

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

CAMPUS DE RIO CLARO

**Novo enfoque da disciplina Matemática e suas
Aplicações, no Curso de Administração de
Empresas da Universidade Paulista-Unip**

Walter Paulette

Orientadora: Prof^a. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

**Tese de Doutorado apresentada junto ao Pro-
grama de Pós-graduação em Matemática - Área
de Concentração em Ensino e Aprendizagem da
Matemática e seus Fundamentos Filosófico-
-Científicos, para obtenção do Título de Doutor
em Educação Matemática**

**RIO CLARO - SP
2003**

Comissão Examinadora

Profa. Dr. Lourdes de la Rosa Onuchic

Prof. Dr. Geraldo Perez

Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa

Prof. Dr. Eurípides Alves da Silva

Prof. Dr. Waldemar de Maio

Walter Paulette

Rio Claro, 10 de setembro de 2003

Resultado: **APROVADO**

DEDICATÓRIA

Dedico a Deus, à minha esposa Sueli e aos meus filhos Fernando, Laís e Mayra Carolina, pelo apoio e carinho que sempre nos dedicaram. Aos meus netos Pedro Henrique, João Felipe e Fernanda.

AGRADECIMENTOS

À Professora Dra Lourdes de la Rosa Onuchic, orientadora, que nos deu com muita competência, as linhas mestras do trabalho;

Ao professor Dr. Waldemar de Maio pelo apoio, estímulo e companheirismo;

Ao Professor Dr. Geraldo Perez, nosso primeiro professor do Curso de Pós-graduação em Educação Matemática de Rio Claro, que nos proporcionou entusiasmo e orientação;

À amiga Marília Soares Ramos Melhem, pela revisão de português.

RESUMO

Quando começamos a lecionar a disciplina Matemática para o Curso de Administração de Empresas da Unip-Campus Vergueiro, percebemos que o ensino tradicional, com aulas expositivas dialogadas, não criava um ambiente propício para uma boa aprendizagem de matemática. Inconformados, fomos em busca de uma nova forma de ensino-aprendizagem para essa disciplina.

Adotamos a Metodologia de Pesquisa de Romberg como guia para nossa pesquisa. Por meio de uma seleção de estratégias e procedimentos, passamos a conhecer: a) o perfil do Administrador Profissional: dessa forma, verificamos quais são os conhecimentos, as atitudes e as habilidades de um bom administrador; b) o perfil do Corpo Discente: assim passamos a conhecer suas tendências, suas aptidões e seus conhecimentos matemáticos; c) o perfil do Corpo Docente que leciona matemática e dos da área profissionalizante, que utilizam matemática e que tópicos são mais utilizados; d) a realidade do ensino de matemática nas últimas décadas. De posse dessas informações, fomos em busca de uma nova metodologia de ensino-aprendizagem que atendesse ao perfil exigido pelo MEC, pelo CFA e pela Unip. A metodologia que passamos a adotar foi a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

Com essa metodologia propusemos mudanças na ementa e conteúdo programático, aplicando-a durante o ano de 2001 para alguns tópicos do programa. Com a experiência obtida, preparamos e aplicamos, no ano de 2002, um cronograma que continha 40 semanas de aula, apresentando, para cada semana, o título do conteúdo programático, os objetivos a alcançar e o conteúdo matemático a ser trabalhado.

Nesse modelo de ensino-aprendizagem, os conceitos matemáticos foram construídos a partir de situações-problema retiradas do cotidiano do Curso de Administração de Empresas e em concordância com o novo conteúdo programático. Com a observação dos resultados, pudemos concluir que, trabalhando em grupos, os alunos aprendem a interpretar textos, a discutir idéias, a propor soluções, tornando-se mais críticos, participantes e reflexivos.

Finalmente, relatamos, passo a passo, a aplicação da metodologia adotada no desenvolvimento do novo conteúdo programático.

Palavras-chave: 1. Matemática 2. Ensino-aprendizagem. 3. Resolução de problema.
4. Situações-problema. 5. Trabalho em grupo.

ABSTRACT

When we've just started our Math teaching at Business Administration course at Unip-Vergueiro Campus, we noticed that the traditional teaching method, with expositive and dialogued classes, was not creating a good and efficient environment/scenario/atmosphere for a good Mathematics learning. Dissatisfied with this condition, we went in search of a new form of teaching and learning of this discipline.

We adopted the Romberg Search Methodology as a guide to our research work. By taking a selection of strategies and procedures, when we established our knowledge of: a) the Professional administrator profile and by this meaning we verified what are the knowledge, attitudes and skills of a good Administrator; b) the student body profile: in order to know their tendencies, their abilities and their Mathematical knowledge; c) the teaching staff profile: that teaches Mathematics and those of the vocational areas that also use Mathematics and which topics are mostly used; d) the Mathematics' teaching reality during the last decades. In the possession of this information, we went in search of a new teaching and learning methodology that would conform to the MEC standards that should also conform to CFA and UNIP's requirement. The methodology that we adopted then was the teaching and learning Mathematics through solving Problems.

With this methodology we proposed some changes in the ementa (menu) and programme content, using it during the academic year of 2001 for some of the topics present in the programme. In 2002, with our previous experience, we prepared and applied a chronogram containing 40 weeks of classes, presenting for each week, the programme content's title, the objectives to be reached and the mathematical content to be developed.

In this model, the mathematical concepts were built from everyday situation of the Administration Course and in compliance with the new programme content. With the results observation, we could conclude that working in groups, the students learn how to interpret texts, how to discuss ideas and how to propose solutions; becoming more critical, participative and analytical.

Finally, we relate step-by-step, the methodology adopted in the developing of the new programme content.

Key-words: 1. Mathematics 2. Teaching-learning 3. Problems solving 4. Problematic Situation 5. Group working.

ÍNDICE

Introdução.....	1
Capítulo 1 Metodologia de Pesquisa.....	5
1.1 - A Metodologia de Pesquisa de Romberg.....	5
1.2 - Metodologia da nossa pesquisa apoiada na Metodologia de Romberg.....	6
1.2.1 - Fenômeno de interesse.....	6
1.2.2 - Construir um modelo preliminar.....	7
1.2.3 - Relacionar com idéias de outros.....	8
1.2.4 - Questões ou Conjecturas.....	8
1.2.5 - Selecionar estratégias de pesquisa.....	9
1.2.6 - Selecionar procedimentos de pesquisa.....	9
1.2.7 - Ganhar evidência.....	10
1.2.8 - Interpretar as evidências colhidas.....	10
1.2.9 - Relatar resultados.....	10
1.2.10 - Antecipar ações de outros.....	10
Capítulo 2 Iniciando a pesquisa.....	12
2.1 - Identificando o fenômeno de interesse.....	12
2.1.1 - Introdução.....	12
2.1.2 - Conhecendo a Universidade Paulista (Unip).....	12
2.1.3 - Nosso fenômeno de interesse.....	15
2.2 - Construindo o modelo preliminar.....	15
2.3 - Relacionando com idéias de outros.....	17
2.4 - Conjecturando sobre uma nova forma de trabalho alternativo da disciplina matemática.....	19
Capítulo 3 Selecionando Estratégias e procedimentos e colocando os procedimentos em ação.....	22
3.1 - O Perfil do Administrador de Empresas.....	23
3.1.1 - Introdução.....	24
3.1.2 - Perfil, formação e oportunidades de trabalho do Administrador Profissional segundo pesquisa do CFA.....	24
3.1.3 - Perfil e habilidades do Administrador exigido pelo MEC/SEDIE.....	27
3.1.4 - Perfil profissiográfico e habilidades pretendidas para o Curso de Administração de Empresas do Instituto de Ciências Sociais e Comunicação da Universidade Paulista.....	28
3.2 - Perfil do Corpo Discente.....	32
3.2.1 - Perfil dos candidatos ao vestibular do Curso de Administração de Empresas da Unip – Capital, São Paulo, setembro de 1999.....	32
3.2.2 - O Perfil do Corpo Discente Ingressante – Ano 2000 e 2001 - do Curso de Administração de Empresas da Unip – Campus Vergueiro – Período Matutino...	37
3.2.3 - Análise dos três questionários.....	56
3.2.4 - O Ensino de Matemática nas últimas décadas.....	61
3.2.4.1 - Realidade do Ensino de Matemática nas últimas décadas no Brasil.....	61
3.2.4.2 - Realidade do ensino de Matemática do Curso de Administração de Empresas da Unip.....	64

3.2.5 - Conclusões.....	69
3.3 - Perfil do Corpo Docente do Curso de Administração de Empresas da Unip.....	71
3.3.1 - Perfil do Corpo Docente que ministra aulas de matemática para o Curso de Administração de Empresas da Unip.....	71
3.3.2 - Perfil do Corpo Docente das disciplinas que usam Matemática no Curso de Administração de Empresas da Unip.....	74
3.3.3 - Análise dos resultados obtidos dos questionários aplicados ao corpo docente.....	78
3.3.4 - Conclusões sobre o corpo docente.....	80
3.4 - Ensino - Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.....	84
3.4.1- Conhecendo a metodologia de Ensino - Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.....	84
Capítulo 4 Criação e Aplicação do Projeto.....	96
4.1 - Introdução.....	96
4.2 - Preparação do Projeto.....	99
4.2.1 - Proposta de Currículo Pleno do Curso de Administração em vigor.....	99
4.2.2 – Nova proposta de Ementa e Conteúdo Programático e Planejamento didático da disciplina Matemática do Curso de Administração de Empresas.....	103
4.2.3 - Cronograma semanal.....	109
4.3 - A Criação do Projeto.....	110
4.3.1 - Introdução.....	110
4.3.2 - Unidades programáticas.....	112
4.3.3 - Preparação semanal das aulas.....	113
4.4 - Aplicação do Projeto.....	167
Unidade I Funções.....	167
1 - Conceito de função.....	169
2 - Variáveis dependentes e independentes.....	177
3 - Domínio e Contradomínio.....	177
4 - Definição de função.....	178
5 - Funções Elementares.....	182
5.1 - Função constante.....	182
5.2 - Função afim.....	184
5.2.1 - Aplicações da função afim.....	187
5.3 - Função quadrática ou função trinômio do 2º grau.....	199
5.3.1 - Definição de função quadrática.....	202
5.3.2 - Representação gráfica da função quadrática.....	206
5.3.3 - Aplicações da função quadrática.....	211
5.4 - Aplicações das funções afim e quadrática na Administração e na Economia.....	214
5.4.1 - Lei da demanda ou da procura.....	215
5.4.2 - Lei da oferta.....	220
5.4.3 - Equilíbrio de mercado.....	226
5.4.4 - Receita total.....	232
5.4.5 – Custo Total.....	234
5.4.6 – Ponto crítico (Break-even point).....	236
5.5 - Função modular.....	251
5.6 - Função raiz quadrada.....	253

5.6.1 - Definição da função raiz quadrada.....	254
5.6.2 - Aplicações da função raiz quadrada.....	256
5.7 - Função recíproca ou hipérbole equilátera.....	262
5.7.1 - Definição de função recíproca ou hipérbole equilátera.....	263
5.7.2 - Problemas aplicativos da função recíproca ou hipérbole equilátera.....	265
5.8 - Função exponencial.....	272
5.8.1 - Definição de função exponencial.....	276
5.8.2 - Aplicações da função exponencial.....	281
5.9 - Função logarítmica.....	286
5.9.1 - Definição de função logarítmica.....	290
Unidade II Ajustamento de Curvas.....	294
1. Conceito de ajustamento de curvas.....	294
2. Conceito de somatório.....	299
3. Definição de média aritmética.....	300
4. Regressão linear.....	300
4.1 Aplicações do método de regressão linear.....	304
Unidade III Seqüências.....	320
1. Definição de seqüências.....	323
2. Seqüência limitada inferiormente.....	324
3. Seqüência limitada superiormente.....	324
4. Seqüência limitada.....	325
5. Seqüências monótonas.....	325
6. Seqüência convergente.....	326
7. Seqüência divergente.....	326
8. Aplicações de seqüências.....	326
9. Aplicações de seqüências, quando a função $f(x)$ tem sua variável x assumindo valores de uma seqüência (A_n)	332
Unidade IV Custo Marginal e Receita Marginal.....	337
1. Introdução.....	337
2. Velocidade média.....	338
3. Variação da função.....	339
4. Taxa média de variação.....	341
5. Custo Marginal.....	347
5.1. Custo marginal dado pelas funções.....	347
5.1.1. Função constante.....	347
5.1.2. Função linear.....	348
5.1.3. Função quadrática.....	348
5.1.4. Função parábola cúbica.....	349
5.1.5. Função $C(q) = q^n$	350
5.2. Aplicações de custo e receita marginal.....	350
Capítulo 5 Relatando Resultados.....	366
Anexos.....	375
Referências Bibliográficas.....	394

Desde jovem sempre desejamos ser professor de matemática. Assim optamos por fazer, em primeiro lugar, o curso de formação de professor primário e ingressamos no magistério na cidade de Santo André, lecionando para a quarta série (quarto ano primário). Ao mesmo tempo em que lecionávamos no período da manhã, na parte da tarde cursávamos um preparatório para vestibulares e ingressamos no Curso de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Faculdade de Filosofia São Bento).

Quando aluno do terceiro ano, deixamos a função de Professor Primário e passamos a lecionar no Curso Preparatório para Vestibulares e neste nos tornamos Diretor Pedagógico.

Logo após a formatura, ingressamos como docente da Faculdade de Tecnologia de São Paulo (Fatec-SP), na qual lecionamos em vários de seus cursos, Cálculo, Estatística, Lógica, Geometria Analítica, etc. Nesse período obtivemos o título de Mestre pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, com a dissertação na área de Álgebra intitulada *Teoria dos Caracteres para Grupos Finitos*.

Por muitos anos lecionamos na Fatec-SP para as turmas de Processamento de Dados, cujo índice de procura no vestibular atingia em média cinquenta candidatos para cada vaga. Desta maneira, podemos dizer que os alunos da Fatec-SP tinham bom nível de escolaridade e compreensão, o que sempre facilitou o cumprimento do programa, obtendo-se ótimos índices de aprovação, mesmo havendo grande exigência na avaliação da disciplina.

Quando assumimos as aulas de Matemática do Curso de Administração da Universidade Paulista, período da manhã, com um conteúdo programático e uma bibliografia que exigia apenas matemática pura, sem aplicações na área profissionalizante, observamos que o rendimento escolar dos alunos era desastroso. Procuramos fazer várias inovações didáticas, mantendo o programa oficial, porém a melhora foi pequena. Nosso sentimento de frustração era total, pois, até então, sempre acreditamos ter sido um bom professor.

Na busca de novas metodologias de ensino que nos auxiliassem a ter sucesso no ensino de matemática para o Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista (Unip) e que atendessem ao perfil e às habilidades de um administrador, tornamo-nos aluno no nível de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp), Campus de Rio Claro.

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos.

Capítulo 1 Metodologia de Pesquisa

Com o objetivo de dar um embasamento teórico-científico para o desenvolvimento de nossa pesquisa, utilizamos a Metodologia de Romberg, a qual sugere dez atividades a serem cumpridas em três blocos.

Capítulo 2 Iniciando a Pesquisa

Tão logo iniciamos as aulas de matemática para o Curso de Administração de Empresas da Unip, procuramos investigar os reais motivos da dificuldade de aprendizagem. Desta maneira, identificamos nosso fenômeno de interesse:

Ensino de Matemática no Curso de Administração de Empresas, da Universidade Paulista (Unip), que atenda ao perfil e às habilidades do Administrador exigido pelo MEC/SEDIE (Secretaria de Avaliação e Informação Educacional), DACE (Departamento de Apoio Técnico à Avaliação dos Cursos de Graduação) e perfil profissiográfico e habilidades do Curso de Administração de Empresas do Instituto de Ciências Sociais e Comunicação da Universidade Paulista (Unip).

Partindo do nosso fenômeno de interesse e levantadas questões pertinentes ao tema, construímos um modelo preliminar que, ao longo da pesquisa, foi modificado passando a guiar nossas atividades de pesquisa.

Na busca de soluções de nossos questionamentos, participamos de vários encontros destinados a reestruturar o currículo do Curso de Administração de Empresas, bem como a Disciplina de Matemática.

Assim, o nosso problema a resolver foi enunciado pela conjectura: *É possível elaborar e desenvolver um novo enfoque da disciplina Matemática a partir de aplicações na área profissionalizante de Administração de Empresas, acompanhado de uma nova ementa e novo conteúdo programático, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.*

Capítulo 3 Selecionando Estratégias e Procedimentos e colocando os procedimentos em ação

O presente capítulo foi fundamental para o desenvolvimento da pesquisa, pois, por meio de estratégias e procedimentos, defendemos nossa conjectura. Selecionamos oito estratégias que surgiram naturalmente do Modelo Preliminar Modificado e para cada estratégia apresentamos um procedimento adequado. Na estratégia denominada E₇ e seu

correspondente procedimento P_7 , apresentamos em especial a Metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas. Encontramos na história da matemática relatos de problemas que, na busca de suas soluções, geraram novas teorias matemáticas.

Mostramos que os PCN e as publicações feitas pelo NCTM colocam o foco do Ensino-aprendizagem de Matemática na Resolução de Problemas.

Capítulo 4 Criação e Aplicação do Projeto

Nesse capítulo, apresentamos a criação e aplicação de um projeto diferenciado de trabalho para a Disciplina Matemática, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas e destinado aos alunos do Curso de Administração de Empresas da Unip. Para isso, elaboramos uma nova proposta de ementa e conteúdo programático. Em obediência ao currículo do Curso de Administração de Empresas, preparamos 40 semanas de aula, incluindo provas e exames. Para cada semana apresentamos o conteúdo a ser trabalhado, os objetivos, bem como os enunciados das provas.

Na aplicação do projeto, foram utilizadas vinte e quatro (24) semanas para a Unidade I - Funções; três (3) semanas para a Unidade II - Ajustamento de Curvas; duas (2) semanas para a Unidade III - Seqüências e quatro (4) semanas para a Unidade IV - Custo Marginal e Receita Marginal.

Capítulo 5 Relatando Resultados

Nesse capítulo, apresentamos os resultados obtidos em nossa pesquisa, acompanhados de comentários e críticas. Também procuramos afirmar que, com as mudanças feitas e o uso da metodologia adotada por nós, os resultados foram satisfatórios.

Capítulo 1 Metodologia de Pesquisa

1.1 - A Metodologia de Pesquisa de Romberg

1.2 - Metodologia da nossa pesquisa apoiada na Metodologia de Romberg

- 1.2.1 - Fenômeno de interesse**
- 1.2.2 - Construir um modelo preliminar**
- 1.2.3 - Relacionar com idéias de outros**
- 1.2.4 - Questões ou Conjecturas**
- 1.2.5 - Selecionar estratégias de pesquisa**
- 1.2.6 - Selecionar procedimentos de pesquisa**
- 1.2.7 - Ganhar evidência**
- 1.2.8 - Interpretar as evidências colhidas**
- 1.2.9 - Relatar resultados**
- 1.2.10 - Antecipar ações de outros**

|

CAPÍTULO 1 METODOLOGIA DE PESQUISA

Quando começamos a ministrar aulas de matemática para o Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista (Unip), Campus Vergueiro, verificamos que as aulas expositivas dialogadas que ministrávamos, com um conteúdo programático indicado, não eram motivadoras e observava-se baixo rendimento na aprendizagem. Esse fato se tornava mais claro quando das avaliações bimestrais.

Fizemos uma série de inovações de maneira empírica sem nenhum embasamento teórico-científico, tanto no conteúdo programático quanto na maneira de expor os assuntos em aula.

Houve uma melhora na aprendizagem, porém não pudemos e nem tampouco soubemos analisar os exatos motivos que produziram a melhora, pois não utilizamos nenhum método de pesquisa científica. Estávamos certos de que havia ocorrido melhora no ensino-aprendizagem e nesse instante percebemos que deveríamos deixar a preocupação empírica e passar a ter uma preocupação científica, isto é, uma preocupação científica- metodológica, pois só dessa maneira poderíamos dar respostas às inovações realizadas.

A partir de então, o método científico passou a ser o instrumento, o caminho, a estratégia e o procedimento para o desenvolvimento da nossa pesquisa.

Segundo (GIL, 1995, p.27), podemos definir método como caminho para se chegar a determinado fim. E método científico como o conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos adotados para se atingir o conhecimento.

Ainda, segundo o dicionário Houaiss da Língua Portuguesa:

Metodologia: Corpo de regras e diligências estabelecidas para realizar uma pesquisa, e

Método: Processo organizado, lógico e sistemático de pesquisa, instrução, investigação, apresentação, etc.

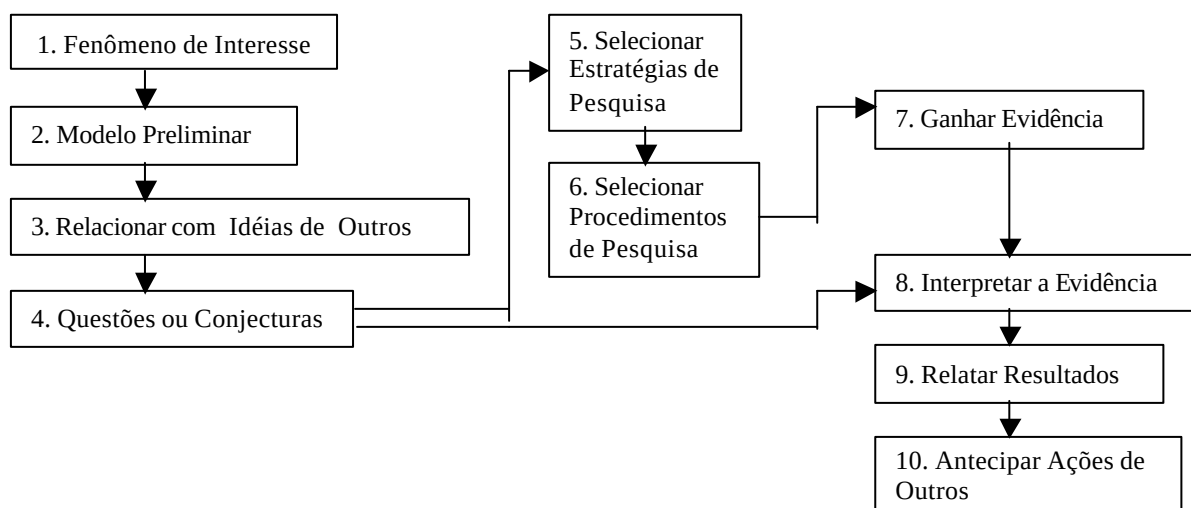
1.1 - A Metodologia de Pesquisa de Romberg

A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho é a Metodologia de Pesquisa de Romberg, que se encontra no artigo Perspectives on Scholarship and Research Methods (Perspectivas para Educação e Métodos de Pesquisa) do livro Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, capítulo 3. O artigo foi publicado em 1992 e é de autoria de Thomas A . Romberg, educador, matemático e professor de Curriculum and Instruction of Wisconsin Center for Education Research, University of Winsconsin, Madison , USA.

Essa metodologia propõe 10 (dez) atividades a serem cumpridas, não necessariamente na ordem por ele sugerida.

Essas atividades de pesquisa são distribuídas em três blocos. O primeiro bloco é formado por quatro (04) atividades, que nos levam a identificar o fenômeno de interesse, criar um modelo preliminar, relacionar idéias próprias com idéias de outros e fazer perguntas ou levantar conjecturas. O segundo bloco (atividades 5 e 6) é o mais importante para a pesquisa, pois, para atender a conjectura apresentada, devemos selecionar estratégias e procedimentos correspondentes para levar adiante a pesquisa. O último bloco (atividades de 7 a 10) nos leva a uma ação prática, pois, de posse das evidências coletadas, interpretando e analisando as informações colhidas, podemos defender nossa conjectura. Depois, relatamos os resultados e antecipamos ações de outros.

Modelo de Romberg - Atividades de pesquisa e como elas estão relacionadas.



1.2 - Metodologia da nossa pesquisa apoiada na Metodologia de Romberg

1.2.1 - Fenômeno de interesse

Toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um problema particular ou um fenômeno do mundo real. (Romberg, 1992, p. 51)

De 1995 a 1998, o Curso de Administração de Empresas da Unip passou por uma grande reforma curricular. Ocorreram inúmeras reuniões gerais e específicas por área. Nessas ocasiões apresentamos aos colegas as dificuldades encontradas no tocante à aprendizagem e as mudanças por nós implementadas. Verificamos que as dificuldades observadas por nós no

rendimento escolar eram semelhantes às dos nossos colegas. As mudanças que sugerimos foram aceitas e implementadas pelo grupo de professores. Por indicação dos colegas à Coordenação do Curso de Administração de Empresas, ficou conosco a responsabilidade da disciplina Matemática.

Dessa maneira, com a responsabilidade pela condução da disciplina, aumentaram nossas preocupações em relação ao ensino-aprendizagem e, portanto, procuramos detectar os motivos da dificuldade dos alunos em aprender Matemática. Ao longo desses anos pudemos identificar o nosso fenômeno de interesse:

Ensino de Matemática no Curso de Administração de Empresas, da Universidade Paulista (Unip), que atenda ao perfil e às habilidades do Administrador exigidos pelo MEC/SEDIE (Secretaria de Avaliação e Informação Educacional), DACE (Departamento de Apoio Técnico à Avaliação dos Cursos de Graduação) e perfil profissiográfico e habilidades do Curso de Administração de Empresas do Instituto de Ciências Sociais e Comunicação da Universidade Paulista (Unip).

1.2.2 - Construir um modelo preliminar

Para Romberg (1992, p.51):

Um pesquisador levanta questionamentos sobre certos aspectos importantes, como variáveis do fenômeno de interesse e de como esses aspectos estão relacionados, depois, os ilustra num modelo. Assim um modelo é simplesmente um conjunto de descrições de variáveis-chave e a relação implícita que há entre elas. O modelo serve de ponto inicial ou orientação para a situação de interesse e pode ser modificado no decorrer da pesquisa.

Ao longo dos anos em que ministramos a disciplina Matemática, levantamos uma série de questionamentos que poderiam ajudar a criar um modelo preliminar de pesquisa:

Qual o perfil, formação e habilidades do Administrador de Empresas exigidos pelo MEC/SEDIE e também pelo CFA, bem como o perfil profissiográfico e habilidades do Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista (Unip)?

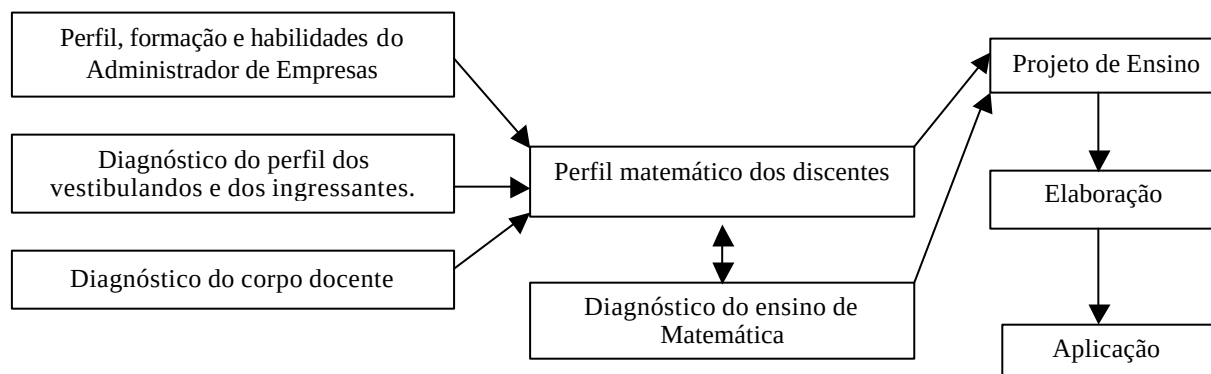
Qual o perfil dos vestibulandos e em particular dos ingressantes?

Qual o perfil do corpo docente de Matemática e do corpo docente das disciplinas que usam Matemática?

Qual a realidade do ensino de matemática nas últimas décadas e sua influência no Ensino Fundamental e Médio na formação dos ingressantes?

Apoiado nestes questionamentos propomos um modelo preliminar.

Modelo preliminar



1.2.3 - Relacionar com idéias de outros

Com respeito a essa ação, Romberg (1992, p.51) assim se expressa:

Uma importante atividade é examinar o que outras pessoas pensam sobre nosso fenômeno de interesse e determinar se suas idéias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto.

As idéias colocadas em nosso projeto de pesquisa surgiram de uma série de discussões informais entre colegas do Curso de Administração de Empresas da Unip, em reuniões e também em aulas do Curso de Pós-Graduação da Unesp – Rio Claro. Procuraremos fazer um amplo estudo bibliográfico envolvendo as atividades do modelo preliminar e, ainda, conhecer os trabalhos desenvolvidos nessa área em escolas de Administração de Empresas da USP, Unesp, Unicamp e PUC-SP.

1.2.4 - Questões ou Conjecturas

Este é um passo – chave no processo de pesquisa porque, quando se examina um fenômeno particular, um determinado número de questões potenciais inevitavelmente surge. Decidir quais questões examinar não é fácil. Mais do que simplesmente levantar questões interessantes, os pesquisadores geralmente fazem uma ou mais conjecturas (suposições ou predições racionais) sobre o que seria necessário para responder as questões. As conjecturas baseiam-se na relação entre as variáveis que caracterizam o fenômeno e nas idéias sobre aquelas variáveis – chave e sua relação com o esboçado no modelo.
(Romberg,1992, p.52)

Tendo sempre como base o fenômeno de interesse - Ensino de Matemática para o Curso de Administração - levantamos uma série de perguntas a respeito do assunto de interesse.

- O corpo discente do Curso de Administração de Empresas da Unip, alunos oriundos do Ensino Médio, estará preparado para o modelo atual vigente de ensino- aprendizagem de matemática ?
- A metodologia de ensino-aprendizagem, utilizada hoje, será a ideal para esse modelo de alunos ?
- O Ensino da Matemática por meio da resolução de problemas será um meio mais eficaz para a aprendizagem dos alunos, com compreensão e significado? A compreensão pode ser definida como uma medida da qualidade e quantidade de conexões que uma nova idéia tem com idéias existentes. Podemos ainda entender por compreensão a capacidade de perceber o significado de algo e, por significado, entendemos ter o conceito, isto é, saber dizer o que é esse algo.

Observadas essas questões, nossa conjectura para o Curso de Administração de Empresas da Unip será:

É possível elaborar e desenvolver um novo Curso de Matemática a partir de aplicações na área profissionalizante de Administração, acompanhado de uma nova ementa e novo conteúdo programático, apoiado na metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

1.2.5 - Selecionar estratégias de pesquisa

A decisão sobre que métodos devemos usar surge diretamente da questão selecionada, a partir da visão de mundo no qual essa questão está inserida, do modelo construído para explicar o ‘fenômeno de interesse’ e a partir da conjectura que se faz e da necessidade de se obter evidência. (Romberg,1992,p.52)

É de grande importância selecionar estratégias com a finalidade de explicar e defender a conjectura levantada.

1.2.6 - Selecionar procedimentos de pesquisa

Para responder as questões específicas que estão sendo levantadas, evidências devem ser coletadas. É nesse passo, que as técnicas geralmente ensinadas nos cursos de métodos de pesquisa são importantes: Como selecionar uma amostra, como obter informações (entrevistas, questionários, observações, testes), como organizar as informações depois de coletadas e assim por diante. Há um grande número de procedimentos específicos que devem ser seguidos para diferentes tipos de questões. É preciso tomar cuidado ao selecionar os procedimentos que darão luz às questões. (Romberg,1992,p.52)

Selecionaremos procedimentos correspondentes a cada uma das estratégias selecionadas. Uma vez postos em ação os procedimentos, poderão surgir evidências que fundamentem a conjectura levantada.

1.2.7 - Ganhar evidência

Essa atividade pode ser feita diretamente, uma vez que se tenha decidido coletar certas informações para construir um argumento a respeito da natureza das questões a serem levantadas. (Romberg,1992, p.52)

Nessa atividade busca-se evidências sobre a aplicação do procedimento geral estabelecido para a pesquisa.

1.2.8 - Interpretar as evidências colhidas

Neste estágio, analisam-se e interpretam-se as informações obtidas. Pesquisadores, nessas análises e interpretações, ora se utilizam de métodos quantitativos que assinalam números às informações obtidas, ora de métodos qualitativos. É importante perceber, porém, que em toda investigação é sempre coletada mais informação do que a necessária para responder as questões. Parte é relevante, parte irrelevante e algumas não são compreensíveis. Destacar informações importantes de tudo que está disponível é uma arte na qual algumas pessoas são melhores que outras. (Romberg, 1992, p.53)

A análise e a interpretação dos dados coletados são de fundamental importância para a pesquisa, pois elas apontam a tendência, o caminho e a prova do que se desejava mostrar, relativo à conjectura, indicando dessa forma que as hipóteses formuladas podem ser comprovadas.

1.2.9 - Relatar resultados

É importante que, ao término da pesquisa, apresentemos à comunidade educacional os resultados obtidos para que sejam ouvidas as críticas, havendo, desta forma aperfeiçoamento e correções. Segundo Romberg (1992, p.53):

Ser um membro de uma comunidade de pesquisa implica numa responsabilidade de informar a outros membros sobre a investigação completada e buscar seus comentários e críticas. Frequentemente pesquisadores só relatam procedimentos e descobertas, não o modelo ou a visão de mundo. Se isto não estiver estabelecido, os leitores usarão, indubitavelmente, suas próprias noções para interpretar o estudo. Não só os resultados, mas também respostas a questões que deveriam estar encaixadas numa ciência precisam ser transmitidas a outros.

1.2.10 - Antecipar ações de outros

Concluída a pesquisa, devemos apresentar seus resultados à comunidade educacional, procurando ouvir críticas e sugestões com fim de aperfeiçoá-la.

Dados os resultados de uma investigação particular, todo pesquisador fica interessado em saber o que acontecerá a seguir e deveria, então, antecipar ações posteriores. (Romberg,1992, p.53)

Capítulo 2 Iniciando a pesquisa

2.1 - Identificando o fenômeno de interesse

2.1.1 - Introdução

2.1.2 - Conhecendo a Universidade Paulista (Unip)

2.1.3 - Nosso fenômeno de interesse

2.2 - Construindo o modelo preliminar

2.3 - Relacionando com idéias de outros

2.4 - Conjecturando sobre uma nova forma de trabalho alternativo da disciplina Matemática

CAPÍTULO 2 INICIANDO A PESQUISA

2.1 - Identificando o fenômeno de interesse

2.1.1 – Introdução

Nossa vocação profissional sempre foi ligada ao magistério. Assim, logo após a formatura como Professor Primário, começamos a lecionar para a quarta série do Ensino Fundamental, na cidade de Santo André.

Ao mesmo tempo em que lecionávamos, concluímos a licenciatura e o bacharelado em Matemática pela PUC-SP. A partir da formatura tornamo-nos Professor da Fatec-SP. Pelo fato de a Fatec-SP ser uma Faculdade pública, localizada em frente à Estação Tiradentes do Metrô, apresentava alto índice de procura no vestibular e, como consequência, os alunos apresentavam bom nível de escolaridade, o que facilitava o ensino-aprendizagem de Matemática.

Quando passamos a lecionar Matemática para as turmas do Curso de Administração de Empresas da Unip-Campus Vergueiro, utilizando a mesma metodologia de ensino-aprendizagem das aulas da Fatec-SP, isto é, aulas expositivas dialogadas e com ementa e conteúdo programático tradicionais dos Cursos de Administração de Empresas, o rendimento escolar era desastroso.

2.1.2 - Conhecendo a Universidade Paulista (Unip)

O texto abaixo foi retirado do catálogo geral da Universidade Paulista, publicado em 1997.

“A Sociedade Unificada Paulista de Ensino Renovado Objetivo – Supero, sociedade civil, com fins educacionais, com sede, foro e domicílio nesta capital, na Av. Paulista nº 900, foi criada em 15 de Setembro de 1971, personalizando-se quando do registro de seus Estatutos no 4º Cartório de Registro Civil de pessoas Jurídicas da cidade de São Paulo.

Denominada inicialmente Sociedade Universitária Paulista de Ensino Renovado Objetivo – Supero, por força de Parecer do Conselho Federal de Educação, teve sua razão social alterada para a atual, em 01 de Abril de 1974.

Sua iniciação no ensino superior deu-se em 1972, por meio do Instituto Unificado Paulista – IUP, com a oferta dos Cursos de Letras, Pedagogia, Comunicação Social e

Psicologia, reconhecidos pelo Decreto Federal nº 77.546, de 05 de Maio de 1976. Posteriormente foi autorizado a funcionar, como habilitação do Curso de Letras, o Curso de Tradutor e Intérprete, já reconhecido.

A partir deste Instituto, a organização, em permanente processo de crescimento, solicitou ao Conselho Federal da Educação e obteve, em 1975, o funcionamento do Instituto de Ensino de Engenharia Paulista – IEEP, com o curso de Engenharia, nas habilitações Civil, Mecânica e Produção, todos já reconhecidos.

O curso de Odontologia, afeito ao Instituto de Odontologia Paulista – IOP, foi autorizado a funcionar pelo Decreto federal nº 85791 de 09 de Março de 1981, sendo reconhecido pela Portaria Ministerial nº 456/84.

Vinculado ao Instituto de Odontologia Paulista, foi solicitado o funcionamento do Curso de Farmácia, autorizado a funcionar pelo Decreto federal nº 95.239, de 13/11/87.

Objetivando estimular setores de preparação de mão de obra, indispensáveis à política de desenvolvimento nacional, devidamente autorizados pelo Conselho Federal de Educação, foram criados os cursos de Ciência da Computação, por meio do Decreto nº 95.005, de 05/10/87, sendo reconhecido pela Portaria Ministerial nº 1.201, de 13 de Agosto de 1992 e o Curso de Tecnologia em Processamento de Dados, por meio do Decreto nº 95.487, sendo reconhecido pela Portaria Ministerial nº 2.023, de 01 de Novembro de 1991.

Após quase duas décadas da abertura do primeiro curso superior, atuando a instituição no oferecimento de cursos tanto nas áreas fundamentais do conhecimento humano, quanto na área profissionalizante, profundas alterações estruturais foram introduzidas na organização, ampliando-se os espaços físicos, laboratórios, biblioteca, em suma, todo o embasamento sobre o qual se edificaria a futura universidade.

Em data de 09 de Novembro de 1988, por meio da Portaria Ministerial nº 550, foi autorizado, pela via do reconhecimento, o funcionamento da Universidade Paulista – Unip, integrada, inicialmente, pelos cursos até então vinculados aos três institutos mencionados, além dos cursos de Estudos Sociais. Com habilitação em História, Geografia e Ciências com habilitação em Matemática, recebidos, por transferência de manutenção, da Universidade São Francisco. Constituiu-se, desta forma, o complexo de cursos e atividades que permitiu o nascimento da Universidade Paulista – Unip, já reconhecida.

Em 17 de Junho de 1994, por Despacho do Sr. Ministro da Educação e do Desporto, foi homologado o Parecer, do então Conselho Federal de Educação, de nº 104/94, favorável à criação das unidades universitárias, descentralizadas em Campinas e Ribeirão Preto, da Universidade Paulista – Unip.

Dentro de um planejamento consistente e em atendimento ao plano de crescimento da UNIP foi solicitada, aos órgãos competentes do Ministério da Educação e do Desporto, a abertura de novas Unidades Universitárias em cidades do interior Paulista, sendo autorizados por este, as seguintes unidades:

- Unidade Universitária da Unip / Araçatuba;
- Unidade Universitária da Unip / Araraquara;
- Unidade Universitária da Unip /Bauru;
- Unidade Universitária da Unip / São José dos Campos;
- Unidade Universitária da Unip /São José do Rio Preto;
- Unidade Universitária da Unip / Santos;
- Unidade Universitária da Unip /Sorocaba;

Em outros estados:

- Unidade Universitária da Unip / Goiânia;
- Unidade Universitária da Unip / Manaus;
- Unidade Universitária da Unip / Brasília.

Esta expansão se dá como uma sedimentação de um grupo educacional que há anos se caracteriza por aplicar, em todos os graus de ensino, metodologias inovadoras, acompanhando a par e passos, a mais moderna tecnologia de ensino, na busca do melhor na formação da nossa juventude, a fim de que entreguemos ao mercado de trabalho do próximo milênio, as “melhores cabeças”, formadas para atender às demandas e à agilidade das alterações dos processos produtivos, cada vez mais dependentes da eletrônica e de suas inovações.

A Universidade Paulista, consciente de que a sua função mais importante e crucial é garantir a conservação e o progresso nos diversos ramos do conhecimento humano por meio do ensino, da pesquisa e da extensão de serviços à comunidade, num estímulo próprio que anima a atividade criadora de toda a Universidade e em atenção às suas disposições estatutárias, desenvolve os seguintes objetivos:

I – promover o Ensino, a Pesquisa e a Extensão pelo cultivo do saber, nos domínios da Filosofia, das Ciências, das Letras, das Artes e das Tecnologias, e a sua aplicação a serviço do progresso da comunidade e da pessoa humana;

II – contribuir para a formação geral e técnica da comunidade, mediante o preparo de profissionais liberais e especialistas qualificados nos diferentes campos do conhecimento, bem como para a formação de tecnólogos de nível superior;

III – atuar no processo de desenvolvimento da comunidade que vive em sua área de abrangência e influência;

IV – contribuir para o fortalecimento da solidariedade entre os homens;

V – colaborar no esforço de desenvolvimento do País, articulando-se com os poderes públicos e com a iniciativa privada, para o estudo de problemas em nível regional e nacional;

VI – participar, mediante a promoção de iniciativas culturais e a prestação de serviços e assistência técnica, na solução de problemas da comunidade.”

2.1.3 – Nosso fenômeno de interesse

A partir de nossa trajetória de trabalho como Professor – Educador do Curso de Administração de Empresas da Unip e conhecendo a Universidade Paulista, identificamos nosso fenômeno de interesse.

Ensino de Matemática no Curso de Administração de Empresas, da Universidade Paulista (Unip), que atenda ao perfil e às habilidades do Administrador exigido pelo MEC/SEDIE (Secretaria de Avaliação e Informação Educacional), DACE (Departamento de Apoio Técnico à Avaliação dos Cursos de Graduação) e perfil profissiográfico e habilidades do Curso de Administração de Empresas do Instituto de Ciências Sociais e Comunicação da Universidade Paulista (Unip).

2.2 - Construindo o modelo preliminar

Tão logo iniciamos as aulas de matemática no Curso de Administração de Empresas da Unip, detectamos que os resultados de nossas avaliações não respondiam satisfatoriamente aos objetivos propostos pela disciplina. Tentamos descrever, ou melhor compreender, como deveríamos encaminhar nossa investigação no sentido de conhecer os reais motivos de nosso fracasso e procuramos direcionar nossa investigação para o Ensino de Matemática no Curso de Administração de Empresas.

Sendo o Ensino de Matemática parte integrante do currículo do Curso de Administração de Empresas, é necessário, para um pesquisador e professor deste curso, conhecer o perfil, a formação e as habilidades de um Administrador Profissional e saber como

a Matemática pode contribuir para a sua formação. Essas informações desejadas são normatizadas pelo MEC/SEDIE e também pelo Conselho Federal de Administração. Além dessas normas, a Universidade Paulista (Unip) propõe o perfil profissiográfico e as habilidades para o Curso de Administração de Empresas.

Após conhecermos o perfil do Administrador Profissional, passaríamos a conhecer o perfil dos candidatos ao vestibular do curso de Administração de Empresas, por meio de questionário aplicado aos vestibulandos, em atendimento às exigências feitas pelo MEC.

Com os resultados colhidos do questionário aos vestibulandos, procuraríamos, por meio de novo questionário elaborado por nós e aplicado aos alunos aprovados e matriculados na disciplina Matemática, comparar os resultados e verificar o grau de conhecimento matemático que esses alunos traziam.

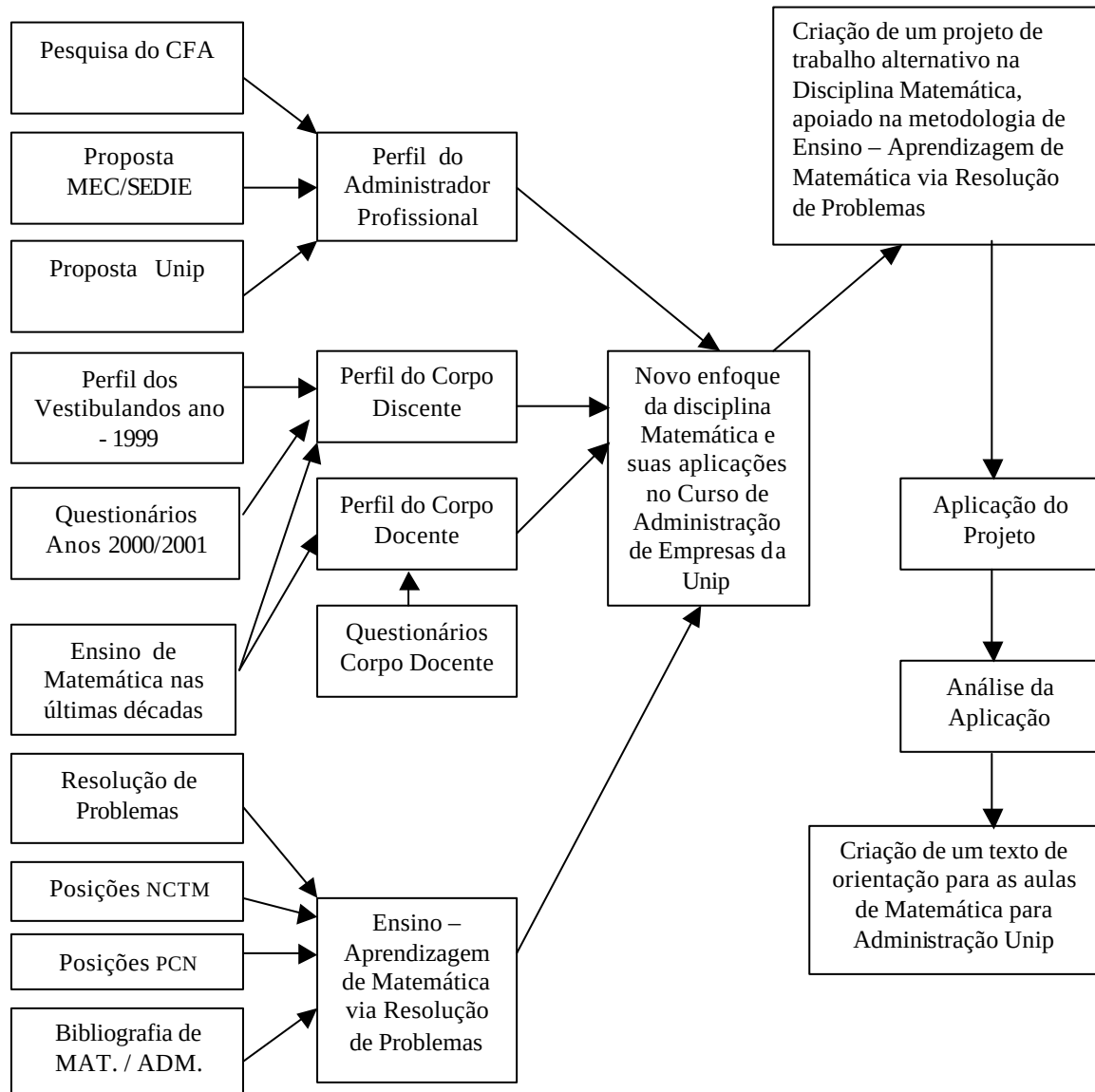
Além disso, deveríamos conhecer o perfil do corpo docente que ministra aulas de Matemática e também do corpo docente da área profissionalizante que utiliza matemática, identificando quais tópicos são mais utilizados em suas disciplinas.

Por fim, procuraríamos conhecer a realidade do Ensino de Matemática no Estado de São Paulo durante as últimas décadas com relação ao Ensino Fundamental e Médio e sua influência na formação dos alunos ingressantes do Curso de Administração de Empresas da Unip.

Desta maneira, proporíamos um novo modelo preliminar, pois no primeiro modelo tínhamos como foco o perfil matemático dos discentes e o diagnóstico do Ensino de Matemática, porém percebemos que as variáveis consideradas não eram variáveis do perfil matemático dos discentes, mas variáveis do nosso fenômeno de interesse.

Com esta constatação percebemos que nosso modelo preliminar deveria ser modificado e acrescido de outras variáveis, de modo a poder guiar nosso trabalho de pesquisa.

MODELO PRELIMINAR MODIFICADO



2.3 – Relacionando com idéias de outros

Desde o momento em que detectamos que as aulas do Curso de Administração de Empresas da Unip não apresentavam o rendimento desejado, passamos a dialogar com os colegas que ministravam aulas nessas turmas, no sentido de verificar se em suas disciplinas ocorria o rendimento escolar desejado.

Nas reuniões pedagógicas de encerramento do ano letivo sempre apresentávamos nossas preocupações com o Ensino - Aprendizagem de matemática e relatávamos as mudanças feitas e os resultados alcançados.

Nesses diálogos ouvimos várias vezes dos professores frases como:

Parte dos alunos não mostra interesse durante as aulas, não responde corretamente aos questionamentos feitos após a exposição do tema e não apresenta bom rendimento escolar.

Por causa de nosso envolvimento na tentativa de apresentar soluções aos nossos questionamentos, participamos de vários encontros destinados a reestruturar o currículo do Curso de Administração de Empresas. Dessa maneira pudemos propor mudanças na ementa e o novo conteúdo programático de matemática, retirando alguns tópicos e propondo outros novos.

De 5 a 10 de fevereiro de 1996, participamos da segunda etapa da reforma curricular dos Cursos de Administração de Empresas da Unip e um dos temas discutidos, (Disciplinas da Organização de Aprendizagem) foi retirado do livro: A Quinta Disciplina - Arte, Teoria e Prática da Organização de Aprendizagem, do autor Peter M. Senge, Phd pelo MIT (Massachusetts Institute of Technology). Nesse texto é destacada a importância do trabalho em grupo.

Na página 11, lê-se:

As técnicas e idéias apresentadas neste livro destroem a ilusão de que o mundo é composto por forças separadas, não relacionadas entre si. Livrando-nos dessa ilusão, podemos então formar "organizações de aprendizagem", nas quais as pessoas expandem continuamente sua capacidade de criar os resultados que realmente desejam, onde surgem novos e elevados padrões de raciocínio, onde a aspiração coletiva é libertada e onde as pessoas aprendem continuamente a aprender em grupo.

E, na página 19, encontramos:

Nós sabemos que as equipes podem aprender ; no esporte, nas artes cênicas, na ciência, e até ocasionalmente, nos negócios, existem exemplos extraordinários em que a inteligência da equipe supera a inteligência dos indivíduos que a compõem, e onde as equipes desenvolvem uma capacidade extraordinária para ações coordenadas. Quando as equipes estão realmente aprendendo, além de produzirem resultados extraordinários em conjunto, seus integrantes também se desenvolvem com maior rapidez no sentido individual.

O aprendizado em grupo é vital porque a unidade fundamental de aprendizagem nas organizações modernas é o grupo, não os indivíduos. O fato é que a organização só terá capacidade de aprender se os grupos forem capazes de aprender.

Essas discussões mostraram a importância do trabalho em grupo para o futuro administrador profissional e também para os docentes que ministram aulas no Curso de Administração de Empresas.

Procurando relacionar nossa proposta de trabalho, ensino de matemática para o curso de Administração de Empresas da Unip, apoiado na metodologia de ensino - aprendizagem de matemática via resolução de problemas, consultamos o acervo bibliográfico de graduação e pós-graduação da Universidade de São Paulo (USP), da Universidade de Campinas (Unicamp) e da Universidade Estadual Paulista (Unesp).

Nessas universidades não encontramos nenhum trabalho de pesquisa que tivesse semelhança com nossa proposta. A disciplina de matemática, pertencente aos Cursos de Administração, é apresentada com ementa e conteúdo programático formulado de maneira tradicional, e com metodologia de ensino - aprendizagem feita por meio de aulas expositivas dialogadas, com exercícios e com bibliografia básica formada por livros tradicionais.

2.4 - Conjecturando sobre uma nova forma de trabalho alternativo da disciplina matemática

Dissemos no começo deste capítulo que lecionamos muitos anos na Fatec-SP para alunos de bom nível de escolaridade e que obtínhamos ótimos índices de aprovação.

Nesse período nossas aulas eram expositivas dialogadas, com listas de exercícios e problemas aplicativos. Quando aplicamos essa mesma metodologia aos alunos do Curso de Administração de Empresas da Unip, o rendimento escolar foi ruim. Por esse motivo conjecturamos: Os alunos do Curso de Administração de Empresas, estarão preparados para um ensino - aprendizagem de matemática com aulas expositivas dialogadas e com listas de exercícios?

A todo instante tem-se citações em revistas especializadas de que os alunos chegam à universidade despreparados. A Revista Ensino Superior do mês de outubro de 2002, página 8, apresenta texto da palestra proferida pelo professor Gabriel Mário Rodrigues, presidente do Sindicato das Entidades Mantenedoras de Estabelecimentos de Ensino Superior de São Paulo (Simesp), durante o VI Congresso e Feira de Educação Saber, no qual ele defende

A necessidade de uma integração entre o Ensino Médio e a Universidade, porque, hoje, o Ensino Médio está baseado em conteúdos, o que nem sempre confere ao jovem o grau de conhecimento que deveria ter ao entrar numa faculdade.

Dessa forma se espera:

Reduzir as reclamações das faculdades privadas de que muitos alunos chegam a elas sem saber raciocinar e sem saber escrever.

Nessa mesma revista, página 29, o Professor João Antônio Zuffo, Coordenador - Geral do Laboratório de Sistemas Integráveis da Escola Politécnica da USP, em entrevista dada a essa revista, desenvolve o tema: O Ensino na Nova Era. Assim ele se pronuncia com respeito aos Cursos Superiores e às aulas expositivas:

Em primeiro lugar, proponho a diminuição da carga horária nos cursos. Com o excesso de atividades na sala de aula, há um baixo aproveitamento, pois a mentalidade mudou e as pessoas não se adaptam mais a aulas simplesmente expositivas.

Observadas essas questões, nossa conjectura para o Curso de Administração de Empresas da Unip é:

É possível elaborar e desenvolver um novo enfoque da disciplina Matemática a partir de aplicações na área profissionalizante de Administração de Empresas, acompanhado de uma nova ementa e novo conteúdo programático, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

Capítulo 3 Seleccionando Estratégias e procedimentos e colocando os procedimentos em ação

3.1 - O Perfil do Administrador de Empresas

3.1.1 - Introdução

3.1.2 - Perfil, formação e oportunidades de trabalho do Administrador Profissional segundo pesquisa do CFA

3.1.3 - Perfil e habilidades do Administrador exigido pelo MEC/SEDIE

3.1.4 - Perfil profissiográfico e habilidades pretendidas para o Curso de Administração de Empresas do Instituto de Ciências Sociais e Comunicação da Universidade Paulista

3.2 - Perfil do Corpo Discente

3.2.1 - Perfil dos candidatos ao vestibular do Curso de Administração de Empresas da Unip – Capital, São Paulo, setembro de 1999

3.2.2 - O Perfil do Corpo Discente Ingressante – Anos 2000 e 2001 - do Curso de Administração de Empresas da Unip – Campus Vergueiro – Período Matutino

3.2.3 - Análise dos três questionários

3.2.4 - O Ensino de Matemática nas últimas décadas

3.2.4.1 - Realidade do Ensino de Matemática nas últimas décadas no Brasil

3.2.4.2 - Realidade do ensino de Matemática do Curso de Administração de Empresas da Unip

3.2.5 - Conclusões

3.3 - Perfil do Corpo Docente do Curso de Administração de Empresas da Unip

3.3.1 - Perfil do Corpo Docente que ministra aulas de matemática para o Curso de Administração de Empresas da Unip

3.3.2 - Perfil do Corpo Docente das disciplinas que usam Matemática no Curso de Administração de Empresas da Unip

3.3.3 - Análise dos resultados obtidos dos questionários aplicados ao corpo docente

3.3.4 - Conclusões sobre o corpo docente

3.4 - Ensino - Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas

3.4.1- Conhecendo a metodologia de Ensino - Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas

CAPÍTULO 3 SELECIONANDO ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS E COLOCANDO OS PROCEDIMENTOS EM AÇÃO

Selecionar estratégias e procedimentos são atividades muito importantes da pesquisa, pois é nesse momento que o pesquisador começa a defender a sua conjectura. No nosso caso, elaboramos oito estratégias que surgiram naturalmente do Modelo Preliminar Modificado e para cada estratégia selecionamos um procedimento adequado.

A partir deles, colocaremos em ação os procedimentos selecionados.

- As estratégias selecionadas são:

E₁ Fazer pesquisa bibliográfica no sentido de obter perfil, formação e habilidades de trabalho do administrador profissional.

E₂ Coletar dados historiográficos obtidos junto à Comissão Organizadora do Vestibular.

E₃ Elaborar questionário a ser aplicado ao corpo discente ingressante, visando conhecer tendências, aptidões e conhecimento matemático.

E₄ Apresentar desenvolvimento do ensino de matemática nas últimas décadas no Brasil.

E₅ Elaborar questionário a ser aplicado ao corpo docente que ministra aulas de matemática, visando conhecer sua formação acadêmica, experiência profissional e metodologia usada.

E₆ Elaborar questionário a ser aplicado ao corpo docente das disciplinas que utilizam matemática em suas aulas, visando conhecer formação acadêmica, experiência profissional, metodologia usada e tópicos de matemática mais utilizados.

E₇ Pesquisar sobre metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

E₈ Avaliar o reflexo desse trabalho nas outras disciplinas do curso que utilizam Matemática..

E_G Nossa estratégia geral é criar um projeto diferenciado de trabalho, para a disciplina de matemática, destinado aos alunos do Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista (Unip).

Com essas estratégias poderemos traçar um perfil dos corpos discente e docente do Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista (Unip).

- São os seguintes os procedimentos correspondentes às estratégias selecionadas:
 - P₁** Levantar Pesquisa bibliográfica junto ao MEC/SEDIE (Secretaria de Avaliação e Informação Educacional) / DACE (Departamento de Apoio Técnico à Avaliação dos Cursos de Graduação), Conselho Federal de Administração, bem como da Universidade Paulista (Unip) no sentido de obter o perfil, formação e habilidades do Administrador Profissional.
 - P₂** Buscar junto à comissão organizadora do vestibular os dados historiográficos de todos os candidatos ao Curso de Administração da Unip.
 - P₃** Aplicar questionário ao corpo discente ingressante, visando conhecer suas tendências, suas aptidões e seu conhecimento matemático.
 - P₄** Pesquisar bibliografia existente sobre o Ensino de Matemática nas últimas décadas no Brasil.
 - P₅** Aplicar questionário ao corpo docente que ministra aulas de matemática, visando conhecer formação acadêmica, sua experiência profissional e sua metodologia de trabalho
 - P₆** Aplicar questionário ao corpo docente das disciplinas que utilizam matemática em suas aulas, visando conhecer sua formação acadêmica, sua experiência profissional, sua metodologia utilizada e tópicos mais utilizados
 - P₇** Apresentar a Metodologia do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.
 - P₈** Analisar os efeitos que uma metodologia alternativa pode produzir sobre o Curso de Administração de Empresas e que se utiliza da disciplina Matemática.
 - P_G** Elaboração do projeto.
- Colocando os procedimentos em ação:

3.1 - O Perfil do Administrador de Empresas

Estratégia E₁

Fazer pesquisa bibliográfica no sentido de obter o perfil, a formação e as habilidades do trabalho do administrador profissional.

Procedimento P₁

Levantar pesquisa bibliográfica junto ao MEC/SEDIE (Secretaria de Avaliação e Informação Educacional) / DACE (Departamento de Apoio Técnico à Avaliação dos Cursos de Graduação), Conselho Federal de Administração, bem como da Universidade Paulista (Unip) no sentido de obter o perfil, formação e habilidades do Administrador Profissional.

3.1.1 - Introdução

Nas últimas décadas observaram-se mudanças extraordinárias. Assim, indústrias que atuavam em pequenas cidades se desenvolveram e tornaram-se conglomerados complexos que não mais produzem para a sua região, mas produzem e exportam para todos os países. Esse intercâmbio mundial, globalização, necessita de novas tecnologias e presenciam-se a todo o instante processos de mudança nas mais diferentes esferas da vida humana. Para se integrar nesse novo contexto é importante que a educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. Dessa maneira, as empresas serão mais competitivas e terão na produtividade e na qualidade de seus produtos seus principais diferenciais. Nossos esforços em compreender essas mudanças pressupõem buscar informações confiáveis que, respaldadas por referenciais teóricos, possam ajudar a sociedade a encontrar o caminho para o exercício profissional responsável e com cidadania.

Neste contexto, onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas de trabalho requerem alguma competência em Matemática. Compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessário, tanto para tirar conclusões e fazer argumentações quanto para a tomada de decisões.

Neste universo de constantes mudanças, tanto na esfera nacional como na internacional, busca-se delinear o perfil do Administrador Profissional.

3.1.2 - Perfil, formação e oportunidades de trabalho do Administrador Profissional segundo pesquisa do CFA

O perfil, formação e oportunidades que aqui apresentamos foram extraídos da Pesquisa Nacional feita pelo Conselho Federal de Administração e publicado em 1999, com a participação de Associações, Faculdades, Institutos e Universidades.

A pesquisa quantitativa foi realizada no segundo semestre de 1998, por meio da aplicação de questionários a 783 (setecentos e oitenta e três) Administradores Profissionais, a 246 (duzentos e quarenta e seis) Professores Universitários, ligados aos programas de graduação e pós-graduação em Administração, e a (300) trezentos Empregadores residentes nas diversas regiões do Brasil.

3.1.2.1 - Segmento Administradores Profissionais

Os Administradores Profissionais (783) que participaram da pesquisa qualitativa revelaram os conhecimentos, as habilidades e as atitudes que julgaram mais relevantes para um administrador. Foram listadas 38 (trinta e oito) alternativas de conhecimentos, habilidades e atitudes que refletem o perfil do Administrador desejado pelas empresas. As mais importantes são, em ordem decrescente:

- **Conhecimentos:**

1. De informática;
2. De inglês;
3. Na área de planejamento e
4. Gerais, que sejam sólidos.

- **Habilidades:**

1. Saber trabalhar em equipe;
2. Capacidade de planejar;
3. Capacidade de tomar decisões;
4. Criatividade;
5. Capacidade para aprender;
6. Comunicar-se bem verbalmente;
7. Capacidade para negociar;
8. Capacidade para assumir riscos;
9. Visão articulada das várias áreas da empresa e
10. Comunicar-se bem por escrito.

- **Atitudes:**

1. Ter garra, ambição e vontade de crescer;
2. Motivar a equipe;
3. Ter espírito empreendedor;
4. Ser ético;
5. Buscar atualizar-se;
6. Ter entusiasmo e otimismo;
7. Ter comprometimento com a empresa;
8. Saber explorar sua experiência profissional;
9. Ter predisposição para trabalhar muito e
10. Desejar estudar.

3.1.2.2 - Segmento Professores Universitários

No segmento Professores (246), os resultados da pesquisa quantitativa apresentam como fatores mais representativos das deficiências presentes na formação universitária do Administrador os seguintes:

1. Desarticulação entre ensino e prática;
2. Distância entre a formação universitária e as exigências do mercado de trabalho;
3. Falta de incentivo à pesquisa;
4. Atribuição de pouca importância ao curso por parte do estudante;
5. Ingresso do estudante sem o devido preparo;
6. Dificuldade de expressão oral e escrita;
7. Falta de estágio supervisionado e
8. Falta de investimento na atualização/reciclagem dos professores.

3.1.2.3 - Segmento Empregadores

No segmento formado por 300 Empregadores, observa-se que as competências reconhecidas como as mais relevantes para um administrador convergem, em grande parte, para as competências reconhecidas pelos Empregadores.

- **Conhecimentos:**

1. De informática;
2. De inglês;
3. De custos;
4. De psicologia;
5. De matemática e
6. De planejamento.

- **Habilidades:**

1. Ter visão global de empresa;
2. Entender os negócios da empresa;
3. Ter bom relacionamento com o público;
4. Ter capacidade de tomar decisões;
5. Comunicar-se bem por escrito e verbalmente;
6. Ter capacidade para planejar;
7. Saber trabalhar em equipe e
8. Ter capacidade para assumir riscos.

- **Atitudes:**

1. Ter espírito empreendedor;
2. Motivar a equipe;
3. Fazer as coisas acontecerem na empresa;
4. Ter iniciativa;
5. Ser ético;
6. Ter maturidade;
7. Ter entusiasmo pelo trabalho e
8. Predisposição para trabalhar muitas horas por dia.

3.1.3 - Perfil e habilidades do Administrador exigido pelo MEC/SEDIE

Sintetizado do documento preliminar editado pelo MEC/SEDIE (Secretaria de Avaliação e Informação Educacional)/DACE (Departamento de Apoio Técnico à Avaliação dos Cursos de Graduação).

3.1.3.1 - Perfil

- a) Internalização de valores de responsabilidade social, justiça e ética profissional;
- b) Sólida formação humanística e visão global que o habilite a compreender o meio social, político, econômico e cultural onde está inserido e tomar decisões em um mundo diversificado e interdependente;
- c) Sólida formação técnica e científica para atuar na administração das organizações, além de desenvolver atividades específicas da prática profissional;
- d) Competência para empreender, analisando criticamente as organizações, antecipando e promovendo suas transformações;
- e) Capacidade de atuar de forma interdisciplinar e
- f) Capacidade de compreensão da necessidade do contínuo aperfeiçoamento profissional e desenvolvimento da autoconfiança.

3.1.3.2 - Habilidades

- a) Capacidade de comunicação interpessoal e expressão correta nos documentos técnicos específicos e de interpretação da realidade;
- b) Capacidade de utilização de raciocínio lógico crítico e analítico, operando com valores e formulações matemáticas e estabelecendo relações formais nos diferentes contextos organizacionais e sociais;

- c) Capacidade de demonstrar compreensão do todo administrativo, de modo integrado, sistêmico e estratégico, bem como de suas relações com o ambiente externo;
- d) Capacidade de propor e implementar modelos de gestão, de inovar e de demonstrar um espírito empreendedor;
- e) Capacidade de negociação, demonstrando atitudes flexíveis e de adaptação a terceiros e a situações diversas;
- f) Capacidade de tomada de decisão, ordenando atividades e programas, assumindo riscos e decidindo entre alternativas;
- g) Capacidade de influenciar o comportamento do grupo com empatia e equidade, visando interesses interpessoais e institucionais e
- h) Capacidade de atuar de forma interativa em prol de objetivos comuns e de compreender a importância da complementaridade das ações coletivas.

3.1.4 – Perfil profissiográfico e habilidades pretendidas para o Curso de Administração de Empresas do Instituto de Ciências Sociais e Comunicação da Universidade Paulista)

3.1.4.1 - Perfil profissiográfico

O curso de Administração de Empresas da Unip visa formar profissionais que poderão atuar como executivos (líderes), técnicos em funções administrativas e/ou empreendedores preparados, tanto conceitual como instrumentalmente, para contribuir e se comprometerem com o sucesso das organizações, a longo prazo, sustentado por uma rentabilidade satisfatória.

No aspecto corporativo, o sucesso pretendido é sustentado pela utilização dos princípios e ferramentas da administração estratégica que envolvem: análise ambiental (dos ambientes geral, operacional e interno); definição da visão, missão e objetivos; formulação de estratégia; implementação da estratégia e estabelecimento dos sistemas de medição e avaliação estratégica. Aqui o Administrador poderá atuar como condutor do processo de planejamento estratégico e como técnico especialista em funções, como análise ambiental ou funções de controle (medição e avaliação).

A seguir, apresentamos as habilidades exigidas dos administradores e a proposta de currículo pleno do Curso de Administração de Empresas da Unip.

3.1.4.2 - Habilidades exigidas dos Administradores

HABILIDADE	COMPORTAMENTO ESPERADO	PONTOS DE DESTAQUE
COMUNICAÇÃO E EXPRESSÃO	Deverá ser capaz de estabelecer Comunicação Interpessoal, de expressar-se corretamente nos documentos específicos e de interpretar a realidade.	Comunicação interpessoal. Expressar – se corretamente. Interpretar a realidade.
RACIOCÍNIO LÓGICO CRÍTICO E ANALÍTICO	Deverá ser capaz de operar com valores, formulações temáticas, além de estabelecer relações formais e causais entre fenômenos. O graduado deverá também ser capaz de expressar-se de modo crítico e criativo frente aos diferentes contextos organizacionais e sociais.	Formulações matemáticas. Relações formais e causais entre fenômenos. Expressar-se de modo crítico frente a realidade.
TOMADA DE DECISÃO	Deverá ser capaz de ordenar atividades e programas, assumir riscos e decidir entre alternativas.	Decisões programadas e não programadas. Racionalidade e intuição. Centralização e descentralização. Postura gerencial e participação. Decisões e condições de risco, incerteza e certeza. Etapas no processo de tomada de decisão. Avaliação qualitativa e quantitativa das alternativas.
CRIATIVIDADE E INICIATIVA	Deverá ser capaz de propor e implementar modelos de gestão, inovar e demonstrar um espírito empreendedor.	Modelos de gestão. Mudanças e inovações. Agentes de mudança. Empreendedor. Percepção, aceitação e valores.
LIDERANÇA	Deverá ter capacidade de influenciar o comportamento do grupo com empatia e equidade, visando aos interesses interpessoais.	Relacionamento interpessoal. Estilo e expectativa. Abordagens de liderança. Liderança eficaz. Natureza humana. Poder e autoridade.
NEGOCIAÇÃO	Deverá ser capaz de demonstrar atitudes flexíveis e de adaptação a terceiros e a situações diversas.	Postura pessoal. Flexibilidade. Adaptação. Relacionamento. Grupos formais e informais.
TRABALHO DE EQUIPE	Deverá ser capaz de atuar de forma interativa em prol dos objetivos comuns e compreender a importância da complementaridade das ações coletivas.	Comunicação. Cooperação. Comprometimento. Visão Global. Relacionamento.
VISÃO SISTEMÁTICA E ESTRATÉGICA	Deverá demonstrar a compreensão do todo, de modo integrado e sistêmico, bem como suas relações com o ambiente.	Cooperação. Sinergia. As organizações e o ambiente. Oportunidades. Globalização.

3.1.4.3 - Currículo pleno do Curso de Administração de Empresas da Unip

Habilitação: Administração Geral

Ano de ingresso do aluno 1998 / 99

Ano de Implantação	Série	Disciplinas	Hs/aula
1998/99	1º sem.	Informática I	80
		Contabilidade I	80
		Matemática I	80
		Sociologia I	40
		Teorias da Administração I	40
		Comunicação Empresarial I	40
		Administração Aplicada	40
	2º sem.	Informática II	80
		Contabilidade II	80
		Matemática II	80
		Sociologia II	40
		Teorias da Administração II	40
		Comunicação Empresarial II	40
		Administração Aplicada II	40
1999/2000	3º sem.	Psicologia I	40
		Economia I	40
		Adm. Mercadológica I	80
		Adm. De Recursos Humanos I	80
		Org. Sistemas & Métodos I	80
		Matemática Financeira I	40
		Adm. Rec. Mat. e Patrim. I	40
	4º sem.	Psicologia II	40
		Economia II	40
		Adm. Mercadológica II	80
		Adm. de Recursos Humanos II	80
		Org. Sistemas & Métodos II	80
		Matemática Financeira II	40
		Adm. Rec. Mat. e Patrim. II	40

Ano de Implantação	Série	Disciplinas	Hs/aula
2000/01	5º sem.	Estatística I	80
		Filosofia I	40
		Direito I	40
		Adm. Financeira e Orçamento I	80
		Adm. da Produção I	80
		Competitividade Organizacional I	40
		Liderança e Empreendedorismo I	40
	6º sem.	Estatística II	80
		Filosofia II	40
		Direito II	40
		Adm. Financeira e Orçamento II	80
		Adm. da Produção II	80
		Competitividade Organizacional II	40
		Liderança e Empreendedorismo II	40
2001/02	7º sem.	Controladoria I	80
		Criação e Gestão de Negócios I	40
		Ambiente Econômico Global I	40
		Legislação Aplicada às Organiz. I	80
		Adm. Sistemas de Inform. I	40
		Instrumentos de Gestão I	40
		Trabalho de Concl. Curso I	40
		Estágio I	40
	8º sem.	Controladoria II	80
		Criação e Gestão de Negócios II	40
		Ambiente Econômico Global II	40
		Legislação Aplicada às Organiz. II	80
		Adm. Sistemas de Inform. II	40
		Instrumentos de Gestão II	40
		Estágios II	40
		Trabalho de Concl. Curso II	40

Conclusão:

Podemos concluir, das recomendações sugeridas pela pesquisa feita pelo Conselho Federal de Administração (CFA), pelo Ministério da Educação e do Desporto (MEC) e da Universidade Paulista (Unip), que o futuro Administrador Profissional deverá possuir grande competência na área de administração. Essa competência deverá ser manifestada por meio de seus conhecimentos, habilidades e atitudes. Apesar de todas essas recomendações é difícil preparar para o mercado de trabalho profissionais assim dotados. Por isso, nós professores da disciplina matemática do Curso de Administração de Empresas no interesse de participar mais ativamente da formação desse profissional, queremos contribuir, não apenas com o conhecimento matemático desejado pelo CFA, MEC e da Unip, mas, aproveitando a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática que será adotada por nós, levar os alunos a

- saber trabalhar em equipe, a planejar e tomar decisões;
- ser criativo, assumindo riscos e comunicando- se bem verbalmente e por escrito e
- ter capacidade de utilização de raciocínio lógico criativo e analítico.

3.2 – Perfil do Corpo Discente

Para o estudo do Perfil do Corpo Discente do Curso de Administração de Empresas da Unip, utilizaremos as estratégias E_2 , E_3 , E_4 e os correspondentes procedimentos P_2 , P_3 , P_4 e os colocamos em ação.

3.2.1 - Perfil dos candidatos ao vestibular do Curso de Administração de Empresas da Unip – Capital, São Paulo, setembro de 1999

Estratégia E_2

Coletar dados historiográficos obtidos junto à Comissão Organizadora do Vestibular.

Procedimento P_2

Buscar junto à comissão organizadora do vestibular os dados historiográficos de todos os candidatos ao Curso de Administração da Unip da Capital.

3.2.1.1 – Questionário: Anexo 1 (página 376)

Em atendimento à solicitação do Ministério da Educação e do Desporto (MEC), a Universidade Paulista (Unip) organizou questionário que acompanhou a ficha de inscrição. Foram respondidos 2.757 questionários pelos candidatos ao Vestibular de Administração de Empresas para os campi da Capital de São Paulo. A Universidade nos forneceu o enunciado do questionário e também os resultados obtidos. Colocamos todos os dados fornecidos e os resultados obtidos, pois eles nos fornecem informações importantes acerca dos vestibulandos.

3.2.1.2 - Resultados obtidos e catalogados da pesquisa - Perfil dos vestibulandos inscritos em setembro de 1999

1. Idade:

Idade	Frequência	Porcentagem	Perc. Acumulada.
17 a 20 anos	2026	73%	73%
21 a 24 anos	365	13%	86%
25 a 30 anos	211	8%	94%
31 a 40 anos	107	5%	99%
Mais de 40 anos	16	1%	100%

2. Estado Civil:

Estado Civil	Frequência	Percentagem	Perc. Acumulada.
Solteiro	2522	91%	91%
Casado	178	6%	97%
Viúvo	2	0%	97%
Sep. Judicialmente	12	1%	98%
Divorciado	14	1%	99%
Outros	17	1%	100%

3. Sua família possui casa própria?

Casa própria	Frequência	Percentagem	Perc. Acumulada.
Sim	2415	88%	88%
Não	313	12%	100%

4. Qual é sua renda familiar mensal?

Renda	Frequência	Percentagem	Perc. Acumulada
Até R\$ 1000,00	522	19%	19%
De R\$ 1000,00 a R\$ 2000,00	652	24%	43%
De R\$ 2000,00 a R\$ 3000,00	467	17%	60%
De R\$ 3000,00 a R\$ 4000,00	288	10%	70%
De R\$ 4000,00 a R\$ 5000,00	213	8%	78%
De R\$ 5000,00 a R\$ 6000,00	144	5%	83%
Acima de R\$ 6000,00	441	17%	100%

5. Você exerce trabalho remunerado?

Trabalho	Frequência	Percentagem	Perc. Acumulada.
Não	1137	41%	41%
Sim - período integral	1092	40%	81%
Sim - meio período	366	14%	95%
Trabalhos eventuais	133	5%	100%

6. Qual sua renda pessoal mensal?

Renda	Frequência	Percentagem	Perc. Acumulada.
Até R\$ 500,00	928	34%	34%
De R\$ 500,00 a R\$ 1000,00	506	18%	52%
De R\$ 1000,00 a R\$ 1500,00	174	6%	58%
De R\$ 1500,00 a R\$ 2000,00	96	3%	61%
De R\$ 2000,00 a R\$ 2500,00	33	1%	62%
De R\$ 2500,00 a R\$ 3000,00	19	2%	64%
Acima de R\$ 3000,00	54	3%	67%
Não tenho	910	33%	100%

7. Você possui condução própria?

Condução própria	Frequência	Percentagem	Perc. Acumulada
Sim	966	35%	35%
Não	1772	65%	100%

8. Como pretende manter-se durante o curso?

Pretensão	Frequência	Percentagem	Perc. Acumulada
Trabalhando	1857	67%	67%
Recursos dos pais	742	27%	94%
Outros	142	6%	100%

9. Grau de instrução do pai:

Grau	Frequência	Porcentagem	Perc. Acumulada
Nenhum	86	3%	3%
Ensino fundamental incompleto	771	28%	31%
Ensino fundamental completo	180	7%	38%
Ensino médio incompleto	202	7%	45%
Ensino médio completo	566	21%	66%
Superior incompleto	230	8%	74%
Superior completo	718	26%	100%

10. Grau de instrução da mãe:

Grau	Frequência	Porcentagem	Perc. Acumulada
Nenhum	30	1%	1%
Ensino fundamental incompleto	798	29%	30%
Ensino fundamental completo	245	9%	39%
Ensino médio completo	244	9%	48%
Ensino médio incompleto	677	25%	73%
Superior incompleto	203	7%	80%
Superior completo	545	20%	100%

11. Em que turno cursou o ensino médio?

Período	Frequência	Porcentagem	Perc. Acumulada
Todo diurno	1272	46%	46%
Todo noturno	833	30%	76%
A maior parte diurno	339	13%	89%
A maior parte noturno	290	11%	100%

12. Qual seu conhecimento em informática?

Conhecimento	Frequência	Porcentagem	Perc. Acumulada
Nenhum	205	7%	7%
Usuário de programas prontos	2123	77%	84%
Programas em uma ou mais linguagens	335	12%	96%
Avançado (prog. Sist. Complexos)	71	4%	100%

13. Configuração do micro pessoal (se for o caso, anote mais de uma alternativa)

Micro	Frequência
486	151
Pentium	1397
CD-Rom	1228
Internet	1047
Macintosh	136
Outro	258
Não tem micro	867

14. Qual é seu conhecimento de idiomas?

Conhecimento	Frequência	Porcentagem	Perc. Acumulada
Domino bem uma língua estrangeira ou mais	321	12%	12%
Domino razoavelmente uma língua estrangeira ou mais	1222	44%	56%
Não possuo domínio algum de língua estrangeira	1197	44%	100%

15. Fez cursinho?

Cursinho	Frequência	Porcentagem	Perc. Acumulada
Não fiz cursinho	2149	78%	78%
Um semestre	419	15%	93%
Um ano	141	5%	98%
Mais de um ano	28	2%	100%

3.2.2 - O Perfil do Corpo Discente Ingressante – Anos 2000 e 2001 - do Curso de Administração de Empresas da Unip – Campus Vergueiro – Período Matutino.

Estratégia E₃

Elaborar questionário a ser aplicado ao corpo discente ingressante, visando conhecer tendências, aptidões e conhecimento matemático.

Procedimento P₃

Aplicação de questionário ao corpo discente ingressante, visando conhecer suas tendências, suas aptidões e seu conhecimento matemático.

3.2.2.1 - Questionários: Anexo 2 (Aplicado em março de 2000, página 379)

Anexo 3 (Aplicado em março de 2001, página 383)

Ao prepararmos os enunciados das perguntas do questionário a ser aplicado aos alunos ingressantes (matriculados) em fevereiro do ano de 2000, procuramos inicialmente, buscar dados semelhantes aos do vestibular, tais como: Faixa etária, sexo, estado civil e independência financeira.

Desta maneira podemos verificar se os alunos matriculados possuem o mesmo perfil dos candidatos ao vestibular. Não usamos a totalidade dos enunciados do questionário do vestibular para comparações, pois esse modelo de questionário é aplicado a todos os Cursos da Universidade.

As perguntas formuladas tinham o objetivo de conhecer tendências e aptidões para o Curso de Administração. Depois as perguntas foram direcionadas para o conhecimento das aptidões e as dificuldades dos alunos em matemática.

O questionário aplicado em março do ano de 2001 foi ampliado com exigência de resolução de questões de matemática, além de questões de raciocínio.

A seguir, apresentamos os resultados dos questionários obtidos por meio do Processador Estatístico: *EPI INFO - Editor de texto, banco de dados & Programa de Estatística para Saúde Pública. Center for Disease Control & Prevention (CDC), USA World Health Organization Geneva, Switzerland.*

3.2.2.2 - Resultados obtidos e catalogados da pesquisa do perfil do corpo discente ingressante - ano 2000.

A seguir apresentamos os resultados obtidos.

I) Dados Pessoais

1. Sexo

Sexo	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
Feminino	29	44,6 %	44,6 %
Masculino	36	55,4 %	100,0 %
Total	65	100,0 %	

2. Faixa Etária

Faixa	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
Até 17 anos	11	16,9 %	16,9 %
De 18 a 22 anos	45	69,2 %	86,2 %
Acima de 23 anos	9	13,8 %	100,0 %
Total	65	100,0 %	

3. Estado Civil

Estado Civil	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
Solteiro(a)	59	90,8 %	90,8 %
Casado (a)	3	4,6 %	95,4%
outros	3	4,6 %	100,0 %
Total	65	100,0 %	

II) Dados sócio – econômicos

4. Independência Financeira.

Independência	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
Não	55	84,6%	84,6%
Sim	10	15,4%	100,0 %
Total	65	100,0 %	

5. Trabalha na área de administração.

Trabalha	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
Não	48	73,8 %	73,8 %
Sim	17	26,2 %	100,0 %
Total	65	100,0 %	

III)Tendências e aptidões para o curso de administração

6. Qual foi o seu curso de 2 ° grau ?

Curso	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
Colegial	58	89,2 %	89,2 %
Técnico	4	6,2 %	95,4 %
Outros	3	4,6 %	100,0 %
Total	65	100,0 %	

7. Área de preferência profissional enquanto fazia o 2º grau .

Profissão	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
1	46	26,4 %	26,4 %
2	2	1,1 %	27,5 %
3	4	2,3 %	29,8 %
4	2	1,1 %	30,9 %
5	22	12,6 %	43,5 %
6	1	0,6 %	44,1 %
7	3	1,7 %	45,8 %
8	12	6,9 %	52,7 %
9	6	3,4 %	56,1 %
10	12	6,9 %	63,0 %
11	8	4,6 %	67,6 %
12	2	1,1 %	68,7 %
14	3	1,7 %	70,4 %
16	5	2,9 %	73,3 %
17	5	2,9 %	76,2 %

Profissão	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
18	7	4,0 %	80,2 %
20	4	2,3 %	82,5 %
21	3	1,7 %	84,2 %
22	2	1,1 %	85,3 %
23	8	4,6 %	89,9 %
24	9	5,2 %	95,1 %
25	8	4,6 %	99,7 %
Total	174	100,0 %	

8. Razão pela opção do curso de administração.

Razão	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
Interesse real	53	82,8 %	82,8 %
Outros	11	17,2 %	100,0 %
Total	64	100,0 %	

9. Área de preferência no 2 ° grau.

