

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

INTEGRAIS DE CAMINHO NA MECÂNICA QUÂNTICA E NA TEORIA QUÂNTICA
DE CAMPOS COMO BASE PARA AS REGRAS DE FEYNMAN

Marcelo Montenegro Lapola

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro (SP)

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

MARCELO MONTENEGRO LAPOLA

***INTEGRAIS DE CAMINHO NA MECÂNICA QUÂNTICA E NA
TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS COMO BASE PARA AS
REGRAS DE FEYNMAN***

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus
de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista
Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de
Bacharel Em Física.

Orientador: Professor Dr. Luiz Antonio Barreiro
Departamento de Física IGCE - Unesp Rio Claro

Rio Claro – SP
2016

530.12 Lapola, Marcelo Montenegro
L315i Integrais de caminho na mecânica quântica e na teoria
quântica de campos como base para as Regras de Feynman /
Marcelo Montenegro Lapola. - Rio Claro, 2016
85 f. : il., gráfs.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e
Ciências Exatas
Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Mecânica quântica. 2. Diagramas de Feynman. 3.
Espalhamento. 4. Campos escalares. 5. Propagadores. 6. Ação.
I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	7
2. MECÂNICA QUÂNTICA, RELATIVIDADE ESPECIAL E TEORIA DE CAMPOS	8
2.1 <i>Breve revisão de mecânica quântica</i>	9
2.2. <i>Equações quântico-relativísticas</i>	10
2.3. <i>Teoria quântica de campos</i>	12
2.3. <i>Relatividade especial</i>	14
2.4. <i>Transformações de Lorentz</i>	17
3. INTEGRAIS DE CAMINHO APLICADAS NA MECÂNICA QUÂNTICA	20
3.1 <i>Introdução</i>	20
3.2. <i>Formulação das integrais de caminho para a mecânica quântica</i>	21
3.3. <i>Representações de Schrödinger, Heisenberg, da interação e o propagador</i>	23
3.4. <i>O propagador como uma integral de caminho</i>	26
4. TEORIA DE PERTURBAÇÃO E A MATRIZ S	30
4.1 <i>A Série de Born</i>	31
4.2 <i>A amplitude de espalhamento</i>	33
4.3 <i>As regras de Feynman</i>	36
4.4 <i>O espalhamento de Coulomb</i>	41
5. INTEGRAIS DE CAMINHO NA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	44
5.1. <i>Integrais de caminho de forma simplificada</i>	44
5.2. <i>Integrais de caminho na teoria quântica de campos – a energia do vácuo</i>	49

6. AS REGRAS DE FEYNMAN NA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	50
<i>6.1. A matriz S e as amplitudes</i>	50
<i>6.2. A representação de interação</i>	53
<i>6.3. Teoria de Perturbação</i>	55
<i>6.4. Regras básicas de Feynman</i>	59
<i>6.5. Amplitudes</i>	63
<i>6.6. Regras para a construção da amplitude</i>	66
7. CONCLUSÃO	72
8. BIBLIOGRAFIA	73
9. AGRADECIMENTOS	74
APÊNDICE A – Integrais Gaussianas	74

Resumo

Uma das abordagens alternativas utilizadas na mecânica quântica e na teoria quântica de campos, a qual leva a desenvolvimentos mais avançados na área, como a teoria das cordas, é utilizar o formalismo das integrais de caminho. Uma integral de caminho é uma forma eficiente de se calcular as amplitudes de uma transição de um estado quântico para outro. Neste Trabalho de Conclusão de Curso estão algumas ideias elementares a respeito das integrais de caminho e sua aplicação na mecânica quântica ordinária (não relativística) para em seguida embasar as regras de Feynman das interações entre partículas com a obtenção de funcionais geradores que descrevem as amplitudes de espalhamento na teoria quântica de campos.

Abstract

One of the alternative approaches used in quantum mechanics and quantum field theory , which takes the most advanced developments in the area , such as string theory , is to use the formalism of path-integrals . A path-integral is an efficient way to calculate scattering amplitudes of a transition from one quantum state to another. In this work are presented some essential ideas about the path-integrals, applications in ordinary quantum mechanics (nonrelativistic) and then to base the rules of Feynman for interactions between particles in quantum field theory, with some deductions to generating functionals for scattering amplitudes in free field and in the presence of interactions fields.

1. INTRODUÇÃO

“Trinta anos atrás, Dick Feynman me contou sobre sua versão da ‘soma de histórias’ da mecânica quântica. ‘O elétron faz o que ele quer’, disse ele. ‘Ele vai em qualquer direção em qualquer velocidade, para frente e para trás no tempo, do jeito que quiser, aí então você adiciona as amplitudes e isto lhe dá a função de onda’. Eu disse a ele, ‘Você está louco’. Mas ele não estava.

F.J.Dyson (em 1980)

Em 1942 sob a orientação de John Archibald Wheeler no Centro de Estudos Avançados de Princeton, nos Estados Unidos o então pós-graduando Richard Phillips Feynman não poderia imaginar que seu trabalho, sobre as integrais de caminho para a mecânica quântica, seriam o embrião de uma revolução no modo como podemos descrever as interações mais fundamentais da natureza e suas forças. Anos mais tarde, as tais “somadas de histórias” também lhe renderam o prêmio Nobel de Física em 1965. Graças a esse modo de se descrever as interações por meio das amplitudes de espalhamento, Feynman desenvolveu o que se considera atualmente a primeira teoria quântica de campos: a eletrodinâmica quântica. O método das integrais de caminho pode ser usado tanto na primeira quantização (com posição e momentum atuando como operadores e um Hamiltoniano clássico), quanto na segunda quantização, na qual a posição e o momentum atuam apenas como números dando lugar aos campos atuando como operadores quantizáveis e seus momentos conjugados. Nesta teoria quântica de campos, que descreve as interações mais fundamentais da natureza, um tipo comum de cálculo a ser feito é a seção de choque espalhamento de um processo em

particular como, por exemplo, o espalhamento provocado pela interação elétron-elétron ($e^- e^- \rightarrow e^- e^-$). A partir do trabalho de Richard Feynman, uma forma simplificada e rápida de pensar e expressar essas quantidades foi desenvolvida, por meio dos famosos “diagramas de Feynman”. Neste exemplo em particular da interação entre dois elétrons, uma aproximação de primeira ordem é representada pelo diagrama abaixo (Figura 1), e a parte fundamental deste diagrama é a “propagação de um fóton entre os dois elétrons. A teoria que descreve esse processo é conhecida como eletrodinâmica quântica, a qual apresenta a troca de um fóton virtual(1) como responsável pela repulsão entre os elétrons.

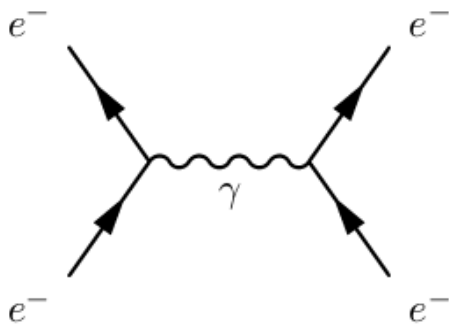


Figura 1.1: Diagrama de Feynman para a interação elétron-elétron devido à troca virtual de um fóton (partícula de interação do campo eletromagnético) (McMahon, 2008)

As regras de Feynman são procedimentos específicos para transformar a linguagem diagramática em expressões para amplitudes de espalhamento. Neste Trabalho de Conclusão de Curso será possível mostrar como estas regras de Feynman emergem a partir das integrais de caminho, por conta do desenvolvimento dos funcionais geradores para campos escalares de Klein Gordon e o campo de spinores de Dirac.

Antes, aplica-se o método das integrais de caminho à mecânica quântica não relativística e verifica-se de que modo os processos de espalhamento podem ser entendidos. O objetivo nesta primeira parte é ilustrar como as integrais de caminho podem ser usadas para o cálculo de espalhamentos e o estabelecimento das regras pictóricas dos diagramas de Feynman. As integrais de caminho de Feynman representam um passo fundamental na união entre a mecânica quântica e a relatividade especial, dando origem à teoria quântica de campos, e gerando uma completa descrição da natureza das interações fundamentais.

(1) - Fóton virtual é um fóton que não precisa estar na camada de massa ($E^2 - p^2 \neq 0$)

2. MECÂNICA QUÂNTICA, RELATIVIDADE ESPECIAL E TEORIA DE CAMPOS

Neste capítulo, a título de motivação, será apresentada uma revisão de alguns conceitos da mecânica quântica e da relatividade especial, uteis no desenvolvimento dos primeiros passos matemáticos de uma teoria quântica de campos. As deduções e conceitos apresentados nos tópicos seguintes são essenciais para um melhor entendimento no desenvolvimento das integrais de caminho.

2.1 *Breve revisão de mecânica quântica*

Há três ideias básicas da mecânica quântica importantes de se recordar e que servem de base para os desenvolvimentos posteriores. De modo geral, a mecânica quântica é a teoria que descreve o comportamento de sistemas pequenos, como átomos e elétrons, por exemplo. Assim a primeira ideia essencial é que na mecânica quântica os observáveis, como posição e momentum de uma partícula, são definidos como operadores matemáticos. Um bom exemplo disso é o Hamiltoniano, isto é, a energia total, de um oscilador harmônico quântico:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (2.1)$$

onde $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ são, respectivamente os operadores criação e destruição e $\hbar$ é a constante de Planck.

A segunda ideia essencial da mecânica quântica a ser lembrada é o princípio da incerteza de Heisenberg, que expressa a incerteza na medida entre o operador posição $\hat{x}$ e o operador momentum $\hat{p}$ definida como

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.2)$$

Ao se considerar o princípio da incerteza entre a energia e tempo, é preciso lembrar que o tempo na mecânica quântica não relativística não é um operador.

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.3)$$

A terceira ideia-chave da mecânica quântica é a relação de comutação entre os operadores momentum e posição dada por

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad (2.4)$$

Esses três conceitos advindos da mecânica quântica, vistos acima de maneira cursiva serão retomados com mais profundidade nos próximos capítulos.

2.2. *Equações quântico-relativísticas*

Conceitos apresentados da seção anterior e os que seguem são uma discussão introdutória para se ter algumas ideias básicas, para se ter um “sabor inicial” de como se desenvolve a teoria quântica de campos. Como citado no início deste capítulo, será possível explorar cada um dos conceitos aqui apresentados, e ir além, nos próximos capítulos. Deste modo, apresentadas as ideias-chave da mecânica quântica é possível dar um salto para os principais conceitos da relatividade especial. Talvez a mais conhecida equação do mundo, obtida por Einstein em 1905, que relaciona a energia à massa

$$E = mc^2 \quad (2.5)$$

tem profundo impacto na teoria quântica, à medida em que é possível pensar em uma nova maneira de se “criar” matéria no universo. Fato a ser notado a partir desta equação é que se há energia suficiente – isto é, energia suficiente proporcional a massa de uma determinada partícula conforme descreve a Eq. (2.5), então é possível se “criar” a partícula. Devido a leis de conservação e simetria, é preciso o dobro da massa da partícula, então é possível criar também sua antipartícula.

De modo geral, conceitual, para a física de altas energias, isto é, aquela que leva em conta partículas que se movem a velocidades próximas à da luz, e as interações se dão por troca de partículas, temos

- O número de partículas não é fixado;
- Os tipos das partículas presentes não são fixados.

É justamente neste ponto que há conflito teórico direto com a mecânica quântica não relativística, na qual a dinâmica de um sistema é descrita pela equação de Schrödinger (Eq. 2.6 abaixo). Para uma partícula movendo-se em uma dimensão sujeita a um potencial V temos

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.6)$$

Também é possível estender o problema para o caso onde várias partículas estão presentes. Porém, o número e os tipos das partículas são fixos. Isso significa que a equação de Schrödinger não pode de modo ou forma alguma modificar o número de partículas presentes em um sistema ou fazer “aparecer” ou “desaparecer” novas partículas neste sistema. Isto tem um significado conceitual profundo na teoria quântica descrita pela Equação (2.6) que é sua incompatibilidade com a relatividade restrita. De modo mais direto, é possível notar na equação de Schrödinger uma falta de simetria entre espaço e tempo, denotadas pelas ordens das derivadas – primeira para o tempo e segunda para o espaço. O próprio spin é uma quantidade que somente surge naturalmente em equações quântico-relativísticas.

De fato, historicamente falando, o próprio Schrödinger deduziu uma equação relativística, antes mesmo de deduzir a equação acima, mas acabou descartando-a. De maneira independente, a primeira equação “quântica relativística” foi deduzida por Klein e Gordon, a qual mais tarde ficou conhecida como equação de Klein-Gordon

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar} \varphi \quad (2.7)$$

Esta equação será deduzida em futuros capítulos, de modo detalhado porém simples. Um dos motivos que levou Schrödinger a descartar a Eq. (2.7) foi a obtenção de um erro grande para a estrutura fina do átomo de hidrogênio. Outra característica “indesejada” é que a equação se resolvida leva a valores negativos de probabilidades, o que não tem significado físico, contradizendo um dos conceitos mais essenciais da mecânica quântica. Outro ponto, são as energias negativas obtidas em sua resolução.

Outra tentativa, muito bem sucedida por sinal, de se obter uma equação relativística foi feita por Paul Dirac. Sua hoje famosa equação é dada por

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \Psi + \beta mc^2 \Psi \quad (2.8)$$

Onde $\vec{\alpha}$ e β são matrizes. Esta equação a qual será examinada com maiores detalhes nos capítulos subsequentes resolve alguns dos problemas apresentados pela equação de Klein-Gordon, mas ainda apresenta energias negativas em suas soluções. Com será possível notar após um desenvolvimento mais detalhado das Equações (2.7) e (2.8) parte do problema se resolve a partir de uma nova interpretação das grandezas envolvidas. Desse modo é possível ir em direção a uma teoria de campos a partir de uma mudança no modo de interpretar essas equações relativísticas.

2.3. *Teoria quântica de campos*

Com as equações de Klein-Gordon e Dirac foi-se em direção a uma teoria quântica de campos a partir de uma mudança conceitual. Essencialmente, para que a mecânica quântica e relatividade especial sejam de fato compatíveis descarta-se a noção que φ e Ψ nas Equações (2.7) e (2.8) descrevam estados de partículas simples. Assim, são propostas novas ideias:

- φ e Ψ ao invés de funções de onda passam a ser campos.
- Os campos são promovidos a operadores que podem criar novas partículas e destruí-las.

Desse modo, tendo os campos como operadores, cada um deles apresenta um campo de momenta conjugado e deverão obedecer as relações de comutação de maneira análoga às existentes na mecânica quântica não-relativística. Serão mostradas essas relações de comutação como, por exemplo

$$[\hat{\varphi}(x, t), \hat{\pi}(y, t)] = i\hbar\delta(x - y) \quad (2.9)$$

onde x e y são pontos distintos no espaço. Onde também se se definia o momentum canonicamente conjugado ao campo como

$$\pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x, y)}$$

Assim, se nessa nova teoria quântica os campos são promovidos a operadores, ocorre que os tradicionais operadores da mecânica quântica não-relativística, posição $\hat{x}$ e tempo são “rebaixados” a simples parâmetros.

Importante perceber desde o início que tanto na equação de Klein-Gordon como na equação de Dirac, espaço e tempo estão na mesma ordem. Na primeira, Eq (2.7) temos derivadas de segunda ordem para tempo e espaço, e na equação (2.8) as derivadas temporais e espaciais são de primeira ordem. Diferentemente da equação de Schrödinger (Eq (2.6)) que apresenta uma “assimetria” espaço-temporal nas ordens das derivadas.

Esta simetria entre espaço e tempo nas equações de Klein Gordon e de Dirac são condizentes com a relatividade especial de Einstein.

