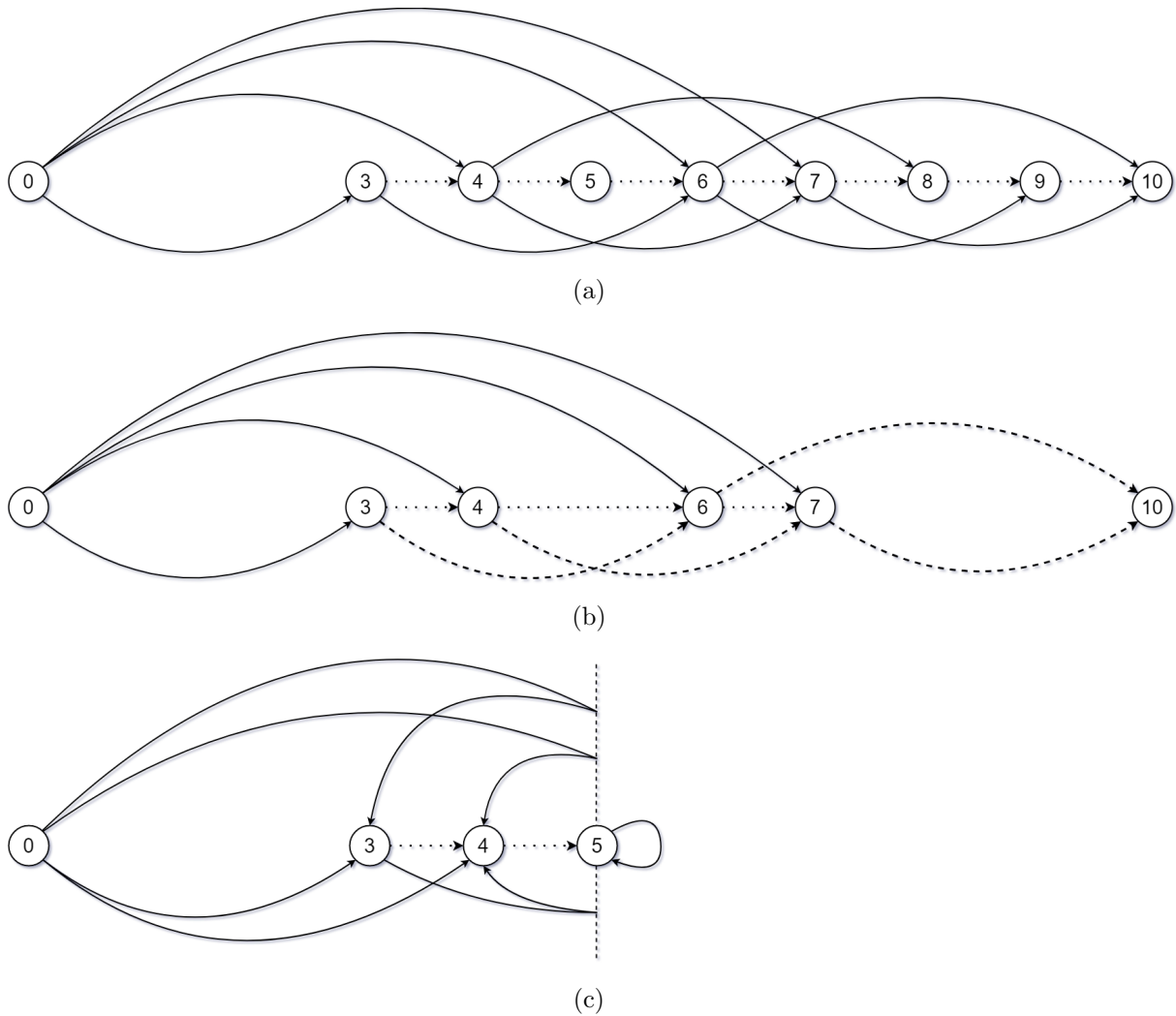


Figura 5 – Representação dos arcos formados pelo modelo de (a) fluxo em arcos, (b) *meet-in-the-middle* e (c) *reflect*.

A Tabela 5 resume as quantidades de vértices e arcos gerados para cada modelo, sendo 9 vértices para o modelo de fluxo em arcos clássico, 6 com o princípio *meet-in-the-*

middle e 4 vértices para o *reflect*. Em relação aos arcos são 17 para o modelo de fluxo em arcos clássico, 11 para o princípio *meet-in-the-middle* e 8 no modelo *reflect*.

Tabela 5 – Quantidade de vértices e arcos do exemplo ilustrativo.

	Vértices	Arcos
Fluxo em arcos (5(a))	9	17
<i>Meet-in-the-middle</i> (5(b))	6	11
<i>Reflect</i> (5(c))	4	8

Ao submeter os dados deste exemplo aos modelos baseados na formulação de fluxo em arcos clássico ((22)-(30)), *meet-in-the-middle* ((22)-(30)) e *reflect* ((38)-(44)) com seus respectivos grafos, a solução ótima é encontrada. A Tabela 6 apresenta a quantidade de produtos fabricados em cada um dos modos de produção disponíveis, enquanto que a Tabela 7 apresenta a quantidade de barras de cada espessura utilizada, bem como o valor total das matérias-primas minimizado.

Tabela 6 – Modos de produção por produto.

Produtos	Modos (m)			
	1	2	3	4
$j = 1$	0	0	99	1
$j = 2$	19	5	66	10

Tabela 7 – Quantidade e custo das barras utilizadas.

Espessura de barra (k)	1	2	3	4
Quantidade	80	39	768	874
Custo unitário (θ_k)	40	25	20	10
Custo	3.200	975	15.360	8.740
Custo total com matéria-prima (\$)	28.275			

As Figuras 6, 7 e 8 mostram o fluxo nos arcos encontrado na solução ótima de cada um dos modelos. As imagens estão separadas pelas espessuras de matérias-primas (k). Observe que nos modelos de fluxo em arcos e *meet-in-the-middle*, a quantidade de fluxo que sai do vértice 0 é a mesma que entra no vértice $L = 10$ e representa a quantidade total de barras de cada espessura usadas. No modelo *reflect*, a quantidade de fluxo que sai do vértice 0 é igual ao dobro da quantidade de barras usadas. Ou ainda, a quantidade de fluxo nos arcos refletidos é a quantidade de barras utilizadas.