Preferência	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
Exatas	21	32,3 %	32,3 %
Biológica	9	13,8 %	46,2 %
Humanas	35	53,8 %	100,0 %
Total	65	100,0 %	

10. Você considera a disciplina matemática importante ?

Importante	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
Sim	48	73,8 %	73,8 %
Mais ou menos	16	24,6 %	98,5 %
Não	1	1,5 %	100,0 %
Total	65	100,0 %	

11. Grau de interesse pela disciplina matemática.

Interesse	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
muito baixo	1	1,5 %	1,5 %
Baixo	8	12,3 %	13,8 %
Médio	39	60,0 %	73,8 %
Alto	15	23,1 %	96,9 %
muito alto	2	3,1 %	100,0 %
Total	65	100,0 %	

12. Grau de dificuldade com a disciplina matemática no 2º grau.

Dificuldade	Frequência	Percentagem	Percentagem acumulada
muito baixo	3	4,6 %	4,6 %
Baixo	9	13,8 %	18,5 %
Médio	36	55,4 %	73,8 %
Alto	16	24,6 %	98,5 %
muito alto	1	1,5 %	100,0 %
Total	65	100,0 %	

IV) Questões específicas de matemática.**Questão 13.**

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	30	47,6%	47,6%
Médio	24	38,1%	85,7%
Alto	9	14,3%	100,0%
Total	63	100,0%	

Questão 14.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	26	41,9%	41,9%
Médio	22	33,5%	77,4%
Alto	14	22,6%	100,0%
Total	62	100,0%	

Questão 15.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	8	13,3%	13,3%
Médio	20	33,3%	46,7%
Alto	32	53,3%	100,0%
Total	60	100,0%	

Questão 16.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	9	15,0%	15,0%
Médio	16	26,7%	41,7%
Alto	35	58,3%	100,0%
Total	60	100,0%	

Questão 17.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	6	10,2%	10,2%
Médio	28	47,5%	57,6%
Alto	25	42,4%	100,0%
Total	59	100,0%	

Questão 18.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	15	25,4%	25,4%
Médio	26	44,1%	69,5%
Alto	18	30,5%	100,0%
Total	59	100,0%	

Questão 19.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	15	25,4%	25,4%
Médio	17	28,8%	54,2%
Alto	27	45,8%	100,0%
Total	59	100,0%	

Questão 20.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	5	8,6%	8,6%
Médio	16	27,6%	36,2%
Alto	37	63,8%	100,0%
Total	58	100,0%	

Questão 21.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	39	62,9%	62,9%
Médio	17	27,4%	90,3%
Alto	6	9,7%	100,0%
Total	62	100,0%	

Questão 22.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	46	80,7%	80,7%
Médio	6	10,5%	91,2%
Alto	5	8,8%	100,0%
Total	57	100,0%	

Questão 23.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	25	47,2%	47,2%
Médio	14	26,4%	73,6%
Alto	14	26,4%	100,0%
Total	53	100,0%	

Questão 24.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	17	32,1%	32,1%
Médio	17	32,1%	64,2%
Alto	19	35,8%	100,0%
Total	53	100,0%	

Questão 25.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	10	19,2%	19,2%
Médio	20	18,5%	57,7%
Alto	22	42,3%	100,0%
Total	52	100,0%	

Questão 26.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	19	37,3%	37,3%
Médio	15	29,4%	63,7%
Alto	17	33,3%	100,0%
Total	51	100,0%	

As tabelas que se seguem mostram avaliações globais dos dados obtidos, como resposta à pergunta: Como você avalia o grau de dificuldade para obter a solução dos exercícios ?

a) Total Geral

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	270	33,4 %	33,4 %
Médio	258	31,9 %	65,3 %
Alto	280	34,7 %	100,0 %
Total	808	100,0 %	

b) Sexo masculino

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	131	29,4 %	29,4 %
Médio	153	34,4 %	63,8 %
Alto	161	36,2 %	100,0 %
Total	445	100,0 %	

c) Sexo Feminino

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	139	38,3 %	38,3 %
Médio	105	28,9 %	67,2 %
Alto	119	32,8 %	100,0 %
Total	363	100,0 %	

d) Para quem fez curso colegial.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	259	35,5 %	35,5 %
Médio	225	30,9 %	66,4 %
Alto	245	33,6 %	100,0 %
Total	729	100,0 %	

e) Para quem fez curso técnico

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	9	19,1 %	19,1 %
Médio	25	53,2 %	72,3 %
Alto	13	27,7 %	100,0 %
Total	47	100,0 %	

f) Para quem fez outros cursos

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	2	6,3 %	6,3 %
Médio	8	25,0 %	31,3 %
Alto	22	68,8 %	100,0 %
Total	32	100,0 %	

g) Para quem tinha preferência por exatas 2º grau

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	62	44,6 %	44,6 %
Médio	33	23,7 %	68,3 %
Alto	44	31,7 %	100,0 %
Total	139	100,0 %	

h) Para quem tinha preferência pela área biológica no 2º grau

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	195	34,8 %	34,8 %
Médio	177	31,6 %	66,3 %
Alto	189	33,7 %	100,0 %
Total	561	100,0 %	

i) Para quem tinha preferência pela área de humanas 2º grau

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	13	12,0 %	12,0 %
Médio	48	44,4 %	56,5 %
Alto	47	43,5 %	100,0 %
Total	108	100,0 %	

3.2.2.3 - Resultados obtidos e catalogados da pesquisa do perfil do corpo discente ingressante - ano 2001**I) Dados Pessoais****1. Sexo**

Sexo	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Feminino	15	34,9 %	34,9 %
Masculino	28	65,1 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

2. Faixa Etária

Faixa	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Até 17 anos	3	7,0 %	7,0 %
De 18 a 22 anos	30	69,8 %	76,8 %
Acima de 23 anos	10	23,2 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

3. Estado Civil

Estado Civil	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Solteiro(a)	38	88,4 %	88,4 %
Casado (a)	3	7,0 %	95,4 %
outros	2	4,6 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

II) Dados sócio – econômicos

4. Independência Financeira.

Independência	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Não	30	69,8 %	69,8 %
Sim	13	30,2 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

5. Trabalha na área de administração.

Trabalha	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Não	34	79,1 %	79,1 %
Sim	9	20,9 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

III) Tendências e aptidões para o curso de administração

6. Qual foi o seu curso de 2º grau ?

Curso	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Colegial	35	81,4 %	81,4 %
Técnico	7	16,3 %	97,7 %
Outros	1	2,3 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

7. Área de preferência profissional enquanto fazia o 2º grau .

Profissão	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
1	32	29,1 %	29,1 %
2	6	5,5 %	34,5 %
3	2	1,8 %	36,4 %
4	2	1,8 %	38,2 %
5	14	12,7 %	50,9 %
6	2	1,8 %	52,7 %
7	1	0,9 %	53,6 %
8	5	4,5 %	58,1 %
9	6	5,5 %	63,6 %
10	4	3,6 %	67,3 %
11	5	4,5 %	71,8 %
13	1	0,9 %	72,7 %
16	2	1,8 %	74,5 %
17	2	1,8 %	76,4 %
18	6	5,5 %	81,9 %
19	1	0,9 %	82,8 %
20	2	1,8 %	84,6 %
21	2	1,8 %	86,4 %
22	3	2,7 %	89,1 %
23	4	3,6 %	92,7 %
24	3	2,7 %	95,4 %
25	5	4,5 %	100,0 %
Total	110	100,0 %	

8. Razão pela opção do curso de administração.

Razão	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Interesse real	33	76,7 %	76,7 %
Outros	10	23,3 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

9. Área de preferência no 2 ° grau.

Preferência	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Exatas	15	34,9 %	34,9 %
Biológica	7	16,3 %	51,1 %
Humanas	21	48,8 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

10. Você considera a disciplina de matemática importante ?

Importante	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Sim	38	88,4 %	88,4 %
Mais ou menos	4	9,3 %	97,6 %
Não	1	2,3 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

11. Grau de interesse pela disciplina.

Interesse	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
muito baixo	-	0 %	0 %
baixo	5	11,6 %	11,6 %
médio	24	55,8 %	67,4 %
alto	11	25,6 %	93,0 %
muito alto	3	7,0 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

12. Grau de dificuldade com a disciplina matemática no 2º grau.

Dificuldade	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
muito baixo	2	4,7 %	4,7 %
baixo	6	14,0 %	18,6 %
médio	28	65,0 %	83,6 %
alto	5	11,6 %	95,2 %
muito alto	2	4,7 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

IV) Questões específicas de matemática.**Questão 13.**

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	25	58,1 %	58,1 %
Médio	17	39,5 %	97,7 %
Alto	1	2,4 %	100,0%
Total	43	100,0%	

Questão 14.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	15	34,9 %	34,9 %
Médio	17	39,5 %	74,4 %
Alto	11	25,6 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 15.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	6	14,0 %	14,0 %
Médio	21	48,8 %	62,8 %
Alto	16	37,2 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 16.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	8	18,6 %	18,6 %
Médio	20	46,5 %	65,1 %
Alto	15	34,9 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 17.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	7	16,3 %	16,3 %
Médio	27	62,8 %	79,1 %
Alto	9	20,9 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 18.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	15	34,9 %	34,9 %
Médio	25	58,1 %	93,0 %
Alto	3	7,0 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 19.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	5	11,9 %	11,9 %
Médio	22	52,4 %	64,3 %
Alto	15	35,7 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 20.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	1	2,3 %	2,3 %
Médio	20	46,5 %	48,8 %
Alto	22	51,2 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 21.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	24	55,8 %	55,8 %
Médio	17	39,5 %	95,3 %
Alto	2	4,7 %	100,0 %
Total	43	100,0%	

Questão 22.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	37	86,0 %	86,0 %
Médio	6	14,0 %	100,0 %
Alto	-	-	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 23.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	25	58,1 %	58,1 %
Médio	17	39,5 %	97,7 %
Alto	1	2,3 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 24.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	12	27,9 %	27,9 %
Médio	27	62,8 %	90,7 %
Alto	4	9,3 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 25.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	9	20,9 %	20,9 %
Médio	26	60,5 %	81,4 %
Alto	8	18,6 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

Questão 26.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	25	58,1 %	58,1 %
Médio	15	34,9 %	93,0 %
Alto	3	7,0 %	100,0 %
Total	43	100,0 %	

As tabelas que se seguem mostram avaliações gerais dos dados obtidos.

a) Total Geral

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	214	35,6 %	35,6 %
Médio	277	46,1 %	81,7 %
Alto	110	18,3 %	100,0 %
Total	601	100,0 %	

b) Sexo masculino

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	133	34,0 %	34,0 %
Médio	175	44,8 %	78,8 %
Alto	83	21,2 %	100,0 %
Total	391	100,0 %	

c) Sexo Feminino

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	81	38,6 %	38,6 %
Médio	102	48,6 %	87,1 %
Alto	27	12,9 %	100,0 %
Total	210	100,0 %	

d) Fez curso colegial.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	171	35,0 %	35,0 %
Médio	227	46,4 %	81,4 %
Alto	91	18,6 %	100,0 %
Total	489	100,0 %	

e) Fez curso técnico

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	32	32,7 %	32,7 %
Médio	47	48,0 %	80,6 %
Alto	19	19,4 %	100,0 %
Total	98	100,0 %	

f) Fez outros cursos

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	11	78,6 %	78,6 %
Médio	3	21,4 %	100,0 %
Alto	-	0 %	100,0 %
Total	14	100,0 %	

g) Para quem tinha preferência por exatas 2° grau

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	67	31,9 %	31,9 %
Médio	98	46,7 %	78,6 %
Alto	45	21,4 %	100,0 %
Total	210	100,0 %	

h) Para quem tinha preferência por biológicas 2° grau

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	40	40,8 %	40,8 %
Médio	45	45,9 %	86,7 %
Alto	13	13,8 %	100,0 %
Total	98	100,0 %	

i) Para quem tinha preferência por humanas 2° grau

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	107	36,5 %	36,5 %
Médio	134	45,7 %	82,3 %
Alto	52	17,7 %	100,0 %
Total	293	100,0 %	

Questão 27.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	5	11,6%	11,6%
b	35	81,4%	93,0%
c	3	7,0%	100%
d	0	0%	100,0%
Total	43	100.0%	

Questão 28.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	36	83,7%	83,7%
b	1	2,3%	86%
c	6	14,0%	100%
d	-	-	100%
Total	43	100%	

Questão 29.

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
a	31	72%	72%
b	2	4,6%	76,6%
c	6	14,0%	80,6%
d	4	9,4%	100%
Total	43	100%	

Questão 30.

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
a	3	7,5%	7,5%
b	7	17,5%	25%
c	6	15%	40%
d	24	60%	100,0%
Total	40	100,0%	

Questão 31.

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
a	5	13,2%	13,2%
b	18	47,4%	60,6%
c	11	28,9%	89,5%
d	4	10,5%	100,0%
Total	38	100,0%	

Questão 32.

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
a	6	14%	14%
b	37	86%	100%
c	-	-	-
d	-	-	100,0%
Total	43	100,0%	

Questão 33.

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
a	6	15%	15%
b	16	40%	55%
c	11	27,5%	82,5%
d	7	17,5%	100,0%
Total	40	100,0%	

Questão 34.

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
a	8	19%	19%
b	7	16,7%	35,7%
c	4	9,5%	45,2%
d	23	54,8%	100,0%
Total	42	100,0%	

Questão 35.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	8	19%	19%
b	6	14,3%	33,3%
c	23	54,8%	88,1%
d	5	11,9%	100,0%
Total	42	100,0%	

Questão 36.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	19	44,2%	44,2%
b	22	51,2%	95,4%
c	1	2,3%	97,7%
d	1	2,3%	100,0%
Total	43	100,0%	

Questão 37.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	1	2,4%	2,4%
b	1	2,4%	4,8%
c	38	90,4%	95,2%
d	2	4,8%	100,0%
Total	42	100,0%	

Questão 38.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	3	7,9%	7,9%
b	12	31,6%	39,5%
c	21	55,2%	94,7%
d	2	5,3%	100,0%
Total	38	100,0%	

Questão 39.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	4	10,5%	10,5%
b	11	28,9%	39,4%
c	18	47,4%	86,8%
d	5	13,2%	100,0%
Total	38	100,0%	

Questão 40.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	6	14,3%	14,3%
b	4	9,5%	24,8%
c	3	7,2%	31%
d	29	69%	100,0%
Total	42	100,0%	

Questão 41.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	3	7,9%	7,9%
b	1	2,6%	10,5%
c	14	37,0%	47,5%
d	20	52,5%	100,0%
Total	38	100,0%	

Questão 42.

Matemática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
a	1	2,3%	2,3%
b	3	7%	9,3%
c	7	16,3%	25,6%
d	32	74,4%	100,0%
Total	43	100,0%	

Percentagem de acerto por questão

Questões	%	Questões	%
27	81,4%	35	54,8%
28	83,7%	36	51,2%
29	72,0%	37	90,4%
30	60,0%	38	31,6%
31	47,0%	39	28,9%
32	86,0%	40	69,0%
33	17,5%	41	52,5%
34	54,8%	42	16,3%

Média dos acertos: 56,06%

3.2.3 – Análise dos três questionários

Analisaremos os resultados obtidos dos três questionários aplicados.

a) Perfil dos vestibulandos inscritos em setembro de 1999.

Esse questionário foi aplicado em atendimento à solicitação do MEC e foram respondidos 2.757 questionários pelos candidatos ao Curso de Administração de Empresas. A Unip possui doze campi na Capital Paulista, com cursos diurnos e noturnos.

Com respeito à faixa etária dos vestibulandos, 73% deles se encontram na faixa de 17 a 23 anos. Portanto, são candidatos que pretendem ingressar na Unip logo após a conclusão do Ensino Médio.

Dos vestibulandos, 54% deles exercem trabalho remunerado, mas na verdade 67% deles pretendem trabalhar durante a graduação.

46% dos vestibulandos cursaram o Ensino Médio no período diurno e somente 7% dos vestibulandos não possuem conhecimentos em informática.

Dos vestibulandos, 78% não fizeram curso preparatório, 12% dos vestibulandos dominam bem uma língua estrangeira e 44% têm domínio razoável de uma língua estrangeira.

b) Perfil do Corpo Discente ingressante - ano 2000.

Elaboramos e aplicamos questionário, no início de março de 2000, aos alunos ingressantes na primeira série do Curso de Administração de Empresas, Campus Vergueiro, período matutino. Foram respondidos 65 (sessenta e cinco) questionários, sendo esse o número de alunos matriculados.

86,2% dos ingressantes encontram-se na faixa etária de 17 a 22 anos. 98,8% dos ingressantes são solteiros e 84,6% dos ingressantes têm dependência financeira. 89,2% fizeram o curso colegial e somente 26,4% tinham preferência pelo curso de Administração de Empresas.

Quando alunos do colegial, 53,8% tinham a área de humanas como preferência, 73,8% diziam que a disciplina de matemática era importante e ainda 26,2% deles afirmaram que tinham bastante interesse pela disciplina matemática.

Perfil do Corpo Discente ingressante- ano 2001.

Elaboramos e aplicamos no início de março de 2001, novo questionário aos alunos ingressantes na primeira série do Curso de Administração de Empresas, Campus Vergueiro, período matutino. Esse questionário continha todos os itens do questionário do ano de 2000 e acrescentava questões de matemática para serem resolvidas. Eram 15 (quinze) questões sendo 6 (seis) delas de raciocínio e as 9 (nove) restantes de geometria, álgebra e números.

Já dissemos que foram colocados todos os dados fornecidos, mesmo sabendo que alguns deles não seriam utilizados em nossa pesquisa. Utilizaremos apenas os que forem de nosso interesse .

76,8% dos ingressantes encontram-se na faixa etária de 17 para 22 anos. 88,4% dos ingressantes são solteiros e 69,8% dos alunos ingressantes têm dependência financeira. 81,4% fizeram o curso colegial e somente 29,1% tinham preferência pelo Curso de Administração de Empresas.

Quando alunos do colegial, 48,8% tinham a área de humanas como preferência, 88,4% diziam que a disciplina matemática era importante e ainda 32,6% deles afirmaram que tinham bastante interesse pela disciplina matemática.

Quanto às questões específicas de matemática, fizemos a pergunta:

Como você avalia o grau de dificuldade para obter a solução dos exercícios?

Observa-se que os resultados dos questionários das duas pesquisas são semelhantes em relação aos exercícios de menor e de maior grau de dificuldade .

a) As questões que apresentaram menor grau de dificuldade para eles, isto é, as mais fáceis, foram:

ANO 2000		ANO 2001	
Questões	Percentagem	Questões	Percentagem
22	80,7%	22	86,0%
21	62,9%	21	55,8%
13	47,6%	13	58,1%
23	47,2%	23	58,1%
14	41,9%	26	58,1%

b) As questões trabalhadas que apresentaram maior grau de dificuldade, isto é, as mais difíceis, foram:

ANO 2000		ANO 2001	
Questões	Percentagem	Questões	Percentagem
20	63,8%	20	51,2%
16	58,3%	16	34,9%
15	53,3%	15	37,2%
19	45,8%	19	35,7%
17	42,4%	17	20,9%
25	42,3%	25	18,6%

Nesse instante nos questionamos: É possível que um aluno ao término do Ensino Médio, ainda tenha dificuldade em resolver uma divisão de monômio por monômio (questão 20, considerada a mais difícil) ou o produto de dois monômios (questão 16, considerada a segunda mais difícil)?

As tabelas com totais gerais mostram que 33,4% dos alunos (ano 2000) e 35,6% (ano 2001) dizem ter grau de dificuldade baixo para resolver os exercícios. Dos alunos que no Ensino Médio preferiam a área de humanas, onde se encontra o Curso de Administração, somente 12% dizem ter grau de dificuldade baixo para resolver os exercícios.

Desta maneira, podemos concluir que os alunos matriculados na primeira série do Curso de Administração de Empresas da Unip (Campus Vergueiro – período matutino)

possuem dificuldade para acompanhar a disciplina Matemática. Os resultados obtidos mostram que esses alunos não possuem base suficiente para acompanhar um curso universitário dentro de um Ensino Superior tradicional. Como o processo de Ensino – Aprendizagem adotado pela maioria das escolas de Ensino Médio é o expositivo dialogado, podemos dizer que esse tipo de ensino criou dificuldades para o desenvolvimento desses alunos, e cabe a nós, professores de matemática, buscar outros caminhos.

Com o intuito de comprovar que os alunos matriculados na primeira série do Curso de Administração de Empresas não estão preparados para acompanhar a disciplina Matemática, nos moldes tradicionais de Ensino – Aprendizagem, ampliamos o questionário do ano de 2001 e destacamos as seguintes conclusões:

- a) As questões do tipo teste com quatro alternativas, do primeiro bloco, questões de 27 a 32, eram questões de raciocínio lógico, em que se pedia aos alunos para completar as figuras. Podemos dizer que o índice de acertos nessas questões pode ser considerado bom.
- b) A questão tipo teste de número 37, 6^3 é igual a
a. () 18 b. () 36 c. () 216 d. () 918,
apresentou maior índice de acerto, 90,4%.
- c) A questão tipo teste de número 42, o valor de -13^2 é
a. () -19 b. () +19 c. () -169 d. () 169,
apresentou o menor índice de acerto, 16,3%.
- d) A questão 38, achar a área de um triângulo conhecendo-se a base (12 m) e a altura (5 m), apresentou índice de acerto de 31,6%. Ao formular essa questão, tínhamos como expectativa um índice grande de acerto, pois é uma questão utilizada desde a 4ª série do Ensino Fundamental.
- e) Mesmo dizendo que a disciplina Matemática é importante e tendo interesse por ela, 64,4% dos alunos do ano de 2001 mostraram ter grande dificuldade na resolução de exercícios elementares como os das questões de 13 a 26.
- f) A média de acertos dessas quinze (15) questões foi de 56,06%.

Desta maneira, podemos concluir novamente, que os alunos do 1º ano do Curso de Administração 2001 demonstram não possuir desempenho satisfatório em matemática elementar. As questões propostas foram escolhidas dentro de assuntos fundamentais da matemática, questões básicas, usadas e treinadas com grande intensidade pelos professores do Ensino Fundamental e Médio. Nossa expectativa era de que a média de acertos seria muito maior. Isso comprova que os alunos oriundos do Ensino Fundamental e Médio que se dirigem para o Curso de Administração de Empresas não possuem conhecimentos elementares básicos necessários para acompanhar a disciplina Matemática nos moldes tradicionais do ensino.

3.2.4 - O Ensino de Matemática nas últimas décadas

Estratégia E₄

Apresentar desenvolvimento do ensino de matemática nas últimas décadas no Brasil.

Procedimento P₄

Pesquisar bibliografia existente sobre o Ensino de Matemática nas últimas décadas no Brasil.

3.2.4.1 - Realidade do Ensino de Matemática nas últimas décadas no Brasil

No início do século XX, surgiu um movimento denominado Estruturalismo. Esse movimento se destacou no pós-guerra (1945) na França, com os trabalhos do Grupo Bourbaki. As propostas estruturalistas de Jean Piaget na teoria da aprendizagem e os trabalhos do Grupo Bourbaki na matemática se apoiavam mutuamente, surgindo assim a corrente conhecida como Matemática Moderna.

O movimento denominado Matemática Moderna teve uma enorme repercussão no ensino brasileiro. Um dos principais articuladores do movimento foi Oswaldo Sangiorgi, que em 1961 fundou o GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática). Esse grupo era constituído, por professores universitários e secundários. O GEEM e outros grupos criados posteriormente, tais como GEEMPA, em Porto Alegre e GEPEM, no Rio de Janeiro, procuravam reproduzir os trabalhos do Grupo Americano SMSG (School Mathematics Study Group), o qual era formado por matemáticos, professores de matemática, educadores, psicólogos e representantes da comunidade científica e tecnológica.

O GEEM promoveu, durante a sua existência (1961 a 1975), cursos para professores, conferências, seminários e olimpíadas de Matemática no Estado de São Paulo.

O fracasso da Matemática Moderna foi atribuído, em grande parte à falta de formação do professor, que não possuía elementos suficientes, tanto em relação ao conteúdo matemático quanto aos aspectos didáticos da matemática. Após o fracasso do movimento da matemática moderna, surgiu o movimento *back to basics*.

O que hoje começa a se caracterizar como um movimento de retorno ao tradicional (back to basics) representa um considerável regresso com relação aos conhecimentos que hoje são disponíveis sobre a relação mente-corpo ou sobre a análise que resulta da moderna crítica de nossos sistemas sócio-econômicos e mesmo da procura de uma nova ordem social mais justa. (U. D'Ambrósio, 1986, p.39)

O movimento denominado *back to basics* procurava, de certa forma, um retorno ao ensino praticado antes da Matemática Moderna. Em 1977, o Conselho de Supervisores de Matemática (National Council of Supervisors of Mathematics- NCSM) manifestou-se contra o movimento e produziu um documento que influenciou o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), levando à criação da publicação de uma Agenda para a Ação, nos anos 80.

Se a Matemática moderna não produziu os resultados pretendidos, o movimento serviu para desmistificar muito do que se fazia no ensino da matemática e mudar sem dúvida para melhor o estilo das aulas e das provas e para introduzir muitas coisas novas, sobretudo a linguagem moderna de conjuntos. Claro, houve exageros e incompetência, como em todas as inovações. Mas o saldo foi altamente positivo. Isso se passou, com essas mesmas características, em todo o mundo. (U. D' Ambrósio, 1996, p.57)

No Brasil, até o ano de 1968, os alunos eram selecionados por meio do Exame de Admissão ao Curso Ginásial (5ª a 8ª séries atuais). Através dessa seleção, eram escolhidos os alunos mais bem preparados e era comum dizer que o ensino era de excelente qualidade. Ainda, durante o movimento denominado Matemática Moderna, o Governador do Estado de São Paulo, Roberto de Abreu Sodré (1968), aboliu o exame de admissão ao antigo Curso Ginásial e estendeu as vagas a toda a população estudantil oriunda do ensino primário (1ª a 4ª séries atuais). Com a falta de professores formados e com o aumento considerável de novas salas de aula, tanto para o ensino diurno como para o noturno, as escolas foram obrigadas a contratar alunos das faculdades como professores para lecionar, sem maiores cuidados.

Portanto, o Ensino Fundamental no Estado de São Paulo passou a ser um “Ensino de Massa”, ensino para todos, para qualquer idade e com grande quantidade de professores sem qualificação para lecionar. Desta forma, é fácil concluir que alunos e professores não se entendessem em sala de aula e o ensino e a aprendizagem não ocorressem bem. Passamos a conviver com um grande número de alunos reprovados e evadidos.

Os governos paulistas que se sucederam sempre procuraram introduzir novas propostas de reformulação do ensino e qualificação do corpo docente, porém estamos a todo instante ouvindo críticas ao ensino atual.

No que se refere ao docente do Ensino Superior, Leda Scheibe (1987) escreve em sua tese de Doutorado:

No final da década de 60, com a expansão quantitativa do Ensino Superior no Brasil, o descaso com a questão pedagógica acentuou-se de modo preocupante. Passaram a ser recrutados jovens profissionais sem nenhum preparo para tal..., os cursos superiores enfatizaram, basicamente, a questão da pesquisa, relegando a ação pedagógica do professor a um segundo plano.

Assim também, Souza (1993,p.20)mostra sua preocupação com o ensino de matemática:

A atual concepção da educação matemática gira em torno da preocupação em preparar o aluno para a vida e não somente para reproduzir o conteúdo matemático ensinado. O conteúdo passa a possuir o mesmo valor que a metodologia e os objetivos do ensino da matemática. Eles devem caminhar juntos na formação do indivíduo.

Neste novo século estamos em plena era tecnológica. O mundo está cada vez mais competitivo, predominam altas tecnologias de produção e informação e, portanto, o Brasil necessita de um sistema educacional que ofereça para a totalidade da população Ensino Fundamental e Médio de boa qualidade. Um sistema educacional eficiente que o torne mais produtivo e que a produção seja de qualidade. Nesse sentido, Penteado (1991,p.3) assim se expressa:

Para se integrar no contexto da época atual e exercer eficazmente um papel na atividade econômica, o indivíduo tem que, no mínimo, saber: ler, interpretar a realidade, expressar-se adequadamente, lidar com conceitos científicos e matemáticos abstratos, trabalhar em grupo na resolução de problemas relativamente complexos, entender e usufruir das potencialidades tecnológicas do mundo que nos cerca. E, principalmente, precisa aprender a aprender, condição indispensável para poder acompanhar as mudanças e avanços cada vez mais rápidos que caracterizam o ritmo da sociedade moderna.

Também Micotti (1999, p.153) faz uma análise do ensino atual:

A educação passa atualmente por um momento crucial. Nosso ensino é criticado, sobretudo pelo baixo desempenho dos alunos. Para isso contribuem as conseqüências do histórico descaso com a educação e problemas sociais. A interação desses e outros fatores com os conflitos entre idéias pedagógicas diversas, que pontilham nos meios escolares, agrava as dificuldades do ensino, exigindo de professores e pesquisadores opções e ações. São comuns as críticas sobre a educação escolar que não promove o esperado acesso aos saberes que compõem o currículo de estudos.

A escola tem como principal função a de educar. Mas o modo de se ensinar determina diferenças nos resultados. As críticas sobre a qualidade do ensino colocam em dúvida o cumprimento da função social da escola.

Como sabem, estamos agora no meio de um dos processos cíclicos de reforma educativa. Mais uma vez, tomamos consciência das inadequações da educação na América. Como é hábito, atribuímos a culpa às escolas e aos professores, o que equivale a culpar as vítimas. Alguns legisladores iniciaram um processo tendente a instituir um controle regulador das escolas, procurando legislar sobre o que deve ser ensinado quando e por quem, contemplando ainda os modos de testar o que foi aprendido e se os professores são competentes para ensinar. (Schön, 1992, p.79)

3.2.4.2 - Realidade do ensino de Matemática do Curso de Administração de Empresas da Unip

O que faremos agora é verificar se os candidatos ao vestibular, para o Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista (Unip) e os matriculados em 2000 e 2001 possuem conhecimentos necessários em Matemática que os capacitem a acompanhar sem dificuldades a disciplina Matemática do 1º ano do Curso de Administração de Empresas.

a) Verifiquemos inicialmente em que faixa etária se encontram, para sabermos que modelo de ensino tiveram. Observemos a tabela da página 33.

Faixa	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Até 17 anos	11	16,9%	16,9%
De 18 a 22 anos	45	69,2%	86,2%
Acima de 23 anos	9	13,8%	100,0%
Total	65	100,0%	

Pela tabela, 86,2% dos alunos matriculados estão na faixa etária de 17 a 22 anos e, portanto, iniciaram, em média, o Ensino Fundamental em 1989 e concluíram o Ensino Médio em 1999. Assim, podemos dizer que foram estudantes da década de 90.

Segundo reportagem publicada no Jornal O Estado de São Paulo, em 25 de setembro de 1999, o Ministro da Educação, Paulo Renato Souza, assim se refere ao Ensino Médio:

O Ensino Médio que temos no Brasil, carente de identidade e desconectado das exigências do mundo moderno, está com os dias contados. O modelo burocratizou a transmissão do conhecimento. Transformou-se em mera fábrica da chamada decoreba, premiando a memória em vez do raciocínio. O novo perfil deste ciclo é descrito nas Diretrizes Curriculares Nacionais, elaboradas pelo Conselho Nacional de Educação a partir de proposta do ministério. Proposta esta que busca a expansão do Ensino Médio, cuja matrícula cresceu 57% nos últimos cinco anos. Já são mais de 7,8 milhões de alunos hoje; serão 10 milhões em 2002.

Segundo Guiomar Namó de Mello, membro do Conselho Nacional de Educação (Reportagem- Jornal Folha de São Paulo, de 17 de setembro de 1998):

O crescimento sem precedentes do Ensino Médio coloca novos desafios para os currículos desse setor. Em primeiro lugar, porque o secundário terá, durante muitos anos, uma população muito mais heterogênea ... Porque esse aumento da demanda decorre da regularização da vida escolar dos alunos do ensino fundamental. Mas ele também decorre, em alguma medida,

do aumento da procura de pessoas que não completaram o ensino médio, por causa de pressão do mercado de trabalho.

Dos relatos que observamos, podemos dizer que a grande demanda do Ensino Médio trará como consequência um “Ensino de Massa”, ensino para todos, portanto, com necessidade de um contingente maior de professores para atendê-la. Isso nos parece uma repetição do que ocorreu a partir de 1968, e, exatamente os alunos matriculados no Curso de Administração de Empresas do ano de 2000 vivenciaram esse modelo de ensino.

b) Nas tabelas da página 35 encontram-se informações dos alunos matriculados no 1º semestre do ano de 2000, que reproduzimos para facilitar a leitura. Procuramos verificar que concepções os alunos possuem da disciplina matemática.

Qual foi sua área de preferência no 2º grau ?

Preferência	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Exatas	21	32,3%	32,3%
Biológicas	9	13,8%	46,2%
Humanas	35	53,8%	100,0%
Total	65	100,0%	

Você considerava a disciplina matemática importante?

Importante	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Sim	48	73,8%	73,8%
Mais ou Menos	16	24,6%	98,5%
Não	1	1,5%	100,0%
Total	65	100,0%	

Qual o grau de interesse pela disciplina de matemática?

Interesse	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Muito baixo	1	1,5%	1,5%
Baixo	8	12,3%	13,8%
Médio	39	60,0%	73,8%
Alto	15	23,1%	96,9%
Muito Alto	2	3,1%	100,0%
Total	65	100,0%	

Vê-se claramente que a área de Exatas onde está localizada a disciplina de matemática tem a preferência de 32,3% dos alunos, isto é, de cada 3 (três) alunos, 1 (um) apenas tem preferência por matemática, mesmo 73,8% dizendo ser importante. Para confirmar essa preferência vemos, no quadro de interesse que só 26,2% demonstram alto e muito alto interesse pela disciplina de matemática.

Observamos também que as concepções dos alunos sobre matemática são influenciadas pelas experiências que tiveram ao longo do Ensino Médio, o que nos leva concordar com Ponte (1992, p.186):

A matemática é um assunto acerca do qual é difícil não ter concepções. É uma ciência muito antiga, que faz parte do conjunto das matérias escolares desde há séculos, é ensinada com caráter obrigatório durante largos anos de escolaridade e tem sido chamada a um importante papel de seleção social. Possui, por tudo isso uma imagem forte, suscitando medos e admirações. A matemática é geralmente tida como uma disciplina extremamente difícil, que lida com objetos e teorias fortemente abstratos, mais ou menos incompreensíveis.

c) Perguntamos aos alunos se quando estudavam no segundo grau tinham dificuldade em aprender Matemática.

Grau de dificuldade com a disciplina matemática no 2º grau

Dificuldade	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Muito baixo	3	4,6%	4,6%
Baixo	9	13,8%	18,4%
Médio	36	55,4%	73,8%
Alto	16	24,6%	98,5%
Muito alto	1	1,5%	100,0%
Total	65	100,0%	

Apenas 18,4% dos alunos têm pouca dificuldade em aprender matemática, portanto 81,6% têm média e alta dificuldade em aprender matemática.

d) No questionário aplicado aos alunos propusemos 13 questões envolvendo exercícios variados de matemática, onde os alunos diziam apenas qual o grau de dificuldade que sentiam possuir para resolver as questões. Ao final do preenchimento do questionário, foi pedido aos alunos que resolvessem as questões sem se identificar. A seguir relatamos esses fatos.

1) Em questões simples com operações de frações (questão 13), 52,4% dos alunos dizem ter média e grande dificuldade para resolvê-la. Após a correção, verificou-se que 52,3% acertaram integralmente a questão.

2) Sobre a questão número 15, $0,555... - 0,3 + 1,8 \times \frac{1}{2}$, de operações com números decimais

dizem ter dificuldade média e alta 86,6% dos alunos. Após sua correção, verificou-se que essa questão teve o maior índice de erro entre todas as questões, 89,2%.

3) A questão 22, resolver a equação $2x - 3 = 5$, foi considerada a mais fácil (80,7%) e após a correção verificou-se que 75,3% dos alunos acertaram a questão.

4) Acerca da questão número 23(equação do 1º grau com números racionais $\frac{2}{5}x = -\frac{8}{5}$),

52,8% disseram ser média e difícil. O índice de acerto dessa questão foi de 46,1% .

Questões como as indicadas, deveriam ser considerados como fáceis, pois ocorreram inúmeras vezes durante o ensino fundamental e médio.

e) As tabelas que seguem apresentam resultados globais à pergunta. Como você avalia o grau de dificuldade para obter a solução dos exercícios ?

Total Geral

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Baixo	270	33,4%	33,4%
Médio	258	31,9%	65,3%
Alto	280	34,7%	100,0%
Total	808	100,0%	

Vemos claramente que 34,7% dos alunos consideram as questões difíceis. Assim só 1 a cada 3 alunos diz não ter dificuldade.

f) Quando analisamos as tabelas de preferência, ainda como aluno do 2º grau e o grau de dificuldade para obter a solução dos exercícios, obtemos:

Preferem área de exatas no 2º grau

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Baixo	62	44,6%	44,6%
Médio	33	23,7%	68,3%
Alto	44	31,7%	100,0%
Total	139	100,0%	

Preferem área de biológicas no 2º grau

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Baixo	195	34,8%	34,8%
Médio	177	31,6%	66,3%
Alto	189	33,7%	100,0%
Total	561	100,0%	

Preferem área de humanas no 2º grau

Matemática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Baixo	13	12,0%	12,0%
Médio	48	44,4%	56,5%
Alto	47	43,5%	100,0%
Total	108	100,0%	

Vê-se claramente que os alunos do colegial que tinham preferência pela área de exatas possuem pouca dificuldade (44,6%) para resolver as questões. Da área biológica, 34,8% têm pouca dificuldade. Mas na área de humanas, onde se encontra o Curso de Administração, só 12% têm pouca dificuldade para resolver as questões e 43,5% desses acham as questões difíceis.

g) Quando se analisa o turno em que o vestibulando cursou o ensino médio, observa-se que praticamente a metade fez curso diurno. Quanto ao trabalho, 41% deles não exercem trabalho remunerado, portanto 59% trabalham. Isso nos induz a dizer que o aluno estudava à noite, porque trabalhava no período diurno e essa tendência se comprova quando é feita a pergunta: Como pretende manter-se durante o curso? 67% deles dizem: trabalhando.

Como pretende manter-se durante o curso?

Pretensão	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Trabalhando	1857	67%	67%
Recursos dos pais	742	27%	94%
Outros	142	6%	100%

h) Quando se observa que um aluno termina o Ensino Médio e faz “cursinho”, isso induz a concluir que, ao término deste, o aluno esteja mais bem preparado do que no final do Ensino Médio.

Fez cursinho?

Cursinho	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Não fez cursinho	2149	78%	78%
Um semestre	419	15%	93%
Um ano	141	5%	98%
Mais de um ano	28	2%	100%

Da tabela acima, concluímos que, 78% não fizeram “cursinho” e 15% só cursaram um semestre. Desta forma podemos concluir que 7% fez cursinho e que para prestar vestibular para Administração de Empresas na Unip não há necessidade dele.

i) Ao analisarmos a área de preferência profissional, quando o entrevistado ainda era aluno do 2º grau, deparamo-nos com a pergunta: Os alunos aqui matriculados em Administração de Empresas escolheram realmente o curso que fazem? O quadro da página 34 mostra que 26,4% tinham preferência profissional por Administração de Empresas e somados aos que preferem Administração em Comércio Exterior totalizam 39%. Portanto, 61% não tinham preferência para o Curso de Administração de Empresas.

3.2.5 - Conclusões

Vimos qual deve ser o perfil do futuro profissional de Administração de Empresas. Atendendo às determinações exigidas pelo MEC, a Universidade Paulista estabelece o perfil ideal de seus alunos baseado no perfil solicitado e atendendo à Comunidade Empresarial. Nesse caso, uma série de conhecimentos, habilidades e atitudes é exigida do administrador.

Cabe aos dirigentes do Curso de Administração de Empresas dar condições para que esse perfil idealizado seja atingido pelos seus alunos. Cabe à matemática, que faz parte do elenco das disciplinas, preparar os alunos para que haja uma melhor compreensão das necessidades das disciplinas para as quais a Matemática é pré-requisito. Nesse instante, o ensino da matemática ministrada para o primeiro ano do Curso de Administração (4 aulas-semanais) depara-se com dois caminhos a seguir:

Primeiro caminho

Assumimos a deficiência dos alunos, fazendo revisões de conteúdos do Ensino Fundamental e Médio que não foram bem trabalhados, tentando melhorar seus conhecimentos e deixamos de atender ao perfil exigido, não fazendo aplicações matemáticas na área de Administração nem colaborando com outras disciplinas para a qual é pré-requisito? Esse modelo é usado por muitas faculdades e faz parte do conteúdo de vários livros editados para cursos de matemática para Administração de Empresas. Esse procedimento leva os alunos a fazer questionamentos: Para que revisar, se a matemática exigida pelo Vestibular era a do Ensino Fundamental e Médio e eu fui aprovado? Fui um bom aluno e tenho que ver isso novamente? Que motivação têm os alunos em passar aulas e aulas revisando uma matemática em que se faz apenas exercícios mecânicos e sem aplicações?

Nesse sentido, concordamos com o que diz Lima (1999, p.4):

A manipulação é o componente mais difundido nos livros textos adotados em nossas escolas. Conseqüentemente, abundam nas salas de aula, nas listas de exercícios e nos exames as operações com elaboradas frações numéricas ou algébricas, os cálculos de radicais, as equações com uma ou mais incógnitas, as identidades trigonométricas e vários outros tipos de questões que, embora necessários para o adestramento dos alunos, não são motivadas, não provém de problemas reais, não estão relacionadas com a vida atual, nem com as demais ciências, e nem mesmo com outras áreas da matemática.

Segundo caminho

Assumimos a deficiência dos alunos e buscamos uma nova proposta de ensino que atenda melhor ao perfil exigido para um bom Administrador ?

Preferimos o segundo caminho, pois, diante das exigências do mundo globalizado em constante e rápida transformação, é necessário que o professor crie uma nova metodologia que contribua para a construção do perfil do Administrador. O papel do professor torna-se mais relevante e deve procurar atender às novas exigências sociais e tecnológicas que demandam do aluno uma formação mais abrangente. As aplicações na área da Administração tornam a disciplina de matemática mais atraente, e o professor sempre procurando adequar os problemas dados a situações da vida real, desperta no aluno interesse pela matéria na sala de aula.

3.3 - Perfil do Corpo Docente do Curso de Administração de Empresas da Unip

3.3.1 - Perfil do Corpo Docente que ministra aulas de matemática para o Curso de Administração de Empresas da Unip

Estratégia E₅

Elaborar questionário a ser aplicado ao corpo docente que ministra aulas de matemática, visando conhecer sua formação acadêmica, experiência profissional e metodologia usada.

Procedimento P₅

Aplicação de questionário ao corpo docente que ministra aulas de matemática, visando conhecer sua formação acadêmica, sua experiência profissional e sua metodologia de trabalho.

3.3.1.1 - Questionário: Anexo 4 (Aplicado em março de 2000, página 389)

Elaboramos o questionário Perfil do Corpo Docente que ministra aulas de matemática do Curso de Administração de Empresas, da Unip. Responderam ao questionário 6 (seis) professores. Do fato da disciplina possuir 4 horas-aula semanais ocorre que o mesmo professor pode ministrar aulas em vários Campi da Unip, nesse caso pedimos que respondesse uma única vez o questionário.

3.3.1.2 - Resultados obtidos e catalogados – Perfil do Corpo Docente da Disciplina de Matemática no Curso de Administração de Empresas

I- Dados Pessoais:

1- Formação acadêmica	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Especialização	1	16,7%	16,7%
Mestrando	3	50,0%	66,7%
Mestre	1	16,7%	83,3%
Doutorando	1	16,7%	100,0%
Doutor	0	0,0%	100,0%
Total	6	100,0%	

II- Experiência Profissional:

2- Tempo de Docência no Ensino superior	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Até 5 anos	0	0,0%	0,0%
De 6 a 10 anos	3	50,0%	50,0%
De 11 a 15 anos	1	16,7%	66,7%
Acima de 15 anos	2	33,3%	100,0%
Total	6	100,0%	

3- Tempo de Docência na disciplina	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Até 5 anos	0	0,0%	0,0%
De 6 a 10 anos	4	66,7%	66,7%
De 11 a 15 anos	0	0,0%	66,7%
Acima de 15 anos	2	33,3%	100,0%
Total	6	100,0%	

III- Metodologia de Ensino:

4- Forma de Aula que mais utiliza	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Exp., tradicional	0	0,0%	0,0%
Exp. Dialogada com apostila	0	0,0%	0,0%
Exp. Dialogada com livro didático.	0	0,0%	0,0%
Exp. Dialogada e exercícios.	4	50,0%	50,0%
Exp. Dialogada e exercícios e trabalhos em grupo.	3	37,5%	87,5%
A partir de resolução de problemas	1	12,5%	100,0%
Total	8	100,0%	

5- Tempo disponível da aula para a parte prática	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Até 20%	1	16,7%	16,7%
De 21% a 40%	1	16,7%	33,3%
De 41% a 60%	2	33,3%	66,7%
Mais que 60%	2	33,3%	100,0%
Total	6	100,0%	

6- Recursos adicionais para ministrar aula	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Projeção de Filmes	0	0,0%	0,0%
Estudo de caso	1	33,3%	33,3%
Laboratório de Informática	0	0,0%	33,3%
Outros	2	66,7%	100,0%
Total	3	100,0%	

IV- Outras Informações:

7- Prepara as aulas com qual frequência	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Diária	0	0,0%	0,0%
Semanal	6	100,0%	100,0%
Mensal	0	0,0%	100,0%
Total	6	100,0%	

8- Grau de dificuldade dos estudantes	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Baixo	1	16,7%	16,7%
Médio	3	50,0%	66,7%
Alto	2	33,3%	100,0%
Muito Alto	0	0,0%	100,0%
Total	6	100,0%	

9- Uso da calculadora em aula	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Sim	4	66,6%	66,6%
Não	2	33,4%	100,0%
Total	6	100,0%	

10- Existe livro adequado no mercado	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Sim	3	50,0%	50,0%
Não	3	50,0%	100,0%
Total	6	100,0%	

3.3.2 – Perfil do Corpo Docente das disciplinas que usam Matemática no Curso de Administração de Empresas da Unip

Estratégia E₆

Elaborar questionário a ser aplicado ao corpo docente das disciplinas que utilizam matemática em suas aulas, visando conhecer sua formação acadêmica, experiência profissional, metodologia usada e tópicos de Matemática mais utilizados.

Procedimento P₆

Aplicação de questionário ao corpo docente das disciplinas que utilizam matemática em suas aulas, visando conhecer sua formação acadêmica, sua experiência profissional, sua metodologia utilizada e tópicos mais utilizados.

3.3.2.1 - Questionário: Anexo 5 (Aplicado em março de 2000, página 391)

Elaboramos esse questionário e aplicamos ao Corpo Docente das disciplinas que usam matemática no Curso de Administração de Empresas da Unip e responderam ao questionário 48 (quarenta e oito) professores.

3.3.2.2 - Resultados obtidos e catalogados – Perfil do Corpo Docente das disciplinas que usam Matemática no Curso de Administração de Empresas

Disciplinas	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Informática	8	16,7%	16,7%
Contabilidade	5	10,4%	27,1%
Economia	6	12,5%	39,6%
Adm. Mercadológica	4	8,3%	47,9%
Matemática Financeira	3	6,3%	54,2%
Estatística	4	8,3%	62,5%
Adm. Financeira e Orçamento	3	6,3%	68,8%
Adm. de Produção	4	8,3%	77,1%
Adm. Recursos Mat. e Patr.	3	6,3%	83,4%
Adm. de Recursos Humanos	5	10,4%	93,8%
Adm. Sistemas de Informação	3	6,3%	100,0%
Total	48	100,0%	

I- Dados Pessoais:

1- Formação acadêmica	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Especialização	7	14,6%	14,6%
Mestrando	26	54,2%	68,8%
Mestre	12	25,0%	93,8%
Doutorando	2	4,2%	97,9%
Doutor	1	2,1%	100,0%
Total	48	100,0%	

II- Experiência Profissional:

2- Tempo de Docência no Ensino superior	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Até 5 anos	10	20,8%	20,8%
De 6 a 10 anos	14	29,2%	50,0%
De 11 a 15 anos	12	25,0%	75,0%
Acima de 15 anos	12	25,0%	100,0%
Total	48	100,0%	

3- Tempo de Docência na disciplina	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Até 5 anos	12	25,0%	25,0%
De 6 a 10 anos	13	27,1%	52,1%
De 11 a 15 anos	11	22,9%	75,0%
Acima de 15 anos	12	25,0%	100,0%
Total	48	100,0%	

III- Metodologia de Ensino:

4- Forma de Aula que mais utiliza	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Exp. tradicional	3	3,7%	3,7%
Exp. dialogada com apostila	5	6,2%	9,9%
Exp. dialogada com livro didático.	11	13,6%	23,5%
Exp. dialogada e exercícios.	13	16,0%	39,5%
Exp. dialogada e exercícios e trabalhos em grupo.	39	48,1%	87,7%
A partir de resoluções de problemas	10	12,3%	100,0%
Total	71	100,0%	

5- Tempo disponível da aula para a parte prática	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Até 20%	7	14,9%	14,9%
De 21% a 40%	11	23,4%	38,3%
De 41% a 60%	19	40,4%	78,7%
Mais que 60%	10	21,3%	100,0%
Total	47	100,0%	

6- Recursos adicionais para ministrar aula	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Projeção de filmes	34	41,5%	41,5%
Estudo de caso	28	34,1%	75,6%
Laboratório de informática	12	14,6%	90,2%
Outros	8	9,8%	100,0%
Total	82	100,0%	

IV- Outras Informações:

7- Prepara as aulas com qual frequência	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Diária	11	23,4%	23,4%
Semanal	26	55,3%	78,7%
Mensal	10	21,3%	100,0%
Total	47	100,0%	

8- Uso da calculadora em aula	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Sim	23	48,9%	48,9%
Não	24	51,1%	100,0%
Total	47	100,0%	

9- Tópicos que são pré-requisitos para sua disciplina	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Operações com números inteiros	32	8,5%	8,5%
Operações com números fracionários	32	8,5%	17,0%
Operações com números decimais	30	8,0%	24,9%
Operações com números reais	28	7,4%	32,4%
Operações com números complexos	5	1,3%	33,7%
Equações de 1 ^o e 2 ^o graus	19	5,0%	38,7%
Inequações de 1 ^o e 2 ^o graus	8	2,1%	40,8%

9- Tópicos que são pré-requisitos para sua disciplina	Frequência	Porcentagem	Porcentagem Acumulada
Relações	16	4,2%	45,1%
Funções do 1º grau	14	3,7%	48,8%
Funções do 2º grau	15	4,0%	52,8%
Função modular	5	1,3%	54,1%
Função exponencial	14	3,7%	57,8%
Função logarítmica	10	2,7%	60,5%
Mudança de base	9	2,4%	62,9%
Equações expon. e logarítmicas	8	2,1%	65,0%
Representação Gráfica – Reta	29	7,7%	72,7%
Representação Gráfica – Parábola	23	6,1%	78,8%
Funções Trigonométricas	3	0,8%	79,6%
Matrizes e determinantes	7	1,9%	81,4%
Soluções de Sistemas Simples	16	4,2%	85,7%
Soluções de Sistemas eq. Lineares	7	1,9%	87,5%
Análise combinatória	14	3,7%	91,2%
Probabilidade	16	4,2%	95,5%
Binômio de Newton	5	1,3%	96,8%
Outros	12	3,2%	100,0%
Total	377	100,0%	

3.3.3 - Análise dos resultados obtidos dos questionários aplicados ao corpo docente

Analisaremos em separado cada Corpo Docente.

(a) Corpo Docente que ministra a disciplina matemática no Curso de Administração de Empresas da Unip.

1- Quanto à formação acadêmica dos 6 (seis) docentes de matemática, 1 (um) é mestre e 1 (um) doutorando.

2- Quanto ao tempo de docência na disciplina, 4 (quatro) professores tem de 5 a 10 anos e 2 (dois) acima de 10 anos.

3- Quatro docentes ministram aulas dialogadas com exercícios e 1 (um), a partir de resolução de problemas.

4- Quatro docentes reservam 60% do tempo disponível da aula para a parte prática.

5- Todos os professores disseram que preparam as aulas semanalmente.

6- Quatro professores usam calculadora em aula.

7- O grau de dificuldade dos alunos para o entendimento da disciplina foi considerado baixo por 1 professor, médio por 3 (três) professores e alto por 2 (dois) professores.

(b) Corpo docente dos professores das disciplinas que usam matemática no Curso de Administração de Empresas da Unip.

Responderam ao questionário 48 Quarenta e oito docentes, distribuídos segundo a tabela da página 70.

1- Possuem o título de mestre 12 (doze) docentes nas suas respectivas áreas de ensino, 2 (dois) são doutorandos e 1 (um) doutor. Portanto, 68,8% não possuem o título de mestre.

2- 75% dos docentes, possuem mais que 5 anos de docência.

3- 48,1% dos professores utilizam o método da aula expositiva dialogada, com exercícios e trabalho em grupo e 12,3% partem de resolução de problemas.

4- O tempo da aula disponível para a parte prática é de até 60% e é utilizada por 78,7% dos docentes.

5- Os recursos adicionais mais usado para ministrar as aulas são: projeção de filmes (41,5%) e estudo de casos (34,1%).

6- Metade dos docentes usa calculadoras em aula.

7- Todos os tópicos de Matemática indicados por nós são usados pelas disciplinas da área profissionalizante.

8- Os pré-requisitos mais usados no ensino das suas disciplinas são:

(a) Operações com números inteiros- 8,5%

(b) Operações com números fracionários- 8,5%

(c) Operações com números decimais- 8,0%

(d) Representação gráfica da reta -7,7%

(e) Operações com números reais -7,4%

(f) Representação gráfica da parábola - 6,1%, e

(g) Com poucas citações temos :

números complexos -1,3%,

função modular -1,3%,

funções trigonométricas -0,8%.

3.3.4- Conclusões sobre o corpo docente

Em geral, as aulas ministradas pelos professores das disciplinas profissionalizantes do Curso de Administração de Empresas são aulas expositivas dialogadas, com exercícios e trabalhos em grupo (tabela da página 73 reproduzida a seguir).

Forma de aula que mais utiliza	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Expositiva Tradicional	3	3,7	3,7
Exp. Dialogada com apostila	5	6,2	9,9
Exp. Dialogada c. livro didático	11	13,6	23,5
Exp. Dialogada e exercícios	13	16,0	39,5
Exp. Dialogada e exercícios e trabalhos em grupo	39	48,1	87,7
A partir de resolução de problemas	10	12,3	100%
Total	71	100%	

Também as aulas ministradas pelos professores de Matemática do Curso de Administração de Empresas (tabela da página 57) são, na maioria, aulas expositivas dialogadas e exercícios (50%) e aulas expositivas dialogadas com exercícios e trabalhos em grupo (37,5%).

Forma de aula que mais utiliza	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
Expositiva Tradicional	0	0%	0%
Exp. Dialogada com apostila	0	0%	0%
Exp. Dialogada com livro didático	0	0%	0%
Exp. Dialogada e exercícios	4	50,0%	50,0%
Exp. Dialogada e exercícios e trabalhos em grupo	3	37,5%	87,5%
A partir de resolução de problemas	1	12,5%	100,0%
Total	8	100,0%	

Partindo desses dados, podemos dizer que o processo de ensino – aprendizagem está centrado no professor, que tem a incumbência de transmitir ao aluno os conhecimentos matemáticos e esclarecer as dúvidas que ocorrerem. Nessa linha, vejamos as observações de D'Ambrósio, B. (1993, p. 38):

Predomina um ensino em que o professor expõe o conteúdo, mostra como resolve através de alguns exemplos e pede que os alunos resolvam inúmeros modelos semelhantes. Nessa visão de ensino o aluno recebe instrução passivamente e imita os passos do professor na resolução de problemas ligeiramente diferentes dos exemplos. Predomina o sucesso por memória e repetição.

Assim, podemos concluir que a metodologia usada pelo Corpo Docente de matemática é aquela em que cada tópico é apresentado por meio de definições, propriedades e exercícios.

Esse modelo exige do aluno apenas repetições das técnicas apresentadas. Em geral, o número de aulas nem sempre é suficiente para a aprendizagem dos inúmeros tópicos necessários para atender aos pré-requisitos do curso, e o professor faz com que a aula siga um ritmo acelerado, não deixando tempo para o aluno pensar. É comum o professor usar listas de exercícios extra classe ora distribuídas por ele, ora indicadas por um livro. Com respeito aos livros-texto de matemática para o Curso de Administração de Empresas, vê-se que nas décadas de 60, 70 e 80 apresentavam um conteúdo semelhante ao processo de ensino utilizado pelos professores em suas aulas. Assim, continham definições, propriedades, exercícios resolvidos e uma lista de exercícios que os alunos deveriam resolver, ou em sala ou como tarefa de casa.

Podemos citar alguns livros editados com essas características:

Jean E. Weber – 1967 – *Matemática para Economia e Administração*;

Caroline Dinwiddy – 1967 – *Elementos de matemática para economistas*;

Pedro A. Morettin e W. O. Bussab – 1976 – *Métodos quantitativos para Economistas e Administradores* ;

Alpha C. Chiang – 1974 – *Fundamental Methods of Mathematical Economics*.

Observamos, ainda, que na maioria destes livros encontramos, em seus primeiros capítulos, uma revisão da Matemática do Ensino Fundamental e Médio, revisão esta que contém assuntos tais como: conjuntos, conjuntos numéricos, fatorações, equações do 1º e 2º graus, sistema de equações simples, potenciação, radiciação, etc.

Com respeito aos livros da década de 90, estes apresentam as mesmas características dos livros editados anteriormente, e acrescentam aplicativos, isto é, problemas que ocorrem

em Economia e Administração de Empresas e que são resolvidos usando conceitos de matemática.

Podemos citar os seguintes livros que possuem essas características:
Lilian Ladeira Veras – 1995 – *Matemática Aplicada à Economia*;
Seiji Hariki e Oscar J. Abdounur – 1999 – *Matemática Aplicada*;
Sebastião Medeiros da Silva – 1999 – *Matemática para Economia, Administração e Ciências Contábeis*.

Conseqüentemente, os professores que recomendam essa bibliografia aos seus alunos como livro-texto utilizam os mesmos capítulos do livro, seguem a mesma ordem curricular e ainda se observa que mantêm o mesmo padrão em cada tópico: definições, propriedades, exemplos aplicativos e uma coletânea de exercícios de fixação. Os exercícios não resolvidos são destinados aos alunos como tarefa para casa.

Em geral, os livros-texto de matemática são editados de maneira a atender a vários cursos, tais como: Administração de Empresas, Ciências Contábeis e Economia, o que nos leva a dizer que não são livros específicos de uma área. O livro-texto indica, freqüentemente, a amplitude, a seqüência e mesmo o ritmo do desenvolvimento do programa de matemática. Portanto, sua adequação pode ser questionada quando ele é usado como instrução em um determinado curso, pois nem sempre está compatível com os objetivos estabelecidos.

O currículo de matemática do Curso de Administração de Empresas não deve ser determinado pelo livro-texto, porém o texto deve ser selecionado com base nas decisões do currículo do Curso, de suas tendências e ênfases.

Como o livro-texto tem forte influência na sala de aula de matemática, ele pode ser tanto um servidor inestimável como um mestre intolerável, dependendo de como é utilizado. Autores de livros incluem, propositadamente, mais conteúdo do que o necessário, de modo a oferecer ao professor possibilidade de seleção de tópicos.

Podemos ainda dizer que a memorização do texto pelo aluno, de suas definições e propriedades não desenvolve habilidades na comunicação na compreensão.

Os estudantes necessitam de experiências para estabelecer generalizações com suas próprias palavras e o uso constante do livro-texto neutraliza o interesse dos alunos em razão da sua monotonia, seu tratamento formal, contribuindo para o aparecimento dos mecanismos de defesa tais como: a resignação, a sensação de impotência, a aceitação pacífica dos resultados e até ausência de críticas ou contestações.

Com respeito aos livros didáticos, o professor Elon Lages de Lima, ao coordenar “Debates sobre o ensino de matemática nas escolas”, em reunião da Academia Brasileira de Ciências, assim se expressa:

A fim de preparar suas aulas, o professor iniciante vai depender dos livros-texto, dos quais há dois tipos: Aqueles escritos por professores como ele, que não aprenderam bem as coisas que estão ensinando; e outros, escritos por bem intencionados professores universitários, que não sabem usar a linguagem acessível aos alunos nem conseguem dosar o grau de abstração e generalidade aceitáveis ao público-alvo.

Desta maneira, o ensino-aprendizagem está comprometido, pois há mecanização de resultados sem significado ou compreensão, não havendo retenção dos resultados e levando ao baixo rendimento na aprendizagem.

Os dados colhidos pelos questionários demonstram que a maioria dos professores ministra suas aulas da maneira tradicional, isto é, aulas expositivas dialogadas, com exercícios, por outro lado, a maioria dos professores de matemática diz que seus alunos têm dificuldade na aprendizagem.

Observamos que todos os itens de matemática, indicados por nós no questionário, são utilizados pelos professores do ensino profissionalizante e destacamos: Operações com números, representações gráficas da reta e da parábola, equações de primeiro e segundo grau, soluções de sistemas de equações, etc.

Tendo em vista todo material analisado e as conclusões a que chegamos, podemos dizer que a mera curiosidade que tínhamos no início de nossa pesquisa (de que os alunos que chegam ao curso de Administração de Empresas da Unip, estão despreparados para o Ensino – Aprendizagem de matemática), está comprovada. Também está claro, pelas respostas da maioria dos professores de matemática, que os alunos têm médio e alto grau de dificuldade na aprendizagem dessa disciplina e sabemos, ainda, que as aulas ministradas são dialogadas, com exercícios. A continuarmos com esse modelo de ensino-aprendizagem de matemática, o nosso aluno não terá os pré-requisitos necessários para a área profissional, nem atingirá o perfil estabelecido para o Administrador. Portanto uma nova metodologia de Ensino–Aprendizagem de matemática deve ser testada nessas turmas.

3.4 – Ensino - Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas

Estratégia E 7

Pesquisar sobre metodologia de Ensino – Aprendizagem de Matemática via resolução de Problemas

Procedimento P 7

Apresentar a metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática via resolução de Problemas

3.4.1 – Conhecendo a metodologia de Ensino - Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas

Mostramos que o Ensino de Matemática Moderna resultou em um fracasso que persiste até nossos dias, mesmo ocorrendo várias tentativas de melhoria. Vimos que os alunos, do primeiro ano do Curso de Administração de Empresas da Unip (2000/2001), herdaram esse modelo e que a cada três alunos dessas turmas um apenas diz gostar de matemática. 88% desses alunos tiveram dificuldade para resolver os exercícios propostos no teste e ainda muitos não têm auto-suficiência intelectual necessária para acompanhar a disciplina Matemática..

Vimos, ainda, que o ensino de matemática no Curso de Administração tem o professor como centro do processo de ensino-aprendizagem, e, na outra extremidade, para receber suas informações, alunos cujo perfil analisamos e que nos parecem despreparados para esse modelo.

Desta forma, propomos uma nova metodologia de ensino-aprendizagem que:

- a) *não se preocupe apenas em repassar o saber, mas estimule a participação do aluno na construção do conhecimento, desencadeando sua atividade mental através de seu centro lógico de pensamento;*
- b) *desenvolva o raciocínio e a reflexão;*
- c) *favoreça a aquisição de conhecimentos, possibilitando suas aplicações em situações práticas;*
- d) *facilite a transferência da aprendizagem por meio da aplicação do conhecimento a situações novas e*
- e) *desenvolva a iniciativa na busca de novos conhecimentos, na tomada de decisões.*

Essa metodologia de ensino é denominada Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

Ocorre quando o aluno participa ativamente do processo de reconstrução do conhecimento, aplicando seus esquemas operatórios de pensamentos aos conteúdos estudados. Por isso, a aprendizagem supõe atividade mental, pois aprender é agir e operar mentalmente, é pensar, refletir. O procedimento didático mais adequado à aprendizagem de um determinado conteúdo é aquele que ajuda o aluno a incorporar os novos conhecimentos de forma ativa, compreensiva e construtiva, estimulando o pensamento operatório. Para que a aprendizagem se torne mais efetiva, é preciso substituir nas aulas as tarefas mecânicas que apelam para a repetição e a memorização, por tarefas que exijam dos alunos a execução de operações mentais.

É bom recordar que a história da matemática está repleta de relatos onde o homem, ao se relacionar com o universo físico em que vive, utiliza-se da *Resolução de Problemas* para explorar e controlar as fontes de riqueza da terra. Assim, podemos citar problemas de gravitação, calor, luz, som, ondas de rádio, magnetismo, etc.

Não sabemos mensurar em que proporção os problemas formulados e resolvidos, parcial ou completamente, devem-se a circunstâncias externas ou a alguma forma de necessidade interna. Muitas vezes torna-se impossível traçar a origem de um determinado problema. Uma vez formulado o problema, este torna-se, de algum modo, um desafio intelectual.

A matemática, como uma área do conhecimento humano, desenvolveu-se por meio de uma combinação entre problemas e teorias. Os problemas geraram as formulações de conceitos, teorias e técnicas apropriadas para resolvê-los. Das teorias, por sua vez, surgiram novos problemas que ampliaram a área de aplicação. Assim, podemos observar que a derivada desenvolveu-se em consonância com os problemas de construção de tangentes a curvas, determinação de máximos e mínimos.

A integração desenvolveu-se por meio da solução de problemas envolvendo áreas (quadratura), volume (cubatura) e comprimento de arcos (retificação).

Vejamos alguns exemplos problemas que surgiram ao longo dos tempos. Da antiguidade grega originam-se três problemas de geometria.

1. Duplicação do cubo ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado.
2. Trissecção do ângulo ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais.
3. Quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso.

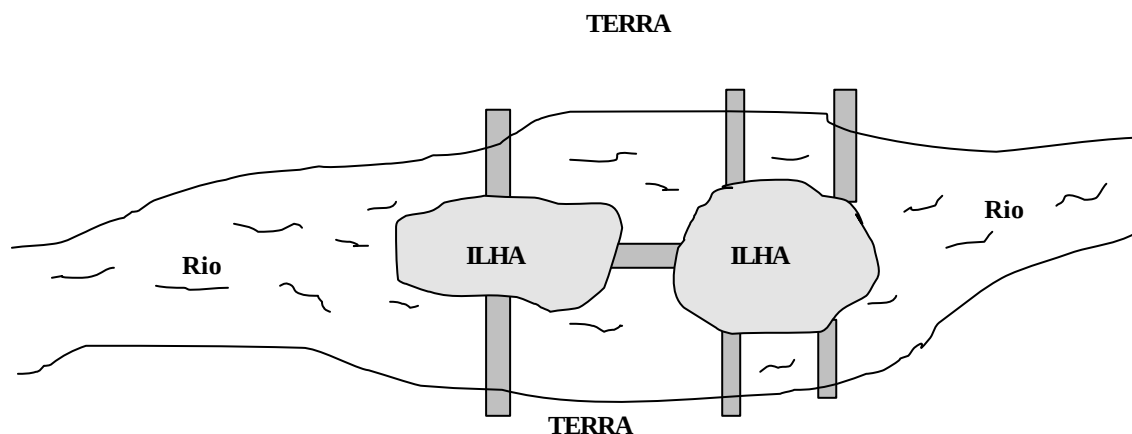
Eves (1997, p. 586) diz que:

Foi só no século XIX que finalmente se provou a impossibilidade da resolução dos três famosos problemas da Antigüidade com os instrumentos euclidianos. Podem-se encontrar demonstrações desse fato em muitos dos textos atuais sobre teoria das equações, onde se mostra que as condições de construtibilidade são de natureza essencialmente algébrica.

Outros problemas famosos são:

Problema das 7 pontes de Königsberg

Seria possível fazer um passeio pela cidade de Königsberg (Alemanha) de maneira a cruzar todas as pontes, uma, e uma só vez e voltar ao ponto de partida.



A cidade está localizada na foz do rio Pregel, e é famosa por suas sete pontes, cinco delas dando acesso a uma ilha, como mostra a figura.

O problema foi enviado ao matemático Leonhard Euler, que em 1735 apresentou sua solução perante a Academia Russa em São Peterburgo, provando que o passeio pelas pontes, tal como era estabelecido pelo problema, era impossível. Assim, segundo Guilherme M. de La Penha: (Revista do Professor de Matemática nº. 3)

Um ramo da Matemática da qual Euler pode ser dito um dos fundadores é hoje conhecido por “Teoria dos Grafos”, uma parte hoje adulta e independente da “Topologia”.

Problemas de Hilbert

David Hilbert, professor da Universidade de Göttingen, apresentou, no 2º Congresso Internacional de Matemática realizado em Paris no ano de 1900, uma série de 23 problemas de investigação, onde tentando captar a direção das pesquisas das décadas anteriores e esboçar as linhas gerais do trabalho produtivo futuro.

Segue resumo dos 23 problemas propostos: (STRUIK, p. 304 a 307)

1. O problema da cardinalidade do contínuo de cantor.
2. A consistência de (ausência de contradições entre) os axiomas aritméticos.
3. A igualdade do volume de dois tetraedros, se a base, a área e a altura forem iguais.
4. O problema da linha reta como a ligação mais curta entre dois pontos.
5. O conceito de Lie de grupo de transformações contínuas sem postular a diferenciabilidade das funções que definem o grupo.
6. O tratamento matemático dos axiomas da física.
7. A irracionalidade e transcendência de certos números.
8. Problemas na teoria dos números primos.
9. Prova da lei mais geral de reciprocidade em corpos arbitrários de números.
10. Decidir se uma equação diofantina com números inteiros racionais é resolúvel com tais números.
11. A teoria das formas quadráticas com coeficientes algébricos.
12. Generalização do teorema de kronecker sobre corpos abelianos para um domínio de racionalidade arbitrário.
13. A impossibilidade de resolver a equação geral de grau sete através de funções com duas variáveis apenas.
14. A prova do caráter finito de certos sistemas de funções inteiras relativas .
15. A fundamentação rigorosa da geometria enumerativa de Schubert.
16. O problema da topologia das curvas e superfícies algébricas.
17. A representação de funções definidas (funções que nunca são negativas para o valor real das funções) através de quocientes de somas de quadrados de funções.
18. Construção (preenchimento) do espaço por poliedros congruentes.
19. As soluções dos problemas variacionais regulares são sempre analíticas?
20. Os problemas de fronteira em geral, demonstrando em particular a existência de soluções de equações diferenciais a derivadas parciais com valores de fronteira dados e generalizações de problemas variacionais regulares.
21. Prova da existência de equações diferenciais lineares com grupo de monodromia dado.
22. Uniformização de relações analíticas através de funções automórficas.
23. Extensão dos métodos do cálculo das variações.

Esses vinte e três problemas propostos estimularam profundamente a investigação até nossos dias. Eles variavam desde a colocação de questões extras de matemática até a indicação de tópicos gerais.

Sabemos que a sociedade depende cada vez mais de conhecimento. A falta deste impede a participação efetiva e a tomada de decisões em relação aos problemas e dificulta o acesso às posições de trabalho. Cada vez mais se observa o desenvolvimento de novas tecnologias no campo do trabalho, exigindo trabalhadores cada vez mais criativos e versáteis, capazes de entender o processo de trabalho como um todo, e dotados de iniciativa para resolver problemas em equipe. Esses novos profissionais devem estar num contínuo processo de formação e, portanto, aprender a aprender torna-se cada vez mais fundamental. Nesse aspecto,

A Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizam a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (PCN de Matemática, 1998, p.27)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática constituem um referencial na construção de uma prática educativa. Os parâmetros destacam que

A Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula. (PCN de Matemática, 1998, p. 59)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, p. 40), quando colocam o foco na Resolução de Problemas, apresentam uma série de princípios:

O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada. A resolução de problema não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) dos Estados Unidos apresentou recomendações para o ensino de matemática no documento *Uma Agenda para a Ação*. Nele a Resolução de Problemas era destacada como o foco do Ensino da matemática nos anos 80.

As ações recomendadas enfatizavam que:

- O currículo matemático deveria ser organizado ao redor de Resolução de Problemas;
- A definição e a linguagem de resolução de problemas em matemática deveria ser desenvolvida e expandida de modo a incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que encerrassem o pleno potencial de aplicações matemáticas;
- Os professores de matemática deveriam criar ambientes de sala de aula onde a Resolução de Problemas pudesse prosperar;
- Materiais curriculares adequados ao ensino de Resolução de Problemas deveriam ser desenvolvidos para todos os níveis de escolaridade;
- Os programas de matemática dos anos 80 deveriam envolver os estudantes com a Resolução de Problemas, apresentando aplicações em todos os níveis;
- Pesquisadores e agências de fomento à pesquisa deveriam priorizar, nos anos 80, investigações em Resolução de Problemas.

Ao final da década de 80, os pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos. Segundo Andrade (1998, p.12),

A Resolução de Problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. Dessa maneira, os problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem formal.

Na busca do aperfeiçoamento dessa nova reforma para a Educação Matemática, o NCTM publicou três conjuntos de padrões:

Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, em 1989; Professional Standards for Teaching Mathematics, em 1991 e Assessment Standards for school Mathematics, em 1995. A partir dessa data o NCTM passou a trabalhar sobre as críticas e sugestões recebidas sobre esses três trabalhos e publicou em abril de 2000, Principles and Standards for School Mathematics. Essa obra é conhecida como Standards 2000 e coloca seis princípios a serem seguidos dentro de seu trabalho: *Equidade; Currículo; Ensino; Aprendizagem; Avaliação e Tecnologia.*

Apoiados nesses princípios são apresentados cinco *padrões de conteúdo*:

Números e operações; Álgebra; Geometria; Medida; e Análise de dados e Probabilidade. Esses padrões descrevem o conteúdo a ser trabalhado. São apresentados também cinco *padrões de processo*: *Resolução de problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões; e Representação.* Esses padrões destacam os caminhos de se adquirir e usar o conhecimento do conteúdo trabalhado.

Ao se referir ao padrão de processo, Resolução de Problemas, Onuchic (1999, p.208), assim se expressa:

É importante ter a visão de que compreender deve ser o principal objetivo do ensino, apoiados na crença de que o aprendizado de matemática, pelos alunos, é mais forte quando é autogerado do que quando se lhes é imposto por um professor ou por um livro-texto. Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.

Beatriz D'Ambrósio em seu artigo *Formação de Professores de Matemática para o século XXI*, assim se expressa:

Há uma necessidade de os novos professores compreenderem a matemática como uma disciplina de investigação. Uma disciplina em que o avanço se dá como consequência do processo de investigação e resolução de problemas. Além disso, é importante que o professor entenda que a Matemática estudada deve, de alguma forma, ser útil aos alunos, ajudando-os a compreender, explicar ou organizar sua realidade. Para trabalhar a matemática de maneira alternativa é necessário acreditar que, de fato, o processo de aprendizagem da matemática se baseia na ação do aluno em resolução de problemas, em investigações e explorações dinâmicas de situações que o intrigam.

Schroeder & Lester (1989, p.31) apresentam três modos diferentes de abordar Resolução de Problemas:

1. Ensinar sobre resolução de problemas.

O professor que ensina sobre resolução de problemas ressalta o modelo de resolução de problemas de Polya (1995). Este modelo apresenta-se em quatro fases:

Primeira - Compreensão do Problema - É necessário compreender o problema para perceber claramente o que é necessário fazer. O problema escolhido pelo professor deve envolver um nível razoável de dificuldades.

Segunda – Estabelecimento de um Plano – Segundo Polya, só se consegue estabelecer um plano para a solução de um problema quando são conhecidos, pelo menos de modo geral, os cálculos ou desenhos, Haja experiências anteriores, ou seja, problemas anteriores resolvidos

Terceira – Execução do Plano – O plano funciona como um roteiro geral e deve conter todos os detalhes. O professor deverá insistir com o aluno para que verifique cada passo.

Quarta – Retrospecto – Quando se faz o retrospecto da solução examinando o resultando final, os caminhos que levaram à solução podem aprofundar os conhecimentos e aperfeiçoar a capacidade de resolver problema.

2. Ensinar a resolver problemas.

O professor, ao ensinar a resolver problemas, concentra-se na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicado na resolução de problemas.

Geralmente os problemas trabalhados em sala de aula têm como finalidade a fixação dos assuntos que acabaram de ser estudados. Normalmente se caracterizam como exercícios repetitivos, criando procedimentos padronizados para serem utilizados na resolução de outros problemas semelhantes. Essa forma de trabalhar com Resolução de Problemas não contribui para o melhor aproveitamento do desenvolvimento da matemática na sala de aula.

3. Ensinar Matemática via resolução de problemas.

Nesse caso, o ensino-aprendizagem de um tópico começa com uma situação – problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas aos problemas considerados. Os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender Matemática, mas também como um primeiro passo para se fazer isso.

Esses três modos de abordar Resolução de Problemas, embora tenham sido apresentados separadamente, na prática se superpõem e acontecem em várias combinações e seqüências.

Nosso interesse está centrado no terceiro modelo, isto é, ensinar matemática por meio da Resolução de Problemas.

CHARNAY,(1996, p. 46) assim se expressa sobre problema:

Só há problema se o aluno percebe uma dificuldade; uma determinada situação que ‘provoca problema’ para um determinado aluno pode ser resolvida imediatamente por outro e, então, não será percebida por este último como sendo problema. Há então, uma idéia de obstáculo a ser superado.

O problema precisa ser desafiador para o aluno, não devendo ser resolvido por meio de procedimentos padronizados. O problema-padrão ou problema clássico de matemática é colocado no processo ensino-aprendizagem de uma forma que limita a criatividade do aluno, gerando muitas vezes verdadeiras regras-padrão de modelos a serem seguidos. Diante dessa situação, o aluno é levado a uma atitude de dependência, de memorização. O professor, neste

caso, considera que o aluno aprende por reprodução, isto é, basta resolver muitos desses problemas para aprender a resolver problemas com o conteúdo estudado.

Concordamos com Brasil (1964, p.22):

Tradicionalmente o problema é empregado, pelos professores, na verificação e na fixação da aprendizagem. Atendendo, porém, para a história das ciências, notamos que o problema antecede invariavelmente as descobertas, é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas. Por que no ensino da matemática especialmente invertemos a ordem natural das coisas? Na verdade, costumamos iniciar expondo a teoria, que historicamente se estruturou na resolução de uma seqüência de problemas, e a desligamos dos mesmos para ressaltar-lhe apenas os aspectos lógicos; depois mostramos sua aplicação na resolução de alguns daqueles problemas que, então, passam a ser empregados como meio de verificar se o aluno aprendeu a aplicar a teoria, ou como exercícios para a fixação da aprendizagem.

O que desejamos da Resolução de Problemas é possibilitar ao aluno chegar à teoria matemática por meio de problemas, levando o professor a substituir a constante exibição de conhecimentos pela ordenação das conclusões acertadas a que os alunos chegam quando provocados por situações-problema.

Para provocar a aprendizagem do tipo reflexivo, devemos começar pelo problema, pois este põe em funcionamento os esquemas mentais de ação com o que o aluno irá assimilar a teoria.

ONUChic (1999, p.215 a 217) apresenta um esquema de aula em que um objeto matemático é trabalhado visando seu ensino e sua aprendizagem, com compreensão e significado, através da Resolução de Problemas:

- **Formar grupos – entregar uma atividade**

Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado. Progredir em direção a um objetivo vem por meio de esforços combinados de muita gente. Os estudantes precisam experimentar este processo cooperativo e deve-se dar, a eles, oportunidade de aprender uns com os outros. Assim, devemos organizar os alunos em pequenos grupos, e muito da aprendizagem em sala de aula será feita no contexto desses grupos.

- **O papel do professor**

Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da

aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem uns aos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz intermediações, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

- **Resultados na lousa**

Com o trabalho dos alunos terminado, o professor anotaria na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados, e aqueles feitos por diferentes caminhos.

- **Plenária**

Chama os alunos todos, de todos os grupos para uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Procuram defender seus pontos de vista e participam.

- **Análise dos resultados**

Nesta fase, os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são novamente trabalhados. Nesse trabalho surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir que se leve o trabalho à frente. O aspecto exploração é bastante considerado nesta análise.

- **Consenso**

A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.

- **Formalização**

Num trabalho conjunto de professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho, é feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema ou situação-problema dada. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades, feitas as demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu usando as novas tecnologias próprias ao assunto.

Capítulo 4 Criação e Aplicação do Projeto

4.1 - Introdução

4.2 - Preparação do Projeto

4.2.1 - Proposta de Currículo Pleno do Curso de Administração em vigor

4.2.2 - Nova proposta de Ementa e Conteúdo Programático e Planejamento didático da disciplina Matemática do Curso de Administração de Empresas

4.2.3 - Cronograma semanal

4.3 - A Criação do Projeto

4.3.1 - Introdução

4.3.2 - Unidades programáticas

4.3.3 - Preparação semanal das aulas

4.4 - Aplicação do Projeto

Unidade I Funções

1 - Conceito de função

2 - Variáveis dependentes e independentes

3 - Domínio e Contradomínio

4 - Definição de função

5 - Funções Elementares

5.1 - Função constante

5.2 - Função afim

5.2.1 - Aplicações da função afim

5.3 - Função quadrática ou função trinômio do 2º grau

5.3.1 - Definição de função quadrática

5.3.2 - Representação gráfica da função quadrática

5.3.3 - Aplicações da função quadrática

5.4 - Aplicações das funções afim e quadrática na Administração e na Economia

5.4.1 - Lei da demanda ou da procura

5.4.2 - Lei da oferta

5.4.3 - Equilíbrio de mercado

5.4.4 - Receita total

5.4.5 - Custo total

5.4.6 - Ponto crítico (Break-even point)

5.5 - Função modular

5.6 - Função raiz quadrada

5.6.1 - Definição da função raiz quadrada

5.6.2 - Aplicações da função raiz quadrada

5.7 - Função recíproca ou hipérbole equilátera

5.7.1 - Definição de função recíproca ou hipérbole equilátera

5.7.2 - Problemas aplicativos da função recíproca ou hipérbole equilátera

5.8 Função exponencial

5.8.1 - Definição de função exponencial

5.8.2 - Aplicações da função exponencial

5.9 - Função logarítmica

5.9.1 - Definição de função logarítmica

Unidade II Ajustamento de Curvas

1. Conceito de ajustamento de curvas
2. Conceito de somatório
3. Definição de média aritmética
4. Regressão linear
 - 4.1 Aplicações do método de regressão linear

Unidade III Seqüências

1. Definição de seqüências
2. Seqüência limitada inferiormente
3. Seqüência limitada superiormente
4. Seqüência limitada
5. Seqüências monótonas
6. Seqüência convergente
7. Seqüência divergente
8. Aplicações de seqüências
9. Aplicações de seqüências, quando a função $f(x)$ tem sua variável x assumindo valores de uma seqüência (A_n)

Unidade IV Custo Marginal e Receita Marginal

1. Introdução
2. Velocidade média
3. Variação da função
4. Taxa média de variação
5. Custo Marginal
 - 5.1. Custo marginal dado pelas funções
 - 5.1.1. Função constante
 - 5.1.2. Função linear
 - 5.1.3. Função quadrática
 - 5.1.4. Função parábola cúbica
 - 5.1.5. Função $C(q) = q^n$
 - 5.2. Aplicações de custo e receita marginal

Estratégia geral

Nossa estratégia geral é criar um projeto diferenciado de trabalho, para a disciplina Matemática, destinado aos alunos do Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista.

Procedimento geral

Nosso procedimento geral constitui-se na elaboração do projeto.

Ao colocarmos esse procedimento geral em ação faremos sua aplicação.

4.1 - Introdução

É de bom alvitre que, neste início da criação do projeto, lembremos nossa conjectura, pois ela serviu de ponto de partida para o nosso trabalho de pesquisa:

É possível elaborar e desenvolver um novo enfoque da disciplina Matemática a partir de aplicações na área profissionalizante de Administração de Empresas, acompanhado de uma nova ementa e novo conteúdo programático, apoiado na metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

Procurando defender essa conjectura, levantamos estratégias e procedimentos e buscamos conhecer:

- a) O perfil do Administrador de Empresas;
- b) O perfil do corpo discente;
- c) O perfil do corpo docente;
- d) O ensino aprendizagem de matemática nas últimas décadas, e
- e) A metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

Nosso objetivo agora é interligar o potencial de conhecimento matemático, adquirido anteriormente pelo corpo discente, com situações-problema retiradas, em sua maioria, da área profissionalizante e construir o conhecimento matemático dos alunos por meio da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução Problemas. Além disso, utilizaremos nova ementa, novo conteúdo programático e atenderemos aos novos objetivos da disciplina Matemática para o Curso de Administração de Empresas do período matutino do Campus Vergueiro.

Partimos do pressuposto de que o currículo do Curso de Administração de Empresas, elaborado pela Universidade Paulista (Unip) em consonância com o MEC (Ministério de Educação e Cultura) e exposto no segundo capítulo deste trabalho, é o modelo correto para a ação educativa dos futuros Administradores de Empresas.