Assim, de maneira resumida, temos que na teoria quântica de campos,

- 1- Campos φ e Ψ passam a ser operadores
- 2 - Estes campos passam a ser medidos por pontos no espaço-tempo (x,t)
- 3 - Posição e tempo são apenas números que fixam um ponto no espaço-tempo relativístico
- 4 - Momentum continua sendo um operador quântico.

Também, na teoria quântica de campos, usa-se algumas ferramentas da mecânica clássica, como a Lagrangeana e o princípio da mínima ação.

$$L = T - V \quad (2.10)$$

$$S = \int L dt \quad (2.11)$$

Assim, de maneira análoga à da mecânica clássica é possível se deduzir as Equações de Euler-Lagrange para os campos,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \right) = 0 \quad (2.12)$$

2.3. *Relatividade especial*

Antes de seguir para os desenvolvimentos de fato das integrais de caminho para a mecânica quântica e para a teoria quântica de campos, importante neste ponto revisar alguns conceitos mais básicos da teoria da relatividade especial, da maneira que foi concebida por Einstein. É nessa “arena” que a teoria quântica de campos opera especialmente, pois seus domínios são das altas energias.

São amplamente conhecidos os dois postulados que levaram ao desenvolvimento da relatividade especial. São eles:

- As leis da física são as mesmas para todos os observadores em referenciais inerciais.
- A velocidade da luz c é constante.

Como em relatividade especial, tempo e espaço são caracterizados como um *evento*, isto é, algo que ocorre em um tempo particular em uma localização espacial (x, y, z) , a velocidade da luz c serve como um fator de conversão, transformando espaço em tempo e vice-versa. Daí a ideia unificadora de espaço-tempo, denotada pelas coordenadas (ct, x, y, z) .

Consequência direta e importante do segundo postulado é a “invariância do intervalo”. Em relatividade especial, medidas de distância no espaço e medidas de tempo são feitas juntas. Um exemplo singelo mas que ilustra bem esse aspecto pode ser imaginado da seguinte maneira: Imagine um *flash* de luz emitido a partir da origem do sistema de coordenadas no instante $t=0$. Algum tempo depois, denotado por t , a frente de onda esférica de luz pode ser descrita por

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.13)$$

ou ainda

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (2.14)$$

Como a velocidade da luz é invariante, esta mesma equação (2.14) deve estar correta para outro observador inercial que mede as coordenadas com respeito a seu referencial. Isto é,

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (2.15)$$

Desse modo é possível demonstrar a invariância do intervalo como

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (2.16)$$

No espaço comum tem-se a diferencial da distância a partir da origem até algum ponto (x, y, z) dada por

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.17)$$

De modo análogo, define-se o mesmo conceito para o espaço-tempo. Esse diferencial dá-se o nome de “intervalo”, dado por

$$ds^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.18)$$

A partir desta equação é possível notar que o intervalo é invariante. Como exemplo, considere-se dois observadores em referenciais inerciais distintos. Mesmo medindo diferentes coordenadas de espaço (x, y, z) e (x', y', z') e diferentes coordenadas de tempo t e t' para os mesmos eventos, o intervalo para cada observador é o mesmo, ou seja,

$$ds^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = cdt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = ds'^2 \quad (2.19)$$

Esta invariância do intervalo é consequência do segundo postulado da relatividade especial que afirma ser a velocidade da luz constante para todo observador em referenciais inerciais. Outro objeto matemático conveniente e facilitador nos cálculos de eventos relativísticos é conhecido como “métrica”. Em relatividade, a métrica pode ser usada para baixar e subir coeficientes dos diferenciais no intervalo, os quais neste caso são +1 ou -1. Na relatividade especial, no qual o espaço é considerado plano, a métrica é definida pela matriz

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Sua inversa, neste caso, é a mesma matriz, mas denotada por índices abaixo

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

De modo geral a métrica é denotada por $g_{\mu\nu}$ e assim será referenciada ao longo deste trabalho. É possível verificar com facilidade que

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho} \quad (2.22)$$

Onde δ_{μ}^{ρ} é a função delta de Kronecker, definida por

$$\delta_{\mu}^{\rho} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \rho \\ 0 & \text{se } \mu \neq \rho \end{cases} \quad (2.23)$$

Assim, a Equação (2.22) é dada por

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = I \quad (2.24)$$

sendo I a matriz identidade.

Também para a notação relativística é conveniente identificar as coordenadas por números, chamados de “índices”, de modo que $ct = x^0$ e $(x, y, z) \rightarrow (x^1, x^2, x^3)$. Desse modo, um evento no espaço-tempo é denotado pelas coordenadas do um vetor *contravariante*, dado por

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.25)$$

O termo *contravariante* refere-se ao modo com que o vetor se transforma sob uma transformação de Lorentz. Importante neste trabalho saber que vetores contravariantes tem índices acima. Já vetores covariantes possuem índices abaixo, como segue

$$x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (2.26)$$

Um índice pode ser “levantado” ou “abaixado” por meio da métrica, do seguinte modo

$$x_{\alpha} = g_{\alpha\beta}x^{\beta} \quad x^{\alpha} = g^{\alpha\beta}x_{\beta} \quad (2.27)$$

Considerando-se a métrica, definida pelas Eqs (2.20) e (2.21), é possível verificar que os componentes de um vetor covariante se relacionam com componentes de vetores contravariantes por uma mudança nos sinais como

$$x_0 = x^0 \quad x_1 = -x^1 \quad x_2 = -x^2 \quad x_3 = -x^3 \quad (2.28)$$

Outra notação importante é a convenção da somatória de Einstein, usada para representar somas. Quando um índice é repetido em uma expressão, uma vez em posição “abaixada”, outra em posição “levantada”, isso indica uma soma, isto é

$$x_\alpha x^\alpha \equiv \sum_{\alpha=0}^3 x_\alpha x^\alpha = x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 \quad (2.29)$$

2.4. Transformações de Lorentz

Frequentemente denotada por Λ a transformação de Lorentz permite transformações de coordenadas entre diferentes referenciais inerciais. Como exemplo, de maneira simplificada, considere-se um referencial inercial x'^μ movendo-se ao longo do eixo x com relação a outro referencial inercial x^μ com velocidade $v < c$. Define-se então:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.30)$$

Assim a transformação de Lorentz que relaciona os dois referenciais inerciais é dada em sua forma matricial por

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma/c & 0 & 0 \\ -\beta\gamma/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Ou ainda

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \frac{\beta}{c}x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \frac{\beta}{c}x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (2.32)$$

A forma compacta da transformação de Lorentz relacionando dois conjuntos de coordenadas pode ser escrita como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (2.33)$$

A mesma ideia de notação abreviada usada para as coordenadas de espaço-tempo pode ser estendida para as derivadas. Isto se faz conforme a definição

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^0} = \partial_0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^1} = \partial_1 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^2} = \partial_2 \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^3} = \partial_3$$

Novamente, é possível “levantar” um índice nas expressões das derivadas usando-se a métrica [Eq.(2.21)]

$$\partial^{\mu} = g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \quad (2.35)$$

Onde

$$\partial^0 = \partial_0 \quad \partial^i = -\partial_i \quad (2.36)$$

Ainda nas notações da relatividade especial, os vetores, por terem coordenadas de tempo e espaço são denominados quadri vetores. Um quadri vetor qualquer A^{μ} pode ser escrito como

$$\begin{aligned} A^{\mu} &= (A^0, A^1, A^2, A^3) \\ A_{\mu} &= (A_0, -A_1, -A_2, -A_3) \\ A^{\mu} &= (A^0, \vec{A}) \\ A_{\mu} &= (A_0, -\vec{A}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pode-se ainda definir as derivadas utilizando a notação relativística, bem como o operador D'Alembertiano.

Por exemplo, a derivada de um campo (função que depende do espaço e do tempo) as derivadas podem ser expressas da seguinte maneira

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} \varphi \quad (2.38)$$

Neste caso o índice aparece abaixo, pois da maneira com que está escrita esta derivada é um vetor covariante, cujas componentes são

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right) \quad (2.39)$$

Tem-se ainda o vetor contravariante, definido por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} = \partial^\mu \varphi \quad (2.40)$$

O operador D'Alembertiano é definido de maneira análoga ao Laplaciano, porém para o caso de vetores de quatro dimensões

$$\partial^\mu \partial_\mu \varphi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi \equiv \square \varphi \quad (2.41)$$

Em relatividade um quadrivetor que tem especial importância é o quadrivetor *energia-momentum*, que unifica essas duas quantidades em um único vetor. É dado por

$$p_\mu = (E, -\vec{p}) = (E, -p_1, -p_2, -p_3)$$

Logo

$$p^\mu = (E, \vec{p}) = (p_1, p_2, p_3) \quad (2.42)$$

Assim, o módulo do *quadrivetor energia-momentum* resulta na relação de Einstein para a energia, momentum e massa

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.43)$$

A partir dessa relação, considerando-se uma partícula com momentum nulo ($\vec{p} = 0$), tem-se a famosa equação de Einstein que relaciona energia e a massa de repouso [Eq.(2.5)]

$$E = mc^2$$

3. INTEGRAIS DE CAMINHO APLICADAS NA MECÂNICA QUÂNTICA

3.1. *Introdução*

Um cálculo comum feito em física de partículas é chamado de seção de choque de espalhamento de um processo, uma interação em particular. Um exemplo simples é a aproximação de dois elétrons, o espalhamento elétron-elétron ($e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$). Na mecânica quântica não relativística a descrição das interações e mudanças de estado pode ser feita a partir de descrições eficientes da evolução temporal das funções de onda das partículas envolvidas no processo. As integrais de caminho, em sua formulação para a mecânica quântica tem sido uma ótima ferramenta matemática na descrição de inúmeros processos de mudanças de estados. A partir de seu desenvolvimento, sob a orientação inspiradora de Feynman, deduz-se regras pictóricas simples para descrever as integrais de caminho. São as regras de Feynman, que facilitam sobretudo o cálculo de amplitudes de espalhamento em interações descritas pela teoria quântica de campos. Neste capítulo, a partir da dedução de integrais de caminho relativamente simples será possível ver a base das regras de Feynman e suas representações em diagramas, como o espalhamento elétron-elétron mostrado na Fig. (1.1). Neste capítulo em especial será mostrado como a mecânica quântica pode ser formulada a partir das integrais de caminho e como os processos de espalhamento podem ser entendidos a partir desses termos.

3.2. *Formulação das integrais de caminho para a mecânica quântica*

Ao longo de todo esse capítulo a constante de Planck $\hbar$ será mantida ao longo dos cálculos e deduções. Na mecânica quântica usual, parâmetros como as coordenadas generalizadas q e os momenta p são tratados como operadores matemáticos que obedecem às relações de comutação de Heisenberg, conforme visto brevemente no capítulo 2. A matemática envolvida com esses operadores pertence ao espaço de Hilbert. Por outro lado, de modo alternativo, a formulação por meio das integrais de caminho para a mecânica quântica tem como base o conceito de *propagador*, denotado por

$$K(q_f t_f; q_i t_i) \quad (3.1)$$

A ideia é do conceito de propagador é: dada uma função de onda $\psi(q_i t_i)$ em um dado instante inicial t_i , o propagador leva à função de onda correspondente em um instante posterior t_f , a partir da seguinte expressão

$$\psi(q_f t_f) = \int K(q_f t_f; q_i t_i) \psi(q_i t_i) dq_i \quad (3.2)$$

Considerando-se o caso unidimensional, por simplicidade, essa equação (3.2) expressa uma relação de causalidade. Importante mencionar que a função de onda $\psi(q_f t_f)$, fisicamente, representa a amplitude de probabilidade de se encontrar a partícula no ponto q_f no instante de tempo t_f . Desse modo o propagador $K(q_f t_f; q_i t_i)$ é a amplitude de probabilidade para uma transição de q_i no instante t_i para q_f no tempo t_f . Então, seguindo um princípio básico da mecânica quântica, a probabilidade de a partícula ser observada em q_f no instante t_f é dada por

$$P(q_f t_f; q_i t_i) = |K(q_f t_f; q_i t_i)|^2 \quad (3.3)$$

A partir da expressão (3.2) é possível dividir o intervalo de tempo entre t_i e t_f em dois intervalos, com o instante t como intermediário entre os dois instantes e q um ponto intermediário associado a t . Assim a Eq. (3.2) assume a seguinte forma

$$\psi(q_f t_f) = \int \int K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) \psi(q_i t_i) dq_i dq \quad (3.2)$$

Onde

$$K(q_f t_f; q_i t_i) = \int K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) \quad (3.3)$$

Então, a transição de um estado inicial (q_i, t_i) para um final (q_f, t_f) pode ser entendida como o resultado da transição de (q_i, t_i) para todos os pontos intermediários q possíveis até (q_f, t_f) . É possível desde já imaginar que possa ter infinitos pontos intermediários até o estado final, mas como será visto, será possível descartar muitos deles na descrição física das interações quânticas e de campo.

Um exemplo que ilustra bem o papel dos propagadores como probabilidades é o experimento da fenda dupla bombardeada com um feixe de elétrons, conforme ilustrado na Fig. 3.1. Seja $K(2A; 1)$ a amplitude de probabilidade do elétron passar da fonte 1 para a fenda 2A, e $K(3, 2A)$ a amplitude do elétron passar da fenda 2A para o anteparo 3, e assim por diante. Assim, a equação (3.3) para este caso é dada por

$$K(3; 1) = K(3; 2A)K(2A; 1) + K(3; 2B)K(2B; 1)$$

E a intensidade do padrão de interferência detectado no anteparo 3 é dada pela probabilidade

$$P(3; 1) = |K(3; 1)|^2$$

Importante notar que essa expressão irá conter os termos de interferência característicos da mecânica quântica. Note-se ainda que não é possível afirmar que o elétron passou ou pela fenda A ou pela fenda B – mais coerente pensar que o elétron viaja por ambas as fendas. Isso se não for detectado na fenda. Essa noção de “todos os possíveis caminhos” é essencial no formalismo das integrais de caminho.

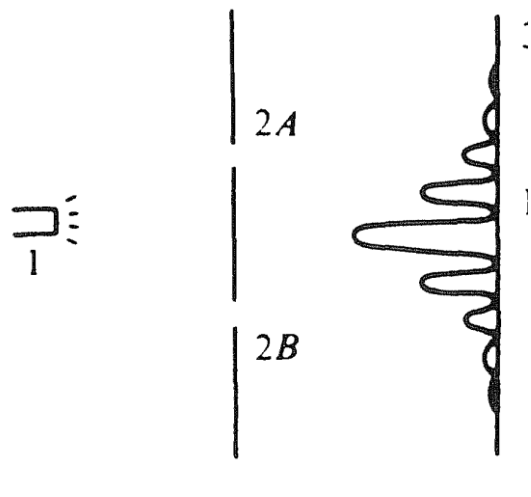


Figura 3.1 – O experimento da fenda dupla, onde 1 representa a fonte do feixe de elétrons, 2A e 2B são as fendas e 3 o anteparo com o padrão de interferência. (Ryder, 1996)

3.3.Representações de Schrödinger, Heisenberg, da interação e o propagador

Um dos objetivos neste ponto da teoria é demonstrar que o propagador pode ser expresso por $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$. Para isso, é importante resgatar o fato de que a mecânica quântica pode ser considerada a partir de três diferentes representações. As duas primeiras são a de Schrödinger e de Heisenberg, e a terceira a representação da interação. Desse modo usa-se o índice S para a representação de Schrödinger, H para a representação de Heisenberg e o índice I para a interação.

É possível estabelecer a representação da interação dividindo-se o Hamiltoniano em duas partes, uma do Hamiltoniano da partícula livre H_0 , independente do tempo, e a outra o Hamiltoniano de interação, dependente do tempo H_I .

Assim, tem-se

$$H = H_0 + H_I \quad (3.4)$$

Como exemplo, podemos denotar um estado qualquer e operadores na representação de Schrödinger com um índice S, assim um vetor de estado pode ser escrito como $|\alpha\rangle_S$ e um operador como A_S . Assim, nesta representação, os operadores são fixos e os estados evoluem no tempo de acordo com

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_S = H |\alpha(t)\rangle_S \quad (3.5)$$

onde H é o Hamiltoniano total dado pela Eq. (3.4).