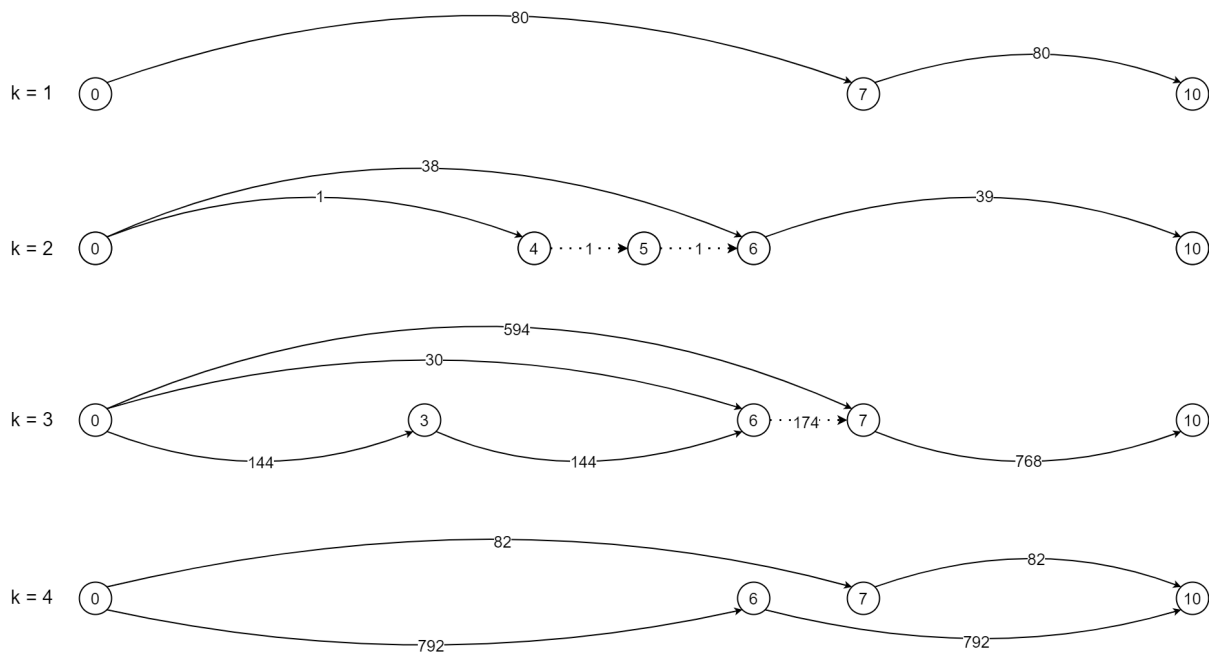


Figura 6 – Fluxos da solução ótima do exemplo com a formulação baseada em fluxo em arcos.

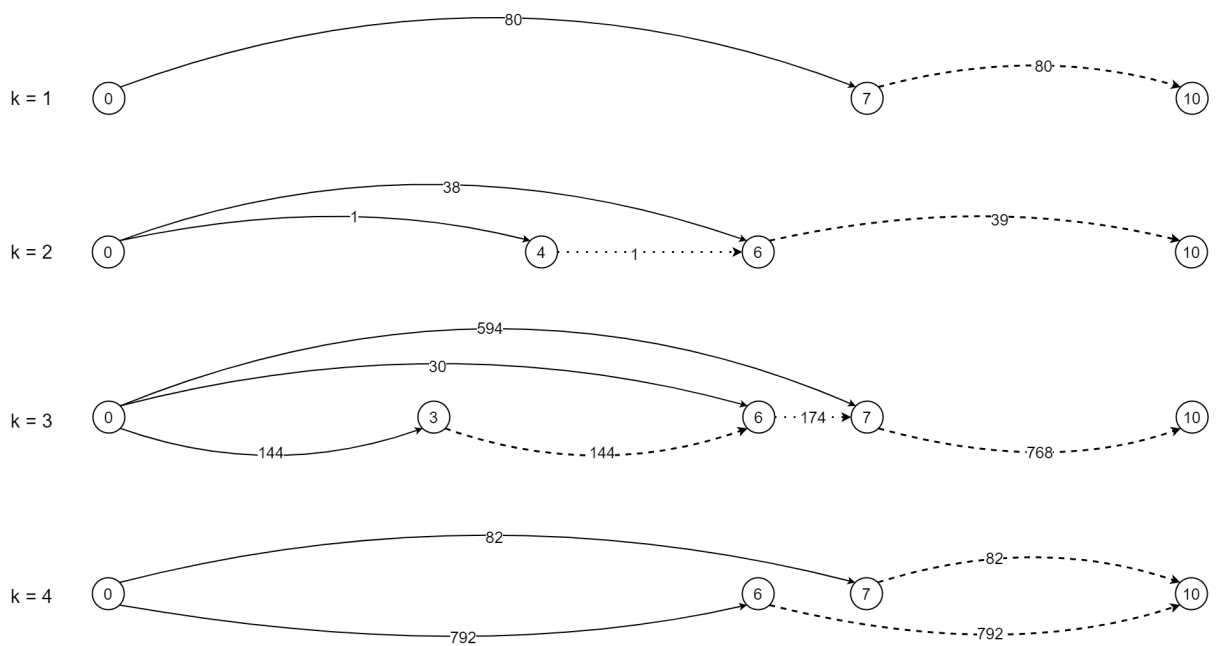


Figura 7 – Fluxos da solução ótima do exemplo com a formulação baseada no princípio *meet-in-the-middle*.

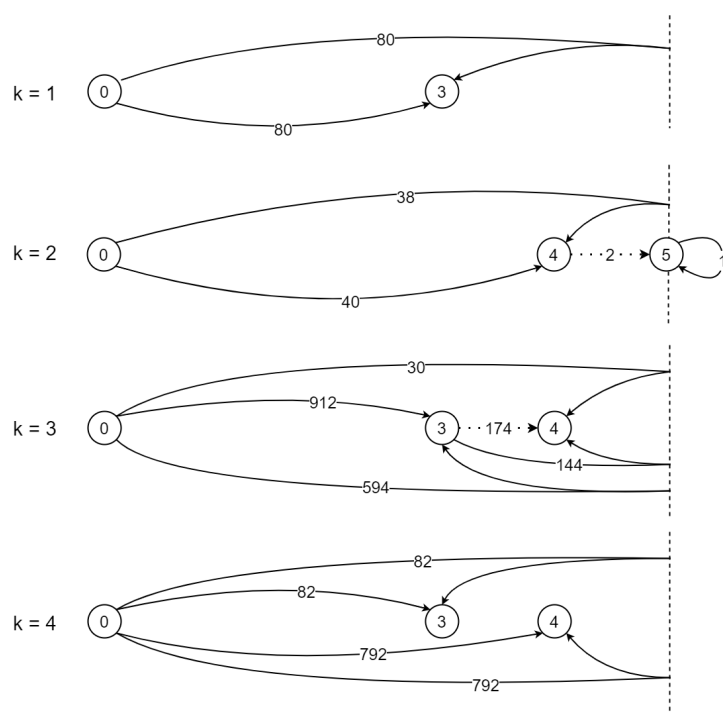


Figura 8 – Fluxos da solução ótima do exemplo com a formulação baseada na *reflect*.