Com respeito à disciplina Matemática, propomos uma nova ementa e um novo conteúdo programático, pois acreditamos não se justificar a manutenção de certos tópicos por estarem no programa há muito tempo ou, simplesmente, por se acreditar que os alunos, não os conhecendo, não teriam condições de trabalhar outros importantes tópicos. A metodologia adotada em nosso trabalho com os alunos do Curso de Administração de Empresas da Unip é a metodologia de Ensino de Matemática via Resolução de Problemas. Nosso objetivo não é o de termos alunos capacitados a repetir conceitos e conteúdos desligados da realidade de hoje, mas de que se preparem bem em temas com aplicações convenientes ao futuro Administrador.

Referindo-se ao equilíbrio do currículo, Kilpatrick e Silver (2000, p. 227) assim se expressam:

Controvérsias sobre o que os estudantes de matemática devem aprender, por que eles devem aprender e como se lhes deve ensinar, tornaram-se moda ao longo do século XX. Metas como treinar a capacidade intelectual do indivíduo, prepará-lo para o mercado de trabalho, torná-lo cidadão informado, prover satisfação estética, auxiliar o país dessa pessoa a competir militar e economicamente e torná-lo confiante na sua habilidade impulsionaram argumentos para incluir certos tópicos matemáticos no currículo, mantendo outros. ... Por volta da metade do século XX, educadores matemáticos começaram a perceber que nenhum currículo poderia ser revisado, tão rapidamente, para se manter lado a lado da mudança social e tecnológica. Ninguém poderia prever com exatidão qual a matemática de que os alunos precisariam quando se tornassem adultos, ainda que se soubesse as carreiras que eles seguiriam. Conseqüentemente, os fomentadores de currículo propuseram que a matemática escolar munisse os alunos de habilidades e conhecimentos que os ajudassem a aprender, quando adultos, a matemática específica que poderiam precisar.

Segundo D' Ambrósio (1996, p. 89),

O currículo , visto como estratégia de ação educativa, leva-nos a facilitar a troca de informações, conhecimentos e habilidades entre alunos e professor/ alunos, por meio de uma socialização de esforços em direção a uma tarefa comum . Isso pode ser um projeto, uma tarefa, uma discussão, uma reflexão e inúmeras outras modalidades de ação comum, em que cada um contribui com o que sabe, com o que tem, com o que pode, levando seu empenho ao máximo na concretização do objetivo comum.

O currículo de Administração não só deve acompanhar o desenvolvimento tecnológico, mas deve estar à frente, oferecendo ao aluno a melhor educação possível.

Diante desse horizonte, salta aos olhos que necessitamos de uma educação muito diferente daquela usual. Em primeiro lugar, precisamos de educação que puxe o

desenvolvimento, não que se arrasta atrás, representando o atraso. Para tanto, carece corresponder ao desafio de manejar e produzir conhecimento, ou seja, deve superar a exclusividade da didática ensino-aprendizagem, tipicamente reprodutiva/ transmissiva. (Demo, 1998, p.24)

Um administrador para o novo século, que seja capaz de definir seu destino profissional, deve ter uma formação sólida.

[...] tem como finalidade dotar a pessoa da característica de pensar crítica e criativamente, e de manter-se em estado ininterrupto de atualização. (Demo,1993, p.33)

O professor, frente a esse novo modelo, deve estar muito consciente de que :

... ensinar já não significa transferir pacotes sucateados, nem mesmo significa meramente repassar o saber. Seu conteúdo correto é motivar o processo emancipatório com base em saber crítico, criativo, atualizado e competente. Trata-se, não de cercear, temer, controlar a competência de quem aprende, mas de abrir-lhe a chance na dimensão maior possível. Não interessa o discípulo mas o novo mestre. Entre o professor e o aluno não se estabelece apenas hierarquização verticalizada, que divide papéis pela forma do autoritarismo, mas sobretudo confronto dialético. Este alimenta-se da realidade histórica formada por entidades concretas que se relacionam, de modo autônomo, com sujeitos sociais plenos. (Demo, 1993, p.153)

Vários são os autores que consideram a figura do professor como central para que as transformações que se fazem necessárias na escola e na sociedade ocorram. Há um consenso com relação à relevância desse profissional no processo educativo e de seu papel como agente transformador da realidade, ou seja, o compromisso do professor deve ser o de dar uma direção que aponte para a superação das desigualdades sociais. (Perez, 1999, p.264)

O que se espera da disciplina Matemática para o Curso de Administração de Empresas é que ela possa ser utilizada como ferramenta pelas demais disciplinas do curso, e não há dúvida de que o conhecimento de métodos matemáticos, associados aos conceitos de administração, leva o aluno a compreender e analisar melhor os fenômenos ligados ao processo da administração.

Quando se examina a aprendizagem de matemática, depara-se com duas situações:

- a) Aquisição de técnicas
- b) Compreensão de idéias

A aquisição de técnicas é certamente aquela que utiliza a maior parte da aula e é devotada ao melhoramento das habilidades em aplicar a técnica. Embora a segunda seja mais relevante, observa-se que não se tem dado muita atenção à necessidade de compreensão.

Existe, é claro, uma diferença entre compreender a técnica e entender o assunto. Um aluno pode conhecer bastante toda técnica de resolução de sistemas de equações, sem ter

muita noção do que venha a ser a sua solução. Muitas vezes o professor pensa que o aluno aprendeu, pois ele foi capaz de dar respostas-padrão a perguntas-padrão. Mas o aluno pode não ter entendido o conceito e uma pergunta menos padronizada pode revelar muitas vezes sua real situação.

4.2 – Preparação do Projeto

4.2.1 - Proposta de Currículo Pleno do Curso de Administração em vigor

Após inúmeras reuniões destinadas à reestruturação do Curso de Administração de Empresas do Instituto de Ciências Sociais e Comunicação da Unip, foi elaborada a proposta que segue para todos os alunos ingressantes em 1998/99 e para todos os campi da Universidade Paulista.

UNIVERSIDADE PAULISTA CURRÍCULO PLENO DOS CURSOS DE ADMINISTRAÇÃO

Primeiro Ano (1998/99)

Informática I e II	160 h/a
Contabilidade I e II	160 h/a
Matemática I e II	160 h/a
Sociologia I e II	80 h/a
Teorias da Administração I e II	80 h/a
Comunicação Empresarial I e II	80 h/a
Administração Aplicada I e II	80 h/a

Segundo Ano (1999/00)

Psicologia I e II	80 h/a
Economia I e II	80 h/a
Adm. Mercadológica I e II	160 h/a
Adm. de Recursos Humanos I e II	160 h/a
Organiz. Sistemas & Métodos I e II	160 h/a
Matemática Financeira I e II	80 h/a
Adm. Rec. Mat. e Patrim. I e II	80 h/a

Terceiro Ano (2000/001)

Estatística I e II	160 h/a
Filosofia I e II	80 h/a
Direito I e II	80 h/a
Adm. Financeira e Orçamento I e II	160 h/a
Adm. da Produção I e II	60 h/a
Competitividade Organizacional I e II	160 h/a
Liderança e Empreendedorismo I e II	80 h/a

Quarto Ano (2001/002)

Controladoria I e II	160 h/a
Criação e Gestão de Negócios I e II	80 h/a
Ambiente Econômico Global I e II	80 h/a
Legislação Aplicada às Organiz. I e II	160 h/a
Adm. Sistemas de Inform. I e II	80 h/a
Instrumentos de Gestão I e II	80 h/a
Estágio I e II	80 h/a
Trabalho de Conclusão de Curso I e II	80 h/a

Ementa e conteúdo programático da disciplina Matemática

Da mesma forma como foi feita a proposta do Currículo, também foram elaboradas a Ementa e o Conteúdo Programático e Planejamento Didático da disciplina Matemática para os alunos ingressantes em 1998/1999.

UNIVERSIDADE PAULISTA

Reconhecida pela Portaria MEC n.º 550, de 08, publicada no D.O .U de 09/11/88

Rua Luiz Góis, 2211 – Rua Dr. Bacelar, 1212 CEP 04026 – São Paulo

Conteúdo Programático e Planejamento Didático

Curso: Administração

Habilitação: Geral, Finanças, Recursos Humanos, Análise de Sistemas, Comércio Exterior e Marketing.

Período: Matutino

Disciplina: Matemática I e II

Carga Horária Semanal: 04 Aulas Semanais

Departamento: Instituto de Ciências Sociais e Comunicação

Professor Responsável: Walter Paulette

I – OBJETIVOS GERAIS

- a) Contribuir para formar melhores profissionais em Administração;
- b) Capacitar o aluno a operar com valores e formulações temáticas;
- c) Desenvolver no aluno o espírito de investigação e iniciativa com pensamento lógico;
- d) Desenvolver no aluno habilidades de selecionar, sistematizar, comparar, ordenar e generalizar;
- e) Desenvolver no aluno hábitos de rigor, de ordem e clareza

II – OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Obter, a partir de condições dadas, resultados válidos em situações novas, utilizando métodos dedutivos;
- b) Compreender e familiarizar-se com técnicas e símbolos matemáticos que ajudam a estimular e organizar o pensamento;
- c) Reconhecer as sucessivas aplicações das funções nos problemas de administração e economia e expressar-se de modo crítico frente a esses problemas.

III – EMENTA

Conjuntos – Conjuntos Numéricos – Relações – Funções – Aplicação à Administração e Economia – Ajustamento de Curvas – Sequências – Custo Marginal – Receita Marginal.

IV – CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Conjuntos

- 1.1 Conceitos – Inclusão – Igualdade – Conjunto das partes
- 1.2 Operações: União, intersecção e diferença

2. Conjuntos Numéricos

- 2.1 Conjuntos de números naturais, inteiros, racionais e reais
- 2.2 Operações: Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

3. Relações

- 3.1 Produto Cartesiano
- 3.2 Relação binária: Domínio e Conjunto Imagem
- 3.3 Gráficos: Cartesiano, Sagital e Diagrama de Venn
- 3.4 Modelos de relações discretas

4. Funções

- 4.1 Funções: Constante, Afim, Linear, Quadrática
- 4.2 Aplicações à Economia, Administração e Ciências Contábeis: Lei de Oferta e Demanda, Lei da Receita e Custo (Lucro – Prejuízo)
- 4.3 Função: Modular – Parábola Cúbica – Raiz Quadrada e Hipérbole
- 4.4 Função: Exponencial e Logarítmica

4.5 Aplicações à Economia e à Administração.

5. Ajustamento de curvas

- 5.1 Reta
- 5.2 Parábola
- 5.3 Regressão Linear

6. Seqüências

- 6.1 Limitada Inferiormemente e Superiormente
- 6.2 Seqüência Crescente e Decrescente
- 6.3 Seqüência Convergente e Divergente
- 6.4 Imagem de uma função $f(x)$, quando x assume os valores de uma seqüência.

7. Custo Marginal e Receita Marginal para funções:

- 7.1 Constante, afim, quadrática, polinomial, exponencial e logarítmica.

V – ESTRATÉGIA DE TRABALHO

- a) Aulas expositivas com exercícios de verificação e fixação;
- b) Aulas expositivas dialogadas;
- c) Trabalho extraclasse.

VI – AVALIAÇÃO

A avaliação será feita conforme prescreve o Regimento Geral da Universidade e obedecerá ao calendário específico divulgado.

VII – BIBLIOGRAFIA

- CASTRUCCI, Benedito. 1987. *Elementos de teorias dos Conjuntos*. 2ª Edição, São Paulo: Atual
- CHIANG, Alpha C. 1976. *Matemática para Economistas*. São Paulo: Mac Graw – Hill EDUSP
- DOWLING Edward T. 1981. *Matemática Aplicada à Economia e Administração*. São Paulo: Mac Graw - Hill

HOFFMANN, Laurence D. 1983. *Cálculo: Um Curso Moderno e Suas Aplicações*. São Paulo: Livros Técnicos Científicos

LEITHOLD, Louis. 1988. *Matemática Aplicada à Economia e Administração*. São Paulo: Editora Harbra.

SILVA, Sebastião Medeiros da. 1977. *Matemática para Cursos de Economia e Administração e Ciências Contábeis*. São Paulo: Atlas.

WEBER, Jean E. 1986. *Matemática para Economia e Administração*. 2ª Edição, São Paulo: Editora Harbra.

São Paulo, 17 de Novembro de 1998.

4.2.2– Nova proposta de Ementa e Conteúdo Programático e Planejamento didático da disciplina Matemática do Curso de Administração de Empresas

A seguir, apresentamos as mudanças no conteúdo programático e no planejamento didático, colocando a proposta em modelo especialmente preparado pela Universidade Paulista. Quanto aos objetivos, apresentamos nova redação, deixamos de apresentar os títulos Objetivos Gerais e Específicos e os substituímos por Finalidade básica e Objetivos da disciplina.

Quanto à ementa, eliminamos os tópicos de revisão, conjuntos, conjuntos numéricos e relações. Se durante as aulas, ocorrerem dúvidas no uso dos tópicos excluídos, então, nesse momento, as esclarecemos.

UNIVERSIDADE PAULISTA- UNIP

Reconhecida pela Portaria MEC n.º 550, de 08, publicada no D.O .U de 09/11/88
Rua Luiz Góes, 2211 – Rua Dr. Bacelar, 1212
CEP 04026 – São Paulo

Conteúdo Programático e Planejamento Didático

Disciplinas: *Matemática I e II*

Semestre Letivo: *1º e 2º*

Semanal: *4h/a*

Professor: *Walter Paulette*

Campus: *Vergueiro*

Turno: *Matutino*

Habilitação: *Administração Geral*

1- FINALIDADE BÁSICA

A finalidade básica da disciplina Matemática é a de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

2 – OBJETIVOS DA DISCIPLINA

Capacitar o aluno para:

- a) Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para formar melhores profissionais em Administração de Empresas.
- b) Identificar, interpretar e utilizar representações algébricas e geométricas em situações-problema que envolvam temas da Administração de Empresas.
- c) Compreender e familiarizar-se com técnicas e símbolos matemáticos que ajudem a estimular e organizar o pensamento.
- d) Operar com formulações e modelos matemáticos.
- e) Desenvolver formas de raciocínio lógico, crítico e analítico.
- f) Desenvolver habilidades para a resolução de problemas, validando estratégias e resultados.
- g) Expressar-se de maneira crítica e criativa na resolução de problemas.
- h) Interagir com seus pares de forma cooperativa, buscando soluções para situações-problema.

3 – EMENTA DA DISCIPLINA

Funções – aplicações à Administração, Economia e Ciências Contábeis – Ajustamento de curvas – Seqüências – Custo marginal – Receita marginal – Custo e Receita máxima – Lucro máximo.

4 – CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

4.1 Matemática I (1º semestre)

1. Funções

- 1.1 Funções: Constante, Afim, Linear, Quadrática
- 1.2 Aplicações à Administração, à Economia e às Ciências Contábeis
- 1.3 Lei da Oferta e Demanda, Lei da Receita e Custo (lucro – prejuízo)
- 1.4 Função: Modular, Raiz Quadrada e Hipérbole
- 1.5 Função: Exponencial e Logarítmica
- 1.6 Exercícios aplicativos na Administração, Economia e Ciências Contábeis

4.2 – Matemática II (2º semestre)

1. Ajustamento de Curvas

- 1.1 Reta
- 1.2 Parábola
- 1.3 Regressão linear
- 1.4 Exercícios aplicativos na Administração, Economia e Ciências Contábeis

2. Seqüências

- 2.1 Limitada inferiormente e superiormente
- 2.2 Seqüência crescente e decrescente
- 2.3 Seqüência convergente e divergente
- 2.4 Imagem de uma função quando x assume os valores de uma seqüência
- 2.5 Exercícios aplicativos na Administração de Empresas

3. Custo e Receita Marginal

- 3.1 Para funções: Constante, afim, quadrática, polinomial, exponencial e logarítmica.
- 3.2 Exercícios aplicativos na Administração, na Economia e nas Ciências Contábeis

5 – BIBLIOGRAFIA

5.1 – Bibliografia Básica

CASTRUCCI, Benedito. *Elementos de teorias dos Conjuntos*. 2ª Edição, São Paulo; Atual. 1987.

CHIANG, Alpha C. *Matemática para Economistas*. São Paulo; Mac Graw – Hill EDUSP. 1982.

HARIKI, Seiji. *Matemática aplicada*, São Paulo: Saraiva 1999.

SILVA, Sebastião Medeiros da. *Matemática para Cursos de Economia e Administração e Ciências Contábeis*. 5ª Edição São Paulo; Atlas. 1999.

5.2 – Bibliografia Complementar

DOWLING, Edward T. *Matemática Aplicada à Economia e Administração*. São Paulo; Mac Graw – Hill. 1981.

HOFFMANN, Laurence D. *Cálculo. Um curso Moderno e Suas Aplicações*. São Paulo; livros Técnicos Científicos. 1990.

LEITHOLD, Louis. *Matemática Aplicada à Economia e Administração*. São Paulo; Editora Harbra. 1988.

WEBER, Jean E. *Matemática para Economia e Administração*. 2ª Edição. São Paulo; Editora Harbra. 1986.

6 – ESTRATÉGIA DE ENSINO - APRENDIZAGEM E TRABALHO

Nossa estratégia de ensino será a da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

Nosso procedimento será o de elaborar e apresentar, aos alunos, situações-problema cujos enunciados serão preparados a partir de temas constantes das disciplinas da área profissionalizante do curso de Administração de Empresas. O nível exigido deverá ser compatível com o conhecimento matemático da turma, isto é, as situações-problema colocadas devem partir de experiências, vivências e conhecimentos matemáticos anteriores dos alunos.

Usaremos o esquema de aula, apresentado nas páginas 89 e 90, em que as situações-problema são trabalhadas. Acreditamos que esse procedimento didático é o mais adequado ao ensino-aprendizagem de matemática, pois ajuda o aluno a construir novos conhecimentos de forma ativa, compreensiva e construtiva. Dessa maneira, substituímos nas aulas as tarefas mecânicas, que apelam para a repetição e a memorização, por tarefas que exigem dos alunos a execução de operações mentais.

Usaremos também em momentos adequados, situações-problema visando fixação, por meio de aulas expositivas dialogadas e trabalhos extraclasse.

7 – ESTRATÉGIA DE AVALIAÇÃO

7.1 – Avaliação do Processo de Ensino

Quanto ao processo de avaliação, a Universidade Paulista assim se expressa no manual de informações acadêmicas:

A avaliação nas disciplinas será obtida por meio de provas, trabalhos e seminários, dentre outros; bem como pela participação, conduta, maturidade e interesse demonstrado pelo aluno durante as aulas e demais atividades, a critério do professor e em conformidade com o respectivo plano de ensino.

São 4 (quatro) notas bimestrais obrigatórias, fornecidas com essa periodicidade, mais uma nota complementar optativa, fornecida no término do período letivo. Todo o conjunto de tarefas escolares a serem cumpridas pelo aluno é entendido como trabalho. Compete ao professor responsável pela disciplina a definição dos trabalhos, bem como a fixação do critério para a atribuição de notas.

Esse processo de avaliação proposto pela Unip dá ao professor uma grande liberdade de usar um ou mais instrumentos de avaliação.

No modelo, proposto por nós, de ensino de matemática por meio da resolução de problemas queremos:

- Atribuir à avaliação a função de fornecer aos alunos informações sobre o seu desenvolvimento matemático, visando prepará-los para as disciplinas profissionalizantes e para a sua inserção no mercado de trabalho.
- Atribuir à avaliação a função de fornecer ao professor as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem, que conhecimentos matemáticos foram adquiridos, que raciocínios foram desenvolvidos e quais hábitos e valores foram incorporados pelos alunos.

É importante que, no processo de avaliação, contemple-se uma visão matemática como uma construção significativa e se reconheça, para cada conteúdo, a possibilidade de conexões com a área profissionalizante por meio de aplicações. A avaliação deve sempre refletir as realizações dos alunos no campo matemático e as suas possibilidades de novas realizações.

Segundo Abreu (1990, p.92) :

Os objetivos a alcançar são os critérios definidores do processo de avaliação: Quer dizer, são os objetivos que dizem “o que avaliar”, “de que forma avaliar”, “qual técnica ou instrumento utilizar para avaliar”, “o que registrar e de que forma”, “como discutir o aproveitamento da atividade” e “qual o encaminhamento” a ser combinado com o aluno, tendo em vista o reiniciar do processo de aprendizagem.

7.2- Critérios de Avaliação

- *Resolver situações-problema que envolvam contagem e medida.*

Espera-se que o aluno resolva problemas, utilizando expressões algébricas e produzindo soluções gráficas.

- *Resolver situações-problema envolvendo o conceito de função.*

Espera-se que o aluno identifique modelos de funções e suas aplicações na Administração, tais como: oferta, demanda, receita, custo, lucro, etc.

- *Recolher dados sobre fatos e fenômenos do cotidiano, fazendo previsões, utilizando os procedimentos de ajustamento de curvas.*

Espera-se que o aluno saiba coletar, organizar e registrar informações por meio de tabelas e gráficos, interpretando e fazendo previsões com a utilização da Regressão Linear.

- *Comparar e ordenar números em seqüências numéricas.*

Espera-se que o aluno saiba verificar a monotonicidade das seqüências numéricas, sua convergência, bem como suas aplicações na Administração.

- *Resolver situações-problema que envolvem noções de maximização e minimização.*

Espera-se que o aluno identifique modelos de problemas na Administração que envolvem funções matemáticas nas quais se obtém receita máxima, lucro máximo, custo mínimo, etc. Nesse caso, a ferramenta utilizada é a derivada.

7.3 - Técnicas e Instrumentos de Avaliação da Aprendizagem

Uma técnica de avaliação comum é a observação pelo professor. Pode-se observar o aluno quando ele está realizando os trabalhos sugeridos em sala de aula (caderno, quadro de giz, computador e calculadora), quando está participando de trabalhos em grupo ou executando pesquisa; quando faz comentários em sala de aula ou no grupo. Desta forma, o professor identifica as dificuldades e avalia o avanço nas várias atividades realizadas. Em comum acordo com os alunos, o professor estabelece uma nota a ser atribuída por essas atividades.

Outro recurso do qual o professor dispõe para conhecer o rendimento de seus alunos é a análise da produção realizada, tais como: exercícios, pesquisas, trabalhos e relatórios de soluções de problema. Também, em comum acordo com os alunos, o professor estabelece uma nota a ser atribuída para essas atividades.

Para obtermos uma avaliação integral do aluno, é necessário o uso combinado de várias técnicas e instrumentos de avaliação, que devem ser propostos segundo os objetivos estabelecidos.

Após a avaliação integral, apresenta-se bimestralmente uma nota como resultado integral do desempenho do aluno. Os resultados das provas e dos trabalhos devem ser comentados com os alunos, indicando progressos e necessidades a fim de que a avaliação contribua para o aperfeiçoamento da aprendizagem.

Com a nova ementa e o novo conteúdo programático, o professor deverá apresentar aos alunos, no início do ano letivo, em obediência às normas da Universidade, os tópicos desse conteúdo programático, salientando os objetivos, as estratégias de ensino-aprendizagem e a avaliação.

4.2.3 - Cronograma semanal

Em conformidade com a ementa, o conteúdo programático e a metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas, elaboramos o cronograma semanal da disciplina Matemática do Curso de Administração de Empresas, Campus Vergueiro da Unip. O calendário escolar é formado por vinte semanas letivas no primeiro semestre e mais vinte semanas letivas no segundo semestre. As provas e os exames estão incluídos no calendário escolar. A disciplina Matemática possui quatro aulas semanais incluindo teoria e exercícios.

Semana	Assunto
1	Introdução: Conteúdo programático, metodologia, critério de avaliação e bibliografia
2	Funções: Situações- problema
3	Funções Constante e afim: Situações- problema
4	Funções Constante e Afim: Problemas aplicativos, exemplos de funções dadas por fórmulas
5	Função Quadrática: Situações- problema
6	Função Quadrática: Definição e determinação de raízes
7	Função Quadrática: Problemas aplicativos, Conceitos de oferta e demanda
8	Leis de oferta e demanda: Problemas aplicativos
9	Equilíbrio de Mercado: Determinação de pontos de equilíbrio
10	Prova Bimestral - B ₁
11	Receita total e Custo total: Situações-problema
12	Ponto crítico, lucro e prejuízo: Problemas aplicativos
13	Problemas aplicativos variados
14	Função Modular- Situação- problema e representação gráfica
15	Função Raiz Quadrada: Situação- problema e representação gráfica
16	Função Raiz Quadrada: Problemas aplicativos
17	Função Recíproca ou Hipérbole Equilátera: Situação- problema
18	Função Recíproca ou Hipérbole Equilátera: Problemas aplicativos
19	Função Recíproca ou Equilátera: Exercícios grupo 7
20	Prova bimestral - B ₂
21	Função Exponencial: Situação-Problema
22	Função Exponencial: Resolução de equações, sistemas de equações e problemas aplicativos
23	Função Logarítmica: Situação- problema, definições, propriedades e representação gráfica

Semana	Assunto
24	Função Logarítmica: Resolução de equações e de sistemas de equações
25	Ajustamento de curvas: Situações- problema, construções de retas e de parábolas
26	Regressão Linear: Método dos mínimos quadrados
27	Regressão Linear: Problemas aplicativos
28	Seqüências: Situações- problema, definições e exemplos
29	Seqüências: Problemas aplicativos – Conceito de limite
30	Prova Bimestral - B ₃
31	Taxa média de variação de função: Situações- problema
32	Custo e receita marginal: Funções constante, afim e quadrática.
33	Funções custo marginal e receita marginal: Problemas aplicativos
34	Funções custo marginal e receita marginal máximos: Problemas aplicativos
35	Funções custo marginal e receita marginal: Exercícios de aplicação 17
36	Funções custo marginal e receita marginal: Exercícios de aplicação 17 (continuação)
37	Prova Bimestral – B ₄
38	Prova Substitutiva Geral
39	Exame Global
40	Exame Especial Global

4.3 - A Criação do Projeto

4.3.1 - Introdução

O texto que segue visa a um novo enfoque da disciplina Matemática e suas aplicações no Curso de Administração de Empresas. Procura retratar as ocorrências de sala de aula, por meio dos personagens Pedro e Fernanda, nomes fictícios que representam alunos desse curso. Esses personagens envolvem-se tanto na formulação como na resolução dos problemas e, também, representam alunos do grupo que mais de perto chegaram aos pretendidos objetivos do problema.

No relato da resolução dos problemas, o professor auxiliará na redação do texto final para que esse seja apresentado da melhor forma possível e sem erros. O professor ainda, usando notação e terminologia corretas, formalizará toda a teoria matemática subjacente ao processo.

Situações-problema desafiadoras e provocadoras serão formuladas, pretendendo levar os alunos a pensar, a explorar e buscar soluções possíveis para as situações-problema dadas.

Além dessas situações-problema serão oferecidas aos alunos outras atividades.

1. Situações-problema apresentadas por meio de enunciados como ponto de partida, com o objetivo de se construir novos conceitos matemáticos e novos conteúdos, em consonância com a ementa e o conteúdo programático da disciplina Matemática.

Para se alcançar esse objetivo, serão apresentados aos alunos enunciados de situações - problema, previamente selecionadas, com grau de dificuldade adequado à turma e formulados com linguagem própria, utilizando-se textos vinculados às disciplinas profissionalizantes do Curso de Administração de Empresas.

Esses enunciados serão entregues aos alunos, que explorarão o problema estando reunidos em grupos de no máximo quatro elementos. O professor, enquanto os alunos trabalham, circulará entre os grupos, observando, organizando, intervindo, controlando, incentivando e trocando idéias. Observando o andamento da resolução dos problemas o professor determina o tempo necessário para o trabalho, recolhe o material desenvolvido e apresenta na lousa algumas soluções dadas pelos grupos e, junto com a classe toda, vai em busca da solução correta dos problemas. A partir desse consenso o professor chama a atenção para os novos conceitos matemáticos construídos, formalizando as definições, as propriedades e os teoremas relacionados com o tópico trabalhado.

2. Situações- Problema onde a função é dada por leis matemáticas.

Esses problemas são exercícios de fixação por parte dos alunos e têm por objetivo verificar os conceitos matemáticos abordados. São novas formas de representação que permitem novas estratégias de abordagem das situações-problema. Os problemas são apresentados, lidos e interpretados pelos alunos e, após discussões, são analisados pelo professor.

3. Situações-Problema apresentadas aos alunos individualmente, denominada problemas aplicativos, com o objetivo de verificação dos conceitos matemáticos trabalhados.

Serão entregues, aos alunos individualmente, em sala novas situações-problema, para a fixação de conceitos por parte dos alunos e avaliação da aprendizagem por parte do professor. O professor na lousa, apresenta a solução correta. Nesse momento o aluno é estimulado a questionar sua própria resposta, verificando suas habilidades seus conhecimentos anteriormente adquiridos e prepara-se para novas situações-problema.

4. Exercícios de aplicação.

São exercícios ou problemas a serem trabalhados em sala de aula como treinamento pelos alunos.

5. Problemas aplicativos variados.

Esses problemas serão oferecidos aos alunos com o propósito de rever todos os tópicos matemáticos trabalhados nas aulas anteriores.

6. Tarefas extraclasse

Com a denominação Exercícios Grupo 1, 2, ...,n proporemos aos alunos exercícios extraclasse que serão entregues como fecho dos conceitos matemáticos trabalhados até o momento. Os exercícios ou problemas apresentados que tenham demonstrado dificuldades para os alunos serão resolvidos em sala porém na aula seguinte. Será bem-vindo o uso, pelos alunos, de recursos da informática, como calculadoras portáteis, pois eles podem contribuir com o processo de Ensino-aprendizagem, principalmente nos aplicativos de ajustamento de curvas.

4.3.2 - Unidades programáticas

Serão quatro as unidades programáticas:

Unidade I - Funções,

Unidade II - Ajustamento de curvas,

Unidade III - Seqüências e

Unidade IV – Custo marginal e receita marginal.

As quatro unidades serão apresentadas por meio de atividades, que deverão refletir o desenrolar de nossas aulas ao longo de todo o conteúdo programático de matemática, com o uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas .

4.3.3 - Preparação semanal das aulas (quatro aulas semanais)

Primeira semana

Em obediência às normas da Universidade, o professor deverá apresentar aos alunos na primeira semana de aula: a ementa da disciplina, o conteúdo programático, a metodologia de trabalho, o critério de avaliação e a bibliografia.

O professor falará sobre o perfil do Administrador proposto pelo MEC, pelo CFA e pela Unip e deverá situar a matemática nesse contexto.

O professor deverá ainda apresentar, com detalhes, a metodologia adotada para a sala de aula, que é a metodologia de Ensino-Aprendizagem de matemática via Resolução de Problemas.

Segunda semana

Conteúdo – Funções: Situações-problema

Objetivos:

- Identificar relações entre duas grandezas.
- Associar à relação obtida sua representação gráfica.
- Levar os alunos a construir os conceitos de variáveis dependente e independente, de funções, domínio, contradomínio e imagem, por meio de situações-problema, utilizando a metodologia de trabalho adotada.

Situações- problema:

Situação-problema 1: Problema da livraria

Com o início das aulas, Fernanda, aluna do Curso de Administração, vai à livraria para comprar cadernos de 200 folhas, cujo preço unitário é R\$ 6,00, e livros didáticos, cujo valor unitário é R\$ 12,00. Sua mãe dá-lhe R\$ 120,00 e pede que use todo o dinheiro na compra de cadernos e livros.

Pede-se:

- a) As quantidades possíveis para se comprar os dois itens.*
- b) Descrever uma relação entre as quantidades dos dois itens.*
- c) Uma forma de representar graficamente essa relação.*

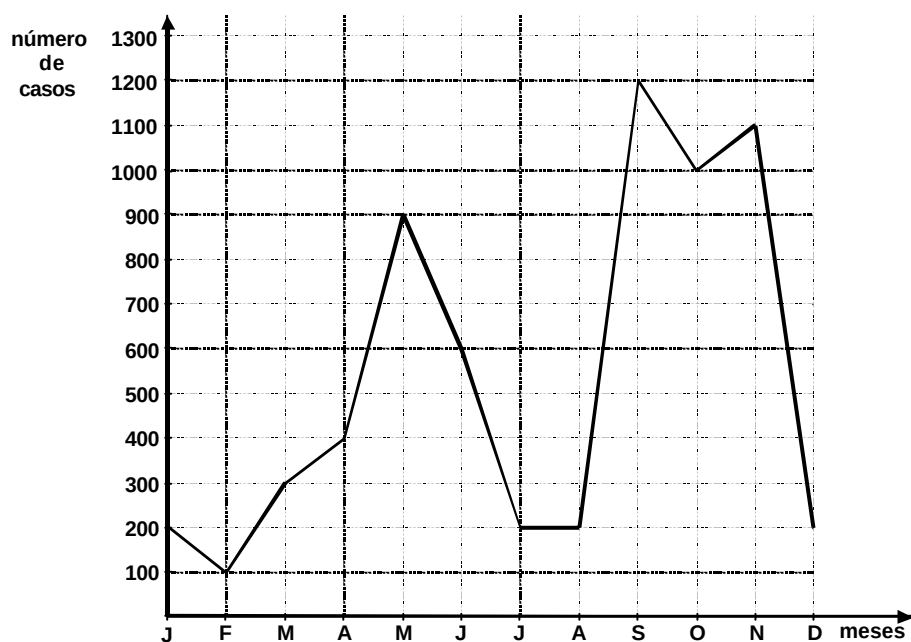
Situação-problema 2: Problema da gratificação de fim de ano

O administrador de finanças da empresa ZIFF deve pagar, como prêmio de gratificação de fim de ano, aos seus gerentes R\$ 1.000,00 e a seus subgerentes R\$ 600,00, tirados de um fundo de R\$ 24.600,00 destinado para isso.

- Quantos gerentes e subgerentes podem compor essa empresa, supondo que existam as duas categorias?
- Descrever a relação entre as quantidades das duas categorias.
- Representar graficamente essa relação.

Situação-problema 3: Problema da incidência de tuberculose

Fernanda leu no jornal Correio de Botucatu sobre a pesquisa da incidência de tuberculose no município, que apresentava o seguinte gráfico de ocorrência dos casos no ano de 2001.



Após analisar o desenvolvimento da doença, ela pediu a Pedro que completasse as afirmações:

- A relação é crescente entre os meses de...
- O menor número de casos foi registrado no mês de ...
- O maior número de casos foi registrado no mês de ...
- O número de casos ocorridos até julho foi de ...
- A maior diferença de casos ocorreu do mês de ... para o de...

Situação-problema 4: Problema da inflação em relação ao desemprego

Pedro diz a Fernanda que alguns economistas relacionam o percentual de desemprego ao percentual de inflação e ele observou que, para um determinado país, a relação é dada por $i = 30/d$, onde i é percentagem de inflação desse país e d é a percentagem de desempregados da população economicamente ativa no ano de 2001. Pedro pede para Fernanda:

- a) Esboçar o gráfico para esta relação e responder as questões.*
- b) O que ocorre se aumenta a percentagem de inflação?*
- c) O que ocorre se aumenta a percentagem de desempregados?*
- d) Se a percentagem de desempregados é 6% da população economicamente ativa de 6 milhões, então quantos estão desempregados e qual a inflação neste instante?*

Encerrando esse trabalho, o professor formalizará os conceitos envolvidos nas atividades propostas: função; variável dependente e independente; domínio, contra domínio e imagem de uma função.

Terceira semana

Conteúdo – Funções elementares: Constante e afim – situações - problema

Objetivos:

- Levar os alunos a classificar funções, definir funções constante e afim, a partir de situações-problema, usando a metodologia adotada.
- Associar às funções constante e afim suas representações gráficas.

Situações- problema:

Situação-problema 1: Problema do número de funcionários

A empresa de Fernanda não contratou nem demitiu nenhum funcionário em 2001 e nenhum deles se aposentou ou faleceu. Fernanda pede a Pedro para definir a função que envolve o número de funcionários ao longo do ano de 2001, em função do tempo. Sabe-se que a empresa possui 100 funcionários.

Situação-problema 2: Problema da velocidade da terra

Fernanda diz a Pedro que o planeta Terra caminha no espaço sempre a uma velocidade média de 30 km/s.

—Pedro, como definir uma função para esse modelo?

Situação-problema 3: Problema da locadora de automóveis

Pedro viajou de ônibus, a serviço de sua empresa, para a cidade de Campinas e, para fazer visitas a seus clientes alugou um carro de uma locadora de automóveis, que estabeleceu o preço de R\$ 80,00 fixos, mais R\$ 2,00 por quilômetro rodado. O odômetro desses carros só registra valores em quilômetros. Pede-se:

- Estabelecer a relação entre o número de quilômetros rodados e o valor a ser pago.*
- Enunciar essa relação de forma que seja uma função para os primeiros 100 km.*
- Esboçar gráfico.*

Realizado o trabalho, o professor formalizará a teoria subjacente.

Quarta semana

Conteúdo – Funções elementares: Constante e afim – Problemas aplicativos

Objetivos:

- Reconhecer por meio de problemas aplicativos as funções constante e afim.
- Determinar no gráfico da função afim a raiz e os interceptos com os eixos.
- Representar graficamente no sistema cartesiano as funções dadas por fórmulas.

Problemas Aplicativos:

Problema do supermercado

Uma pessoa vai ao supermercado e gasta R\$ 80,00 em dois produtos, cujos preços são, respectivamente, R\$ 12,00 e R\$ 8,00.

- Descrever a função que relaciona a quantidade destes dois produtos.*
- Esboçar o gráfico.*
- Dizer o que ocorre se os produtos entrarem em promoção com desconto de 20%.*
- Dar o domínio, o conjunto imagem e esboçar o gráfico da nova função.*

Problema da política de vendas

Como política de vendas, um fabricante colocou seu produto, no início de janeiro, ao preço p e aumentou-o, mensalmente, em R\$2,00. Em 1º de novembro, o preço passou a ser R\$ 50,00. Determinar :

- a) O preço inicial em janeiro.*
- b) O preço no mês de agosto.*

Problema dos alunos aprovados

O professor de matemática do curso de Administração de Empresas verificou que, nos últimos anos, a média de alunos aprovados apresentou um decréscimo constante. Se em 1990 a percentagem de aprovados foi 80% e em 1994 caiu para 60%, estimar a percentagem de aprovados para 1995.

Situações-problema envolvendo funções afim dadas por leis matemáticas.

- 1) Dada a função $f : \rightarrow$, definida pela lei $f(x) = 2x + 1$, determinar o que se pede:
 - a) Esboçar o gráfico da função no sistema cartesiano
 - b) Achar o domínio e o conjunto imagem.

- 2) Dada a função $f : \rightarrow$, definida pela lei $f(x) = x$, determinar o que se pede:
 - a) Esboçar o gráfico da função no sistema cartesiano.
 - b) Achar o domínio e o conjunto imagem da função.

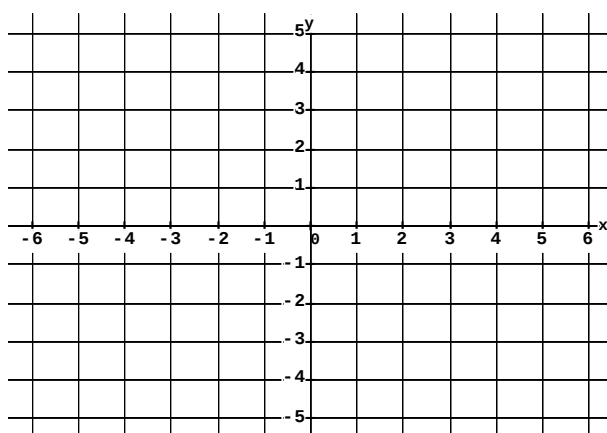
Exercícios Grupo 1 – Tarefas extraclasse

Os exercícios e problemas que seguem são denominados tarefa extraclasse, os quais serão resolvidos pelo professor, quando solicitado, para esclarecer dúvidas.

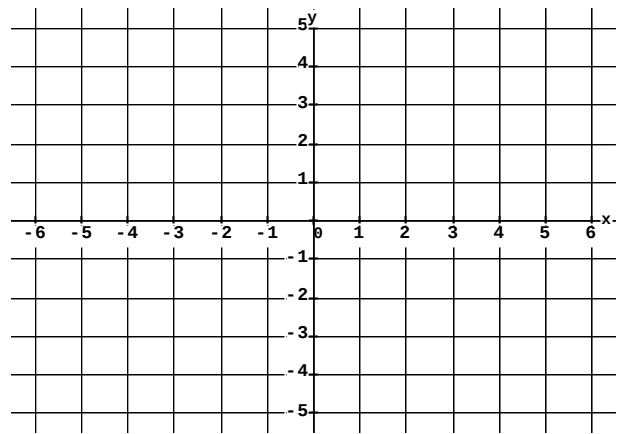
$f : \rightarrow$

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 9$ a= _____ b= _____	b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ a= _____ b= _____
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$ a= _____ b= _____	d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x$ a= _____ b= _____
e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2$ a= _____ b= _____	f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$ a= _____ b= _____

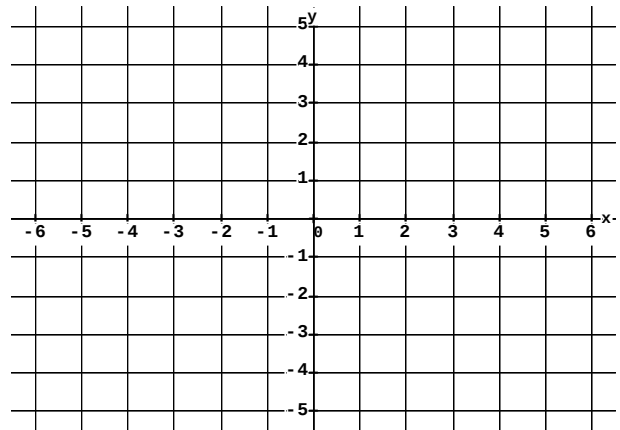
a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 4$



b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$

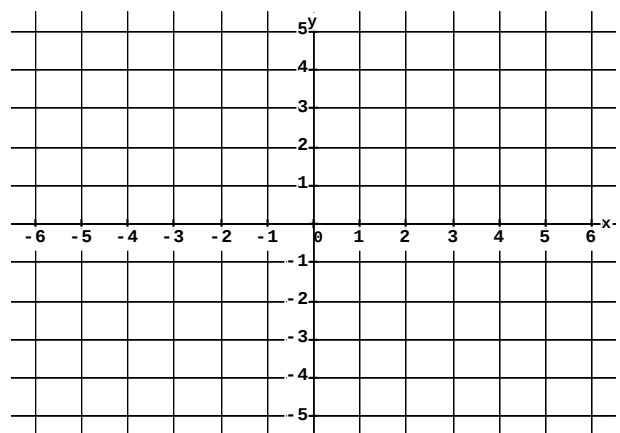


c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$



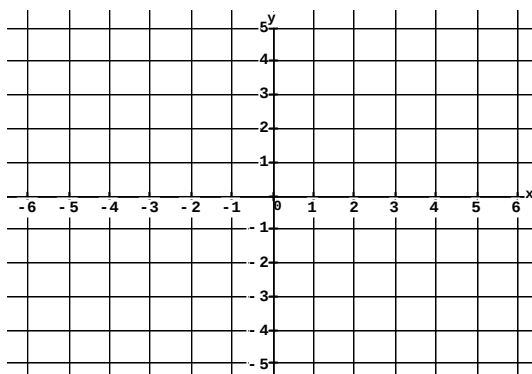
d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = kx + 2$

com $k \in \{-2, 0, 2\}$

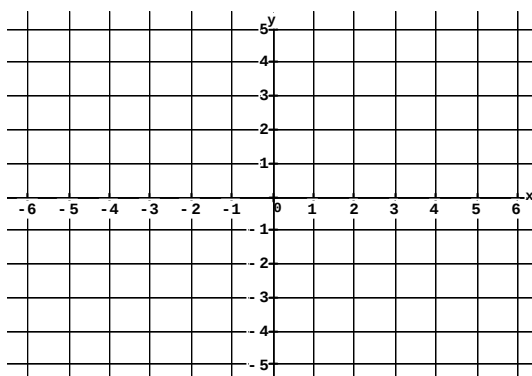


3) Dar a equação da reta que passa pelos pontos dados e fazer a representação no sistema cartesiano.

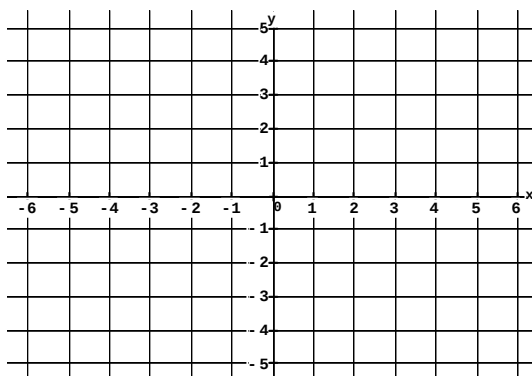
a) $A(0,0)$ e $B(2,2)$



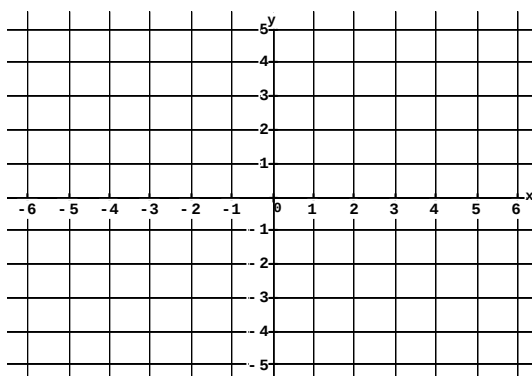
b) $A(0,0)$ e $B(2,3)$



c) $A(0,1)$ e $B(2,5)$

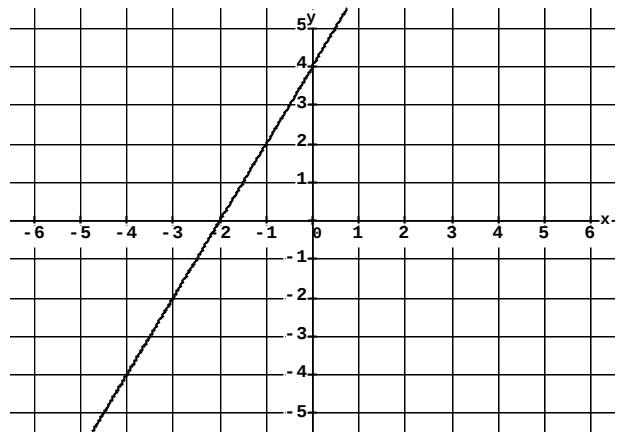


d) $A(0,4)$ e $B(1,2)$

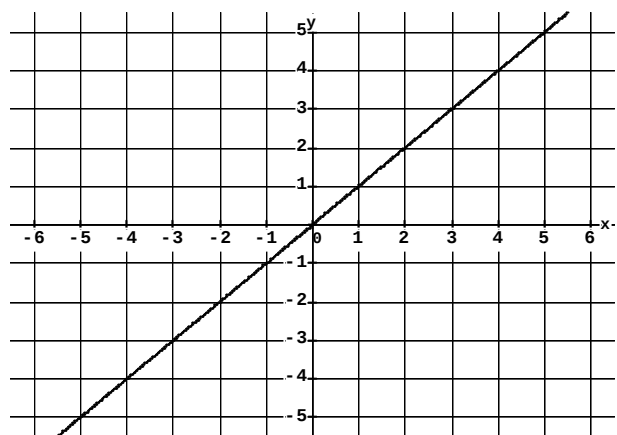


4) Determine, observando os gráficos, as equações das retas representadas no sistema cartesiano.

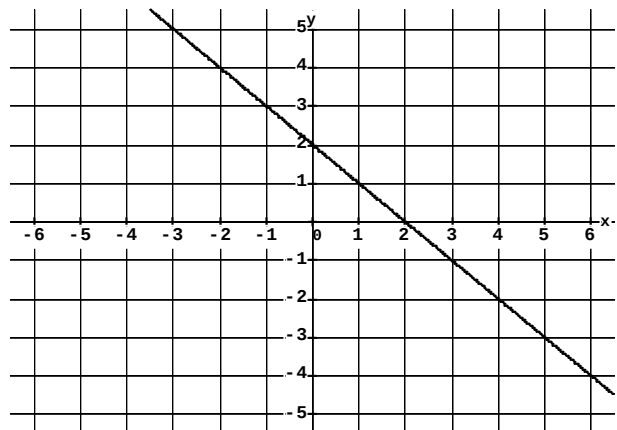
a)



b)



c)



5) Pedro comentou com Fernanda que a casa onde morava foi adquirida por seu pai no ano de 1990, pelo valor de R\$ 80.000,00, e que seu pai revendeu-a no ano de 2000, por R\$ 60.000,00, pois houve uma depreciação linear em consequência da construção de um viaduto em frente à sua casa. Pede-se:

- A função que satisfaz esse problema. (Suponha 1990 como o ano zero da compra).
- Esboçar seu gráfico.

- 6) O dono de um mercadinho dispõe de R\$ 200,00 para a compra de arroz e feijão. Sabendo-se que o quilograma de arroz e de feijão custa R\$ 0,40 e R\$ 2,00, respectivamente, pede-se:
- a) A relação entre x e y , sendo x a quantidade de kg de arroz e y a de feijão.
 - b) O gráfico desta relação.
 - c) As quantidades máximas desses produtos que podem ser adquiridas.
 - d) Determinar quantos kg de feijão serão comprados, quando da compra de 200 kg de arroz.
 - e) Escrever essa relação na forma de função.
- 7) O proprietário da loja ZIFF aplicou R\$ 10.000,00 na compra de colchões de casal e de solteiro para aumentar seu estoque. Sabe-se que cada colchão de casal custa R\$ 800,00 e de solteiro R\$ 400,00. Pede-se:
- a) Escrever a relação entre o número de colchões de casal (x) e de solteiro (y).
 - b) Verificar a possibilidade de utilizar todo o dinheiro na compra de um só modelo.
 - c) Definir a função que rege a compra dos dois modelos.
- 8) Marcelo aluga, na agência A, um carro da marca MWM, por R\$ 60,00 fixos, mais R\$ 3,00 por quilômetro rodado. Alexandre aluga, na agência B, um carro da mesma marca por R\$ 100,00 fixos, mais R\$ 2,00 por quilômetro rodado. Pede-se:
- a) Definir as leis que regem o aluguel dos carros das duas agências para os primeiros 200 km.
 - b) A quilometragem quando os gastos forem iguais.
 - c) Determinar qual dos dois pagou mais caro e qual foi esse valor se ambos utilizaram o carro por 100 km.
- 9) A temperatura medida em graus Fahrenheit é uma função afim da temperatura medida em graus Celsius. Quando se tem 0° Celsius, tem-se 32° Fahrenheit e 100° Celsius corresponde a 212° Fahrenheit. Determinar:
- a) A relação entre as duas temperaturas.
 - b) Qual o valor em graus Fahrenheit se a temperatura de uma cidade é de 40° Celsius?
 - c) Qual a temperatura em graus Celsius se a temperatura de uma cidade é de 50° Fahrenheit?

Quinta semana

Conteúdo – Função Quadrática - Situações - problema

Objetivos:

- Reconhecer por meio de situações-problema o conceito de função quadrática, utilizando a metodologia de trabalho adotada.
- Associar à função quadrática o gráfico de uma parábola.

Situações-problema:

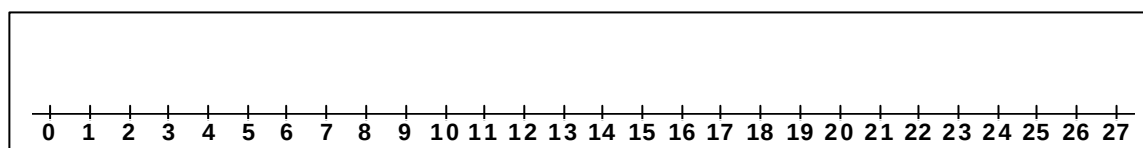
Situação-problema 1: Problema da produção de óculos

Fernanda, ao visitar a fábrica Design Oculus, verificou que a indústria produz óculos de sol pelo preço de custo de R\$ 20,00 cada. Calcula-se que, se cada óculos for vendido por p reais, os consumidores comprarão $(120 - p)$ unidades. Fernanda pede a Pedro para

- a) Expressar o lucro da indústria em função do preço de venda.
- b) Esboçar o gráfico.
- c) Calcular o preço de venda para se obter lucro máximo.

Situação-problema 2: Problema do desafio da fita

Sobre uma fita de 27 cm, foi feita uma escala em centímetros. Em que ponto podemos cortar a fita de modo que o produto das medidas das partes seja 180 cm^2 ?



Após o trabalho, o professor formalizará a teoria subjacente envolvendo a função quadrática, conceituando raízes da equação, esboçando seus gráficos, identificando os pontos extremos de máximo e mínimo como seu vértice.

Sexta semana

Conteúdo – Função Quadrática : Definição e determinação de raízes

Objetivos:

- Determinar corretamente os zeros ou raízes da função quadrática.
- Reconhecer o vértice da parábola.
- Associar a concavidade da parábola ao sinal do coeficiente do termo x^2

Exercícios de aplicação 1

Encontrar as raízes das equações:

1) $x^2 - 6x - 7 = 0$	2) $x^2 - 10x - 60 = 0$
3) $5x^2 + 9x + 4 = 0$	4) $-x^2 + 30x - 200 = 0$
5) $x^2 + 2x + 1 = 0$	6) $x^2 - 6x + 10 = 0$
7) $x^2 - 5x = 0$	8) $-x^2 + 20x = 0$
9) $5x^2 + 5x - 30 = 0$	10) $-x^2 + 16 = 0$
11) $4x^2 - 16 = 0$	12) $-2x^2 + 24x - 120 = 0$

Exercícios de aplicação 2

Esboçar o gráfico das funções quadráticas:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$	5) $f(x) = x^2 - 9$
2) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$	6) $f(x) = 2x^2 - 7x$
3) $f(x) = -x^2 + 9x$	7) $f(x) = 7x^2 - 3x - 4$
4) $f(x) = -x^2 - 4x - 5$	8) $f(x) = x^2 - 15x + 50$

Sétima semana

Primeira parte – duas aulas

Conteúdo – Função Quadrática : Problemas aplicativos

Objetivos:

- Resolver problemas que envolvem funções quadráticas, utilizando assuntos da área de Administração e Economia, com a metodologia de trabalho adotada.
- Associar à função quadrática seu ponto de máximo ou de mínimo.

Problemas aplicativos:

Problema da venda de canetas

Uma indústria produz canetas ao custo de R\$ 10,00 cada. Verificou-se que se cada caneta for vendida por p reais, a venda será de $(60 - p)$ canetas por mês. Pede-se:

- a) O lucro mensal do fabricante em função dos preços da venda;*
- b) Esboçar o gráfico.*
- c) Calcular o preço com o qual o lucro será máximo.*

Problema do supermercado

Fernanda disse a Pedro que, próximo à sua casa, vai ser construído um novo supermercado da rede "Peg Barato" e que a empresa adquiriu material suficiente para construir 200 m lineares de paredes com 4 m de altura. Supondo que a loja tenha a forma retangular, quais devem ser os valores das medidas dos lados para que a área seja máxima?

Sétima semana

Segunda parte - duas aulas

Conteúdo - Conceitos de função oferta e de função demanda

Objetivos:

- Identificar as leis de oferta e demanda da área de Economia como funções.
- Resolver problemas que envolvem os conceitos de oferta e demanda.

Situações – problema:

Situação-problema 1: Problema da demanda de calculadoras eletrônicas

A quantidade demandada de calculadoras eletrônicas, do tipo WP-42, é dada pela lei $q_d = 100 - 20p$, onde q_d representa a quantidade demandada e p o preço em reais. Representar a função q_d em função do preço p .

Situação-problema 2: Problema da venda de pisos de granito

Quando o preço de venda por metro quadrado de piso de granito natural é de R\$ 120,00, nenhum metro quadrado de piso é vendido. Porém, quando o preço é liberado gratuitamente, 100 metros quadrados são procurados. Sabendo-se que a representação é uma reta, pede-se:

- a) A função demanda.*
- b) Esboçar o gráfico.*
- c) A demanda se o preço for R\$ 60,00.*
- d) Qual o preço do metro quadrado se a demanda é de 75 metros quadrados?*

Encerrando esse trabalho, o professor formalizará os conceitos de oferta e demanda na linguagem vernácula e na linguagem matemática.

Oitava semana

Conteúdo – Leis de oferta e demanda: Problemas aplicativos

Objetivos:

- Resolver problemas que envolvem os conceitos de oferta e demanda utilizando a metodologia de trabalho adotada.
- Construir e interpretar os gráficos da lei de oferta e demanda.

Problemas aplicativos:

Problema da compra de carros

Pedro afirma que conhece uma empresa que renova sua frota de carros e sempre adquire 6 carros da marca MS por qualquer preço do mercado. Pede então a Fernanda para definir a função f que envolve esse problema.

Problema do tênis

A quantidade demandada de pares de tênis da marca AVIA, número 39 (masculino) é dada pela lei $q_d = 1600 - p^2$. Pede-se:

- a) Esboçar o gráfico.*
- b) A demanda se o preço é de R\$ 30,00.*
- c) Definir o domínio, contradomínio e conjunto imagem.*

Problema do preço de calculadoras

Quando o preço de uma calculadora eletrônica é de R\$ 150,00, cinquenta calculadoras estão à venda. Quando o preço é de R\$ 200,00, cem calculadoras estão disponíveis no mercado. Qual a lei da oferta para esse produto, sabendo-se que a representação gráfica é uma reta?

Problema da lanterna

A empresa WP analisou a venda do produto lanterna de pilha e verificou que, se fizesse investimentos em propaganda desse produto, suas vendas seriam 20% maiores a cada aumento de R\$ 2,00 no preço unitário da lanterna. Quando o preço é de R\$ 12,00, a empresa vende 500 unidades. Qual é a lei da oferta para esse produto, sabendo-se que representação gráfica é uma reta?

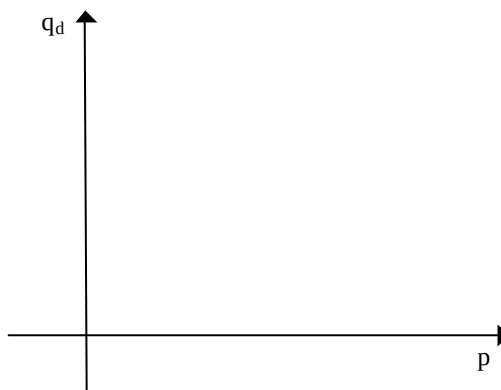
Exercícios Grupo 2 – Tarefas extraclasse

1- Dada a lei da demanda ou procura, pede-se:

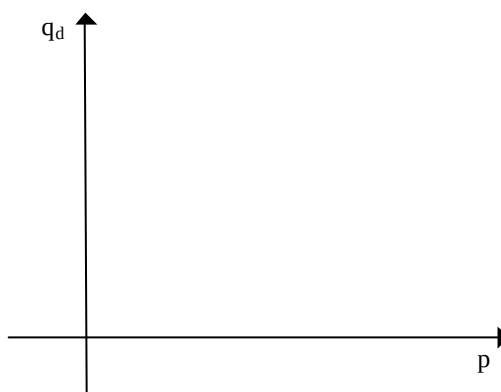
a) Esboçar o gráfico.

b) Dar os interceptos.

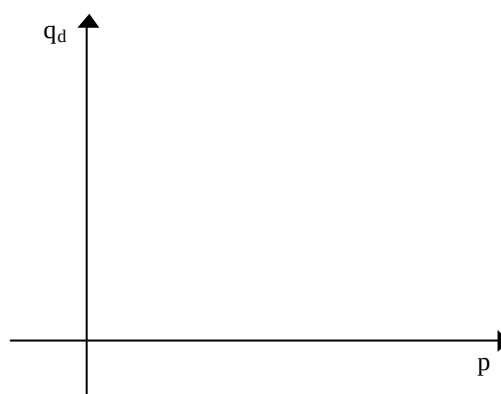
i) $q_d = -p + 30$



ii) $q_d = -3p + 90$



iii) $q_d = \frac{-2}{3}p + 60$

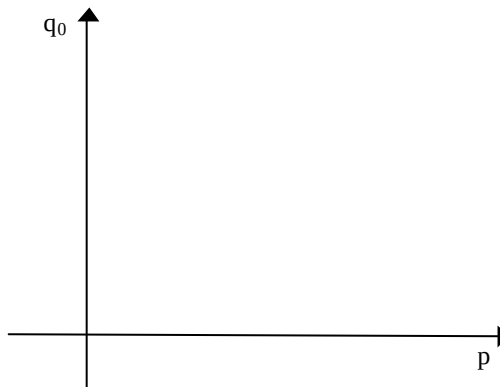


2. Dada a lei da oferta, pede-se:

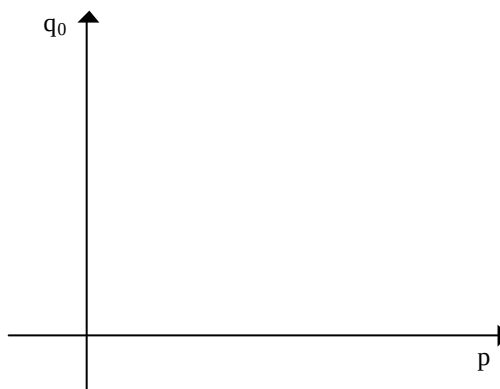
a) Esboçar o gráfico.

b) Dar os interceptos.

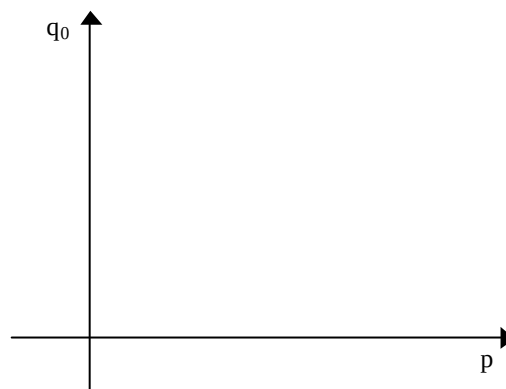
i) $q_0 = 2p + 30$



ii) $q_0 = 2p/3 - 60$



iii) $q_0 = 3p + 20$



Nona semana

Conteúdo – Equilíbrio de mercado: Determinação de pontos de equilíbrio

Objetivos:

- Determinar o ponto de equilíbrio de mercado das funções de oferta e demanda.
- Representar graficamente as funções e o ponto de equilíbrio de mercado.
- Analisar em que condições a oferta é maior ou menor que a demanda (Análise econômica)

Exercícios de aplicação 3

Nos exercícios (a), (b) e (c), pede-se:

- 1) O ponto de equilíbrio para as leis de oferta e de procura.
- 2) O esboço do gráfico.
- 3) A análise econômica.

a) $q_d = -p + 30$ $q_o = p + 10$

b) $q_d = -2p + 10$ $q_o = p - 20$

c) $q_d = 36 - p^2$ $q_o = 2p^2 + 3p - 24$

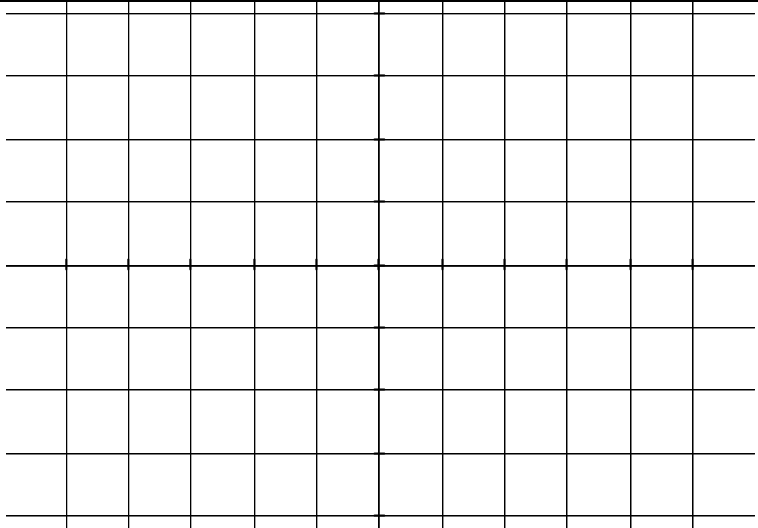
Encerrando essas aplicações, o professor formalizará os conceitos de ponto de equilíbrio, de intercepto e de análise econômica.

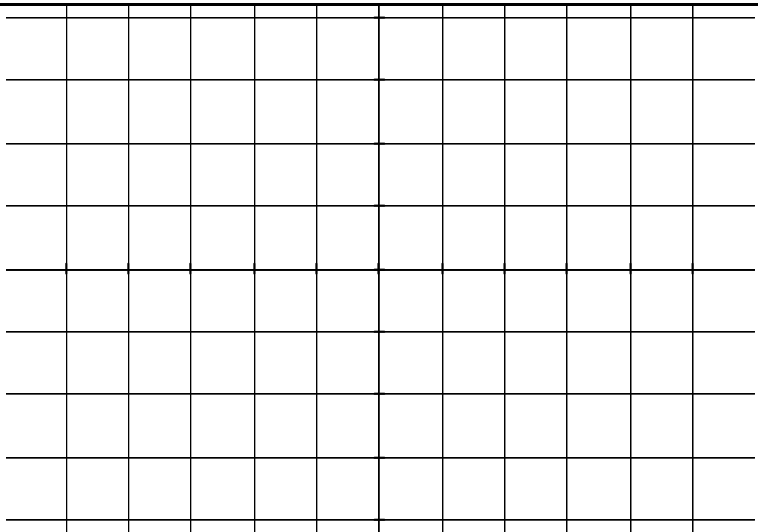
Exercícios Grupo 3 – Tarefas extraclasse

Dadas as funções de oferta e procura, pede-se:

- a) Ponto de equilíbrio.
- b) Esboçar o gráfico.
- c) Análise econômica.

i) $q_d = 16 - p^2$ $q_o = 4 + p$												

ii) $q_d = 32 - 4p - p^2$ $p = \frac{q_0}{20} + 1$	

iii) $q_d = 64 - 8p - 2p^2$ $q_0 = 10p + 5p^2$	

Décima semana

Prova bimestral B₁

- A prova será formulada por meio de enunciados de situações -problema de assuntos estudados até presente data e retirados de temas da área de Administração e Economia.

Décima primeira semana

Conteúdo – Receita total e custo total: Situações - problema

Objetivos:

- Levar os alunos a identificar os conceitos de receita total, custo total e ponto crítico.
- Associar à função trabalhada a sua representação gráfica.
- Analisar em que condições o custo total é maior ou menor que a receita total (análise econômica).

Situações-problema:

Situação-problema 1: Loja de colchões

Pedro pergunta a Fernanda o que significam, em economia, as palavras receita e custo. Fernanda respondeu formulando a seguinte situação-problema:

¾ Eu trabalho como caixa na loja ZIFF, que é especializada em colchões. A loja compra os colchões de casal por R\$ 1.000,00 e os revende por R\$ 1.500,00. Esta semana, a loja vendeu 30 colchões de casal. Qual a receita obtida, Pedro?

Situação-problema 2: Receita de televisores

Sendo o preço de venda de um televisor de 14 polegadas da marca ABC é R\$200,00, determinar a receita para a venda de 10 televisores.

Situação-problema 3: Custo de colchões

Se a loja de colchões pagou R\$ 1.000,00 para cada colchão de casal do fabricante, qual o custo dos 30 colchões comprados?

Situação-problema 4:

Sejam as funções dadas pelas leis:

$$R_t = 100q$$

$$C_t = 50q + 10000.$$

- Determinar o ponto crítico.*
- Hachurar a região a receita total é maior que o custo total.*

Encerrando esse trabalho, o professor formalizará os conceitos de receita, custo e ponto crítico, relacionando os nomes na linguagem vernácula e na linguagem matemática.

Décima segunda semana

Conteúdo – Ponto crítico, lucro e prejuízo: Problemas aplicativos

Objetivos:

- Levar os alunos a identificar em que condições se tem lucro ou prejuízo.
- Utilizar a representação gráfica das leis da receita total e do custo total para indicar em que regiões do gráfico se tem lucro ou prejuízo.

Problemas aplicativos:

Problema da venda de televisores

A receita total das vendas de televisores de 14 polegadas da marca ABC é dada por $R_t = 200q$ (onde q é a quantidade de televisores) e o custo total é dado por $C_t = 160q + 200$.

Pede-se:

- a) Ponto crítico
- b) Esboçar o gráfico
- c) Interpretar os resultados (lucro - prejuízo)

Problemas aplicativos envolvendo as leis da receita e custo

Sejam as funções de Receita total e Custo total dadas por

$$R_t = -4q^2 + 160q$$

$$C_t = q^2 + 10q + 1000$$

Pede-se:

- a) Ponto crítico.
- b) Esboçar o gráfico.
- c) Dar a expressão do lucro e seu gráfico.
- d) A quantidade quando se tem lucro máximo.

Problema da empresa tipográfica

Uma empresa tipográfica produz cadernos de 200 folhas por R\$ 2,00 cada e vende a R\$ 3,00 cada, tendo para este valor de venda uma demanda de 3.000 cadernos por mês. Quando a tipografia aumenta o valor de venda em R\$ 1,00 para cada caderno, a demanda diminui 300 unidades por mês.

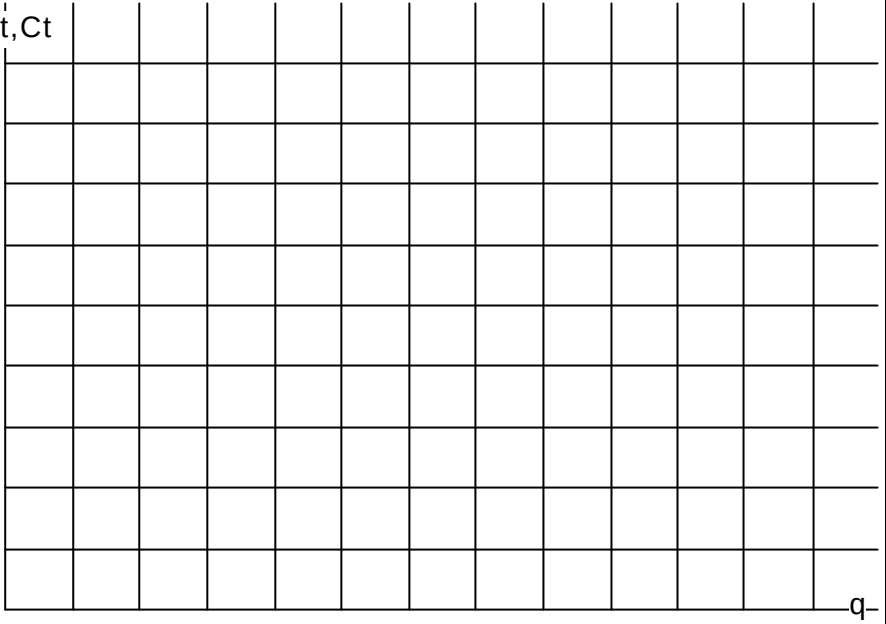
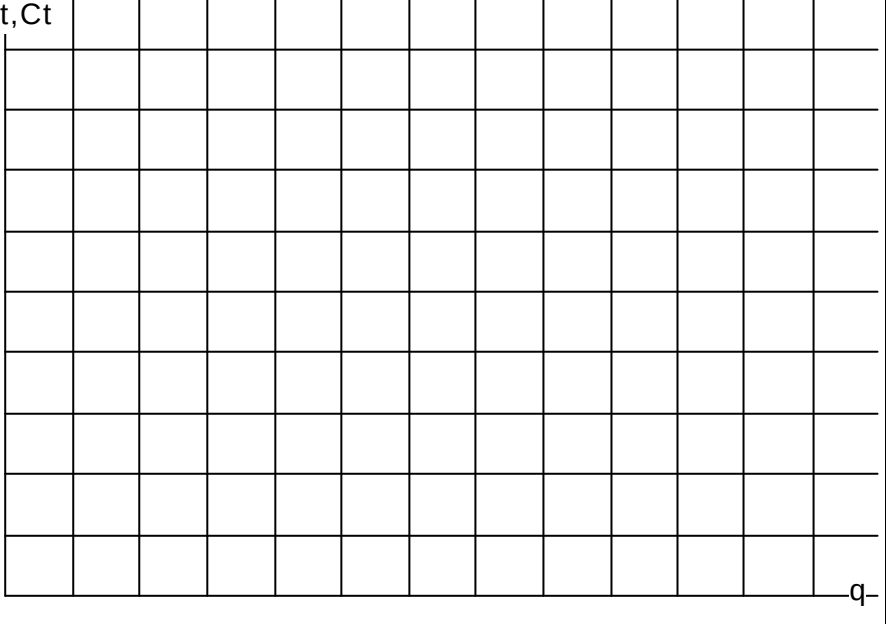
- a) Expressar o lucro mensal da tipografia em função do preço de venda.
- b) Esboçar o gráfico.
- c) Determinar o preço para se ter lucro máximo.

Exercícios Grupo 4 – Tarefas extraclasse

Conhecendo-se as leis da receita total e do custo total, pede-se:

- a) Ponto crítico.
- b) Esboçar o gráfico.

c) Análise econômica.

i) $R_t = 20q$ $C_t = 15q + 50$	R_t, C_t  q
ii) $R_t = 1000q$ $C_t = 750q + 8000$	R_t, C_t  q

Décima terceira semana

Conteúdo – Problemas aplicativos variados

Objetivos:

- Fixar todos os conceitos apresentados sobre funções: constante, afim, quadrática ,oferta, demanda, receita, custo, lucro e prejuízo.
- Esclarecer em aula expositiva dialogada as dúvidas a respeito desses problemas.

Problemas aplicativos variados

1 - Dar a equação da reta $y = ax + b$ que passa pelos pontos:

- a) P(0,4) e Q(-2,0) b) P(0,0) e Q(1,1)
c) P(0,2) e Q(2,0) d) P(1,1) e Q(3,3)
e) P(-1,2) e Q(3,0) f) P(-1,1) e Q(1,-1)

2 - Dadas as retas (r) e (s), pede-se:

- a) Determinar o seu ponto de encontro.
b) Os interceptos com os eixos.
c) Esboçar o gráfico.

i) $r) y = -x + 10$ s) $y = 2x - 20$

ii) $r) y = 3x - 6$ s) $y = -x + 2$

3 - A tabela abaixo relaciona o número de peças produzidas e o número de peças vendidas. Qual a equação da reta que representa este fenômeno?

a)

produzidas	50	80	100
vendidas	30	42	50

b)

produzidas	10	20	30
vendidas	40	20	0

4 - Nos sistemas abaixo temos as equações de oferta e de demanda.

- i) Determinar o ponto de equilíbrio (preço de equilíbrio).
ii) Esboçar o gráfico indicando qual equação representa a oferta e qual a demanda.

a) $\begin{cases} q = 2p - 10 \\ q = -p + 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} q = p + 2 \\ 2q = -3p + 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} q = -2p + 3 \\ q = +p - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} q = 500 - 10p \\ q = 100 + 2p \end{cases}$

5 - A curva de demanda de um artigo é dada pela lei $q_d = 10 - \frac{1}{5}p$. Determinar:

a) A demanda se o preço é

- i) R\$ 5,00
ii) R\$ 10,00

b) O preço quando a quantidade demandada é de 100 artigos.

c) O preço máximo que pode ser demandado.

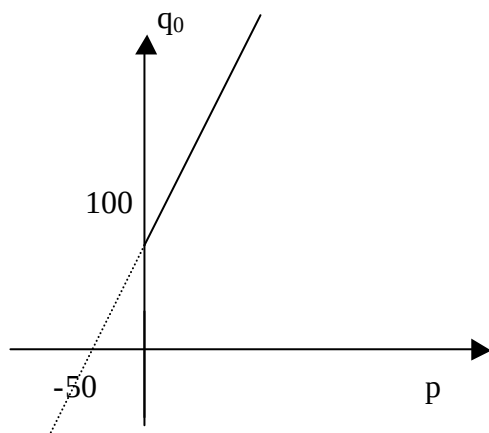
d) Que quantidade poderá ser demandada se o preço for liberado gratuitamente.

6 - A curva de oferta de um artigo é dada graficamente. Determinar o que se pede:

a) A equação que rege a oferta.

b) A quantidade oferecida se o preço é R\$ 50,00.

c) O preço se a quantidade ofertada é 250.



7 - Uma fábrica de relógios analisou suas vendas e verificou que estas aumentam 10% para cada redução de R\$ 2,00. Quando o preço do relógio for de R\$ 12,00, serão vendidas 400 unidades. Pede-se:

a) A lei da demanda.

b) A quantidade demandada se o preço é de R\$ 8,00.

c) Esboçar o gráfico.

8 - Sejam $R_t = 10q$ e $C_t = 5q + 40$ as leis receita total e custo total das vendas de livros de matemática financeira. Pede-se:

a) Ponto crítico.

b) Esboçar o gráfico.

c) Interpretar os resultados (lucro - prejuízo).

9 - Um pneu foi vendido por R\$ 40,00, com lucro de 20% sobre o custo. Qual é o valor do lucro? ($P_v = P_c + L$)

10 - Um balconista recebe 3% de comissão para cada pneu que vende. Com o preço fixo em R\$ 40,00, ele recebeu no mês de maio R\$ 240,00. Quantos pneus ele vendeu ?

11 - Se o custo total é dado por $C_t = q^2 - 2q + 80$, determinar o custo médio ($C_m = C_t/q$) para 12 unidades.

12 - Um comprador verificou que o preço de um televisor de 14 polegadas da marca XYZ na loja B é 20% mais caro que na loja A. Se o preço do televisor é de R\$ 150,00 na loja B, determinar o preço na loja A.

13 - No mercado de ações sabe-se que a rentabilidade das ações na empresa A segue a lei descrita por $RA = 10 + t$ e na empresa B é $RB = t^2 - 5t + 10$, onde t é o tempo em meses a partir de 1º janeiro de 2002. Pede-se:

- a) Os gráficos .
- b) Os valores mínimos de cada aplicação.
- c) Analisar os períodos de melhor investimento.

14 - Conhecendo-se a função custo total $C_t = 16.000 + 10q$ e a receita total $R_t = 14q$, determinar:

- a) O custo fixo.
- b) O custo variável.
- c) O preço unitário do produto.
- d) O ponto crítico P_c .
- e) O lucro total.
- f) A análise econômica.

15 - Dadas as leis de oferta e demanda

$$q_d = -p^2 - p + 12$$

$$q_o = p^2 + 6p + 8, \text{ pede-se:}$$

- a) Determinar o ponto de equilíbrio para a oferta e demanda.
- b) Esboçar o gráfico.
- c) A análise econômica.

16 - Sejam as funções de receita e custo dadas por:

$$R_t = -4q^2 + 160q$$

$$C_t = q^2 + 10q + 1000, \text{ pede-se:}$$

- a) O ponto crítico.
- b) O esboço do gráfico.
- c) A expressão do lucro e seu gráfico.
- d) A quantidade para se ter lucro máximo.

17 - O custo de produção de cada roda de liga de alumínio para o carro SP-2 é R\$ 50,00. Sabendo-se que R\$ 5.000,00 é o custo fixo, pede-se:

- a) Expressar o custo total em função do número de unidades produzidas.
- b) O custo da 5ª roda produzida?
- c) O Esboço do gráfico.

18 - Uma impressora matricial é vendida por R\$ 200,00 a unidade. O custo fixo é de R\$ 16.000,00 e o custo de produção de cada impressora é de R\$120,00.

- a) Expresse a função custo total de fabricação em termos de número de impressoras fabricadas.
- b) Expresse a função receita total.
- c) A partir de quantas unidades vendidas se terá lucro ?
- d) Se forem vendidas 200 impressoras, qual será o lucro ?
- e) Quantas impressoras deverão ser vendidas para se ter um lucro de R\$ 2.000,00 ?

19 - Um torno automático foi adquirido pelo valor de R\$ 30.000,00. Como ao longo do tempo há uma depreciação linear do valor do bem, após 8 anos essa depreciação foi de R\$ 5.000,00.

- a) Expresse a função valor do torno em função do tempo.
- b) Esboce o gráfico.
- c) Qual o valor do torno automático ao final do 6º ano ?
- d) Quantos anos demora para a depreciação ser total ?

20 - Um relojoeiro produz relógios modelo SR-2 ao custo de R\$ 12,00 a unidade. Verifica-se que se o preço do relógio for p reais, serão vendidas, semanalmente, 112 unidades.

- a) Expresse a lei que rege o lucro semanal em função do preço p .
- b) Determinar o lucro semanal se o preço for de R\$ 16,00.

21 - Duas empresas apresentam como custo de fabricação de um mesmo produto as seguintes leis: $C_A = 3q^2 - 24q + 60$ e $C_B = q^2 - 12q + 60$.

- a) Determinar a quantidade para a qual se tem o mesmo custo.
- b) Compare as duas empresas em relação à quantidade fabricada.

22 - Um fabricante de aparelhos de rádio produz q aparelhos por semana ao custo de

$$C_t(q) = \frac{1}{25} q^2 + 3q + 100 \text{ em reais. Determinar:}$$

- a) O custo fixo.
- b) O custo para a produção de 5 rádios.
- c) O custo de produção do 5º rádio.

23 - Uma usina de açúcar tem um custo total mensal dado pela lei $C_t(q) = \frac{1}{10} q^2 + 5q + 800$

em reais, onde q representa a quantidade de toneladas produzidas mensalmente. Determinar:

- a) O custo mensal fixo.
- b) O custo para a produção de 10 toneladas.

Décima quarta semana

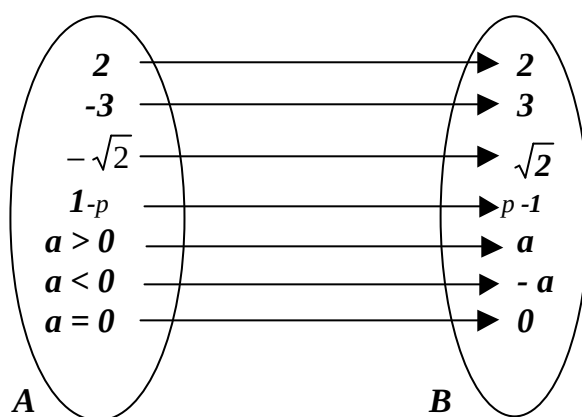
Conteúdo – Função modular: Situação-problema

Objetivos:

- Levar os alunos a identificar a função que transforma números reais em números reais positivos.
- Associar à função modular sua representação gráfica.
- Esboçar gráfico de funções modulares.

Situação problema:

Fernanda apresenta os conjuntos A e B abaixo e pede para Pedro descobrir qual a função que transforma os elementos de A em elementos de B .



Exercícios de aplicação 4

Esboçar o gráfico das funções modulares:

- a) $f(x) = |x-1|$ b) $f(x) = |x+2|$
c) $f(x) = 2 + |x+1|$ d) $f(x) = x + |x|$

Encerrando esse trabalho, o professor formalizará o conceito de função modular e sua representação gráfica.

Décima quinta semana

Conteúdo – Função raiz quadrada: Situação-problema e representação gráfica

Objetivos:

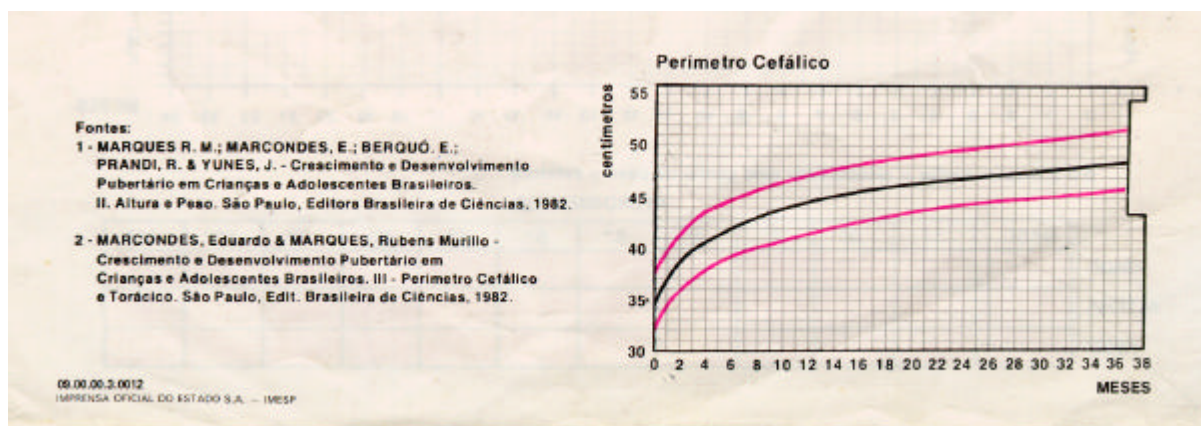
- Reconhecer por meio de situações-problema o conceito de função raiz quadrada.
- Associar à função raiz quadrada seu gráfico.