Um vetor de estado na representação de interação $|\alpha(t)\rangle_I$ é relacionado a um vetor de estado na representação de Schrödinger via a ação da parte livre do Hamiltoniano H_0 .

$$|\alpha(t)\rangle_I = e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha(t)\rangle_S \quad (3.6)$$

Assim, para encontrar uma expressão para o propagador como sendo $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$, antes deve-se notar que uma função de onda pode ser representada por

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi t \rangle_S \quad (3.7)$$

Onde o vetor de estado $|\psi t\rangle_S$ na representação de Schrödinger é relacionado ao mesmo estado na representação de Heisenberg $|\psi\rangle_H$ por

$$|\psi t\rangle_S = e^{-iHt/\hbar} |\psi\rangle_H \quad (3.8)$$

Definindo-se o vetor

$$|qt\rangle = e^{iHt/\hbar} |q\rangle \quad (3.9)$$

o qual pode-se chamar de um “frame” do movimento. Tem-se então que

$$\psi(q, t) = \langle qt | \psi \rangle_H \quad (3.10)$$

Sabendo-se que a descrição de um conjunto completo de estados pode ser expressa de modo geral pela relação

$$\langle k | k' \rangle = \langle k | \mathbf{1} | k' \rangle$$

Onde

$$\mathbf{1} = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x| dx$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle k | k' \rangle &= \int \langle k | x \rangle \langle x | k' \rangle dx \\ &= \int e^{-ikx} e^{ik'x} dx \\ &= \int e^{-ix(k-k')} dx \\ &= \delta(k - k') \end{aligned}$$

Assim, a definição de completude de estados permite escrever

$$\langle q_f t_f | \psi \rangle = \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \langle q_i t_i | \psi \rangle dq_i \quad (3.11)$$

A qual, a partir da Eq. (3.9) torna-se

$$\psi(q_f t_f) = \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \psi(q_i t_i) dq_i \quad (3.12)$$

Comparando-se esta equação com a Eq. (3.2) vê-se que

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = K(q_f t_f; q_i t_i) \quad (3.13)$$

Como é possível constatar a partir da sua representação na forma de Dirac (Bras e Kets) o propagador resume em si a mecânica quântica do sistema. Na formulação mais usual, dada uma função de onda inicial, é possível encontrar uma função de onda final a partir da resolução da equação de Schrödinger em sua forma dependente do tempo.

Nesta nova formulação aqui apresentada, entretanto, o propagador dá a solução de modo mais simples e direto.

3.4. O propagador como uma integral de caminho

A partir da definição do propagador vista na seção anterior, é possível defini-lo como uma integral de caminho. O primeiro passo para isso é dividir o intervalo de tempo entre t_i e t_f em $(n + 1)$ pedaços iguais τ . Assim a Equação (3.3) torna-se

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle \quad (3.14)$$

e a integral é calculada em todas os “caminhos” possíveis. De modo mais preciso, não são caminhos num significado estrito. Cada segmento $(q_j t_j; q_{j-1} t_{j-1})$ pode ser subdividido em segmentos ainda menores, conhecidos como cadeias de Markov.

Tomando-se um desses pequenos segmentos podemos calcular seu propagador, como segue

$$\langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-1H\tau/\hbar} | q_j \rangle$$

Fazendo a expansão da exponencial em série de Taylor

$$\begin{aligned} &= \left\langle q_{j+1} \left| 1 - \frac{i}{\hbar} H\tau + O(\tau^2) \right| q_j \right\rangle \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle \end{aligned}$$

Usando-se a definição integral da função Delta de Dirac

$$\langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j) \right] - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle \quad (3.15)$$

O Hamiltoniano H é função dos operadores q (coordenadas generalizadas) e p (momentum). Quando, em um caso especial, tem-se H na forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (3.16)$$

o elemento de matriz (entre bra-ket) pode ser explicitamente calculado como segue, substituindo-se H pela Eq (3.16) (Pode-se desprezar o potencial $V(q)$ uma vez que este não depende dos momenta). Usando-se os conjuntos completos de estados de p e p'

$$\left\langle q_{j+1} \left| \frac{p^2}{2m} \right| q_j \right\rangle = \int dp' dp \langle q_{j+1} | p' \rangle \left\langle p' \left| \frac{p^2}{2m} \right| p \right\rangle \langle p | q_j \rangle$$

Substituindo-se $\langle q_{j+1} | p' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{ip'q_{j+1}}{\hbar}\right)$, tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle q_{j+1} \left| \frac{p^2}{2m} \right| q_j \right\rangle &= \int \frac{dp' dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p'q_{j+1} - pq_j)\right] \frac{p^2}{2m} \delta(p - p') \\ &= \int \frac{dp}{\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p'q_{j+1} - pq_j)\right] \frac{p^2}{2m} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Importante notar aqui que p^2 no lado esquerdo da equação é um operador, enquanto que no lado direito trata-se de um número. Desse modo, nota-se que a fórmula obtida no lado direito da Eq. (3.17) não contém operadores. Do mesmo modo para o potencial $V(q)$ é possível demonstrar de modo similar que

$$\langle q_{j+1} | V(q) | q_j \rangle = \int \frac{dp}{\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1} - q_j)\right] V(\bar{q}_j) \quad (3.18)$$

Neste caso $\bar{q}_j = \frac{1}{2}(q_j + q_{j-1})$ e $V(q)$ no lado esquerdo da equação é um operador, mas a integral obtida não contém nenhum operador. Desse modo, colocando as Equações (3.17) e (3.18) juntas, obtém-se

$$\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \int \frac{dp}{\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1} - q_j)\right] H(p, \bar{q}_j)$$

Então, levando este resultado na Eq.(3.15) tem-se

$$\langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle = \frac{1}{\hbar} \int dp_j \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p, \bar{q}_j)]\right\} \quad (3.19)$$

Onde p_j é o momentum entre os instantes t_j e t_{j+1} , ou de modo equivalente q_j e q_{j+1} . Assim, tem-se o propagador em um segmento de um possível caminho (entre o pequeno intervalo de tempo t_j e t_{j+1}).

O propagador ao longo de todos os caminhos possíveis pode ser obtido pela substituição da Eq. (3.19) na Eq.(3.14), considerando-se o limite ao contínuo, como segue

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{j=0}^n \frac{dp_j}{h} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n [p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p, \bar{q}_j)] \right\}$$

Logo, aplicando-se o limite (com $q_0 = q_i$, $q_{n+1} = q_f$), obtém-se

$$\blacksquare \quad \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{h} \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p, q)] \right] \quad (3.20)$$

onde $q(t_i) = q_i$ e $q(t_f) = q_f$.

A Equação (3.20) é uma “integral funcional”, isto é, uma integral sobre todas as funções. É ainda uma equação de infinitas dimensões, uma vez que é o funcional contém as coordenadas generalizadas e os momenta.

A Equação (3.20) acima é uma integral de caminho que descreve uma amplitude de transição de um estado inicial (q_i, t_i) para um estado final (q_f, t_f) . Cada função $q(t)$ e $p(t)$ define um caminho no espaço de fase.

Tem-se assim um novo modo de se descrever mudanças e interações quânticas. Na maneira tradicional da mecânica quântica, a solução de um problema como esse se dava pela solução da equação de Schrödinger

$$i\hbar \left(\frac{d|\psi\rangle}{dt} \right) = \hat{H}|\psi\rangle$$

Onde $\hat{H}$ é o operador Hamiltoniano, sujeito às condições de contorno. A vantagem das integrais de caminho é que se tem a partir delas uma expressão explícita para a amplitude de transição, a qual é importante para problemas envolvendo espalhamento de partículas a partir de interações. Outra vantagem da formulação de integrais de caminho é que as quantidades p e q são grandezas clássicas e não operadores.

Há outra maneira de representar a amplitude de transição, quando o Hamiltoniano H é da forma dada pela Eq. (3.16). Logo, considerando-se essa forma geral do Hamiltoniano a Equação (3.20) torna-se

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_1^n dq_j \prod_0^n \frac{dp_j}{h} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_0^n \left[p_j (q_{j+1} - q_j) - \frac{p_j^2}{2m} \tau - V(\bar{q}_j) \tau \right] \right\}$$

O que leva, a partir da integração sobre p_j (vide Apêndice A) tem-se

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i\hbar\tau} \right)^{(n+1)/2} \int \prod_0^n dq_j \exp \left\{ \frac{i\tau}{\hbar} \sum_0^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\tau} \right)^2 - V \right] \right\}$$

Logo, aplicando-se o limite

$$\blacksquare \quad \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \right] \quad (3.21)$$

onde $L = T - V$, é a Lagrangeana clássica e o integrando nesta equação (3.21) é a ação clássica.

$$S = \int L dt$$

Provou-se a equação (3.21) a partir dos postulados da mecânica quântica, assumindo a forma mais usual do Hamiltoniano, dada pela Eq. (3.16).

No método original adotado por Feynman para se chegar a uma funcional para as amplitudes de transição, usa-se a Equação (3.21) como uma hipótese e a partir dela obtém-se a equação de Schrödinger.

4. TEORIA DE PERTURBAÇÃO E A MATRIZ S

Partindo do princípio que a expressão da amplitude de transição não é calculável com exatidão, é possível recorrer à teoria de perturbação, válida quando o potencial $V(x)$ é pequeno, isto é, ele possui uma área de influência bem definida, ou ainda, quando a integral temporal de $V(x, t)$ é pequena comparada com a constante de Planck $\hbar$. Dessa forma é possível escrever a exponencial da integral de $V(x, t)$ na expressão da amplitude de transição como uma expansão em série de Taylor

$$\exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right] = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt - \frac{1}{2! \hbar^2} \left[\int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right]^2 + \dots$$

(4.1)

A ideia física principal por trás desta expansão é que seus termos de ordens superiores sejam cada vez menores, de modo que a amplitude de transição seja convergente. Cada termo da expansão, como se verá em breve é a descrição de uma interação em um espalhamento, por exemplo. Esta é a o que usualmente se chama de *expansão da perturbação*. Quando substituída na Eq. (3.21) do propagador $K(x_f t_f; x_i t_i)$ tem-se a expansão dada por

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + K_3 + \dots \quad (4.2)$$

4.1 A Série de Born

O primeiro termo na Eq.(4.2) é o propagador livre e é dado por

$$\begin{aligned} K_0 &= N \int \left[\exp \left(\frac{i}{\hbar} S \right) \right] \mathcal{D}x \\ &= N \int \left[\exp \left(\frac{i}{\hbar} \int \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \right] \mathcal{D}x \end{aligned} \quad (4.3)$$

Resolvendo-se a primeira integral (veja apêndice A), que é uma integral gaussiana, chega-se a

$$\int \left[\exp \left(\frac{i}{\hbar} \int \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \right] \mathcal{D}x = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{i\hbar\tau}{m} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{im}{2\hbar(n+1)\tau} (x_f - x_i)^2 \right],$$

Assim, fazendo-se $(n+1)\tau = t_f - t_i$, tem-se o propagador para a partícula livre

$$K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \left(\frac{m}{i\hbar(t_f - t_i)} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} (x_f - x_i)^2 \right] \quad (4.4)$$

Em se tratando de um propagador, é clara a condição de que $t_f > t_i$, por causalidade.

A partir das Eqs. (3.21) e (4.1) é possível calcular K_1 , como segue

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n+1)/2} \sum_{i=1}^n \tau \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] V(x_i, t_i) dx_1 \dots dx_n$$

Onde $N = m/i\hbar\tau$ e a integração sobre t foi substituída por uma soma discreta sobre t_i . Como o potencial V depende de x_i , é possível dividir em duas a somatória no expoente com uma delas indo de $j = 0$ a $j = i - 1$, e a outra de $j = i$ até $j = n$. Também é possível dividir a integração sobre x_i , como segue abaixo

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \tau \int dx_i \left\{ N^{\frac{n-i-1}{2}} \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] dx_{i+1} \dots dx_n \right\} \\ \times V(x_i, t_i) \left\{ N^{\frac{1}{2}} \int \exp \left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^{i-1} (x_{j+1} - x_j)^2 \right] dx_1 \dots dx_{i-1} \right\}$$

Nota-se na expressão acima que ambos os termos entre chaves são expressões do propagador da partícula livre com a divisão do intervalo de tempo de modo que

$$K_1(x_f t_f; x_i t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) dx \quad (4.5)$$

Nesse caso se $t > t_f$ o termo $K_0(x_f t_f; xt)$ desaparece bem como $K_0(xt; x_i t_i)$, se $t < t_i$. Assim a integração na Eq. (4.5) pode ser feita sobre todos os valores de t

$$K_1(x_f t_f; x_i t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) dx \quad (4.6)$$

Este é o termo de correção de primeira ordem para o propagador livre. De modo similar e análogo determina-se os termos de ordem superior [Ryder. P.163]

Assim, a expressão geral do propagador será dada por

$$K(x_f t_f; x_i t_i) \\ = K_0(x_f t_f; x_i t_i) - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f t_f; x_1 t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1 t_1; x_i t_i) dx_1 dt_1 \\ - \frac{i}{\hbar^2} \int K_0(x_f t_f; x_1 t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1 t_1; x_2 t_2) V(x_2, t_2) K_0(x_2 t_2; x_i t_i) dx_1 dx_2 dt_1 dt_2 + \dots \quad (4.7)$$

Onde K_0 descreve a propagação livre da função de onda de seu estado inicial $x_i t_i$ para um estado final $x_f t_f$; K_1 descreve a propagação com uma interação cujo potencial é dado por V ; K_2 descreve a propagação com duas interações e assim por diante. Solução da série de perturbação, a Eq (4.7) é uma série de Born, cujo significado físico pode ser visualizado de modo esquemático na figura 4.1 abaixo.

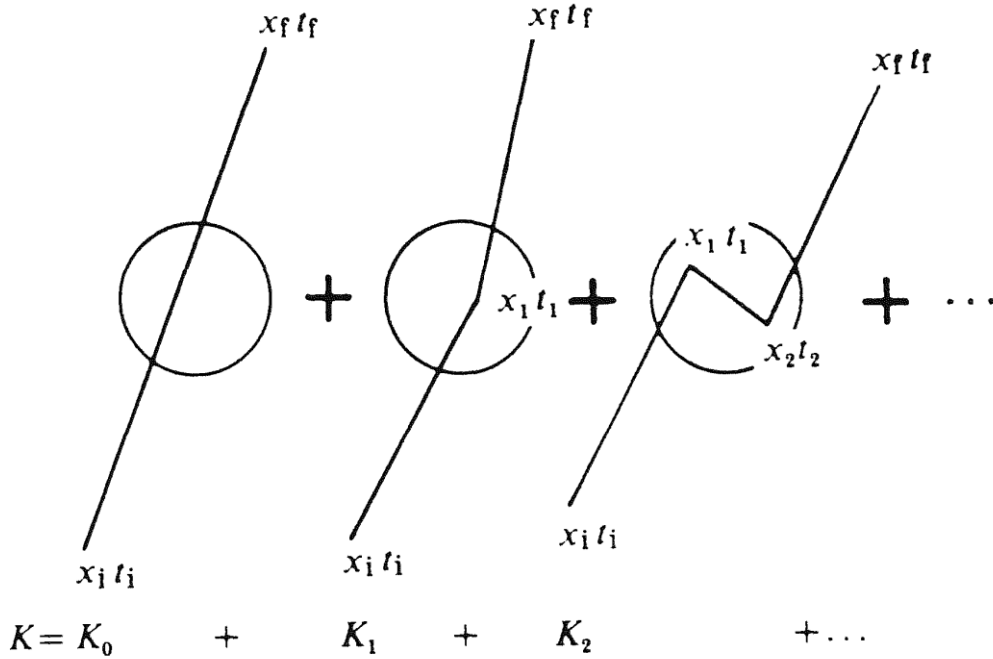


Figura 4.1 – A série de Born. Nos vértices entre os círculos estão representadas as interações. (Ryder, 1996)

4.2 A amplitude de espalhamento

Substituindo-se a Eq.(4.7) na Eq.(3.2), tem-se

$$\begin{aligned}
 \psi(x_f t_f) &= \int K(x_f t_f; x_i t_i) \psi(x_i t_i) dx_i \\
 &= \int K_0(x_f t_f; x_i t_i) \psi(x_i t_i) dx_i - \\
 &\quad \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f t_f; x t) V(x, t) K_0(x t; x_i t_i) \psi(x_i t_i) dt dx dx_i + \dots
 \end{aligned}$$

(4.8)

Com o estabelecimento de uma forma geral para o propagador a partir da teoria de perturbação, o problema de espalhamento de partículas descrito a partir da mecânica quântica ordinária (não-relativística) se torna simplificado. Desse modo, retornando-se ao problema de espalhamento, a condição inicial é que ψ é dada por uma onda plana:

$$\psi_{in} = \psi_{in}(x_i t_i) \quad (\text{onda plana})$$

Assume-se que $V \rightarrow 0$ para um tempo “negativo” muito grande ($t \rightarrow -\infty$). Desse modo o tempo inicial t_i está bem no passado, por assim se dizer.