5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Um conjunto de 1215 instâncias foi utilizado a fim de explorar o desempenho e os limitantes de cada modelo de acordo com os parâmetros fornecidos. Todos os experimentos foram realizados em um computador com 16GB de memória RAM e processador Intel Core i7-8750H, hexacore, com frequência base de 2.2 GHz, utilizando o CPLEX 12.10 para resolver o problema e linguagem OPL para codificar o modelo.

5.1 Descrição dos dados

As 1215 instâncias utilizadas foram as mesmas geradas por [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#). Elas são compostas por 30 produtos ($NJ = 30$), objetos de comprimento 1200 ($L = 1200$) e com 20, 30 e 40 itens diferentes (NI). O número de espessura das matérias-primas (NK) possui três cenários: 2, 5 ou 8. O número de modos alternativos por produto ($|M_j|$), também possui três opções: 5, 10, 15. Os tamanhos de itens (l_i) variam em: *pequenos* ($l_i \in U[120, 360]$); *grandes* ($l_i \in U[360, 840]$); *variados* ($l_i \in U[120, 840]$). Por fim, o custo das matérias-primas tem três alternativas: *idênticos* ($\theta_k = 1$); *homogêneos* ($\theta_k \in U[1, 10]$); *heterogêneos* ($\theta_k \in U[1, 100]$). A notação U representa a distribuição uniforme em um conjunto discreto.

As demandas dos produtos finais foram geradas sempre entre 1 e 10 unidades ($d_j \in U[1, 10]$). As quantidades exigidas de um item i de determinada espessura k no modo alternativo m (b_{ikm}) também foram geradas aleatoriamente, considerando 98% de chances de serem nulas ($b_{ikm} = 0$) e 2% seguindo uma distribuição uniforme entre 2 e 8 unidades ($b_{ikm} \in U[2, 8]$). O limite de 98% foi inspirado no exemplo industrial de [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#), em que 98% dos elementos b_{ikm} eram iguais a 0. A combinação desses cenários totaliza 243 conjuntos de parâmetros, para os quais 5 instâncias diferentes foram geradas aleatoriamente, totalizando 1215 instâncias.

5.2 Resultados

Chamaremos de FA a formulação para o PCEMA-1D proposta neste trabalho baseada no modelo clássico de fluxo em arcos. Chamaremos de MIM a formulação proposta

baseada no princípio *meet-in-the-middle* e de RE a formulação proposta baseada na *reflect*. Chamaremos de GC o método de solução proposto em [Lemos, Cherri e Araujo \(2021\)](#), que é baseado no procedimento de geração de colunas de [Gilmore e Gomory \(1961\)](#) e em uma heurística para obtenção de uma solução inteira.

Os dados foram submetidos aos modelos. A geração de colunas e a geração dos arcos dos modelos foram executados sem limitação de tempo. Para encontrar a solução inteira, o tempo de execução foi limitado a 180 segundos e todas as instâncias alcançaram uma solução inteira dentro do limite de tempo. O tempo de solução considerado nas análises somam o tempo de geração de colunas ou arcos ao tempo de encontrar a solução inteira, podendo, portanto, ultrapassar 180 segundos.

A Tabela 8 mostra a média dos tempos dos modelos propostos e a média do tempo da geração de colunas ou dos arcos conforme os parâmetros variam. Os menores tempos para cada parâmetro estão em destaque. Em média, a geração de colunas ocupa cerca de 75,1% do tempo das instâncias, enquanto que a geração de arcos nos modelos FA, MIM e RE ocupam 2,9%, 10,6% e 0,6%, respectivamente.

Tabela 8 – Média do tempo total (média do tempo para geração das colunas ou arcos) de cada modelo quando os parâmetros variam.

		GC	FA	MIM	RE
Itens	pequenos	319 (199,6)	145 (1,00)	144 (5,34)	137 (0,04)
	grandes	29 (26,7)	25 (0,01)	10 (0,01)	4 (0,00)
	variados	135 (69,8)	121 (0,10)	113 (0,76)	110 (0,00)
NK	2	44 (13,7)	49 (0,36)	43 (2,02)	39 (0,01)
	5	135 (74,9)	107 (0,37)	101 (2,02)	95 (0,01)
	8	305 (207,6)	135 (0,38)	124 (2,07)	116 (0,01)
NM	5	148 (79,4)	100 (0,36)	93 (1,94)	89 (0,01)
	10	163 (100,2)	97 (0,36)	89 (2,07)	83 (0,01)
	15	173 (116,5)	94 (0,38)	85 (2,10)	79 (0,01)
NI	20	69 (29,4)	82 (0,09)	75 (0,68)	72 (0,00)
	30	129 (63,1)	102 (0,32)	92 (1,86)	85 (0,01)
	40	285 (203,7)	108 (0,70)	100 (3,56)	94 (0,02)
Custos	Homogêneos	157 (95,1)	100 (0,36)	90 (2,00)	84 (0,01)
	Heterogêneos	184 (100,3)	119 (0,36)	111 (2,01)	106 (0,01)
	Idênticos	142 (100,8)	72 (0,38)	65 (2,10)	61 (0,01)
Geral		161 (98,7)	97 (0,37)	89 (2,04)	84 (0,01)

O perfil de desempenho dos quatro modelos estudados é mostrado na Figura 9. O perfil de desempenho é uma ferramenta que permite comparar os resultados de diferentes modelos usando o tempo de cada instância em comparação com o melhor tempo entre os modelos em uma escala logarítmica (DOLAN; MOREÉ, 2002). A figura fornece um resumo gráfico da porcentagem de instâncias para os quais os tempos de solução de um determinado modelo estão dentro de uma proporção do tempo usada pelo melhor tempo (τ). RE supera os demais modelos para a maior parte de τ , indicando ser o mais eficiente. De fato, para a maior parte das instâncias, o modelo RE foi mais rápido. A interseção das curvas com o eixo y indica a porcentagem de instâncias com os melhores tempos para cada modelo. Neste caso, os modelos GC, FA, MIM e RE tiveram eficiência de 14%, 2%, 7% e 76%, respectivamente.