Situação- problema:

Fernanda comentou com Pedro que foi ao Posto de Saúde com sua vizinha que levou a filha de 6 meses de idade para fazer exames periódicos.

O médico avaliou o crescimento pelo ganho de peso e estatura e depois comparou com uma tabela fornecida pela Secretaria da Saúde para verificar se os dados indicavam normalidade.

A terceira medida executada pelo médico consistiu no uso de uma fita métrica com a qual ele avaliou o perímetro cefálico cujo valor obtido foi de 43 cm. A tabela fornecida pela Secretaria da Saúde é



O médico verificou que a medida 43cm encontrava-se na faixa de normalidade.

Fernanda perguntou a Pedro:

$\frac{3}{4}$ Podemos definir três funções por essa tabela ?

Situações-problema envolvendo funções raiz quadrada dadas por leis matemáticas.

Esboçar o gráfico conhecendo-se as funções:

a) $f : [2, +\infty[\rightarrow$

$$x \mapsto \sqrt{x - 2}$$

b) $f : [-2, +\infty[\rightarrow$

$$x \mapsto \sqrt{2x + 4}$$

Encerrando esse trabalho o professor formalizará o conceito de função raiz quadrada.

Problemas aplicativos:

Problema da vila dos estudantes

Um empresário construiu um conjunto de casas denominado Vila dos Estudantes e aluga cada casa a p reais por dia. Sabe-se que a quantidade de casas demandada é dada por $q = \sqrt{225 - 9p}$. Pede-se:

- O esboço do gráfico.
- O número de casas alugadas se o aluguel diário de cada casa é R\$ 25,00.

Problema da demanda por latas de azeite

As funções demanda e oferta por latas de azeite de oliva são dadas por
$$\begin{cases} q_d = 9 - p \\ q_o = \sqrt{5p + 5} \end{cases}$$

Pede-se:

- O ponto de equilíbrio.
- Esboçar num gráfico as funções demanda e oferta.

Décima sexta semana

Conteúdo – Função raiz quadrada - Problemas aplicativos

Objetivos:

- Levar os alunos a identificar o conceito de função raiz quadrada e resolver problemas que envolvem esse conceito.
- Utilizar a representação gráfica da função raiz quadrada para melhor visualizar a solução do problema.

Problemas aplicativos – Aplicações conhecendo-se as leis de oferta e demanda

1. Dadas as leis de oferta e demanda
$$\begin{cases} q_d = 11 - 2p \\ q_o = \sqrt{8p + 1} \end{cases}$$
, pede-se:

- Ponto de equilíbrio.
- Gráfico.
- Análise econômica.

2. Dadas as leis da receita e custo $\begin{cases} C_t = \sqrt{q + 25} \\ R_t = \frac{6}{11}q \end{cases}$, pede-se:

- a) Ponto crítico.
- b) Gráfico.
- c) Análise econômica.

Exercícios Grupo 5 - Tarefas extraclasse

1) Um fabricante de geladeiras produz q aparelhos por semana ao custo total de

$C_t = \sqrt{q + 4}$ e receita total $R_t = (3/5)q$ (dados em reais). Pede-se:

- a) Ponto crítico.
- b) Esboçar o gráfico das duas curvas.
- c) Mostrar a partir de que valor se tem lucro.

2) Um fabricante de aparelhos de rádio produz q aparelhos por semana ao custo total e receita total dados por

$C_t = \sqrt{3q + 1}$ e $R_t = (4/5)q$ (dados em reais). Pede-se:

- a) Ponto crítico.
- b) Esboçar o gráfico das duas curvas.
- c) Análise econômica.

Décima sétima semana

Conteúdo – Função recíproca ou hipérbole equilátera – Situação-problema

Objetivos:

- Levar os alunos a construir o conceito de função hipérbole por meio de uma situação-problema, utilizando a metodologia de trabalho adotada.
- Construir e interpretar o gráfico da função hipérbole.

Situação-problema:

— Fernanda! Sabe-se que o Estado do Paraná é um dos maiores produtores de soja do Brasil e que sua produção é exportada pelo Porto de Paranaguá. No transporte da soja, da cidade de Londrina até o porto, é cobrado um frete fixo de R\$ 300,00 independente da quantidade de toneladas transportadas. Assim, caminhões maiores geram para o produtor

um custo menor por tonelagem. Estude o custo por tonelagem transportada e defina a função, supondo que o caminhão transporte até 20 toneladas.

Exercícios de Aplicação 5

Esboçar os gráficos das funções:

a) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $x \mapsto \frac{1}{x-1}$

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $x \mapsto 1 + \frac{1}{x-1}$

Ao encerrar esse trabalho, o professor formalizará o conceito de função recíproca ou hipérbole.

Décima oitava semana

Conteúdo – Função recíproca ou hipérbole equilátera- Problemas aplicativos

Objetivos:

- Resolver problemas da área da administração e da economia usando a função recíproca.
- Construir e interpretar gráficos com a função hipérbole.

Problemas aplicativos:

Problema da venda de DVD

Um DVD é vendido por p reais. Sabe-se que a demanda de q centenas de aparelhos por mês é dada pela expressão $q_d = -6 + \frac{90}{p+5}$ e sua lei de oferta é dada por $q_o = \frac{2}{5}p + 1$. Pede-se:

- a) O ponto de equilíbrio.
- b) O esboço do gráfico da demanda e da oferta.
- c) A análise econômica.

Problema das lâmpadas fluorescentes

As leis de oferta e demanda de lâmpadas fluorescentes da fábrica LF são dadas por

$$\begin{cases} q_d = -4 + \frac{200}{p + 20} \\ q_o = \frac{3}{5}p + 1 \end{cases}$$

Pede-se:

- O ponto de equilíbrio.
- Esboçar os gráficos da oferta e da demanda.
- Dar a análise econômica.

Décima nona semana

Conteúdo – Função recíproca ou hipérbole equilátera – Exercícios de aplicação 6

Objetivos:

- Levar os alunos a fixar, por meio das funções recíproca e afim, os conceitos de oferta e demanda.
- Construir com os alunos o conceito de assíntotas na função hipérbole.

Exercícios de aplicação 6

1. Dadas as leis de oferta e demanda, determinar:

- Ponto de equilíbrio.
- Gráfico.
- Análise econômica.

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \begin{cases} q_d = 2 + \frac{1}{p+1} \\ q_o = \frac{2}{3}p + 1 \end{cases} & \text{ii)} \begin{cases} q_d = -6 + \frac{169}{p+12} \\ q_o = p + 6 \end{cases} & \text{iii)} \begin{cases} q_d = -5 + \frac{120}{p+10} \\ q_o = p - 2 \end{cases} \end{array}$$

Vigésima semana

Prova bimestral B₂

- A prova será formulada por meio de enunciados de situações-problema, de assuntos estudados após a primeira prova bimestral e retirados de temas das áreas de administração e economia

Vigésima primeira semana

Conteúdo – Função exponencial – Situação-problema, definição, propriedades e representação

Objetivos:

- Levar os alunos a construir o conceito de função exponencial por meio de uma situação-problema, utilizando a metodologia de trabalho adotada.
- Associar à função exponencial sua representação gráfica.
- Levar os alunos a conhecer suas propriedades e saber aplicá-las.

Situação-problema:

Problema do presente para o Ministro

Pedro conta a história de um rei que desejou presentear seu ministro da fazenda por seu brilhante desempenho no cargo e pediu-lhe que sugerisse o que gostaria de receber. O ministro sugeriu que o presente fosse dado em moedas de 1 ¢entavo, colocadas em um tabuleiro de xadrez, da seguinte maneira:

1 moeda na primeira casa do tabuleiro de xadrez;

2 moedas na segunda casa do tabuleiro de xadrez;

4 moedas na terceira casa do tabuleiro de xadrez;

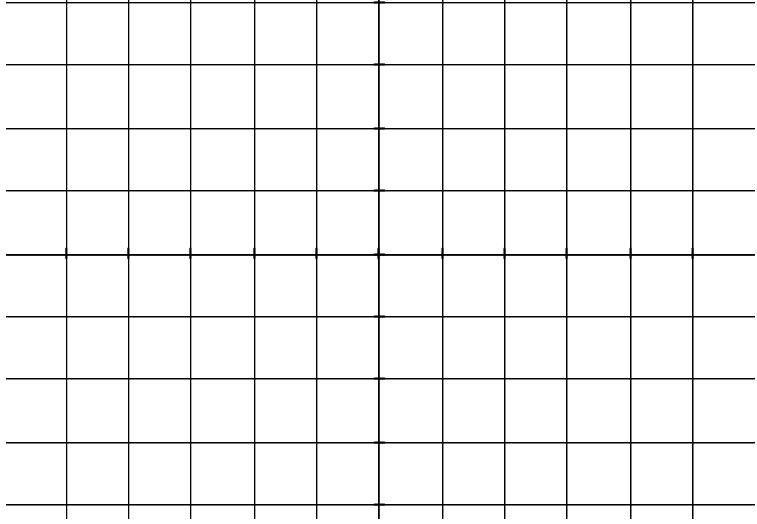
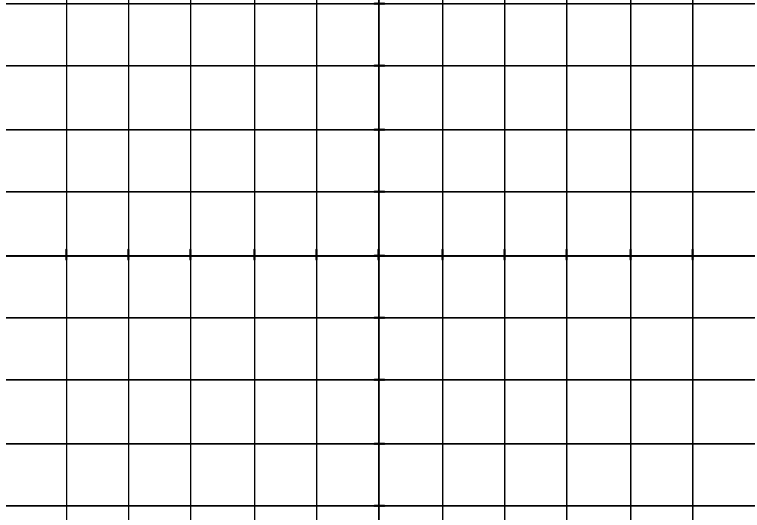
8 moedas na quarta casa do tabuleiro de xadrez, e assim por diante, sempre dobrando o número de moedas da casa anterior.

Em seguida, o rei chamou os matemáticos da corte para fazer a soma e entregar o presente ao ministro. Qual o valor em reais pretendido pelo ministro?

A partir desse problema, identificar a função exponencial e recordar as propriedades da potenciação.

Exercícios de aplicação 7 Esboçar os gráficos das funções:

a) $f(x) = 2^{x+1}$												

b) $f(x) = 2^{-2x+1}$	
c) $f(x) = 2^{x-1}$	

2. Determinar o valor de x usando propriedades da potenciação.

1) $2^{x+3} = 32$

2) $(81)^{1-3x} = 27$

3) $4^x - 2^x = 56$

Encerrando esse trabalho, o professor formalizará os conceitos envolvidos nas atividades propostas, tais como: definição, propriedades e representação gráfica da função exponencial.

Vigésima segunda semana

Conteúdo – Função exponencial – Resolução de equações, de sistemas de equações e problemas aplicativos

Objetivos:

- Aplicar as propriedades da função exponencial na resolução de equações e de sistemas de equações.
- Representar graficamente as funções exponenciais em aplicativos da área de administração e economia.

Exercícios de aplicação 8

1) Resolver as equações exponenciais em

a) $2^x = 64$

b) $8^x = \frac{1}{32}$

c) $(\sqrt[3]{2})^x = 8$

d) $\left(\frac{1}{125}\right)^x = 25$

e) $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

f) $(2^x)^{x-1} = 4$

g) $(2^x)^{x+4} = 32$

h) $2^{x-1} + 2^x - 2^{x+1} + 2^{x+3} = 120$

i) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

j) $25^x + 625 = 130.5^x$

2) Para quais valores de a , a função $f(x) = (2a - 2)^x$ é crescente?

3) Resolver o sistema

$$\begin{cases} 3^{x+1} = 1 \\ \left(\frac{1}{9}\right)^x + 2^y = 25 \end{cases}$$

Problemas aplicativos:

Problema do mercado de ações

Fernanda diz a Pedro que, no mercado de ações, sabe-se que a rentabilidade das ações da empresa A é descrita pela lei $R_A = 4^t$ e da empresa B pela lei $R_B = 10.2^t - 16$, onde t é o tempo em meses a partir de 1º de janeiro de 2001. Pede-se:

- Os pontos em que as rentabilidades são iguais.
- Esboçar num gráfico as funções R_A e R_B .
- A melhor escolha da rentabilidade se o dinheiro ficar disponível até o 10º mês.

Problema do seguro-saúde

Uma empresa de seguro-saúde tem como receita $R_t = 4^{q+1} - 4$ e $C_t = 9.2^q - 6$, onde q , o número de associados, é medido em milhares de unidades. Pede-se:

- Ponto crítico.
- Gráfico.
- Análise econômica.

Problema dos eixos de motos

Considere uma indústria que produz q eixos, semanalmente, e para motos tipo XR-125, cujas leis de receita e custo são dadas por $R_t = 2^{2q}$ e $C_t = 2^{q+1} + 8$. Pede-se:

- Ponto crítico.
- Interceptos.
- Esboço do gráfico.
- Análise econômica.

Exercícios Grupo 6 – Tarefas extraclasse

1) Conhecendo-se as funções custo total e receita total dadas por $C_t = 4^{q+1}$ e $R_t = 8^{q^2-q}$, determinar:

- O ponto crítico.
- Os interceptos.
- O gráfico de C_t e R_t .
- A análise econômica.

- 2) Conhecendo-se as funções custo total e receita total dadas por $C_t = 2^q + 11$ e $R_t = 4^q - 1$, determinar:
- O ponto crítico.
 - Os interceptos.
 - O gráfico de C_t e R_t .
 - A análise econômica.

Vigésima terceira semana

No início da aula, discutir a tarefa deixada para casa.

Conteúdo – Função logarítmica: Situação-problema, definições e representação gráfica; logaritmo: definição, operações e propriedades

Objetivos:

- Levar os alunos a construir o conceito de função logarítmica, por meio de uma situação-problema, utilizando a metodologia de trabalho adotada.
- Associar à função logarítmica sua representação gráfica.

Situação problema:

Pedro diz a Fernanda.

$\frac{3}{4}$ Fernanda, observe a progressão aritmética: $0 ; 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 1 ; 1,25 ; \dots$, que podemos escrever $0; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{4}{4}; \frac{5}{4}; \dots$, onde o primeiro elemento é zero e a razão $r = \frac{1}{4}$.

Observe também a progressão geométrica: $1; 2; 4; 8; 16; 32 \dots$ com primeiro termo 1 e razão $q=2$.

Fernanda, existe uma função matemática que associa a cada elemento da progressão geométrica um único elemento da progressão aritmética?

Exercícios de aplicação 9

1. Achar o valor dos logaritmos.

- $\log_2 32$
- $\log_8 4$
- $\log_b b^3$
- $\log_{10} 0,001$

2. Simplificando a expressão $\log_4 9 \times \log_{27} 8 \times \log_{81} 16$, obteremos:

- a) $\log_3 2$ b) $\log 2$ c) $\log_2 3$ d) $\log 3$ e) n.d.a.

3. Sendo $\log_{10} 2 = 0,301$, então o menor valor inteiro de n para o qual

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots \times n}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times \dots \times 2n} < \frac{1}{10^4}$$

- a) 12 b) 13 c) 14 d) 0 e) n.d.a.

4. Sendo $\log b = a$, então $\log \sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}}$ é igual a:

- a) $8a$ b) $6a$ c) $\frac{7a}{8}$ d) $\frac{a}{6}$ e) n.d.a.

5. Verifique se a igualdade é verdadeira.

$$\log_{10} \sqrt{x \cdot y} = \log_{10} \sqrt{x} + \log_{10} \sqrt{y}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0.$$

6. Dados $\ln 2 = 0,6931$ e $\ln 3 = 1,0986$, determinar:

- a) $\ln 18$ b) $\ln \sqrt{54}$ c) $\ln \frac{1}{4}$

Encerrando esse trabalho, o professor formalizará os conceitos envolvidos nas atividades propostas, tais como: definição e propriedades dos logaritmos. Formalizará também o conceito de função logarítmica e sua representação gráfica.

Vigésima quarta semana

Conteúdo – Função logarítmica: Resolução de equações e de sistemas de equações

Objetivo:

- Levar os alunos a conhecer as propriedades da função logarítmica e aplicá-las em equações e sistemas de equações.

Observação: Deixaremos de propor problemas aplicativos com as funções de oferta, demanda, receita e custo, por se apresentarem inadequados aos modelos que ocorrem na administração.

Exercícios de aplicação 10

1. Resolver as equações em .

- a) $\log_{0,5} 0,25 = x$ b) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{9}{25} = x$
 c) $\log_7 \sqrt{343} = x$ d) $\log_x 121 = 2$

$$\text{e) } \log_x \frac{16}{81} = -4 \quad \text{f) } \log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{g) } \log_{\sqrt{2}} x = 4 \quad \text{h) } \log_3 (x^2 - 1) = 1$$

$$\text{i) } (0,1)^{x-5} = 10$$

2. Resolver as inequações em $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \quad \text{b) } \log_2 (x^2 - 3) > 0$$

3. Resolver as equações em $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } \log(x+5) = \log x + \log 5 \quad \text{b) } \log_3(2x+1) - \log_3(5x+3) = -1$$

$$\text{c) } 2^{\log_2 3x} = x^2 - 4 \quad \text{d) } (\log_2 x)^2 = 4$$

4. Resolver os sistemas em $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 12 \\ \log_2 x + \log_2 y = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2 \\ 4^{x-y} = 8 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = -1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \end{cases}$$

5. Determinar o valor de x na equação $\log_x(3-2x) = 2$

Vigésima quinta semana

Conteúdo–Ajustamento de curvas–Situações-problema – construções de retas e parábolas

Objetivo:

- Levar os alunos a construir funções polinomiais de grau menor que três, a partir de tabelas formadas por pares de números.

Situações-Problema:

Situação-problema 1:

— Fernanda, vimos que a curva que representa a demanda mostra que se o preço aumenta a quantidade demandada diminui. São muitas as pesquisas que investigam questões semelhantes a esta. Assim, sempre indagamos como a variação de uma grandeza acarreta variação em outra. Nas tabelas abaixo, podemos investigar:

- a) O aumento da área agricultável de soja no Estado do Paraná acarreta aumento da produção de grãos ?

1992		1993		1994		1995		1996		1997		1998		1999	
Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.
2,0	3,6	1,8	3,4	2,0	5,3	2,1	5,5	2,3	6,0	2,5	6,6	2,8	7,1	2,8	7,7
área: milhões de hectares e produção: milhões de toneladas															
Fonte: Armário Brasileiro de Agribusiness															

- b) O saldo da caderneta de poupança aumentou no período de março a setembro ?
(Dados Jornal do Comércio – 05/10/1999 em bilhões de reais).

meses	março	abril	maio	junho	julho	agosto	setembro
valor	116,6	116,6	112,5	113,4	113,8	114,1	114,7

- c) Diminuindo a taxa de analfabetismo, diminui a taxa de mortalidade infantil ?

Região	Taxa de mortalidade infantil	Taxa de analfabetismo
Sul	22,5	8,3
Sudeste	25,2	8,6
Centro Oeste	25,4	12,4
Norte	35,6	12,7
Nordeste	59,0	29,4
Dados do ano de 1997 - Fonte: Ministério da Saúde - IBGE, 1999		

Situação-problema 2:

Problema dos pesos dos pais e de seus respectivos filhos

$\frac{3}{4}$ Pedro, uma clínica médica pesquisou o relacionamento dos pesos dos pais e dos filhos, os dois do sexo masculino, todos com idades superiores a 20 anos, e obteve a seguinte tabela:

peso dos pais	x	80	84	86	90	92	96	100	102
peso dos filhos	y	82	86	88	86	90	100	98	104

Construa uma função que passe por esses pontos.

Após o trabalho feito, o professor formalizará a teoria de ajuste de curvas, partindo de tabelas e obtendo funções polinomiais e seus gráficos. Ainda será apresentado o exercício de aplicação 11 para a fixação dos conceitos trabalhados.

Exercícios de aplicação 11

- 1) A empresa ABC, estudando a variação da oferta de seu produto em relação ao preço, obteve os seguintes valores:

p	0	1	2
q	50	66	84

Pede-se construir por esses pontos um trinômio do segundo grau e estimar a oferta para o preço de R\$ 3,00.

- 2) Para cada uma das tabelas, construir o trinômio do segundo grau.

a)

p	0	2	3
q	20	44	59

b)

p	0	1	2
q	30	19	6

Vigésima sexta semana

Conteúdo – Regressão linear – Método dos mínimos quadrados

Objetivos:

- Operar com tabelas obtendo somas e médias.
- Reconhecer e estimar dados a partir de tabelas dadas.
- Representar graficamente as tabelas, bem como a reta regressão linear.
- Interpretar dados a partir do gráfico da reta regressão linear.

Situação– problema:

— Pedro, como se obtém a reta regressão linear para o problema dos pesos dos pais e dos respectivos filhos, enunciado na aula anteriormente?

peso dos pais	x	80	84	86	90	92	96	100	102
peso dos filhos	y	82	86	88	86	90	100	98	104

Concluindo o trabalho, o professor formalizará o conceito de regressão linear.

Problemas aplicativos:

Problema dos custos de televisores

A tabela a seguir indica as quantidades de televisores da marca ABC produzidas mensalmente e os respectivos custos totais de produção.

Quantidade produzida	x	100	120	130	140	150	160
custo total (R\$)	y	2000	2300	2700	2900	2800	3000

Pede-se pela análise de regressão:

- a) A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- b) O valor mais provável dos custos fixos.
- c) O valor do custo estimado para 180 televisores.
- d) A representação dos pontos e da reta regressão linear.

Problema dos custos de bolas de futebol de salão

A tabela abaixo indica a quantidade de bolas de futebol de salão produzidas mensalmente e os respectivos custos totais de produção.

Quantidade (x)	10	11	12	13	14	15
Custos(y)em R\$	100	112	119	130	139	142

Pede-se:

- a) A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- b) O valor mais provável dos custos fixos.
- c) O custo total para a quantidade de 16 bolas.
- d) Esboçar num gráfico a reta regressão linear e os pontos que representam os custos.

Vigésima sétima semana

Conteúdo – Regressão linear: Problemas aplicativos

Objetivos:

- Reforçar o trabalho de construção de tabelas e gráficos.
- Estimar novos pontos por meio da reta regressão linear.

Problemas aplicativos:

Problema dos custos de bolas de futebol de salão

A tabela abaixo indica a quantidade de bolas de futebol de salão produzidas mensalmente e os respectivos custos totais de produção.

Quantidade (x)	10	11	12	13	14	15
Custos(y)em R\$	100	112	119	130	139	142

Pede-se:

- a) A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- b) O valor mais provável dos custos fixos.
- c) O custo total para a quantidade de 16 bolas.
- d) Esboçar num gráfico a reta regressão linear e os pontos que representam os custos.

Problema da minimização dos custos de cirurgias

No relatório do Hospital B.P., encontramos a tabela do número de cirurgias cardíacas no ano de 2001 e o total de despesas necessárias para sua realização.

Seja C número de cirurgias e D despesas em milhares de reais:

jan		fev		mar		abr		mai		jun		jul		ago		set		out	
C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D
59	56,5	56	59,3	74	58,9	68	54,2	62	64,2	71	56,2	84	60,1	84	57,5	73	55,4	56	45,6

Pede-se:

- A reta regressão linear para as despesas.*
- A reta regressão linear para o número de cirurgias.*
- O esboço do gráfico para o número de cirurgias.*
- O esboço do gráfico para as despesas.*
- O gasto e o número de cirurgias prováveis para o mês de novembro.*
- A comparação dos dois eventos quanto à otimização dos gastos em relação à quantidade de cirurgias.*

Problema da produção de soja

¾ Fernanda! No início deste capítulo fizemos a pergunta:

Se a área agricultável de soja no Estado do Paraná aumentar, isto acarreta um aumento na produção de grãos?

Os dados abaixo foram colhidos do Anuário Brasileiro de Agribusiness.

Podemos dizer que houve aumento na produtividade?

ano	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
área (em milhões de hectares)	2,0	1,8	2,0	2,1	2,3	2,5	2,8	2,8
Produção (toneladas)	3,6	3,4	5,3	5,5	6,0	6,6	7,1	7,7

Exercícios Grupo 7 – Tarefas extraclasse

1) A tabela mostra as alturas em centímetros e o peso em quilogramas de uma amostra de alunos do 1º ano do curso de Administração. Pede-se:

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.*
- Avaliar a altura do aluno cujo peso é 63 kg.*
- Avaliar o peso do aluno cuja altura é 180 cm.*
- Esboçar o gráfico da tabela e da reta regressão linear.*

Peso (x)	45	60	58	55	66	58	70	68	76
Altura(y)	150	155	158	160	162	165	170	175	178

2) A tabela mostra a taxa de desemprego, em percentagem, da população economicamente ativa de um determinado país desde 1980. Pede-se:

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- Avaliar a taxa de desemprego para o ano de 1993.
- Esboçar o gráfico da tabela e da reta regressão linear.

Ano (x)	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
% (y)	2,2	4,3	4,0	4,3	4,9	4,5	2,4	2,6	3,8	3,2	2,6	4,5	6,0

3) O número de internautas residenciais que utilizaram a internet em 2001 (em milhões) é dado pela tabela (Jornal *O Estado de São Paulo* – 21/10/2001).

JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET
9,8	9,8	9,8	10,4	11,1	11,3	11,9	11,9	12,0

Pede-se:

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- Avaliar o número de internautas para o mês de outubro.
- Esboçar o gráfico dos pontos e da reta regressão linear.

4) A tabela abaixo mostra a percentagem de habitantes pobres no Brasil a partir de 1992 (Fonte: Jornal *O Estado de São Paulo* – 22/07/2001).

1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
40,8	41,7	43,9	33,9	33,5	33,9	32,7	34,0	31,9

Pede-se:

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- Avaliar a percentagem de pobres para o ano de 2001.
- Esboçar o gráfico dos pontos e da reta regressão linear.

Vigésima oitava semana

Conteúdo – Sequências – Situação-problema, definições

Objetivos:

- Levar os alunos a construir o conceito de seqüência por meio de situação-problema, utilizando a metodologia de trabalho adotada.
- Apresentar nomenclatura e notações usadas em seqüências
- Determinar os termos de uma seqüência.
- Verificar se uma seqüência é ou não convergente.
- Comparar e ordenar números em seqüência.

Situação-problema:

Problema – Paradoxo de Aquiles

Conta-se que, na Antigüidade, Aquiles, guerreiro grego, apostou corrida com uma tartaruga. A corrida ocorreu em uma pista reta e Aquiles dava uma vantagem inicial à tartaruga de 100m. Observou-se que a tartaruga corria sempre a décima parte do que corria Aquiles, isto é, quando Aquiles corria 100 metros a tartaruga corria 10m, quando Aquiles corria 10m, a tartaruga corria 1m e assim sucessivamente. Dado o sinal de partida:

- Aquiles alcança a tartaruga ?*
- Se alcançar, depois de quantos metros isso ocorre?*

Exercícios de aplicação 12

1) Determine os 5 primeiros termos das seqüências:

$$a) (A_n): a_n = 3 - 2n \quad b) (A_n): a_n = (-2)^n$$

$$c) (A_n): a_n = \frac{1}{2^n} \quad d) (A_n): a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$e) (A_n): a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

2) Achar os 4 primeiros termos da seqüência conhecendo-se:

$$a) a_1 = 2 \quad e \quad a_{n+1} = a_n - 3$$

$$b) a_1 = 0 \quad e \quad a_{n+1} = (a_n)^2$$

$$c) a_1 = \frac{1}{3} \quad e \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$$

Encerrando esse trabalho, o professor formalizará os conceitos envolvidos nas atividades propostas.

Voltando ao problema do Paradoxo de Aquiles, trabalhar-se-ão os conceitos de convergência, divergência e monotonicidade.

Exercícios de aplicação 13

a) Verificar se cada seqüência abaixo é convergente ou divergente:

$$1) (A_n): a_n = \frac{1+2n}{n} \quad 2) (A_n) = (0,1,1,2,2,3,3,4,4,\dots)$$

$$3) (A_n): a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad 4) (A_n): a_n = n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$5) (A_n): a_n = n^2 + n + 7$$

b) Determinar os 5 primeiros termos das seqüências:

$$1) (A_n): a_n = \begin{cases} a_2 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 4 \end{cases} \quad 2) (A_n): a_n = \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

$$3) (A_n): a_n = \begin{cases} a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \end{cases}$$

O professor formalizará os conceitos de convergência e divergência e monotonicidade.

Vigésima nona semana

Conteúdo – Seqüências – Problemas aplicativos – Conceito de limite

Objetivos:

- Identificar, por meio de seqüências, aplicações na administração e na economia.
- Levar os alunos a construir o conceito de limite partindo do conceito de seqüências.

Problemas aplicativos:

Problema da evolução dos salários

Em geral, empregados que trabalham muitos anos em uma mesma empresa, no início de carreira têm seus salários menores do que no final de carreira. Pensando assim, a Empresa ABC contrata seus empregados do setor M estabelecendo um aumento mensal dado pela função $s(x) = 2.000x + 100$ (reais) em que os valores x assumem os valores na seqüência

$$(A_n): a_n = \frac{2n-1}{n}, \text{ onde } n \text{ representa os meses de trabalho.}$$

Responda:

- Qual o valor do primeiro salário recebido pelos empregados do setor M ?
- Qual o valor do salário a partir do qual ele fica estável?

Problema do pagamento de prestações da casa própria

Uma construtora vende apartamentos em prestações mensais que obedecem à lei $p(x)=800x+20$ (reais). Os juros aplicados sobre os saldos decrescem segundo a seqüência $(A_n): a_n = \frac{n+1}{n}$, na qual n representa os meses e x assume os valores na seqüência (A_n) .

Pede-se:

- Qual o valor a ser pago na primeira prestação do apartamento?
- Para qual valor a prestação se torna estável?

Exercícios de aplicação 14

Determinar a convergência da função $f(x)$ quando x assume valores na seqüência:

1) $(A_n): a_n = \frac{2n+1}{n}$, sendo a função definida por

$f: \rightarrow$ sendo $x \mapsto x^2$

2) $(A_n): a_n = \frac{1}{n}$, sendo a função definida por $f: \rightarrow$ sendo

$x \mapsto x^2+1$

3) $(A_n): a_n = 2 + \frac{1}{n}$, sendo a função definida por

$f: -\{2\} \rightarrow$ sendo $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$

Exercícios Grupo 8 – Tarefas extraclasse

Determinar a convergência de $f(x)$ quando x assume os valores na seqüência (A_n)

1) $\left\{ \begin{array}{l} (A_n): a_n = \frac{1}{n} \\ f(x) = 2x+1 \end{array} \right.$ 2) $\left\{ \begin{array}{l} (A_n): a_n = 1 + \frac{1}{n} \\ f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} \end{array} \right.$ (sugestão: fatorar e simplificar)

$$3) \begin{cases} (A_n): a_n = n \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} (A_n): a_n = \frac{1}{n} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} (A_n): a_n = n \\ f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \end{cases} \text{ Escrever } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \text{ como } f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

Trigésima semana

Prova bimestral B3

- A prova será formulada por meio de enunciados de situações-problema, de assuntos estudados após a segunda prova bimestral e retirados de temas da área de administração e economia.

Trigésima primeira semana

Conteúdo –Taxa média de variação de função– Situações-problema

Objetivo:

- Levar os alunos a construir o conceito de taxa média de variação para funções por meio de situações-problema, utilizando a metodologia de trabalho adotada.

Situações-problema:

Situação-problema 1: Problema do velocímetro quebrado

¾ Fernanda! No último feriado prolongado, estava viajando com meus tios quando observamos que o velocímetro do carro estava quebrado. Então meu tio perguntou qual a velocidade em que estávamos viajando.

¾ Pedro, como você resolve esse problema ?

Situação-problema 2: Problema da variação do lucro

O lucro semanal de um fabricante, em função do preço de venda, é dado pela lei denominada função lucro $L(p) = 20(10 - p)(p - 2)$. Determinar:

a) a taxa de variação do lucro se o preço p varia de R\$ 2,00 a R\$ 6,00.

- b) a taxa de variação para cada vez que o preço aumenta R\$ 1,00 e o valor do preço imediatamente anterior.

Encerrando esse trabalho, o professor formalizará os conceitos envolvidos nas atividades propostas (variação).

Exercícios de aplicação 15

a) Determinar a taxa média de variação da função $f(x) = x^2$, quando x varia no intervalo de 1 a 2.

b) Determinar a taxa média de variação da função $f(x) = ax+b$, com a e b reais e $a > 0$ para x variando nos intervalos:

1) $[1, 2]$

2) $[2, 3]$

3) $[n, n+1], n \in \mathbb{N}^*$

Trigésima segunda semana

Conteúdo – Custo e receita marginal – Funções – constante, afim e quadrática

Objetivos:

- Construir os conceitos de custo e receita marginal, obtendo as funções marginais mais usuais.
- Levar os alunos a obter, por meio do uso do limite, as funções custo e receita marginal.
- Aplicar as fórmulas obtidas de custo e receita marginal.
- Fazer aplicações das fórmulas obtidas de custo e receita marginal.

Situação-problema

Problema do custo de fabricação

— Pedro! Uma empresa verificou que para fabricar q unidades de certo produto, o custo total é dado por $C(q) = q^2 + 1$ (reais). Determine:

a) O custo médio de variação quando se passa da primeira unidade para a terceira unidade.

b) O custo médio de variação quando se passa da primeira unidade para a segunda unidade.

c) O custo marginal de uma unidade de fabricação do produto.

Encerrando esse trabalho, o professor formalizará os conceitos envolvidos nas atividades propostas: custo médio de variação e custo marginal.

Exercícios de aplicação 16

1) Determinar o custo marginal e a receita marginal das funções abaixo:

a) $C(q) = q^5$

b) $C(q) = \sqrt{q}$

c) $C(q) = q^2 + 3q^4 - 2$

d) $R(q) = \sqrt[3]{q} - 3q^2 + 2$

2) Calcular o custo marginal da função $C(q) = q^2$ no ponto $q = 2$.

3) Calcular a receita marginal para $q = 1$ sendo $R_t = q^3 + 2q$.

Trigésima terceira semana

Conteúdo – Funções custo e receita marginal: Problemas aplicativos

Objetivos:

- Aplicar o conceito de custo e receita marginal na resolução de problemas de administração e economia.
- Representar graficamente as funções custo e receita e de suas funções marginais.

Problemas aplicativos:

Problema do custo de calculadoras

Uma fábrica de calculadoras eletrônicas tem a função custo total representada pela função $C_t = 4q^2 + 20q + 16$.

a) Dar a função custo marginal.

b) Determinar o custo marginal para 3 calculadoras.

c) Esboçar o gráfico das funções custo total e custo marginal.

Problema da fábrica de fogões

A função receita total de uma fábrica de fogões é dada pela lei $R_t = -q^2 + 200q$. Dar a equação que representa a receita marginal, dizer quando a receita total é crescente, decrescente e máxima, e esboçar o gráfico das funções R_t e R_{marg} .

Problema dos chinelos magnéticos

A função receita total de uma fábrica de chinelos magnéticos é dada pela equação $R_T = -3q^2 + 600q$ e na qual q representa a quantidade de chinelos vendidos.

- a) Dar a equação que representa a receita marginal.
- b) Esboçar o gráfico da função receita total e da receita marginal.
- c) Usar o conceito de vértice da parábola para determinar qual a receita máxima que essa fábrica pode obter.

Trigésima quarta semana

Conteúdo – Funções custo e receita marginal máximos – Problemas aplicativos

Objetivo:

- Utilizar os conceitos de custo e receita marginal para a determinação dos pontos extremos de máximo e mínimo.

Problemas aplicativos:

Problema da análise do mercado consumidor

Após a análise do mercado consumidor, a empresa fabricante dos óculos de sol da marca ABC estabeleceu o preço de seu produto variando segundo a lei $p = -q + 400$ (reais).

Pede-se:

- a) A expressão da receita total.
- b) A receita marginal para a venda de dez óculos de sol.
- c) A expressão do lucro, sabendo-se que o custo total é dado pela lei $C_T = 50q + 15.000$.
- d) A quantidade vendida para a qual haverá lucro máximo.

Problema do preço de aparelhos celulares

O preço de um aparelho celular digital varia com a quantidade vendida e é dado por $p = -q^2 + 600q$ (reais). Pede-se:

- a) A expressão da receita total e da marginal.*
- b) A quantidade máxima vendida para a qual se tem receita máxima.*
- c) Esboçar o gráfico das receitas total e marginal.*

Após o trabalho com esses problemas, o professor formalizará os conceitos de custo máximo e receita máxima.

Trigésima quinta semana

Conteúdo – Funções custo e receita marginal: Exercícios de aplicação 17

Objetivos:

- Fixar todos os conceitos das funções marginais: oferta, demanda, custo, receita, lucro e prejuízo.
- Esclarecer em aula expositiva dialogada as dúvidas dos alunos na resolução desses problemas.

Exercícios de aplicação 17

1) O custo para produzir um par de chinelos magnéticos é R\$ 8,00. Verificou-se que se o preço de venda for p reais, então o número de pares vendidos por semana é $120 - p$. Determinar o lucro semanal máximo.

2) O custo total semanal para se produzir motores de geladeira é dado por:

$$C_t = -q^2 + 200q + 404. \text{ Pede-se:}$$

- a) A expressão do custo marginal.
- b) O custo marginal para produzir 50 motores.
- c) O número de motores produzidos para os quais se tem custo máximo.
- d) Esboçar o gráfico do custo total.

3) A receita obtida na fabricação do pneu XR/350 é dada pela lei $R_t = -q^2 + 80q$. Pede-se:

- a) A expressão da receita marginal.

- b) A quantidade para a qual se tem receita máxima.
- c) O esboço do gráfico da receita total e da receita marginal.

4) Seja $C_t = q^2 + 6q + 16$ o custo total de produção de q unidades de um produto. Pede-se:

- a) Esboçar o gráfico do custo total.
- b) Esboçar o gráfico do custo marginal.
- c) Determinar o custo marginal para 10 unidades.

Trigésima sexta semana

Conteúdo – Funções custo e receita marginal: Exercícios grupo 17 (continuação)

Objetivos:

- Fixar todos os conceitos das funções marginais: oferta, demanda, custo, receita, lucro e prejuízo.
- Esclarecer em aula expositiva dialogada as dúvidas dos alunos nesses problemas.

Exercícios grupo 17 (continuação)

1) Uma firma produz mensalmente q impressoras do tipo XR/250, com custo total dado pela lei $C_t = q^2 + 10q + 120$. Sendo a demanda do mercado dada por $q = 1.000 - p$. Pede-se:

- a) A expressão do custo marginal.
- b) A expressão da receita total.
- c) O preço para o qual se tem receita máxima.
- d) O preço para o qual se tem lucro máximo.
- e) O número de impressoras vendidas para quando se tem lucro máximo.

2) A equação da demanda de um determinado produto é dada por $q = -p + 10$.

Determinar:

- a) A função receita total.
- b) A função receita marginal.
- c) O esboço do gráfico da receita total e da receita marginal.

3) O custo total de produção semanal de violões da marca JR/50 é dado por $C_t = 900q + 200$ e esse preço, que varia de acordo com a quantidade produzida, é dado por

$p = -q^2 + 60q$. Pede-se:

- a) A receita total.

- b) A função receita marginal.
- c) A receita marginal para a venda de 10 violões.
- d) A função custo marginal.
- e) A função lucro.
- f) O número de violões que devem ser vendidos para se obter lucro máximo.

Trigésima sétima semana

Prova bimestral B₄

- A prova será formulada por meio de enunciados de situações-problema, retirados de assuntos estudados após a terceira prova bimestral e de temas da área de administração e economia.

Trigésima oitava semana

Prova Substitutiva Geral

- A prova será formulada por meio de enunciados de situações-problema, retirados de assuntos estudados nos dois semestres letivos e retirados de temas da área de administração e economia.

Trigésima nona semana

Exame Global

- O Exame Global será formulado por meio de enunciados de situações-problema, retirados de assuntos estudados nos dois semestres letivos e de temas da área de administração e economia.

Quadragésima semana

Exame Especial Global

- O Exame Especial Global será formulado por meio de enunciados de situações-problema, retirados de assuntos estudados nos dois semestres letivos e de temas da área de administração e economia.

4.4 - Aplicação do Projeto

Primeira semana

Na aula inicial da disciplina Matemática, apresentamos aos alunos o texto contendo a ementa, o conteúdo programático e planejamento didático. Foram dados esclarecimentos para todos os tópicos que compõem essa proposta e, em especial, destacamos os objetivos, o programa a ser desenvolvido e a bibliografia. Apresentamos com detalhes a metodologia de ensino de matemática via Resolução de Problemas, fazendo um histórico de problemas famosos. Comentamos inúmeros problemas utilizados pelas disciplinas profissionalizantes, com os quais trabalharemos na disciplina Matemática, como situações-problema, isto é, como ponto de partida da atividade matemática. No processo de ensino-aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos serão abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

O problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Também, a resolução de problema não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Lembramos o esquema de aula em que um objeto matemático é trabalhado visando seu ensino e sua aprendizagem, com compreensão e significado, via Resolução de Problemas:

<i>1. Formar grupos – entregar uma atividade</i>	<i>2. O papel do professor</i>
<i>3. Resultados na lousa</i>	<i>4. Plenária</i>
<i>5. Análise dos resultados</i>	<i>6. Consenso</i>
<i>7. Formalização</i>	

Unidade I FUNÇÕES

Serão utilizadas 24 semanas, com quatro aulas semanais para o desenvolvimento e as aplicações da Unidade I – Funções.

A seguir, apresentamos os tópicos da Unidade I.

Funções

1. Conceito de função
2. Variáveis dependentes e independentes
3. Domínio e Contradomínio
4. Definição de função
5. Funções Elementares
 - 5.1. Função constante
 - 5.2. Função afim
 - 5.2.1 Aplicações da Função Afim
 - 5.3. Função quadrática ou função trinômio do 2º grau
 - 5.3.1. Definição de função quadrática
 - 5.3.2. Representação gráfica da função quadrática
 - 5.3.3. Aplicações da função quadrática
 - 5.4. Aplicações das funções afim e quadrática na administração e na economia.
 - 5.4.1. Lei da demanda ou da procura
 - 5.4.2. Lei da oferta
 - 5.4.3. Equilíbrio de mercado
 - 5.4.4. Receita total
 - 5.4.5. Custo total
 - 5.4.6. Ponto crítico (Break-Even Point)
 - 5.5. Função modular
 - 5.6. Função raiz quadrada
 - 5.6.1. Definição da função raiz quadrada
 - 5.6.2. Aplicações da função raiz quadrada
 - 5.7 Função recíproca ou hipérbole equilátera
 - 5.7.1. Definição de função recíproca ou hipérbole equilátera
 - 5.7.2. Aplicações da função recíproca ou hipérbole equilátera
 - 5.8 Função exponencial
 - 5.8.1. Definição de função exponencial
 - 5.8.2. Aplicações da função exponencial
 - 5.9. Função logarítmica
 - 5.9.1. Definição de função logarítmica

Objetivos da Unidade I

- *Mostrar aos alunos que situações-problema do cotidiano da economia e administração podem ser resolvidos por equações denominadas funções.*
- *Resolver situações-problema por meio de funções dadas na forma algébrica.*
- *Construir e interpretar situações-problema na forma de representação gráfica e*
- *Estudar situações-problema que envolvem sistemas de funções.*

Segunda semana

Com a finalidade de se construir os conceitos de funções, foram apresentadas quatro situações-problema, com enunciados preparados a partir de temas das disciplinas da área profissionalizante do Curso de Administração de Empresas.

1. Conceito de função

Situação-problema 1: Problema da livraria

Com o início das aulas, Fernanda, aluna do Curso de Administração, vai à livraria para comprar cadernos de 200 folhas, cujo preço unitário é R\$ 6,00, e livros didáticos, cujo valor unitário é R\$ 12,00. Sua mãe dá-lhe R\$ 120,00 e pede que use todo o dinheiro na compra de cadernos e livros.

Pede-se:

- As quantidades possíveis para se comprar os dois itens.*
- Descrever uma relação entre as quantidades dos dois itens.*
- Uma forma de representar graficamente essa relação.*

Fernanda logo percebeu que são vários os casos possíveis e citou alguns exemplos:

Quantidade de livros		Quantidade de cadernos	
1	_____	_____	18
2	_____	_____	16
3	_____	_____	14
6	_____	_____	8

fig. 1

Para obter todas as quantidades possíveis de livros e cadernos, Fernanda sugeriu escrever:

x: quantidade de livros comprados

y: quantidade de cadernos comprados

Portanto, a quantidade de livros comprados (x) multiplicada pelo valor (R\$ 12,00) de cada livro, mais a quantidade de cadernos comprados (y) multiplicado pelo valor (R\$ 6,00) de cada caderno deve totalizar R\$ 120,00, que é o valor dado por sua mãe em dinheiro. Simbolicamente, Fernanda escreveu $12x + 6y = 120$, ou, equivalentemente, dividindo os dois membros por 6, obteve $2x + y = 20$, e ainda $y = -2x + 20$ (I).

Para Fernanda, essa é a relação entre a quantidade de livros (x) e de cadernos (y), portanto, a descrição (b) esta feita.

Fernanda atribuiu valores inteiros positivos para x , na relação (I) e obteve valores correspondentes de y . Assim temos:

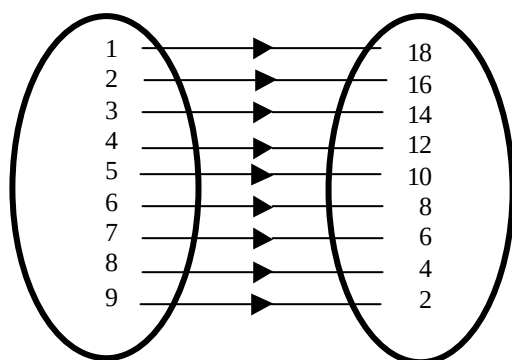
x: quantidade de livros		y: quantidade de cadernos	
1	→	18	
2	→	16	
3	→	14	
4	→	12	
5	→	10	
6	→	8	
7	→	6	
8	→	4	
9	→	2	

fig.2

Olhando para a tabela, Fernanda observou que:

- 1) A tabela continha todos os casos possíveis de x e y .
- 2) Para cada valor atribuído a x , obtinha um único valor para y .
- 3) Para $x = 0$ (não comprar livros) compraria $y = 20$ cadernos ou para $y = 0$ (não comprar cadernos) compraria $x = 10$ livros, mas, dessa forma, não atenderia ao enunciado do problema que pede para comprar livros e cadernos, portanto, não poderia comprar só cadernos ou só livros.
- 4) Valores de x maiores que 10 produzem valores de y negativos, o que não tem sentido para o problema dado.

Quanto ao item (c), representar graficamente a relação, Fernanda inspirou-se na figura 2 e fez a seguinte representação:



(livros) fig. 3 (cadernos)

x : quantidade de livros

y : quantidade de cadernos e

$y = -2x + 20$ é uma equação que relaciona as quantidades x e y

Fernanda mostrou a seu colega Pedro o problema e como chegou à solução, porém Pedro perguntou:

— Por que você não representou a relação no sistema cartesiano?

Fernanda respondeu que não sabia e Pedro resolveu ajudá-la.

— Suponha uma cidade que tenha as suas ruas e avenidas indicadas por números. Assim, o mapa da cidade terá a seguinte planta formada por ruas e avenidas.

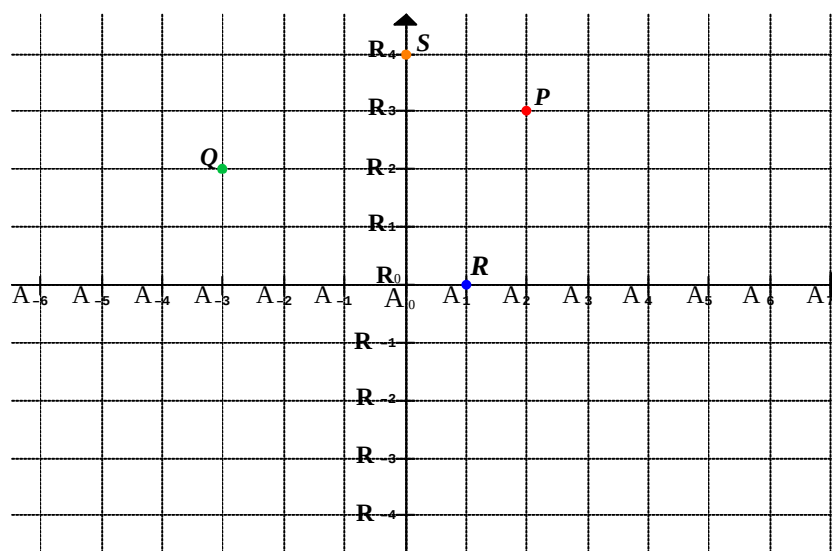


fig. 4

Convencionamos que uma pessoa que esteja na esquina indicada pelo ponto P tem sua posição representada por $P(A_2, R_3)$, isto é, a pessoa está na esquina da Avenida Dois com a Rua Três, e devemos sempre escrever em primeiro lugar Avenida e depois Rua. Isso é uma convenção. Analogamente podemos escrever os pontos:

$Q(A_3, R_2)$, $R(A_1, R_0)$ e $S(A_0, R_4)$

ou simplesmente

$Q(-3, 2)$, $R(1, 0)$ e $S(0, 4)$.

Pedro continuou.

— Agora é só adotar a Rua Zero como eixo x e a Avenida Zero como eixo y e teremos o sistema cartesiano ortogonal.

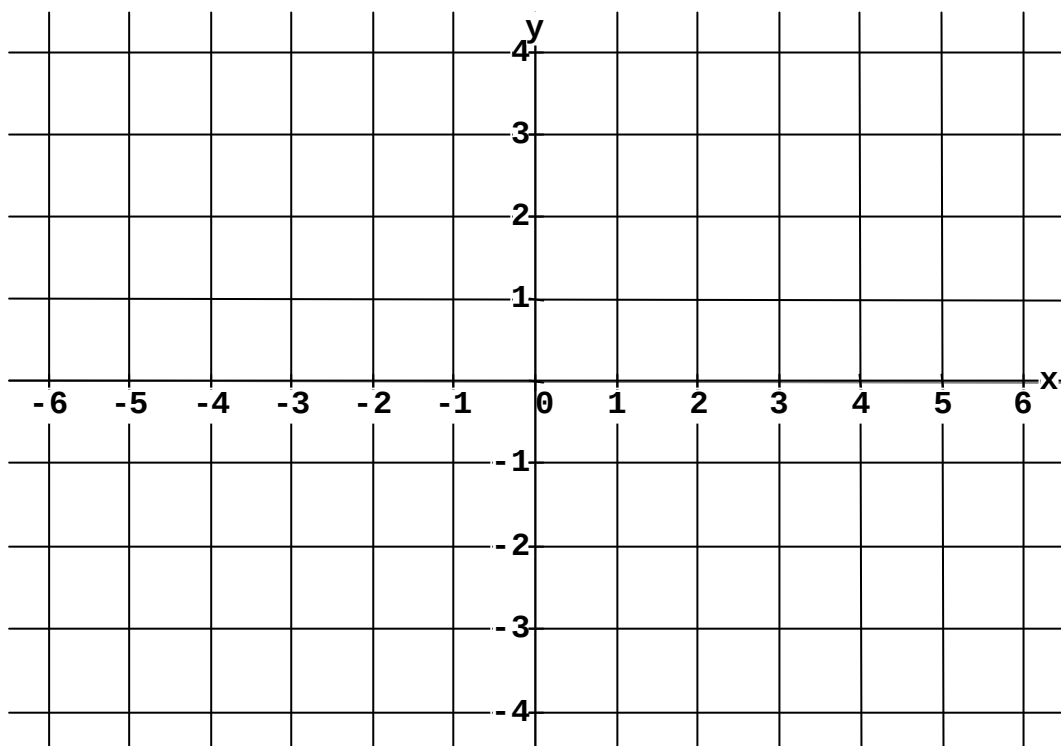


fig. 5

A criação do sistema cartesiano deve-se ao matemático René Descartes, nascido na cidade de Touraine, na França, em 1596, e falecido na Holanda em 1650. O livro que o consagrou intitula-se *La Géométrie* e foi publicado em 1637. Foi nele que Descartes desenvolveu o plano chamado cartesiano, introduzindo as coordenadas na geometria e abrindo aos matemáticos a possibilidade de resolver problemas algébrica e graficamente. É em sua homenagem que o plano de coordenadas retangulares denomina-se plano cartesiano.

Desta forma, podemos representar os pares que são a solução do problema desenvolvido pela Fernanda: $(1, 18)$; $(2, 16)$; $(3, 14)$; ...; $(9, 2)$ no sistema cartesiano.

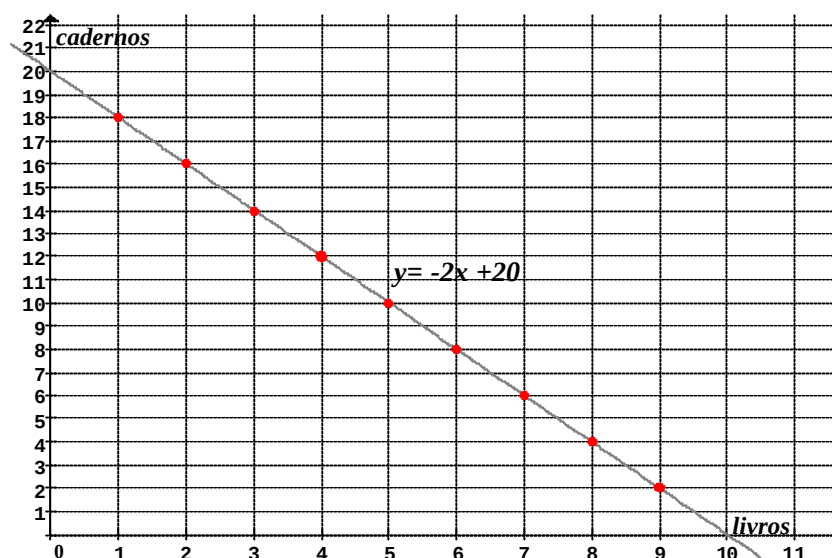


fig.6

Pedro ressalta que neste sistema os pontos solução estão em uma mesma direção, isto é, obedecem à relação $y = -2x + 20$.

Situação-problema 2: Problema da gratificação de fim de ano

Pedro sugere a Fernanda o seguinte problema:

O administrador de finanças da empresa ZIFF deve pagar, como prêmio de gratificação de fim de ano, aos seus gerentes R\$ 1.000,00 e a seus subgerentes R\$ 600,00, tirados de um fundo de R\$ 24.600,00 destinado para isso.

- Quantos gerentes e subgerentes podem compor essa empresa, supondo que existam as duas categorias?
- Descrever a relação entre as quantidades das duas categorias.
- Representar graficamente essa relação.

Como fez no problema anterior, Fernanda considerou:

x : número de gerentes e

y : número de subgerentes.

A relação entre x e y , então, é dada por: $1.000x + 600y = 24.600$.

Simplificando, obtemos:

$5x + 3y = 123$ ou $3y = -5x + 123$ e dividindo por 3, teremos:

$y = -5/3 x + 41$, que é a relação entre as quantidades de gerentes e subgerentes. Dessa forma, está atendida a solicitação de (b).

Como o número de gerentes e o número de subgerentes são números inteiros positivos, devemos atribuir valores inteiros a x que levem a valores inteiros de y . Assim, temos a tabela em que x é o valor de entrada e y o valor resultante ou de saída.

x	Gerentes	3	6	9	12	15	18	21	24
y	Subgerentes	36	31	26	21	16	11	6	1

O número de gerentes pertence ao conjunto $\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$ e o de subgerentes pertence ao conjunto $\{1,6,11,16,21,26,31,36\}$. Portanto, o item (a) está atendido.

Representação gráfica (item c).

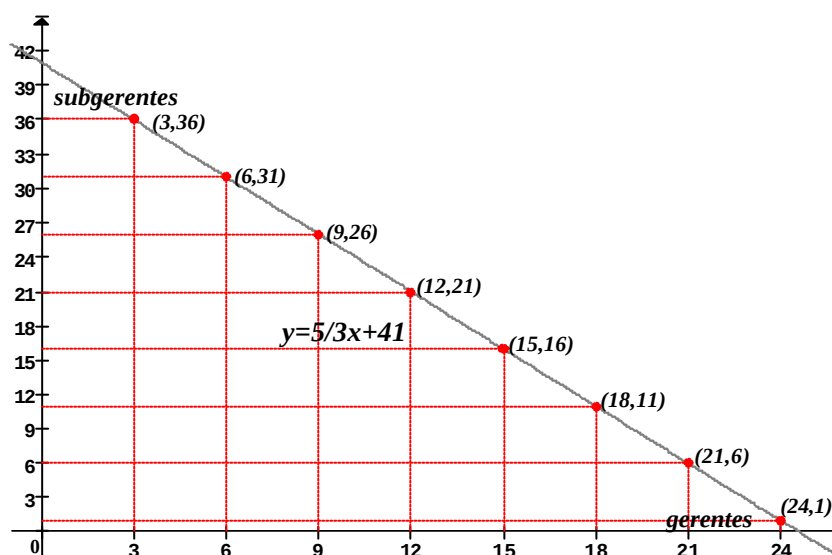


Fig. 7

A solução do problema é formada pelos pares $(3,36)$; $(6,31)$; ...; $(24,1)$ e dizemos que a solução é um conjunto discreto e que não existe a possibilidade de $x=10$ (gerentes), o que acarretaria $y = 73/3$ de subgerentes, ou seja, vinte e quatro e um terço de subgerentes.

Situação-problema 3: Problema da incidência de tuberculose

Fernanda leu no jornal *Correio de Botucatu* sobre a pesquisa da incidência de tuberculose no município, que apresentava o seguinte gráfico de ocorrência dos casos no ano de 2001.

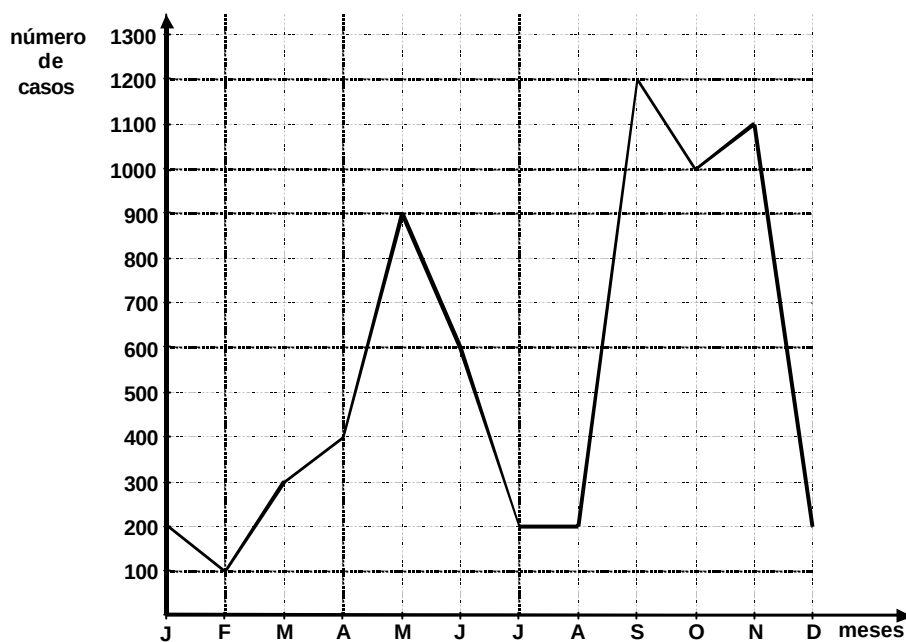


fig. 8

Após analisar o desenvolvimento da doença, ela pediu a Pedro que completasse as afirmações:

- a) A relação é crescente entre os meses de...
- b) O menor número de casos foi registrado no mês de ...
- c) O maior número de casos foi registrado no mês de ...
- d) O número de casos ocorridos até julho foi de ...
- e) A maior diferença de casos ocorreu do mês de ... para o de...

Pedro observou o gráfico e deu as seguintes respostas:

- a) Houve aumento no número de casos de tuberculose entre os meses de fevereiro a maio, de agosto a setembro e de outubro a novembro.
- b) O menor número de casos foi registrado no mês fevereiro.
- c) O maior número de casos foi registrado no mês de setembro.
- d) O número de casos ocorridos até julho foi de 2.700.
- e) A maior diferença de casos ocorreu do mês de agosto para o de setembro.

Situação-problema 4: Problema da inflação em relação ao desemprego

Pedro diz a Fernanda que alguns economistas relacionam o percentual de desemprego ao percentual de inflação e ele observou que, para um determinado país, a relação é dada por $i = 30/d$, onde i é percentagem de inflação desse país e d é a percentagem de desempregados da população economicamente ativa no ano de 2001. Pedro pede para Fernanda:

- Esboçar o gráfico para esta relação.
- O que ocorre se aumenta a percentagem de inflação?
- O que ocorre se aumenta a percentagem de desempregados?
- Se a percentagem de desempregados é 6% da população economicamente ativa de 6 milhões, então quantos estão desempregados e qual a inflação neste instante?

a) Para esboçar o gráfico, Fernanda diz que fará o eixo x coincidir com o eixo d (desemprego) e eixo i (inflação) com eixo y. Tomará alguns valores positivos sobre o eixo d , pois não existe desemprego negativo. Assim, tem-se a tabela e o gráfico abaixo obtidos pela relação $i = \frac{30}{d}$, onde o referente da quantidade 30 é uma relação multiplicativa entre a percentagem de inflação e a percentagem de desempregados.

d	1	2	3	4	5	6
i	30	15	10	7.5	6	5

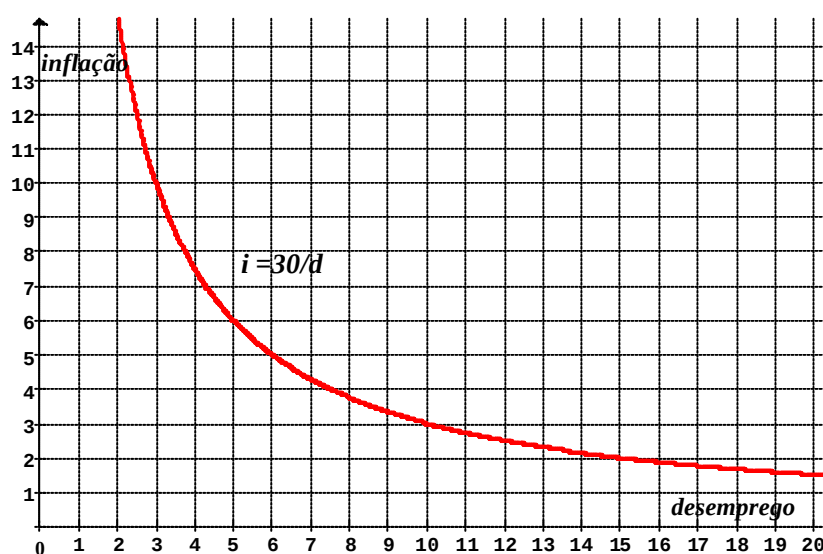


fig. 9

Diz Fernanda que, do gráfico, podemos concluir:

b) Se aumenta a percentagem de inflação, então diminui a percentagem de desemprego.

c) Se aumenta a percentagem de desempregados, então diminui a percentagem de inflação.

d) Se $d = 6$, então $i = 30/6 = 5$; logo temos a percentagem de inflação igual a 5% e 6% de 6.000.000 de desempregados, que é igual a $\frac{6}{100} \times 6.000.000 = 360.000$ desempregados. Assim, no instante em que ocorrem 6% de desempregados ou 360.000 desempregados, tem-se 5% de inflação.

Depois de resolver, Fernanda diz: “ Pedro, essa lei é desumana e absurda”.

Após as discussões feitas pelos grupos e apresentadas por Pedro e Fernanda, o professor, na plenária, finalizou chamando a atenção para a matemática envolvida, formalizando as definições apropriadas.

2. Variáveis dependentes e independentes

No problema da livraria, a quantidade de cadernos dependia da quantidade de livros, e a lei era dada pela equação: $y = -2x + 20$. Para os valores de x assumidos no conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, os valores de y dependiam deles e da lei, isto é, enquanto x variava no conjunto dos inteiros de 1 a 9, y variava no conjunto dos números pares de 2 a 8.

No problema da gratificação, em que a quantidade y de subgerentes dependia do número x de gerentes a lei era dada por $y = -\frac{5}{3}x + 41$. Assim, enquanto x varia no conjunto $\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$, y varia no conjunto $\{1,6,11,16,21,26,31,36\}$.

Chamaremos de variável independente os valores x de números reais e variável dependente os valores y de números reais.

Observemos que quase todas as relações que veremos neste curso dizem que a um dado valor da variável independente x corresponde exatamente um único valor da variável dependente y .

3. Domínio e Contradomínio

Chamaremos de domínio o conjunto A de todos os valores da variável independente e de contradomínio o conjunto B cujos elementos são os possíveis resultados da aplicação da lei a elementos do domínio.

4. Definição de função

Dizemos que uma relação f de A em B é uma função de A em B se, e somente se, cada elemento do conjunto A se relaciona com um único elemento do conjunto B .

Usaremos as notações:

- $f : A \rightarrow B$
 $x \mapsto f(x)$
- domínio da função f é denotado por $D(f)$
- contradomínio da função f é denotado por $CD(f)$
- imagem da função f é denotada por $Im(f)$ e a definimos como o conjunto formado pelos resultados da aplicação da lei a elementos do domínio, isto é, são os elementos de $CD(f)$ tais que satisfazem à lei dada.

Escreveremos, a seguir, o domínio e o conjunto imagem dos problemas já vistos:

Problema da livraria

$$f : \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \rightarrow \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}, \text{ onde } f(x) = -2x + 20$$

Problema da gratificação

$$f : \{3,6,9,12,15,18,21,24\} \rightarrow \{1,6,11,16,21,26,31,36\}, \text{ onde } f(x) = -\frac{5}{3}x + 41$$

Problema da incidência de tuberculose

$$D(f) = \{\text{meses do ano de 2001}\}$$

$$Im(f) = \{100,200,300,400,500,600,900,1000,1100,1200\}$$

A lei é dada pelo gráfico da fig. 8.

Problema da inflação em relação ao desemprego

$i: \quad *_{+} \rightarrow \quad *_{+}$, ou ainda

$$d \mapsto 30/d$$

$i: (\text{números reais estritamente positivos}) \rightarrow (\text{números reais estritamente positivos})$ sendo

$$i = 30/d$$

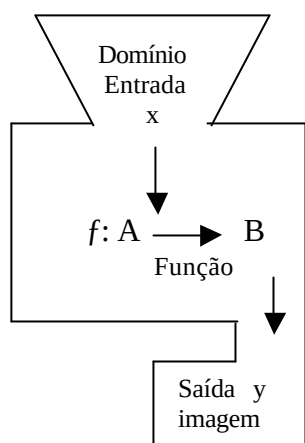
$$D(f) = \{ d \text{ reais tais que } d > 0 \}$$

$$\text{Im}(f) = \{ i \text{ reais tais que } i > 0 \}$$

Observação 1 - Nos três primeiros problemas, os domínios e os conjuntos imagem são conjuntos discretos.

Observação 2 - No problema 4, da inflação, o domínio e o conjunto imagem são conjuntos contínuos, isto é, o domínio assume todos os valores reais maiores que zero.

Observação 3 - Às vezes, é útil pensar numa função f de A em B como se fosse uma máquina que “transforma” elementos de A em elementos de B .



Imaginemos uma máquina com uma entrada e uma saída, tal que na entrada ela aceita só x que for elemento de A (Domínio) e na saída fornece y ou $f(x)$, imagem da função $f(x)$.

fig. 10

Observação 4 - Dar uma função significa dar os três elementos essenciais para a sua perfeita caracterização:

- 1) O domínio da função: A
- 2) O contradomínio da função: B
- 3) A lei que define: $f(x)$

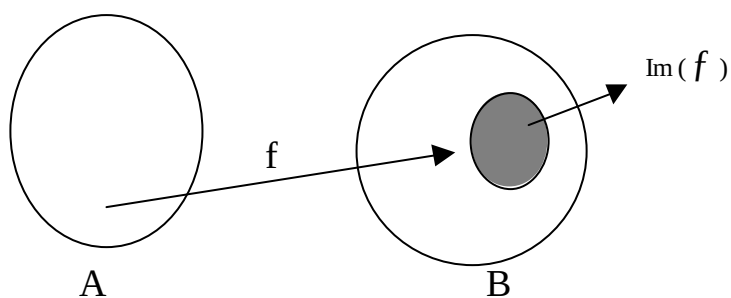


fig.11

- Observação 5 -** Uma função de uma variável real a valores reais é uma $f : A \rightarrow B$, onde A e B são subconjuntos dos números reais.
- Observação 6 -** Por simplificação, deixamos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio da função f , falando apenas da lei $y = f(x)$. Neste caso, fica implícito que o contradomínio é o conjunto dos números reais e o domínio, o "maior" subconjunto dos números reais para que a lei faça sentido.
- Observação 7 -** Algumas funções são comumente usadas na matemática e, por serem utilizadas muitas vezes, quer para operações na própria matemática, quer nas aplicações de fenômenos físicos, químicos ou biológicos, ou na área econômica, são denominadas funções elementares. No estudo de tais funções, necessitamos sempre de informações sobre o domínio, a imagem, as raízes, o gráfico e suas principais propriedades.

Conclusões:

Logo no início da aula, apresentamos, rapidamente, o esquema de aula a ser usado, pois vários alunos não estavam presentes na primeira aula da semana. Pedimos aos alunos que formassem grupos de três e distribuímos para cada grupo a primeira situação-problema.

Durante essa primeira atividade, observamos que:

- Em vários grupos os alunos não discutiam a situação-problema, mas tentavam resolver sozinhos.
- Não conseguiam responder ao item (b), pois não entendiam o significado de *descrever uma relação*.
- Os grupos que descreveram a relação não conseguiam representá-la graficamente.
- Durante a plenária, todos queriam expor suas soluções, provocando risos de colegas pelas respostas erradas.
- Os grupos tiveram grande dificuldade em resolver corretamente essa situação-problema.

A segunda situação-problema teve mais sucesso, não só pelo fato de o enunciado ser semelhante a da primeira situação-problema, mas porque os alunos, em seus respectivos grupos, já se conheciam e aumentando o diálogo, deixavam de ser individualistas. Durante a plenária, observamos que os alunos não mais se aventuravam em falar sem ter certeza da solução obtida.

Nessa segunda situação-problema, mesmo envolvendo uma relação com coeficiente fracionário e tendo que analisar as respostas, a maioria dos grupos chegou à solução correta.

Com a experiência adquirida nas quatro situações-problema que foram trabalhadas pelos grupos nessa fase, e conhecendo a metodologia de trabalho, os grupos tiveram mais sucesso nas duas últimas. Nelas, podemos dizer que a totalidade dos grupos demonstrou interesse em resolver os problemas, não ocorrendo indisciplina na sala de aula, como se observava nas aulas expositivas dialogadas dos anos anteriores.

Após as discussões da plenária, foram apresentados os conceitos de função e termos relacionados.

Observamos nessa primeira semana de aula, que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas, contribuiu para a formação do futuro Administrador Profissional não só na construção do seu conhecimento matemático, mas propiciando o desenvolvimento das habilidades: saber trabalhar em equipe, comunicar-se bem por escrito e verbalmente, tomar decisões e planejar. Quanto às atitudes, o Administrador Profissional deve: ser ético, motivar e ter comprometimento com os elementos da equipe, ter entusiasmo, desejar estudar para estar atualizado e respeitar as opiniões e os resultados dos trabalhos dos colegas.

Terceira semana

5. Funções Elementares

Com o conceito de função desenvolvido, foram apresentas três situações-problema com o objetivo de se obter os conceitos da função constante e da função afim.

5.1 Função constante

Situação-problema 1: Problema do número de funcionários

A empresa de Fernanda não contratou nem demitiu nenhum funcionário em 2001 e nenhum deles se aposentou ou faleceu. Fernanda pede a Pedro para definir a função que envolve o número de funcionários ao longo do ano de 2001, em função do tempo. Sabe-se que a empresa possui 100 funcionários.

Pedro resolveu o problema da seguinte maneira:

A variável independente é o tempo, pois o problema se refere ao ano de 2001. Assim, denominamos a variável tempo pela letra t e podemos dizer que o domínio da função são os números reais positivos ao longo do ano de 2001.

Como contradomínio Pedro colocou o número 100, pois, ao longo do ano de 2001, a empresa sempre manteve o mesmo número de funcionários. Assim Pedro esboçou o gráfico.

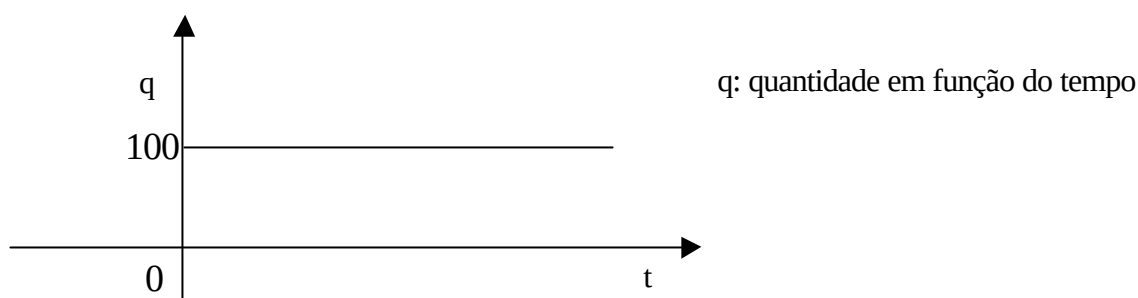


fig.12

e escreveu:

$f: \{1/\text{jan}/2001 \text{ até } 31/\text{dez}/2001\} \rightarrow$, onde $f(t)=100$

Situação-problema 2: Problema da velocidade da terra

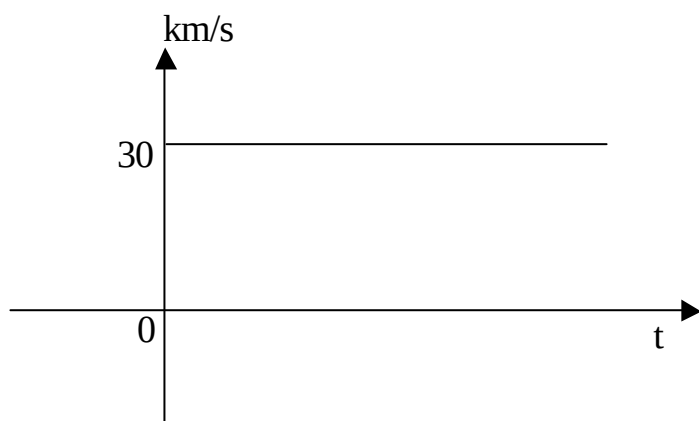
Fernanda diz a Pedro que o planeta Terra caminha no espaço sempre a uma velocidade média de 30 km/s.

—Pedro, como definir uma função para esse modelo?

Pedro diz que é só definir o conjunto A (domínio) de números reais não-negativos.

$$f : A \rightarrow$$

$$t \mapsto 30. \text{ Graficamente se tem:}$$



Das soluções desses problemas pode-se tirar a

Observação 8 - As funções que satisfazem a esses modelos denominam-se funções constantes.

Definição – Função constante

Denomina-se função constante a função

$$f : \rightarrow \\ x \mapsto c (c \in)$$

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto (0,c)

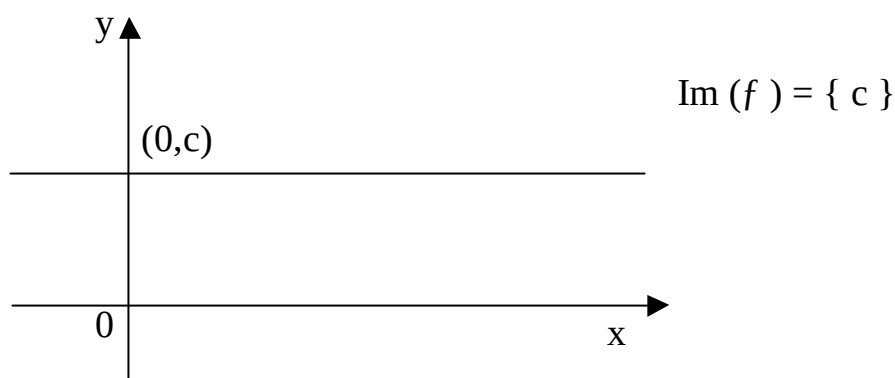


fig.13

5.2 Função afim

Situação-problema 3: Problema da locadora de automóveis

Pedro viajou de ônibus, a serviço de sua empresa, para a cidade de Campinas e, para fazer visitas a seus clientes, alugou um carro de uma locadora de automóveis que estabeleceu o preço de R\$ 80,00 fixos mais R\$2,00 por quilômetro rodado. O odômetro desses carros só registra valores em quilômetros. Pede-se:

- Estabelecer a relação entre o número de quilômetros rodados e o valor a ser pago.
- Enunciar essa relação sob a forma de uma função para os primeiros 100 km.
- Esboçar o gráfico.

Antes de fechar o contrato com a locadora, Pedro construiu a seguinte tabela para alguns valores, para ter noção do gasto que teria.

Quilômetros rodados	0	1	2	3	...	10	...	20	...	100
Valor a ser pago (R\$)	80	82	84	86	...	100	...	120	...	280

- Para atender ao item (a), Pedro chamou de x o número de quilômetros efetivamente rodados e y o valor a ser pago, obtendo a relação:

$$y = 80 + 2x \text{ ou } y = 2x + 80$$

- Se definimos como domínio o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 100\}$ e para contradomínio o conjunto dos números reais, sendo $y = 2x + 80$ a lei, então a função afim estará definida de maneira simbólica por:

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x + 80$$

c) Esboçando o gráfico para os primeiros quilômetros, vem:

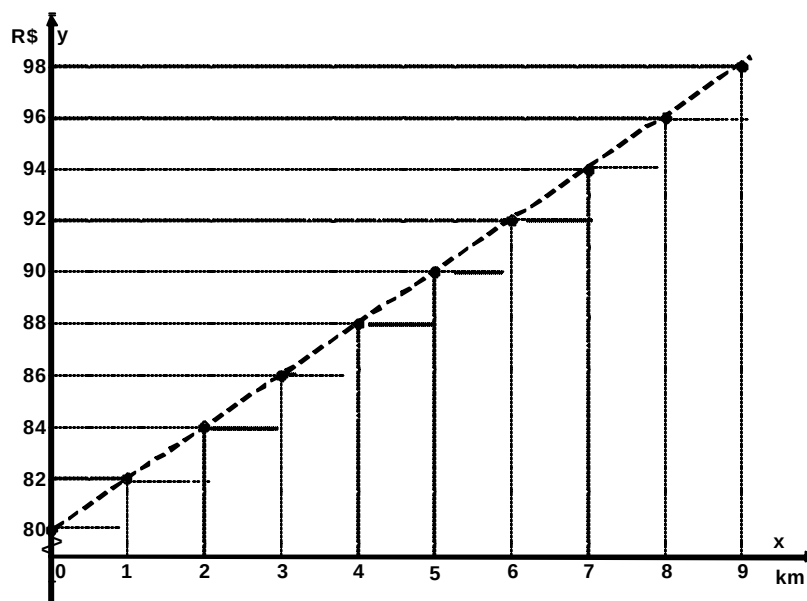


fig.14

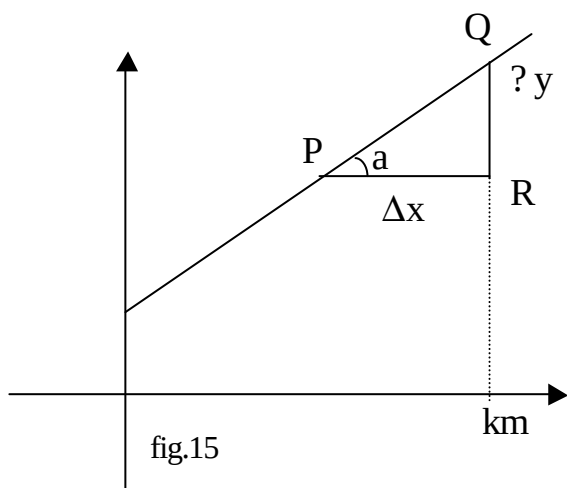
Após a solução dada por Pedro, o professor pôde exibir as seguintes observações e dar a definição de função afim.

Observação 9 - As soluções são pontos que estão sobre a reta $y = 2x + 80$.

Observação 10 - Se o número de quilômetros rodados fosse $x=0$, o preço pago seria R\$ 80,00, que é a parte fixa, isto é, o gráfico inicia com o valor R\$ 80,00. A este valor denominamos coeficiente linear.

Observação 11 - Todos os triângulos que aparecem sob a reta (fig.14) e que apresentam as medidas da base iguais a 1 km têm as alturas iguais a R\$ 2,00. Chamando o valor da base do triângulo de Δx e o da altura Δy e tomando o quociente $\frac{Dy}{Dx}$ obtém-se $\frac{Dy}{Dx} = \frac{R\$2,00}{1\text{ km}}$. Comparando com a lei $y = 2x + 80$, observa-se que o valor numérico $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{R\$2,00}{1\text{ km}}$ coincide com o coeficiente da variável x .

Observação 12 - Da disciplina de trigonometria, vista no Ensino Médio, podemos lembrar que na figura 15 $tga = \frac{Dy}{Dx}$, que no problema dado vale 2. Logo, existe um ângulo a tal que $tga = 2$. Esse valor 2 denomina-se *taxa de variação da função ou coeficiente angular*.



O valor 2 denomina-se *taxa de variação da função ou coeficiente angular* da reta.

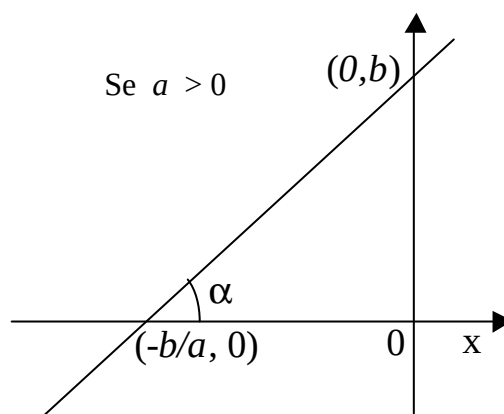
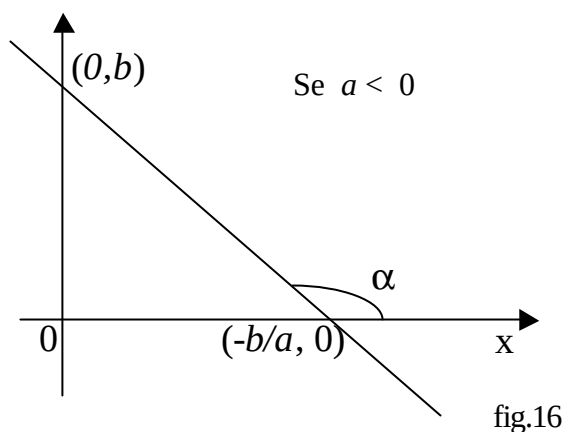
Após essas observações, o professor comenta que sempre que a base dos triângulos forem tomadas com medida de uma unidade a altura terá o valor a do coeficiente de x da reta $y = ax + b$.

Denomina-se *função afim* a função

$$f: \rightarrow$$

$$x \mapsto ax + b, a \neq 0$$

O gráfico da função afim é uma reta de taxa de variação ou coeficiente angular a e coeficiente linear b , a reta passa pelos pontos $(0, b)$ e $(-b/a, 0)$. E $x_0 = -b/a$ é chamado raiz da equação, isto é, o valor de x para o qual y se anula.