Utilizando-se a primeira aproximação da série de Born dada pela Equação (4.8) tem-se

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x_f t_f) = & \int K_0(x_f t_f; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_i \\ & - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f t_f; x t) V(x, t) K_0(x t; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx dx_i dt \end{aligned} \quad (4.9)$$

O índice superior em $\psi^{(+)}(x_f t_f)$ indica uma onda livre em $t = -\infty$, e assim envolve o “propagador retardado” $K_0(x t; x' t')$ o qual desaparece para $t' > t$. De modo análogo seria aceitável escrever a solução $\psi^{(-)}(x_1 t_1)$ sendo esta uma onda que torna-se livre em $t = \infty$ (ψ_{out}), e um propagador “avançado” $K_0(x t; x' t')$ o qual desaparece quando $t' < t$. Desse modo temos a *amplitude de espalhamento*, dada por S, como a sobreposição das funções de onda.

De modo mais simples, uma amplitude de espalhamento escrita em termos das integrais de caminho seria a evolução da função de onda a partir de interações intermediárias que, somadas de modo contínuo resultam em um estado final dessa função de onda, como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
S &= \int \psi_{out}^*(x_f t_f) \psi^{(+)}(x_f t_f) dx_f \\
&= \int \psi_{out}^*(x_f t_f) K_0(x_f t_f; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_i \\
&\quad - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_f t_f) K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_f dx dx_i dt \\
&= \int \psi_{out}^*(x_f t_f) \phi(x_f t_f) dx_f \\
&\quad - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_f t_f) K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_f dx dx_i dt
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Onde $\phi(x_f t_f)$ é uma onda plana assim como $\psi_{in}(x_i t_i)$.

Sejam os momenta inicial e final dados respectivamente por $p_i = \hbar k_i$ e $p_f = \hbar k_f$, temos para a normalização da partícula em uma caixa:

$$\begin{aligned}
\psi_{in}(xt) &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \cdot \vec{x} - E_i t)} \\
\psi_{out}(xt) &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f \cdot \vec{x} - E_f t)}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Onde $E = p^2/2m$ e τ é o volume da caixa

Substituindo (4.11) no primeiro termo da Eq.(4.10) usando a definição

$$\int e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} d\vec{x} = (2\pi)^3 \delta(\vec{q})$$

e, por simplicidade, $\tau = (2\pi)^3$, tem-se

$$S_{fi} = \delta(\vec{K}_i - \vec{K}_f) - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_f t_f) K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_f dx dx_i dt \tag{4.12}$$

Logo, por definição, a amplitude de espalhamento é vista então como sendo um elemento de uma matriz S da qual o elemento (fi) é dado acima pela Eq. (4.12).

O primeiro termo corresponde à não interação de modo que a função delta de Dirac ali expressa representa a conservação do momentum e assim a uma matriz unidade. O segundo termo que representa interações provocadas por um potencial, e a amplitude de um estado “out” particular resultante de um estado “in” em particular é dado por

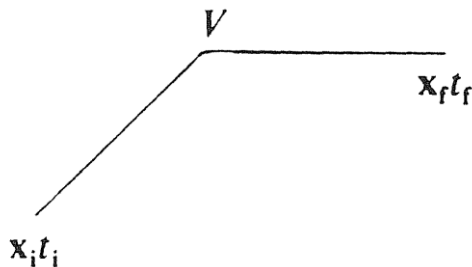
$$A = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_f t_f) K_0(x_f t_f; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_f dx dx_i dt \quad (4.13)$$

Temos, finalmente, uma expressão para a amplitude de espalhamento em termos do propagador livre K_0 e um potencial V que provoca a interação.

4.3 As regras de Feynman

Na jornada teórica em busca de descrever interações entre partículas quânticas (funções de onda) a partir da descrição integrais de caminho, chega-se de modo relativamente simples a uma expressão geral, dada pela Eq. (4.13). Esta equação pode ser traduzida de maneira pictórica em um conjunto de regras simples para a amplitude de espalhamento. Essas regras são as conhecidas *regras de Feynman*.

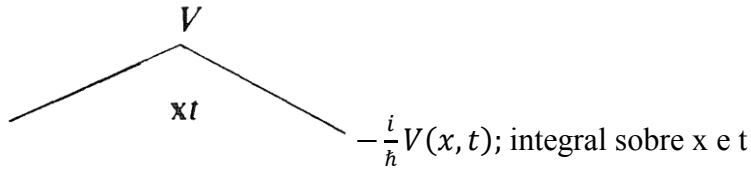
A amplitude de espalhamento dada pela Eq.(4.13) é, como se pode notar, uma aproximação de primeira ordem. Podemos representá-la pelo diagrama



(4.14)

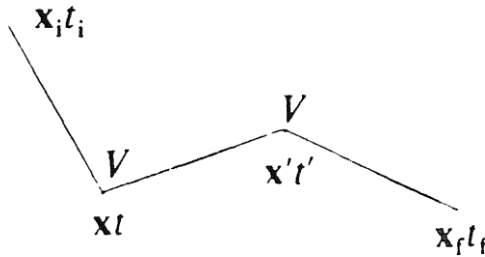
E a regra para se encontrar a correspondência entre o diagrama acima e os termos da expressão para a amplitude de espalhamento são definidas por

$$\begin{array}{c}
 \text{-----} \\
 \mathbf{x}_1 t_1 \qquad \mathbf{x}_2 t_2 \qquad K_0(x_2 t_2; x_1 t_1)
 \end{array}
 \quad (4.15)$$



Para completar, multiplica-se por ψ_{in} e ψ_{out}^* nos extremos do diagrama e integra-se sobre as duas relevantes variáveis espaciais.

Assim, por construção, a amplitude para um processo de interação de segunda ordem pode ser representado por



$$\begin{aligned}
 A^{(2)} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 &= \\
 &= \int \psi_{out}^*(x_f t_f) K_0(x_f t_f; x' t') V'(x', t') K_0(x' t'; xt) V(x, t) K_0(xt; x_i t_i) \psi_{in}(x_i t_i) dx_i dx dt dx' dt' dx_f
 \end{aligned}
 \quad (4.16)$$

As regras mostradas em (4.15) são chamadas de regras de Feynman. Na mecânica quântica não-relativística essas regras raramente são necessárias para se fazer os cálculos das amplitudes de espalhamento. Porém, na teoria quântica de campos, a qual será apresentada introdutoriamente nos capítulos seguintes, as regras de Feynman são grandes facilitadores para se fazer os cálculos de amplitudes e suas interações.

Nota-se que as regras estabelecidas em (4.15) estão escritas no espaço das coordenadas. Porém em muitos cálculos usa-se trabalhar no espaço dos momenta. Assim é possível expressar as regras de Feynman no espaço dos momenta, como segue abaixo. Seja $\mathcal{K}_0(p_1 t_1; p_0 t_0)$ a amplitude com que uma partícula com momentum p_0 no instante t_0 é observada num instante posterior como tendo momentum p_1 no instante t_1 . Sua expressão pode ser dada por:

$$\mathcal{K}_0(p_1 t_1; p_0 t_0) = \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_1 \cdot x_1\right) K_0(x_1 t_1; x_0 t_0) \left(\frac{i}{\hbar} p_0 \cdot x_0\right) dx_0 dx_1 \quad (4.17)$$

Pode-se entender, a partir da consideração de que x é vetorial no espaço tridimensional, que o propagador livre dado por $K_0(x_1 t_1; x_0 t_0)$ é uma generalização tridimensional do propagador livre dado pela Eq. (4.4), como segue

$$K_0(x_1 t_1; x_0 t_0) = \theta(t_1 - t_0) \left(\frac{m}{i\hbar(t_1 - t_0)}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar(t_1 - t_0)}(x_0 - x_1)^2\right] \quad (4.18)$$

Substituindo-se esta expressão na Eq. (4.17), $\mathcal{K}_0$ então será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(p_1 t_1; p_0 t_0) = & \theta(t_1 - t_0) \left(\frac{m}{i\hbar(t_1 - t_0)}\right)^{\frac{3}{2}} \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_0 \cdot x_0 - p_1 \cdot x_1)\right] \\ & \times \exp\left[\frac{im}{2\hbar(t_1 - t_0)}(x_0 - x_1)^2\right] dx_0 dx_1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por meio das seguintes substituições de variáveis

$$x = x_0 - x_1, \quad X = x_0 + x_1, \quad p = p_0 - p_1, \quad P = p_0 + p_1$$

(considerando-se sempre que x e p são vetores em três dimensões)

Logo, após aplicar as propriedades e métodos de resolução de integral gaussiana conforme exposto em Ryder (p.168), chega-se à equação

$$\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1; \vec{p}_0 t_0) = (2\pi)^3 \theta(t_1 - t_0) \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1) \exp \left[\frac{i \vec{p}_0^2 (t_1 - t_0)}{2m\hbar} \right] \quad (4.20)$$

Importante notar que a função delta de Dirac nesta equação implica que $\vec{p}_0 - \vec{p}_1$, e então só há propagação quando o momentum é conservado.

Este propagador, conforme dito acima dá a amplitude para se observar uma partícula com momentum p_1 num instante t_1 , se esta partícula foi observada anteriormente com um momentum p_0 num instante t_0 .

A transformada de Fourier da Eq. (4.20) é, obviamente, dada por $K_0(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_0 t_0)$ resultando assim na inversa da Eq.(4.17), a qual será dada por

$$K_0(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_0 t_0) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \exp \left(\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1 \right) \mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1; \vec{p}_0 t_0) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_0 \cdot \vec{x}_0 \right) d\vec{p}_1 d\vec{p}_0 \quad (4.21)$$

Substituindo-se a Eq. (4.20), obtém-se

$$K_0(\vec{x}_1 t_1; \vec{x}_0 t_0) = \theta(t_1 - t_0) \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\vec{q} \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_1) - \frac{\vec{q}^2}{2m} (t_1 - t_0)] \right\} d\vec{q} \quad (4.22)$$

Por fim, esta expressão será utilizada no cálculo do espalhamento de Coulomb na próxima seção, a título de exemplificar uma aplicação direta sobre o problema clássico a partir das formulação das integrais de linha para a mecânica quântica não-relativística.

Posteriormente, para casos quântico-relativísticos será necessária a expressão dada por uma transformada de Fourier a partir de uma dependência do tempo, pois no caso relativístico tempo e espaço são tratados de modo simétrico. (Ryder, p.168-169).

O propagador requerido para os exemplos de partículas quânticas relativísticas é dado por

$$k_0(\vec{p}_1 E_1; \vec{p}_0 E_0) = (2\pi\hbar)^4 \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1) \delta(E_0 - E_1) \frac{i\hbar}{E_1 - \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + i\epsilon} \quad (4.23)$$

Neste caso, as duas funções delta de Dirac mostram que este propagador produz conservação da energia bem como conservação do momentum. A quantidade ε no denominador da Eq. (4.23) trata-se de um valor muito pequeno em relação aos outros termos o qual no final tenderá a zero (apenas inserido para se garantir a convergência da integrais de caminho)

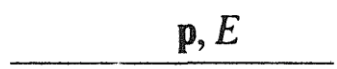
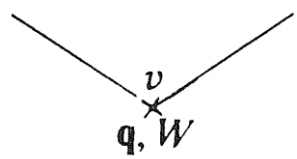
Informação relevante a se mencionar é que essa energia E não se trata necessariamente da expressão $p^2/2m$ conforme descrito pela mecânica quântica. E e p são variáveis independentes.

Há ainda uma expressão da transformada de Fourier para o potencial $V(\vec{x}, t)$ dada por

$$V(\vec{x}, t) = \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{q} \cdot \vec{x} - Wt) \right] v(\vec{q}, W) d\vec{q} dW \quad (4.24)$$

cuja demonstração foi suprimida sem prejuízo dos objetivos a serem alcançados.

Desse modo, a amplitude dada pela Eq.(4.13) em sua forma geral pode ser expressa em termos de k_0 e v e representada pelas regras de Feynman, dessa vez pelos diagramas no espaço dos *momenta*, como segue nas figuras abaixo

	$\frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i\hbar}{E - \frac{p^2}{2m} + i\varepsilon},$
	$\frac{-i}{\hbar} (2\pi\hbar)^4 v(\mathbf{q}, W).$ Com conservação de energia e momentum.

Estas são as regras de Feynman no espaço do momentum. Além destes termos acima, a expressão completa da amplitude de espalhamento A contém ψ_{out}^* e ψ_{in} e a integração sobre todas as variáveis relevantes.

4.4 O espalhamento de Coulomb

Como exemplo de aplicação prática da teoria desenvolvida acima, um problema que ilustra de modo simples o uso das integrais de caminho, que servem como base para as regras de Feynman, é o espalhamento de partículas carregadas (sem spin) sujeitas a um potencial de Coulomb. É também chamado de espalhamento de Rutherford.

A forma geral da amplitude de espalhamento na primeira aproximação para a série de Born é dada pela equação (4.13)

$$A = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_1 t_1) K_0(x_1 t_1; x t) V(x, t) K_0(x t; x_0 t_0) \psi_{in}(x_0 t_0) dx_1 dx dx_0 dt$$

Onde $V(x, t)$ é o potencial de Coulomb. Substituindo nesta equação a expressão do propagador K_0 encontrado na Eq. (4.21) bem como as Eqs.(4.11) para ψ_{out}^* e ψ_{in}

$$\begin{aligned} A = & -\frac{i}{\hbar \tau} \frac{1}{(2\pi)^6} \int \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(\vec{p}_f \cdot \vec{x}_1 - \frac{p_f^2}{2m} t_1 \right) \right] \\ & X \theta(t_1 - t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\vec{q} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}) - \frac{q^2}{2m} (t_1 - t)] \right\} \\ & X V(\vec{x}, t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\vec{q}' \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) - \frac{q'^2}{2m} (t - t_0)] \right\} \theta(t - t_0) \\ & X \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(\vec{p}_i \cdot \vec{x}_0 - \frac{p_i^2}{2m} t_0 \right) \right] d\vec{x}_1 d\vec{x} d\vec{x}_0 dt d\vec{q} d\vec{q}' \end{aligned}$$

Como já visto na seção anterior, as integrações sobre $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_0$ resultam nas funções delta de Dirac $(2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{p}_f - \vec{q})$ e $(2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{q}' - \vec{p}_i)$. A integração sobre $\vec{q}$ e $\vec{q}'$ eliminam os termos t_1 e t_0 . Por fim fazendo os limites como $t_0 \rightarrow \infty$ e $t_1 \rightarrow \infty$ para eliminar as funções θ , tem-se ao final

$$A = \frac{-i}{\hbar \tau} \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \cdot \vec{x} - (E_i - E_f) t] \right\} V(\vec{x}, t) d\vec{x} dt$$

Onde $E_{i,f} = \frac{p_{i,f}^2}{2m}$

E o potencial de Coulomb é dado por $V = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

Substituindo esta expressão de V e integrando sobre o tempo, tem-se

$$A = \frac{-i}{\hbar\tau} 2\pi \delta\left(\frac{E_i - E_f}{\hbar}\right) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \exp \frac{i}{\hbar} [(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \cdot \vec{x}] \frac{1}{r} d\vec{x}$$

Como esta última integral não converge no infinito, então um fator e^{-ar} pode ser introduzido, e assim, fazendo-se $a \rightarrow 0$, o valor da integral será $4\pi\hbar^2/q^2$, com $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$, então obtém-se a amplitude de espalhamento

$$A = \frac{-i}{\hbar\tau} 2\pi \frac{Ze^2\hbar^2}{\epsilon_0 q^2} \delta\left(\frac{E_i - E_f}{\hbar}\right) \quad (4.25)$$

A partir desta amplitude de espalhamento é possível calcular a seção de choque de espalhamento σ .