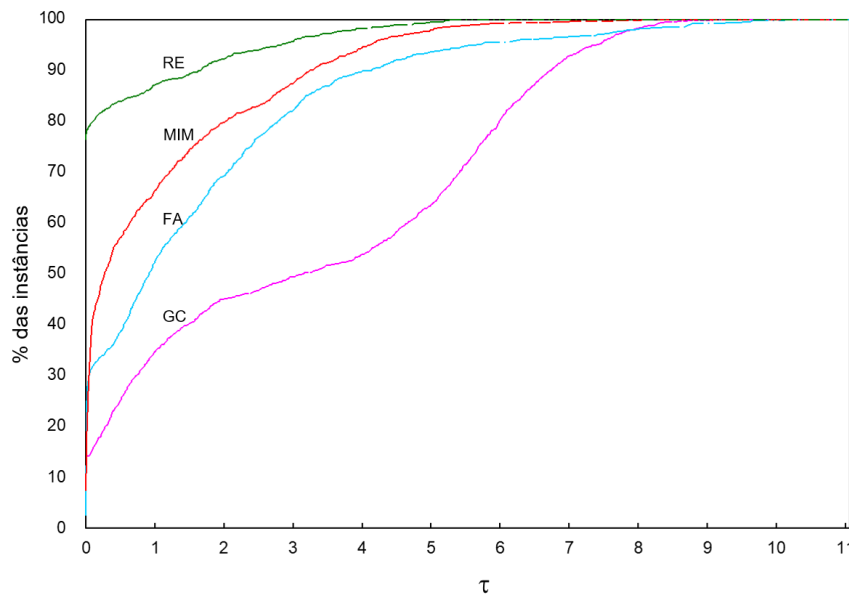


Figura 9 – Perfil de desempenho dos modelos para o tempo de solução.

A Tabela 9 resume os principais resultados dos modelos. Os *gaps* de cada modelo foram calculados pela equação (45), de acordo com o Limitante Superior (LS) e o Limitante Inferior (LI) de cada instância. Para comparar LS e LI entre os modelos utilizamos as equações (46) e (47). Essas equações correspondem ao cálculo da variação percentual entre GC e FA, sendo que os valores das instâncias GC são considerados os valores de referência, e os valores finais são os valores das instâncias de FA. Os valores de

FA são substituídos pelos valores de MIM ou RE nas comparações com seus respectivos modelos.

$$gap = \frac{LS - LI}{LI} \quad (45)$$

$$\text{variação}_{(LS)} = \frac{LS_{(FA)} - LS_{(GC)}}{LS_{(GC)}} \times 100\% \quad (46)$$

$$\text{variação}_{(LI)} = \frac{LI_{(FA)} - LI_{(GC)}}{LI_{(GC)}} \times 100\% \quad (47)$$

Para este problema, um melhor LS é caracterizado pela redução percentual e um melhor LI é caracterizado pelo aumento percentual. A fim de facilitar o entendimento, falaremos em superioridade para indicar um melhor desempenho em relação ao parâmetro que está sendo analisado, podendo indicar redução ou aumento, dependendo do contexto.

Tabela 9 – Resumo dos principais resultados dos modelos.

Geral (1215 instâncias)	GC	FA	MIM	RE
<i>Gap</i> médio (%)	0,59	0,32	0,27	0,25
Tempo médio (s)	161,1	97,1	89,1	83,8
Média da ger. col/arcs em rel. ao tempo total (%)	75,1	2,9	10,6	0,6
Ótimos atingidos (nº de instâncias)	30	551	609	613
Superioridade média do LS em relação à GC (%)	-	0,07	0,10	0,11
Superioridade média do LI em relação à GC (%)	-	0,20	0,22	0,23

Os modelos FA, MIM e RE apresentaram LS, LI, tempo de solução e *gap*, em média, melhores do que o modelo de geração de colunas, sendo a RE superior às demais.

Como o modelo GC utiliza um método heurístico para obtenção da solução inteira, a otimalidade das instâncias é provada quando o valor da solução inteira é igual ao valor da sua relaxação linear. As demais formulações foram resolvidas de maneira exata pelo *software* CPLEX. A formulação RE obteve a maior quantidade de instâncias que alcançaram o valor ótimo.

É interessante salientar que em nenhuma instância o limitante inferior dos modelos baseados em fluxo em arcos pioraram em relação à GC, ou seja, os limitantes inferiores ou permaneceram os mesmos ou melhoraram de valor em todas as instâncias.

Em geral, na comparação entre o modelo da literatura (GC) e os novos modelos implementados, a quantidade de instâncias em que se conseguiu melhorar os parâmetros

estudados (limitantes e tempo de solução) é maior do que a quantidade de instâncias que apresentou piora nos critérios de avaliação.

A Tabela 10 apresenta a comparação entre os modelos MIM e RE com FA. Podemos perceber que RE apresenta a maior redução na quantidade de arcos e no tempo de solução.

Tabela 10 – Comparação geral dos modelos MIM e RE com o modelo FA (em %).

	MIM	RE
Redução média de arcos	73,5	88,2
Redução média no tempo total	3,4	28,5
Redução média no tempo de solução	15,2	26,8
Superioridade média do LS	0,03	0,04
Superioridade média do LI	0,03	0,03

Nas seções seguintes, separamos a análise dos resultados em dois grupos: primeiro, analisamos as instâncias que alcançaram valor de solução considerada ótima dentro do limite de tempo estipulado; depois, analisamos as instâncias que não alcançaram solução comprovadamente ótima. No fim do capítulo, discutimos as vantagens e desvantagens das formulações, analisando a influência dos parâmetros nos modelos.

5.2.1 Instâncias em que foi provada a otimalidade

A Tabela 11 mostra a quantidade de instâncias com solução comprovadamente ótima que cada modelo conseguiu atingir (e o tempo médio) separando as instâncias pela variação dos parâmetros. De modo geral, as instâncias de itens grandes foram as que mais obtiveram soluções ótimas e foram também as que obtiveram o menor tempo médio de solução. A tabela também apresenta a média de tempo geral dos ótimos, e nele é possível perceber que o modelo RE alcança a maior quantidade de ótimos com menor média de tempo. Os modelos baseados em fluxo em arcos conseguiram obter a solução ótima para cerca de metade das instâncias, enquanto que o modelo de geração de colunas obteve a solução ótima para apenas 30 instâncias.