$\text{Im}(f) =$

A única raiz da função $f(x) = ax + b$ é $x_0 = -b/a$

Conclusões:

As situações-problema apresentadas foram desenvolvidas pelos grupos uma a uma, sem apresentar grandes dificuldades.

Quarta semana

5.2.1 Aplicações da função afim

Após conhecermos a função afim, propusemos aplicações para a fixação dos conceitos trabalhados. Os alunos, individualmente, buscaram a solução desses problemas. Na plenária, foram discutidas as resoluções apresentadas e relatados os resultados obtidos em consenso. Esses problemas foram formulados de maneira que:

- 1) A função fosse determinada por meio do enunciado do problema.
- 2) A função fosse determinada por meio de dois pontos obtidos do enunciado do problema.
- 3) A função fosse determinada conhecendo-se o coeficiente angular e um ponto.

Problema do supermercado

Uma pessoa vai ao supermercado e gasta R\$ 80,00 em dois produtos, cujos preços são, respectivamente, R\$ 12,00 e R\$ 8,00.

- a) Descrever a função que relaciona a quantidade destes dois produtos.*
- b) Esboçar o gráfico.*
- c) Dizer que ocorre se os produtos entrarem em promoção com desconto de 20%..*
- d) Dar o domínio, o conjunto imagem e esboçar o gráfico da nova função.*

Se x é o número de elementos do produto de valor R\$ 12,00 e y o número de elementos do produto de R\$ 8,00, então $12x + 8y = 80$, dividindo por 4 obtemos $3x + 2y = 20$, e

dividindo por 2, $y = \frac{-3}{2}x + 10$ (I).

$y = \frac{-3}{2}x + 10$ é a lei que rege a compra onde x e y são inteiros e positivos. Para

encontrarmos os pares (x, y) que satisfazem (I) chamamos $x = 2t$. Assim, (I) passa a ser

$y = 10 - 3t$, e atribuindo valores, segue a tabela:

t	1	2	3	4
x	2	4	6	8
y	7	4	1	----

b) Gráfico

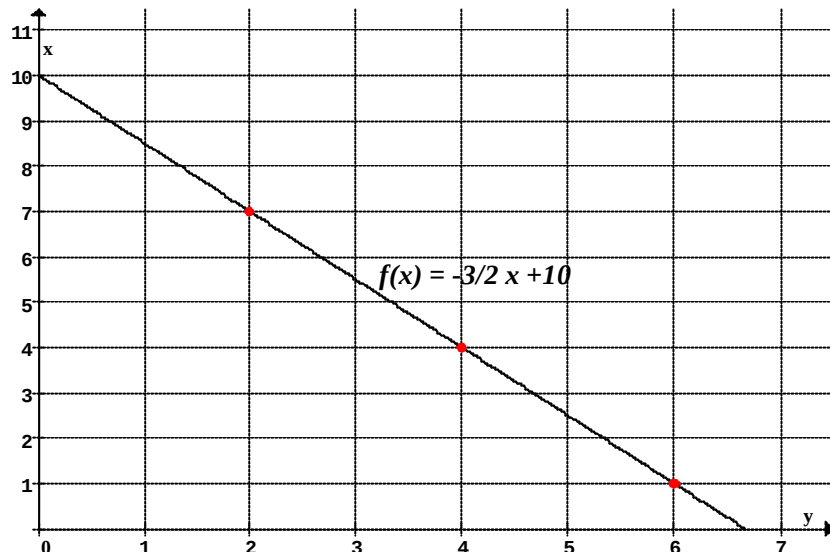


fig. 17

$D(f)=\{2,4,6\}$ e $Im(f)=\{1,4,7\}$, portanto, a função é definida por

$$f : \{2,4,6\} \rightarrow \{1,4,7\}$$

$$x \mapsto \frac{-3}{2}x + 10. \text{ O item (a) está atendido.}$$

Observação 13 - No enunciado, colocamos como obrigatoriedade a compra de dois produtos, por isso temos :

$$D(f) = \{2,4,6\}$$

c) Se o desconto dado em cada produto é de 20%, temos:

O produto de R\$ 12,00 passa para (80% de 12,00) = R\$ 9,60

O produto de R\$ 8,00 passa para (80% de 8,00) = R\$ 6,40 .

A nova relação é dada por $9,6x + 6,4y = 80$. Simplificando a expressão, encontramos:

$$3x + 2y = 25, \text{ portanto } y = -\frac{3x}{2} + \frac{25}{2}. \text{ Os valores inteiros que satisfazem}$$

a função são :

x	1	3	5	7
y	11	8	5	2

d) Assim, observamos uma nova função definida por:

$$f : \{1,3,5,7\} \rightarrow \{2,5,8,11\}$$

$$x \mapsto \frac{-3}{2}x + \frac{25}{2}$$

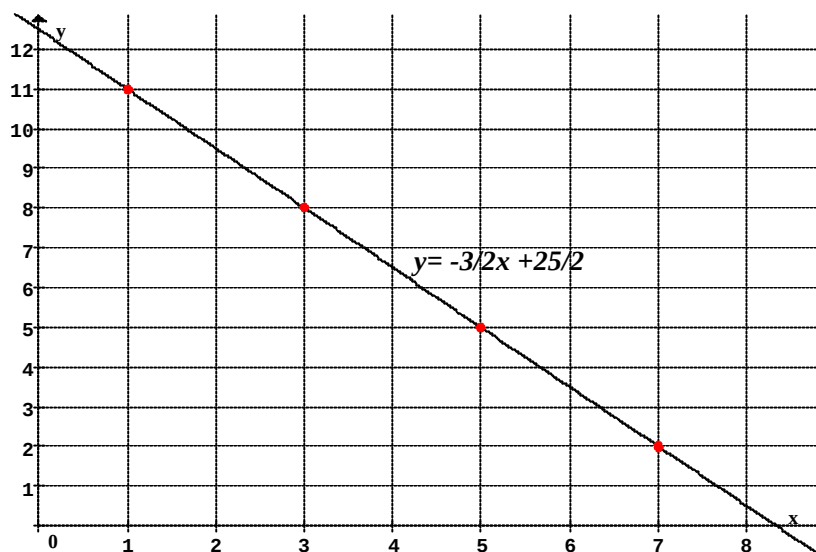


fig. 19

Observação 14 - As taxas de variação nos dois casos são as mesmas, pois os dois produtos diminuiram igualmente de valores (20%).

Problema da política de vendas

Como política de vendas, um fabricante colocou seu produto, no início de janeiro, ao preço p e aumentou-o mensalmente em R\$2,00. Em 1º de novembro o preço passou a ser R\$ 50,00. Determinar:

- O preço inicial em janeiro.
- O preço no mês de agosto.

Resolução:

- Devemos encontrar a equação da reta de taxa de variação $a = 2$, pois o aumento é constante e igual a R\$ 2,00.

Sejam p : preço e x : os meses do ano ($x=0,1,2,3,\dots,12$). Desta maneira, escrevemos $p = ax + b$ e, como $a = 2$, temos $p = 2x + b$. A 10ª alteração de preço ocorre em novembro e passa a ser R\$ 50,00. Assim podemos escrever:

$$50 = 2(10) + b \Rightarrow b = 30, \text{ portanto, a reta é dada pela equação } p = 2x + 30$$

Como janeiro é o mês inicial, escrevemos $x = 0$ e obtemos $p = \text{R\$ } 30,00$.

b) Em 1º de agosto tem-se o 7º aumento do ano. Portanto:

$$p = 2(7) + 30 = 44. \text{ Assim, o preço em agosto é R\$ } 44,00.$$

Problema dos alunos aprovados

O professor de matemática do curso de Administração de Empresas verificou que, nos últimos anos, a média de alunos aprovados apresentou um decréscimo constante. Se em 1990 a percentagem de aprovados foi 80% e em 1994 cai para 60%, estimar a percentagem de aprovados para 1995.

Resolução:

Como a média dos aprovados apresenta decréscimo constante, concluímos que a função é uma reta.

Sejam x : anos e p : percentagem de aprovados.

A equação geral da reta é dada por $p = ax + b$. Como 1990 é o ano inicial da pesquisa, tomamos $x = 0$; $x = 1$ corresponde a 1991, $x = 2$ corresponde a 1992, assim, sucessivamente.

$$\text{Se } x = 0, p = 80 \text{ e } 80 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 80\%$$

Se $x = 4, p = 60$ e $60 = a \cdot 4 + 80 \Rightarrow 4a = -20 \therefore a = -20/4 = -5$. Logo, $p = -5x + 80$ é a lei que estima a percentagem de aprovados.

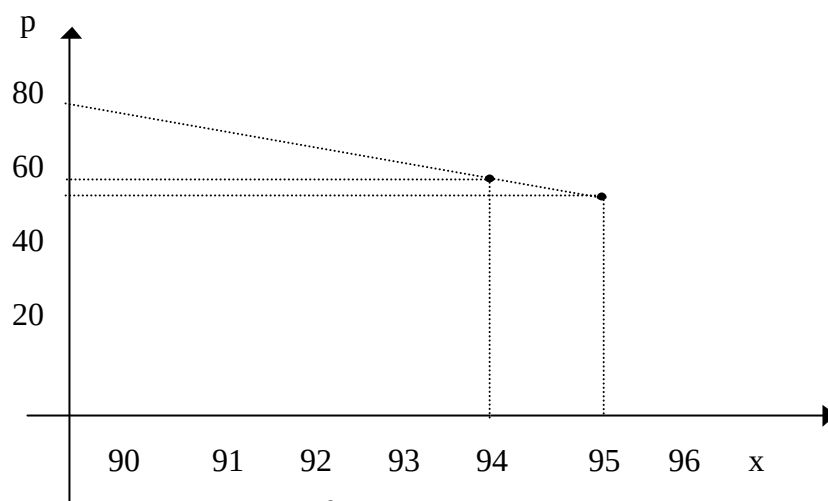


fig. 20

Para o ano de 1995, $x = 5$ e $p = -5(5) + 80 = 55$. Portanto, para 1995, a percentagem de aprovados deve ser 55%.

Situações-problema envolvendo funções afins dadas por leis matemáticas

Uma outra maneira de fixação dos conceitos de função afim é dada por meio de fórmulas.

1) Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = 2x + 1$, determinar o que se pede:

a) Esboçar o gráfico da função no sistema cartesiano.

b) Achar o domínio e o conjunto imagem.

Resolução:

a) Atribuindo valores a x obtemos os valores de y :

x	0	1	2	3	4	5	6	...
$y=2x+1$	1	3	5	7	9	11	13	...

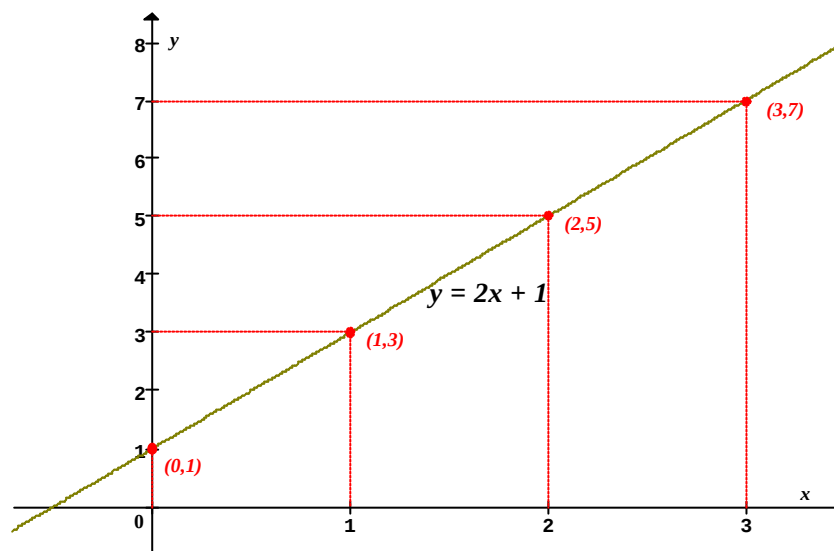


Fig. 21

b) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n+1, \dots\}$, sendo $n \in \mathbb{Z}$

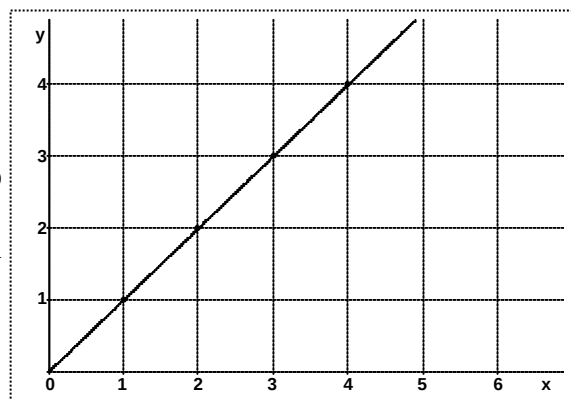
2) Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = x$, determinar o que se pede:

a) Esboçar o gráfico da função no sistema cartesiano.

b) Achar o domínio e o conjunto imagem da função.

Resolução:

a) A lei $f(x)=x$ é uma função afim onde $a=1$ e $b=0$ e, nesse caso, denomina-se função identidade, pois para $x=0$, y também é zero; para $x=1$, y também é 1. Isto ocorre para todos os valores de x reais e a reta é bissetriz do 1º e 3º quadrantes.



b) $D(f) = \mathbb{R}$
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

fig. 22

Observação 15 - A geometria euclidiana nos fornece o axioma: “Dois pontos distintos determinam uma única reta”. Assim, para esboçarmos o gráfico de uma reta no sistema cartesiano, basta conhecermos dois pontos distintos.

Analizamos dois casos

1º Caso:

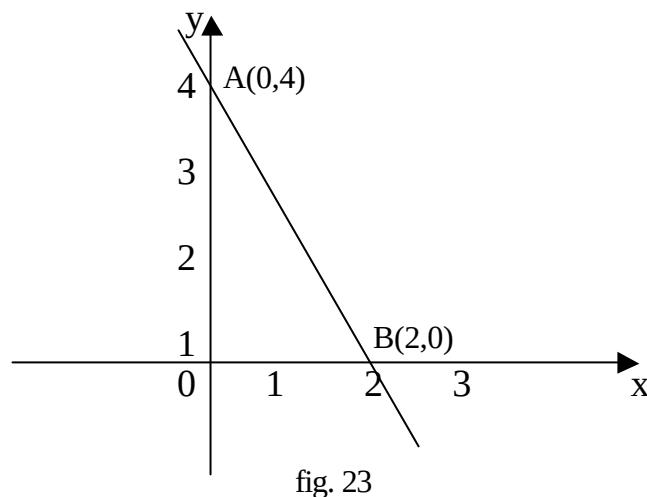
Dada a equação da reta $y = -2x + 4$, esboçar seu gráfico obtido por dois pontos.

Resolução:

Nesse caso, atribuímos dois valores para x e encontramos os valores correspondentes para y pela lei $y = -2x + 4$.

Se $x = 0$, então $y = -2(0) + 4 = 4$. Temos o ponto $A(0, 4)$.

Se $x = 2$, então $y = -2(2) + 4 = 0$. Temos o ponto $B(2, 0)$.



2º caso:

Dados os pontos $A(0, 2)$ e $B(3, 0)$, determinar a equação da reta $y = ax + b$ determinada por A e B.

Resolução:

Este problema é o inverso do anterior. Queremos determinar os valores a e b da reta $y = ax + b$ que passa por A e B.

Em $A(0, 2)$, $x = 0$ e $y = 2$. Substituindo em $y = ax + b$, obtemos $2 = a \cdot 0 + b$.

Então, $b = 2$. Em $B(3, 0)$, $x = 3$ e $y = 0$. Substituindo em $y = ax + b$, obtemos

$0 = 3a + b$. Mas como $b = 2$, segue $0 = 3a + 2$ ou $3a = -2$ ou $a = -\frac{2}{3}$ e a equação da

reta é, então, dada por $y = -\frac{2x}{3} + 2$.

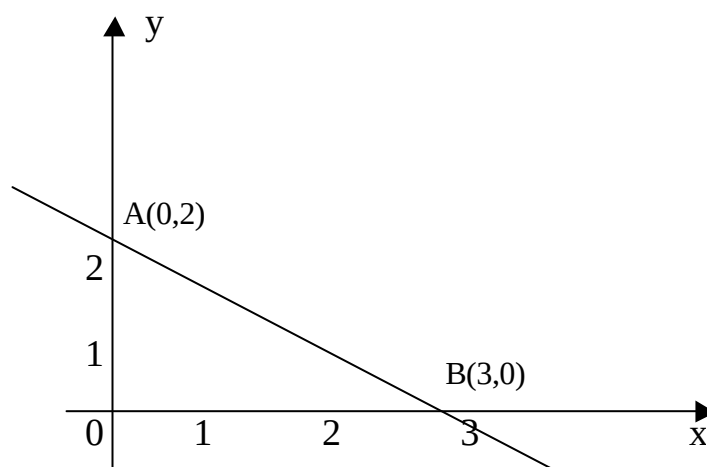
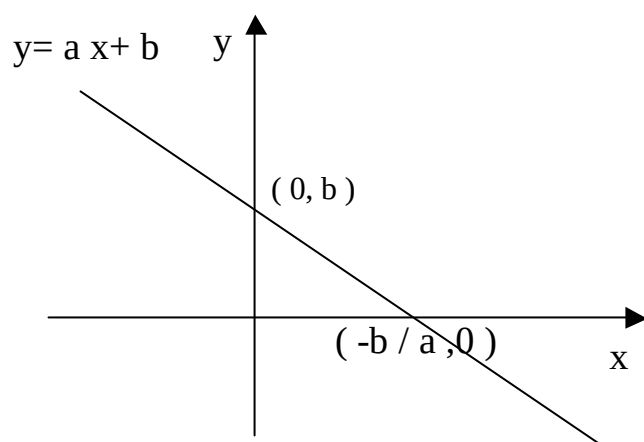


fig. 24

Observação 16 - O valor de b *coeficiente linear*, determina sempre o ponto onde a reta corta o eixo dos y . O valor $(-b / a)$ determina sempre o ponto onde a reta corta o eixo dos x e $(-b / a)$ denomina-se raiz da equação, isto é, o valor para o qual y se anula.

Se $a < 0$



Se $a > 0$

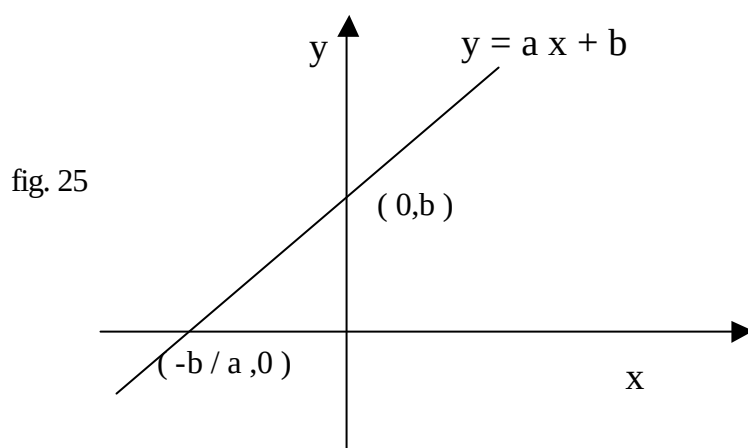


fig. 25

Exercícios Grupo 1 - Tarefa extraclasse

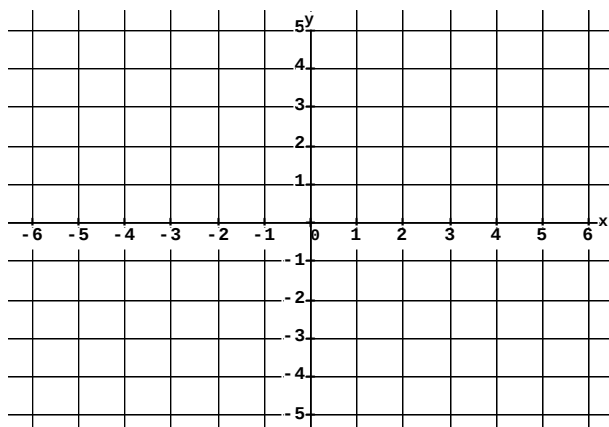
1) Determine o valor dos coeficientes a e b das funções.

$f : \rightarrow$

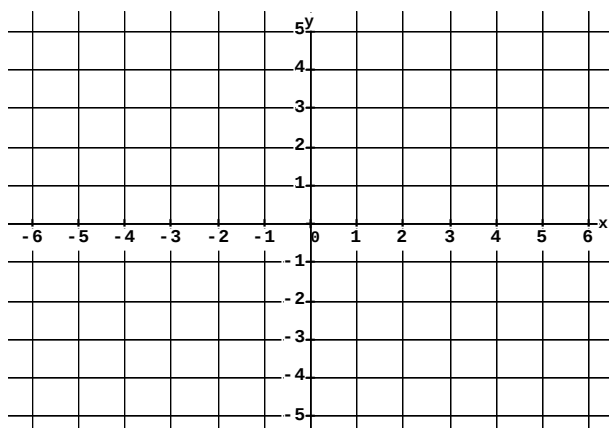
a) $f : \rightarrow , f(x)=3x+9$	b) $f : \rightarrow , f(x)=x+1$
a= b=	a= b=
c) $f : \rightarrow , f(x)=2x+3$	d) $f : \rightarrow , f(x)=-x$
a= b=	a= b=
e) $f : \rightarrow , f(x)=2$	f) $f : \rightarrow , f(x)=0$
a= b=	a= b=

2) Esboçar o gráfico das funções usando o postulado da determinação da reta que passa por dois pontos.

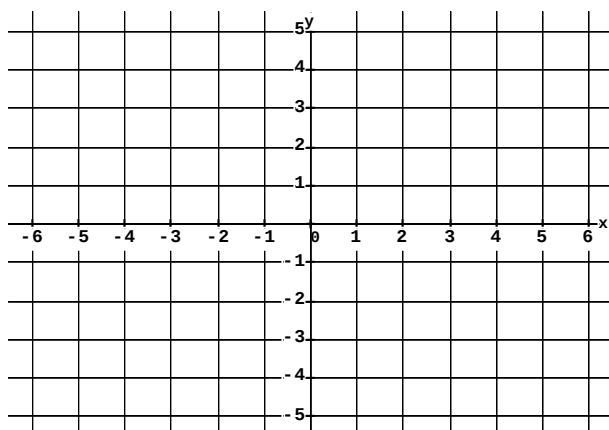
a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 4$



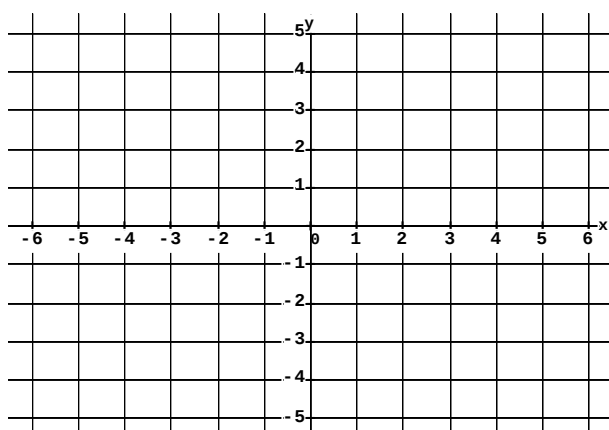
b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$



c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$

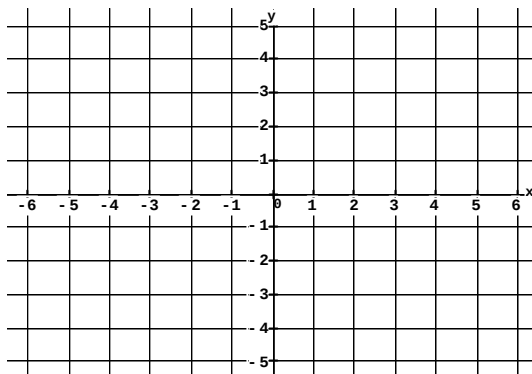


d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = kx + 2$
com $k \in \{-2, 0, 2\}$

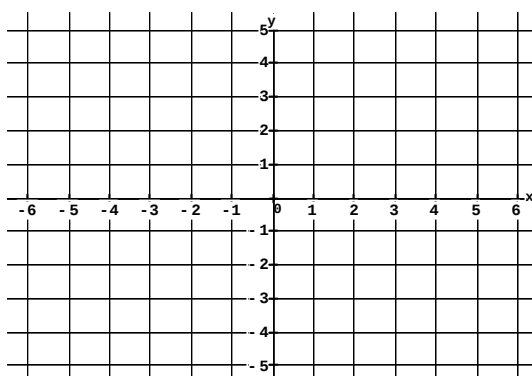


3) Dar a equação da reta que passa pelos pontos dados e fazer a representação no sistema cartesiano.

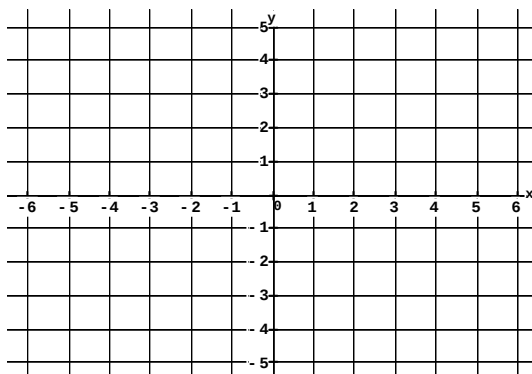
a) $A(0,0)$ e $B(2,2)$



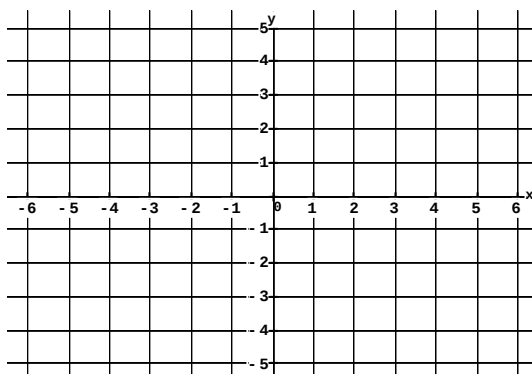
b) $A(0,0)$ e $B(2,3)$



c) $A(0,1)$ e $B(2,5)$

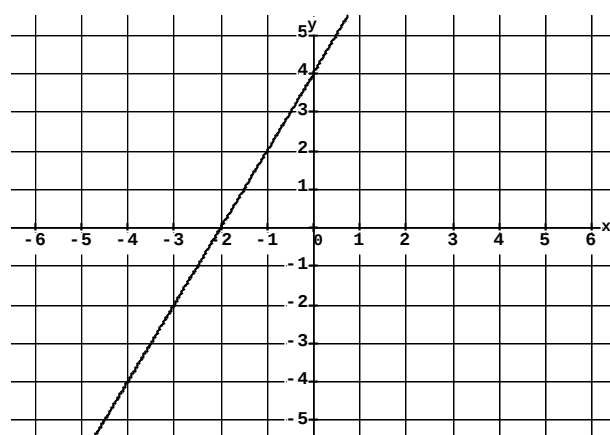


d) $A(0,4)$ e $B(1,2)$

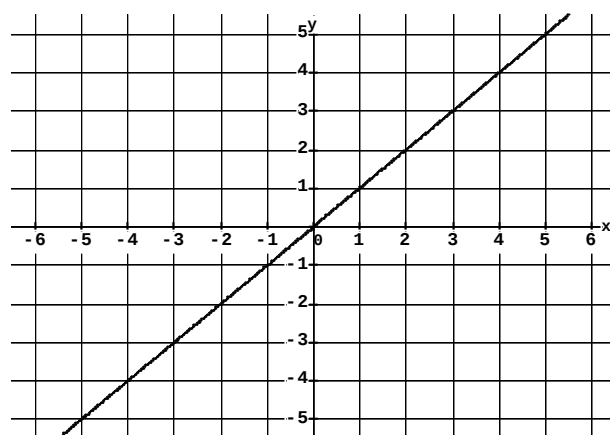


4) Determine, observando os gráficos, as equações das retas representadas no sistema cartesiano.

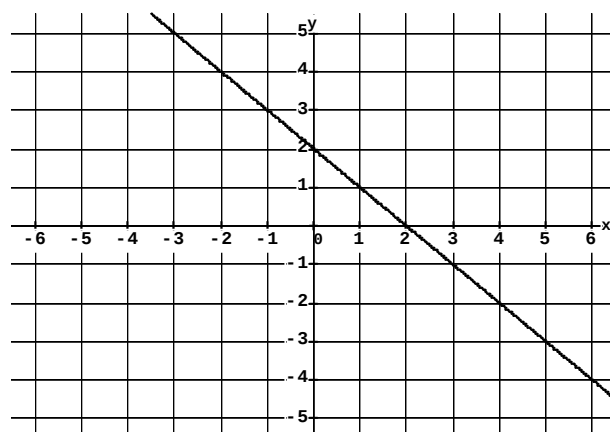
a)



b)



c)



5) Pedro comentou com Fernanda que a casa onde morava foi adquirida por seu pai no ano de 1990, pelo valor de R\$ 80.000,00, e que seu pai revendeu-a no ano de 2000, por R\$ 60.000,00, pois houve uma depreciação linear em consequência da construção de um viaduto em frente à sua casa. Pede-se:

a) A função que satisfaz esse problema. (Suponha 1990 como o ano zero da compra).

b) Esboçar seu gráfico.

6) O dono de um mercadinho dispõe de R\$ 200,00 para a compra de arroz e feijão. Sabendo-se que o quilograma de arroz e de feijão custa R\$ 0,40 e R\$2,00, respectivamente, pede-se:

- a) A relação entre x e y , sendo x a quantidade de kg de arroz e y a de feijão.
 - b) O gráfico desta relação.
 - c) As quantidades máximas desses produtos que podem ser adquiridas.
 - d) Determinar quantos kg de feijão serão comprados, quando da compra de 200 kg de arroz.
 - e) Escrever essa relação na forma de função.
- 7) O proprietário da loja ZIFF aplicou R\$ 10.000,00 na compra de colchões de casal e de solteiro, para aumentar seu estoque. Sabe-se que cada colchão de casal custa R\$ 800,00 e de solteiro, R\$ 400,00. Pede-se:
- a) Escrever a relação entre o número de colchões de casal (x) e de solteiro (y).
 - b) Verificar a possibilidade de utilizar todo o dinheiro na compra de um só modelo.
 - c) Definir a função que rege a compra dos dois modelos.
- 8) Marcelo aluga, na agência A, um carro da marca MWM, por R\$ 60,00 fixos, mais R\$ 3,00 por quilômetro rodado. Alexandre aluga, na agência B, um carro da mesma marca por R\$ 100,00 fixos, mais R\$ 2,00 por quilômetro rodado. Pede-se:
- a) Definir as leis que regem o aluguel dos carros das duas agências para os primeiros 200 km.
 - b) A quilometragem quando os gastos forem iguais.
 - c) Determinar qual dos dois pagou mais caro e qual foi esse valor se ambos utilizaram o carro por 100 km.
- 9) A temperatura medida em graus Fahrenheit é uma função afim da temperatura medida em graus Celsius. Quando se tem 0° Celsius, tem-se 32° Fahrenheit e 100° Celsius corresponde a 212° Fahrenheit. Determinar:
- a) A relação entre as duas temperaturas.
 - b) Qual o valor em graus Fahrenheit se a temperatura de uma cidade é de 40° Celsius?
 - c) Qual a temperatura em graus Celsius se a temperatura de uma cidade é de 50° Fahrenheit?

Conclusões:

Com os conceitos conhecidos das funções constante e afim, os grupos receberam enunciados de problemas aplicativos, onde as situações-problema eram dadas por leis. Esses foram resolvidos em aula expositiva dialogada e, também, foram apresentados os exercícios grupo 1, deixados como tarefa extra.

Com o final dessas quatro semanas de aula, observamos que os objetivos propostos para estas aulas foram atingidos. Quanto à metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas, esta ficou melhor entendida pelos alunos, pois estes seguiram várias vezes o roteiro de aula.

Quinta semana

Foram reservados instantes iniciais da aula para esclarecer dúvidas da tarefa extraclasse exercícios grupo 1.

5.3 - Função quadrática ou função trinômio do 2º grau

Foram apresentados, a seguir, dois problemas da área de Administração de Empresas, em que, ao longo de sua resolução e de maneira natural, surge a expressão algébrica do trinômio do segundo grau.

Situação-problema 1: Problema da produção de óculos

Fernanda, ao visitar a fábrica Design Oculus, verificou que a indústria produz óculos de sol pelo preço de custo de R\$ 20,00 cada. Calcula-se que, se cada óculos for vendido por p reais, os consumidores comprarão $(120 - p)$ unidades. Fernanda pede a Pedro para:

- a) Expressar o lucro da indústria em função do preço de venda.*
- b) Esboçar o gráfico.*
- c) Calcular o preço de venda para se obter o lucro máximo.*

Os grupos recebem a primeira situação-problema e trabalham sobre ela. O professor observa e faz intervenções. Na plenária, Fernanda e Pedro, com a ajuda do professor, discutem a resolução desse problema.

Eis a resolução dada por Pedro:

- a) O lucro na venda de uma unidade de óculos é $p - 20 \geq 0$ reais.

A quantidade de óculos vendidos é $(120 - p)$, logo o lucro $L(p)$ obtém-se pelo produto do lucro em cada óculos pelo número de óculos vendidos, isto é, $L(p) = (120 - p)(p - 20) = -p^2 + 140p - 2400$. O lucro será igual a zero, isto é, $(120 - p)(p - 20) = 0$, quando o preço for $p = R\$120,00$ ou $p = R\$20,00$.

Montando a tabela para alguns valores, temos:

p	20	40	60	70	80	100	120
L(p)	0	160	2400	2500	2400	1600	0

Usando a notação de função Pedro, escreveu a função lucro

$$L(p) : [20, 120] \rightarrow$$

$$p \mapsto -p^2 + 140p - 2400$$

b) Gráfico.

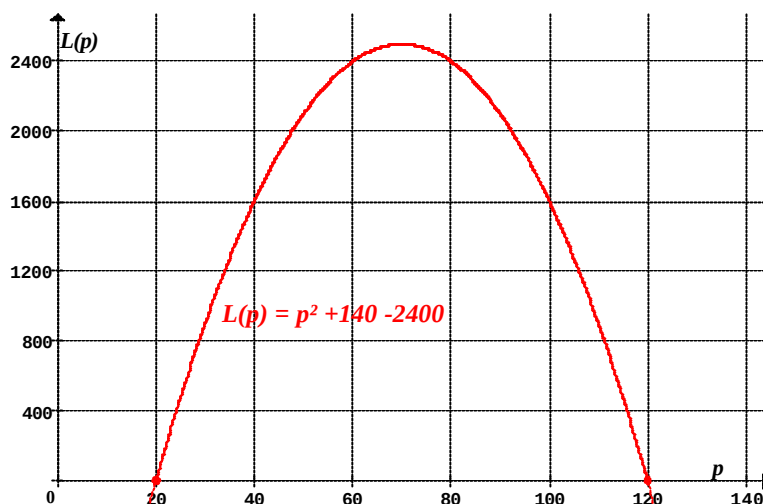


fig. 26

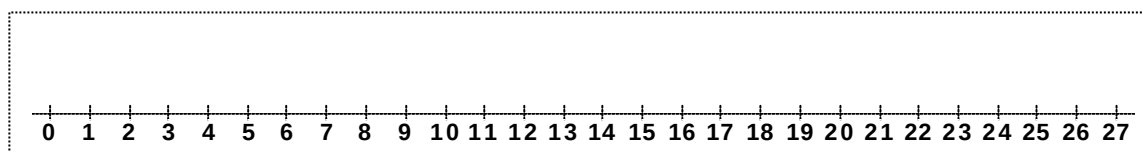
c) O gráfico tem a forma denominada parábola e para o preço $p=70$ tem-se o valor do lucro máximo que é $L_{\text{máx}} = \text{R\$ } 2500,00$.

A seguir, outra situação-problema foi colocada.

Situação-problema 2: Problema do desafio da fita

Pedro apresentou a Fernanda o seguinte desafio:

Sobre uma fita de 27 cm, foi feita uma escala em centímetros. Em que ponto podemos cortar a fita de modo que o produto das medidas das partes seja 180 cm^2 ?



Após o consenso obtido nas discussões da plenária, Fernanda relata a solução sugerindo chamar as partes da fita de x e y . Assim escreveu as equações:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x \cdot y = 180 \end{cases}$$

Ela diz:

— Para resolver esse sistema escrevemos a primeira equação na forma $y = 27 - x$ e a substituímos na segunda, chegando a $x \cdot (27 - x) = 180$. Efetuando a multiplicação, obtemos $27x - x^2 = 180$ e, ordenando, segue $x^2 - 27x + 180 = 0$. O professor observou que quando da solicitação da determinação das raízes da equação pelos grupos, alguns deles não conseguiram determiná-las. Outros grupos as conseguiram por tentativas e

erros e outros utilizaram a fórmula geral da resolução de uma equação do segundo grau. Para os alunos que não conseguiram obter os valores 12 e 15, o professor sugeriu a fatoração e escreveu a expressão $(x-12)(x-15)=0$. Para determinar o valor de x tal que o produto $(x-12)(x-15)$ seja zero, impomos que cada fator do produto seja zero. Assim

$$\begin{cases} x-12=0 \\ \text{ou} \\ x-15=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x=12 \\ \text{ou} \\ x=15 \end{cases} \quad \text{e o desafio está resolvido, isto é, devemos cortar a fita}$$

na medida $x=12$ cm, sobrando 15 cm ou cortar na medida 15 cm, sobrando 12 cm.

Após a solução apresentada por Fernanda, o professor formalizou os conceitos matemáticos envolvidos nos problemas, tais como: equação do segundo grau, função quadrática e representação gráfica.

A equação $x^2 - 27x + 180 = 0$ denomina-se *equação do segundo grau* e a expressão $y = x^2 - 27x + 180$ denomina-se função trinômio do segundo grau ou função quadrática e seu gráfico denomina-se parábola, como a indicada na figura 27.

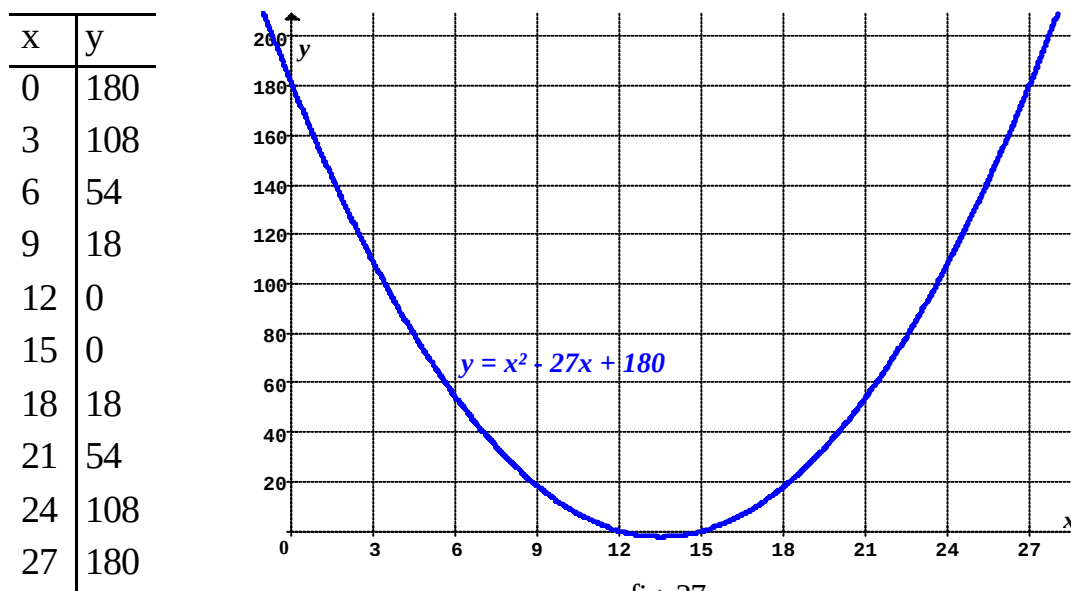


fig. 27

Os valores $x = 12$ e $x = 15$ denominam-se zeros da função ou raízes da função, pois para $x = 12$ ou $x = 15$ a função tem como resultado $y = 0$.

Sexta semana

5.3.1 Definição de função quadrática

Denomina-se função quadrática ou função trinômio do 2º. grau a função $f: \rightarrow$ cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$.

As seguintes relações são funções quadráticas onde x é um número real.

1. $y = x^2 - 4x - 6$	4. $y = x^2 - 3x$
2. $y = x^2 - 1$	5. $y = 2x^2$
3. $y = -x^2 + 1$	6. $y = (x - 1)^2$

Para estudarmos a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é sempre conveniente descobrir os valores em que o gráfico encontra os eixos coordenados.

- a) Para determinarmos o encontro com o eixo das ordenadas y é só substituir na função o x por 0; fazendo isso, sempre encontramos $y = c$, portanto a parábola sempre passa pelo ponto $(0, c)$.

Exemplos:

1. $y = x^2 - 4x - 6$, pondo $x = 0$ obtém-se $y = -6$. Assim, o gráfico da parábola passa por $(0, -6)$.

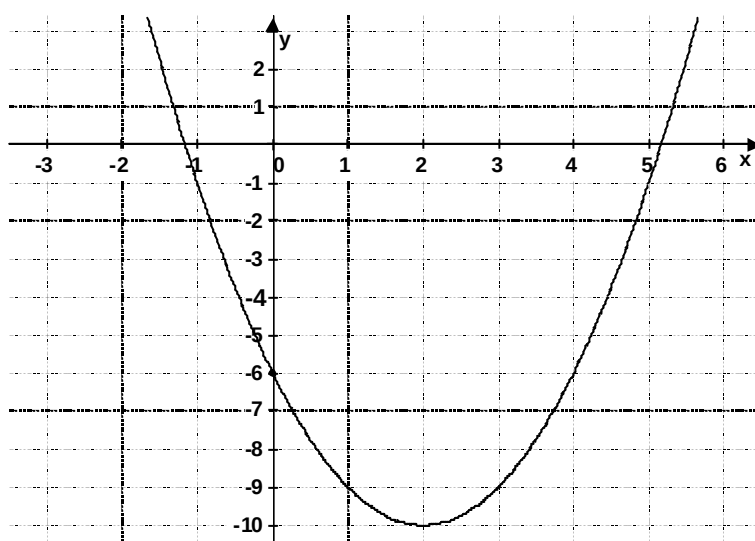


fig. 28

2. $y = x^2 + 1$; para $x = 0$ tem-se $y = 1$ e o gráfico da parábola passa por $(0,1)$.

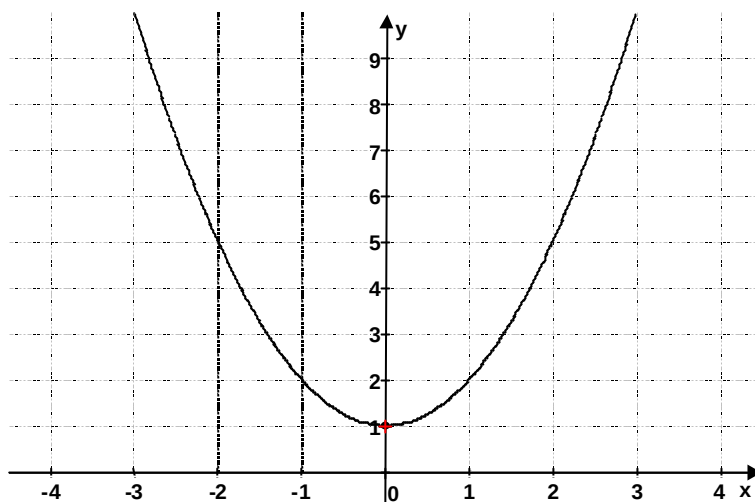


fig. 29

3. $y = x^2 + 2x$; para $x = 0$ tem-se $y = 0$, portanto o gráfico passa por $(0, 0)$.

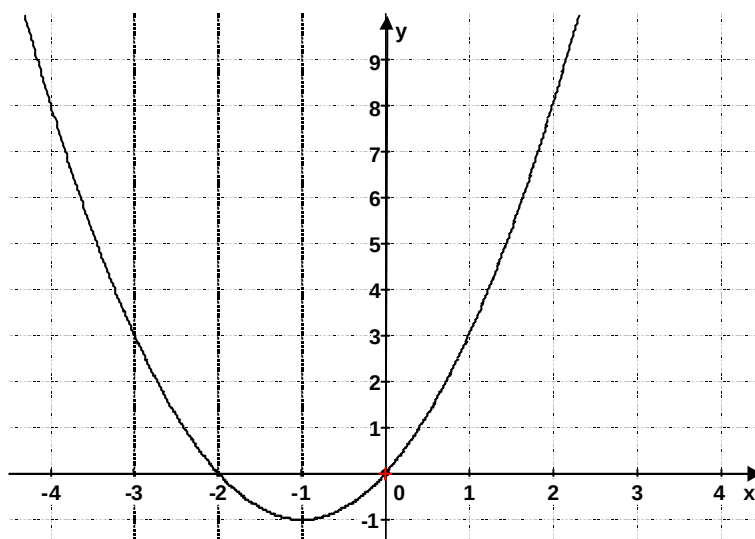


fig. 30

b) Para determinarmos o encontro com o eixo dos x é só substituir, na função, y por 0 e, nesse caso, teremos $ax^2 + bx + c = 0$. Esta equação denomina-se equação do 2º. grau. Para encontrarmos os valores de x para os quais $y = 0$, isto é, as soluções (raízes) da equação, usamos o *método da complementação do quadrado perfeito*, que isola o valor de x . Esse método é atribuído por muitos ao Matemático Indu *Bhāskara* (1114-1191), mas outros historiadores o atribuem ao Matemático inglês *John Pell* (1611-1685).

Sejam a, b , e c números reais quaisquer com $a \neq 0$:

1º caso: Se ax^2+bx+c for um quadrado perfeito, é só fatorá-lo e isolar a variável x .

2º caso: Suponhamos que ax^2+bx+c não seja um quadrado perfeito. Somando $(-c)$ a ambos os membros da equação, obtemos $ax^2+bx=-c$. Multiplicando os dois membros por $4a$, segue $4a^2x^2+4abx=-4ac$ (I).

O primeiro membro de (I) precisa de mais um termo para se tornar um trinômio quadrado perfeito. Este termo deve ser tal que, extraindo sua raiz quadrada e multiplicando-se o resultado pela raiz quadrada de $4a^2x^2$, deve-se obter um número igual à metade do termo $4abx$. O termo procurado é b^2 o qual somamos a ambos os membros de (I)

$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$, onde o primeiro membro é um quadrado perfeito e escrevemos $(2ax+b)^2=b^2-4ac$.

Como todo número real elevado ao quadrado é positivo, devemos impor que o segundo membro seja positivo, isto é $b^2 - 4ac \geq 0$, para que tenhamos solução no conjunto dos números reais.

Nestas condições, extraímos raiz quadrada dos dois membros e obtemos dois valores:

$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$ e $2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$ e isolando x , seguem as soluções:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ onde o número } D = b^2 - 4ac \text{ é}$$

denominado discriminante. A equação do 2º. grau terá duas raízes distintas se o discriminante for positivo e se for igual a zero teremos duas raízes iguais. Se $\Delta < 0$, não haverá solução no conjunto dos números reais. A existência de solução da equação quadrática nos reais é que $\Delta \geq 0$.

Exemplos:

Determinar as raízes das equações usando a Fórmula de Pell ou de Bhāskara.

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Neste caso, teremos $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$ e $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.6 = 1$. Do fato de o discriminante ser 1 (positivo) tem-se duas raízes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 + 1}{2} = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 - 1}{2} = 2. \text{ Portanto 2 e 3 são}$$

as raízes da equação dada.

Vamos verificar se de fato 2 e 3 são soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$\text{Para } x = 2, \text{ segue } (2)^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

$$\text{Para } x = 3, \text{ segue } (3)^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

Portanto 2 e 3 são soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$2) \quad x^2 - 3x = 0$$

Assim: $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$ e $\Delta = 9 - 4(1)(0) = 9$ e obtemos duas soluções:

$$x_1, x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{3 \pm 3}{2} \quad \text{e} \quad x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 3 \quad \text{e} \quad S = \{0, 3\}$$

Observação 17 - Como o valor do termo independente c é 0, podemos encontrar as raízes da equação de maneira mais simples, colocando x em evidência
 $x^2 - 3x = x(x - 3) = 0$. Se o produto é zero, então um dos fatores deverá ser zero.

Assim, $x = 0$ ou $x - 3 = 0$. Logo $S = \{0, 3\}$ é o conjunto das soluções como tínhamos encontrado pela fórmula de Bhaskara.

$$3) \quad x^2 - 4 = 0. \text{ Neste caso } a = 1, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = -4. \text{ Portanto } D = -4(1)(-4) = 16 \quad \text{e}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2} = \pm \frac{4}{2} = \pm 2, \quad S = \{-2, +2\} \text{ é o conjunto das soluções.}$$

Observação 18 - Como a equação é incompleta, pois $b = 0$, podemos obter as raízes de maneira mais simples.

Sendo $x^2 - 4 = 0$ segue $x^2 = 4$. Logo $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Logo o conjunto solução é dado por $S = \{-2, +2\}$, como tínhamos encontrado antes.

$$4) \quad 10x^2 = 4x - 2$$

Colocando a equação na forma usual, segue $10x^2 - 4x + 2 = 0$ e dividindo a equação por 2, tem-se $5x^2 - 2x + 1 = 0$.

$$\text{Nesse caso, } a = 5, \quad b = -2 \quad \text{e} \quad c = 1 \quad \text{e} \quad \Delta = (-2)^2 - 4(5)(1) = 4 - 20 = -16.$$

Vimos que a condição de existência da raiz quadrada de Δ é que o discriminante seja positivo, ou nulo. Logo não existe $\sqrt{-16}$ no conjunto dos números reais, e a equação dada

não possui raízes reais. Neste caso, dizemos que o conjunto das soluções é vazio e indicamos por $S = \emptyset$.

Exercícios de aplicação 1

A seguir, foram propostos pelo professor exercícios para a fixação do algoritmo da determinação das raízes da equação do segundo grau e a construção de gráficos.

Encontrar as raízes das equações:

1) $x^2 - 6x - 7 = 0$	2) $x^2 - 10x - 60 = 0$
3) $5x^2 + 9x + 4 = 0$	4) $-x^2 + 30x - 200 = 0$
5) $x^2 + 2x + 1 = 0$	6) $x^2 - 6x + 10 = 0$
7) $x^2 - 5x = 0$	8) $-x^2 + 20x = 0$
9) $5x^2 + 5x - 30 = 0$	10) $-x^2 + 16 = 0$
11) $4x^2 - 16 = 0$	12) $-2x^2 + 24x - 120 = 0$

5.3.2 Representação gráfica da função quadrática

Para construirmos o gráfico da função quadrática, é necessário encontrarmos os pontos em que a função intercepta os eixos e para isso impomos:

- a) $x = 0$ e obtemos o ponto de encontro $(0, c)$ no eixo dos y .
- b) $y = 0$ e obtemos as raízes $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, se $\Delta \geq 0$.

Exercícios de aplicação 2

Esboçar o gráfico das funções reais:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Para $x = 0$ tem-se $f(0) = 6$ e o gráfico passa pelo ponto A $(0, 6)$.

Para $y = 0$ tem-se $x^2 - 5x + 6 = 0$ e, usando a fórmula de Bhāskara, obtém-se:

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} \text{ ou } x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3. \text{ Portanto o gráfico passa pelos pontos}$$

A(0,6), B(2,0) e C(3,0) e segue o esboço do gráfico pelo fato de sabermos que o gráfico da função quadrática é uma parábola.

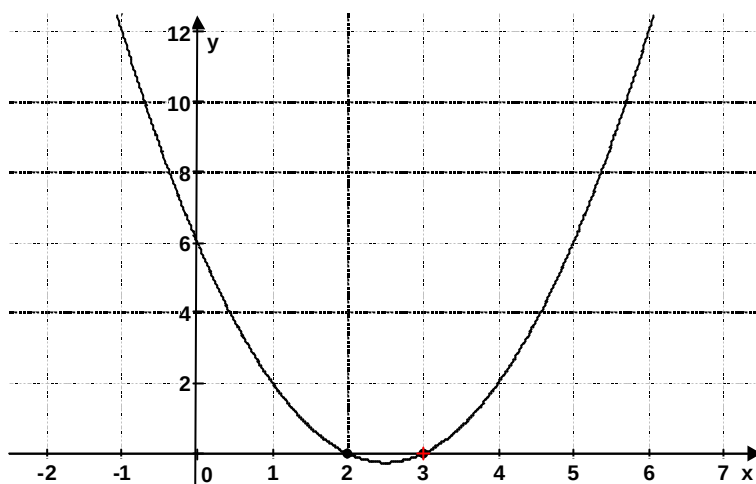


fig. 31

Observação 19 - Se a função quadrática não possuir raízes reais, o gráfico fica difícil de ser construído. Mas do fato de sabermos que o gráfico é uma parábola e tem simetria em relação a um eixo paralelo ao eixo Oy passando pelo seu vértice, determinamos este ponto. O valor x do vértice é o ponto médio das raízes quando estas existirem. Assim podemos escrever a coordenada x do vértice como:

$$x_n = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}.$$

Do exemplo anterior podemos determinar $x_n = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ e, substituindo na função

$$\text{obtemos } y_n = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Portanto, } \mathbf{V} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$2) \quad f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Para $x = 0$ tem-se $f(0) = -3$, portanto o gráfico passa por $A(0, -3)$.

Para $y = 0$, $-x^2 + 4x - 3 = 0$ e usando a fórmula de Bhaskara, segue $x^2 - 4x + 3 = 0$,

onde $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ e $\Delta = 16 - 12 = 4$. Assim $x = \frac{4 \pm 2}{2}$. Portanto a parábola passa por $A(0, -3)$, $B(1, 0)$ e $C(3, 0)$, que são os interceptos.

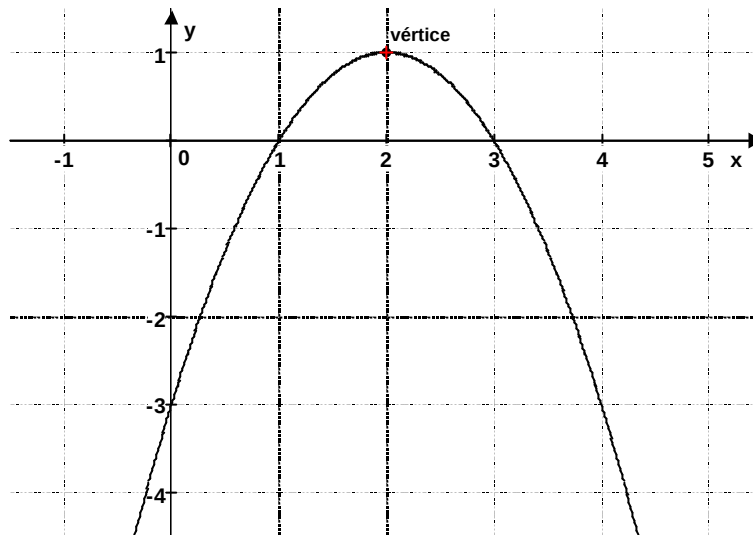


fig. 32

Determinando o vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$y_v = -(2)^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$. Portanto o vértice é dado por $V = (2, 1)$

$$3) \quad f(x) = -x^2 - 4x - 5$$

Para $x = 0$ tem-se $f(0) = -5$, portanto o gráfico passa pelo ponto $A(0, -5)$.

Para $y = 0$, $-x^2 - 4x - 5 = 0$ ou $x^2 + 4x + 5 = 0$, porém o discriminante $\Delta = 16 - 20 = -4$ e o gráfico não intercepta o eixo dos x pois não existem raízes reais. Para esboçar o gráfico,

determinamos o vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{-2} = -2$ e $y_v = -(-2)^2 - 4(-2) - 5 = -1$.

Portanto o vértice é dado por $V = (-2, -1)$.

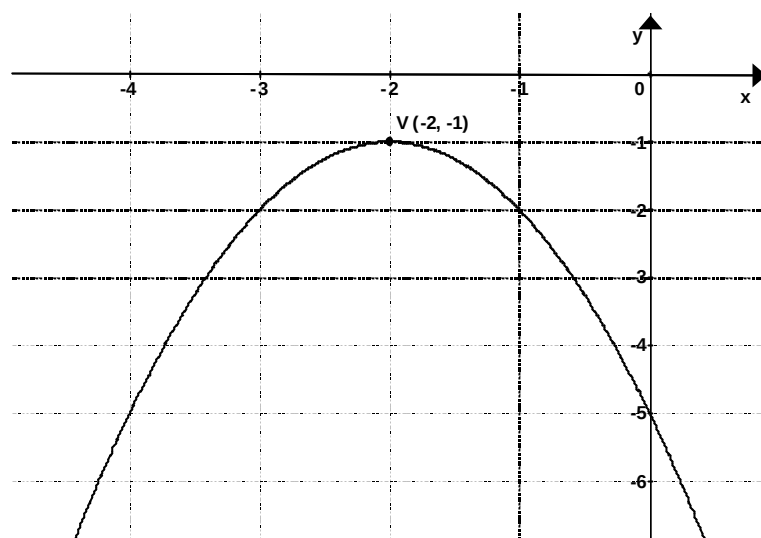


fig. 33

Estudando a concavidade da parábola

Observemos os gráficos das funções quadráticas abaixo.

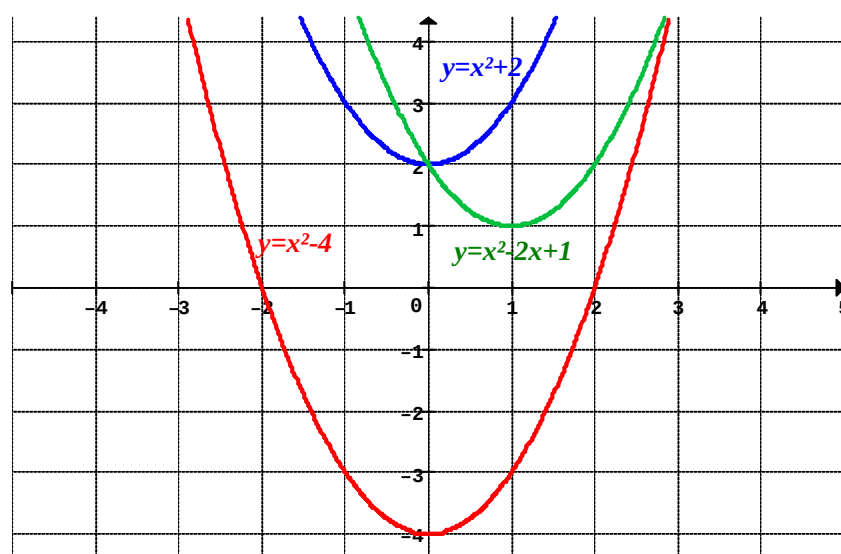


fig. 34

Dos gráficos acima e das observações feitas no Ensino Médio sobre o trinômio do segundo grau, podemos observar, que em todos esses gráficos, $a > 0$, as parábolas têm concavidade voltada para cima e o vértice é um ponto de mínima.

Observemos, a seguir, os gráficos das funções quadráticas.

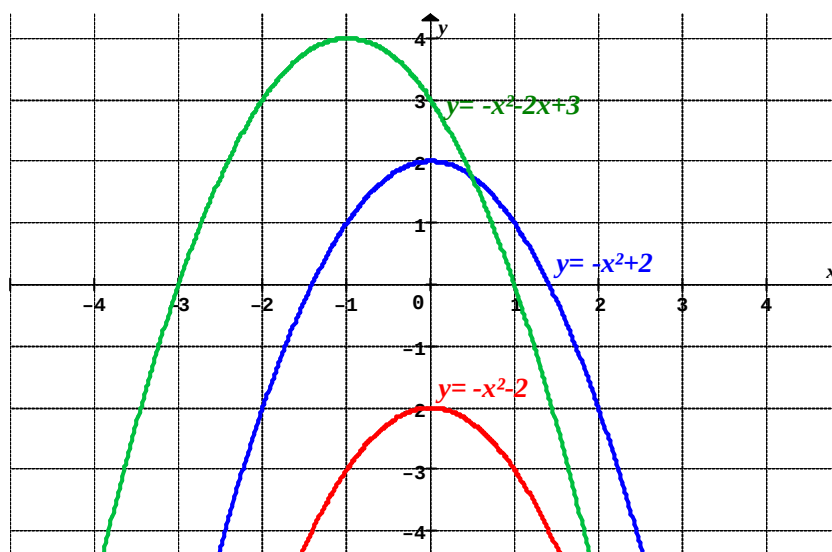


fig. 35

Dos gráficos acima e das observações feitas no Ensino Médio sobre o trinômio do segundo grau, podemos observar que em todos esses gráficos notamos que $a < 0$, as parábolas têm concavidade voltada para baixo e o vértice, como ponto de máxima.

Conclusão:

- Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.
- Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.
- Se $a > 0$, a parábola tem o vértice como ponto de mínimo da função.
- Se $a < 0$, a parábola tem o vértice como ponto de máximo da função.

Conclusões:

Na primeira situação-problema, da quinta semana, os grupos tiveram mais dificuldades para obter a expressão do trinômio do segundo grau, pois a noção de lucro ainda não estava bem consolidada. Mesmo assim, vários grupos conseguiram a sua expressão. Quanto à determinação do lucro máximo, poucos grupos conseguiram determiná-lo. Na segunda situação-problema, ocorreu maior sucesso, pois muitas dúvidas haviam sido sanadas durante a plenária do primeiro problema. Sempre apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas, constatamos que houve grande melhora no trabalho das equipes, tanto na apresentação por escrito como nas discussões da plenária. Observamos ainda o surgimento de líderes em vários grupos.

Sétima semana – Primeira parte

5.3.3 Aplicações da função quadrática

A seguir, são apresentados problemas aplicativos na área de Administração de Empresas, com o objetivo de verificar os conceitos matemáticos trabalhados.

Problema da venda de canetas

Uma indústria produz canetas ao custo de R\$ 10,00 cada. Verificou-se que se cada caneta for vendida por p reais, a venda será de $(60 - p)$ canetas por mês. Pede-se:

- O lucro mensal do fabricante em função dos preços da venda.
- Esboçar o gráfico.
- Calcular o preço com o qual o lucro será máximo.

Resolução:

- Sabemos que o lucro é dado por:

Lucro = (número de canetas vendidas) $\times$ (lucro por caneta).

número de canetas vendidas: $60 - p$

lucro por caneta: $p - 10 \geq 0$. Assim

$L(p) = (60 - p)(p - 10) = -p^2 + 70p - 600$. Logo a função lucro mensal é uma função quadrática e tem, como raízes, $p_1 = 10$ e $p_2 = 60$.

- Tomando outros valores para p na função, podemos esboçar o gráfico.

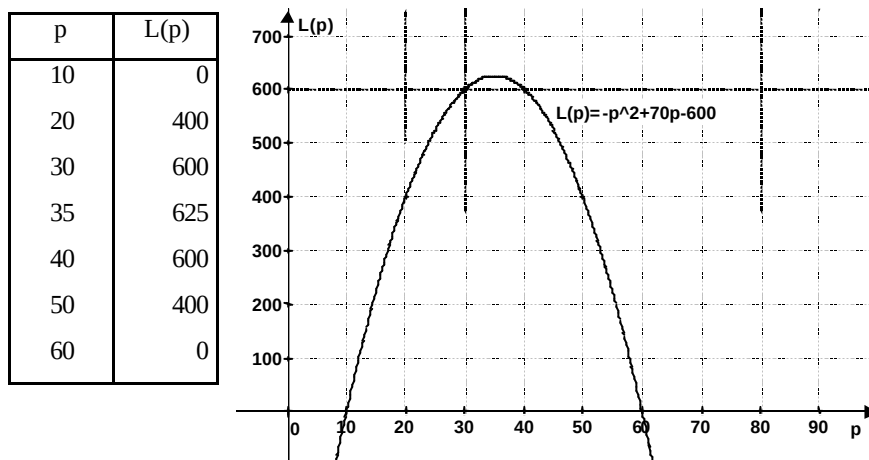


fig. 36

Para $p = \text{R\$ } 10,00$ e $p = \text{R\$ } 60,00$, o lucro é zero.

c) O lucro será máximo para o vértice da parábola e é dado pela fórmula:

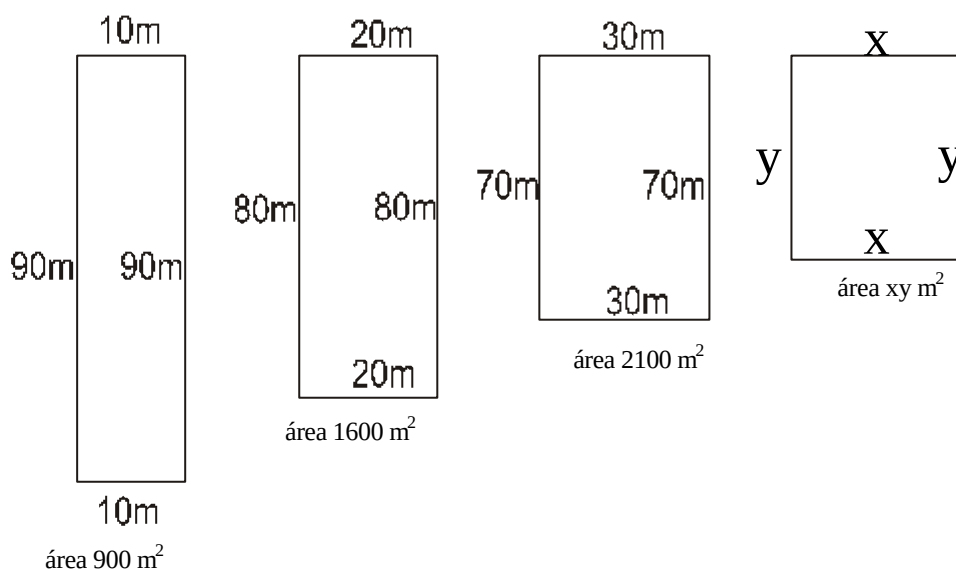
$$x = \frac{-b}{2a} \text{ ou } p = \frac{-70}{2 \cdot (-1)} = 35 \Rightarrow L_{\max}(35) = (60 - 35) \cdot (35 - 10) = 625 \Rightarrow V(35, 625)$$

Assim, se a caneta for vendida por $p = R\$ 35,00$, serão vendidas 25 canetas e o lucro será máximo: $L_{\max} = R\$ 625,00$.

Problema do supermercado

Fernanda disse a Pedro que, próximo à sua casa, vai ser construído um novo supermercado da rede "Peg Barato" e que a empresa adquiriu material suficiente para construir 200 m lineares de paredes com 4 m de altura. Supondo que a loja tenha a forma retangular, quais devem ser os valores das medidas dos lados para que a área seja máxima?

Pedro fez vários desenhos colocando valores para os lados e obtendo suas respectivas áreas. Assim se os lados forem:



X(m)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Y(m)	90	80	70	60	50	40	30	20	10
A(m²)	900	1600	2100	2400	2500	2400	2100	1600	900

Generalizando, se x e y forem as medidas dos lados tais que $x + x + y + y = 200$ ou $2x + 2y = 200$ ou $x + y = 100$ e $x \cdot y = \text{área}$, podemos escrever a área em função de x como:

$A = x \cdot y = x(100 - x)$ ou $A = -x^2 + 100x$ que é uma função quadrática. Como $a = -1 < 0$ o gráfico tem concavidade voltada para baixo e, portanto, o vértice é o valor máximo. Assim:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-1)} = 50 \text{ e } A_v = 2500. \text{ Logo } V = (50, 2500).$$

Esboçando o gráfico da função $A = -x^2 + 100x$

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
A	0	900	1600	2100	2400	2500	2400	2100	1600	900	0

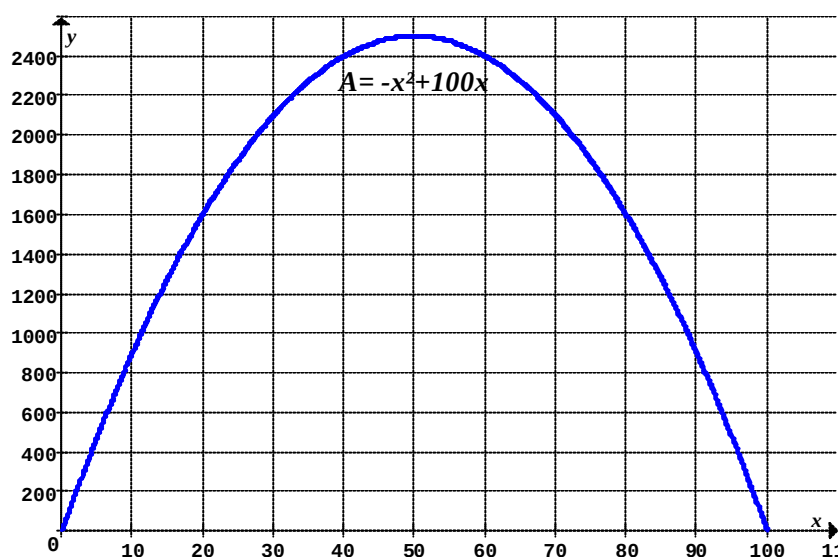


fig. 37

Finalmente, Pedro disse a Fernanda que, se o supermercado fosse construído na forma de quadrado, com os lados medindo 50 m, este teria área máxima de 2.500 m² e estaria usando a mesma quantidade de material das outras medidas.

O Professor observou que se não fosse exigida a forma retangular, mas uma forma qualquer, então o círculo determinado pela circunferência de comprimento 200 metros teria área maior que a área obtida pelo quadrado. Assim, usando a fórmula do comprimento da circunferência, $c = 2\pi r$ obtemos o raio do círculo $r = \frac{200}{2\pi} = \frac{100}{\pi}$ metros. Usando esse valor para o raio e substituindo na fórmula, segue:

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{100}{\pi}\right)^2 = \frac{10000}{\pi} = \frac{10000}{3.14159} \approx 3183,19 \text{ m}^2.$$

Portanto, usando os mesmos 200 metros de material, o círculo terá área ainda maior que a área do quadrado de lado 50m.

Sétima semana—segunda parte

5.4 Aplicações das funções afim e quadrática na Administração e na Economia

A seguir, são utilizados os conceitos das funções constante, afim e quadrática, na resolução de problemas da área de Administração de Empresas e Economia.

Fernanda relata a Pedro a notícia do jornal, dizendo que as chuvas que caíram na última semana, no Estado do Paraná, destruíram toda a plantação de feijão e por isso haverá falta do produto.

Então pergunta a Pedro:

— Com a falta do produto no mercado o que poderá ocorrer?

Pedro responde:

— Com a falta do produto no mercado, espera-se que o preço do quilograma do feijão tenha aumento, pois a população continuará a consumir o produto e a quantidade produzida não será suficiente, isto é, a demanda pelo produto continuará.

Após ouvir as observações de Pedro e Fernanda, o professor, explorando o que foi comentado diz:

— Nos momentos em que ocorre uma acidentalidade com algum produto agrícola, é comum a intervenção do governo colocando no mercado o produto agrícola necessitado, usando para isso o estoque regulador que mantém. Estes produtos são vendidos nas Bolsas de Mercadorias e nas quantidades necessárias para que o mercado volte a ter equilíbrio, isto é, a quantidade procurada (demandada) igual à quantidade ofertada. As funções matemáticas são muito usadas nas resoluções de problemas econômicos. Na teoria das funções, estudamos o relacionamento entre duas variáveis que eram indicadas por x e y . Agora procuramos o relacionamento entre:

- (a) Custo de produção de um dado produto e a matéria-prima utilizada;
- (b) Quantidade do produto vendido e o preço de venda desse produto;
- (c) Custo total de produção e a quantidade produzida;
- (d) Quantidade demandada e o preço do produto;
- (e) Quantidade ofertada e o preço do produto;
- (f) Lucro ou prejuízo obtido em relação ao preço de venda e
- (g) Lucro ou prejuízo obtido em relação à quantidade vendida.

Na solução destes problemas estão envolvidos os conjuntos A e B.

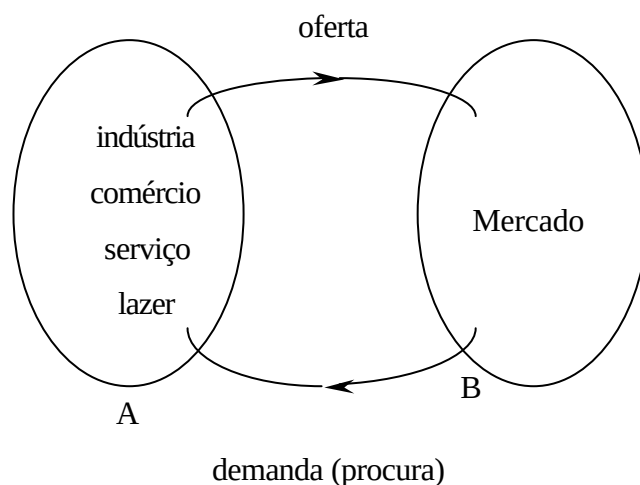


fig. 38

5.4.1 Lei da demanda ou da procura

O professor continua:

—A demanda ou procura de um determinado bem ou serviço, por um indivíduo, refere-se à quantidade desse bem que ele está disposto e capacitado a comprar.

A quantidade demandada de um bem ou serviço, por um indivíduo, depende de vários fatores, entre os quais temos: o preço do bem, a renda, o gosto do consumidor e os preços dos produtos equivalentes.

Para estabelecermos a lei da demanda ou procura, tomamos os conjuntos A e B da seguinte maneira:

A: conjunto dos números reais que representam os preços unitários de um determinado produto.

B: conjunto dos números reais que representam as quantidades demandadas de um determinado produto.

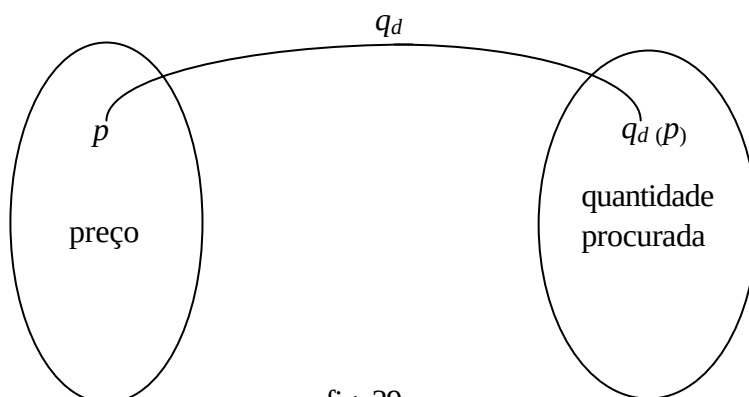


fig. 39

Analogamente, como fizemos para a teoria das funções, podemos escrever a função demanda: $q_d : A \rightarrow B$

$$p \mapsto q_d(p)$$

Para as aplicações em que se utiliza a função afim, a declividade da demanda é negativa, isto é, à medida que o preço (p) aumenta a quantidade procurada diminui e à medida que o preço diminui a quantidade demandada aumenta. Desta forma, uma representação da demanda pode ser dada por:

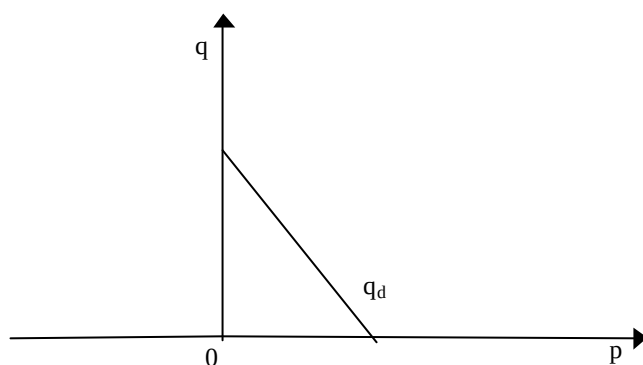


fig. 40

Após a exposição sobre o conceito de demanda, o professor solicitou aos grupos que propusessem problemas envolvendo a lei da demanda, com uso das funções afim e quadrática. Foram selecionados alguns que, com a supervisão do professor, assumiram os seguintes enunciados.

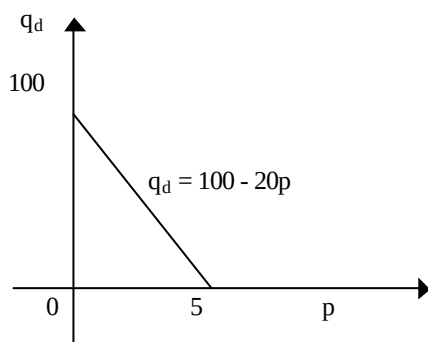
Problema da demanda de calculadoras eletrônicas

Fernanda propõe a Pedro o seguinte problema:

A quantidade demandada de calculadoras eletrônicas, do tipo WP-42, é dada pela lei $q_d = 100 - 20p$, onde q_d representa a quantidade demandada e p o preço em reais. Representar a função q_d em função do preço p .

Pedro disse:

— Fernanda, este problema apresenta a lei da demanda, que é a mesma da lei afim estudada. É só chamar x de p (preço) e y de q_d (quantidade demandada) e representamos a função demanda, da mesma forma, no gráfico.



para $p = 0 \Rightarrow q_d(0) = 100$

para $p = 5 \Rightarrow q_d(5) = 0$

fig. 41

Após a resolução dada por Pedro, o professor fez as seguintes observações:

- Observação 20** - A função demanda (procura) q_d é decrescente, isto é, aumentando o preço a demanda diminui.
- Observação 21** - Só tem sentido falar em preço ($p \geq 0$) positivo e quantidade demandada ($q_d \geq 0$) positiva.
- Observação 22** - Se o valor de p é R\$ 5,00, seu valor é máximo e a quantidade demandada q_d é zero (mínima).
- Observação 23** - Se o valor de p é R\$ 3,00, a procura q_d é igual a 40 calculadoras.
- Observação 24** - O preço negativo pode significar que é pago um preço ao consumidor para a remoção de artigos do mercado.
- Observação 25** - A demanda negativa pode significar que o preço é tão alto que impede a atividade de mercado.

Problema da venda de pisos de granito

Fernanda pede a Pedro que resolva o seguinte problema:

Quando o preço de venda de piso de granito natural é R\$ 120,00, nenhum metro quadrado de piso é vendido. Porém, quando o preço é liberado gratuitamente, 100 metros quadrados são procurados. Sabendo-se que a representação da demanda é uma reta, pede-se:

- A função demanda.*
- Esboçar o gráfico.*
- Dar a demanda se o preço for R\$ 60,00.*
- Qual o preço do metro quadrado se a demanda é de 75 metros quadrados?*

— Fernanda, do enunciado sabemos que a representação gráfica da demanda é uma reta. Como dois pontos distintos determinam uma reta, devemos encontrar esses dois pontos.

Assim:

a) Sendo a representação uma reta, então a equação da reta é do tipo:

$$q_d = ap + b \quad (I)$$

Do enunciado podemos concluir:

i) se $p = 0$, encontramos $q_d = 100$. Logo, pondo esses valores em (I)

$$100 = a \cdot 0 + b, \text{ segue que } b = 100. \quad (II)$$

ii) se $p = 120$, encontramos $q_d = 0$. Logo, substituindo-os em (I) e usando (II), temos:

$0 = a \cdot 120 + 100 \Rightarrow a = -100/120 = -5/6$. Assim a função demanda é dada pela lei:

$$q_d = -\frac{5}{6}p + 100 \text{ e tem como domínio } D(q) = \{p \mid 0 \leq p \leq 120\} \text{ e conjunto}$$

$$\text{imagem } Im(q) = \{q_d \mid 0 \leq q_d \leq 100\}$$

b) Gráfico

$$q_d = -\frac{5}{6}p + 100$$

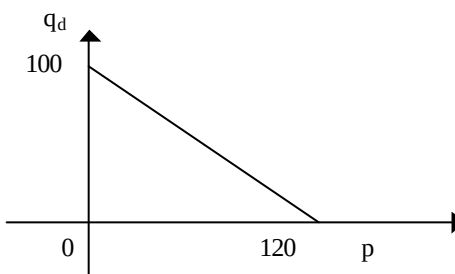


fig. 42

$$c) \text{ Se } p = 60, \text{ então } q(60) = -\frac{5}{6}(60) + 100 = -50 + 100 = 50$$

Portanto, para o preço de R\$ 60,00 o metro quadrado, 50 metros quadrados de granito são demandados.

d) Se $q_d = 75 \text{ m}^2$, então $q_d = 75 = -\frac{5}{6}p + 100$. Portanto o preço de um metro quadrado de granito natural é $p = \text{R\$ } 30,00$.

Conclusões

Essas situações-problema tiveram como objetivo identificar as funções de oferta e demanda a partir dos conceitos dados para funções.

Oitava semana

Após conhecermos as funções oferta e demanda, propusemos aos grupos enunciados de problemas aplicativos para a fixação dos conceitos trabalhados. Os alunos individualmente buscaram a solução desses problemas. Na plenária, foram discutidas as resoluções apresentadas e relatados os resultados obtidos em consenso.

Problema da compra de carros

Pedro afirma que conhece uma empresa que renova sua frota de carros e sempre adquirindo 6 carros da marca MS por qualquer preço de mercado. Pede então a Fernanda para definir a função f que envolve esse problema.

Fernanda resolveu o problema da seguinte maneira:

Se o preço p varia e é sempre um número positivo, então a função f tem domínio, $D(f) = \{p \text{ é número racional positivo}\}$ e para contradomínio ela percebeu que sempre o resultado é 6 (quantidade $q=6$), então $Im(f) = \{6\}$, e para qualquer preço $p = 0$, sempre se tem $q_p=6$.



Sendo q_p quantidade em função do preço, tem-se o gráfico

fig. 43

Problema do tênis

— Fernanda, observe que nem sempre a lei da demanda é uma reta.

Pode ser, por exemplo, uma parábola. A quantidade demandada de pares de tênis da marca AVIA, número 39 (masculino) é dada pela lei

$q_d = 1600 - p^2$. Pedro pede para ela:

- Esboçar o gráfico.*
- Encontrar a demanda se o preço é de R\$ 30,00?*
- Definir o domínio, contradomínio e conjunto imagem.*

Fernanda, interpretando o enunciado do problema, escreve:

a) Como a função demandada é um trinômio do 2º grau, devemos achar as raízes da equação. Assim $1600 - p^2 = 0 \Rightarrow p = \pm 40$ e para $p = 0$, $q_d = 1600$.

Logo podemos esboçar o gráfico:

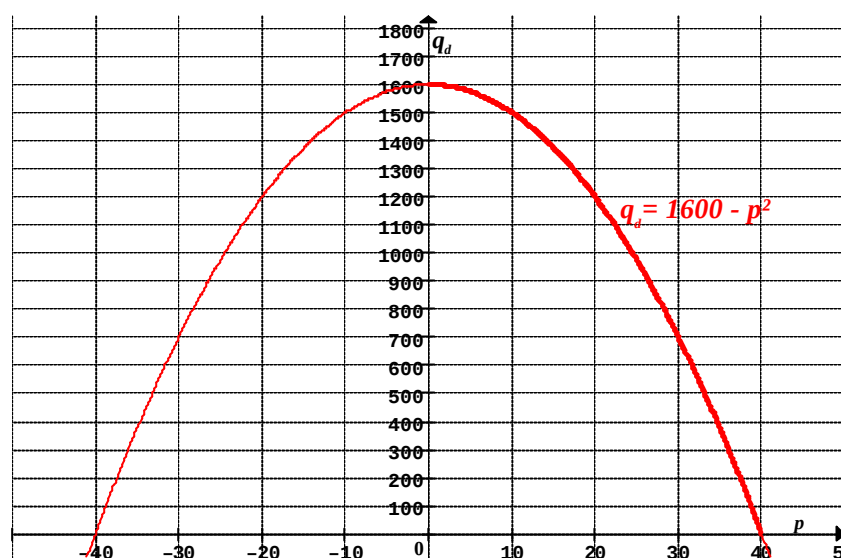


fig. 44

b) Se $p = 30$, então é só substituir na equação $q_d = 1600 - p^2$ e obtemos

$q_d(30) = 1600 - (30)^2 = 1600 - 900 = 700$, isto é, a demanda é de 700 pares de tênis.

c) Do enunciado do problema observamos que p é o preço de um par de tênis, portanto p é um número racional positivo. A quantidade q_p é o número de pares de tênis demandados, portanto, q_p é um número inteiro. Logo

$$D(q_d) = \{p \in \mathbb{R} \mid 0 \leq p \leq 40\}$$

$$Im(q_d) = \{0, 1, 2, 3, \dots, 1600\}$$

Apresentado o gráfico, o professor observa que ele é visto na figura como uma parábola contínua, e que isso ocorre por dificuldade gráfica em representar a curva por pontos.