Sabendo que $|A|^2$ é a probabilidade da partícula surgir com momentum p_f e assumindo uma normalização de caixa de volume τ , tem-se que

$$|A|^2 \frac{\tau d\vec{p}_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

fornece a probabilidade da partícula emergir com momentum entre $\vec{p}_f$ e $\vec{p}_f + d\vec{p}_f$.

Se a interação dura um tempo um tempo efetivo T , então

$$\frac{|A|^2}{T} \tau \frac{d\vec{p}_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

expressa o número de partículas por segundo emergindo nesse intervalo de momentum citado acima. Para se obter a seção de choque, divide-se esta expressão pelo fluxo incidente de partículas e integra-se sobre $\vec{p}_f$.

Considerando-se que as partículas incidentes viajam com velocidade p_i/m e há $1/\tau$ delas por unidade de volume. Desse modo, o fluxo é dado por $p_i/\tau m$ partículas por segundo por unidade de área. Então, a seção de choque é dada por

$$\sigma = \int \frac{|A|^2}{T} \frac{\tau m}{p_i} \frac{\tau d\vec{p}_f}{(2\pi\hbar)^3} \quad (4.26)$$

Como $|A|^2$ envolve o termo $\left| \delta\left(\frac{E_i - E_f}{\hbar}\right) \right|^2$, é possível apelar para a própria definição da função $\delta(x)$, como segue

$$\begin{aligned} \left| \delta\left(\frac{E_i - E_f}{\hbar}\right) \right|^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left[\frac{i(E_i - E_f)t}{\hbar}\right] dt \right|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin\left[\frac{(E_i - E_f)T}{2\hbar}\right]}{\frac{\pi(E_i - E_f)}{\hbar}} \right|^2 \\ &= \frac{T}{2\pi} \delta\left(\frac{E_i - E_f}{\hbar}\right) \\ &= \frac{T\hbar}{2\pi} \delta(E_i - E_f) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Onde se usou a fórmula $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha x^2} \right) = \pi \delta(x)$. Assim, combinando-se as Eqs. (4.25) e (4.27), obtém-se a expressão da Eq. (4.26), como

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{mZ^2 e^4}{4\pi^2 \varepsilon_0^2} \int \frac{1}{p_i} \frac{1}{q^4} \delta(E_f - E_i) d^3 p_f \\ &= \frac{mZ^2 e^4}{4\pi^2 \varepsilon_0^2} \int \frac{1}{p_i} \frac{1}{q^4} p_f^2 dp_f \delta(E_f - E_i) d\Omega \end{aligned}$$

Mas, como $E = p^2/2m$ tem-se na expressão acima que $p_i = (2mE_i)^{1/2}$ e $p_f^2 dp_f = (2mE_i)^{1/2} dE_f$. Assim, fazendo-se estas substituições e integrando sobre E_f , obtém-se

$$\sigma = \frac{mZ^2 e^4}{4\pi^2 \varepsilon_0^2} \int \frac{1}{q^4} d\Omega$$

Pois devido à função delta de Dirac, $p_i = p_f = p$. Logo, $q^2 = 4p^2 \sin^2(\theta/2)$, com θ sendo o ângulo entre p_i e p_f . Enfim, colocando-se $p = mv$, obtém-se a expressão final para a seção de choque diferencial de espalhamento

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \left(\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (4.28)$$

que é a conhecida fórmula de Rutherford.

5. INTEGRAIS DE CAMINHO NA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

Com base nos tópicos apresentados nos itens constantes do capítulo 2 deste trabalho a respeito do desenvolvimento de uma teoria quântica de campos bem como sobre as integrais gaussianas, que estão no Apêndice A, é possível mostrar de modo bem introdutório de que modo as integrais de caminho são úteis na chamada segunda quantização. O formalismo apresentado nos itens precedentes também servirá de modo análogo no cálculo de amplitudes para uma descrição relativístico-quântica das interações. O que se segue, como citado trata-se de algo introdutório cujo aprofundamento pode ser estudado na bibliografia utilizada para este trabalho.

5.1. Integrais de caminho de forma simplificada

Tendo-se em mente como calcular algumas integrais Gaussianas (ver Apêndice A) , é possível enxergar as integrais de caminho de uma maneira mais simplificada que a desenvolvida nos tópicos anteriores tendo como base a formulação da mecânica quântica. Basicamente, como visto anteriormente, o “truque” básico é reduzir o problema a uma soma de Riemann.

Como foi visto, uma integral de caminho é um meio de se calcular a amplitude para um sistema que se inicia em um estado inicial $|i\rangle$ para um estado final $|f\rangle$ por meio da adição de amplitudes para o sistema passando através de todos os caminhos possíveis de $|i\rangle$ para $|f\rangle$.

Como exemplo simplificado, a integral de caminho pode ser construída considerando-se a amplitude para uma partícula passar de um ponto X_0 a um ponto X_N . Se a dinâmica de um sistema é descrita pelo operador Hamiltoniano $\hat{H}$, então a amplitude em questão é dada por

$$\langle X_N | e^{-i\hat{H}t} | X_0 \rangle \quad (5.1)$$

Considerando-se o mais simples dos casos, o da partícula livre, onde o operador Hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (5.2)$$

Para se escrever a amplitude descrita pela Eq. (5.1) é possível considerar todos os caminhos possíveis que levam de X_0 até X_N . De início, é possível dividir o caminho em pedaços menores e então utilizar uma limitação nessa divisão. Pode-se então começar por dividir o intervalo de tempo em N intervalos Δt igualmente espaçados. Assim

$$\Delta t = \frac{t}{N} \quad (5.3)$$

Então

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{H}t} &= e^{-i\hat{H}(N\Delta t)} \\ &= e^{-i\hat{H}(\Delta t + \Delta t + \dots + \Delta t)} = e^{-i\hat{H}\Delta t} e^{-i\hat{H}\Delta t} e^{-i\hat{H}\Delta t} \dots e^{-i\hat{H}\Delta t} \end{aligned}$$

Logo, a amplitude pode se reescrita como

$$\langle X_N | e^{-i\hat{H}t} | X_0 \rangle = \langle X_N | e^{-i\hat{H}\Delta t} e^{-i\hat{H}\Delta t} e^{-i\hat{H}\Delta t} \dots e^{-i\hat{H}\Delta t} | X_0 \rangle \quad (5.4)$$

Da mecânica quântica tem-se que os auto estados de posição formam um conjunto completo de estados, isto é

$$\int dx |x\rangle\langle x| = I \quad (5.5)$$

Assim pode-se quebrar o intervalo em N partes e cada pequena parte será um conjunto completo de estados definidos como

$$\int dx_j |x_j\rangle\langle x_j| = I$$

Colocando-se este resultado entre os fatores exponenciais na expressão da amplitude tem-se

$$\begin{aligned} \langle X_N | e^{-i\hat{H}t} | X_0 \rangle &= \langle X_N | e^{-i\hat{H}\Delta t} I e^{-i\hat{H}\Delta t} I e^{-i\hat{H}\Delta t} I \dots I e^{-i\hat{H}\Delta t} | X_0 \rangle \\ &= \\ \langle X_N | e^{-i\hat{H}\Delta t} \int dx_{N-1} |x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}| e^{-i\hat{H}\Delta t} \int dx_{N-2} |x_{N-2}\rangle\langle x_{N-2}| e^{-i\hat{H}\Delta t} \dots \int dx_1 |x_1\rangle\langle x_1| e^{-i\hat{H}\Delta t} | X_0 \rangle \end{aligned}$$

Esta expressão, portanto pode ser escrita de forma mais compacta por meio de um produtório

$$\begin{aligned} \langle X_N | e^{-i\hat{H}t} | X_0 \rangle &= \prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j \langle X_N | e^{-i\hat{H}\Delta t} | X_{N-1} \rangle \langle X_{N-1} | e^{-i\hat{H}\Delta t} | X_{N-2} \rangle \langle X_{N-2} | e^{-i\hat{H}\Delta t} \dots | X_1 \rangle \langle X_1 | e^{-i\hat{H}\Delta t} | X_0 \rangle \end{aligned} \quad (5.6)$$

Como é possível ver na Eq. (5.6) é possível calcular cada termo individual dessa expressão por meio de integrais Gaussianas. Mas para estes cálculos haverá algumas complicações adicionais. Assim, para se chegar ao objetivo vale lembrar que os auto estados de momentum também formam um conjunto completo dado por

$$\frac{1}{2\pi} \int dp |p\rangle\langle p| = I \quad (5.7)$$

Também, os produtos escalares

$$\begin{aligned} \langle x | p \rangle &= e^{ipx} \\ \langle p | x \rangle &= e^{-ipx} \end{aligned} \quad (5.8)$$

E, que para uma partícula livre

$$\begin{aligned}\hat{H}|p\rangle &= \frac{\hat{p}^2}{2m}|p\rangle = \frac{p^2}{2m}|p\rangle \\ \Rightarrow e^{-i\hat{H}\Delta t}|p\rangle &= e^{-i(p^2/2m)\Delta t}|p\rangle\end{aligned}\tag{5.9}$$

Expressões como $\langle x_j|e^{-i\hat{H}\Delta t}|x_{j-1}\rangle$ podem ser escritas de modo a serem prontamente integráveis. Tem-se então

$$\begin{aligned}\langle x_j|e^{-i\hat{H}\Delta t}|x_{j-1}\rangle &= \left\langle x_j \left| e^{-i\hat{H}\Delta t} \left(\frac{1}{2\pi} \int dp |p\rangle \langle p| \right) \right| x_{j-1} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle x_j | \int dp (e^{-i\hat{H}\Delta t} |p\rangle) \langle p | x_{j-1} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle x_j | \int dp (e^{-i\hat{H}\Delta t} |p\rangle) e^{-ipx_{j-1}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle x_j | \int dp (e^{-ip^2/2m\Delta t} |p\rangle) e^{-ipx_{j-1}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp (e^{-ip^2/2m\Delta t} \langle x_j | p \rangle) e^{-ipx_{j-1}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-ip^2/2m\Delta t} e^{ip(x_j - x_{j-1})}\end{aligned}\tag{5.10}$$

Que é uma integral Gaussiana cuja forma geral é dada por (ver Apêndice A)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = e^{b^2/2a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

Onde, na Eq. (5.10), chama-se

$$a = \frac{i}{m} \Delta t \quad \text{e} \quad J = x_j - x_{j-1}$$

Então

$$\begin{aligned}\langle x_j|e^{-i\hat{H}\Delta t}|x_{j-1}\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-ip^2/2m\Delta t} e^{ip(x_j - x_{j-1})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-i \frac{2\pi m}{\Delta t} \right)^{1/2} e^{i(x_j - x_{j-1})^2 m/2\Delta t}\end{aligned}\tag{5.11}$$

Usando-se esta expressão para cada termo no produtório original leva a uma expressão compacta como segue:

$$\langle x_N | e^{-i\hat{H}\Delta t} | x_0 \rangle = \left(-i \frac{m}{2\pi\Delta t} \right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N-1} dx_j e^{\sum_{j=0}^{N-1} im/2\Delta t [(x_j - x_{j-1})/\Delta t]^2} \quad (5.12)$$

Tomando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$, o termo $(x_j - x_{j-1})/\Delta t$ torna-se uma derivada

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (5.13)$$

E a somatória na exponencial torna-se uma integral $(\sum_{j=0}^{N-1} \rightarrow \int_0^t dt')$. Assim a Equação (5.12) pode ser escrita como

$$\langle x_N | e^{-i\hat{H}\Delta t} | x_0 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-i \frac{m}{2\pi\Delta t} \right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N-1} dx_j e^{(i \int_0^t dt' \frac{m}{2} \dot{x}^2)} \quad (5.14)$$

Logo, a medida da integral de caminho

$$\mathcal{D}x = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j \left(-i \frac{m}{2\pi\Delta t} \right)^{N/2} \quad (5.15)$$

Onde $\Delta t = \frac{t}{N}$ (intervalo)

Com a substituição da Eq. (5.15) na Eq. (5.14), a expressão da integral de caminho torna-se mais compacta e elegante

$$\langle x_N | e^{-i\hat{H}\Delta t} | x_0 \rangle = \int \mathcal{D}x e^{(i \int_0^t dt' \frac{m}{2} \dot{x}^2)} \quad (5.16)$$

Importante notar que o expoente da função exponencial é justamente a expressão da ação S , da mecânica clássica, a qual em sua forma geral é dada por

$$S = \int L dt$$

Assim, para este caso simples, visto de maneira mais formal no capítulo 4, constata-se que a amplitude de uma partícula livre a tomar os caminhos possíveis que levam de um estado x_0 para outro estado x_N é proporcional à exponencial da ação clássica S .

Como é possível se ver, neste exemplo simples, considerou-se uma partícula livre, onde a Lagrangeana L é dada apenas pela expressão da energia cinética

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Ainda que simples, o resultado amarra a teoria quântica à mecânica clássica. De modo geral, pode-se então escrever a expressão da amplitude de um sistema com Lagrangeana L como

$$\langle F | e^{-i\hat{H}t} | I \rangle = \int \mathcal{D}x e^{i \int_0^t dt' L(q, \dot{q})} \quad (5.17)$$

Onde $|I\rangle$ e $|F\rangle$ são estados inicial e final do sistema e q e $\dot{q}$ são as coordenadas generalizadas.

5.2. *Integrais de caminho na teoria quântica de campos – a energia do vácuo*

Na teoria quântica de campos, as integrais de caminho são amplamente utilizadas para o cálculo de amplitudes de transição de um estado a outro de campos estabelecidos quanticamente por meio das equações de Klein-Gordon e ou de Dirac, conforme comentado sucintamente no capítulo 2, e especialmente na seção 2.3 deste trabalho.

Como forma de exemplificar em modo introdutório, as integrais de caminho podem ser usadas para se calcular a amplitude de transição de um estado $\varphi_1(t_1)$ para um estado $\varphi_2(t_2)$

$$\begin{aligned}\langle \varphi_2(t_2) | \varphi_1(t_1) \rangle &= \langle \varphi_1 | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)} | \varphi_2 \rangle \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathcal{D}\varphi \exp(i \int L d^4x)\end{aligned}$$

Se, por exemplo, considerar-se $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ como o estado fundamental do campo (vácuo), pode-se facilmente calcular a energia do vácuo utilizando-se o método das integrais de caminho. Quando uma fonte externa $J(x)$ está presente, a integral de caminho torna-se

$$\langle \varphi_2(t_2) | \varphi_1(t_1) \rangle = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathcal{D}\varphi \exp\left(i \int [L + \varphi(x)J(x)] d^4x\right)$$

E a amplitude de transição vácuo-vácuo é definida como

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \langle 0|0 \rangle_J = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathcal{D}\varphi \exp\left(\int d^4x [L + \varphi(x)J(x)]\right)$$

Lembrando que $|0\rangle$ representa o campo em seu estado fundamental, isto é, o vácuo. Estes resultados, consolidados a partir da Teoria Quântica de campos podem ser estudados com maior detalhamento a partir da bibliografia utilizada neste trabalho.