Tabela 11 – Número de instâncias resolvidas na otimalidade (tempo médio em segundos) em cada modelo quando os parâmetros variam.

		#inst	GC		FA	MIM	RE
Itens	pequenos	405	0	(–)	96 (22,7)	106 (25,6)	108 (16,5)
	grandes	405	30	(7,4)	310 (2,4)	346 (2,7)	345 (1,0)
	variados	405	0	(–)	145 (13,9)	157 (7,4)	160 (7,3)
NK	2	405	21	(4,4)	306 (7,8)	319 (6,8)	320 (3,8)
	5	405	9	(14,6)	156 (10,8)	178 (9,5)	180 (8,3)
	8	405	0	(–)	89 (10,0)	112 (8,7)	113 (5,3)
NM	5	405	13	(7,6)	172 (7,6)	194 (7,8)	190 (3,7)
	10	405	11	(4,8)	185 (6,8)	202 (7,6)	205 (5,3)
	15	405	6	(11,9)	194 (12,3)	213 (8,4)	218 (6,9)
NI	20	405	15	(4,6)	217 (6,8)	237 (5,1)	240 (5,6)
	30	405	12	(6,2)	178 (12,1)	195 (9,2)	198 (3,6)
	40	405	3	(26,1)	156 (8,6)	177 (10,4)	175 (7,0)
Custos	Homogêneos	405	9	(12,3)	195 (12,7)	216 (9,6)	222 (6,9)
	Heterogêneos	405	9	(5,3)	100 (5,3)	119 (3,6)	114 (2,8)
	Idênticos	405	12	(5,3)	256 (7,6)	274 (8,5)	277 (5,2)
Geral		1215	30	(7,4)	551 (9,0)	609 (7,9)	613 (5,4)
(% instâncias)			2,5		45,3	50,1	50,5

Das 1215 instâncias estudadas, 646 alcançaram uma solução considerada ótima em pelo menos um dos modelos utilizados. Na Tabela 12 comparamos o tempo de solução das instâncias que alcançaram o valor ótimo nos modelos FA, MIM ou RE com tempo de solução do modelo GC, mesmo que neste último a solução não tenha sido considerada ótima. A comparação mostra que, além de alcançar uma maior quantidade de ótimos, o tempo de solução também diminui. As formulações FA, MIM e RE reduzem o tempo de solução, em média, em 56,6%, 68,5% e 79,7%, em relação ao modelo GC. As maiores reduções se dão nas instâncias com itens de tamanho grande.

Tabela 12 – Porcentagem de redução no tempo de solução das instâncias resolvidas na otimalidade em cada modelo em comparação à GC quando os parâmetros variam.

		FA	MIM	RE
Itens	pequenos	2,5	11,0	57,0
	grandes	85,1	88,0	95,9
	variados	31,6	64,0	60,1
NK	2	51,9	60,1	86,0
	5	61,0	81,8	66,0
	8	65,2	71,1	83,8
NM	5	58,4	66,7	89,1
	10	63,8	69,1	85,9
	15	48,2	69,4	65,6
NI	20	62,4	74,7	71,0
	30	31,3	56,1	86,5
	40	77,5	73,7	83,9
Custos	Homogêneos	76,3	77,2	85,8
	Heterogêneos	34,5	51,6	74,3
	Idênticos	49,5	78,9	75,5
Média		56,6	68,5	79,7

5.2.2 Instâncias em que não foi provada a otimalidade

A Tabela 13 separa as instâncias pela variação dos parâmetros e mostra, para cada modelo, a quantidade de instâncias em que não foi provada a otimalidade e o *gap* médio dessas instâncias. Percebemos que as instâncias de itens grandes têm os menores *gaps*, enquanto que as instâncias de itens pequenos tem os maiores. Também observamos que o modelo RE tem, em média, o menor *gap* para as instâncias em que não foi provada a otimalidade.

Tabela 13 – Número de instâncias em que não foi provada a otimalidade (*gap* percentual médio) de cada modelo quando os parâmetros variam.

		#inst	GC	FA	MIM	RE
Itens	pequenos	405	405 (1,02)	309 (0,96)	299 (0,85)	297 (0,80)
	grandes	405	375 (0,26)	95 (0,06)	59 (0,03)	60 (0,01)
	variados	405	405 (0,51)	260 (0,33)	248 (0,28)	245 (0,28)
NK	2	405	384 (0,49)	99 (0,40)	86 (0,36)	85 (0,37)
	5	405	396 (0,64)	249 (0,57)	227 (0,53)	225 (0,49)
	8	405	405 (0,68)	316 (0,66)	293 (0,59)	292 (0,56)
NM	5	405	392 (0,48)	233 (0,46)	211 (0,45)	215 (0,42)
	10	405	394 (0,63)	220 (0,61)	203 (0,55)	200 (0,52)
	15	405	399 (0,70)	211 (0,69)	192 (0,62)	187 (0,60)
NI	20	405	390 (0,73)	188 (0,69)	168 (0,62)	165 (0,61)
	30	405	393 (0,62)	227 (0,59)	210 (0,55)	207 (0,53)
	40	405	402 (0,47)	249 (0,49)	228 (0,46)	230 (0,42)
Custos	Homogêneos	405	396 (0,57)	210 (0,60)	189 (0,57)	183 (0,54)
	Heterogêneos	405	396 (0,61)	305 (0,46)	286 (0,41)	291 (0,39)
	Idênticos	405	393 (0,64)	149 (0,81)	131 (0,76)	128 (0,74)
Geral		1215	1185 (0,61)	664 (0,58)	606 (0,54)	602 (0,51)

No total, 569 instâncias não obtiveram solução ótima em nenhum dos quatro modelos. Essas instâncias são, em sua maioria, as que possuem itens pequenos e mais espessuras de barras, conforme a Tabela 14.

Tabela 14 – Número de instâncias que não atingiram o valor ótimo separadas pelo tamanho dos itens e quantidades de espessuras de matéria-prima.