5.4.2 Lei da oferta

O professor explica que a quantidade de um determinado bem que o produtor deseja vender no mercado denomina-se oferta.

Diz ainda que a quantidade ofertada pelo produtor depende de vários fatores, destacando entre eles: o preço do bem, o preço dos fatores de produção, a tecnologia utilizada e o preço de produtos equivalentes.

Para estabelecer a função da oferta são tomados os conjuntos A e B:

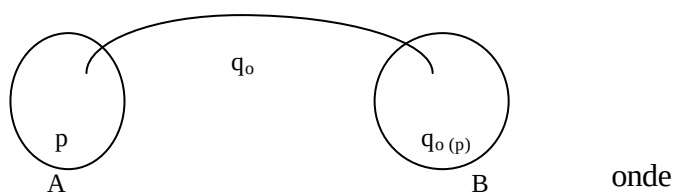


fig. 45

A é o conjunto dos números reais que representam os preços unitários de um determinado produto, e

B é o conjunto dos números reais que representam as quantidades ofertadas de um determinado produto. Assim se escreve a função oferta:

$$q_0 : A \rightarrow B$$

$$p \mapsto q_0(p).$$

Se a lei da oferta for dada pela função afim $q_0 = ap + b$, $a \neq 0$, dizemos que a lei da oferta é uma função afim. Ela será representada com declividade positiva, isto é, se o preço p aumenta, a quantidade ofertada também aumenta e graficamente se tem:

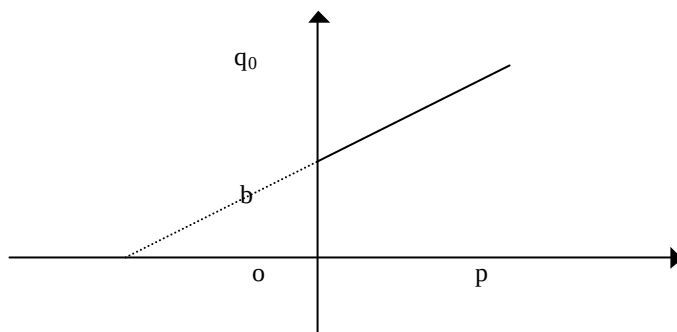


fig. 46

A seguir, solicitou-se aos grupos que propusessem problemas envolvendo a lei da oferta, com uso das funções afim e quadrática. Foram selecionados alguns que, com a supervisão do professor, assumiram os seguintes enunciados.

Problema do preço de calculadoras

Fernanda, veja um problema onde se usa a lei da oferta, diz Pedro.

Quando o preço de uma calculadora eletrônica é de R\$ 150,00, cinqüenta calculadoras estão à venda. Quando o preço é de R\$ 200,00, cem calculadoras estão disponíveis no mercado. Qual a lei da oferta para esse produto, sabendo-se que a representação gráfica é uma reta.

Do enunciado Pedro constata que a lei é do tipo:

(I) $q_0 = ap + b$ e que para determinar a e b , é só observar que o problema oferece os valores colocados na tabela abaixo:

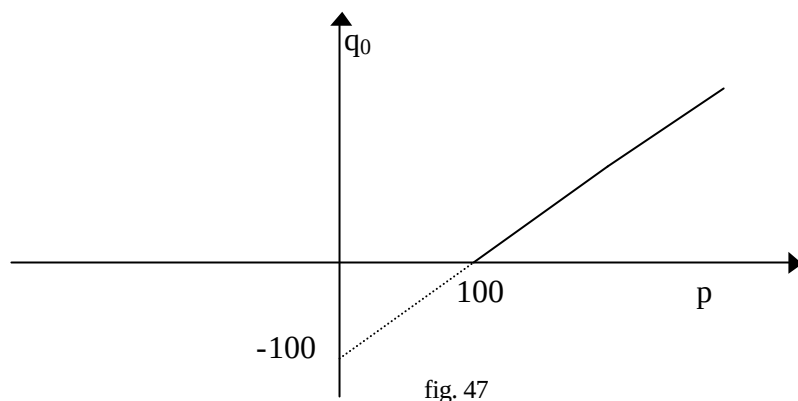
p	150	200	(preço)
q_0	50	100	(venda)

Substituindo esses valores em (I), tem-se

$$150 = 50a + b \quad \text{ou} \quad 50a + b = 150 \quad (\text{II})$$

$$200 = 100a + b \quad \text{ou} \quad 100a + b = 200 \quad (\text{III}).$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a = 1$ e $b = -100$ e, portanto, a lei da oferta é dada por $q_0 = p - 100$ e tem como gráfico a figura abaixo:



Após a resolução dada por Pedro, o professor sugeriu aos alunos que o gráfico da reta fosse feito a partir de $p = \text{R\$ } 100,00$, pois, para valores menores que R\$ 100,00, a quantidade ofertada seria negativa, o que não tem sentido.

Problema da lanterna

— Fernanda, veja outro exemplo da lei da oferta.

A empresa WP analisou a venda do produto lanterna de pilha e verificou que, se fizesse investimentos em propaganda desse produto, suas vendas seriam 20% maiores a cada aumento de R\$ 2,00 no preço unitário da lanterna. Quando o preço é de R\$ 12,00, a empresa vende 500 unidades. Qual é a lei da oferta para esse produto, sabendo-se que a lei é uma reta?

Pedro encaminhou a solução do problema da seguinte maneira:

— Sabemos que, para o preço R\$ 12,00, a quantidade vendida é de 500 unidades e se o preço é R\$ 14,00, a quantidade vendida é $500 + 20\%$ de 500, isto é, 600 lanternas. Pondo esses valores na equação $q = ap + b$ (I), segue

$$12a + b = 500 \quad (\text{II})$$

$$14a + b = 600 \quad (\text{III})$$

Resolvendo o sistema formado por (II) e (III) obtemos $a = 50$ e $b = -100$ e a lei é dada por $q_0 = 50p - 100$. O esboço do gráfico é o que segue:

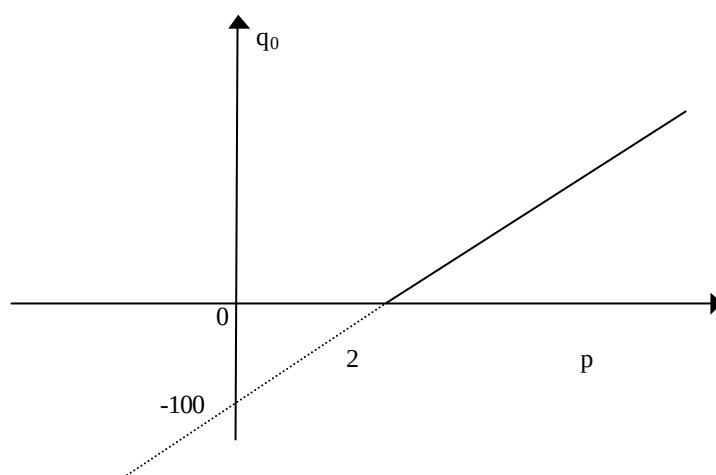


fig. 48

O domínio para a lei $q_0 = 50p - 100$ é o conjunto p (preços) dos números racionais maiores ou iguais a dois. O conjunto imagem dessa função é o conjunto dos números inteiros maiores ou iguais a 2. O gráfico é visto na figura como uma reta (contínua) e isso ocorre por dificuldade gráfica em representar a reta por pontos.

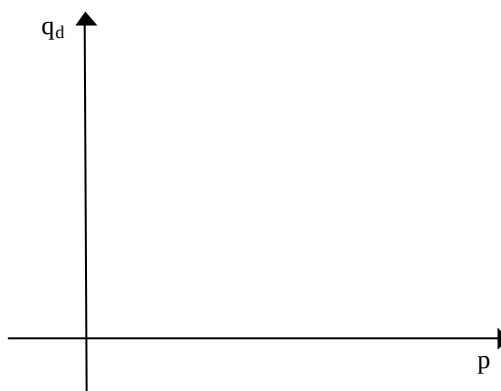
Os exercícios que seguem são denominados tarefas extraclasse, e foram resolvidos pelo professor, no sentido de esclarecer as possíveis dúvidas, nos casos em que houve solicitação por parte dos alunos.

Exercícios Grupo 2 – Tarefas extraclasse

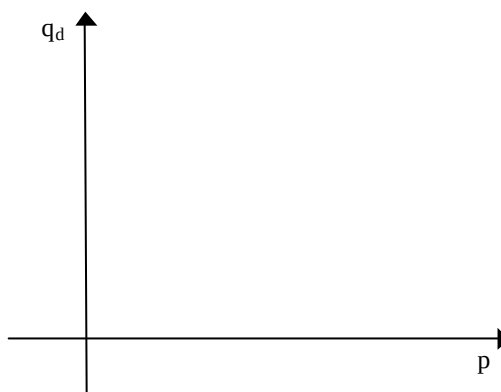
1- Dada a lei da demanda ou procura, pede-se:

- a) Esboçar o gráfico.
- b) Dar os interceptos.

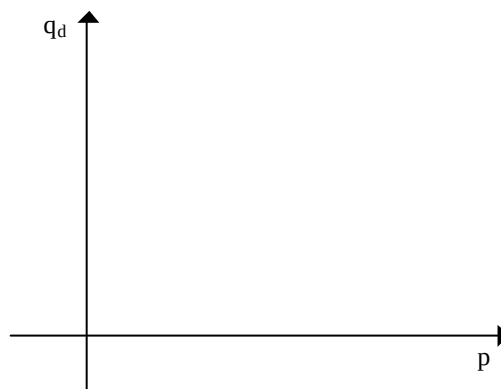
i) $q_d = -p + 30$



ii) $q_d = -3p + 90$



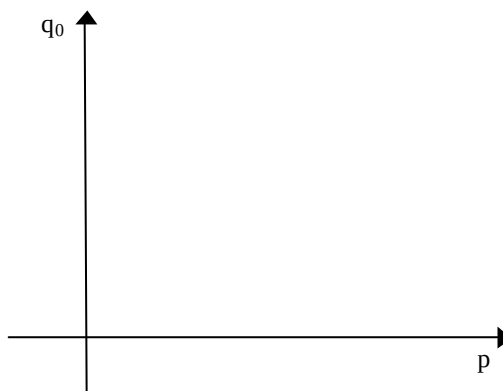
iii) $q_d = \frac{-2}{3}p + 60$



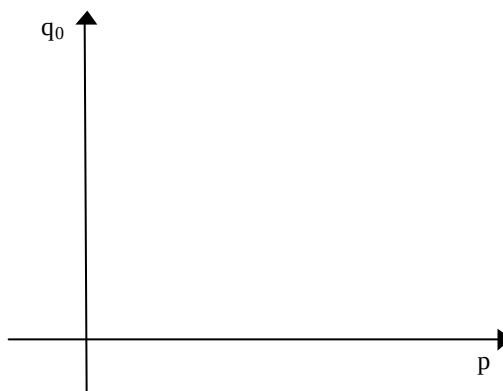
2. Dada a lei da oferta, pede-se:

- a) Esboçar o gráfico.
- b) Dar os interceptos.

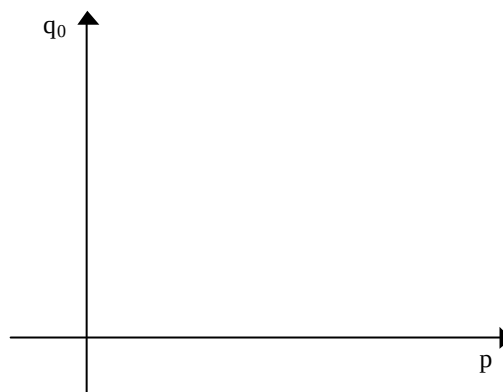
i) $q_0 = 2p + 30$



ii) $q_0 = 2p/3 - 60$



iii) $q_0 = 3p + 20$



Conclusões:

A sétima e a oitava semana tiveram como objetivo identificar as funções constante, afim e quadrática, com temas da administração e economia. Essa passagem da matemática para as aplicações transcorreu de maneira natural pois, o conceito de oferta e demanda foi utilizado várias vezes nos aplicativos propostos, que sempre foram relacionados à área profissionalizante.

Nona semana

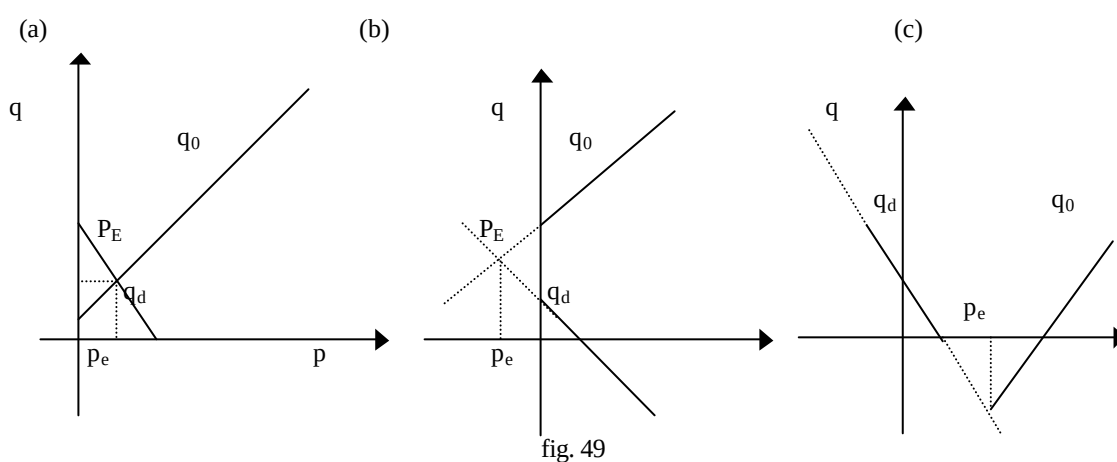
5.4.3 Equilíbrio de mercado

O professor no início da aula, lembra os conceitos de oferta e demanda e formula aos grupos a seguinte pergunta:

— O que vocês entendem por equilíbrio de mercado?

No grupo de Pedro e Fernanda observa-se o diálogo.

Fernanda diz a Pedro que o ponto de equilíbrio de mercado é o ponto (preço) no qual a quantidade ofertada é igual à quantidade procurada do mesmo produto. Podem ocorrer modelos como os que seguem:



O professor completa chamando a atenção para as seguintes observações:

Observação 26- No modelo (a), o ponto de equilíbrio $P_E(p_e, q_e)$ está localizado no primeiro quadrante, portanto é um ponto de equilíbrio significativo. Porém, nos modelos (b) e (c) o ponto de equilíbrio não é significativo, pois em (b) o preço de equilíbrio é negativo e no modelo (c) a quantidade ofertada e demandada são negativas.

Observação 27 - O ponto de equilíbrio é dado pelo par $P_E(p_e, q_e)$, onde p_e denomina-se preço de equilíbrio e q_e quantidade de equilíbrio

Exercícios de aplicação 3

Em sala de aula, foram apresentados exercícios de aplicação para fixação dos conceitos trabalhados : ponto de equilíbrio e análise econômica.

Determinar os pontos de equilíbrio

Nos exercícios (a), (b) e (c), pede-se:

- 1) O ponto de equilíbrio para as leis de oferta e de procura
- 2) O esboço do gráfico
- 3) Análise econômica

$$a) q_d = -p + 30 \quad (I)$$

$$q_0 = p + 10 \quad (II)$$

Os grupos trabalharam e, na plenária, chegando a um consenso, professor e alunos apresentaram a seguinte resolução:

1) No ponto de equilíbrio, o valor de $q_d = q_0$. Logo podemos igualar as leis (I) e (II), isto é, $p + 10 = -p + 30$, chegando a $p_e = 10$, isto é, $p_e = 10$ é o preço de equilíbrio.

Para acharmos q_d e q_0 , é só substituir em (I)

$$q_d = -10 + 30 \Rightarrow q_d = q_0 = 20. \text{ Assim o ponto de equilíbrio é dado pelo par } P_E(10, 20)$$

2) Gráfico

3) Análise econômica:

se $0 \leq p \leq 10$, então $q_d \geq q_0$

se $10 < p < 30$, então $q_0 > q_d$

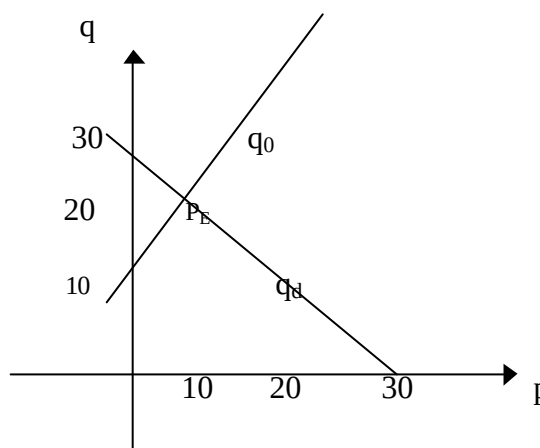


fig. 50

$$b) q_d = -2p + 10 \quad (I)$$

$$q_0 = p - 20 \quad (II)$$

Resolução:

1) Fazendo $q_d = q_0 = p - 20 = -2p + 10$, segue:
 $3p = 30$ e portanto $p_e = 10$, pondo $p_e = 10$ em (II) segue $q_e = -10$. Logo $P_E(10, -10)$, que é um ponto de equilíbrio não significativo.

2) Nesse caso, deixamos de explicitar a análise econômica.

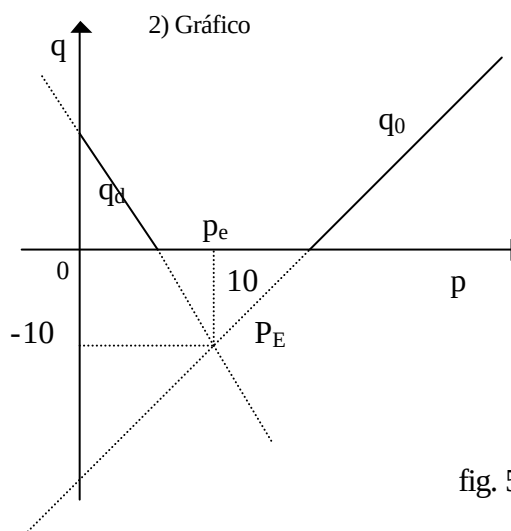


fig. 51

c) $q_d = 36 - p^2$

$q_o = 2p^2 + 3p - 24$

Resolução:

1) Como o ponto de equilíbrio é o valor de p para o qual $q_o = q_d$ temos:

$$2p^2 + 3p - 24 = 36 - p^2, \text{ segue } 3p^2 + 3p - 60 = 0 \text{ ou}$$

$p^2 + p - 20 = 0$. Como raízes, encontramos: $p_1 = 4$ e $p_2 = -5$ (preço negativo ponto de equilíbrio não significativo)

Assim, $p_1 = p_e = \text{R\$ } 4,00$ e $q_e = 20$, portanto $P_E (4,20)$.

2) Com a finalidade de esboçar o gráfico de q_d e q_o , procuramos os pontos de encontro com os eixos, isto é, os interceptos.

Para a demanda, se $p = 0 \Rightarrow q_d = 36$ e se $q_d = 0 \Rightarrow p^2 = 36$, portanto $p = \pm 6$.

Assim encontramos os pontos:

$A_1 (0,36), A_2 (6,0), A_3 (-6,0)$

Para a oferta, se $p = 0 \Rightarrow q_o = -24$ e se $q_o = 0$, a equação do 2º grau é completa e usamos a fórmula de Bhaskara para determinar as raízes.

$$2p^2 + 3p - 24 = 0 \text{ e } p_1, p_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{201}}{4}$$

e assim temos os interceptos:

$B_1(0,-24), B_2\left(\frac{-3 - \sqrt{201}}{4}, 0\right), B_3\left(\frac{-3 + \sqrt{201}}{4}, 0\right)$

A partir dos pontos encontrados, esboçamos o gráfico:

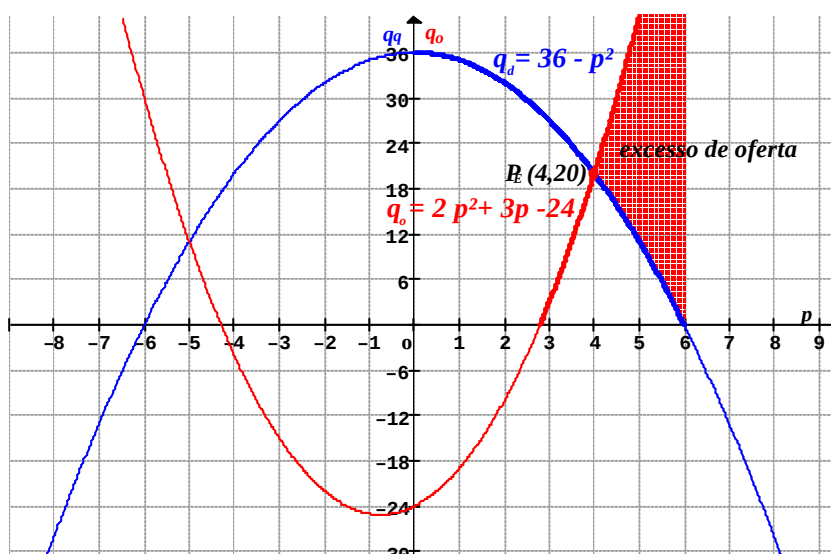


fig. 52

3) Interpretando esses resultados (análise econômica), podemos dizer que:

se $0 \leq p \leq 4$, então $q_d \geq q_0$ (quantidade demandada é maior ou igual à quantidade ofertada).

se $4 < p < 6$, então $q_p > q_d$ (quantidade ofertada é maior que a quantidade demandada)

e o ponto $P_E (4;20)$ é o ponto de equilíbrio.

Exercícios Grupo 3 – Tarefa extraclasse

Os exercícios que seguem são denominados tarefas extraclasse, e foram resolvidos pelo professor, no sentido de esclarecer as possíveis dúvidas, nos casos em que houve solicitação por parte dos alunos.

Dadas as funções de oferta e procura pede-se:

a) Ponto de equilíbrio.

b) Esboçar o gráfico.

c) Análise econômica.

i) $q_d = 16 - p^2$ $q_0 = 4 + p$												

ii) $q_d = 32 - 4p - p^2$

 $p = \frac{q_0}{20} + 1$

iii) $q_d = 64 - 8p - 2p^2$

 $q_0 = 10p + 5p^2$

Conclusões:

Com os exercícios denominados exercícios de aplicação 3 e exercícios grupo 3, concluímos o primeiro bimestre. Esses exercícios tiveram o objetivo de fixar todos os conceitos dados. Para vários grupos, foram entendidos como revisão para a prova.

Com o encerramento do primeiro bimestre letivo podemos concluir que:

a) Quanto à metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas, esta foi aplicada utilizando o esquema de aula proposto e iniciando os conteúdos programáticos, a serem trabalhados, sempre com situações-problema desafiadores, levando os alunos a pensar, a explorar e a buscar soluções. Em seguida foram propostos problemas aplicativos, exercícios de aplicação e tarefas extraclasse.

b) Quanto à conjectura, verificamos que foi possível até o momento, desenvolver a disciplina Matemática, partindo de aplicações da área profissionalizante de Administração de Empresas, seguindo o novo conteúdo programático e a metodologia proposta.

c) Quanto ao perfil exigido do administrador profissional, este foi atendido não só quanto ao conhecimento matemático exigido, bem como por meio das discussões dos alunos nos

grupos e na plenária; estes mostraram maior capacidade de comunicar-se verbalmente e por escrito, maior motivação em estudar matemática e saber trabalhar em equipe.

Décima semana Prova bimestral B₁

A prova foi formulada por meio de enunciados de situações-problema de assuntos estudados até a presente data e retirados de temas da área de Administração e Economia.

Tempo de duração das provas - 100 min.

Questões propostas

1) Com a aproximação do Dia das Mães, o pai de Ana dá-lhe R\$ 192,00 e pede que compre para sua mãe CD de preço unitário R\$ 12,00 e conjuntos de pintura de preço unitário R\$ 16,00 e que use todo o dinheiro na compra dos dois produtos. Pede-se:

- a) As quantidades possíveis dos dois produtos. (valor 1,0)
- b) O esboço do gráfico. (valor 1,5)
- c) Enunciar essa relação em forma de função. (valor 1,5)

2) O preço de um aparelho celular digital varia com a quantidade vendida e é dado

por $p = \frac{-1}{10}q + 300$. Pede-se:

- a) O preço da venda de 1.000 celulares. (valor 1,5)
- b) O esboço do gráfico da função. (valor 1,5)

3) Sabe-se que no mercado de ações, a rentabilidade das ações da empresa A é descrita pela lei $R_A = 3t + 20$ e da empresa B é $R_B = 2t + 30$. A variável t representa o tempo em meses a partir de janeiro de 2002. Pede-se:

- a) Determinar em que mês as rentabilidades são iguais (valor 1,0)
- b) O esboço dos gráficos das duas leis. (valor 1,0)
- c) Identificar qual a melhor aplicação após dez meses. (valor 1,0)

Décima primeira semana

As mesmas ações, que fizemos quando migramos do conceito das funções afim e quadrática para o conceito de demanda e oferta, repetimos com os conceitos de receita, custo, lucro e prejuízo, isto é, mostraremos a semelhança entre essas leis.

O trabalho feito na lousa durante a plenária, por Pedro e Fernanda, teve a participação do professor em sua redação final. Por meio dos problemas apresentados, os alunos deveriam mostrar o que entenderam por receita, custo, receita total, custo total, custo fixo, custo variável, ponto crítico, lucro e prejuízo.

5.4.4 Receita total

Situação-problema 1: Loja de colchões

Pedro pergunta a Fernanda o que significam, em economia, as palavras receita e custo. Fernanda respondeu formulando a seguinte situação-problema:

¾ Eu trabalho como caixa na loja ZIFF, que é especializada em colchões. A loja compra os colchões de casal por R\$ 1.000,00 e os revende por R\$1.500,00.

¾ Esta semana, a loja vendeu 30 colchões de casal. Qual a receita obtida, Pedro?

Pedro respondeu:

¾ A receita dessa loja na venda desses colchões foi de 30 colchões vezes o preço R\$1.500,00 de cada colchão. Assim:

$$(30) \times 1.500,00 = \text{R\$ } 45.000,00.$$

Chamando o preço R\$ 1.500,00 de p (preço de venda) e a quantidade de colchões vendidos de q temos a fórmula da receita:

$$R_t = q \times p$$

Após essas conceituações de Pedro e Fernanda, o professor completa dando definições, exemplos e gráficos.

Definição de Receita Total

Seja p o preço de venda de um determinado produto (fixo) e q a quantidade vendida a preço p , então a receita total é dada pela função linear:

$$f: A \rightarrow B$$

$$q \mapsto R_t = p \cdot q, \text{ onde}$$

A é o conjunto dos números reais que representam as quantidades de um determinado produto e

B é o conjunto dos números reais que representam os valores obtidos na unidade monetária: real, dólar, peso, etc.

Observação 28 - Se a quantidade for dada, por exemplo, pelo número de rádios ou televisores, o conjunto A coincide com os números naturais () e se a quantidade for expressa por quilograma, grama, ou tonelada, o conjunto A será representado pelos números reais ().

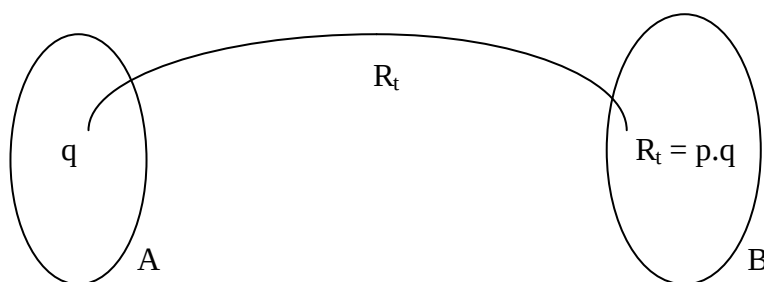


fig. 53

Fernanda diz a Pedro:

– Veja o exemplo da receita dada pela fórmula matemática.

Seja a receita total dada por: $R_t: * \rightarrow$

$$q \mapsto 2q$$

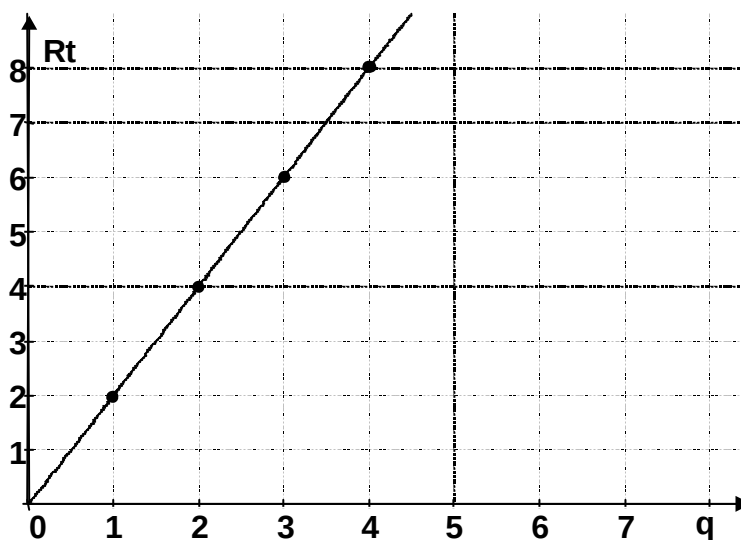


fig. 54

Como a receita total é uma função afim com referência ao preço, temos como gráfico uma reta, porém, como o domínio é o conjunto $*$ dos números naturais positivos, o esboço do gráfico é feito por pontos. Da fórmula vê-se que o preço é $p = \text{R\$ } 2,00$.

Exemplo dado por meio do enunciado

Situação-problema 2: Problema da receita de televisores

Se o preço de venda de um televisor de 20 polegadas da marca ABC é R\$200,00, determinar a receita para a venda de 10 televisores.

Resolução:

Podemos escrever $R_t = 200 \cdot q$ e para $q = 10$ temos $R_t = 200 \cdot 10$

$R_t = \text{R\$ } 2.000,00$. Logo a receita para a venda de 10 televisores é de $\text{R\$ } 2.000,00$.

Observação 29 - Se o preço for variável e a quantidade demandada variar com o preço, a receita, sendo o produto do preço pela quantidade, não será necessariamente uma reta. O exemplo abaixo mostra esse fato. Seja a demanda dada por $q = \frac{-p}{4} + 20$, então $p = -4q + 80$, portanto a receita é dada por $R = p \times q = (-4q + 80) \times q = -4q^2 + 80q$ que é um trinômio de 2º grau e tem como gráfico a parábola.

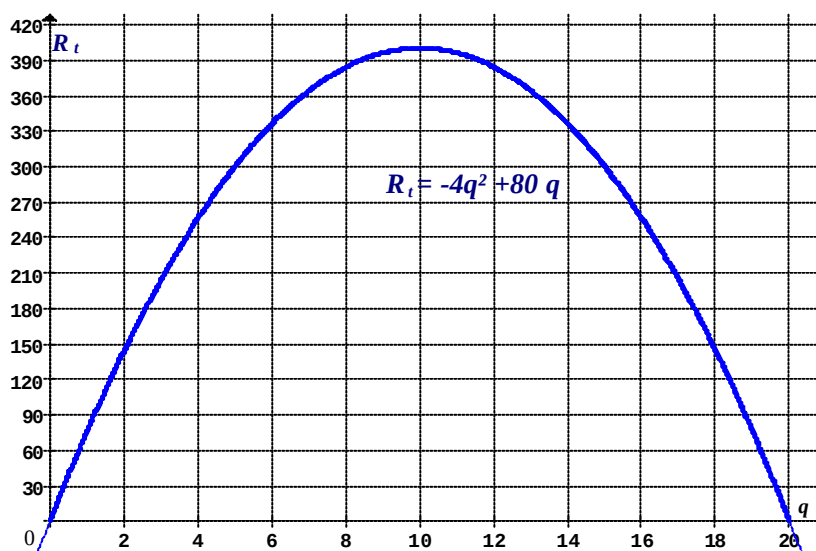


fig. 55

5.4.5 Custo total

Situação-problema 3: Problema do custo de colchões

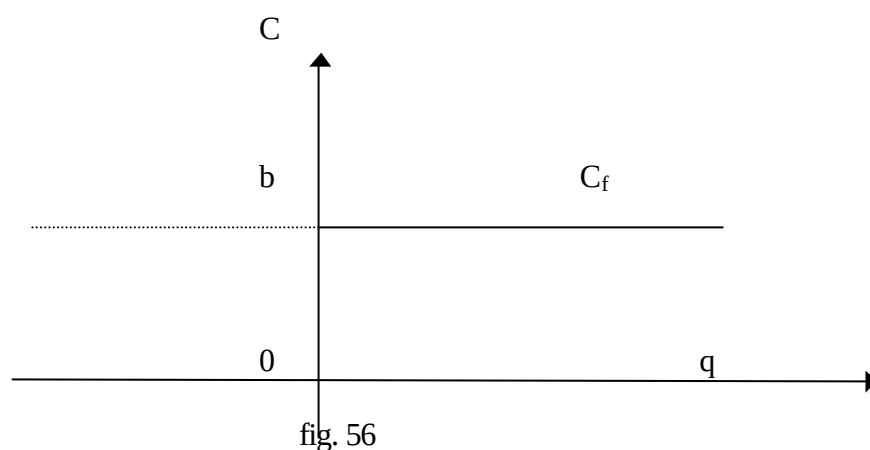
Se a loja de colchões pagou R\$ 1.000,00 para cada colchão de casal do fabricante, qual o custo dos 30 colchões comprados?

Fernanda diz a Pedro:

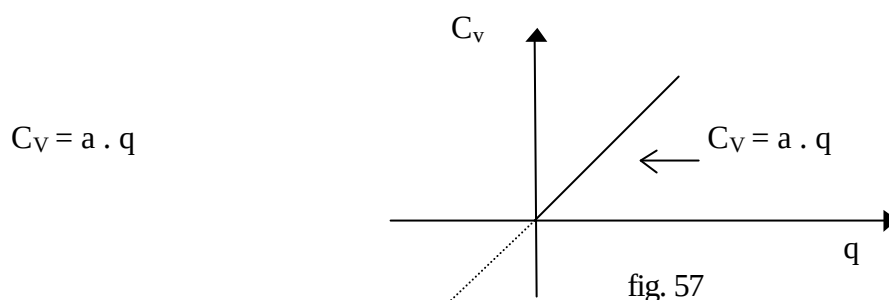
— Pedro, você perguntou também o que é custo. Para a loja ZIFF o custo do colchão de casal é o valor pago pela loja ao fabricante que é de R\$ 1.000,00, portanto o custo é 30 vezes R\$ 1.000,00, isto é, R\$ 30.000,00. Para o lojista existem outros custos, tais como: água, luz, telefone, impostos, salários dos empregados, material de limpeza, aluguel, etc. Portanto não podemos dizer que a diferença entre o preço de venda (R\$ 1.500,00) e o preço de compra (R\$ 1.000,00) seja lucro. Como essa loja vende outros modelos de colchões, ao final de um certo período de tempo, podemos avaliar qual o lucro total da loja.

Se observarmos o fabricante dos colchões, este terá como custo itens citados acima e mais o material utilizado na confecção dos colchões, tais como: espuma, tecidos, linhas, etc. Desta forma, podemos afirmar que, quando uma empresa se propõe a produzir determinado produto, ela terá gastos que denominamos de custos, os quais podem ser classificados em:

- i) *Custo fixo*: São os custos que não dependem da quantidade produzida (aluguel, luz, água, telefone, salários, etc...). Assim podemos representar por uma reta paralela ao eixo 0x passando pelo ponto b (custo no período)



- ii) *Custo variável* : Depende do volume de produção, matéria-prima, embalagem, etc. Supondo que o custo varia linearmente, podemos representá-lo por:



iii) *Custo total* : O custo total é dado pela soma do custo fixo com o custo variável

$$C_t = C_f + C_v \text{ onde}$$

- $C_f = b$

- $C_v = a.q$

Portanto, podemos escrever.

$$C_t = a.q + b$$

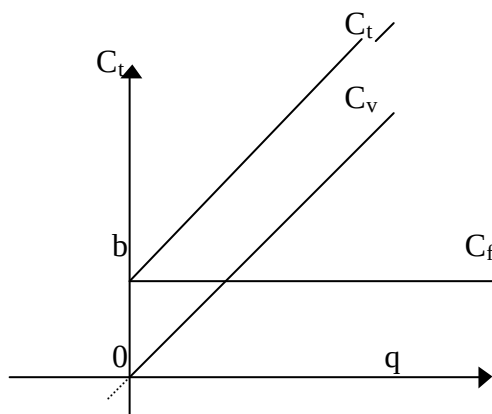


fig. 58

—Pedro, podemos exemplificar o que falamos por intermédio do seguinte problema:

Suponhamos que a função custo total seja dada pela função afim $C_t = 2q + 4$. Vamos esboçar o gráfico do custo total a partir dos conceitos estabelecidos.

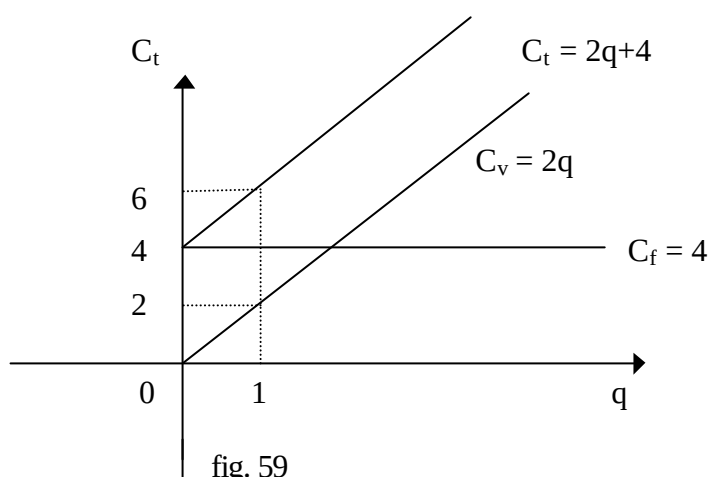


fig. 59

5.4.6 Ponto crítico (Break-even point)

— Pedro, as organizações empresariais visam obter lucros, pois, desta maneira, elas reinvestem na empresa, modernizando seu sistema de produção e seus produtos, procurando ser mais competitivas para continuar no mercado.

Após a afirmação feita por Fernanda, o professor apresenta o conceito de ponto crítico, de lucro, de prejuízo e dá exemplos.

Se uma empresa, durante certo tempo, tem sua receita total igual ao custo total, estará passando por momentos críticos e deverá rever suas metas para superar este momento. O ponto no qual a receita total é igual ao custo total denominamos ponto crítico.

Exemplo de ponto crítico dado por funções

Situação-problema 4:

Sejam as funções dadas pelas leis:

$$R_t = 100q$$

$$C_t = 50q + 10.000.$$

a) Determinar o ponto crítico.

b) Hachurar a região onde a receita total é maior que o custo total.

Resolução:

Devemos determinar o valor de q para o qual $R_t = C_t$. Para isso, é só escrever:

$100q = 50q + 10.000$ e segue $100q - 50q = 10.000$ e $50q = 10.000$. Logo $q_c = 200$ unidades, onde q_c é chamada quantidade crítica.

De fato, para $q = 200 \Rightarrow R_c = 20.000$ (Receita crítica) $C_c = 20.000$ (Custo crítico) e o ponto crítico é dado por $P_C = (200, 20.000)$

b) Gráfico

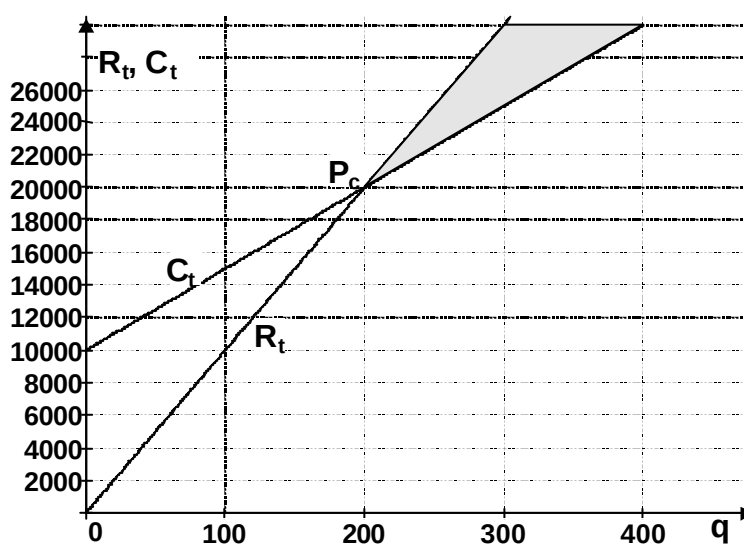


fig. 60

Observação 30 - Vendendo-se 200 unidades não se tem lucro (receita total=custo total)

LUCRO

Definimos como lucro a diferença entre a receita total e o custo total:

$$L = R_t - C_t$$

No caso, para $q > 200$ temos lucro e este é dado por:

$$L = 100q - (50q + 10.000) = 50q - 10.000.$$

Se $q = 300$, temos lucro, pois $L = R_t - C_t = 50q - 10000$
 $L = 50(300) - 10.000 = 15.000 - 10.000 = 5.000$ reais. Assim, o lucro é igual a R\$ 5.000,00.

PREJUÍZO

Definimos prejuízo quando a receita total é menor que o custo total e é dado por:

$$P = C_t - R_t .$$

No exemplo dado, $P = (50q + 10.000) - 100q = -50q + 10.000$. Desta maneira, vendendo menos que 200 unidades temos prejuízo. De fato, se $q = 100$, temos prejuízo, pois este é dado por $P_{100} = -50(100) + 10.000 = 5.000$. Portanto, o prejuízo é de R\$5.000,00.

Conclusões:

Os conceitos de receita, custo e ponto crítico foram obtidos por meio das situações-problema. Percebemos que houve boa aprendizagem, observadas as soluções apresentadas pelos grupos.

Décima segunda semana

Problemas aplicativos envolvendo ponto crítico, lucro e prejuízo

Problema da venda de televisores

A receita total das vendas de televisores de 20 polegadas da marca ABC é dada por $R_t = 200q$ (onde q é a quantidade de televisores) e o custo total é dado por:

$$C_t = 160q + 200. \text{ Pede-se:}$$

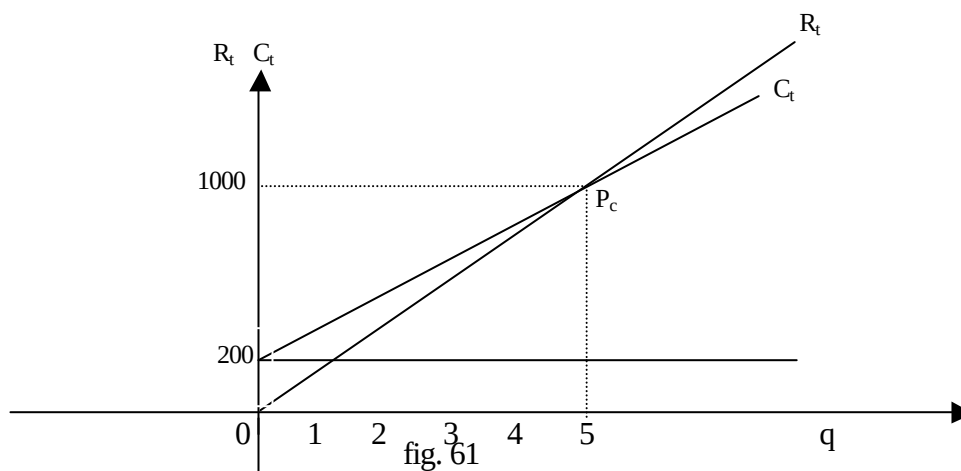
- a) O ponto Crítico
- b) Esboçar o Gráfico
- c) Interpretar os resultados (lucro -prejuízo)

Resolução:

- a) Devemos impor $R_t = C_t$, isto é, $200q = 160q + 200$. Resolvendo a equação obtemos $q = 5$ unidades

Se vendermos 5 televisores, a receita total é igual ao custo total: $R_t = C_t = 1.000$ reais.

b) Gráfico



c) Para $q \geq 5$ temos lucro : $L = R_t - C_t = 200q - (160q + 200)$ e a expressão do lucro é dada por: $L = 40q - 200$.

Assim, se vendermos 10 unidades, isto é, $q = 10$, temos $L = 40.10 - 200 = 200$ reais de lucro.

Para $q < 5$ temos prejuízo, pois $P = C_t - R_t = 160q + 200 - 200q = -40q + 200$.

Se a quantidade for $q = 2$ unidades, temos o prejuízo $P = -40(2) + 200 = -80 + 200 = 120$ reais de prejuízo.

Receita e Custo dados por fórmula.

Sejam as funções de receita total e custo total dadas por

$$R_t = -4q^2 + 160q$$

$$C_t = q^2 + 10q + 1000$$

Pede-se:

- Ponto crítico.
- Esboçar o gráfico.
- Dar a expressão do lucro e seu gráfico.
- A quantidade quando se tem lucro máximo.

Resolução:

a) Para obtermos o ponto crítico P_c , impomos a condição:

$C_t = R_t$, isto é, $q^2 + 10q + 1000 = -4q^2 + 160q$ ou $q^2 - 30q + 200 = 0$ e, fatorando, temos:

$$(q - 10).(q - 20) = 0. \text{ Logo temos dois pontos críticos.}$$

para $q_c = 10$, segue $R_c = C_c = 1.200$ e $P_c(10, 1.200)$ é um ponto crítico.

para $q_c = 20$, segue $R_c = C_c = 1.600$ e $P_c'(20, 1.600)$ é outro ponto crítico.

b) Determinação dos interceptos: para $q = 0$, $R_t(0) = 0$ e $C_t(0) = 1.000$

O gráfico de $R_t = -4q^2 + 160q$ passa pelos pontos: $A(0,0)$, $B(40,0)$, $P(10,1.200)$ e $P_c'(20,1.600)$

O gráfico de $C_t = q^2 + 10q + 1.000$ passa pelos pontos: $C(0,1.000)$, $P(10,1.200)$ e $P_c'(20,1.600)$. Logo tem-se o gráfico

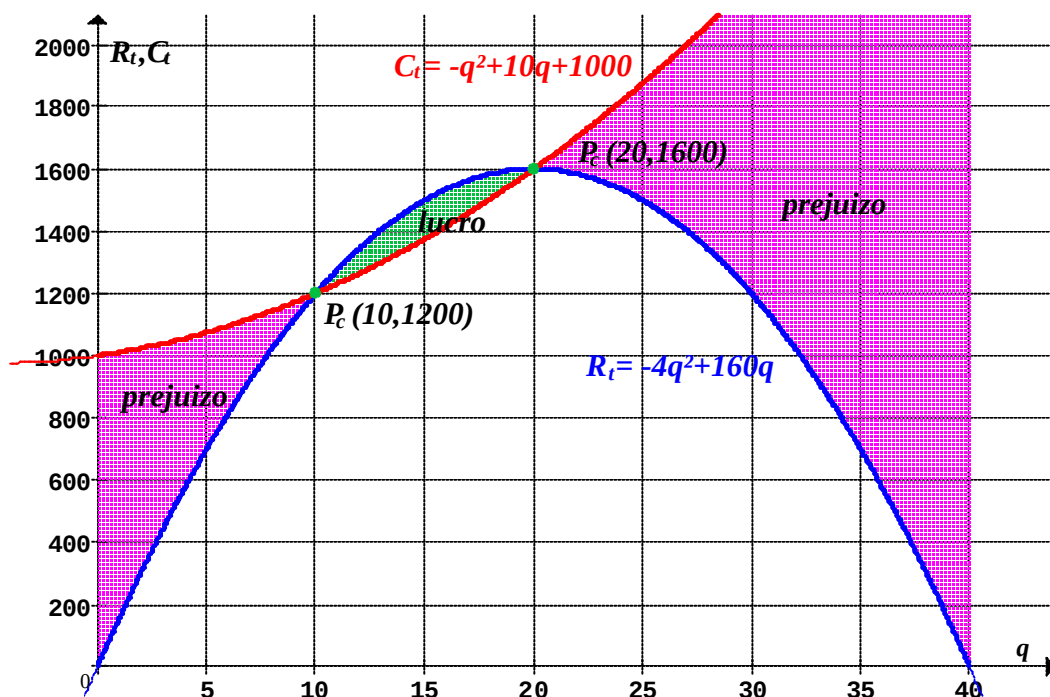


fig. 62

c) Para termos a expressão do lucro é só escrever:

$$L = R_t - C_t = -4q^2 + 160q - (q^2 + 10q + 1000) = -5q^2 + 150q - 1000 = -5(q-10)(q-20).$$

Assim, para $q=10$ e $q=20$ o lucro é zero, esses valores são as raízes da função lucro.

O gráfico da função lucro $L = -5q^2 + 150q - 1000$ é dado por:

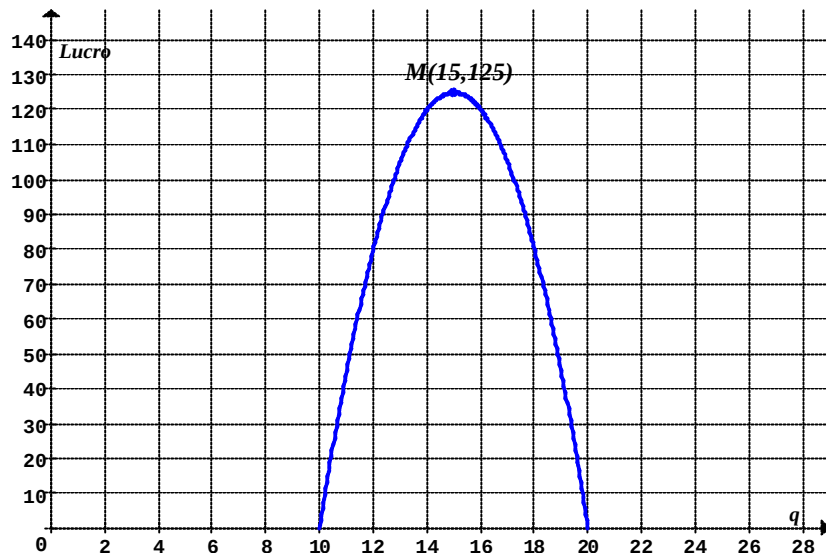


fig. 63

d) Para $10 < q < 20$ temos lucro e o lucro é máximo para $q = 15$, pois $(15, 125)$ é o vértice da parábola e $L_{\text{máx}} = \text{R\$ } 125,00$.

Problema da empresa tipográfica

Uma empresa tipográfica produz cadernos de 200 folhas por R\$ 2,00 cada e vende a R\$ 3,00 cada, tendo para este valor de venda uma demanda de 3.000 cadernos por mês. Quando a tipografia aumenta o valor de venda em R\$ 1,00 para cada caderno, a demanda diminui 300 unidades por mês.

- Expressar o lucro mensal da tipografia em função do preço de venda.
- Esboçar o gráfico.
- Determinar o preço para o qual se tem lucro máximo.

Resolução:

a) Para determinarmos a equação do lucro, escrevemos:

Seja p : preço de venda (para $p \geq 2$ tem-se lucro) e q_v : quantidade vendida.

Do enunciado, podemos escrever:

para o preço $p=3$ reais serão vendidos 3.000 cadernos por mês

para o preço $p=4$ reais serão vendidos $3.000 - 1 \times 300$ cadernos por mês

para o preço $p=5$ reais serão vendidos $3.000 - 2 \times 300$ cadernos por mês

para o preço $p=6$ reais serão vendidos $3.000 - 3 \times 300$ cadernos por mês.

Generalizando a fórmula e lembrando que o primeiro preço é 3, podemos escrever:

$q_v = 3.000 - (p - 3) 300$ cadernos por mês, onde p é entendido como o valor numérico do preço de venda após os aumentos e, simplificando, temos: $q_v = 300 (13 - p)$.

Sabemos que o lucro é dado por:

$L_{(p)} = (\text{quantidade de cadernos vendidos}) (\text{lucro por caderno})$, isto é:

$L_{(p)} = q_v \cdot (p - 2)$ e, portanto:

$L_{(p)} = 300 (13 - p) (p - 2)$ que atende ao item (a) pedido.

b) Gráfico. Atribuindo valores a essa expressão $L_{(p)} = 300 (13 - p) (p - 2)$, segue a tabela dos lucros:

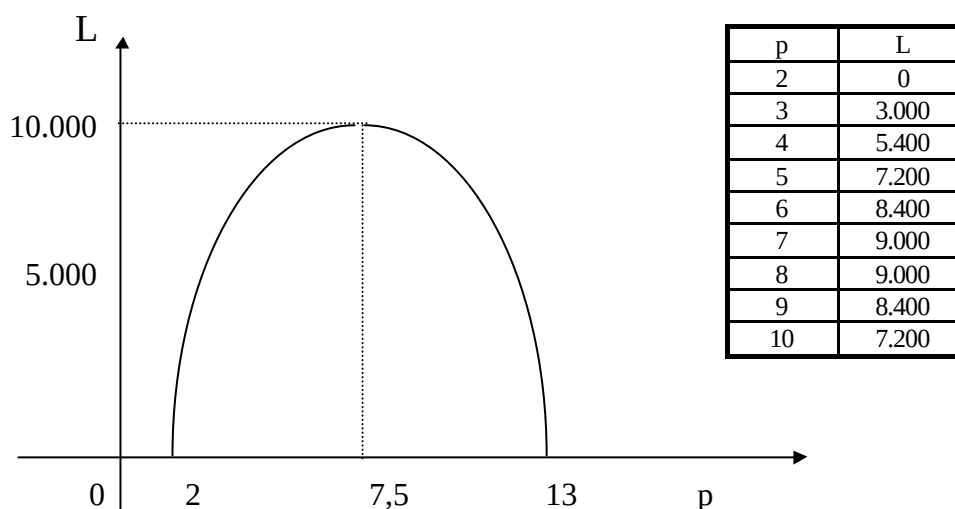


fig. 64

c) O lucro máximo é dado pelo vértice do trinômio do 2º grau

$$p_{\text{máx}} = \frac{13 + 2}{2} = 7,5 \text{ e, substituindo na função lucro, segue o valor:}$$

$$L(\text{máx}) = 300 (13 - 7,5) (7,5 - 2) = L(\text{máx}) = 9075,00$$

Problema do lucro ótimo de venda

Uma livraria adquire livros universitários a R\$ 14,00 cada exemplar. Se o preço de venda for R\$ 20,00, vende 360 exemplares por mês. Com o objetivo de melhorar a venda, reduz o preço e observa que para cada redução de R\$1,00 a venda aumenta em 90 exemplares por mês.

a) Expresse o lucro mensal da livraria com respeito aos livros universitários.

b) Esboce o gráfico.

c) Calcule o preço ótimo de venda.

Resolução:

a) Este problema é semelhante ao anterior e escrevemos:

p : preço de venda ($p \geq 14$ reais tem-se lucro)

q_v : quantidade vendida de livros

para o preço $p = 20$ reais $q_v = 360$ livros por mês,

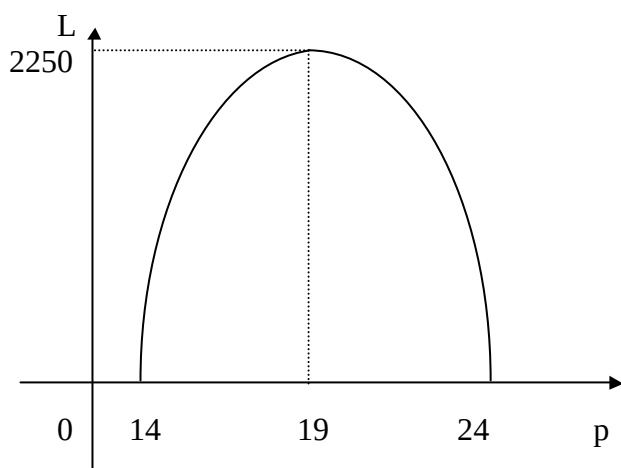
para o preço $p = 19$ reais $q_v = 360 + 1 \times 90$ livros por mês e

para o preço $p = 18$ reais $q_v = 360 + 2 \times 90$ livros por mês, portanto,

para o preço $p \geq 14$, $q_v = 360 + (20 - p) \cdot 90 = 90 (4 + 20 - p) = 90 (24 - p)$

Como o lucro total é o produto da quantidade vendida, pelo lucro unitário de um livro tem-se: $L(p) = 90 (24 - p) (p - 14) = 90 (-p^2 + 38p - 336)$, onde p é entendido como o valor numérico do preço de venda após as reduções e esta equação é a fórmula do lucro.

b) Gráfico. Atribuindo valores à equação $L(p) = 90 (24 - p) (p - 14)$, segue a tabela e o gráfico:



p	L
14	0
15	810
16	1.440
17	1.890
18	2.160
19	2.250
20	2.160
21	1.890
22	1.440

fig. 65

c) Da simetria do trinômio obtemos o preço máximo, determinado pelo vértice da parábola. O preço ótimo de venda é R\$ 19,00, pois para este preço temos lucro máximo de R\$ 2.250,00, como mostra a tabela.

Exercícios Grupo 4 - Tarefas extraclasse

Os exercícios que seguem são denominados tarefas extraclasse, e foram resolvidos pelo professor, no sentido de esclarecer as possíveis dúvidas, nos casos em que houve solicitação por parte dos alunos.

Conhecendo-se a lei da receita total e do custo total, pede-se

a) Ponto crítico.

b) Esboçar o gráfico.

c) Análise econômica.

i) $R_t = 20q$ $C_t = 15q + 50$	<table><tr><th>R_t, C_t</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	R_t, C_t																																																																																																																													
R_t, C_t																																																																																																																															
ii) $R_t = 1000q$ $C_t = 750q + 8000$	<table><tr><th>R_t, C_t</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	R_t, C_t																																																																																																																													
R_t, C_t																																																																																																																															

Conclusões:

Os problemas aplicativos foram apresentados aos grupos e resolvidos por estes. Esses problemas foram recolhidos e discutidos com toda a classe sob o comando do professor, que ouvindo as sugestões corretas as colocava na lousa. Observamos que os grupos não tiveram dificuldades nas suas resoluções por causa da semelhança existente entre os problemas que trabalham as leis de demanda e oferta, com os que trabalham as leis de receita e custo,

Décima terceira semana

Problemas aplicativos variados

Os exercícios e problemas desse grupo procuraram fixar todos os conceitos aplicados até o momento.

1 - Dar a equação da reta $y = ax + b$ que passa pelos pontos:

a) P(0,4) e Q(-2,0)	b) P(0,0) e Q(1,1)
c) P(0,2) e Q(2,0)	d) P(1,1) e Q(3,3)
e) P(-1,2) e Q(3,0)	f) P(-1,1) e Q(1,-1)

2 - Dadas as retas (r) e (s), pede-se:

- a) Determinar o seu ponto de encontro.
- b) Os interceptos com os eixos.
- c) Esboçar o gráfico.

i) r) $y = -x + 10$

s) $y = 2x - 20$

ii) r) $y = 3x - 6$

s) $y = -x + 2$

3 - A tabela abaixo relaciona o número de peças produzidas e o número de peças vendidas. Qual a equação da reta que representa este fenômeno?

a)

produzidas	50	80	100
vendidas	30	42	50

b)

produzidas	10	20	30
vendidas	40	20	0

4 - Nos sistemas abaixo temos as equações de oferta e de demanda, determinar:

i) Ponto de equilíbrio (preço de equilíbrio).

ii) Esboçar o gráfico indicando qual representa a oferta e a demanda.

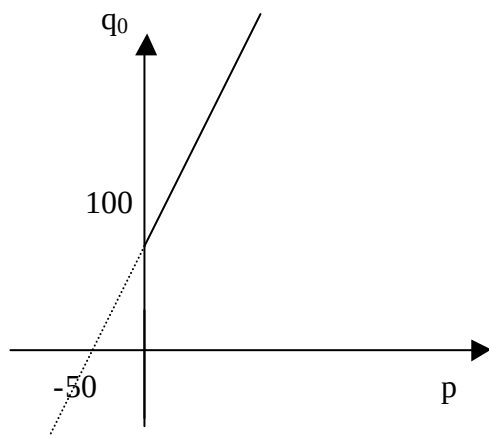
$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} q = 2p - 10 \\ q = -p + 5 \end{cases} & b) \begin{cases} q = p + 2 \\ 2q = -3p + 9 \end{cases} \\
 c) \begin{cases} q = -2p + 3 \\ q = +p - 3 \end{cases} & d) \begin{cases} q = 500 - 10p \\ q = 100 + 2p \end{cases}
 \end{array}$$

5 - A curva de demanda de um artigo é dada pela lei $q_d = 10 - \frac{1}{5}p$. Determinar:

- a) A demanda se o preço é i) R\$ 5,00 e ii) R\$ 10,00.
- b) O preço quando a quantidade demandada é de 100 artigos.
- c) O preço máximo que pode ser demandado.
- d) Que quantidade poderá ser demandada se o preço for liberado gratuitamente.

6 - A curva de oferta de um artigo é dada graficamente. Determinar o que se pede:

- a) A equação que rege a oferta.
- b) A quantidade oferecida se o preço é R\$ 50,00.
- c) O preço se a quantidade ofertada é 250.



7 - Uma fábrica de relógios analisou suas vendas e verificou que estas aumentam 10% para cada redução de R\$ 2,00. Quando o preço do relógio for de R\$ 12,00 serão vendidas 400 unidades. Pede-se:

- A lei da demanda.
- A quantidade demandada se o preço é de R\$ 8,00.
- Esboçar o gráfico.

8 – Sejam: $R_t = 10q$ e $C_t = 5q + 40$ a receita total e o custo total das vendas de livros de matemática financeira, Pede-se:

- Ponto crítico.
- Esboçar o gráfico.
- Interpretar os resultados. (lucro - prejuízo).

9 - Um pneu foi vendido por R\$ 40,00, com lucro de 20% sobre o custo. Qual é o valor do lucro? ($P_v = P_c + L$).

10 - Um balconista recebe 3% de comissão para cada pneu que vende. Com o preço fixo em R\$ 40,00, ele recebeu no mês de maio R\$ 240,00. Quantos pneus ele vendeu ?

11 - Se o custo total é dado por $C_t = q^2 - 2q + 80$, determinar o custo médio ($C_m = C_t/q$) para 12 unidades.

12 - Um comprador verificou que o preço de um televisor de 14 polegadas da marca XYZ na loja B é 20% mais caro que na loja A. Se o preço do televisor é de R\$ 150,00 na loja B, determinar o preço na loja A.

13 - No mercado de ações sabe-se que a rentabilidade das ações na empresa A segue a lei descrita por $R_A = 10 + t$ e da empresa B é $R_B = t^2 - 5t + 10$, onde t é o tempo em meses a partir de 1º janeiro de 2002. Pede-se:

- a) Os gráficos .
- b) Os valores mínimos de cada aplicação.
- c) Analisar os períodos de melhor investimento.

14 - Conhecendo-se a função custo total $C_t = 16.000 + 10q$ e a receita total $R_t = 14q$, determinar:

- a) O custo fixo.
- b) O custo variável.
- c) O preço unitário do produto.
- d) O ponto crítico P_c .
- e) O lucro total.
- f) A análise econômica.

15 - Dadas as leis de oferta e demanda

$$q_d = -p^2 - p + 12$$

$$q_o = p^2 + 6p + 8, \text{ pede-se:}$$

- a) Determinar o ponto de equilíbrio para a oferta e demanda.
- b) Esboçar o gráfico.
- c) A análise econômica.

16 - Sejam as funções de receita e custo dadas por:

$$R_t = -4q^2 + 160q$$

$$C_t = q^2 + 10q + 1000, \text{ pede-se:}$$

- a) Ponto crítico.
- b) Esboço do gráfico.
- c) A expressão do lucro e seu gráfico.
- d) A quantidade para se ter lucro máximo.

17 - O custo de produção de cada roda de liga de alumínio para o carro SP-2 é R\$ 50,00. Sabendo-se que R\$ 5.000,00 é o custo fixo, pede-se:

- a) Expressar o custo total em função do número de unidades produzidas.
- b) O custo da 5ª roda produzida?
- c) O Esboço o gráfico.

18 - Uma impressora matricial é vendida por R\$ 200,00 a unidade. O custo fixo é de R\$ 16.000,00 e o custo de produção de cada impressora é de R\$ 120,00.

- a) Expresse a função custo total de fabricação em termos de número de impressoras fabricadas.
- b) Expresse a função receita total.
- c) A partir de quantas unidades vendidas se terá lucro ?
- d) Se forem vendidas 200 impressoras, qual será o lucro?
- e) Quantas impressoras deverão ser vendidas para se ter um lucro de R\$ 2.000,00 ?

19 - Um torno automático foi adquirido pelo valor de R\$ 30.000,00. Como ao longo do tempo há uma depreciação linear do valor do bem, e após 8 anos essa depreciação foi de R\$ 5000,00.

- a) Expresse a função valor do torno em função do tempo.
- b) Esboce o gráfico.
- c) Qual o valor do torno automático ao final do 6º ano ?
- d) Quantos anos demora para a depreciação ser total ?

20 - Um relojoeiro produz relógios modelo SR-2 ao custo de R\$ 12,00 a unidade. Verifica-se que se o preço do relógio for p reais, serão vendidas, semanalmente, 112 unidades.

- a) Expresse a lei que rege o lucro semanal em função do preço p .
- b) Determinar o lucro semanal se o preço for de R\$ 16,00.

21 - Duas empresas apresentam como custo de fabricação de um mesmo produto as seguintes leis: $C_A = 3q^2 - 24q + 60$ e $C_B = q^2 - 12q + 60$.

- a) Determinar a quantidade para a qual se tem o mesmo custo.
- b) Compare as duas empresas em relação à quantidade fabricada.

22 - Um fabricante de aparelhos de rádio produz q aparelhos por semana ao custo de

$$C_t(q) = \frac{1}{25} q^2 + 3q + 100 \text{ em reais. Determinar:}$$

- a) O custo fixo.
- b) O custo para a produção de 5 rádios.
- c) O custo de produção do 5º rádio.

23 - Uma usina de açúcar tem um custo total mensal dado pela lei $C_t(q) = \frac{1}{10} q^2 + 5q + 800$ em reais, onde q representa a quantidade de toneladas produzidas mensalmente. Determinar:

- a) O custo mensal fixo.
- b) O custo para a produção de 10 toneladas.

Conclusões:

Sob o título de Problemas Aplicativos Variados, enunciamos exercícios de fixação, com assuntos dados até o momento, iniciando com exercícios simples de construção de retas por dois pontos dados. Sempre utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas, propusemos problemas aplicativos envolvendo a função afim com conceitos de demanda, oferta, receita e custo. Esses conceitos são utilizados a todo instante, nas disciplinas profissionalizantes. Com essas aplicações a matemática contribuiu para a preparação dos alunos da área profissionalizante. Quanto aos problemas aplicativos variados, estes foram entregues aos alunos com antecedência e, no dia da entrega, foram resolvidos na lousa somente os solicitados, por apresentarem dúvidas.

Os problemas de números 15, 16 e 21 foram os mais solicitados, pois apresentavam maiores dificuldades na sua resolução. Essas dificuldades ocorreram pelo fato de ser necessário resolver sistemas de equações quadráticas para a determinação dos pontos de equilíbrio e crítico. Também porque, para a representação gráfica eram exigidos os pontos de interceptos.

Décima quarta semana

5.5 Função modular

Apresentamos o conceito de função modular atendendo ao conteúdo programático, bem como ao pré-requisito para a disciplina estatística. Os alunos, reunidos em grupos, receberam o enunciado da situação-problema sugerida por Fernanda e, após a plenária, foram feitas as devidas formalizações da função modular, bem como sua representação gráfica.

Situação-problema

Fernanda apresenta os conjuntos A e B abaixo e pede para Pedro descobrir qual a função que transforma os elementos de A em elementos de B.

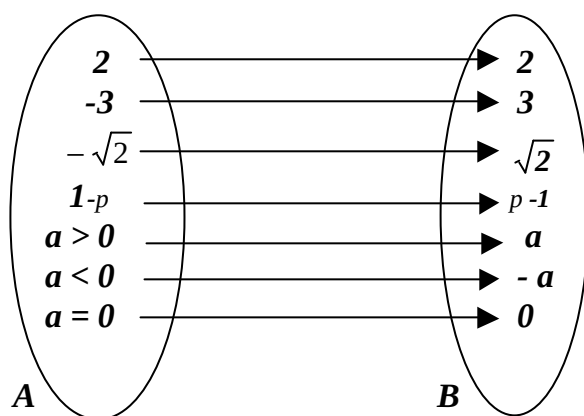


fig. 66

Pedro observou que o conjunto B é formado só de elementos positivos, portanto a lei é uma função de A em B que transforma todos os elementos de A em números positivos e é denominada função modular, cujo símbolo matemático é $| \cdot |$.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se diz função modular se a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $|x|$, definido por:

$$|x| = -x \text{ se } x < 0$$

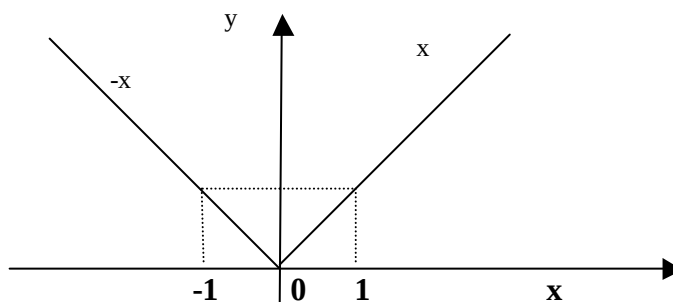
$$|x| = x \text{ se } x \geq 0$$

Representação gráfica da função: $y = |x|$

$$|x| = x \text{ se } x \geq 0$$

$$|x| = -x \text{ se } x < 0$$

fig. 67



Exemplo

Calcular os módulos.

a) $|-3| = 3$

b) $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

c) $|-3/2| = 3/2$

Exercícios de aplicação 4

1 - Esboçar o gráfico das funções modulares

a) $f(x) = |x - 1|$. Da definição de módulo podemos escrever

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

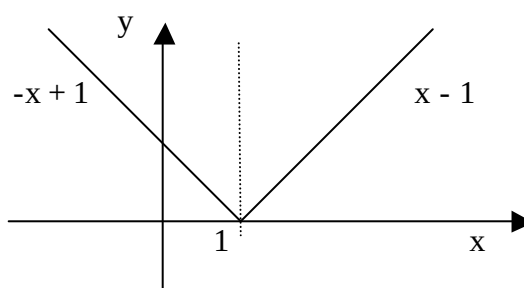


fig. 68

b) $f(x) = |x + 2|$. Da definição de módulo, temos:

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

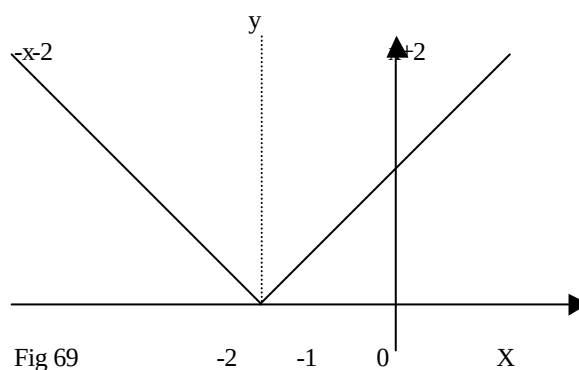


Fig 69

c) $f(x) = 2 + |x + 1|$. Da definição de módulo, temos:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + (x + 1) = x + 3 & \text{se } x \geq -1 \\ 2 - (x + 1) = -x + 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

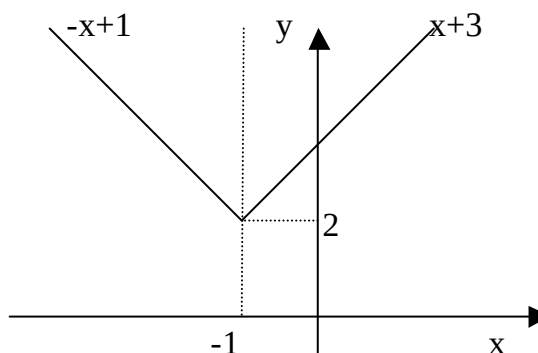


fig. 70

d) $f(x) = x + |x|$. Usando a definição de módulo, temos:

$$f(x) = \begin{cases} x + x = 2x & \text{se } x \geq 0 \\ x - x = 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

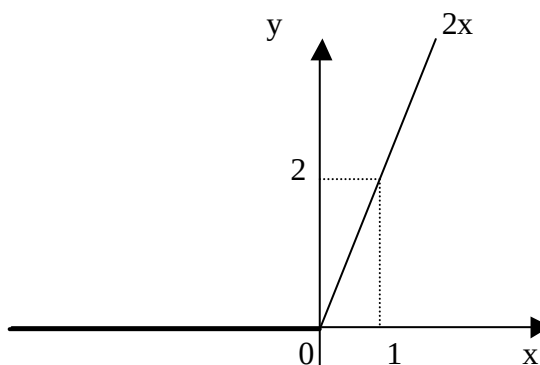


fig. 71

Conclusões:

O conceito de módulo sempre apresentou dificuldades para os alunos do Curso de Administração de Empresas. Procuramos apresentar esse conceito de maneira simples, deixando de propor problemas aplicativos com as leis de oferta, de demanda, de receita e de custo, não só por causa de sua complexidade, mas também por apresentar inadequação aos modelos que ocorrem em economia e administração.

Décima quinta semana

O procedimento usado para essa aula é semelhante ao utilizado na anterior.

5.6 Função raiz quadrada

Situação-problema

Fernanda comentou com Pedro que foi ao Posto de Saúde com sua vizinha que levou a filha de 6 meses de idade para fazer exames periódicos.

O médico avaliou o crescimento pelo ganho de peso e estatura e depois comparou com uma tabela fornecida pela Secretaria da Saúde para verificar se os dados indicavam normalidade.

A terceira medida executada pelo médico consistiu no uso de uma fita métrica com a qual ele avaliou o perímetro cefálico e cujo valor obtido foi de 43 cm.

A tabela fornecida pela Secretaria da Saúde é:

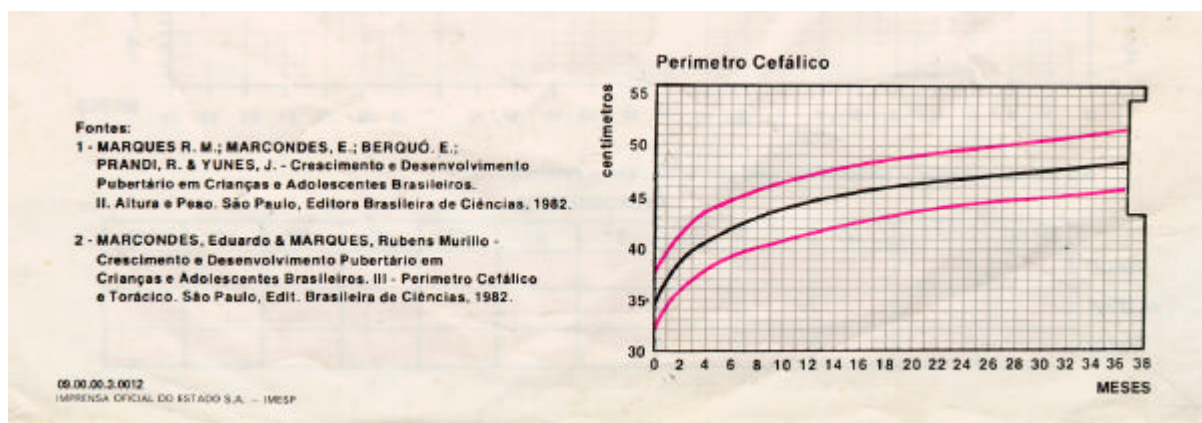


fig. 72

O médico verificou que a medida 43cm encontrava-se na faixa de normalidade.

Fernanda perguntou a Pedro:

$\frac{3}{4}$ Podemos definir três funções por essa tabela ?

Pedro respondeu:

— Sim, o domínio é o mesmo para as três funções e são números reais positivos que variam do dia do nascimento até o 38º mês e o conjunto imagem são medidas em centímetros do perímetro cefálico. Assim, os conjuntos imagem são dados por:

- a) Curva inferior: de 32 cm a 46 cm
- b) Curva média: de 35 cm a 48 cm
- c) Curva superior: de 38 cm a 52 cm

— Pedro, o que indica para você se no 10º mês a medida do perímetro cefálico for 50 cm?

Pedro respondeu:

— Penso que, no momento em que o médico obtém essa medida e verifica que está acima dos valores normais, ele irá efetuar exames para descobrir as causas da anormalidade.

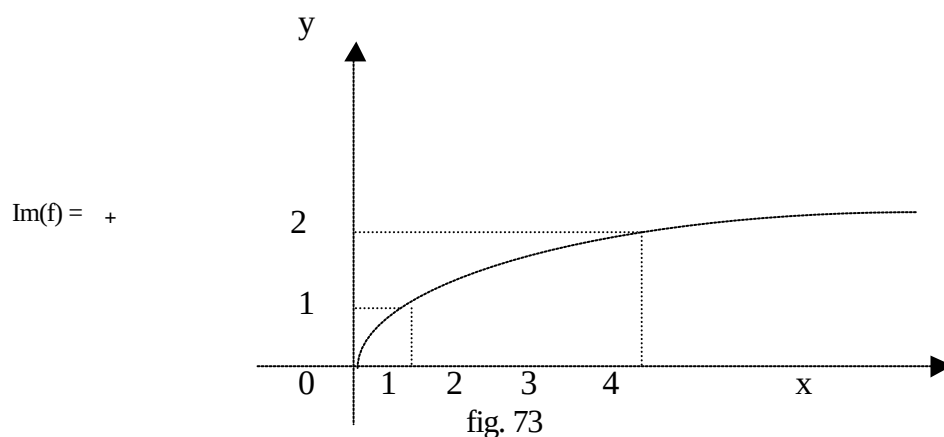
O professor diz que a função matemática denominada raiz quadrada assemelha-se a esta função, pois, no início, cresce “rapidamente”; isto é, o aumento do perímetro cefálico é grande nos primeiros meses após o nascimento, o mesmo ocorrendo com a função raiz quadrada. Depois, o crescimento é mais lento, tanto para a função raiz quadrada como para o perímetro cefálico.

5.6.1 Definição da função raiz quadrada

O professor apresentou a definição de função raiz quadrada, seu gráfico e recordou as propriedades da raiz quadrada de números reais não negativos e também esboçou os gráficos de algumas funções.

Chama-se função raiz quadrada a $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$



Propriedades da raiz quadrada:

$$P_1 : \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \geq 0$$

$$P_2 : \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x^2} = |x|$$

$$P_3 : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x_1 \times x_2} = \sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2}$$

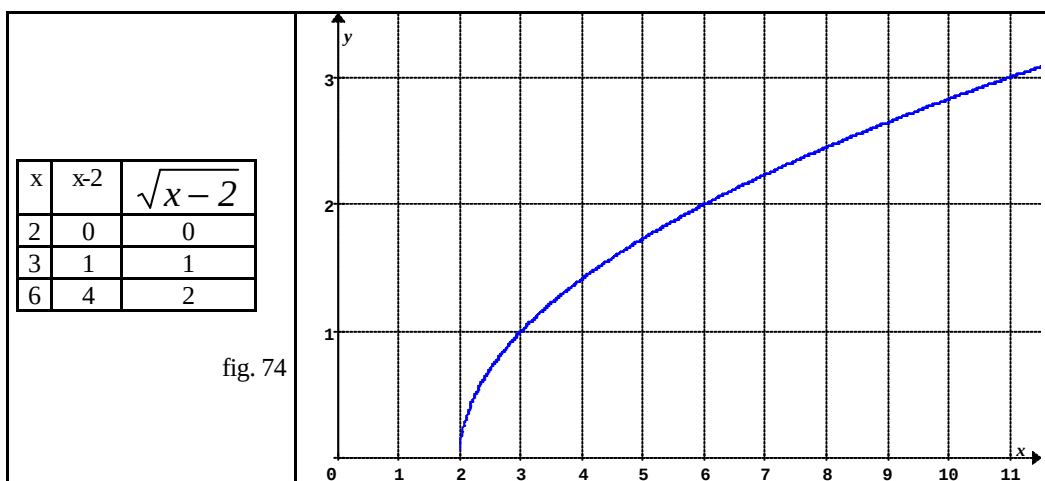
$$P_4 : \forall x_1 \in \mathbb{R}_+, \forall x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$$

Situações-problema envolvendo a função raiz quadrada dadas por leis.

Esboçar o gráfico conhecendo-se as funções:

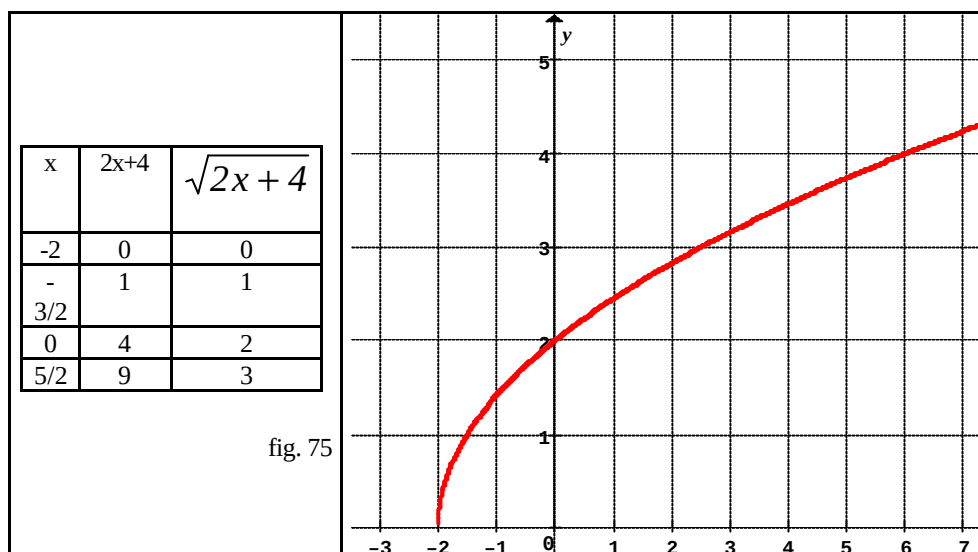
a) $f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto \sqrt{x-2}$$



Atribuímos valores a x de maneira que $x-2$ seja um quadrado perfeito, isto é, 0, 1, 4, 9, etc. pois, assim, obtemos raízes exatas.

b) $f : [-2, +\infty[\rightarrow$
 $x \mapsto \sqrt{2x+4}$



Atribuímos valores a x de maneira que $2x+4$ seja um quadrado perfeito, isto é, 0, 1, 4, 9, etc. pois, assim, obtemos raízes exatas.

5.6.2 Aplicações da função raiz quadrada

O professor distribuiu para cada aluno os problemas aplicativos que seguem e após a entrega das soluções pelos alunos, estes, reunidos numa plenária e liderados pelo professor, apresentaram as resoluções.

Problema da vila dos estudantes

Um empresário construiu um conjunto de casas denominado Vila dos Estudantes e aluga cada casa a p reais por dia. Sabe-se que a quantidade de casas demandada é dada por

$$q = \sqrt{225 - 9p}.$$

Pede-se:

a) O esboço do gráfico.