6. AS REGRAS DE FEYNMAN NA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

6.1. A matriz S e as amplitudes

A intrincada matemática que envolve a teoria quântica de campos é simplificada a partir de uma série de operações que se traduzem de forma pictórica, chamadas diagramas de Feynman, seguindo as mesmas regras obtidas para a mecânica quântica não-relativística, como visto nos capítulos anteriores.

Na teoria quântica, como visto aqui, é possível fazer previsões experimentais através dos cálculos das amplitudes de probabilidade de um determinado processo ocorrer. Isso continua sendo verdadeiro quando aplicado à teoria quântica de campos, para as interações entre partículas, como espalhamentos e decaimentos. A principal ferramenta matemática a ser utilizada é a matriz S , cuja descrição formal e definição foram mostradas no capítulo 4. Também como já foi visto, qualquer processo físico pode ser entendido como uma transição de um estado inicial $|i\rangle = |\alpha(t_0)\rangle$ para um estado final de saída $|f\rangle = |\alpha(t)\rangle$, ou seja

$$|i\rangle \rightarrow |f\rangle$$

Essa transição ocorre a partir da ação de um operador unitário, a matriz S (inicial de Scattering, espalhamento em inglês), do seguinte modo

$$|f\rangle = S|i\rangle$$

Como S é um operador unitário, então

$$S^\dagger S = S S^\dagger = I$$

Onde I é a matriz identidade.

Da mecânica quântica não relativística, é conhecido que a evolução temporal dos estados é descrita a partir da ação de um operador unitário $U(t, t_0)$. Então a amplitude para evoluir de um estado $|\alpha_I(t_0)\rangle$ no tempo inicial t_0 para um estado final $|\alpha_F(t)\rangle$ em um instante posterior t pode ser escrito na notação de Dirac como

$$\langle \alpha_F(t) | U(t, t_0) | \alpha_I(t_0) \rangle \quad (6.1)$$

Assim considera-se que os estados inicial e final envolvem partículas livres (não estão sob a ação de nenhum potencial) as quais provém de $t = -\infty$ e então se movem para fora como diferentes estados de partículas livres em $t = +\infty$. Um elemento da matriz S é encontrado ao se aplicar esses limites na Eq.(6.1)

$$S_{fi} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \langle \alpha_F(t) | U(t, t_0) | \alpha_I(t_0) \rangle \quad (6.2)$$

No espaço dos momenta, a matriz S é proporcional a uma amplitude M_{FI} para a ocorrência de um determinado processo, como expresso abaixo

$$S_{fi} \propto -i(2\pi)\delta(p_f - p_i)M_{FI} \quad (6.3)$$

Onde a função delta de Dirac estabelece a conservação do momentum no processo. Neste caso, como se trata de teoria quântica de campos p_f é o quadrimomentum total dos estados de saída e similarmente para os estados de entrada. As regras de Feynman leva ao cálculo da amplitude M_{fi} para o processo com facilidade, usando-se a representação gráfica dada pelos diagramas, para cada processo físico que possa ocorrer. A amplitude M_{fi} é calculada, do mesmo modo que foi deduzido no capítulo 4 para a mecânica quântica ordinária, utilizando-se o processo perturbativo.

Aplicar o processo perturbativo nada mais é que dada uma amplitude de probabilidade para um determinado processo, expandi-la em uma série de Taylor. Assim, há um diagrama de Feynman para cada termo na expansão perturbativa, e assim eles são somados para se obter a amplitude total do processo. Haverá em muitos casos, infinitos termos nesta série, sendo que cada termo representa as interações de primeira, segunda, terceira, (...) ordem. O segredo consiste em se truncar a série considerando-se assim apenas as interações mais relevantes para o processo em questão.

A título de exemplo simplificado e introdutório, suponha-se que M é a amplitude para um dado evento. Os mesmos estados inicial e final podem resultar de um conjunto de processos, cada um deles com amplitude M_i . Assim a amplitude total é dada pela soma de todas essas amplitudes

$$M_{total} = \sum_{i=0}^n g^{k_i} M_i \quad (6.4)$$

onde g^{k_i} são as constantes de acoplamento para cada M_i . Como já citado acima, haverá um diagrama de Feynman para cada M_i na soma (6.4). Cada constante de acoplamento irá determinar a intensidade de cada interação. Assim a constante de acoplamento total, denotada por g descreve a força da interação e o expoente k descreve a ordem da interação. Para um processo de primeira ordem, $k = 1$; para o processo de segunda ordem, $k = 2$, e assim por diante.

Como se pode notar na Eq. (6.4) termos de ordens superiores contarão com mais fatores de g . Portanto se g é pequeno, a medida que i se torna grande, haverá muitos termos na soma dada pela Eq.(6.4), porém os termos de ordens superiores se tornarão desprezíveis e assim será

possível truncar a somatória em algum valor de n para qual ainda é razoável se estimar sua amplitude, em comparação com os termos anteriores.

Por exemplo, na Eletrodinâmica Quântica (QED), a constante de acoplamento é proporcional a $\alpha = 1/137 \approx 0,0073$. Trata-se de um número pequeno. Probabilidades de segunda ordem são proporcionais a $\alpha^2 \approx 0,0000053$. Então, como os fatores da constante de acoplamento aparecem como produtos, os termos tornam-se pequenos o suficiente a ponto de poderem ser ignorados nos cálculos. Para o leitor interessado em se aprofundar, uma descrição completa e mais detalhada das amplitudes calculadas na QED pode ser analisada nos dois primeiros livros citados nas referências bibliográficas (Cap. 8).

6.2. A representação de interação

Na teoria quântica de campos é de grande utilidade na análise da evolução temporal de um sistema utilizar-se da representação de interação a qual leva a amplitudes dadas pela Eq. (6.4). Desse modo, vale revisar rapidamente as interações na mecânica quântica.

Nesta seção, do modo mais sucinto possível serão consideradas três diferentes representações para processos descritos pela mecânica quântica. A primeira é a representação de Schrödinger e a segunda, a de Heisenberg. Assim para diferenciar uma representação da outra se utiliza um índice S para a de Schrödinger e H para a de Heisenberg.

Nesse caminho rumo a imagem interação na teoria quântica pode-se iniciar dividindo o Hamiltoniano em duas partes, uma delas representando o *Hamiltoniano livre* H_0 e a outra o Hamiltoniano da interação dependente do tempo H_I . Então, tem-se que

$$H = H_0 + H_I \quad (6.5)$$

Também para diferenciar os estados em uma e outra representação citadas acima, denota-se os estados e operadores também com os índices S para Schrödinger e H para Heisenberg.

Por exemplo, na representação de Schrödinger um vetor de estado é escrito como $|\alpha\rangle_S$ e um operador é escrito como A_S . Nesta representação, os estados evoluem no tempo de acordo com a equação

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_S = H |\alpha(t)\rangle_S \quad (6.6)$$

Neste caso, H é o Hamiltoniano total, dado pela Eq. (6.5). Um vetor de estado na imagem de interação $|\alpha(t)\rangle_I$ está relacionado ao vetor de estado na representação de Schrödinger via ação da parte livre do Hamiltoniano.

$$|\alpha(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S \quad (6.7)$$

Usando-se a representação de interação, é possível obter uma visão intermediária entre a representação de Schrödinger e a de Heisenberg, a qual move a evolução dos estados para os operadores. Assim, um operador na representação de interação A_I é relacionado a um operador na representação de Schrödinger A_S de acordo com

$$A_I = e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t} \quad (6.8)$$

Diferenciando-se a Eq. (6.7) e usando-se a Eq. (6.6) para se obter uma equação para a dinâmica do estado, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_I &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S) \\ &= iH_0 e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S + e^{iH_0 t} \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_S \\ &= iH_0 e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S + e^{iH_0 t} (-iH |\alpha(t)\rangle_S) \\ &= iH_0 e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S + e^{iH_0 t} (-iH_0 - iH_I) |\alpha(t)\rangle_S \\ &= -ie^{iH_0 t} H_I |\alpha(t)\rangle_S \\ &= -iH_I |\alpha(t)\rangle_I \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que a evolução temporal dos estados na representação de interação é dada por

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_I = H_I |\alpha(t)\rangle_I \quad (6.9)$$

O resultado obtido mostra que a evolução temporal dos estados é determinada pela parte de interação do Hamiltoniano (dependente do tempo).

Antes de partir para a teoria de perturbação, é importante também saber a respeito da evolução temporal dos operadores imagem de interação. Isso é possível efetuando-se a seguinte diferenciação

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} A_I &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t}) \\
 &= iH_0 e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t} + e^{iH_0 t} \left(\frac{\partial A_S}{\partial t} \right) e^{-iH_0 t} - i e^{iH_0 t} A_S H_0 e^{-iH_0 t} \\
 &= iH_0 e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t} - i e^{iH_0 t} A_S H_0 e^{-iH_0 t} \\
 &= iH_0 A_I - iA_I H_0 \\
 &= i[H_0, A_I]
 \end{aligned}$$

Isto é, a evolução temporal dos operadores imagem de interação é determinada pela parte livre do Hamiltoniano.

$$\frac{\partial}{\partial t} A_I = i[H_0, A_I] \tag{6.10}$$

Resumindo, então

H_0 (*livre*) afeta a evolução temporal dos operadores

H_I (*interação*) afeta a evolução temporal dos estados

Vale lembrar que na teoria quântica de campos, tem-se que os próprios campos atuam como operadores. A Eq. (6.10) implica que a evolução temporal dos campos é caracterizada por um Hamiltoniano de campo livre.

6.3. Teoria de Perturbação

Conforme mostrado na seção 6.1, a evolução temporal na mecânica quântica pode ser descrita também por um operador unitário

$$|\alpha(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I \tag{6.11}$$

Derivando ambos os lados desta expressão, tem-se, do lado esquerdo

$$\frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_I = -iH_I |\alpha(t)\rangle_I = -iH_I U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I$$

Do lado direito, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I \quad (6.12)$$

Igualando-se o obtido no lado direito com o que se obteve no lado esquerdo

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I = -iH_I U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I$$

Então, a evolução temporal do operador $U(t, t_0)$ é dada pela equação

$$\frac{\partial}{\partial t} U = H_I U \quad (6.13)$$

Fazendo $t = t_0$ na Eq. (6.11) espera-se ver uma mudança no sistema. A forma do operador U neste instante será dada por

$$|\alpha(t)\rangle_I = U(t_0, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I$$

Assim, este é o caso em que

$$U(t_0, t_0) = 1$$

A identidade acima diz que não há mudança no sistema para variação de tempo zero. Usando esse resultado como uma condição inicial na equação (6.13) e integrando-a no tempo

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t') U(t', t_0) dt' \quad (6.14)$$

Essa é uma integral que descreve como o operador U muda quando se vai de um tempo inicial t_0 para um tempo t posterior. A expressão dada pela Eq. (6.14) sugere de imediato um

refinamento iterativo no qual é possível computar a evolução do operador U em uma série de pequenos passos.

Como exemplo, inicia-se com uma estimativa aproximada para o que se chama U_0 . O primeiro refinamento será chamado de U_1 , dado por

$$U_1(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(\tau) U_0(\tau, t_0) d\tau$$

Vê-se então uma grande mudança ao passar de U_0 para U_1 . Assim, de maneira análoga continua-se o refinamento, agora com o valor de saída U_1 para se calcular U_2 , e assim por diante.

$$U_2(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(\tau) U_1(\tau, t_0) d\tau$$

Prosseguindo com as iterações, serão produzidas grandes expressões como a mostrada abaixo

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t') \left(1 - i \int_{t_0}^{t'} H_I(t'') U(t'', t_0) dt'' \right) \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t') H_I(t'') + \dots \\ &\quad + (-i)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} H_I(t') H_I(t'') \dots H_I(t^{(n)}) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Assumindo que $t > t' > t'' > t''' > \dots > t^{(n)}$, nota-se uma ordenação temporal nas iterações, desse modo é possível escrever

$$\begin{aligned} U_n(t, t_0) &= (-i)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} \mathbf{T}\{H_I(t') H_I(t'') \dots H_I(t^{(n)})\} \\ &= \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^t dt^{(n)} \mathbf{T}\{H_I(t') H_I(t'') \dots H_I(t^{(n)})\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Onde $\mathbf{T}$ é o operador tempo-ordenação. Assim ao somar todos os termos obtém-se a série de Dyson. Uma solução aproximada é obtida ao se truncar a expansão em um número adequado de termos, a depender da relevância das interações no cálculo das amplitudes.

Logo, retornando à evolução temporal dos estados, é preciso resolver a equação dada por

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle = H_I |\alpha(t)\rangle \quad (6.17)$$

onde H_I é o Hamiltoniano dependente do tempo (o que atua sobre os estados, com visto acima). Nota-se pela forma dessa equação que se a interação H_I vai para zero, então os estados são constantes no tempo, mostrando que nenhuma transição nos estados ocorrem devido às interações. Simplifica-se a notação chamando o estado inicial do sistema no tempo inicial t_0 como

$$|\alpha(t_0)\rangle = |i\rangle \quad (6.18)$$

Este então é o estado inicial do sistema, isto é, o estado antes de um espalhamento. Em outras palavras, o estado do sistema em $t \rightarrow -\infty$. É o sistema no estado de não interação de partículas antes do evento de espalhamento. O estado final, muito tempo depois do espalhamento é obtido como $\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha(t)\rangle = S|i\rangle$. O desejado é calcular a amplitude para um sistema nesse estado até um estado final específico $|f\rangle$

$$\langle f|S|i\rangle = S_{fi} \quad (6.19)$$

o qual é um elemento da matriz S . Portanto, a probabilidade P_{fi} para um sistema que começa no estado $|i\rangle$ e termina num estado final $|f\rangle$ depois de passar por uma interação descrita pela matriz S é dada por

$$P_{fi} = |\langle f|S|i\rangle|^2 = S_{fi}S_{fi}^* \quad (6.20)$$

Assim, o estado do sistema em um instante t pode ser escrito em uma expansão iterativa usada para a série de Dyson. Com um estado inicial, tem-se para os primeiros dois termos

$$|\alpha(t)\rangle = |i\rangle + \int_{-\infty}^t H_I(t')|\alpha(t')\rangle dt' \quad (6.21)$$

Como $S_{fi} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \langle \alpha_F(t)|U(t, t_0)|\alpha_I(t_0)\rangle$, e o operador U pode ser escrito em termos de uma série de Dyson, é possível então expressar a matriz S como uma série

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \dots \int_{-\infty}^{t^{(n-1)}} dt^n H_I(t_1)H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \quad (6.22)$$

Assim, para se calcular a amplitude $\langle f|S|i\rangle$ usa-se a teoria de perturbação e computa-se os termos para uma ordem adequada (com aceitável margem de erro). Em teoria quântica de campos são descritos inúmeros processos, como o da criação de matéria e antimatéria

$$e_i^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+ + e^-$$

Neste exemplo ilustrativo já é possível ver que se tem diferentes conjuntos de partículas nos estados antes e depois. Devido as mudanças dos conjuntos de partículas, usam-se termos que aniquilam partículas no estado inicial e outros termos que criam partículas no estado final.

6.4. Regras básicas de Feynman

Como foi visto neste capítulo e no capítulo 4, o cerne da expansão perturbativa é que se refinam os cálculos das amplitudes de espalhamento usando correções que vão se tornando cada vez menores. A redução em importância desses termos é medida através do poder do parâmetro de perturbação, o qual nesse caso é a força de acoplamento, dada pela constante de acoplamento. Em algum ponto da expansão, os termos de correção são muito pequenos para serem medidos e então é possível parar de adicionar mais refinamentos.