NK	Tamanho dos itens			
	Pequenos	Grandes	Variados	Total
2	42	4	30	76
5	116	11	84	211
8	132	31	119	282
Total	290	46	233	569

Essas 569 instâncias que não encontraram valor ótimo em nenhuma formulação, são usadas para comparar os limitantes dos modelos. A Tabela 15 mostra o percentual de superioridade no valor das soluções dos modelos FA, MIM e RE em comparação ao modelo GC separado pelos parâmetros. Podemos notar que as instâncias com itens pequenos e com menor número de itens apresentaram as maiores reduções no valor da função objetivo.

No geral, a formulação RE foi, em média, a que mais conseguiu reduzir o valor da solução como mostra o destaque da tabela.

Tabela 15 – Porcentagem de superioridade média dos valores dos limitantes superiores das instâncias não ótimas em comparação à GC quando os parâmetros variam.

		FA	MIM	RE
Itens	pequenos	0,06	0,14	0,18
	grandes	0,03	0,03	0,03
	variados	0,06	0,09	0,09
NK	2	0,13	0,14	0,15
	5	0,08	0,12	0,15
	8	0,02	0,10	0,12
NM	5	0,06	0,09	0,11
	10	0,04	0,10	0,12
	15	0,08	0,14	0,17
NI	20	0,13	0,20	0,21
	30	0,06	0,11	0,13
	40	0,01	0,05	0,08
Custos	Homogêneos	0,00	0,03	0,07
	Heterogêneos	0,04	0,11	0,14
	Idênticos	0,10	0,14	0,15
Média		0,06	0,11	0,13

A mesma análise foi feita para os limitantes inferiores na Tabela 16. Podemos notar que, neste caso, as instâncias com poucos itens apresentaram o maior percentual de melhoria nos modelos, sendo que, em geral, o modelo RE foi discretamente superior aos demais.

Tabela 16 – Porcentagem de superioridade média dos valores dos limitantes inferiores das instâncias não ótimas em comparação à GC quando os parâmetros variam.

		FA	MIM	RE
Itens	pequenos	0,08	0,11	0,13
	grandes	0,16	0,17	0,18
	variados	0,13	0,16	0,16
NK	2	0,09	0,13	0,13
	5	0,12	0,14	0,15
	8	0,10	0,13	0,14
NM	5	0,08	0,10	0,10
	10	0,11	0,14	0,15
	15	0,13	0,16	0,17
NI	20	0,21	0,25	0,27
	30	0,09	0,11	0,12
	40	0,04	0,06	0,07
Custos	Homogêneos	0,05	0,06	0,07
	Heterogêneos	0,11	0,12	0,14
	Idênticos	0,13	0,17	0,17
Média		0,11	0,13	0,14

5.3 Discussões adicionais

Na comparação geral entre geração de colunas e geração de arcos (Tabela 8), percebemos que o tempo da geração de colunas é muito superior ao tempo da geração de arcos. Os maiores tempos requeridos para a geração de colunas se dão nas instâncias com mais espessuras de barras (NK), maior quantidade de itens (NI) e itens de tamanho pequenos (l_i). O número de espessuras influencia o tempo de geração de colunas, porque, de acordo com o método descrito na Seção 4.1, os padrões são gerados separadamente para cada espessura k . Já a presença de mais itens, gera mais variáveis para resolver o subproblema, e a presença de itens menores permite mais combinações, fornecendo mais padrões para serem testados e adicionados ao modelo, já que novas colunas são geradas enquanto o custo reduzido é atrativo. Na maioria das instâncias (678 de 1215), a geração de colunas ocupa de 90% a 100% do tempo total. Em média, para as 1215 instâncias, a geração de colunas ocupa 75,1% do tempo total.

A geração de arcos para as formulações baseadas em fluxo em arcos segue os algoritmos 1, 4 e 5, dependendo, portanto, da quantidade (NI) e do tamanho dos itens (l_i). Os arcos são gerados para cada item, portanto, mais itens geram mais repetições

das etapas do algoritmo. A quantidade de vértices percorridos ($L - l_i$) é maior para itens pequenos do que itens grandes, além do limitante lim_i utilizado (equação 31) ser maior quando os itens são menores, alterando também a quantidade de repetições do código. Vale ressaltar que o tamanho da barra influencia o tempo de geração dos arcos, porém, para o PCEMA-1D isso não foi um fator, pois as barras tinham o mesmo tamanho ($L = 1200$) em todas as instâncias. Na abordagem MIM, a geração de arcos foi mais demorada devido às etapas anteriores dos algoritmos 2 e 3 para gerar os padrões normais, os padrões *meet-in-the-middle* e encontrar o limitante (t) que minimiza a quantidade de padrões. A geração dos arcos no modelo RE é a mais rápida já que percorre apenas metade de posições no objeto ($L/2$).

De acordo com as comparações apresentadas nas Tabelas 8, 11 e 13, identificamos que os resultados dos modelos (tempos, *gaps* e limitantes) também são influenciados principalmente pelos tamanhos dos itens (l_i), quantidade de itens (NI) e quantidade de espessuras de matérias-primas (NK). A variação desses parâmetros altera a quantidade de variáveis e restrições dos modelos, influenciando os resultados obtidos. A presença de mais espessuras de barras e itens aumenta muito a quantidade de variáveis e restrições dos modelos, demandando mais esforços para resolvê-los. Quanto ao tamanho do itens, a presença de itens menores permite mais combinações e, portanto, mais padrões de corte no modelo de geração de colunas e mais posições de corte nos modelos de fluxo. Neste último, cada item e cada possível posição de corte nas diferentes barras está associado a um arco, gerando assim, variáveis. As diferentes posições dos itens nas barras, além de gerar arcos, geram, conseqüentemente, vértices ativos. Cada vértice ativo impõe novas restrições de conservação de fluxo.

Dessa forma, as instâncias com soluções comprovadamente ótimas nas formulações baseadas em fluxo em arcos têm vantagem sobre o modelo de geração de colunas nas instâncias com itens grandes, porque a existência de itens grandes no modelo de geração de colunas leva à maiores perdas. Assim, a distância da solução inteira para a relaxação linear será maior, demandando maiores tempos para convergir ao ótimo no modelo restrito. Nas formulações de fluxo, ao contrário, a presença de itens grandes diminui o tempo de geração de arcos e a quantidade de variáveis e restrições, convergindo mais rápido à solução ótima.

Nas instâncias que não alcançaram o valor ótimo, a existência de menos itens e menos espessuras é vantajosa para as formulações de fluxo em arcos, pois a menor

quantidade de variáveis e restrições aumenta a velocidade de convergência, alcançando melhores limitantes.