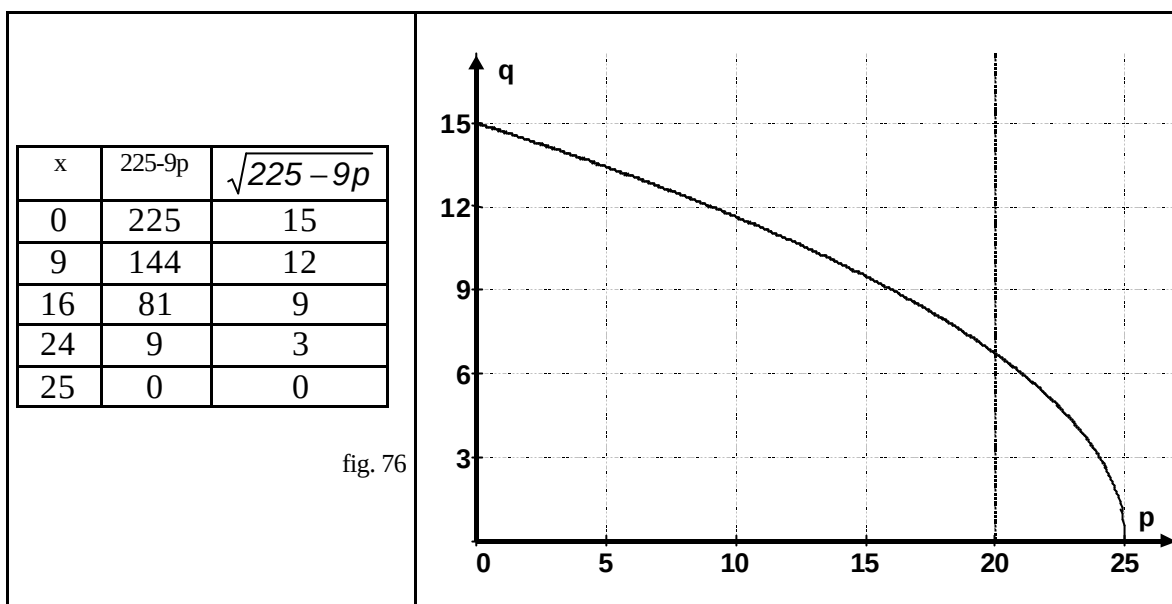
b) O número de casas alugadas se o aluguel diário de cada casa é R\$ 25,00.

Resolução:

a) Se o preço da diária for zero reais, isto é, a diária for grátis, temos

$$q = \sqrt{225 - 0} = 15 \text{ casas demandadas.}$$

Para elaborar o esboço do gráfico atribuímos valores a p de maneira que $225-9p$ seja quadrado perfeito.



b) Se o preço for $p=25$ reais, então a quantidade demandada é dada por $\sqrt{225-9 \cdot 25}=0$; logo nenhuma casa será alugada.

Problema da demanda por latas de azeite

As funções demanda e oferta por latas de azeite de oliva são dadas por:

$$q_d=9-p \quad \text{e} \quad q_o=\sqrt{5p+5}. \text{ Pede-se:}$$

a) O ponto de equilíbrio.

b) Esboçar num gráfico as funções demanda e oferta.

Resolução:

a) Como o ponto de equilíbrio é aquele em que a demanda é igual à oferta, escrevemos $9-p=\sqrt{5p+5}$. Elevando ao quadrado e supondo $9-p \geq 0$, segue $81-18p+p^2=5p+5$ ou $p^2-23p+76=0$.

Essa equação tem como raízes $p=4$ e $p=19$. A raiz 19 não serve, pois $9-19$ é igual a -10 que não satisfaz a condição $9-p \geq 0$. Logo o ponto de equilíbrio é dado por $P_E(4,5)$.

b) Para obtermos o gráfico, devemos determinar, em primeiro lugar, os interceptos:

para $p=0$ segue $q_d=9$ e $A(0,9)$

para $p=0$ segue $q_o=\sqrt{5} \cong 2,2$ e $B(0, \sqrt{5})$. Assim, podemos esboçar o gráfico.

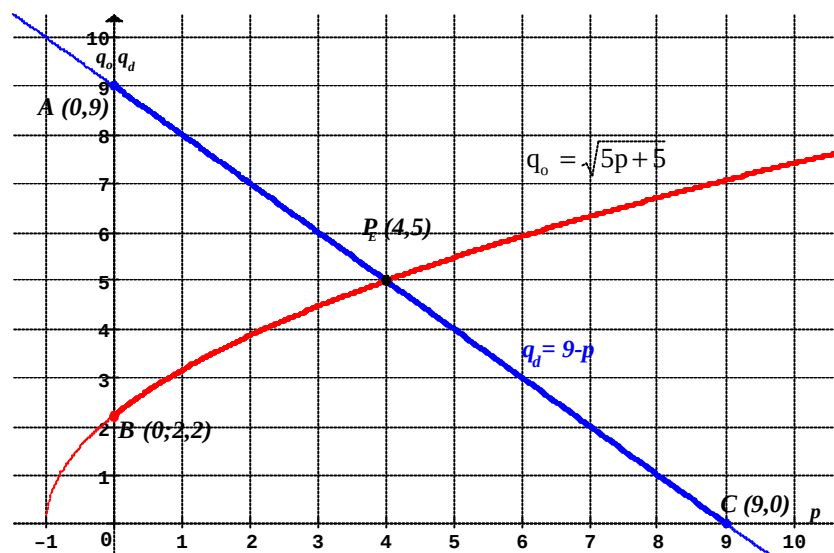


fig. 77

Conclusões:

Nessa aula, os alunos não apresentaram dificuldades, pois houve muita participação do professor nos exercícios introdutórios de construções de gráficos.

Décima sexta semana

Problemas aplicativos – Aplicações conhecendo-se as leis de oferta e demanda

Os problemas foram entregues aos alunos individualmente. O professor objetivou com essa forma, avaliar a aprendizagem de cada aluno. Cada problema, depois de trabalhado pelos alunos, foi discutido em conjunto na lousa, chegando-se à solução.

Aplicação 1

Dadas as leis de oferta e demanda, Pede-se:

- Ponto de equilíbrio.
- Gráfico.
- Análise econômica.

$$\begin{cases} q_d = 11 - 2p \\ q_o = \sqrt{8p + 1} \end{cases}$$

Resolução:

a) Para determinarmos o ponto P_E , devemos impor $q_d = q_o$, ou seja $\sqrt{8p+1} = 11 - 2p$. Elevando ao quadrado os dois membros da equação e impondo que $11 - 2p \geq 0$, isto é, $p \leq \frac{11}{2}$, segue $p^2 - 13p + 30 = 0$ e as raízes $p=3$ e $p=10$ seriam os preços de equilíbrio. Mas $p=10$ não serve, pois não atende à hipótese $p \leq \frac{11}{2}$. Assim, o ponto de equilíbrio é $P_E(3,5)$.

b) Para esboçar o gráfico procuramos os interceptos de cada lei. Assim:

de $p = 0$ segue $q_d = 11$ e escrevemos $A_d(0,11)$

de $p = 0$ segue $q_o = 1$ e escrevemos $B_o(0,1)$ e

de $q_d = 0$ segue $11 - 2p = 0$ e $p = 5,5$. Escrevemos $C_d(5,5;0)$

de $q_o = 0$ segue $8p + 1 = 0$ e $p = -1/8$. Escrevemos $D_o\left(-\frac{1}{8}; 0\right)$

Usando os pontos obtidos e observando que $q_d = 11 - 2p$ é reta e

$q_o = \sqrt{8p+1}$ é a função raiz quadrada, podemos esboçar o gráfico.

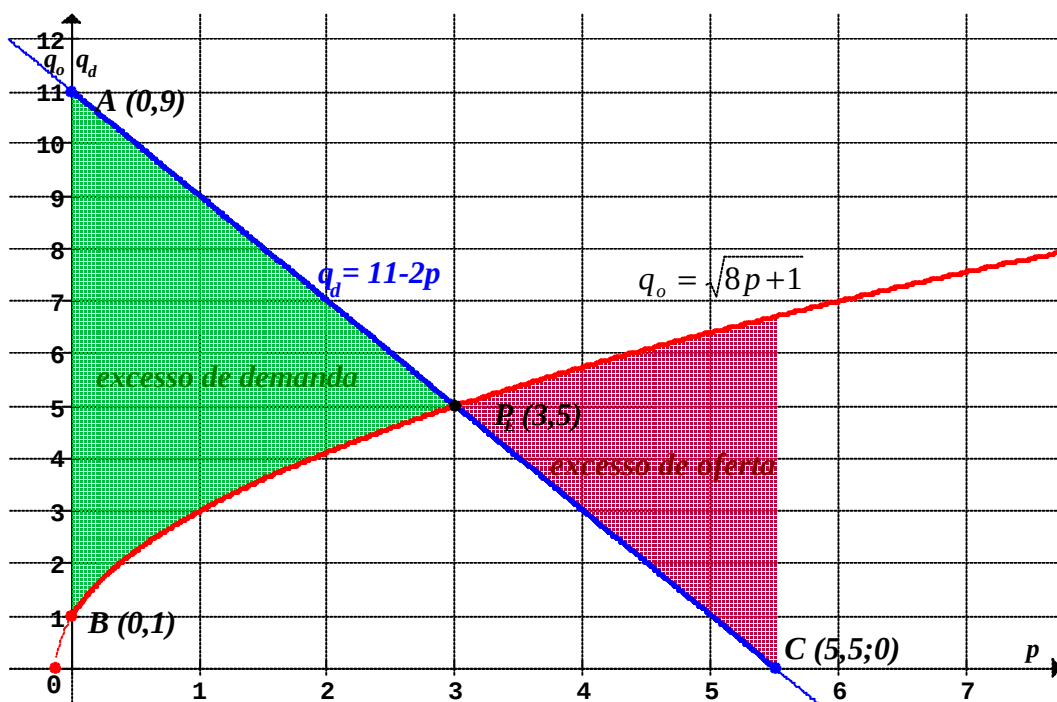


fig. 78

b) Análise econômica

Se o preço $0 \leq p \leq 3$, tem-se que a quantidade demandada é maior ou igual à quantidade ofertada.

Se o preço $3 < p \leq 5,5$, tem-se que a quantidade ofertada é maior que a quantidade demandada.

Aplicação 2

Dadas as leis da receita e custo $\begin{cases} R_t = \frac{6}{11}q \\ C_t = \sqrt{q+25} \end{cases}$, pede-se:

a) Ponto crítico.

b) Gráfico.

c) Análise econômica.

Resolução:

a) Para determinarmos o ponto crítico, colocamos $C_t = R_t$, isto é, $\sqrt{q+25} = \frac{6}{11}q$.

Elevando ao quadrado e impondo $q \geq 0$, segue $36q^2 - 121q - 3025 = 0$. Quando da discussão na plenária, o professor observou que, para o valor $q=11$ a receita total é igual a 6 e também o custo total é igual a 6. Portanto, $q=11$ é uma solução e escreveu o termo $(q-11)$ e em seguida, obteve por divisão o segundo termo da fatoração $(36q+275)$. Assim, obtemos:

$(q-11).(36q+275) = 0$ e segue $q_c - 11 = 0$ ou $(36q+275) = 0$. Daí vem $q_c = \frac{-275}{36}$ que,

apesar de ser uma solução do problema, não serve pois, não existem quantidades negativas. Portanto $P_c(11,6)$.

b) Para esboçar o gráfico, determinamos os interceptos.

Se $q=0$ segue $C_t=5$ e $A_c(0,5)$ e $R_t=0$ e $B_R(0,0)$.

Se $C_t=0$ segue $q=-25$ e $C_t(-25,0)$.

Se $R_t=0$ segue $q=0$ e $B_R(0,0)$. Assim segue o gráfico:

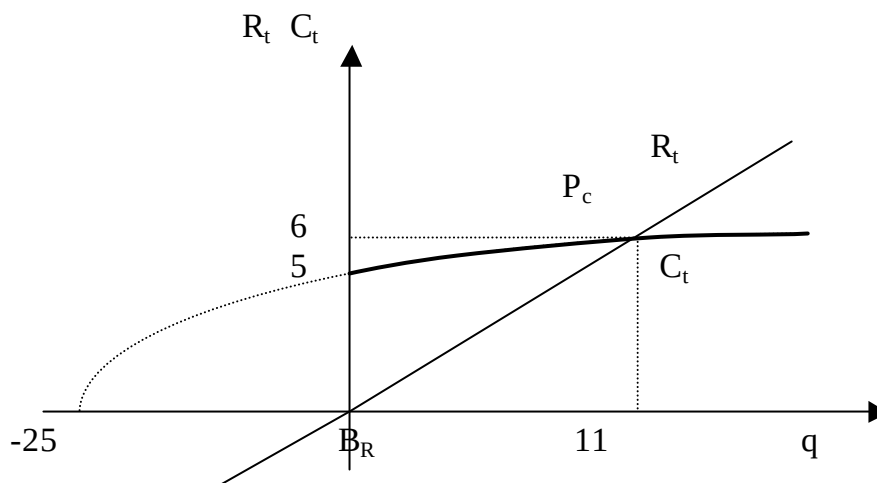


fig. 79

c) Análise econômica

Se $0 \leq q \leq 11$, $C_t \geq R_t$ (prejuízo)

Se $q > 11$, $R_t > C_t$ (lucro)

Exercícios Grupo 5 - Tarefas extraclasse

1) Um fabricante de geladeiras produz q aparelhos por semana ao custo total de

$C_t = \sqrt{q + 4}$ e receita total $R_t = (3/5)q$ (reais). Pede-se:

- a) Ponto crítico.
- b) Esboçar o gráfico das duas curvas.
- c) Mostrar a partir de que valor se tem lucro.

2) Um fabricante de aparelhos de rádio produz q aparelhos por semana ao custo total e receita total dados por

$C_t = \sqrt{3q + 1}$ e $R_t = (4/5)q$ (reais). Pede-se:

- a) Ponto crítico.
- b) Esboçar o gráfico das duas curvas.
- c) Análise econômica.

Conclusões:

Os grupos trabalharam os problemas aplicativos envolvendo as leis: demanda e oferta, custo e receita, lucro e prejuízo, quando nos casos em que essas funções matemáticas eram dadas pelas funções raiz quadrada e afim. As dificuldades encontradas pelos grupos apareceram quando se pedia para obter o ponto de equilíbrio e o ponto crítico, pois nesse momento era necessário resolver uma equação irracional. Essas dúvidas foram sanadas pelo professor durante a plenária.

Décima sétima semana

Foram reservados instantes iniciais desta aula para atender às dúvidas dos alunos na tarefa extraclasse.

A seguir, apresentamos aos grupos uma situação-problema da área de Administração de Empresas em que, ao longo de sua resolução e de maneira natural, surge a expressão algébrica da função recíproca ou hipérbole equilátera.

A dinâmica de trabalho utilizada é aquela adotada nos encontros anteriores. Os alunos reunidos em grupos, recebem o enunciado da situação-problema sugerida por Pedro e, após a plenária, são feitas as devidas formalizações do conteúdo referente à função hipérbole equilátera, bem como sua representação gráfica.

5.7 Função recíproca ou hipérbole equilátera

¾ Fernanda! Sabe-se que o Estado do Paraná é um dos maiores produtores de soja do Brasil e que sua produção é exportada pelo Porto de Paranaguá. No transporte da soja, da cidade de Londrina até o porto, é cobrado um frete fixo de R\$ 300,00 independente da quantidade de toneladas transportadas. Assim, caminhões maiores geram para o produtor um custo menor por tonelagem. Estude o custo por tonelagem transportada e defina a função, supondo que o caminhão transporte até 20 toneladas.

Fernanda, depois de explorar o problema com seu grupo e ajudada pelo professor, escreveu na lousa:

Se o caminhão transportar

1 tonelada, o custo é $C_1 = \text{R\$ } 300,00$;

2 toneladas, o custo é $C_2 = \text{R\$ } 150,00$, isto é, $C_2 = \text{R\$ } 150,00$ por tonelada;

3 toneladas, o custo é $C_3 = \text{R\$ } 100,00$, isto é, $C_3 = \text{R\$ } 100,00$ por tonelada. Assim definimos custo médio por $C_m = \text{R\$ } 300,00/q$, onde q é o número de toneladas transportadas.

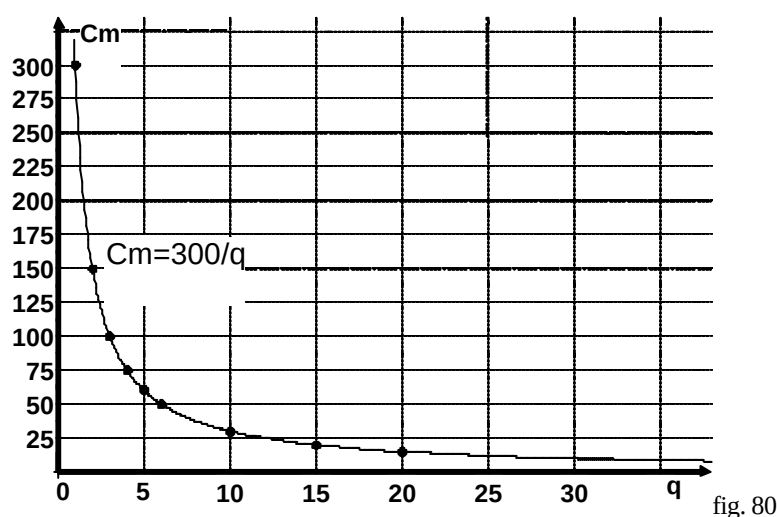


fig. 80

q	1	2	3	4	5	6
C_m	300	150	100	75	60	50

Após as conclusões da plenária, o professor apresentou a definição da nova função.

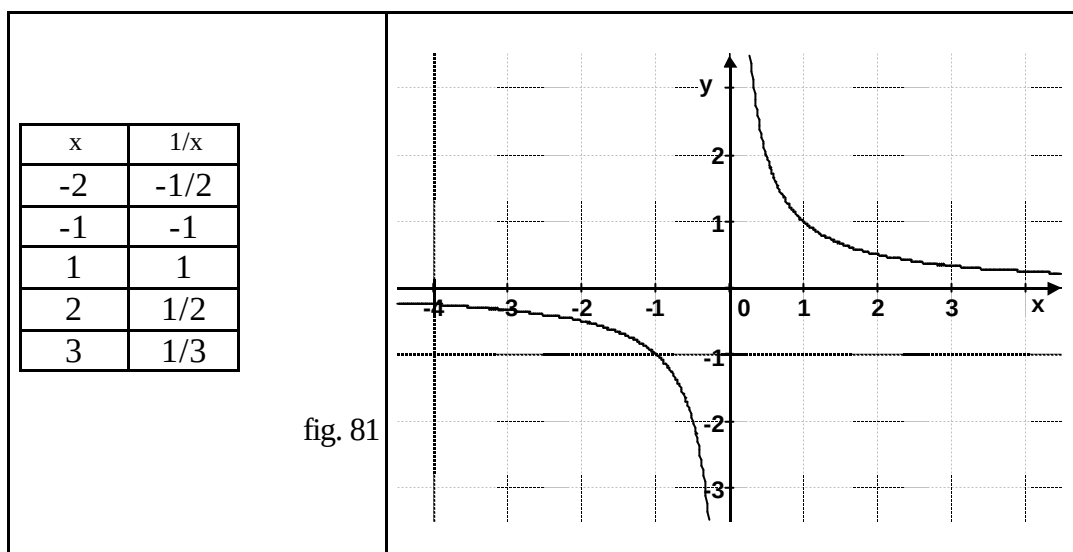
A função $C_m=300/q$ denomina-se função hipérbole equilátera e se escreve simbolicamente:

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ q \mapsto \frac{300}{q}$$

5.7.1 Definição de função recíproca ou hipérbole equilátera

Chama-se função recíproca ou hipérbole equilátera a função definida por:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \text{ e tem a figura abaixo como gráfico.}$$



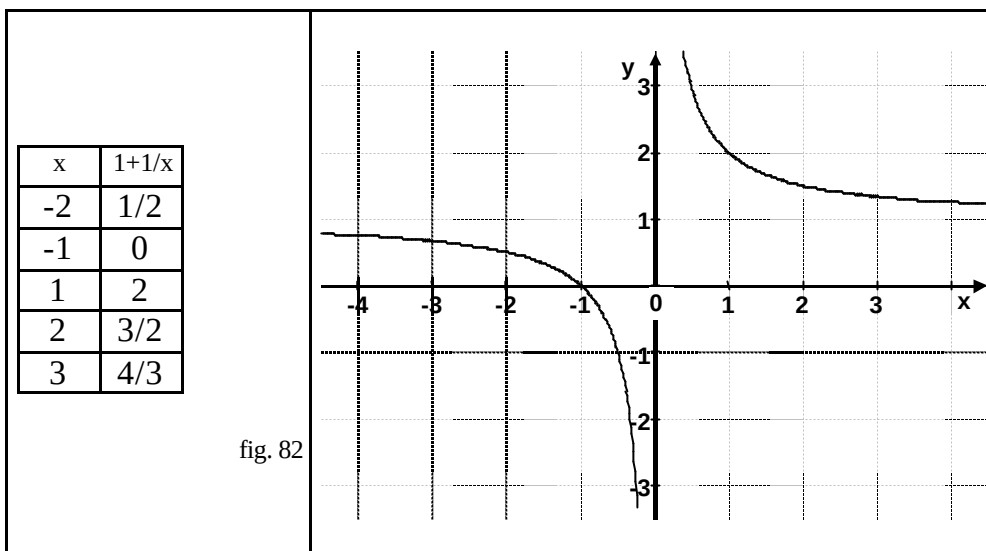
Exercícios de aplicação 5

Esboçar o gráfico das funções.

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \quad \text{Para esboçar o gráfico dessa função atribuímos valores à variável}$$

x, como indicado na tabela.



b) $f: -\{1\} \rightarrow$

$$x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

O gráfico é semelhante ao anterior, havendo uma translação do ponto zero para o ponto 1.

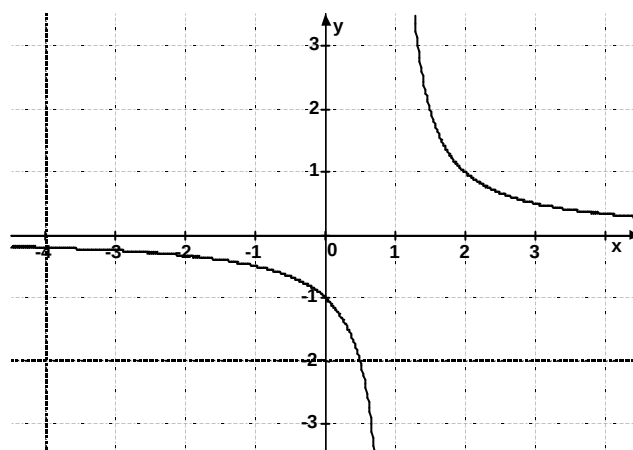


fig. 83

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{x-1}.$$

O gráfico é igual ao anterior, deslocando-se de uma unidade no eixo oy .

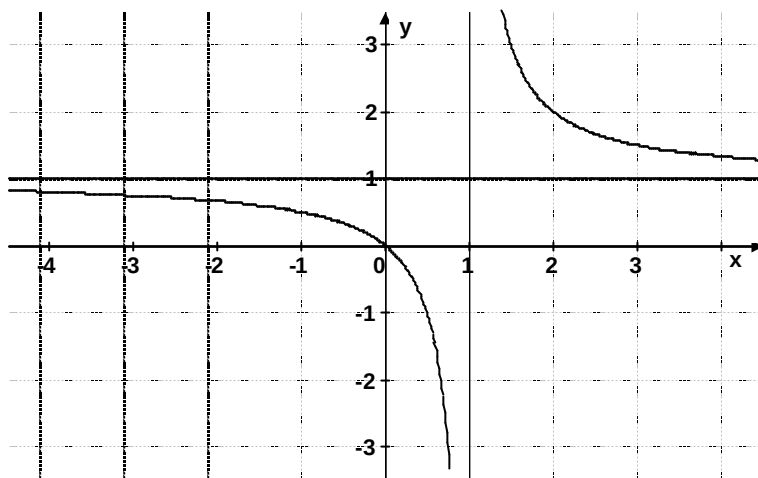


fig. 84

Generalizando, a expressão $y = a + \frac{1}{x-b}$ indica que a função não está definida no ponto b e que, nas vizinhanças desse ponto, o gráfico tende para valores grandes que tendem para o infinito (notação: $\pm \infty$) e o valor a indica que o gráfico de $\frac{1}{x-b}$ tem todos os seus pontos aumentados de a , ou diminuídos, caso a seja negativo.

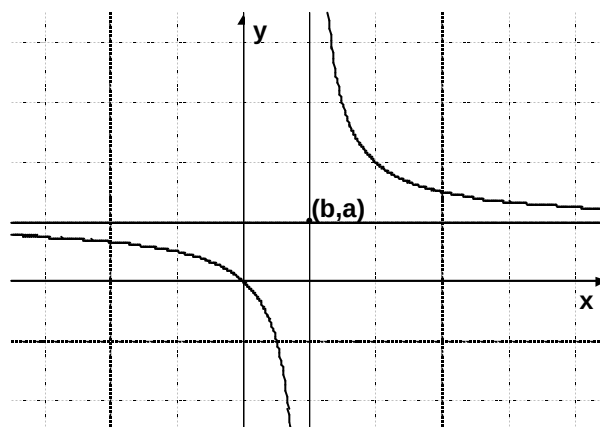


fig. 85

Décima oitava semana

5.7.2 Problemas aplicativos da função recíproca ou hipérbole equilátera

Após conhecermos a função hipérbole, propusemos aplicações para a fixação dos conceitos trabalhados. Os alunos, individualmente, buscaram a solução desses problemas. Na plenária foram discutidas as resoluções apresentadas e relatados os resultados obtidos em consenso.

Problema da venda de DVD

Um DVD é vendido por p reais. Sabe-se que a demanda de q centenas de aparelhos por mês é dada pela expressão:

$$q_d = -6 + \frac{90}{p+5} \text{ e sua lei de oferta é dada por } q_o = \frac{2}{5}p + 1. \text{ Pede-se:}$$

- a) O ponto de equilíbrio.
- b) O esboço do gráfico da demanda e da oferta.
- c) A análise econômica.

Resolução:

a) O ponto de equilíbrio obtém-se quando a demanda é igual à oferta, isto é:

$$-6 + \frac{90}{p+5} = \frac{2}{5}p + 1 \text{ e } \frac{90}{p+5} = \frac{2}{5}p + 7, \text{ ou ainda } \frac{90}{p+5} = \frac{2p+35}{5}.$$

Portanto $(p+5)(2p+35) = 450$. Efetuando o produto e simplificando, temos:

$$2p^2 + 45p - 275 = 0. \text{ Usando fórmula de Bhaskara,}$$

obtemos $D = 45^2 - 4(2)(-275) = 4225$, e as raízes

$$p_1 \text{ e } p_2 = \frac{-45 \pm 65}{4} = \begin{cases} p_1 = \frac{-110}{4} = \frac{-55}{2} = -27,5 \text{ (não tem significado)} \\ p_2 = \frac{20}{4} = 5 \end{cases}$$

Logo $p_E = \text{R\$ } 5,00$ tem significado e $P_E = (5,3)$ é o ponto de equilíbrio.

b) Para construirmos o gráfico determinaremos, em primeiro lugar, os interceptos, tomando $p=0$ e $q=0$.

i) $p=0$, então $q_d=12$ e indicamos por $A(0,12)$

ii) $p=0$, então $q_o=1$ e indicamos por $B(0,1)$ e se $q_o=0$ tem-se $p = -\frac{5}{2}$ e indicamos por

$$D(-\frac{5}{2}, 0).$$

iii) $q_d=0$, então $-6 + \frac{90}{p+5} = 0$, segue $6p+30=90$, e $p=10$, logo $C(10,0)$.

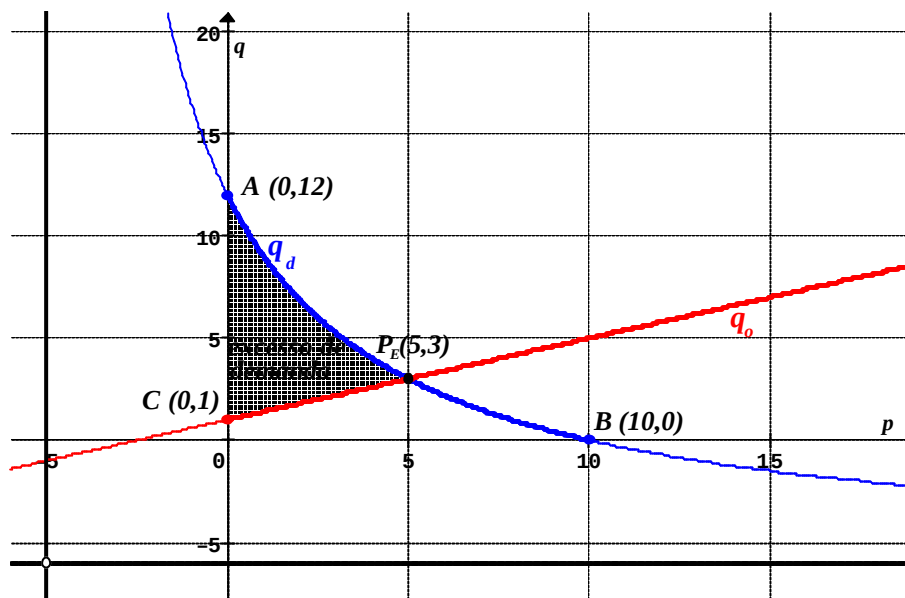


fig. 86

c) Olhando no gráfico, podemos afirmar que:

se $0 \leq p \leq 5$, então a quantidade demandada é maior que a quantidade ofertada

se $5 < p \leq 10$, então a quantidade ofertada é maior que a quantidade demandada.

Problema das lâmpadas fluorescentes

As leis de oferta e demanda de lâmpadas fluorescentes da fábrica LF são dadas por:

$$\begin{cases} q_d = -4 + \frac{200}{p+20} \\ q_o = \frac{3}{5}p + 1 \end{cases}$$

Pede-se:

a) O ponto de equilíbrio.

b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda.

c) A análise econômica.

Resolução:

a) Para determinar o ponto de equilíbrio P_E impomos que:

$$q_d = q_o, \text{ isto é, } -4 + \frac{200}{p+20} = \frac{3}{5}p + 1 \text{ e, fazendo as operações indicadas,}$$

obtemos $3p^2 + 85p - 500 = 0$, cujas raízes são $p = 5$ e $p = -33,33$. Esta última não serve, pois não existe preço negativo. Assim, o ponto de equilíbrio é $P_E(5,4)$.

b) Para construirmos o gráfico, determinamos os interceptos.

Se $p = 0$ segue, $q_d = 6$ e temos o ponto $A_d(0,6)$

Se $p = 0$ segue, $q_o = 1$ e temos o ponto $B_o(0,1)$

para $q_d = 0$, segue $p = 30$ e temos o ponto $C_d(30,0)$

para $q_0 = 0$, segue $p = -5/3$ e temos o ponto $D_0(-5/3,0)$

Sabemos que q_0 é reta e passa B_0 , D_0 e P_E e q_d é uma hipérbole e passa por A_d , C_d e P_E . Assim, esboçamos o gráfico:

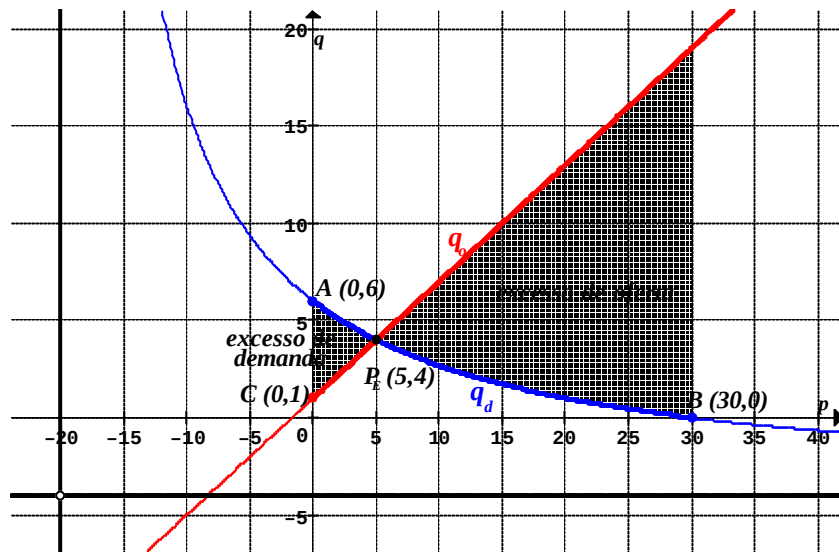


fig. 87

c) A análise econômica:

Se $0 \leq p \leq 5$, então $q_d \geq q_0$

Se $5 < p \leq 30$, então $q_d < q_0$

Suponha que as leis das lâmpadas fluorescentes fossem dadas pelas leis:

$$\begin{cases} q_d = -2 + \frac{100}{p+10} \\ q_0 = 0,03p^2 \end{cases} \quad \text{Pede-se:}$$

a) O ponto de equilíbrio.

b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda.

c) A análise econômica.

Para a resolução deste problema, o professor fez referência ao método de fatoração por decomposição, dizendo que os alunos já tinham visto esse método na sétima série do ensino fundamental. É claro que os alunos não se lembravam, mas o professor recordou.

a) Para determinar P_E , colocamos $q_d = q_0$ e assim $0,03p^2 = -2 + \frac{100}{p+10}$, segue

$3p^3 + 30p^2 + 200p - 8000 = 0$. Como a equação é do 3º grau, resolvemos usando fatoração por decomposição e substituímos $30p^2 = 60p^2 - 30p^2$; $200p = 800p - 600p$. Assim, escrevemos:

$$(3p^3 - 30p^2) + (60p^2 - 600p) + (800p - 8000) = 0$$

$$3p^2 \cdot (p-10) + 60p \cdot (p-10) + 800 \cdot (p-10) = (p-10) \cdot (3p^2 + 60p + 800) = 0$$

Logo, ou $p-10 = 0$ segue $p_E=10$ e $P_E(10,3)$, ou $3p^2 + 60p + 800 = 0$, mas esta equação não admite raízes reais, pois $\Delta = 60 \cdot 60 - 4 \cdot 3 \cdot 800 < 0$

b) Para esboçar o gráfico, determinamos os interceptos:

se $p = 0$, segue $q_d = 8$ e $A_d(0,8)$

se $p = 0$, segue $q_0 = 0$ e $B_0(0,0)$ e para

se $q_d = 0$, segue $p = 40$ e $C_d(40,0)$

se $q_0 = 0$, segue $p = 0$ e $B_0(0,0)$

Como q_d é uma função hipérbole, então seu gráfico passa por $A_d(0,8)$, $P_E(10,3)$ e $C_d(40,0)$ e q_0 é uma função quadrática, então seu gráfico passa por $B_0(0,0)$ e $P_E(10,3)$. Assim, podemos esboçar os gráficos.

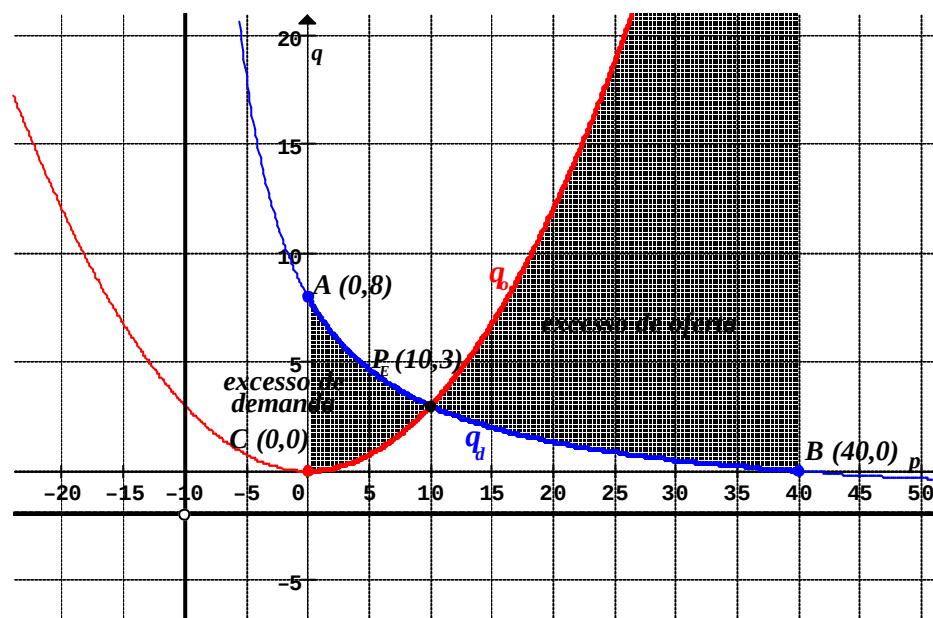


fig. 88

c) Análise econômica

Se $0 \leq p \leq 10$, então $q_d \geq q_0$

Se $10 < p \leq 40$, então $q_d < q_0$

Décima nona semana

Considerando as dificuldades observadas nos problemas aplicativos da aula anterior, propusemos exercícios de aplicação envolvendo a função hipérbole, que foram resolvidos individualmente pelos alunos e discutidas as soluções na plenária.

Exercícios de aplicação 6

1. Dadas as leis de oferta e demanda, determinar:

- a) O ponto de equilíbrio.
- b) O gráfico.
- c) A análise econômica.

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \begin{cases} q_d = 2 + \frac{1}{p+1} \\ q_o = \frac{2}{3}p + 1 \end{cases} & \text{ii)} \begin{cases} q_d = -6 + \frac{169}{p+12} \\ q_o = p + 6 \end{cases} & \text{iii)} \begin{cases} q_d = -5 + \frac{120}{p+10} \\ q_o = p - 2 \end{cases} \end{array}$$

Conclusões:

Sempre aplicando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas, com o esquema de aula proposto e iniciando os conteúdos programáticos a serem trabalhados com situações-problema desafiadores, levando os alunos a pensar, a explorar e a buscar soluções, no encerramento do segundo bimestre letivo podemos concluir que:

Os problemas aplicativos envolvendo as funções hipérbole, afim e quadrática foram os que mais apresentaram dificuldades para os alunos pois, para a obtenção dos pontos de equilíbrio, em cada caso tem-se que resolver sistemas mais complexos, bem como para fazer a representação gráfica da hipérbole tem-se que ter mais cuidado por causa dos pontos de descontinuidade da função.

Quanto à nossa conjectura, verificamos que foi possível, até o momento, desenvolver a disciplina Matemática, partindo de aplicações da área profissionalizante de Administração de Empresas, seguindo o novo conteúdo programático e a metodologia proposta.

Quanto ao perfil exigido do administrador profissional, este foi atendido não só quanto ao conhecimento matemático exigido, mas também com respeito às habilidades e atitudes pois verificou-se que, por meio das discussões dos alunos nos grupos e na plenária, estes mostraram maior capacidade de comunicar-se verbalmente e por escrito e pudemos observar nos alunos maior motivação em estudar matemática, em saber trabalhar em equipe e em ser ético.

Vigésima semana – Prova bimestral B₂

A prova foi formulada por meio de enunciados de situações-problema de assuntos estudados até a presente data e retirados de temas da área de Administração e Economia.

Questões propostas

1) A receita total e o custo total dos aparelhos celulares da marca FAIR e modelo WP-42 são dados pelas leis $C_t = 20.000 + 50q$ e $R_t = 100t$. Pede-se:

- a) O valor do custo fixo. (valor 0.5)
- b) O preço unitário de um aparelho celular. (valor 0.5)
- c) O ponto crítico. (valor 1.0)
- d) O esboço dos gráficos da receita e do custo. (valor 1.0)
- e) O lucro ou prejuízo para a venda de 500 celulares. (justifique a resposta)

(valor 0.5)

2) A demanda por aparelhos celulares da marca RHS e modelo FNP-2002 é dada pela lei $q_d = -p^2 + 2.500$ e a lei da oferta é dada por $q_0 = 30p + 700$. Pede-se:

- a) O ponto de equilíbrio. (valor 1.0)
- b) Os interceptos das duas leis. (valor 0.5)
- c) O esboço do gráfico das duas leis. (valor 1.0)
- d) A análise econômica. (valor 0.5)
- e) Hachurar a região do gráfico onde há excesso de oferta. (valor 0.5)

3) Sejam as funções de receita total e custo total dadas por

$$R_t = \sqrt{36q + 1089}$$

$$C_t = 2,5q$$

Pede-se:

- a) O ponto crítico. (valor 1,0)
- b) Esboçar o gráfico. (valor 0.5)
- c) A expressão do lucro e seu gráfico. (valor 1,0)
- d) Sombrear a região do lucro. (valor 0.5)

Conclusões:

Foram preparadas duas provas cujos enunciados diferiam apenas nos dados numéricos. As questões foram propostas aos alunos, individualmente, com tempo de duração de 100 minutos. A grande maioria não teve dificuldade na resolução dos dois primeiros problemas, porém poucos acertaram a terceira questão, tendo em vista que a representação gráfica exigida era uma raiz quadrada.

Vigésima primeira semana

5.8 Função exponencial

Foi apresentada uma situação-problema em que, ao longo de sua resolução e de maneira natural, surgiu a expressão algébrica da função exponencial.

A dinâmica de trabalho utilizada foi a adotada nos encontros anteriores. Os alunos, reunidos em grupos, receberam o enunciado da situação-problema sugerida por Fernanda e, após a plenária, foram feitas as devidas formalizações da função exponencial, bem como sua representação gráfica.

Problema do Presente para o Ministro

Pedro conta a história de um rei que desejou presentear seu ministro da fazenda pelo brilhante desempenho no cargo e pediu-lhe que sugerisse o que gostaria de receber. O ministro sugeriu que o presente fosse dado em moedas de 1 centavo, colocadas em um tabuleiro de xadrez, da seguinte maneira:

1 moeda na primeira casa do tabuleiro de xadrez;

2 moedas na segunda casa do tabuleiro de xadrez;

4 moedas na terceira casa do tabuleiro de xadrez;

8 moedas na quarta casa do tabuleiro de xadrez e, assim por diante, dobrando o número de moedas da casa anterior.

Em seguida, o rei chamou os matemáticos da corte para fazer a soma e entregar o presente ao ministro. Qual o valor em reais pretendido pelo ministro?

Resolução:

Observando as casas do tabuleiro de xadrez, podemos dizer que são 64 casas e, colocando 1 moeda na primeira, 2 na segunda e assim por diante como sugerido, temos:

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	...				

Ou, em termos de potências de 2, temos:

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Portanto o presente consiste na soma da quantidade de moedas de 1 centavo.

$$(I) 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63} = \sum_{n=0}^{63} 2^n. \text{ Calculemos inicialmente } 2^{63}.$$

Sabemos que $2^{10} = 1024 \cong 1000$, logo podemos escrever

$2^{63} = 2^3 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$ e substituindo cada potência de 2^{10} por 1.000, segue:

$2^{63} \cong 8.000.000.000.000.000.000 = 8 \times 10^{18}$. Portanto, só na última casa do tabuleiro de xadrez devemos colocar mais do que 8 quintilhões de moedas de 1 centavo.

Para obtermos a soma total (I), usamos a fórmula matemática da soma de uma progressão geométrica:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{8 \cdot 10^{18} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 16 \cdot 10^{18} - 1 \cong 16 \text{ quintilhões de moedas de 1 centavo.}$$

Se não tivéssemos arredondado, teríamos o número 18.446.744.073.709.551.615 de moedas de 1 centavo. Como a cada cem centavos tem-se 1 real, podemos escrever o valor em reais

$16 \cdot 10^{18}$ centavos ou $16 \cdot 10^{16}$ reais, isto é, R\$ 160.000.000.000.000.000,00 ou

160 quatrilhões de reais, ou seja,

64 quatrilhões de dólares (fazendo R\$ 2,50 igual a US\$ 1).

Comparando esse valor com o PIB (Produto Interno Bruto) dos E.U.A., que é de 10 trilhões de dólares anuais, podemos dizer que se o PIB desse país fosse só destinado para atender ao presente do ministro, os E.U.A. deveriam contribuir com todo o seu PIB durante 6.400 anos.

Assim, quando o pedido do ministro foi feito, o rei não podia imaginar que se tratasse de um valor tão grande.

Da observação da resolução do problema, podemos identificar a função:

$$f: \rightarrow$$

$$n \mapsto 2^n$$

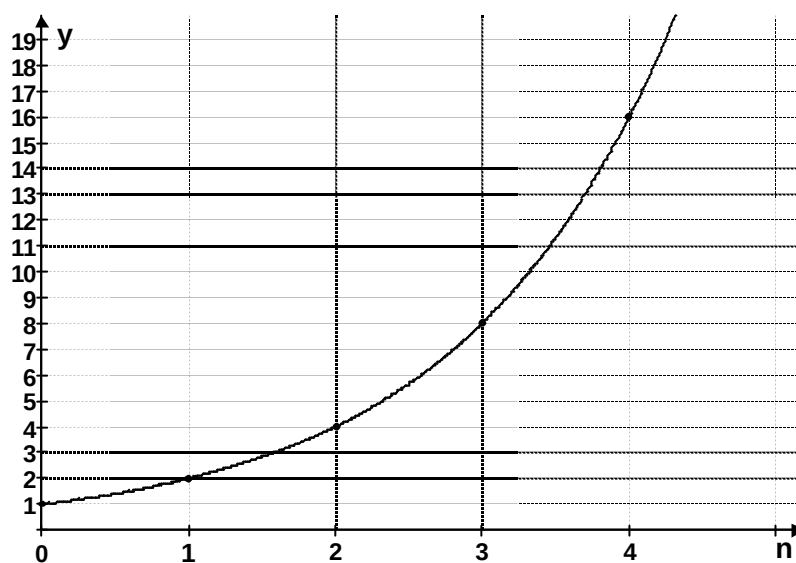


fig. 89

Com o objetivo de revisar o conceito de potenciação, o professor entregou aos grupos texto contendo as propriedades da potência de números racionais, exemplos, definição da função exponencial, suas propriedades, representação gráfica, bem como exemplos aplicativos. O texto foi discutido em aula expositiva dialogada.

Quando escrevemos $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, estamos trabalhando com potência. Em geral, se a é um número real e n um número natural, então

$$\begin{cases} a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n & (n \geq 2) \\ a^0 = 1 \\ a^1 = a \end{cases}$$

1. Exemplos

a) $2^0 = 1$

b) $(-3)^0 = 1$

c) $5^2 = 25$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

Propriedades da potenciação:

Sejam a e b números reais diferentes de zero e m e n números inteiros, então valem as propriedades:

$$P_1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$P_2. \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$P_3. \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$P_4. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$P_5. \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$P_6. \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2. Exemplos aplicativos das propriedades

$$a) \quad (2^2)^{-3} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

$$b) \quad 3^{-4} \cdot 3^5 = 3^{-4+5} = 3$$

$$c) \quad \frac{4^{-1}}{4^{-2}} = 4^{-1+2} = 4$$

$$d) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2}$$

$$e) \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ e $s > 1$, então $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$

3. Exemplos de expoentes racionais

$$a) \quad 4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5}$$

$$b) \quad 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2}$$

$$c) \quad 27^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{27^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{9}$$

$$d) \quad 25^{0,5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

5.8.1 Definição de função exponencial

Dado um número real a , $a > 0$ e $a \neq 1$, chama-se função exponencial de base a a função

$$f: \quad \rightarrow \\ x \mapsto a^x$$

Propriedades da função exponencial

São válidas as propriedades da potenciação

$$P_1. \quad \text{Para qualquer } x \text{ real, } a^x > 0$$

$$P_2. \quad a^0 = 1 \text{ e } a^1 = a$$

Para qualquer m e n reais e $0 < a \neq 1$, então:

$$P_3. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$P_4. \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$P_5. \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$P_6. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$P_7. \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$P_8. \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

E mais duas propriedades da função exponencial:

$$P_9. \quad a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$$

$$P_{10}. \quad a^m \geq a^n \Rightarrow \begin{cases} m \geq n & \text{se } a > 1 \\ m \leq n & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Quanto à monotonicidade, observamos o gráfico que segue.

Gráfico da função exponencial

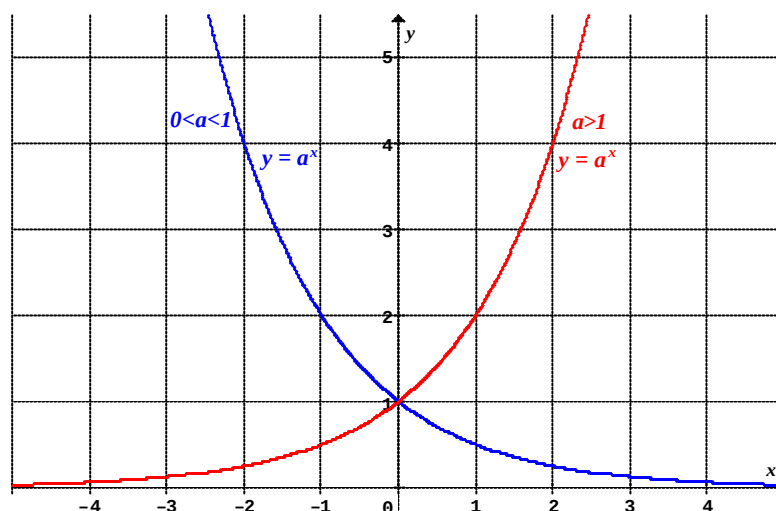


fig. 90

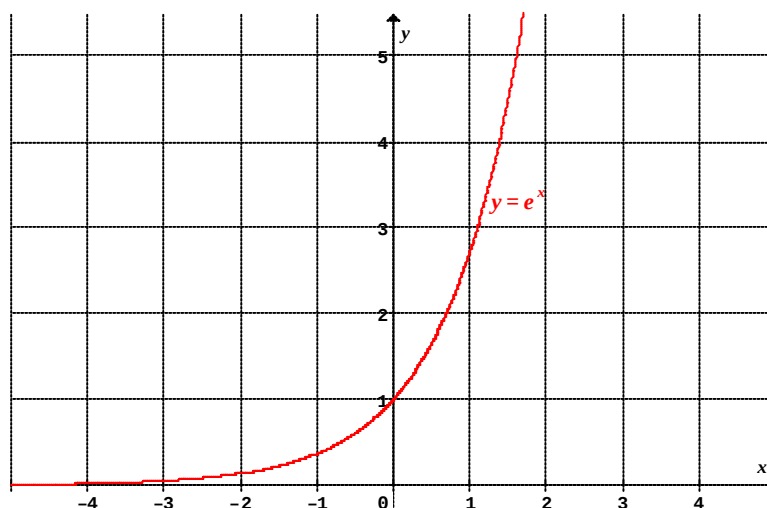
Se $a > 1$, a função exponencial é crescente e se $0 < a < 1$, a função exponencial é decrescente.

Observação 31 - O conjunto imagem da exponencial é sempre um número real positivo, isto é, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^*_+$

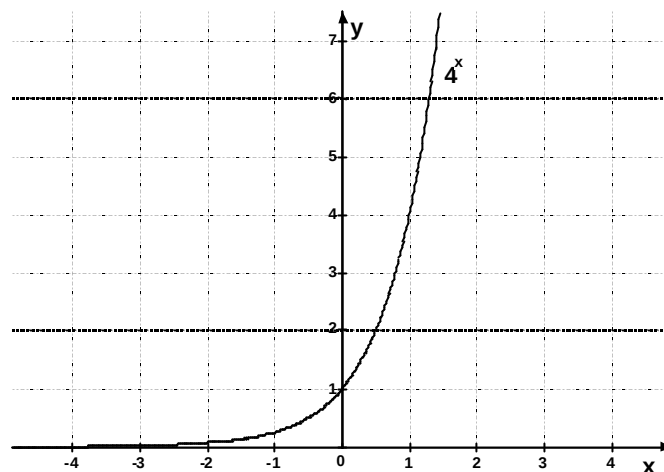
Observação 32 - O número irracional $e = 2,718281828459\dots$, denominado número de Euler, é usado como base da função exponencial $f(x) = e^x$. Essa função exponencial é muito usada na resolução de problemas de crescimento populacional de bactérias, desintegração radioativa, variação de temperatura de uma barra de metal, etc.

4. Exemplos - Esboçar os gráficos das funções

a) $f(x) = e^x$



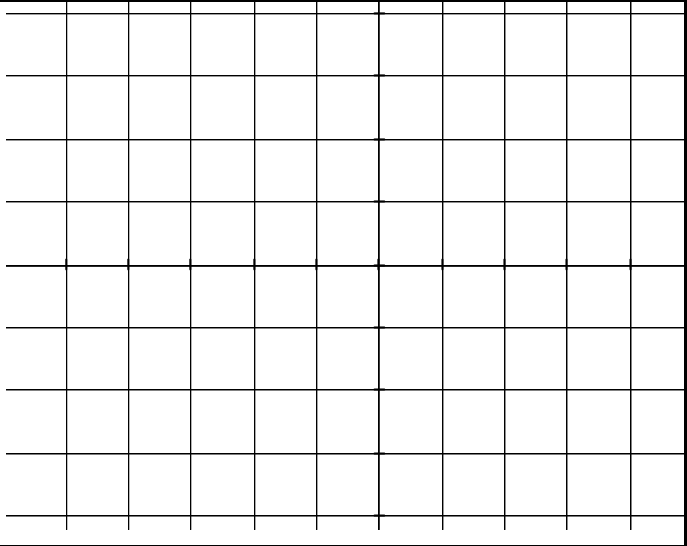
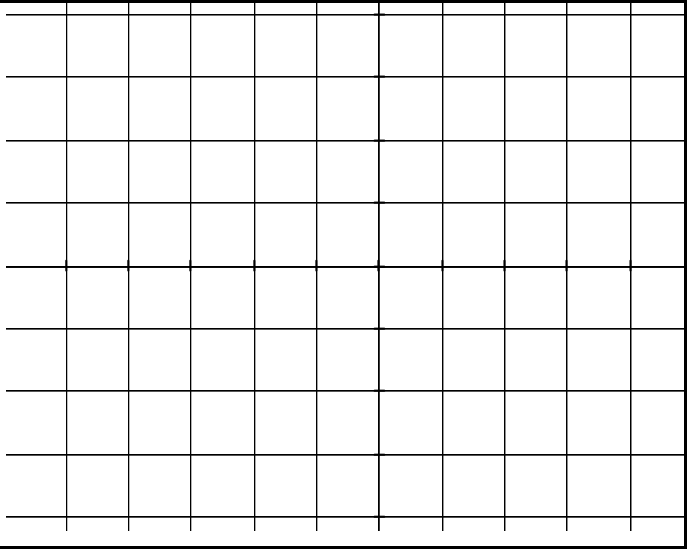
b) $f(x) = 2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$



Exercícios de aplicação 7

Esboçar os gráficos das funções:

a) $f(x) = 2^{x+1}$	
b) $f(x) = 2^{-2x+1}$	

c) $f(x) = 2^{x-1}$	
d) $f(x) = 3 \cdot 2^{x+1}$	

Equações Exponenciais

Para resolvermos equações exponenciais, devemos usar sua propriedade P_9 .

$$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n, \text{ com } 0 < a \neq 1$$

Exemplos:

1) Resolver a equação $2^{x+3} = 32$

Resolução:

Devemos determinar x real, que satisfaz a igualdade, escrevendo a igualdade na mesma base, isto é $2^{x+3} = 32 = 2^5$, portanto $2^{x+3} = 2^5$ e pela propriedade P_9 , segue $x + 3 = 5$. Logo $x = 2$ é a solução.

2) Resolver a equação $(81)^{1-3x} = 27$.

Resolução:

Colocando 81 e 27 como potência na base 3 segue:

$(3^4)^{1-3x} = 3^3$, ou $3^{4(1-3x)} = 3^3$ e usando a propriedade P_9 , segue:

$4(1-3x) = 3$. Portanto $x = \frac{1}{12}$ é a solução.

3) Resolver a equação $4^x - 2^x = 56$.

Resolução:

Como nos casos anteriores podemos escrever:

$2^{2x} - 2^x - 56 = 0$ ou $(2^x)^2 - 2^x - 56 = 0$. Nesse caso não podemos usar a propriedade P_9 pois agora temos um trinômio.

Para resolvermos, mudamos a variável escrevendo $y = 2^x$ e assim obtemos a equação $y^2 - y - 56 = 0$, que é a equação do segundo grau na variável y cuja solução obtém-se usando a fórmula de Bhâskara, $y = 8$ e $y = -7$, ou ainda

$y = 2^x = 8$ e, portanto $x = 3$.

$y = 2^x = -7$ não tem solução no conjunto dos reais, pois 2^x é sempre positivo.

Assim, $x = 3$ é a única solução.

Conclusões:

Logo após a entrega do enunciado da situação-problema do presente para o ministro, perguntamos:

— Qual o valor em reais que vocês acham que o ministro vai receber?

a) pouco b) muito c) muito grande (milhões) d) bilhões

As respostas dadas pelos alunos foram R\$ 1.000,00, R\$ 10.000,00 e no máximo R\$ 1.000.000,00.

Os grupos tiveram dificuldade para obter a resposta, pois era necessário lembrar da fórmula da soma de uma P.G. O professor precisou sugerir várias vezes caminhos para chegar à solução.

Vigésima segunda semana

Os exercícios de aplicação propostos foram entregues aos alunos para serem resolvidos individualmente e discutidos na plenária. Esses exercícios envolveram equações exponenciais, problemas aplicativos e representações gráficas.

Exercícios de aplicação 8

1) Resolver as equações exponenciais em

a) $2^x = 64$

b) $8^x = \frac{1}{32}$

c) $(\sqrt[3]{2})^x = 8$

d) $\left(\frac{1}{125}\right)^x = 25$

e) $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

f) $(2^x)^{x-1} = 4$

g) $(2^x)^{x+4} = 32$

h) $2^{x-1} + 2^x - 2^{x+1} + 2^{x+3} = 120$

i) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

j) $25^x + 625 = 130.5^x$

2) Para quais valores de a a função $f(x) = (2a - 2)^x$ é crescente?

3) Resolver o sistema

$$\begin{cases} 3^{x+1} = 1 \\ \left(\frac{1}{9}\right)^x + 2^y = 25 \end{cases}$$

5.8.2 Aplicações da função exponencial

Problema do mercado de ações

Fernanda diz a Pedro que, no mercado de ações, sabe-se que a rentabilidade das ações da empresa A é descrita pela lei $R_A = 4^t$ e da empresa B pela lei $R_B = 10.2^t - 16$, onde t é o tempo em meses a partir de 1º de janeiro de 2001. Pede-se:

a) Os pontos em que as rentabilidades são iguais.

b) Esboçar num gráfico as funções R_A e R_B .

c) A melhor escolha da rentabilidade se o dinheiro ficar disponível até o 10º mês.

Resolução:

a) As leis R_A e R_B são exponenciais e o valor de t que torna $R_A = R_B$ é a solução.

Resolvendo:

$$R_A = R_B = 4^t = 10 \cdot 2^t - 16 \text{ ou}$$

$$4^t - 10 \cdot 2^t + 16 = 0 \text{ ou ainda } (2^t)^2 - 10 \cdot 2^t + 16 = 0$$

Como já vimos, a solução para esse caso é mudar a variável. Assim: $y = 2^t$ e, portanto $y^2 - 10y + 16 = 0$. A solução é dada por $y=2$ e $y=8$, assim

$$y = 2^t = 2, \text{ segue } t=1$$

$$y = 2^t = 8, \text{ segue } t=3$$

Dessa forma, podemos dizer que o mês $t=1$ (fevereiro) e o mês $t=3$ (abril) têm a mesma rentabilidade das ações.

b) Para esboçar o gráfico usamos os pontos convenientes. Assim

para $t=1$, $R_A=R_B=4$; $P(1,4)$

para $t=3$, $R_A=R_B=64$; $Q(3,64)$

para $t=0$, $R_A=1$; $A(0,1)$

para $t=0$, $R_B=-6$; $B(0,-6)$

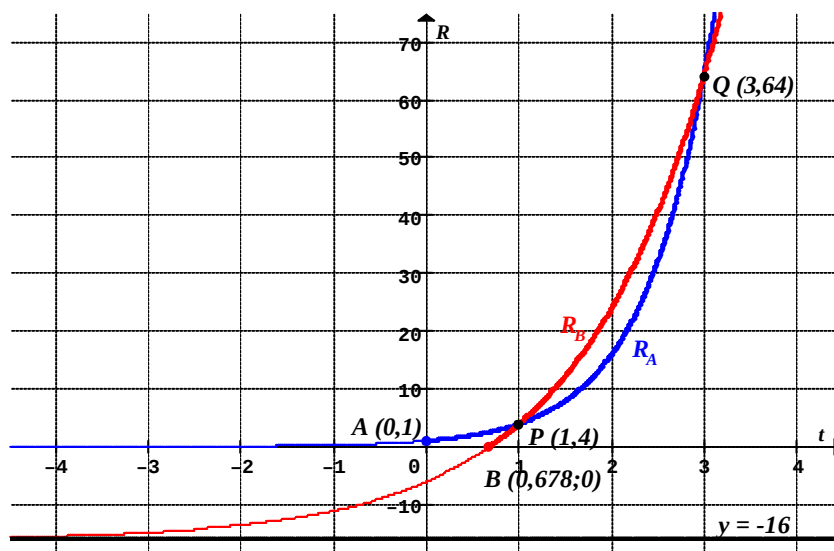


fig. 91

c) As épocas de melhor rentabilidade:

- Para os primeiros 30 dias ($0 \leq t \leq 1$) é melhor aplicar em ações da empresa A.
- De 30 a 90 dias ($1 < t < 3$) é melhor aplicar em ações da empresa B.
- Após 90 dias ($t > 3$) é melhor aplicar em ações da empresa A.

Problema do seguro-saúde

Uma empresa de seguro-saúde tem como receita $R_t = 4^{q+1} - 4$ e $C_t = 9 \cdot 2^q - 6$, onde q , o número de associados, é medido em milhares. Pede-se:

- Ponto crítico.
- Gráfico.
- Análise econômica.

Resolução:

- Devemos impor que $R_t = C_t$, isto é,

$$4^{q+1} - 4 = 9 \cdot 2^q - 6 \text{ ou}$$

$$4^q \cdot 4^1 - 9 \cdot 2^q + 2 = 0, \text{ segue } (2^q)^2 \cdot 4 - 9 \cdot 2^q + 2 = 0 \text{ e fazemos}$$

$$y = 2^q \text{ e } 4y^2 - 9y + 2 = 0. \text{ Resolvendo a equação}$$

$$D = b^2 - 4ac = 81 - 32 = 49, \text{ obtemos}$$

$$y = \frac{9 \pm 7}{8} = \begin{cases} 2 = 2^q \Rightarrow q = 1 \Rightarrow P_c(1, 12) \\ \frac{1}{4} = 2^q \Rightarrow 2^{-2} = 2^q \Rightarrow q = -2 \Rightarrow P_c(-2, \frac{-15}{4}) \end{cases}$$

$$P_c = (-2, \frac{-15}{4}) \text{ é um ponto não significativo.}$$

- Para a representação gráfica, tomamos $q=0$, $R_t=0$, segue $A(0,0)$ e

$$q=0, C_t=3, \text{ segue } B(0,3)$$

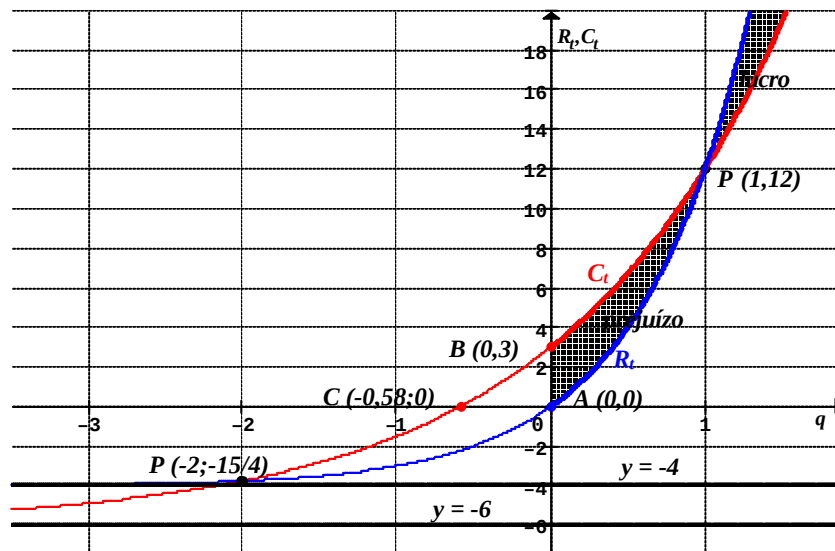


fig. 92

- Análise econômica

$$\text{se } 0 \leq q \leq 1, \text{ então } C_t \geq R_t$$

$$\text{se } q > 1, \text{ então } R_t > C_t$$

Problema dos eixos de motos

Considere uma indústria que produz q eixos, semanalmente, para motos tipo XR-125, cujas leis de receita e custo são dadas por $R_t = 2^{2q}$ e $C_t = 2^{q+1} + 8$. Pede-se:

- Ponto crítico.
- Interceptos.
- Esboçar o gráfico.
- Análise econômica.

Resolução:

a) Para determinarmos o ponto crítico, impomos:

$R_t = C_t$, segue $2^{2q} = 2^{q+1} + 8$ e $2^{2q} - 2^{q+1} - 8 = 0$ e, chamando $2^q = y$, temos

a equação do 2º grau em y

$y^2 - 2y - 8 = 0$, cuja raízes são $y = 2^q = -2$ (não serve) e $y = 2^q = 4$. Segue

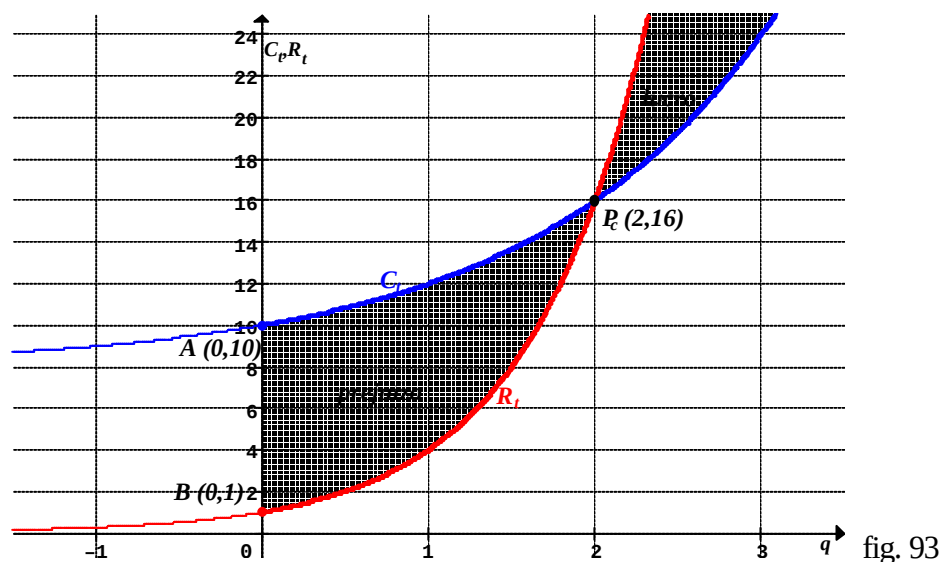
$2^q = 2^2$ e $q_c = 2$ e $P_c(2, 16)$ é o ponto crítico.

b) Interceptos.

$q=0$, segue $R_t=1$ e $A_R=(0,1)$

$q=0$, segue $C_t=10$ e $B_C=(0,10)$

c) Gráfico



d) Análise econômica

se $0 \leq q \leq 2$, então $C_t \geq R_t$ (prejuízo)

se $q > 2$, então $C_t < R_t$ (lucro)

Exercícios Grupo 6 - Tarefas extraclasse

1) Conhecendo-se as funções custo total e receita total dadas por $C_t = 4^{q+1}$ e $R_t = 8^{q^2-q}$, determinar:

- a) O ponto crítico.
- b) Os interceptos.
- c) O gráfico de C_t e R_t .
- d) A análise econômica.

2) Conhecendo-se as funções custo total e receita total dadas por $C_t = 2^q + 11$ e $R_t = 4^q - 1$, determinar:

- a) O ponto crítico.
- b) Os interceptos.
- c) O gráfico de C_t e R_t .
- d) A análise econômica.

Conclusões:

Os problemas aplicativos com a função exponencial, que envolveram as leis de custo e receita, apresentaram dificuldades aos grupos, pois era necessário resolver sistemas de equações exponenciais para a obtenção do ponto crítico, bem como os gráficos das duas leis. Observadas as dificuldades dos grupos, reproduzimos novamente os problemas agora com o uso do processador Winplot. O Winplot é um software gráfico gratuito e pode ser obtido no endereço <http://math.exeter.edu/rparris/> Em geral, modelos de problemas que envolvem duas leis exponenciais, não são comuns nas disciplinas da área profissionalizante. Com o uso de nossa metodologia e do processador Winplot, foi possível obter bons trabalhos com os grupos na resolução desses problemas.

Vigésima terceira semana

5.9 Função logarítmica

Foram reservados instantes iniciais da aula para atender as dúvidas do exercício grupo 6.

Com o objetivo de obter o conceito da função logarítmica, o professor aproveitou uma situação-problema sugerida por Pedro .

A dinâmica de trabalho utilizada foi a mesma adotada nos encontros anteriores. Os alunos, reunidos em grupos, receberam o enunciado da situação-problema sugerida por Pedro e, após a plenária, foram feitas as devidas formalizações da função logarítmica, bem como sua representação gráfica.

Pedro diz a Fernanda.

$\frac{3}{4}$ Fernanda, observe a progressão aritmética (P.A.):

...0 ; 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 1 ; 1,25 ; ... , que podemos escrever como

0; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{5}{4}$; ..., onde o primeiro elemento é zero e a razão $r = \frac{1}{4}$.

Observe também a progressão geométrica (P.G.):

... 1; 2; 4; 8; 16; 32 ... de primeiro termo 1 e razão $q=2$.

Fernanda, existe uma função matemática que associa a cada elemento da P.G. um elemento da P.A.?

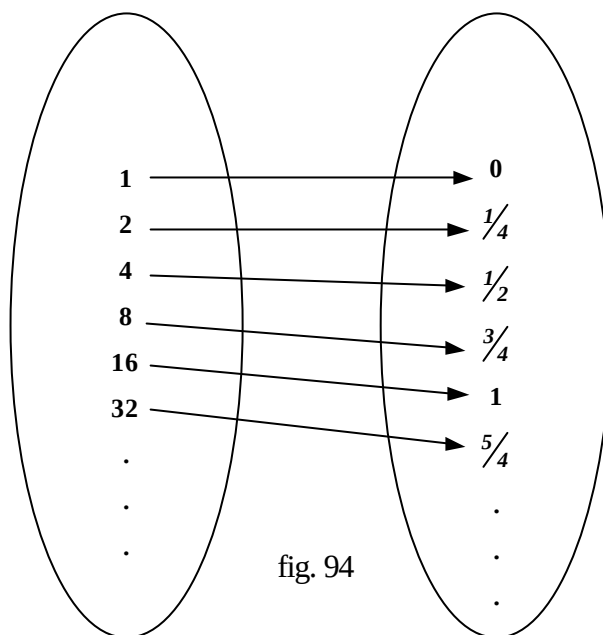


fig. 94

E Pedro continua:

Da figura 94

— Observamos que $f(1)=0$; $f(2)=\frac{1}{4}$;... $f(16)=1$; ..., e assim por diante.

A função $f(x)$, nestas condições, é $\log_{16} x$ (logaritmo de base 16).

Assim $\log_{16} 1 = 0$ e $\log_{16} 16 = 1$, onde 16 denomina-se base dos logaritmos.

Os valores 1; 2; 4; 8; 16; 32;... da P.G. são denominados logaritmandos e os resultados

0; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{4}$;... (P.A.) são os logaritmos.

Generalizando, podemos escrever:

P.G.: 1; a ; a^2 ; a^3 ; ...; a^n ; ... e

P.A.: 0; 1; 2; 3; ...; n ; ...

Desta forma, podemos escrever logaritmo na base a , e a P.G. relaciona-se com a P.A. da seguinte forma:

$$\log_a 1 = 0 \text{ e } a^0 = 1$$

$$\log_a a = 1 \text{ e } a^1 = a$$

$$\log_a a^2 = 2 \text{ e } a^2 = a^2$$

$\vdots$

$$\log_a a^n = n \text{ e } a^n = a^n. \text{ Desta maneira, se } a \text{ e } b \text{ são números positivos e } a \neq 1,$$

chama-se logaritmo do número b , na base a , o número x tal que $a^x = b$. Simbolicamente,

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, onde a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo de b na base a .

Exemplos:

Calcular os logaritmos:

1) $\log_2 8$. Escrevemos $\log_2 8 = x$, logo $8 = 2^x$ ou $2^3 = 2^x$ como ambas as bases são iguais, também os expoentes deverão ser iguais e, portanto $x=3$, assim $\log_2 8 = 3$.

2) $\log_5 625$. Escrevemos $\log_5 625 = x$, logo $625 = 5^x$ ou $5^4 = 5^x$; portanto podemos escrever $x=4$.

Segundo EVES (p. 341 e 345), o inventor dos logaritmos foi John Napier (1550-1617). Nasceu em Edimburgo na Escócia e publicou seu trabalho em 1614 com o título *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da maravilhosa lei dos logaritmos). A palavra logaritmo significa número da razão, pois junta as palavras gregas *logos* (razão) e *arimos* (número). Nessa época houve grande desenvolvimento do comércio marítimo e, para facilitar os cálculos matemáticos, foram criadas as tábuas de logaritmos. Porém, hoje, com as calculadoras portáteis, as tábuas de logaritmos caíram em desuso.

Propriedades dos logaritmos

Sejam $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$

$$P_1. \log_a 1 = 0 \text{ e } \log_a a = 1$$

$$P_2. \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$P_3. \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$P_4. \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$P_5. \log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

$$P_6. \log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$P_7. a^{\log_a x} = x$$

Se $b \neq 1$, então

$$P_8. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$P_9. \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \text{ com } c \neq 1$$

$$P_{10}. \log_a b \geq \log_a c \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq c & \text{se } a > 1 \\ b \leq c & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Exercícios de aplicação 9

1. Achar o valor dos logaritmos.

a) $\log_2 32$

b) $\log_8 4$

c) $\log_b b^3$

d) $\log_{10} 0,001$

2. Simplificando a expressão $\log_4 9 \times \log_{27} 8 \times \log_{81} 16$, obteremos:

- a) $\log_3 2$ b) $\log 2$ c) $\log_2 3$ d) $\log 3$ e) n.d.a.

3. Sendo $\log_{10} 2 = 0,301$, então o menor valor inteiro de n para o qual

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots \times n}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times \dots \times 2n} < \frac{1}{10^4} \text{ é}$$

- a) 12 b) 13 c) 14 d) 0 e) n.d.a.

4. Sendo $\log b = a$, então $\log \sqrt{b \sqrt{b \sqrt{b}}}$ é igual a:

- a) $8a$ b) $6a$ c) $\frac{7a}{8}$ d) $\frac{a}{6}$ e) n.d.a.

5. Verifique se a igualdade é verdadeira.

$$\log_{10} \sqrt{x \cdot y} = \log_{10} \sqrt{x} + \log_{10} \sqrt{y}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0.$$

6. Dados $\ln 2 = 0,6931$ e $\ln 3 = 1,0986$, determinar:

- a) $\ln 18$ b) $\ln \sqrt{54}$ c) $\ln \frac{1}{4}$

7. Simplificar usando as propriedades.

$$A = \ln 2 + 16 \ln\left(\frac{16}{15}\right) + 12 \ln\left(\frac{25}{24}\right) + 7 \ln\left(\frac{81}{80}\right)$$

Conclusões:

O problema proposto por Pedro aos grupos apresentou grandes dificuldades, pois envolveu as noções de P.A. e P.G. O professor precisou sugerir vários caminhos para que se pudesse chegar à solução. O professor participou ativamente da resolução dos exercícios de aplicação 9.

Vigésima quarta semana

A dinâmica de trabalho utilizada é a mesma adotada nos encontros anteriores, os alunos reunidos em grupos, receberam o enunciado dos exercícios de aplicação e, na plenária, foram esclarecidas as dúvidas.

Exercícios de aplicação 10

8. Resolver as equações em .

a) $\log_{0,5} 0,25 = x$

b) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{9}{25} = x$

c) $\log_7 \sqrt{343} = x$

d) $\log_x 121 = 2$

e) $\log_x \frac{16}{81} = -4$

f) $\log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2}$

g) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$

h) $\log_3 (x^2 - 1) = 1$

9. Resolver as inequações em .

a) $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$

b) $\log_2 (x^2 - 3) > 0$

10. Resolva as equações em .

a) $\log(x + 5) = \log x + \log 5$

b) $\log_3 (2x + 1) - \log_3 (5x + 3) = -1$

c) $2^{\log 2^{3x}} = x^2 - 4$

d) $(\log_2 x)^2 = 4$

11. Resolver os sistemas em .

a)
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \log_2 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2 \\ 4^{x-y} = 8 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = -1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \end{cases}$$

12. Determinar o valor de x na equação $\log_x (3 - 2x) = 2$

5.9.1 Definição de função logarítmica

Dado um número real a , $0 < a \neq 1$, chama-se função logarítmica com base a a função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \log_a x$ e tem como gráficos:

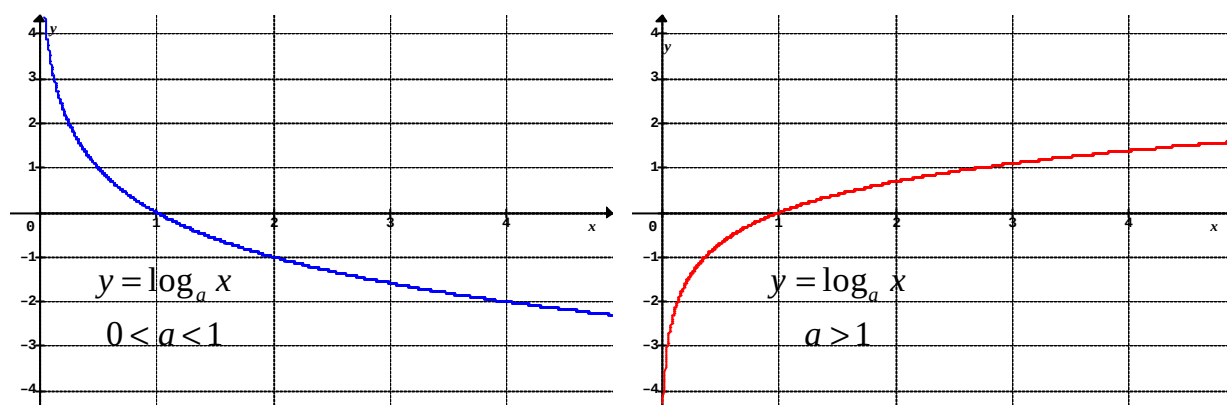


fig. 95

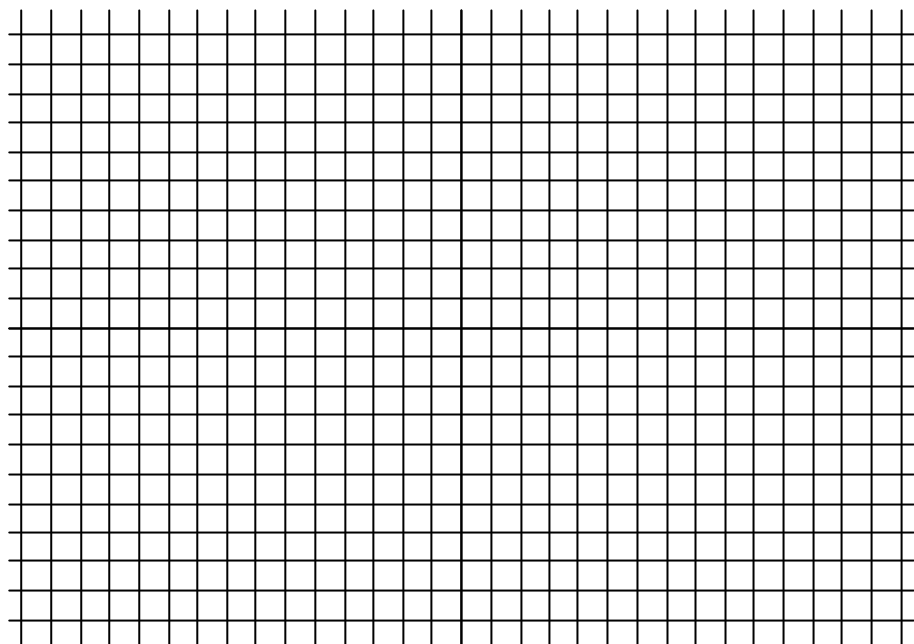
Deixamos de propor problemas aplicativos com funções logarítmicas, que envolvem as leis de demanda, de oferta, de custo e de receita, por apresentarem inadequação aos modelos que ocorrem na administração.

13. Esboçar o gráfico das funções.

1. $f(x) = \log_3 x$	

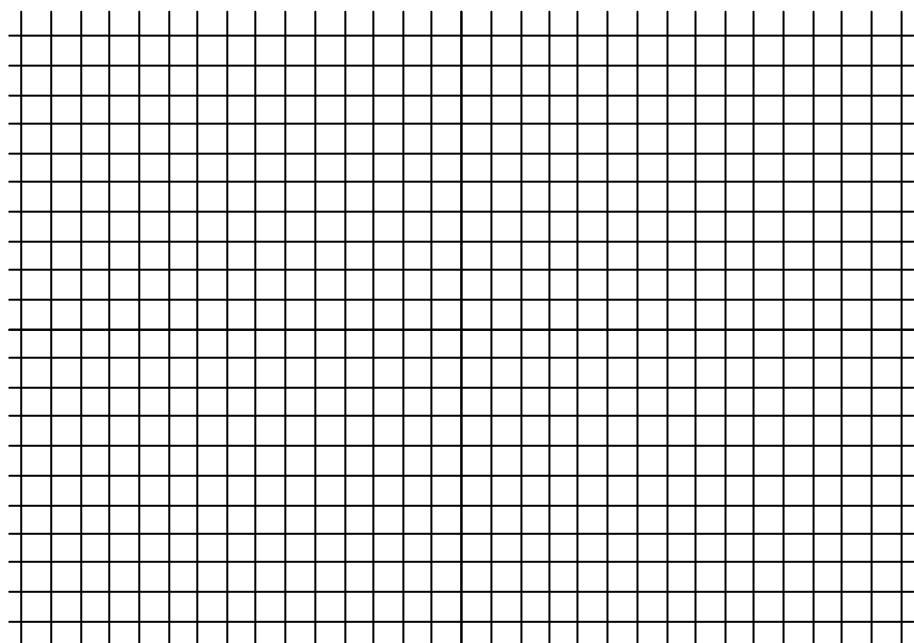
2.

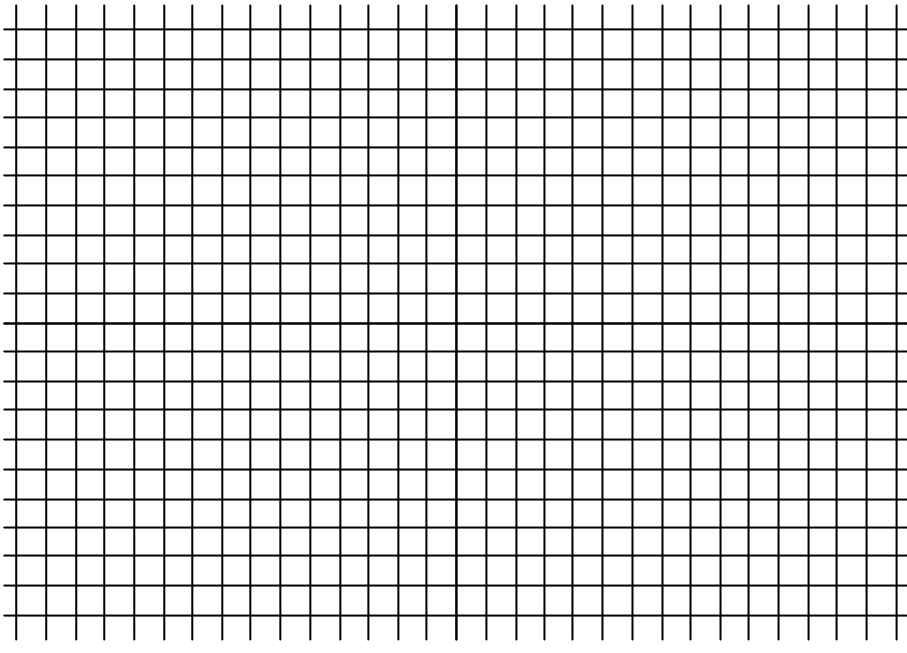
$$f(x) = \log_2(x - 1)$$



3.

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$



4. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$	

Conclusões:

Toda vez que se fala em funções exponenciais e funções logarítmicas, os alunos demonstram desconforto para o estudo desses tópicos. Com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas, procuramos por meio de uma situação-problema, conduzir o tema de maneira mais lenta e natural, dando ajuda aos grupos. Nessas duas semanas, e principalmente na plenária, os alunos apresentaram muitos problemas secundários envolvendo potenciação, radiciação, etc, que foram esclarecidos no momento do surgimento das dúvidas.