Na primeira seção deste capítulo definiu-se que em cada expansão perturbativa a amplitude M para um dado processo pode ser calculada usando-se uma expansão do tipo

$$M = \sum_n g^{k_n} M_n$$

Nesta expressão, cada amplitude individual M é uma reação específica da partícula (decaimento, espalhamento etc) que pode ser desenhada em um diagrama de Feynman. Quanto maior a ordem de M_n , menos provável de ocorrer e menos contribui para a amplitude total. Os termos M_n tem as mesmas partículas de entrada e de saída, mas representam diferentes estados intermediários. Estes estados intermediários correspondem à série de Dyson. Como cada termo M_n está majorado por uma constante de acoplamento g , a qual representa a força de uma dada interação, quando a força relativa de uma interação é pequena então ela pode ser analisada por meio da teoria de perturbação.

Como já visto com mais detalhes no capítulo 4 para a mecânica quântica, um diagrama de Feynman consiste de uma ou mais linhas externas as quais representam as partículas de entrada e de saída, conectadas por um vértice. O fluxo do tempo pode ser tomado na direção de cima para baixo do diagrama ou da esquerda para a direita.

Para ilustrar isso, basta se pensar em um processo de decaimento no qual uma partícula A decai em duas partículas B e C :

$$A \rightarrow B + C$$

O digrama de Feynman que descreve esse processo de decaimento pode ser escrito das duas formas mostradas nas Figuras (6.1) e (6.2) abaixo

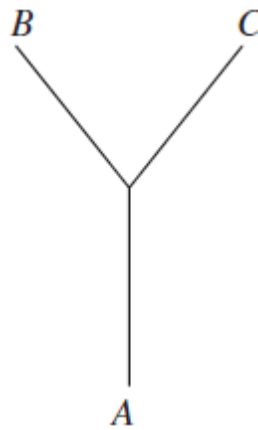


Figura 6.1 – Diagrama de Feynman para o decaimento $A \rightarrow B + C$, com o tempo fluindo de baixo para cima. (McMahon, 2008)

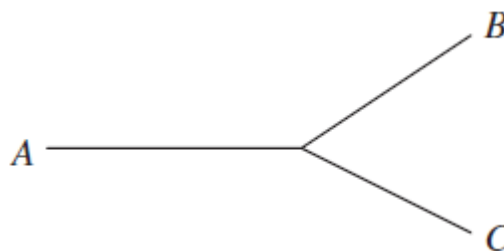


Figura 6.2 – Diagrama de Feynman para o decaimento $A \rightarrow B + C$, com o tempo fluindo da esquerda para a direita. (McMahon, 2008)

Como se pode notar a essa altura, os diagramas de Feynman são uma representação simbólica, qualitativa de alguma interação entre partículas. Porém há algo de revolucionário nessas representações pictóricas. O fluxo do tempo não é um eixo dos tempos, como se fosse uma reta de coordenadas sempre positivas. Normalmente, a direção de fluxo do tempo não é

indicada explicitamente no diagrama, mas é entendida no próprio contexto do diagrama em questão.

Diferente dos processos de decaimento, os espalhamentos envolvem um estado ou partícula intermediária que é desenhada no diagrama como uma linha interna. Supondo, portanto, que partículas A e B espalhem em partículas C e D (Figs. 6.3 e 6.4) ao fim do processo e supondo que esse processo de espalhamento envolva um intermediário I.

Na teoria quântica de campos, o correto é interpretar o estado intermediário como sendo aquele em que uma partícula portadora de uma das forças fundamentais da natureza transmite essa força às partículas A e B .

Por exemplo, se essa interação é eletromagnética, então a linha interna deve ser um fóton, a partícula portadora de força eletromagnética.

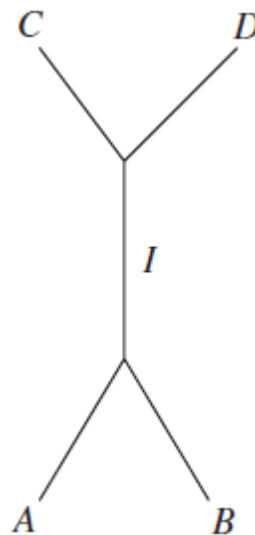


Figura 6.3 – Diagrama de Feynman para o espalhamento $A + B \rightarrow C + D$. (McMahon, 2008)

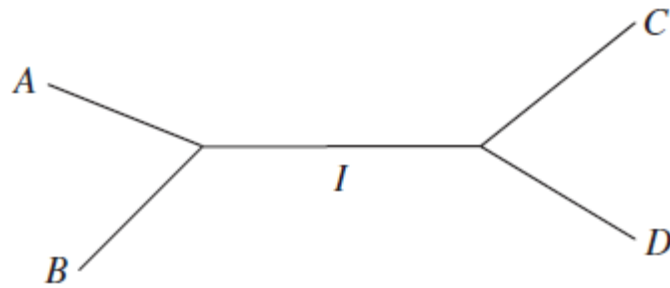


Figura 6.4 – Diagrama de Feynman para o espalhamento $A + B \rightarrow C + D$, com o tempo fluindo da esquerda para a direita. (McMahon, 2008)

Há ainda uma maneira de se representar as antipartículas, presentes na teoria quântica de campos, por meio dos diagramas de Feynman. Partículas e antipartículas aparecem juntas em muitos processos. Assim para distingui-las uma da outra usa-se aqui um índice linha para designar antipartículas. Assim tem-se, por exemplo A para uma partícula e A' para sua antipartícula.

As linhas para partículas nos diagramas de Feynman são indicadas por uma seta que flui na direção do tempo. As linhas para as antipartículas são indicadas nos diagramas com uma seta que flui na direção contrária a do fluxo do tempo. Um exemplo está ilustrado da Fig. 6.5, que representa uma reação $A + A' \rightarrow A + A'$, mediada por um bóson B .

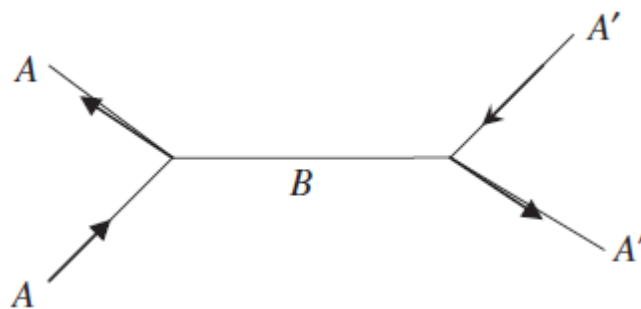


Figura 6.5 – Espalhamento partícula-antipartícula $A + A' \rightarrow A + A'$ ocorrido pela troca de um bóson B . O tempo flui de baixo para cima. (McMahon, 2008)

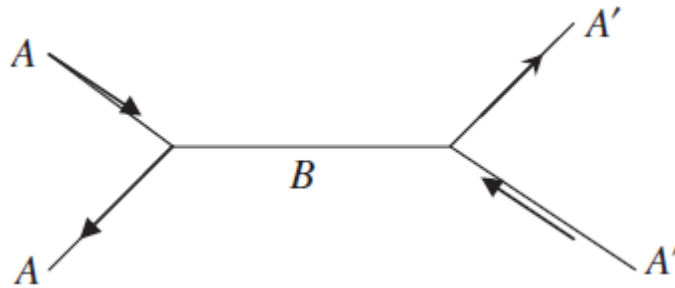


Figura 6.6 - Nesse processo A e A' se aniquilam, produzindo um bóson B , o qual decai novamente em um par A e A' . O tempo flui da esquerda para a direita (McMahon, 2008)

Uma das grandes ideias de Feynman no estabelecimento dos seus diagramas foi pensar que uma partícula viaja na direção do fluxo do tempo enquanto que uma antipartícula viaja na direção oposta ao fluxo do tempo.

Assim como visto no capítulo 4 para a mecânica quântica não relativística, em que cada linha do diagrama de Feynman pode ser caracterizada pelo momentum, na teoria de campos, cada linha do diagrama é caracterizada por um quadrimomentum.

Supondo ainda que o processo $A + A' \rightarrow A + A'$ ocorre com a troca de um bóson B como mostrado na Fig. 6.6, indicam-se os momenta de cada partícula de entrada e saída (linhas externas) com um p . Momenta internos são indicados por q . Isso está mostrado na Fig. 6.7 abaixo:

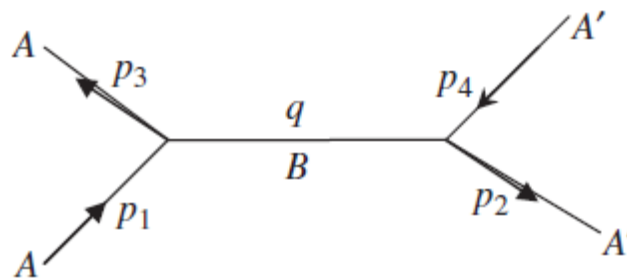


Figura 6.7 – Diagrama de Feynman para o processo $A + A' \rightarrow A + A'$ mostrando os momenta de cada partícula. O tempo flui de baixo para cima. (McMahon, 2008)

6.5. Amplitudes

Do mesmo modo que na mecânica quântica ordinária, para se calcular efetivamente uma amplitude M , faz-se a integral sobre todos os momenta internos. Felizmente, como visto em detalhe no capítulo 4 deste trabalho, todas as integrais envolvem funções delta de Dirac, indicando conservação do momentum durante os processos. Então essas integrais podem ser feitas por inspeção. Isso graças a uma propriedade fundamental da função delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x')dx = f(x')$$

Conforme mencionado várias vezes a razão para o aparecimento das funções delta de Dirac nas expressões das amplitudes garante a conservação da energia e do momentum. Assim, em cada vértice de um diagrama de Feynman, assume-se um sinal positivo para o momentum chegando e um sinal negativo para o momentum deixando o vértice, conforme mostra a Fig. 6.8 abaixo:

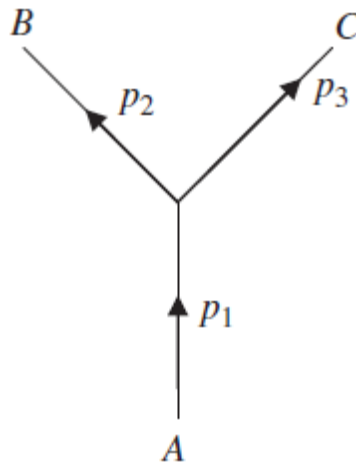


Figura 6.8 - Um decaimento de uma partícula A com os momenta entrando e deixando o vértice. (McMahon, 2008)

Momentum e energia são conservados e não mudam por conta das interações. Essa conservação é descrita como $p_1 = p_2 + p_3$, e isso se evidencia com a função Delta de Dirac. No exemplo ilustrado pela Fig. 6.8, a função delta de Dirac que estabelece a conservação da energia e do momentum no vértice é dada por

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - p_3) \quad (6.23)$$

O valor da função delta acima é 1 quando $p_1 = p_2 + p_3$ e nula se esta igualdade não for satisfeita.

Importante ter em mente que a direção das setas que indicam se determinada linha é uma partícula ou uma antipartícula não tem nenhuma relação com a direção do momentum. Se uma linha entra em um vértice, o momentum está entrando neste vértice. Seguindo a direção do tempo no diagrama, as linhas que deixam um vértice tem sinal negativo nos seus momenta. A conservação de energia e momentum estabelecida em um vértice também inclui os momenta de linhas internas. Seja, por exemplo o diagrama mostrado na Fig. 6.9. Nele, um bóson B transporta momentum q . A função delta que expressa a conservação de energia e momentum na interação é dada por

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_3 - q) \quad (6.24)$$

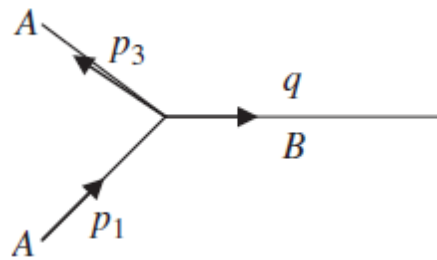


Figura 6.9 – Conservação de energia e momentum também vale para as linhas internas, como nessa que mostra a propagação de um bóson com momentum q . (McMahon, 2008)

É preciso atribuir uma direção para o momentum interno q . Se se fizer como mostrado na Fig. 6.10, então a função delta que sempre deve ser da forma

$$\delta(\sum \text{momentum de entrada} - \sum \text{momentum de saída})$$

pode, então, ser escrita como

$$(2\pi)^4 \delta(p_2 - p_4 + q) \quad (6.25)$$

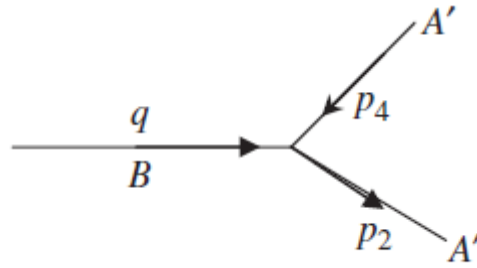


Figura 6.10 – Conservação do momentum neste diagrama é dado pela função delta de Dirac $(2\pi)^4 \delta(p_2 - p_4 + q)$. (McMahon, 2008)

6.6. Regras para a construção da amplitude

Do mesmo modo como foi formalizada no Capítulo 4 para processos de interação quânticos não-relativísticos, as regras estabelecidas após todo o formalismo matemático desenvolvido, valem também no caso de diagramas de Feynman que expressam interações sobre o ponto de vista da teoria quântica de campos. Logo, a construção de uma expressão para uma determinada amplitude que represente quantitativamente algum processo mostrado em um diagrama de Feynman envolve os cinco passos abaixo:

- Escrever a função delta que mostra a conservação de energia e momentum para cada vértice.
- Escrever uma constante de acoplamento para cada vértice no diagrama.
- Escrever o propagador para cada linha interna.
- Multiplicar todos os fatores acima.
- Integrar sobre todos os momenta envolvidos no processo.

A amplitude total, chamada aqui de M será a soma de todas as amplitudes M_i , as quais podem ocorrer para um processo específico com as mesmas partículas de entrada e saída. De fato, diagramas de ordens mais altas para cada um dos processos podem ser desenhados com diferentes estados intermediários, obtidos a partir de uma expansão perturbativa.

Constantes de acoplamento

Cada força tem como origem alguma força fundamental da natureza, e essa força se manifesta nos cálculos de Feynman como uma constante de acoplamento. Como não é objetivo deste trabalho aprofundar a discussão a respeito da teoria quântica de campos, e sim mostrar as regras que embasam os diagramas de Feynman, é possível apresentar um exemplo de constante de acoplamento sem prejuízo da qualidade do que aqui se discute. Na eletrodinâmica quântica (QED), por exemplo, a constante de acoplamento g_e está relacionada com a constante de estrutura fina α como

$$g_e = \sqrt{4\pi\alpha} \quad (6.26)$$

A constante de estrutura fina α é um número adimensional que contém as constantes fundamentais do eletromagnetismo: a carga elétrica fundamental e , a velocidade da luz c e a constante de Planck $\hbar$. Assim

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (6.27)$$

Assim na QED, ou em qualquer interação onde a constante de acoplamento é muito pequena, diagramas de ordens mais altas contribuem menos e menos porque eles incluem potências cada vez mais altas de g . Isso significa que é possível truncar a série de Dyson, vista na primeira seção deste capítulo, no ponto onde se tem a precisão necessária para descrever um dado processo. Assim, como estabelecido nas regras acima, para cada vértice num diagrama de Feynman, inclui-se um termo com a constante de acoplamento dado por

$$-ig \quad (6.28)$$

Propagadores

Também como foi visto nos capítulos 3 e 4, associa-se um propagador a cada linha interna no diagrama de Feynman. Para recordar, um propagador é um fator na expressão da amplitude que representa a transferência ou a propagação do momentum de uma partícula a outra. Apenas como exemplo, o caso mais simples é o propagador de um bóson de spin 0, dado por

$$\frac{i}{q^2 - m^2} \quad (6.29)$$

A massa no denominador é a massa do bóson, que corresponde a uma linha interna. No diagrama de Feynman uma linha interna para um bóson de spin 0 pode ser mostrada como uma linha pontilhada.