A Tabela 17 reporta, para as formulações baseadas em fluxo em arcos, o número médio de variáveis (*var.*), restrições (*rest.*) e tempo total (*t*), separado por variação dos parâmetros. Os valores mínimos para cada grupo de instâncias estão destacados em negrito. É possível observar a influência dos tamanhos de itens, espessuras de barras e número de itens nas variáveis, restrições e tempos dos modelos.

Tabela 17 – Quantidade média de variáveis, restrições e tempo (em segundos) dos modelos baseados em fluxo em arcos quando os parâmetros variam.

		FA			MIM			RE		
		<i>var.</i>	<i>rest.</i>	<i>t</i>	<i>var.</i>	<i>rest.</i>	<i>t</i>	<i>var.</i>	<i>rest.</i>	<i>t</i>
Itens	pequenos	51640	5538	145	22173	3646	144	9976	1575	137
	grandes	5866	4306	25	840	444	10	657	354	4
	variados	17495	5468	121	5588	2125	113	2366	884	110
NK	2	10290	2059	49	4041	851	43	1934	395	39
	5	24928	5092	107	9528	2054	101	4339	935	95
	8	39784	8160	135	15033	3311	124	6726	1484	116
NM	5	24654	5098	100	9238	2056	93	4128	932	89
	10	24875	5108	97	9464	2071	89	4291	934	83
	15	25473	5106	94	9899	2087	85	4581	947	79
NI	20	15590	5023	82	5257	1605	75	2350	701	72
	30	25099	5112	102	9563	2145	92	4324	966	85
	40	34313	5176	108	13781	2465	100	6325	1147	94
Custos	Homog.	24972	5104	100	9557	2091	90	4330	945	84
	Heter.	24708	5104	119	9354	2049	111	4256	928	106
	Idênt.	25321	5104	72	9690	2075	65	4413	941	61
Geral		25001	5104	97	9534	2072	89	4333	938	84

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram realizados estudos de desempenho para três novos modelos para o problema de corte de estoque com modos alternativos de manufatura (PCEMA-1D) encontrado na literatura. Os novos modelos são baseados na formulação clássica de fluxo em arcos de Valério de Carvalho (1999) (FA), no princípio *meet-in-the-middle* de Côté e Iori (2018) (MIM) e na formulação *reflect* de Delorme e Iori (2020) (RE). Este trabalho comparou essas novas formulações com os resultados do modelo de Lemos, Cherri e Araujo (2021), que primeiro introduziu a integração do problema de corte de estoque com diferentes modos de manufatura desenvolvendo um método de solução baseado no procedimento de geração de colunas.

Um total de 1215 instâncias aleatórias foram utilizadas a fim de testar a influência dos parâmetros nos resultados das instâncias e comparar as formulações com o modelo da literatura. Os resultados foram separados em: (i) instâncias que provaram alcançar o valor ótimo dentro do limite de 180 segundos estabelecido na execução dos modelos; (ii) e instâncias que não provaram a otimalidade.

No primeiro grupo, os resultados apontam que os modelos FA, MIM e RE reduzem o tempo de solução, em média, em 56,6%, 68,5% e 79,7%, respectivamente, em relação ao modelo da literatura. Além disso, os modelos baseados em fluxo em arcos elevam para cerca de 50% das instâncias resolvidas até o valor ótimo, enquanto que no modelo baseado em geração de colunas esse valor correspondia a cerca de 2% do total de instâncias. Essas instâncias, em sua maioria, são aquelas que possuem itens grandes e menor número de espessuras de matérias-primas.

Para as instâncias que não alcançaram solução ótima, os modelos FA, MIM e RE elevam a qualidade dos limitantes superiores em relação ao modelo da literatura, em média, em 0,06%, 0,11% e 0,13%, nesta ordem. Já no que diz respeito aos limitantes inferiores, seus valores aumentam, em média, em 0,11%, 0,13% e 0,14% em relação à literatura para FA, MIM e RE, respectivamente.

Também comparamos a quantidade de arcos, variáveis e vértices nos modelos baseados em fluxo em arcos. O modelo RE apresentou a menor quantidade de variáveis e restrições, com redução média de 88% dos arcos em relação à FA.

Para além deste trabalho, novos estudos do PCEMA-1D podem englobar a extensão do problema para o caso multi-período, em que há a possibilidade de estocar itens e produtos finais, ou ainda, o estudo de outras formulações e métodos que reduzem a quantidade de variáveis e restrições do modelo, ou que reduzam o espaço de busca de soluções para o problema. As formulações de fluxo em arcos estudadas também podem ser aplicadas a outras extensões do problema de corte de estoque com o objetivo de obter melhores resultados computacionais.

REFERÊNCIAS

- ALVES, C.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. A branch-and-price-and-cut algorithm for the pattern minimization problem. *RAIRO-Operations Research*, EDP Sciences, v. 42, n. 4, p. 435–453, 2008.
- BISCHOFF, E. E.; WÄSCHER, G. Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v. 84, n. 3, 1995.
- BRAGA, N.; ALVES, C.; MACEDO, R.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. Combined cutting stock and scheduling: a matheuristic approach. *International Journal of Innovative Computing and Applications*, Inderscience Publishers (IEL), v. 7, n. 3, p. 135–146, 2016.
- BRANDAO, F.; PEDROSO, J. P. Bin packing and related problems: General arc-flow formulation with graph compression. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 69, p. 56–67, 2016.
- CLAUTIAUX, F.; HANAFI, S.; MACEDO, R.; VOGÉ, M.-E.; ALVES, C. Iterative aggregation and disaggregation algorithm for pseudo-polynomial network flow models with side constraints. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 258, n. 2, p. 467–477, 2017.
- CÔTÉ, J. F.; IORI, M. The meet-in-the-middle principle for cutting and packing problems. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 30, n. 4, p. 646–661, 2018.
- DEGRAEVE, Z.; PEETERS, M. Optimal integer solutions to industrial cutting-stock problems: Part 2, benchmark results. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 15, n. 1, p. 58–81, 2003.
- DELORME, M.; IORI, M. Enhanced pseudo-polynomial formulations for bin packing and cutting stock problems. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 32, n. 1, p. 101–119, 2020.
- DELORME, M.; IORI, M.; MARTELLO, S. Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 255, n. 1, p. 1–20, 2016.
- DELORME, M.; IORI, M.; MARTELLO, S. Logic based benders’ decomposition for orthogonal stock cutting problems. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 78, p. 290–298, 2017.
- DELORME, M.; IORI, M.; MENDES, N. F. Solution methods for scheduling problems with sequence-dependent deterioration and maintenance events. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, 2021.
- DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, v. 91, n. 2, p. 201–213, 2002.
- DOWSLAND, K. A.; DOWSLAND, W. B. Packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 56, p. 2–14, 1992.
- DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 44, p. 145–159, 01 1990.