Outro exemplo é o propagador de uma partícula de spin 1/2, um férmion, a qual é representada nos diagramas do mesmo modo que uma linha externa, como uma linha sólida com uma flecha apontado na direção do momentum para o caso de uma partícula e contra a direção do momentum para uma antipartícula. Neste caso o propagador é dado por

$$\frac{i}{\mathbb{Q} - m} \quad (6.30)$$

Onde $\mathbb{Q} = \gamma^\mu q_\mu$, o quadrimomentum do férmion.

Um terceiro resultado importante da teoria quântica de campos é o propagador do fóton, dado por

$$\frac{i}{k^2} \left(-g^{\mu\nu} + (1 - \zeta) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (6.31)$$

Para $\zeta = 1$ (calibre de Feynman), o propagador do fóton reduz-se a

$$-\frac{i}{k^2} g^{\mu\nu} \quad (6.32)$$

No exemplo a seguir são utilizados bósons de spin 0 como partículas portadoras de força, pois são mais simples de se lidar.

Seja um processo da aniquilação partícula-antipartícula, produzindo um bóson escalar B, o qual decai em uma partícula A e A'. A massa do bóson é m_B . Para se calcular a amplitude e a probabilidade deste processo ocorrer (mostrado na Fig. 6.11), é preciso então seguir as regras estabelecidas para o cálculo das amplitudes.

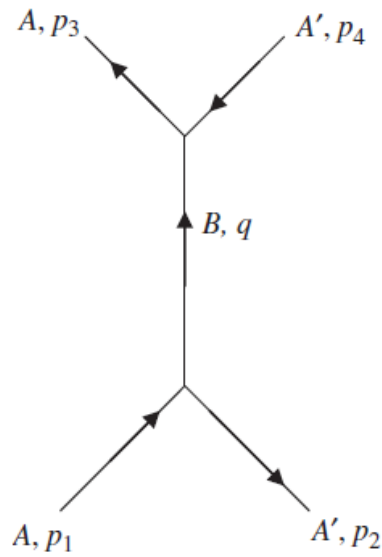


Figura 6.11 – Processo de aniquilação-criação com um bóson escalar de spin 0. (McMahon, 2008)

Assim, seguindo-se as regras resumidas no início desta seção e formalizadas matematicamente nos capítulos 3 e 4, deve-se iniciar por escrever um fator da constante de acoplamento $-ig$ para cada vértice do diagrama. Como há dois vértices na Fig. 6.11, então há dois fatores a serem computados.

$$(-ig)(-ig) = -g^2 \quad (6.33)$$

Em seguida, multiplica-se a expressão (6.33) pelas funções delta de Dirac que estabelecem a conservação do quadrimomentum para cada vértice. Assim, tem-se, para o primeiro vértice

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q) \quad (6.34)$$

E para o vértice de cima

$$(2\pi)^4 \delta(q - p_3 + p_4) \quad (6.35)$$

Multiplicando-se então os fatores (6.33), (6.34) e (6.35)

$$-g^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q) (2\pi)^4 \delta(q - p_3 + p_4) \quad (6.36)$$

O próximo passo é considerar o propagador da linha interna, neste caso o propagador dado pela Eq.(6.29). Logo

$$-\frac{ig^2}{q^2 - m_B^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q) (2\pi)^4 \delta(q - p_3 + p_4) \quad (6.37)$$

Finalmente, integra-se a expressão acima sobre o momentum interno total q , usando a diferencial

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q \quad (6.38)$$

Esta expressão garante a normalização no espaço de fases. Assim, a amplitude para o processo mostrado no diagrama de Feynman na Fig 6.11 é dada por

$$M = \int \frac{-ig^2}{q^2 - m_B^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q) \delta(q - p_3 + p_4) d^4 q \quad (6.39)$$

A integral (6.39) pode ser resolvida facilmente, por inspeção. Olhando-se para a segunda função delta de Dirac, tem-se que $q = p_3 + p_4$. Portanto

$$\begin{aligned} M &= \int \frac{-ig^2}{q^2 - m_B^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q) \delta(q - p_3 + p_4) d^4 q \\ &= \frac{-ig^2}{(p_3 + p_4)^2 - m_B^2} \end{aligned} \quad (6.40)$$

onde se descartou a primeira função delta, dada por $(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$ foi descartada, a qual mostra a conservação total da energia e momentum (nas linhas externas).

A probabilidade do processo ocorrer é dada por

$$|M|^2 = \frac{g^4}{((p_3 + p_4)^2 - m_B^2)^2} \quad (6.41)$$

Os processos de decaimento são muito importantes na física nuclear e na física de partículas, pois muitos núcleos estudados são instáveis, isto é, decaem para formas mais

estáveis, emitindo assim partículas. Então, medidas de taxa de decaimento e tempos de vida são quantidades de interesses essencial. E ambas estão relacionadas à probabilidade de determinado processo ocorrer, ou seja, dependem das amplitudes ao quadrado.

A taxa de decaimento para dado processo é proporcional à amplitude ao quadrado

$$\Gamma \propto |M|^2 \quad (6.42)$$

E o tempo de vida de uma partícula que decai é proporcional ao inverso amplitude ao quadrado.

$$\tau \propto \frac{1}{|M|^2} \quad (6.43)$$

7. CONCLUSÃO

Os diagramas de Feynman são um meio muito útil e simplificado de se representar em imagens a amplitude de ocorrência de um dado processo e as mesmas regras se aplicam tanto à mecânica quântica comum, quanto em níveis mais avançados, dados pela teoria quântica de campos. E que embasa essas regras de construção dos diagramas são as integrais de caminho. No presente trabalho, o emprego das integrais de caminho para os campos foi mostrado sucintamente, com preferência para o seu desenvolvimento no formalismo da mecânica quântica não relativística, sendo este o foco principal do trabalho. De modo geral, as integrais de caminho são modos eficazes de se calcular amplitudes de transição de um sistema quântico de um estado inicial a um final. Essas amplitudes, que ao fim são a descrição das interações entre as partículas, podem ser vistas como uma soma de amplitudes menores, isto é, interações de primeira, segunda, infinitas ordens, com a possibilidade de se avaliar quais delas são relevantes no modelo físico.

Desenvolvidas de modo brilhante pelo físico Richard Feynman, as integrais de caminho, tanto na mecânica quântica quanto na teoria quântica de campos servem de base quantitativa para as regras pictóricas dos famosos diagramas, que tanto facilitam os cálculos aos teóricos.

Integrais de caminho podem ser usadas para se calcular qualquer quantidade em teoria de campos, como por exemplo o valor da energia do vácuo de um campo. Tanto na mecânica quântica comum quanto na teoria quântica de campos, o uso de integrais Gaussianas é recorrente, uma vez que ao lidar-se com funções de onda, ou campos, vale lembrar que tratam-se de probabilidades e densidades de probabilidades.

O *approach* das integrais de caminho para a mecânica quântica e na teoria de campos é útil também em contextos ainda mais avançados da física, como na teoria das cordas, por exemplo. O tratamento aqui dado é como que um “aperitivo” que demonstra de maneira bem básica e introdutória o poder dessa ferramenta, a qual auxilia físicos teóricos em pesquisas de fronteira, rumo a uma teoria que unifique as quatro forças fundamentais da natureza e seja de factível comprovação experimental. Entre os objetivos deste trabalho está também a

motivação para o estudante que deseja se aprofundar no assunto. Um bom início de caminho, nas integrais de caminho são os livros utilizados aqui e citados na bibliografia.

8. BIBLIOGRAFIA

- Ryder, L. H.: *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, London (1996).
- McMahon, D.: *Quantum Field Theory Demystified – A Self Teaching Guide*, McGraw Hill, New York (2008).
- Eisberg, R. e Resnick, R.: *Física Quântica – Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*, Campus Editora, São Paulo (1979).
- Sakurai, J.J. e Napolitano, J.: *Mecânica Quântica Moderna*, Bookman Editora (2013).

9. AGRADECIMENTOS

A Deus, que me deu a existência e uma consciência capaz de aprender sempre. Agradeço em especial a minha esposa Janaina Sarti, que suportou e apoiou esse meu sonho louco de me tornar um universitário com muitas contas para pagar, uma filha amada para cuidar. Obrigado Janaina pelo apoio e por viver comigo intensamente cada momento desse curso, pelas horas e horas de ausência estudando, quero dizer que foi a luz que iluminou meu caminho.

Agradeço aos meus pais, Deusélia Pinto Montenegro e João Antonio Lapola que além de me darem amor incondicional, que é tudo o que um filho precisa, plantaram em mim a semente do eterno prazer do conhecimento. Também a meus irmãos Daniel, Marcos e David.

Agradeço ao meu orientador professor doutor Luiz Antonio Barreiro por todo o suporte e pela alegria com que nos recebe em sua sala para ensinar a respeito dos mais variados temas ligados à física. A todos os queridos professores do departamento de Física da Unesp Rio Claro, o meu muito obrigado pelas excelentes aulas e por despertarem o melhor de mim. Dedico este trabalho à minha filha, Cecília, por ter lhe roubado tanto tempo de ficarmos juntos. Quantas maravilhas e descobertas ainda estão por vir e que você minha filha verá com os olhos curiosos, olhos que germinaram da semente da curiosidade que eu e sua mãe plantamos em seu coração.

Com este trabalho, realizo um sonho, distante lá no passado. O de ter a mesma profissão de Albert Einstein, meu ídolo desde menino.

APÊNDICE A – INTEGRAIS GAUSSIANNAS

Muitos cálculos envolvendo integrais de caminho resumem-se a uma simples integral conhecida da Física Estatística como integral Gaussiana. Neste apêndice estão resumidos rapidamente o que são as integrais Gaussianas e modos de como são calculadas.

A mais simples das integrais Gaussianas é uma integral feita sobre todo o espaço unidimensional de uma função Gaussiana e^{-x^2} . Um gráfico desta função, mostrado na Fig. A.1 abaixo, mostra que ela está bem localizada em uma pequena região em torno da origem. Assim, como resultado, espera-se que sua integral converja para um pequeno valor finito. Porém, não há um modo elementar de se calcular a integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Mas por meio substituições adequadas o resultado é obtido de forma satisfatória. A forma mais simples e eficaz é utilizar coordenadas polares. Antes disso eleva-se a integral ao quadrado. Assim, pode-se considerar x como uma variável muda quando ela aparece no integrando, é possível chamar uma delas de y , por exemplo, após elevar a integral ao quadrado, como segue:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Fazendo-se então a mudança de variáveis cartesianas para coordenadas polares

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Então

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

E o elemento de área em coordenadas polares é dado por

$$dxdy = r dr d\theta$$

O que leva a escrever a integral nas novas coordenadas

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr$$

Logo, a integral sobre r pode ser resolvida usando-se uma substituição elementar. Seja $u = r^2$, tem-se

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2}$$

Então, finalmente

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

Assim

$$I^2 = \pi \Rightarrow \boxed{I = \sqrt{\pi}} \quad (\text{A.1})$$

Esse resultado expresso na Eq. (A.1) pode ser estendido para outras situações mais complicadas. Seja, por exemplo, a integral gaussiana multiplicada em seu expoente variável por uma constante a

$$I' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$

Como o resultado da Eq. (A-1) conhecido, esta nova integral pode ser resolvida por meio da seguinte substituição de variável

Seja $y = \sqrt{a}x$, logo

$$I' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{A.2})$$

Uma outra integral gaussiana possível pode ser escrita com a multiplicação da exponencial no integrando por potências de x , como segue

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx$$

Desse modo é possível notar que se o expoente n é par, a integral é nula.

Seja, então $n = 1$. O gráfico de $f(x) = xe^{-x^2}$ é mostrado na Figura (A.1) abaixo junto com as outras duas primeiras potências ímpares, para mostrar que $f(x)$ neste caso é função ímpar.

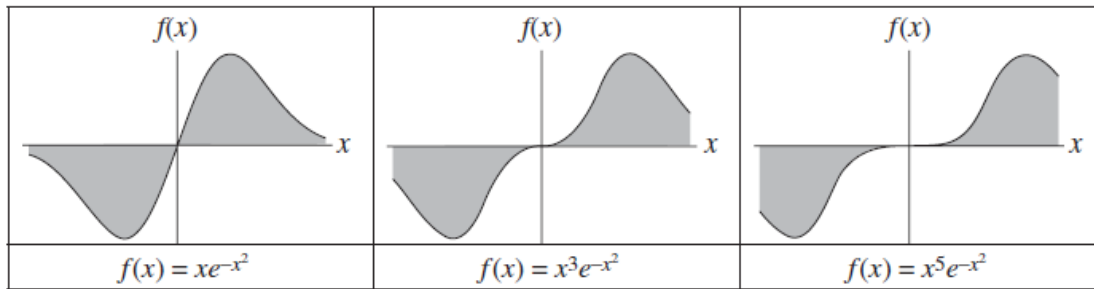


Figura A.1 – Gráficos das primeiras potências ímpares sobre a exponencial. Por meio deste gráfico é possível ver claramente que as integrais para f ímpar se anularão. (McMahon, 2008)

Desse modo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx = 0, \text{ para } n \text{ ímpar}$$

Para se obter os resultados para n par, recorre-se a uma técnica simples. A partir da Eq. (A.2), tomando-se a derivada de ambos os lados com relação a a , tem-se no lado esquerdo

$$\frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$$

E o lado direito

$$\frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{\frac{3}{2}}}$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{\frac{3}{2}}}$$

A partir desse cálculo nota-se que a partir de um processo de iteração realizado infinitas vezes leva a uma expressão geral para qualquer valor de n par, dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = 1.3 \dots \frac{(n+1)\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n+1}{2}}} \quad (\text{A.3})$$

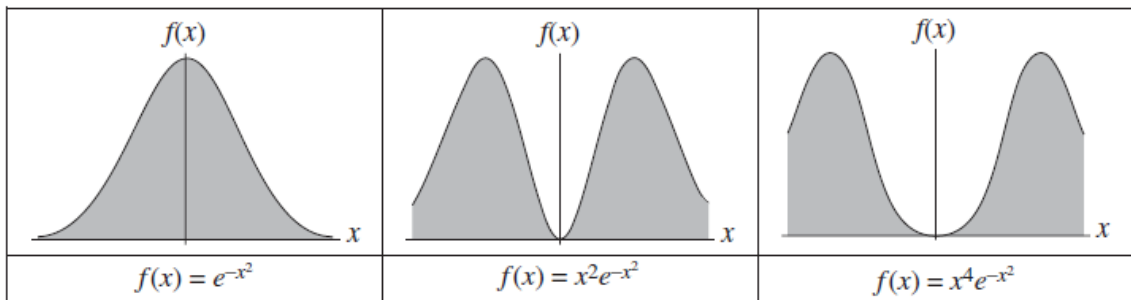


Figura A.2 – Gráficos de algumas potências pares de x sobre a exponencial. Nota-se que com o aumento do valor da potência par os picos se afastam. (McMahon, 2008)

É possível continuar os cálculos incluindo-se mais e mais termos à integral Gaussiana. Para os casos abordados neste trabalho, um resultado importante diz respeito à integral Gaussiana da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx$$

Essa integral pode ser transformada em uma integral da forma mostrada na Eq. (A.1) completando-se o quadrado mostrado na exponencial. Logo, tem-se

$$-a \frac{x^2}{2} + bx = -\frac{a}{2} \left(x^2 - \frac{2b}{a} x \right) = -\frac{a}{2} \left(x - \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{b^2}{2a}$$

Assim, a integral pode ser dada por

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2} \left(x - \frac{b}{a} \right)^2} e^{b^2/2a} dx \\ &= e^{b^2/2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2} \left(x - \frac{b}{a} \right)^2} dx \\ &= e^{b^2/2a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$