- DYCKHOFF, H.; SCHEITHAUER, G.; TERNO, J. Cutting and packing. *dimensions*, v. 13, p. 94–120, 1997.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, v. 9, n. 6, p. 849–859, 1961.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem—part ii. *Operations research*, INFORMS, v. 11, n. 6, p. 863–888, 1963.
- KALLRATH, J.; REBENNACK, S.; KALLRATH, J.; KUSCHE, R. Solving real-world cutting stock-problems in the paper industry: Mathematical approaches, experience and challenges. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 238, n. 1, p. 374–389, 2014.
- KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. *Management science*, INFORMS, v. 6, n. 4, p. 366–422, 1960.
- KOKTEN, E. S.; SEL, Ç. A cutting stock problem in the wood products industry: a two-stage solution approach. *International Transactions in Operational Research*, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/itor.12802>.
- KRAMER, A.; DELL’AMICO, M.; FEILLET, D.; IORI, M. Scheduling jobs with release dates on identical parallel machines by minimizing the total weighted completion time. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 123, p. 105018, 2020.
- KRAMER, A.; DELL’AMICO, M.; IORI, M. Enhanced arc-flow formulations to minimize weighted completion time on identical parallel machines. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 275, n. 1, p. 67–79, 2019.
- KRAMER, A.; IORI, M.; LACOMME, P. Mathematical formulations for scheduling jobs on identical parallel machines with family setup times and total weighted completion time minimization. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 289, n. 3, p. 825–840, 2021.
- KRAMER, R.; IORI, M.; VIDAL, T. Mathematical models and search algorithms for the capacitated p-center problem. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 32, n. 2, p. 444–460, 2020.
- KRAMER, R.; KRAMER, A. An exact framework for the discrete parallel machine scheduling location problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 132, p. 105318, 2021.
- LEMOES, F. K.; CHERRI, A. C.; ARAUJO, S. A. de. The cutting stock problem with multiple manufacturing modes applied to a construction industry. *International Journal of Production Research*, Taylor & Francis, v. 59, n. 4, p. 1088–1106, 2021.
- LIMA, V. L. de; ALVES, C.; CLAUTIAUX, F.; IORI, M.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. Arc flow formulations based on dynamic programming: Theoretical foundations and applications. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 296, n. 1, p. 3–21, 2022.
- MA, N.; LIU, Y.; ZHOU, Z. Two heuristics for the capacitated multi-period cutting stock problem with pattern setup cost. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 109, p. 218–229, 2019.

- MARTINOVIC, J.; DELORME, M.; IORI, M.; SCHEITHAUER, G.; STRASDAT, N. Improved flow-based formulations for the skiving stock problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 113, p. 104770, 2020.
- MARTINOVIC, J.; SCHEITHAUER, G.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. A comparative study of the arcflow model and the one-cut model for one-dimensional cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 266, n. 2, p. 458–471, 2018.
- MELEGA, G. M.; ARAUJO, S. A. de; JANS, R. Classification and literature review of integrated lot-sizing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 271, n. 1, p. 1–19, 2018.
- MELEGA, G. M.; ARAUJO, S. A. de; MORABITO, R. Mathematical model and solution approaches for integrated lot-sizing, scheduling and cutting stock problems. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 295, n. 2, p. 695–736, 2020.
- NASCIMENTO, D. do; ARAUJO, S. de; CHERRI, A. Integrated lot-sizing and one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers. *Annals of Operations Research*, Springer, p. 1–19, 2020.
- OLIVEIRA, J. F.; WÄSCHER, G. Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1106–1108, 2007.
- PARREÑO, F.; ALONSO, M. T.; ALVAREZ-VALDÉS, R. Solving a large cutting problem in the glass manufacturing industry. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 287, n. 1, p. 378–388, 2020.
- POLDI, K. C.; ARAUJO, S. A. de. Mathematical models and a heuristic method for the multiperiod one-dimensional cutting stock problem. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 238, n. 1-2, p. 497–520, 2016.
- POLTRONIERE, S. C.; POLDI, K. C.; TOLEDO, F. M. B.; ARENALES, M. N. A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 157, n. 1, p. 91–104, 2008.
- RAMOS, B.; ALVES, C.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. An arc flow formulation to the multitrip production, inventory, distribution, and routing problem with time windows. *International Transactions in Operational Research*, v. 29, n. 1, p. 526–553, 2022.
- SANTORO, M. C.; LEMOS, F. K. Irregular packing: Milp model based on a polygonal enclosure. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 235, n. 1, p. 693–707, 2015.
- SONG, Y.; ZHANG, J.; LIANG, Z.; YE, C. An exact algorithm for the container drayage problem under a separation mode. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Elsevier, v. 106, p. 231–254, 2017.
- SWEENEY, P. E.; PATERNOSTER, E. R. Cutting and packing problems: A categorized, application-orientated research bibliography. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 43, n. 7, p. 691–706, 1992.
- TRINDADE, R. S.; ARAÚJO, O. C. B. de; FAMPA, M. Arc-flow approach for single batch-processing machine scheduling. *Computers & Operations Research*, Elsevier, p. 105394, 2021.

- VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 86, p. 629–659, 1999.
- VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. Lp models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 141, n. 2, p. 253–273, 2002.
- WANG, P. Y.; WÄSCHER, G. Cutting and packing. *European Journal of Operation Research*, North-Holland, v. 141, n. 2, p. 239–240, 2002.
- WÄSCHER, G.; HAUßNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 3, p. 1109–1130, 2007.
- WOLSEY, L. A. Valid inequalities, covering problems and discrete dynamic programs. In: *Annals of Discrete Mathematics*. [S.l.]: Elsevier, 1977. v. 1, p. 527–538.
- WUTTKE, D. A.; HEESE, H. S. Two-dimensional cutting stock problem with sequence dependent setup times. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 265, n. 1, p. 303–315, 2018.
- YANASSE, H. H.; LAMOSA, M. J. P. An integrated cutting stock and sequencing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1353–1370, 2007.