Já esclarecemos, anteriormente, o fato de não propormos problemas aplicativos com funções logarítmicas, que envolvessem as leis de demanda, de oferta, de custo e de receita, por apresentarem inadequação aos modelos que ocorrem na administração. Uma outra razão é pela dificuldade de obtermos pontos de equilíbrio ou crítico envolvendo, por exemplo, uma função trinômio do segundo grau que represente a receita com uma função logarítmica que represente o custo.

UNIDADE II AJUSTAMENTO DE CURVAS

Foram utilizadas três semanas, com quatro aulas semanais, para o desenvolvimento e as aplicações da Unidade II– Ajustamento de Curvas.

A seguir, apresentamos os tópicos da Unidade II.

1. Conceito de ajustamento de curvas
2. Conceito de somatório
3. Definição de média aritmética
4. Regressão linear
 - 4.1. Aplicações do método de regressão linear

Objetivos da Unidade II

- *Coletar dados sobre fatos e fenômenos do cotidiano na economia e na administração de empresas.*
- *Construir tabelas e gráficos, fazendo previsões com o uso de procedimentos de ajustamento de curvas.*
- *Construir e interpretar gráficos de dispersão usando o conceito de regressão linear.*

Vigésima quinta semana

Com a finalidade de se construir o conceito de ajustamento de curvas, foram apresentadas situações-problema, com enunciados preparados pelo professor e apresentados aos grupos. Na plenária, destacaram-se os diálogos de Pedro e Fernanda sobre as tabelas apresentadas.

1. Conceito de ajustamento de curvas

— Fernanda, vimos que a curva que representa a demanda mostra que se o preço aumenta a quantidade demandada diminui. São muitas as pesquisas que investigam questões semelhantes a esta. Assim, sempre indagamos como a variação de uma grandeza acarreta variação em outra.

Nas tabelas abaixo, podemos investigar:

- a) O aumento da área agricultável de soja no Estado do Paraná acarreta aumento da produção de grãos ?

1992		1993		1994		1995		1996		1997		1998		1999	
Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.	Área	Prod.
2,0	3,6	1,8	3,4	2,0	5,3	2,1	5,5	2,3	6,0	2,5	6,6	2,8	7,1	2,8	7,7
área: milhões de hectares e produção: milhões de toneladas															
Fonte: Armário Brasileiro de Agribusiness															

- b) O saldo da caderneta de poupança aumentou no período de março a setembro ?
(Dados Jornal do Comércio – 05/10/1999 em bilhões de reais).

meses	março	abril	maio	junho	julho	agosto	setembro
valor	116,6	116,6	112,5	113,4	113,8	114,1	114,7

- c) Diminuindo a taxa de analfabetismo diminui a taxa de mortalidade infantil ?

Região	Taxa de mortalidade infantil	Taxa de analfabetismo
Sul	22,5	8,3
Sudeste	25,2	8,6
Centro Oeste	25,4	12,4
Norte	35,6	12,7
Nordeste	59,0	29,4
Dados do ano de 1997 - Fonte: Ministério da Saúde - IBGE, 1999		

Para respondermos às perguntas formuladas em a, b e c, devemos conhecer os fenômenos que envolvem o problema e não somente os dados fornecidos. Assim é possível obter alguma previsão dentro de certas margens de erro. A seguir, Fernanda propõe um problema.

Problema dos pesos dos pais e de seus respectivos filhos

$\frac{3}{4}$ Pedro, uma clínica médica pesquisou o relacionamento dos pesos dos pais e dos filhos, os dois do sexo masculino, todos com idades superiores a 20 anos, e obteve a seguinte tabela:

peso dos pais	x	80	84	86	90	92	96	100	102
peso dos filhos	y	82	86	88	86	90	100	98	104

Construa uma função que passe por esses pontos.

— Fernanda, em primeiro lugar, construímos um gráfico por esses pontos. A tabela sugere que tomemos uma escala para o eixo dos x e dos y e representemos os dados fornecidos, ligando-os por segmentos.

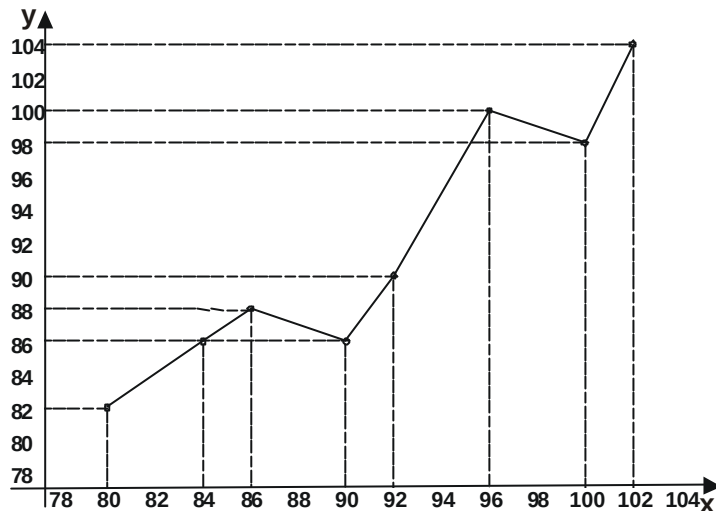


fig. 96

Em segundo lugar, podemos imaginar que a função afim ($y=ax+b$) passe por esses 8 (oito) pontos. Tomemos os dois primeiros pares (80,82) e (84,86) e construamos a equação da reta. Assim,

para o par (80,82), temos $80.a+b=82$ e

para o par (84,86), temos $84.a+b=86$. Resolvendo o sistema:

$84a-80b=86-82 \Rightarrow a=1$. Assim, para $a=1$, segue $b=2$; portanto a reta pelos dois primeiros pares é dada por $y=x+2$. O terceiro par (86,88) também está na reta, mas o quarto ponto (90,86) não está nesta reta. Como a reta não passou pelos quatro pontos, suponhamos, em vez da reta, uma parábola por esses pontos.

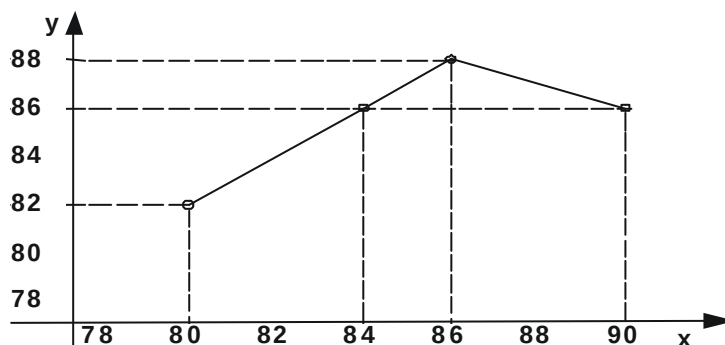


fig. 97

Tomemos três pares quaisquer, por exemplo (80,82), (84,86) e (90,86) e suponhamos que por eles passe uma parábola, isto é, um trinômio do 2º grau $y=ax^2+bx+c$. Assim, se cada

par pertence ao trinômio do 2º grau, eles satisfazem o trinômio $y=ax^2+bx+c$, portanto, para o par (80,82), segue $80^2a+80b+c=82$ (I);

para o par (84,86), segue $84^2a+84b+c=86$ (II);

para o par (90,86), segue $90^2a+90b+c=86$ (III).

Subtraindo (II)-(I) temos $(84^2-80^2)a+(84-80)b=86-82 \Rightarrow 656a+4b=4$ e simplificando por 4, resulta a equação $164a+b=1$ (IV).

Subtraindo (III)-(II) segue $(90^2-84^2)a+(90-84)b=86-86$

$1044a+6b=0$ e dividindo por 2, resulta em $527a+3b=0$ (V).

Dividindo por 3, o sistema inicial passa a ser

$$\begin{cases} 164a + b = 1 & (IV) \\ 174a + b = 0 & (V) \end{cases}$$

Subtraindo (V) de (IV), temos $10a=-1$, logo $a=-\frac{1}{10}$, colocando em (V) segue

$$b = \frac{174}{10} = \frac{87}{5}$$

Para determinarmos o valor de c , substituímos a e b em (I) e assim $c = -670$. Portanto a curva que passa pelos três primeiros pontos é a parábola $y = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{87}{5}x - 670$.

Nesse instante o professor intervém:

— Este trinômio passa pelos três pontos, mas os outros pontos não pertencem a essa função. Se quisermos que um quarto ponto pertença a uma mesma função, devemos proceder como fizemos para três pontos, isto é, devemos determinar os coeficientes a , b , c e d da função de 3º grau $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e resolver o sistema de quatro equações nas incógnitas a , b , c e d .

— O nosso problema possui 8 (oito) pontos, e devemos encontrar a função de sétimo grau que passa por esses pontos. Assim ela pode ser escrita como $y = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$. Para determinarmos os coeficientes, devemos proceder como fizemos para dois e três pontos e resolver um sistema de 8 (oito) equações nas incógnitas a , b , c , d , e , f , g e h . Resolver sistemas como este exige muitas horas de trabalho e foge aos objetivos deste curso.

Exercícios de aplicação 11

- 1) A empresa ABC, estudando a variação da oferta de seu produto em relação ao preço, obteve os seguintes valores:

p	0	1	2
q	50	66	84

Pede-se construir por esses pontos um trinômio do segundo grau e estimar a oferta para o preço de R\$ 3,00.

2) Para cada uma das tabelas, construir o trinômio do segundo grau.

a)

p	0	2	3
q	20	44	59

b)

p	0	1	2
q	30	19	6

Conclusões:

As situações-problema dadas tiveram como finalidade provocar discussões, nos grupos, de como obter conclusões a partir de tabelas com muitos dados. Os grupos perceberam as dificuldades de se obter uma função nesse caso. Também foi feita uma revisão de resoluções de sistemas de equações lineares.

Vigésima sexta semana

O professor, no início da aula, comentou sobre a dificuldade de resolver problemas com tabelas formadas por muitos dados, nas quais se pede uma função que melhor os represente. A matemática contorna este problema usando um método, denominado "Regressão Linear", em que se procuram relacionar os n pares de pontos dados por uma reta tão próxima quanto possível do conjunto de pontos dados.

Em seguida entregou aos grupos, um texto que envolve o conceito de somatório, de média aritmética e de regressão linear, apresentando, ainda, situações-problema e problemas aplicativos. Na plenária foram esclarecidas as dúvidas.

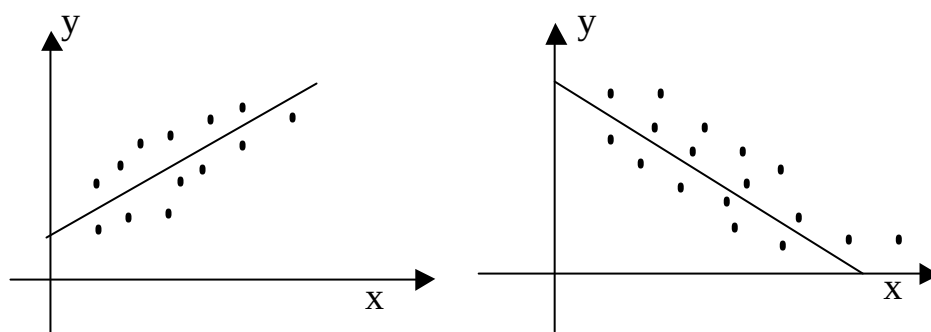


fig. 98

Os gráficos da figura 98 denominam-se diagramas de dispersão.

O método usado denomina-se método dos mínimos quadrados e envolve as operações de somatórios.

2. Conceito de somatório

Escrevemos uma soma da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Exemplos:

Sendo $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 5$, $x_5 = 10$

Calcular:

$$a) \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$b) \sum_{i=1}^5 x_i^2$$

$$a) \sum_{i=1}^5 x_i = 1 + 3 + 7 + 5 + 10 = 26$$

$$b) \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 3^2 + 7^2 + 5^2 + 10^2 = 1 + 9 + 49 + 25 + 100 = 184$$

Exercícios

1) Verifique se as igualdades são verdadeiras.

$$a) \sum_{k=0}^3 (k^2 + 7) = 42 \quad b) \sum_{i=2}^4 \frac{i}{i-1} = 29/6 \quad c) \sum_{j=1}^2 (j^2 + j - 1) = 6$$

2) Dados $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$. Calcular

$$a) \sum_{i=1}^4 x_i^2$$

$$b) \sum_{i=1}^4 (2x_i + 2)$$

Exemplo

Sejam os valores de x e y dados pela tabela

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	3	5	7	4	3	1

Determinar:

$$a) \sum_{i=1}^7 x_i$$

$$b) \sum_{i=1}^7 y_i$$

$$c) \sum_{i=1}^7 x_i^2$$

$$d) \sum_{i=1}^7 x_i y_i$$

Resolução:

Montamos as tabelas na forma indicada e na última linha colocamos a soma das colunas.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	1	2	1	2
	2	3	4	6
	3	5	9	15
	4	7	16	28
	5	4	25	20
	6	3	36	18
	7	1	49	7
Σ	28	25	140	96

$$a) \sum_{i=1}^7 x_i = 28 \quad b) \sum_{i=1}^7 y_i = 25 \quad c) \sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140 \quad d) \sum_{i=1}^7 x_i y_i = 96$$

3. Definição de média aritmética

A média aritmética de n valores dados é denotada pela expressão:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Exemplo

Sejam as notas obtidas por um aluno de matemática

$x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$, $x_4 = 9$, achar a média $\bar{x}$. Então a média é dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{n} = \frac{4 + 6 + 5 + 9}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

4. Regressão linear

A regressão linear feita pelo método dos mínimos quadrados é aquela em que a soma quadrática da diferença entre os y dados pela tabela e os y obtidos pela reta seja mínima. Para isto determinamos uma reta do tipo $y = ax + b$, em que a e b são dados por

$$a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \text{ e } b = \bar{y} - a\bar{x} \text{ e } n \text{ é o número de elementos.}$$

As médias aritméticas dos valores de x e de y são dadas por

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

Por comodidade, deixamos de colocar os índices dos somatórios.

Situação-problema:

Fernanda retorna ao problema do peso dos pais e dos respectivos filhos e diz:

¾ Pedro, como se obtém a reta Regressão Linear para o problema dos pesos dos pais e dos respectivos filhos, enunciado anteriormente?

peso dos pais	x	80	84	86	90	92	96	100	102
peso dos filhos	y	82	86	88	86	90	100	98	104

— Fernanda, para resolver este problema, devemos adotar os seguintes passos:

- Montar uma tabela com as colunas indicadas por x , y , $x.y$ e x^2 .
- Indicar a soma destas colunas na última linha da tabela.
- Determinar a média.
- Achar a e b , usando as fórmulas dadas.
- Construir o gráfico dos pontos dados e representar a reta $y = ax + b$.

Como sugerido em i e ii, construímos a tabela:

x	y	x.y	x ²
80	82	6560	6400
84	86	7224	7056
86	88	7568	7396
90	86	770	8100
92	90	8280	8464
96	100	9600	9216
100	98	9800	10000
102	104	10608	10404
$\sum x = 730$	$\sum y = 734$	$\sum xy = 67380$	$\sum x^2 = 67036$

Com os valores obtidos na tabela podemos calcular o item iii.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{730}{8} = 91,25 \cong 91,3 \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{734}{8} = 91,75 \cong 91,83$$

O professor ajudou na redação do texto e sugeriu que os valores sejam arredondados para um dígito significativo a mais do que os dados originais. Se os dados iniciais são números inteiros, então devemos trabalhar com uma casa decimal. Se o algarismo logo após a primeira casa decimal for 5, 6, 7, 8 ou 9, aumentamos de uma unidade o algarismo da primeira casa decimal; caso contrário, conservamos o algarismo da primeira casa decimal; assim $91,25 \cong 91,3$ pois os números x e y dados são inteiros e queremos uma casa decimal. E como 5 será eliminado, aumentamos uma unidade ao algarismo 2.

Se o algarismo eliminado for 0, 1, 2, 3 e 4 apenas truncamos o número. Assim:

$$37,23 \cong 37,2$$

Voltando à tabela, temos

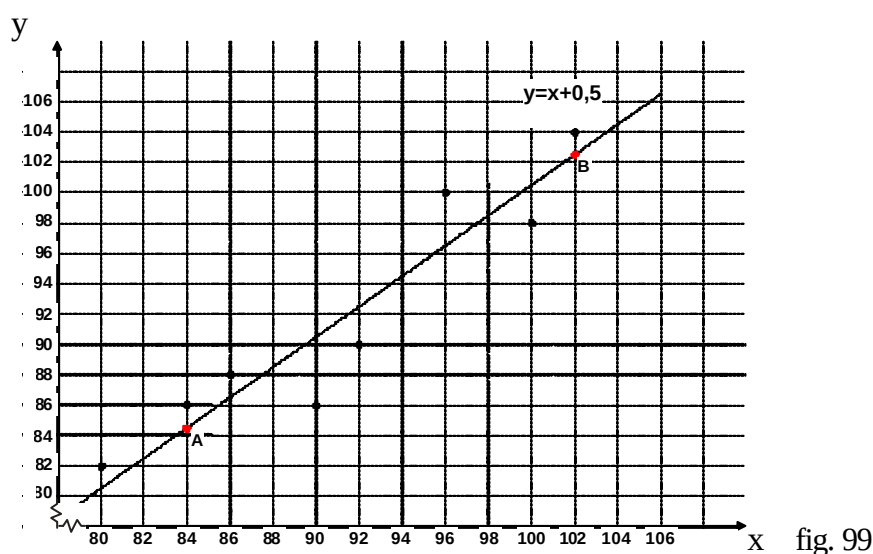
$$\sum xy = 67380 \text{ e } \sum x^2 = 67036$$

iv) Com estes dados obtidos, podemos determinar a e b usando as fórmulas.

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{8(67380) - 730 \cdot 734}{8(67036) - (730)^2} = \frac{539040 - 535820}{536288 - 532900} = \frac{3220}{3388} = 0,9504 \cong 1,0$$

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 91,8 - 1,0(91,3) = 91,8 - 91,3 = 0,5$, portanto a reta regressão linear é dada por $y = x + 0,5$

v) Construindo o gráfico e representando a reta $y = x + 0,5$, temos:



Para esboçarmos o gráfico da reta $y = x + 0,5$, tomemos dois valores de x . Assim: para $x = 84$, segue $y = 84 + 0,5 = 84,5$ e

para $x = 102$, segue $y = 102 + 0,5 = 102,5$. Portanto a reta passa pelos pontos

$A(84; 84,5)$ e $B(102; 102,5)$

Nas discussões do grupo de Fernanda e Pedro, ouvimos:

— Pedro, então a reta $y = x + 0,5$ é aquela em que a soma dos quadrados da diferença entre os pontos dados (y) e os valores y_r (obtidos) da reta é mínima. Pedro responde:

— Fernanda, vamos montar uma tabela para esclarecer a sua dúvida. Sejam y os valores dados e y_r os valores obtidos por meio da reta $y = x + 0,5$, $y - y_r$ as diferenças entre os valores dados e os obtidos pela equação da reta e $(y - y_r)^2$ o quadrado da diferença entre os valores dados e os obtidos pela equação da reta.

x	y	y_r	$y - y_r$	$(y - y_r)^2$
80	82	80,5	1,5	2,25
84	86	84,5	1,5	2,25
86	88	86,5	1,5	2,25
90	86	90,5	-4,5	20,25
92	90	92,5	-2,5	6,25
96	100	96,5	3,5	12,25
100	98	100,5	2,5	6,25
102	104	102,5	1,5	2,25
Σ				54,00

Feitos os cálculos desejados, encontramos $\Sigma (y - y_r)^2 = 54$. Isso significa que outra reta $y_s = mx + n$, obtida usando os mesmos arredondamentos exigidos, é tal que $\Sigma (y - y_s)^2$ é um número maior que 54. E Pedro continua.

— Fernanda, vamos supor que a reta $y_s = x + 1$, que tem o mesmo coeficiente angular da reta $y = x + 0,5$ fosse outra solução. Mostremos que $\Sigma (y - y_r)^2 \leq \Sigma (y - y_s)^2$. Neste caso, devemos montar outra tabela para esses dados.

x	y	$y_s = x + 1$	$y - y_s$	$(y - y_s)^2$
80	82	81	1	1
84	86	85	1	1
86	88	87	1	1
90	86	91	5	25
92	90	93	-3	9
96	100	97	3	9
100	98	101	3	9
102	104	103	1	1
Σ				56

Portanto a soma obtida (56) é maior que a anterior (54), isto é, a reta regressão linear

$y = x + 0,5$ é a solução.

4.1 Aplicações do método de regressão linear

Problema dos custos de televisores

A tabela a seguir indica as quantidades de televisores da marca ABC produzidas mensalmente e os respectivos custos totais de produção.

Quantidade produzida	x	100	120	130	140	150	160
custo total (R\$)	y	2000	2300	2700	2900	2800	3000

Pede-se pela análise de regressão

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- O valor mais provável dos custos fixos.
- O valor do custo estimado para 180 televisores.
- A representação dos pontos e da reta regressão linear.

x	y	xy	x^2
100	2000	200000	10000
120	2300	276000	14400
130	2700	351000	16900
140	2900	406000	19600
150	2800	420000	22500
160	3000	480000	25600
800	15700	2133000	109000

$$\sum x = 800 \quad \sum y = 15700 \quad \sum xy = 2133000 \quad \sum x^2 = 109000$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{800}{6} = 133,3 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{15700}{6} = 2616,7$$

$$\text{Assim: } a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{6 \times 2133000 - 800 \times 15700}{6 \times 109000 - 800^2} = \frac{238000}{14000} = 17$$

Logo $a = 17$ e b é dado por

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 2616,7 - 17 \times 133,3 = 2616,7 - 2266,1 = 350,6$$

a) Portanto a equação da reta que melhor se ajusta a esses dados é

$$y = ax + b = 17x + 350,6$$

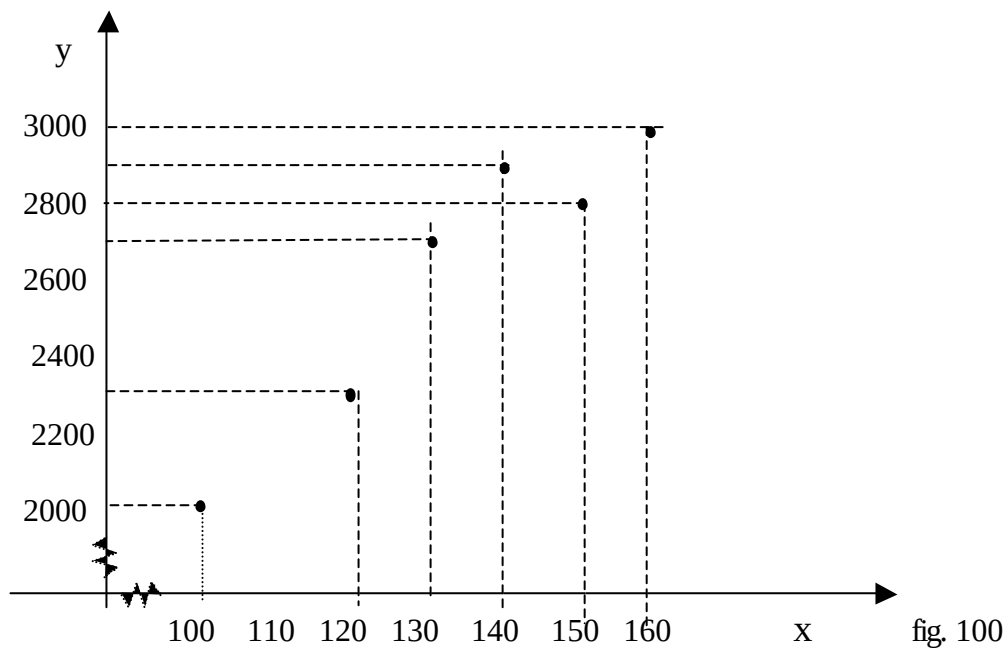


fig. 100

b) Custo fixo é obtido para $x = 0$ em $y = 17x + 350,6$ é dado por:

$$y = 17(0) + 350,6 = 350,6 \text{ logo } y(\text{fixo}) = R\$ 350,60$$

c) O custo estimado para $x = 180$ televisores é dado por

$$y = 17(180) + 350,6 = 3060 + 350,6 = R\$ 3410,60$$

d) Para representarmos a reta no gráfico, substituímos na equação da reta o valor do primeiro ponto $x=100$, assim $y=17(100)+350,6=2050,60$ e, como segundo ponto, o valor $x=180$, calculado no item (c). Desta maneira, a reta passa por $A(100;2050,6)$ e $B(180;3410,6)$

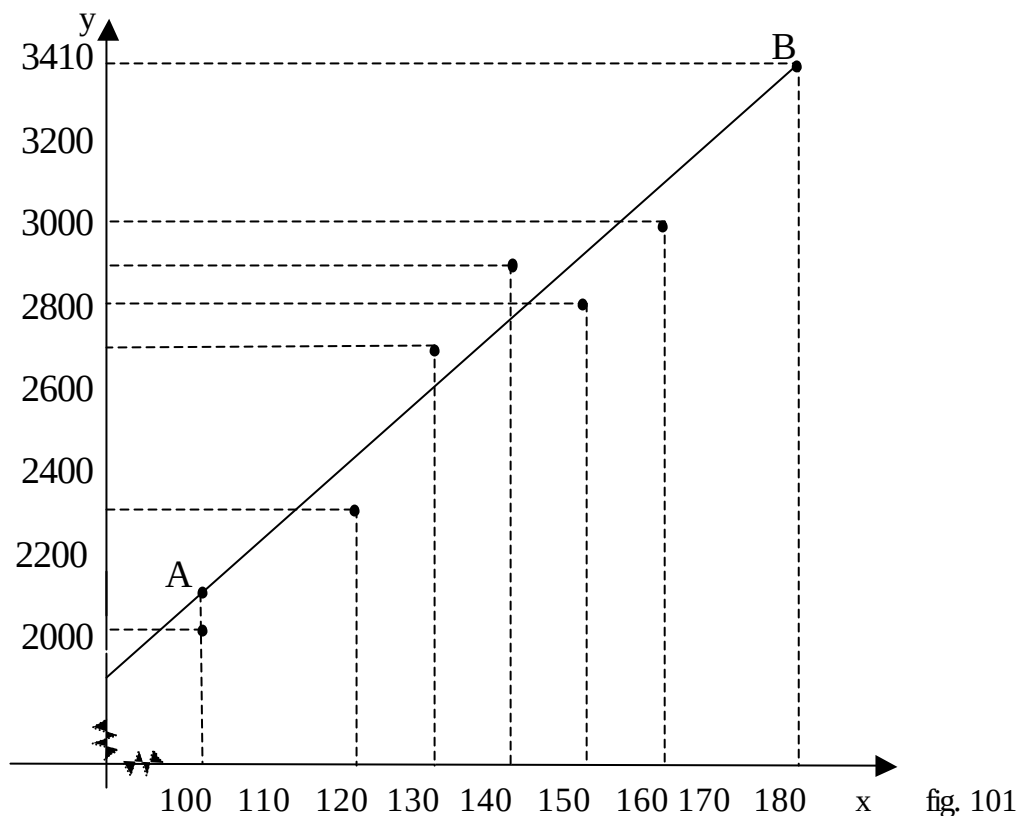


fig. 101

Problema dos custos de bolas de futebol de salão

A tabela abaixo indica a quantidade de bolas de futebol de salão produzidas mensalmente e os respectivos custos totais de produção.

Quantidade (x)	10	11	12	13	14	15
Custos(y) em R\$	100	112	119	130	139	142

Pede-se:

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- O valor mais provável do custo fixo.
- O custo para a quantidade de 16 bolas.
- Esboçar o gráfico.

Resolução: Construímos a tabela abaixo para avaliar a e b

x	y	x y	x ²
10	100	1000	100
11	112	1232	121
12	119	1428	144
13	130	1690	169
14	139	1946	196
15	142	2130	225
Σ	75	9426	955

$$\sum x = 75 \quad \sum y = 742 \quad \sum xy = 9426 \quad \sum x^2 = 955$$

$$n = 6 \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{75}{6} = 12,5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{742}{6} = 123,67 \approx 123,7 \text{ (pois os valores dados são inteiros)}$$

$$a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{6 \times 9426 - 75 \times 742}{6 \times 955 - 75^2} = 8,63 \approx 8,6$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 123,7 - 8,6 \times 12,5 = 16,2 \text{ logo } y = 8,6x + 16,2$$

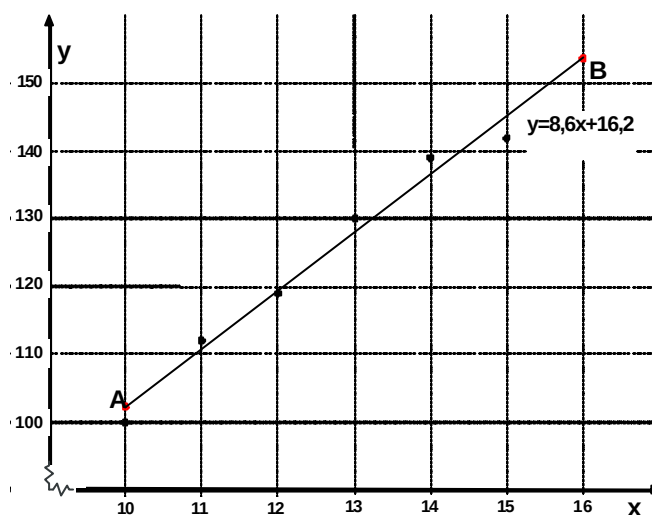
a) Assim a reta que melhor se ajusta a esses pontos dados é $y = 8,6x + 16,2$

b) O valor mais provável do custo fixo é dado por $x = 0$; logo o valor é:

$$Cf = 8,6(0) + 16,2 = \text{R\$ } 16,20$$

c) O custo para 16 bolas produzidas é dada por:

$$C = 8,6(16) + 16,2 = 153,8. \text{ Assim, o custo para 16 bolas é R\$153,80.}$$



d) Para a construção do gráfico da reta $y = 8,6x + 16,2$ é só tomarmos dois valores:

para $x = 10$, tem-se

$$y = (8,6)(10) + 16,2 = 102,2 \text{ e}$$

para $x = 15$, tem-se

$$y = (8,6)(15) + 16,2 = 145,2$$

fig. 102

Conclusões:

Após o professor apresentar os conceitos de regressão linear, os grupos resolveram os problemas aplicativos com facilidade e demonstraram muito interesse. As maiores dúvidas apareceram na construção dos gráficos por causa das escalas. Os grupos perceberam que os problemas sempre procuravam estimar dados que não estavam na tabela.

Vigésima sétima semana

O professor entregou aos grupos os enunciados dos problemas aplicativos a partir de temas das disciplinas da área profissionalizante.

Problema da administração da produção

O professor da disciplina Administração da Produção propôs aos seus alunos o problema apresentado no livro de Norman Gaither e Greg Frazier (Editora Pioneira) que tem o seguinte enunciado:

A Specific Motors produz motores eletrônicos. A fábrica da Specific opera em sua capacidade quase total há algum tempo. Jim Write, o gerente da fábrica, acha que o crescimento de vendas prosseguirá. Desenvolva uma previsão a longo prazo a ser usada para planejar as exigências de instalações para os próximos três anos. Os registros de vendas dos últimos dez anos são apresentados pela tabela em milhões de unidades.

ano	vendas anuais
1	1000
2	1300
3	1800
4	2000
5	2000
6	2000
7	2200
8	2600
9	2900
10	3200

Os grupos entregaram as soluções e após as discussões na plenária foi apresentada na lousa a solução.

O gerente da fábrica deseja conhecer o comportamento das vendas nos próximos três anos, para isso utilizaremos o método Regressão Linear. Montando a tabela usual tem-se:

ano (x)	vendas anuais (y)	x^2	xy
1	1000	1	1000
2	1300	4	2600
3	1800	9	5400
4	2000	16	8000
5	2000	25	10000
6	2000	36	12000
7	2200	49	15400
8	2600	64	20800
9	2900	81	26100
10	3200	100	32000
$\sum x = 55$	$\sum y = 21000$	$\sum x^2 = 385$	$\sum xy = 133300$

Achando as médias aritméticas, temos:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{55}{10} = 5,5 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{21000}{10} = 2100$$

Para encontrarmos a reta que melhor se ajusta ao problema ($y=ax+b$), determinamos:

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{(10) \times (133300) - (55) \times (21000)}{(10) \times (385) - (55)^2} =$$

$$= \frac{1333000 - 1155000}{3850 - 3025} = \frac{178000}{825} = 215,7575 \cong 215,8 \quad \text{e}$$

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 2100 - (215,8) \times (5,5) = 2100 - 1186,9 = 913,1$. Logo a reta regressão linear tem por equação $y = 215,8x + 913,1$

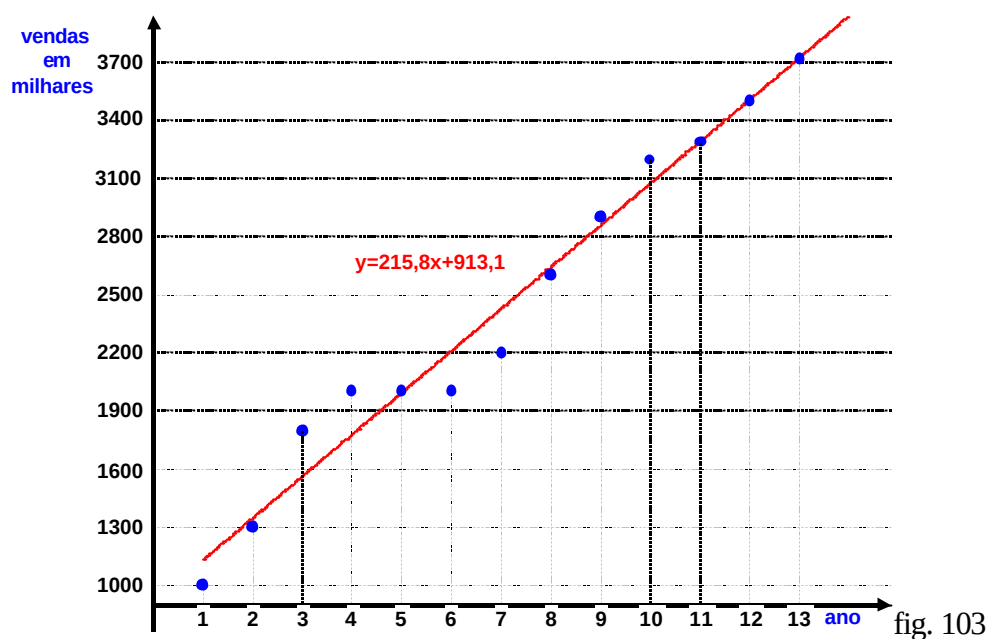
Como desejamos prever as vendas para os próximos três anos é só substituir a variável x por 11, 12, 13. Assim:

$$y_{11} = 215,8(11) + 913,1 = 3286,9 \text{ ou } 3287 \text{ milhares de unidades}$$

$$y_{12} = 215,8(12) + 913,1 = 3502,7 \text{ ou } 3503 \text{ milhares de unidades}$$

$$y_{13} = 215,8(13) + 913,1 = 3718,5 \text{ ou } 3719 \text{ milhares de unidades}$$

Para representarmos a reta $y=215,8x+913,1$ no gráfico, tomamos dois pontos. Assim para $x=1$, tem-se $y=1129$ e para $x=11$, tem-se $y=3287$



O professor, passando pelos grupos enquanto resolviam os problemas, ouviu de um aluno que este trabalhava em um grande hospital e que era responsável pelos registros de cirurgias cardíacas. O aluno forneceu os dados e o professor apresentou aos grupos o problema.

Problema da minimização dos custos de cirurgias

No relatório do Hospital B.P., encontramos a tabela do número de cirurgias cardíacas no ano de 2001 e o total de despesas necessárias para sua realização.

Seja C número de cirurgias e D despesas em milhares de reais:

jan		fev		mar		abr		mai		jun		jul		ago		set		out	
C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D
59	56,5	56	59,3	74	58,9	68	54,2	62	64,2	71	56,2	84	60,1	84	57,5	73	55,4	56	45,6

Pede-se:

- A reta regressão linear para as despesas.
- A reta regressão linear para o número de cirurgias.
- Esboçar o gráfico para o número de cirurgias.
- Esboçar o gráfico para as despesas.
- O gasto e o número de cirurgias prováveis para o mês de novembro.
- A comparação dos dois eventos quanto à otimização dos gastos em relação à quantidade de cirurgias.

Os grupos entregaram as soluções e, após a plenária, foi apresentada a resolução:

Adotaremos para janeiro, fevereiro, março, ..., outubro os valores x iguais a 0, 1, 2, 3, ..., 9.

Para obtermos as equações das retas, montamos as respectivas tabelas.

a) Despesas com as cirurgias cardíacas

mês	x	y	xy	x^2
janeiro	0	56,5	0	0
fevereiro	1	59,3	59,3	1
março	2	58,9	117,8	4
abril	3	54,2	162,6	9
maio	4	64,2	256,8	16
junho	5	56,2	281,0	25
julho	6	60,1	360,6	36
agosto	7	57,5	402,5	49
setembro	8	55,4	443,2	64
outubro	9	45,6	410,4	81
Total	$\sum x = 45$	$\sum y = 567,9$	$\sum xy = 2494,2$	$\sum x^2 = 285$

Calculando a média e lembrando que os resultados devem ser arredondados para dois dígitos significativos, tem-se:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{45}{10} = 4,5 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{567,9}{10} = 56,79$$

usando as fórmulas dadas, obtemos a e b :

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{(10) \times (2494,2) - (45) \times (567,9)}{(10) \times (285) - (45)^2} =$$

$$= \frac{24942 - 25555,5}{2850 - 2025} = \frac{-613,5}{825} = -0,743636 \cong -0,74$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 56,79 - (-0,74) \times (4,5) = 56,79 + 3,33 = 60,12$$

Portanto a reta regressão linear das despesas é dada por: $y_D = -0,74x + 60,12$

Da mesma forma que fizemos com as despesas fazemos com o número de cirurgias.

b) Número de cirurgias

mês	x	y	xy	x ²
janeiro	0	59	0	0
fevereiro	1	56	56	1
março	2	74	148	4
abril	3	68	204	9
maio	4	62	248	16
junho	5	71	355	25
julho	6	84	504	36
agosto	7	84	588	49
setembro	8	73	584	64
outubro	9	56	504	81
Total	$\sum x = 45$	$\sum y = 687$	$\sum xy = 3191$	$\sum x^2 = 285$

Como os dados são números inteiros, os resultados serão arredondados para um dígito significativo.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{45}{10} = 4,5 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{687}{10} = 68,7$$

Determinando a e b, segue:

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{(10) \times (3191) - (45) \times (687)}{(10) \times (285) - (45)^2} =$$

$$= \frac{31910 - 30915}{2850 - 2025} = \frac{995}{825} = 1,2060 \cong 1,2 \quad \text{e}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 68,7 - (1,20) \times (4,5) = 68,7 - 5,4 = 63,3$$

Portanto a reta regressão linear do número de cirurgias é dada por: $y_C = 1,2x + 63,3$

c) Esboço do gráfico das despesas e da reta $y_D = -0,74x + 60,12$.

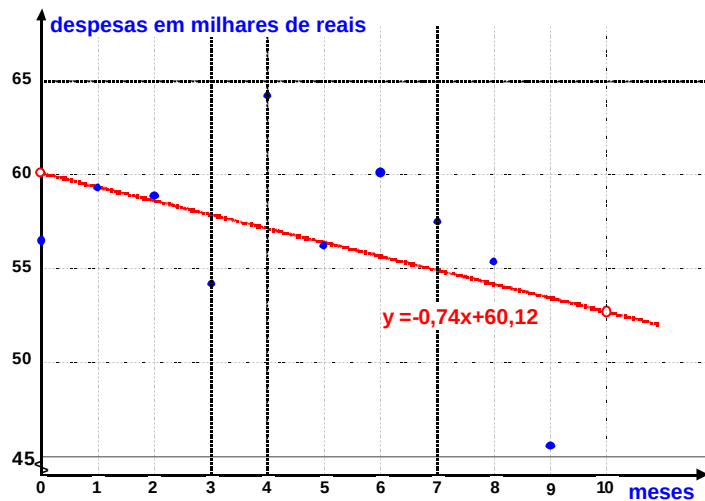


fig. 104

O gráfico da reta é obtido atribuindo-se valores para x, na equação

$$y_D = -0,74x + 60,12. \text{ Assim:}$$

$$\text{para } x=0, \text{ tem-se } y_D=60,12$$

$$\text{para } x=10, \text{ tem-se } y_D=(-0,74)(10)+60,12 = -7,4+60,12=52,72$$

d) Analogamente se obtém o esboço do gráfico do número de cirurgias e da reta $y_C = 1,2x + 63,3$

Para esse gráfico, manteremos a mesma escala para os meses e a mesma amplitude total para o número de cirurgias, isto é, a mesma medida em cm no eixo oy.

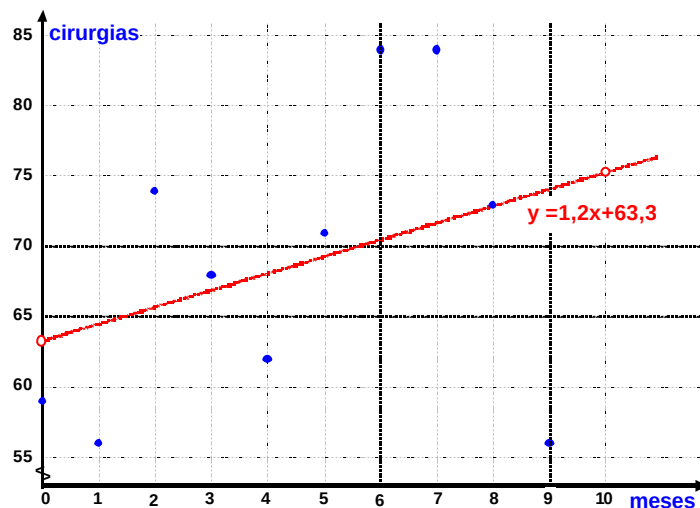


fig. 105

A reta é obtida atribuindo-se valores a x na equação $y_C = 1,2x + 63,3$.

$$\text{para } x=0, \text{ tem-se } y_C=(1,20)(0)+63,3=63,3$$

$$\text{para } x=10, \text{ tem-se } y_C=(1,20)(10)+63,3=75,3$$

e) O gasto para o mês de novembro é dado por:

$$y_D = (-0,74).10 + 60,12 = 52,72 \text{ reais.}$$

f) Sobrepondo os dois gráficos das retas tem-se:

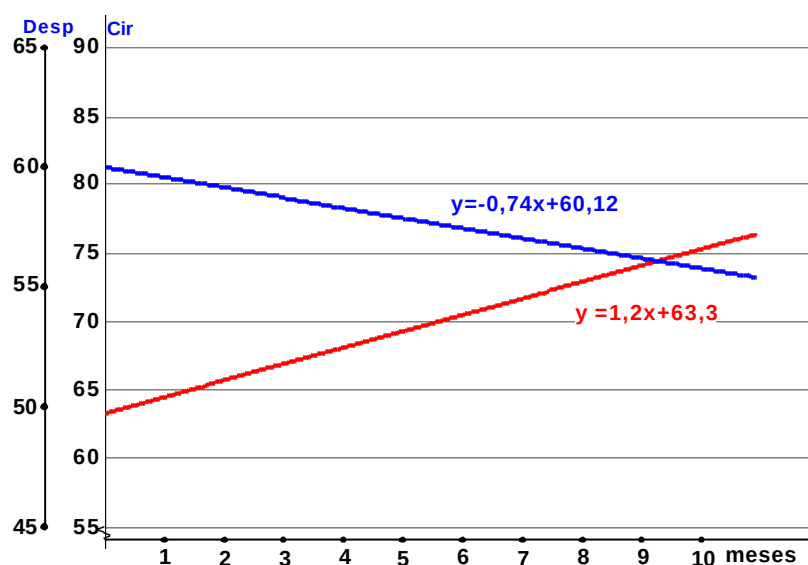


fig. 106

Dos gráficos, podemos concluir que:

- i) O número de cirurgias está aumentando e se prevê para o mês de novembro 75 cirurgias;
- ii) As despesas com cirurgias cardíacas estão diminuindo, mesmo tendo aumentado o número delas;
- iii) O que se observa é que o Hospital B.P. deve ter feito mudanças que resultaram na diminuição dos custos, mesmo tendo aumentado o número de cirurgias.

Problema da produção de soja

Pedro retorna ao início da vigésima quinta aula e diz:

¾ Fernanda, no início deste capítulo fizemos a pergunta:

Se a área agricultável de soja no Estado do Paraná aumentar, isto acarreta um aumento na produção de grãos?

Os dados abaixo foram colhidos do Anuário Brasileiro de Agribusiness.

ano	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
área (em milhões de hectares)	2,0	1,8	2,0	2,1	2,3	2,5	2,8	2,8
Produção (toneladas)	3,6	3,4	5,3	5,5	6,0	6,6	7,1	7,7

Fernanda, podemos dizer que houve aumento na produtividade?

—Pedro, para respondermos essa pergunta, devemos determinar a reta Regressão Linear para a área e para a produção.

a) Estudemos, em primeiro lugar, a área. Para isso, determinemos os valores usando a tabela:

Área dada em milhões de hectares				
ano	x	y	xy	x ²
1992	0	2,0	0	0
1993	1	1,8	1,8	1
1994	2	2,0	4,0	4
1995	3	2,1	6,3	9
1996	4	2,3	9,2	16
1997	5	2,5	12,5	25
1998	6	2,8	16,8	36
1999	7	2,8	19,6	49
Total	$\sum x = 28$	$\sum y = 18,3$	$\sum xy = 70,2$	$\sum x^2 = 140$

Dos dados obtidos, podemos escrever:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{28}{8} = 3,50 \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{18,3}{8} = 2,2875 \cong 2,29$$

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{(8) \times (70,2) - (28) \times (18,3)}{(8) \times (140) - (28)^2} =$$

$$= \frac{561,6 - 512,4}{1120 - 784} = \frac{49,2}{336} = 0,1464 \cong 0,15$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 2,29 - (0,15) \times (3,5) = 2,29 - 0,525 = 2,29 - 0,53 = 1,76.$$

Logo a reta regressão linear é dada por $y_A = 0,15x + 1,76$

b) Para estudarmos a produção de grãos, montamos a tabela:

Produção de soja em milhões de toneladas				
ano	x	y	xy	x ²
1992	0	3,6	0	0
1993	1	3,4	3,4	1
1994	2	5,3	10,6	4
1995	3	5,5	16,5	9
1996	4	6,0	24,0	16
1997	5	6,6	33,0	25
1998	6	7,1	42,6	36
1999	7	7,7	53,9	49
Total	$\sum x = 28$	$\sum y = 45,2$	$\sum xy = 184$	$\sum x^2 = 140$

Dos dados obtidos, podemos escrever:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{28}{8} = 3,5 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{45,2}{8} = 5,65$$

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{(8) \times (184) - (28) \times (45,2)}{(8) \times (140) - (28)^2} =$$

$$= \frac{1472 - 1265,6}{1120 - 784} = \frac{206,4}{336} = 0,614 \approx 0,61$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 5,65 - (0,61) \times (3,5) = 5,65 - 2,135 \approx 5,65 - 2,14 = 3,51$$

Logo a reta regressão linear é dada por $y_p = 0,61x + 3,51$

c) O gráfico correspondente à área está representado abaixo:

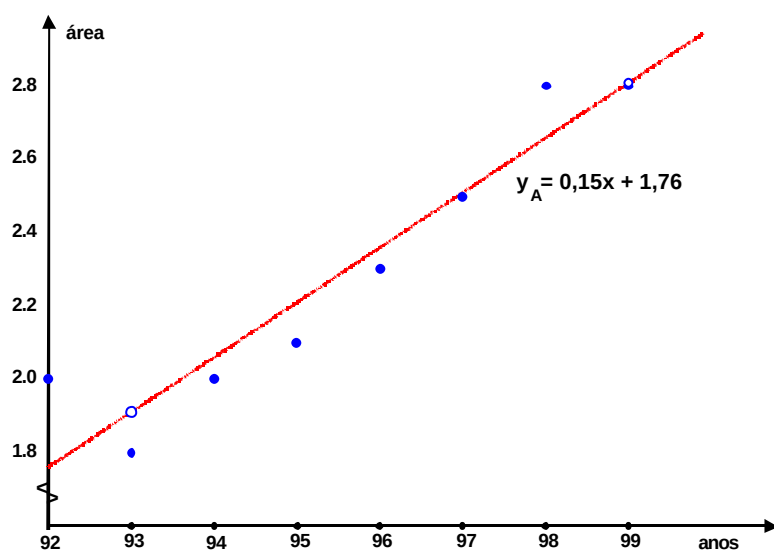


fig. 107

Para a construção do gráfico da reta $y = 0,15x + 1,76$, é só tomarmos dois valores:

para $x=1$, tem-se $y=(0,15)(1)+1,76=1,91$ e

para $x=7$, tem-se $y=(0,15)(7)+1,76=2,81$

d) Segue o gráfico da produção de grãos

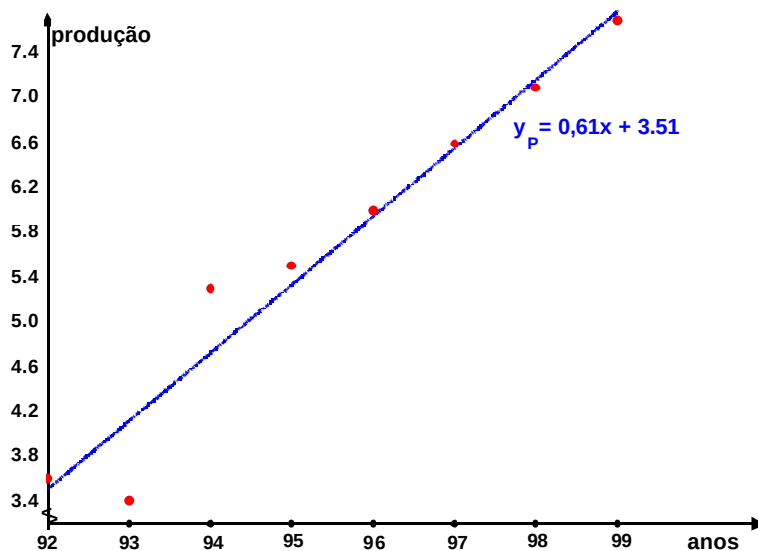


fig. 108

Para a construção do gráfico da reta $y_p = 0,61x + 3,51$ é só tomarmos os valores:

para $x=1$, tem-se, $y=(0,61)(1)+3,51=4,12$

para $x=7$, tem-se, $y=(0,61)(7)+3,51=7,78$

Para compararmos a produção com a área, construímos um único gráfico, mantendo a mesma escala para os meses e a mesma amplitude total para a área e a produção.

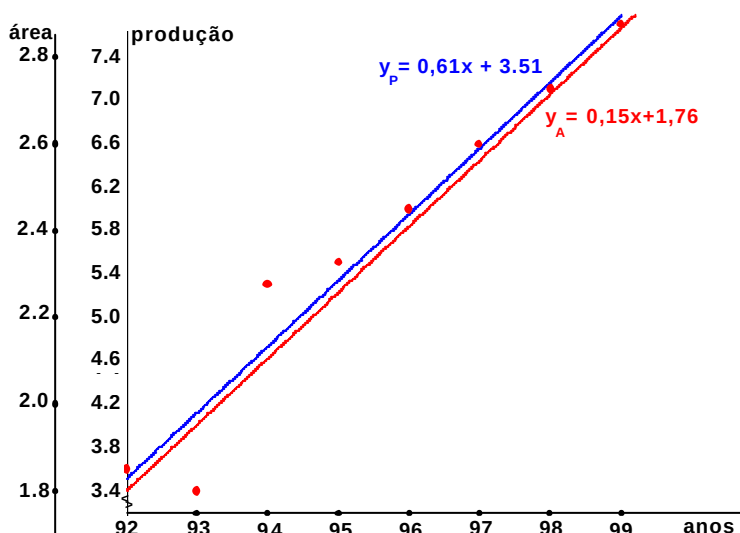


fig.109

—Fernanda, podemos verificar pelo gráfico que a área agricultável de soja no Estado do Paraná está aumentando, bem como está acarretando um aumento na produção de grãos. Vê-se, ainda que o coeficiente angular da reta de produção (0,61) é maior que o coeficiente

angular da reta é área agricultável (0,15). Assim, podemos afirmar que a produção cresce mais rapidamente que o crescimento da área agricultável, portanto há produtividade. Isto significa que os produtores de soja estão usando tecnologias mais modernas e obtendo maior produtividade, porém esta ainda é muito pequena, não sendo sensível nesse espaço de tempo. Por causa das escalas feitas no eixo oy, tem-se a impressão de que as retas são paralelas.

Quando se trata de produção agrícola, nem sempre podemos inferir o que ocorrerá no próximo ano agrícola, pode ocorrer, por exemplo uma grande seca ou geada ou falta de financiamento, acarretando queda da produção ou da área agricultável.

Exercícios Grupo 7 -Tarefas extraclasse

1) A tabela indica as alturas em centímetros e o peso em quilogramas de uma amostra de alunos do 1º ano do Curso de Administração. Pede-se:

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- Avaliar a altura do aluno cujo peso é 63 kg.
- Avaliar o peso do aluno cuja altura é 180 cm.
- Esboçar o gráfico da tabela e da reta regressão linear.

Peso (x)	45	60	58	55	66	58	70	68	76
Altura(y)	150	155	158	160	162	165	170	175	178

2) A tabela mostra a taxa de desemprego, em percentagem, da população economicamente ativa de um determinado país desde 1980. Pede-se:

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- Avaliar a taxa de desemprego para o ano de 1993.
- Esboçar o gráfico.

Ano (x)	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
% (y)	2,2	4,3	4,0	4,3	4,9	4,5	2,4	2,6	3,8	3,2	2,6	4,5	6,0

3) O número de internautas residenciais que utilizaram a internet em 2001 (em milhões) é dado pela tabela (Jornal *O Estado de São Paulo* – 21/10/2001).

JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET
9,8	9,8	9,8	10,4	11,1	11,3	11,9	11,9	12,0

Pede-se:

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- Avaliar o número de internautas para o mês de outubro.
- Esboçar o gráfico dos pontos e da reta regressão linear.

4) A tabela abaixo mostra a percentagem de habitantes pobres no Brasil a partir de 1992 (Fonte: Jornal *O Estado de São Paulo* – 22/07/2001).

1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
40,8	41,7	43,9	33,9	33,5	33,9	32,7	34,0	31,9

Pede-se:

- A reta que melhor se ajusta a esses dados.
- Avaliar a percentagem de pobres para o ano de 2001.
- Esboçar o gráfico dos pontos e da reta regressão linear.

Conclusões:

Encerrada a unidade II, ajustamento de curvas, com o uso da Metodologia de Ensino – Aprendizagem de Matemática via resolução de problemas, podemos observar que:

O trabalho em grupo foi um facilitador da aprendizagem, pois na solução desses problemas, além dos conceitos envolvidos, foram necessárias construções de tabelas e gráficos. O uso de calculadoras se fez necessário para a determinação dos valores nas tabelas e na obtenção da equação da reta regressão linear. Os enunciados dos problemas foram elaborados com temas da área de Administração de Empresas, o que propiciou bastante motivação aos alunos. Os grupos fizeram uso do processador Winplot para a construção e interpretação dos dados. Quanto à formação do futuro Administrador Profissional, essa unidade contribuiu para ampliar os conhecimentos: de informática, de análise de dados e de tomada de decisões. Com respeito às habilidades, essa unidade contribuiu para: saber trabalhar em equipe; ter capacidade de aprender, de comunicar-se verbalmente e por escrito e de ter visão de problemas de várias áreas do conhecimento. Quanto às atitudes, essa unidade contribuiu para motivar os elementos do grupo, a atualizar-se, a desejar estudar e a ser ético.

UNIDADE III SEQUÊNCIAS

Foram utilizadas duas semanas com quatro aulas semanais, para o desenvolvimento e as aplicações da Unidade III – Sequências.

A seguir, apresentamos os tópicos da Unidade III.

Sequências

1. Definição de seqüências
2. Seqüência limitada inferiormente
3. Seqüência limitada superiormente
4. Seqüência limitada
5. Seqüências monótonas
6. Seqüência convergente
7. Seqüência divergente
8. Aplicações de seqüências
9. Aplicações de seqüências, quando a função $f(x)$ tem sua variável x assumindo valores de uma seqüência (A_n)

Objetivos da Unidade III

- *Comparar e ordenar números em seqüências numéricas.*
- *Estudar seqüências numéricas estritamente crescentes (decrescentes) e convergentes, usando a noção de limite pela representação gráfica.*

Vigésima oitava semana

Com a finalidade de se construir o conceito de seqüências, foi apresentada aos grupos uma situação-problema, com enunciado preparado pelo professor. De maneira natural, chegou-se ao conceito de seqüências. Na plenária, destacaram-se os diálogos de Pedro e Fernanda.

Problema – Paradoxo de Aquiles

Conta-se que, na antiguidade, Aquiles, guerreiro grego, apostou corrida com uma tartaruga. A corrida ocorreu em uma pista reta e Aquiles dava uma vantagem inicial à tartaruga de 100m. Observou-se que a tartaruga corria sempre a décima parte do que corria Aquiles, isto é, quando Aquiles corria 100 metros a tartaruga corria 10m, quando Aquiles corria 10m, a tartaruga corria 1m e assim sucessivamente. Dado o sinal de partida:

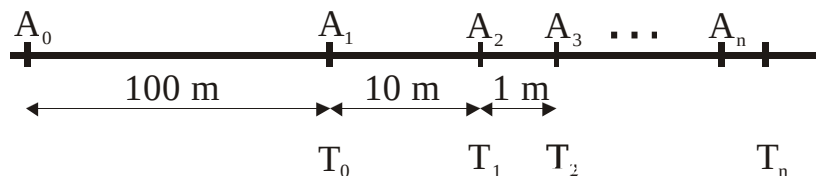
- a) Aquiles alcança a tartaruga ?*
- b) Se alcançar, depois de quantos metros isso ocorre?*

Pedro começou definindo as posições de Aquiles como as indicadas na figura:

A_0 (início), A_1 (após 100 m), A_2 (após 10 m de A_1), etc.

e da tartaruga indicados por:

T_0 (início), T_1 (após 10 m), T_2 (após 1 m de T_1), etc.



Após o sinal de partida tem-se:

Quando Aquiles chega a A_1 , a tartaruga chega a T_1

Quando Aquiles chega a A_2 , a tartaruga chega a T_2

Quando Aquiles chega a A_3 , a tartaruga chega a T_3 e assim por diante

Quando Aquiles chega a A_n , a tartaruga chega a T_n

Para medirmos o espaço percorrido por Aquiles, devemos proceder da seguinte maneira:

Quando Aquiles chegar a:

A_1 ele percorreu 100 metros

A_2 ele percorreu $(100+10)$ metros

A_3 ele percorreu $(100+10+1)$ metros

A_4 ele percorreu $(100+10+1+\frac{1}{10})$ metros, assim sucessivamente e em

A_n ele percorreu $(100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\dots+\frac{1}{10^{n-3}})$, $n \geq 3$

ou ainda $111+0,1+0,01+0,001+\dots$. Somando todos os termos, obteremos $111,111\dots$. Logo a corrida termina quando tivermos o valor da soma.

Suponhamos que a soma: $111+0,1+0,01+0,001+\dots$ exista e seja um número finito S . Assim:

$S=111,111\dots$ multipliquemos por 10:

$10S=1111,111\dots$ Subtraindo membro a membro:

$10S-S=1111,111\dots - 111,111\dots$ temos $9S=1000$ ou $S=\frac{1000}{9}$ ou $S=(111+\frac{1}{9})$ metros.

Desta forma, quando pensávamos que a soma

$$S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^{n-3}} \dots \quad n \geq 3 \text{ não pudesse ser calculada, encontramos o}$$

valor $\frac{1000}{9} m$ que é o espaço percorrido por Aquiles no momento em que alcança a tartaruga.

O professor continuou

— Uma outra maneira de representar o problema é indicar os espaços percorridos por Aquiles:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...	a_n
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000} \dots$	...	$\frac{1}{10^{n-3}}$

Portanto escrevemos $a_n = \frac{1}{10^{n-3}}$ ou $a_n = 10^{3-n}$ ($n \geq 1$).

Se atribuirmos para n os valores 1, 2, 3, 4, ..., n , encontraremos novamente 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, ..., $\frac{1}{10^{n-3}}$. De fato,

n	1	2	3	4	...	n
$a_n = 10^{3-n}$	100	10	1	10^{-1}	...	10^{n-3}

Desta maneira, podemos definir a função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 10^{n-3}$. Essa função denominamos seqüência e indicamos por $(A_n) = (100, 10, 1, 10^{-1}, \dots, 10^{n-3}, \dots)$, ou ainda $(A_n): a_n = 10^{n-3}$.

A palavra seqüência é muito usada no nosso dia-a-dia. Você fala:

O Corinthians perdeu uma seqüência de 11 partidas seguidas no campeonato Paulista de 2001.

Essa é a melhor seqüência dos capítulos da novela.

Os alunos serão chamados na seqüência dos números do registro escolar.

As seqüências dadas nos exemplos chamam-se seqüências finita e são indicadas por:

$(A_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ e as seqüências infinitas por

$(A_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$

Exemplos de seqüências dadas por leis

a) $(A_n): a_n = \frac{1}{n}$, logo $(A_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$

b) $(A_n): a_n = \frac{n}{n+1}$, logo $(A_n) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots)$

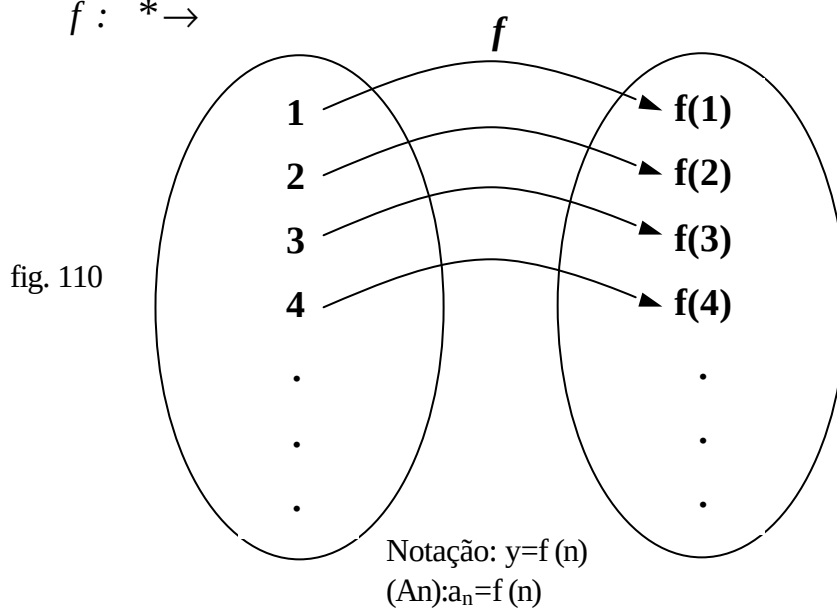
c) $(A_n): a_n = (-1)^n$, logo $(A_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$

d) $(A_n): a_n = a$, denomina-se seqüência constante $(A_n) = (a, a, a, a, \dots, a, \dots)$

1. Definição

Dessa maneira definimos seqüência toda função

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$



Exercícios Aplicativos 12

1) Determine os 5 primeiros termos das seqüências.

a) $(A_n): a_n = 3 - 2n$

b) $(A_n): a_n = (-2)^n$

c) $(A_n): a_n = \frac{1}{2^n}$

d) $(A_n): a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

e) $(A_n): a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$

2) Achar os 4 primeiros termos da seqüência conhecendo-se:

$$a) a_1=2 \text{ e } a_{n+1}=a_n-3$$

$$b) a_1=0 \text{ e } a_{n+1}=(a_n)^2$$

$$c) a_1=\frac{1}{3} \text{ e } a_{n+1}=\frac{1}{a_n}$$

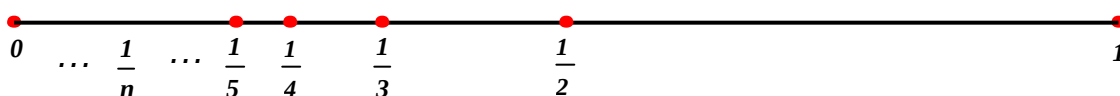
Com a finalidade de trabalhar os conceitos de seqüência convergente, divergente e monótona, o professor entregou texto aos grupos e discutiu em aula expositiva.

2. Seqüência limitada inferiormente

(A_n) é limitada inferiormente se, e somente se, existir um número real K tal que $K \leq a_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Exemplo:

$(A_n): a_n = \frac{1}{n}$ é limitada inferiormente pelo zero



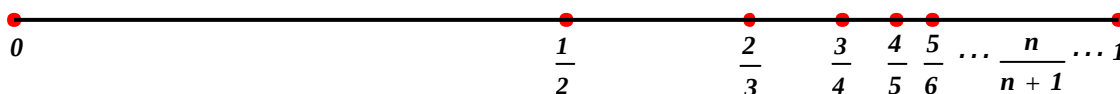
3. Seqüência limitada superiormente

(A_n) é limitada superiormente se, e somente se, existir um número real K tal que $a_n \leq K$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Exemplo:

$$(A_n): a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$(A_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right)$$



A seqüência (A_n) é limitada superiormente pelo número 1 e podemos dizer que “a seqüência caminha para 1”, “tende para 1”.

4. Seqüência limitada

(A_n) diz-se limitada quando for limitada inferior e superiormente.

Do exemplo anterior $(A_n): a_n = \frac{n}{n+1}$ é limitada inferiormente por $\frac{1}{2}$ e superiormente por 1, portanto limitada.

5. Seqüências monótonas

Uma seqüência diz-se monótona

a) crescente, se $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

b) decrescente, se $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Uma seqüência (A_n) diz-se monótona

a) estritamente crescente, se $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

b) estritamente decrescente, se $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Exemplos:

Verificar se as seqüências são monótonas crescentes ou decrescentes.

a) $(A_n): a_n = \frac{1}{n}$. Assim, podemos escrever:

$a_n = \frac{1}{n}$ e $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Comparando, observamos que $a_{n+1} < a_n$, pois

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow n < n+1$, o que vale $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto $\frac{1}{n}$ é estritamente

decrescente.

b) $(A_n): a_n = 2n - 1$

$\left\{ \begin{array}{l} a_n = 2n - 1 \\ a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1 \end{array} \right\}$ comparando a_n com a_{n+1}

$$\text{temos } \begin{cases} a_n < a_{n+1}, \text{ pois} \\ \Downarrow \quad \Downarrow \\ 2n-1 < 2n+1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Logo a sentença é válida para $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Portanto a seqüência (A_n) é estritamente crescente.

6. Seqüência convergente

- a) Se uma seqüência (A_n) é estritamente decrescente e limitada inferiormente, então ela é convergente.
- b) Se uma seqüência (A_n) é estritamente crescente e limitada superiormente, então ela é convergente.
- c) Se uma seqüência (A_n) é constante, então se diz convergente.

7. Seqüência divergente

Se uma seqüência (A_n) não é convergente, então se diz divergente.

8. Aplicações de seqüências

Classificar as seqüências em

- a) monótona (crescente e decrescente)
- b) limitada
- c) convergente ou divergente

$$1) (A_n): a_n = \frac{2n+1}{n}$$

Resolução: Atribuindo valores para n , podemos escrever:

$$(A_n) = \left(\frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots, \frac{2n+1}{n}, \dots \right) \text{ em que}$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{n} \text{ e} \\ a_{n+1} &= \frac{2(n+1)+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1} \end{aligned} \right\} \text{ Comparando, temos } a_{n+1} < a_n, \text{ pois}$$

$$\frac{2n+3}{n+1} < \frac{2n+1}{n} \Rightarrow n(2n+3) < (n+1)(2n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 3n < 2n^2 + n + 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow 3n < 3n + 1 \Rightarrow 0 < 1$$

logo $a_{n+1} < a_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Portanto a_n é estritamente decrescente.

Podemos escrever o termo geral $a_n = \frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$ e quando n cresce ou n

assume um número arbitrariamente grande que indicamos por ∞ (infinito), então a fração $\frac{1}{n}$

decrece para zero. Assim:

n	1	2	3	4	...	n	...	∞ (infinito)
$a_n = 2 + \frac{1}{n}$	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	...	$2 + \frac{1}{n}$	...	$2 + \frac{1}{\infty} \rightarrow 2$

Para n muito grande, $\frac{1}{n}$ tende a zero. Portanto a sequência é limitada inferiormente pelo 2

e converge para 2.

Representação gráfica da sequência $(A_n) : a_n = 2 + \frac{1}{n}$

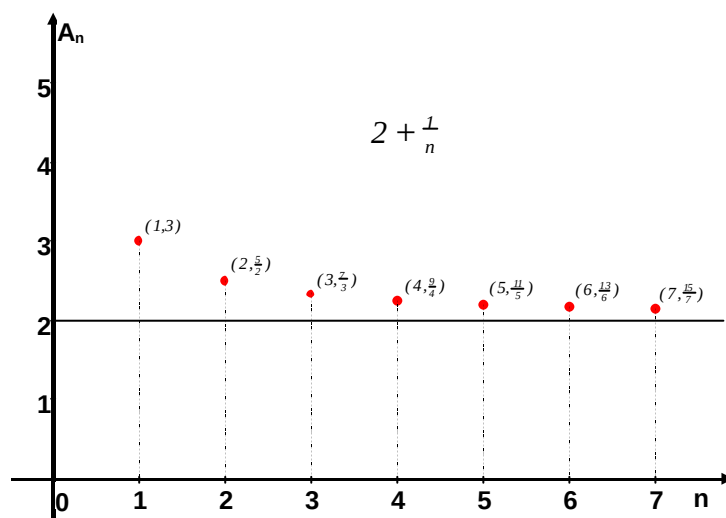


fig. 111

$$2) (A_n) : a_n = \frac{1}{1+n}$$

Resolução: Atribuindo valores para n , podemos escrever

$$(A_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{1+n}, \dots \right), \text{ em que}$$

$$\left[\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{1+n} \\ a_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)} = \frac{1}{n+2} \end{array} \right] a_{n+1} < a_n \Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$n + 1 < n + 2 \Rightarrow 0 \times n < 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})$ é estritamente decrescente.

n	1	2	3	4	...	n	...	∞ (infinito)
$a_n = \frac{1}{1+n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...	$\frac{1}{1+n}$	...	$\frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} \rightarrow 0$

Assim, quando n é muito grande, $\frac{1}{1+n}$ é muito pequena, isto é, $\frac{1}{1+n}$ tende para zero.

Portanto (A_n) é estritamente decrescente e limitada inferiormente pelo zero, logo convergente, consequentemente dizemos que a seqüência converge para zero.

$$3) (A_n): a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

O termo geral a_n pode ser escrito como: $a_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$, portanto a seqüência é dada por: $(A_n) = (2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots)$.

A seqüência é decrescente pois $a_{n+1} < a_n$ (I), isto é,

$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}. \text{ Pondo em (I) temos:}$$

$$\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n} \Leftrightarrow n(n+2) < (n+1)(n+1) \Rightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1, \text{ portanto}$$

$0 \times n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Podemos concluir que a seqüência é decrescente.

Ao escrevermos $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, observamos que, quando n cresce, a fração $\frac{1}{n}$ decresce,

isto é, para n “muito grande”, $\frac{1}{n}$ tende a zero, ficando apenas o número 1. Assim, podemos

dizer que para n “grande” a seqüência tende para 1.

Como a seqüência é estritamente decrescente e limitada pelo número 1, concluímos que a seqüência é convergente.

$$4) (A_n): a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n}$$

Resolução:

O numerador é uma progressão aritmética, portanto podemos efetuar sua soma usando a fórmula da soma de uma P.A. $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$. Assim:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{(1+n)}{2} n, \text{ substituindo no termo geral da sequência, temos:}$$

$$a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \frac{\frac{(1+n)}{2} n}{n} = \frac{1+n}{2}$$

A sequência $(A_n): a_n = \frac{1+n}{2}$ tem como elementos

$$(A_n) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \dots, \frac{1+n}{2}, \dots \right), \text{ portanto é estritamente crescente e não}$$

limitada superiormente. Assim, podemos dizer que a sequência é divergente.

Exercícios de aplicação 13

a) Verificar se a sequência abaixo é convergente ou divergente.

$$1) (A_n): a_n = \frac{1+2n}{n}$$

$$2) (A_n) = (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$$

$$3) (A_n): a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$4) (A_n): a_n = n + \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$5) (A_n): a_n = n^2 + n + 7$$

b) Determinar os 5 primeiros termos das sequências e analisar suas condições de convergência.

$$1) (A_n): a_n = \begin{cases} a_2 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 4 \end{cases}$$

$$2) (A_n): a_n = \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

$$3) (A_n): a_n = \begin{cases} a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \end{cases}$$

Conclusões:

Pelo fato de a teoria de seqüências possuir muitas definições e já ter sido ministrada no Ensino Médio, o professor optou por apresentar a teoria em aula expositiva dialogada. Com a participação da plenária, o professor propôs exercícios aplicativos.

Vigésima nona semana

Problemas aplicativos:

Problema da evolução dos salários

Em geral, empregados que trabalham muitos anos em uma mesma empresa, no início de carreira têm seus salários menores do que no final de carreira. Pensando assim, a Empresa ABC contrata seus empregados do setor M estabelecendo um aumento mensal dado pela função $s(x) = 2000x + 100$ (reais) em que os valores x assumem os valores na seqüência $(A_n): a_n = \frac{2n-1}{n}$, onde n representa os meses de trabalho.

Responda:

- a) Qual o valor do primeiro salário recebido pelos empregados do setor M ?
- b) Qual o valor do salário a partir do qual ele fica estável?

Resolução:

O professor, para facilitar as operações, lembra que podemos escrever:

$$a_n = \frac{2n-1}{n} \text{ como } a_n = 2 - \frac{1}{n} \text{ e montar a tabela como foi feita anteriormente.}$$

n	1	2	3	...	n	...	∞
$x = 2 - \frac{1}{n}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	...	$2 - \frac{1}{n}$	...	$2 - \frac{1}{\infty} \rightarrow 2$
$s(x) = 2000x + 100$	2100	3100	3433	...	$2000(2 - \frac{1}{\infty}) + 100$	...	$2000(2 - \frac{1}{\infty}) + 100 \rightarrow 4100$

- a) Da tabela, vê-se que no primeiro mês $a_1 = 1 = x$, logo o salário inicial é $s(1) = 2.000(1) + 100 = 2.100$ reais.

b) A sequência $(A_n): a_n = \frac{2n-1}{n}$ é limitada inferiormente por 1 e superiormente por 2.

Como a variável x dos salários, $s(x) = 2000x + 100$ (reais), assume os valores desta sequência, a sequência dos salários é, portanto, limitada pelo inicial, R\$2.100,00, e pelo salário, R\$4.100,00, que torna a sequência estável.

Resumo:

Quando n tende para valores grandes (∞) , (A_n) tende para 2 e $s(x)$ tende para R\$4.100,00, ou simbolicamente:

$$\text{quando } \begin{cases} n \rightarrow \infty \\ (A_n) \rightarrow 2 \\ s(x) \rightarrow R\$4.100,00 \end{cases}$$

Problema do pagamento de prestações da casa própria

Uma construtora vende apartamentos em prestações mensais que obedecem à lei $p(x) = 800x + 20$ (reais). Os juros aplicados sobre o saldo decrescem segundo a sequência $(A_n): a_n = \frac{n+1}{n}$, na qual n representa os meses e x assume os valores na sequência (A_n) .

Pede-se:

a) Qual o valor a ser pago na primeira prestação do apartamento?

b) Para qual valor a prestação se torna estável?

Resolução:

Para facilitar nossa observação, montemos a tabela lembrando que $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.

n	1	2	3	...	n	...	∞
$x = 1 + \frac{1}{n}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	...	$1 + \frac{1}{n}$	...	$1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$
$p(x) = 800x + 20$	1.620,00	1.220,00	1.086,66	...	$800(1 + \frac{1}{n}) + 20$	...	$800(1 + \frac{1}{\infty}) + 20 \rightarrow 820,00$

a) A tabela mostra que a sequência $(A_n): a_n = \frac{n+1}{n}$ é estritamente decrescente, começando por 2 e para esse valor tem-se a prestação de maior valor $p(2) = R\$1.620,00$.

b) A tabela mostra que a seqüência $(A_n): a_n = \frac{n+1}{n}$ é estritamente decrescente, também a seqüência dos pagamentos $p(x)=800x+20$ é decrescente e limitada inferiormente pelo valor R\$820,00 que torna as prestações estáveis.

A prestação $p(x)=800x+20$ pode ser dada em função dos meses (n) da seguinte maneira:

$$p(n) = 800\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 20, \text{ ou ainda } p(n) = 820 + \frac{800}{n} \text{ com } n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

portanto, o gráfico que representa as prestações mensais é dado por:

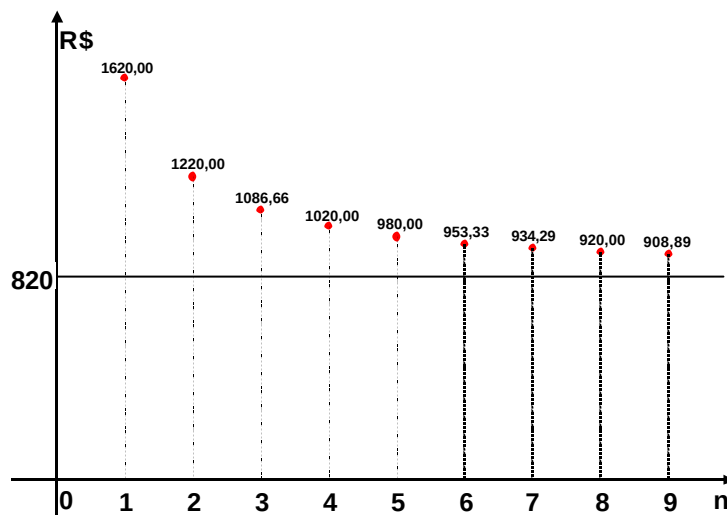


fig. 112

Observação 33 - Os valores das prestações são decrescentes e tendem para o valor de R\$ 820,00.

9. Aplicações de seqüências quando a função $f(x)$, tem a variável x assumindo valores na seqüência (A_n)

Exercícios de aplicação 14

Dar a convergência da função $f(x)$, quando x assume os valores na seqüência (A_n)

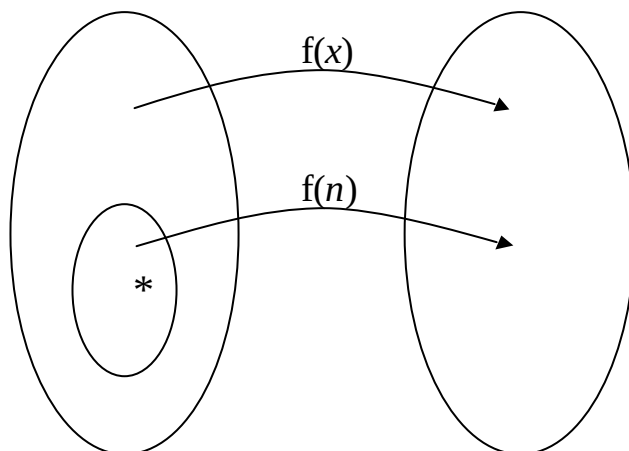
Esses exercícios foram entregues aos grupos e, após a plenária, o professor, com a participação dos alunos, apresentou na lousa as soluções.

1) $(A_n): a_n = \frac{2n+1}{n}$

f: $\rightarrow$

$$x \mapsto x^2$$

Sabemos que o domínio da sequência (A_n) é o conjunto dos naturais, e o domínio de f são os reais, portanto podemos dizer que a sequência $f(n)$ é uma restrição da função $f(x)$.



Se a sequência $(A_n): a_n = \frac{2n+1}{n}$ ou $a_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$, então podemos escrever

$(A_n) = (3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots, 2 + \frac{1}{n}, \dots)$ Esta sequência converge para 2. Se fizermos x assumir

cada valor da sequência $(A_n): a_n = \frac{2n+1}{n}$, teremos, em correspondência, uma nova

sequência gerada por $f(x)=x^2$. Assim:

$$f(1)=3^2=9; f(2)=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}; f(3)=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}; \dots; f(n)=\left(2+\frac{1}{n}\right)^2; \dots$$

E podemos escrever a nova sequência por:

$(9, \frac{25}{4}, \frac{49}{9}, \frac{81}{16}, \dots, 2 + \frac{1}{n}^2, \dots)$. Portanto, quando a sequência dada por $a_n = 2 + \frac{1}{n}$,

converge para 2 e se $f(x)=x^2$ assume os valores de $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, concluímos que $f(x)=x^2$

converge para 4.

Resumindo: se x tende para 2, $f(x)=x^2$ tende para 4, então podemos escrever:

$$\text{quando } \begin{matrix} x \rightarrow 2 \\ f(x) \rightarrow 4 \end{matrix} \quad \text{simbolicamente } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$2) (A_n): a_n = \frac{1}{n}$$

$$f: \rightarrow$$

$$x \mapsto x^2 + 1$$

Resolução:

Devemos determinar $f(x)$ quando x assumir o valor da sequência $(A_n): a_n = \frac{1}{n}$. Para

facilitar os cálculos, colocamos os valores na tabela.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...	∞	$\rightarrow \infty$
(A_n)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{\infty}$	$\rightarrow 0$
$f(x) = x^2 + 1$	2	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{26}{25}$	$\frac{37}{36}$	$\frac{50}{49}$	$\frac{65}{64}$	...	$\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1$	...	$\left(\frac{1}{\infty}\right)^2 + 1$	$\rightarrow 1$

$$n \rightarrow +\infty$$

Podemos dizer que

$$a_n \rightarrow 0 \quad ((A_n) \text{ converge para } 0)$$

$$f(x) \rightarrow 1 \quad (f(x) = x^2 + 1 \text{ converge para } 1)$$

$$\text{simbolicamente } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1$$

$$3) (A_n): a_n = 2 + \frac{1}{n}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Resolução:

Perguntamos qual o valor de $f(x)$, se x assumir os valores da sequência (A_n) . Podemos fatorar e simplificar a função $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$. Coloquemos os valores na tabela como fizemos com outros exemplos.

n	1	2	3	4	5	6	7	...	n	...	$n \rightarrow \infty$
(A_n)	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{15}{7}$	...	$2 + \frac{1}{n}$	...	$2 + \frac{1}{\infty} \rightarrow 2$
$f(x) = x + 2$	5	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{29}{7}$	...	$4 + \frac{1}{n}$	...	$4 + \frac{1}{\infty} \rightarrow 4$

$$n \rightarrow +\infty$$

Assim, quando

$$a_n \rightarrow 2 \quad ((A_n) \text{ converge para } 2)$$

$$f(x) \rightarrow 4 \quad (f(x) = x + 2 \text{ converge para } 4)$$

$$\text{simbolicamente } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Exercícios Grupo 8 -Tarefas extraclasse

Dar a convergência de $f(x)$ quando x assume os valores da seqüência (A_n) .

$$\begin{array}{ll} 1) \left\{ \begin{array}{l} (A_n): a_n = \frac{1}{n} \\ f(x) = 2x + 1 \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{l} (A_n): a_n = 1 + \frac{1}{n} \text{ (sugestão: fatorar e simplificar)} \\ f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \end{array} \right. \\ 3) \left\{ \begin{array}{l} (A_n): a_n = n \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right. & 4) \left\{ \begin{array}{l} (A_n): a_n = n \\ f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \end{array} \right. & 5) \left\{ \begin{array}{l} (A_n): a_n = \frac{1}{n} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right. \end{array}$$

Conclusões

Ao mesmo tempo em que concluímos a unidade III, encerramos o terceiro bimestre letivo. Iniciamos esse conteúdo programático usando a metodologia adotada e propondo uma situação-problema geradora do conceito de seqüências. Logo a seguir, optamos por trabalhar com texto contendo teoria e exemplos, que foi entregue aos grupos. Estes trabalharam sobre o texto e depois receberam enunciados de problemas aplicativos da área de administração e economia.

Além dos objetivos intrínsecos da teoria das seqüências, procuramos levar os alunos a conhecer aplicações na administração, na economia, bem como levá-los a construir o conceito de limite, partindo da teoria das seqüências.

Verificamos que nesse bimestre foi possível desenvolver a disciplina Matemática, a partir de problemas com significado na área profissionalizante e com apoio na Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

Assim, observamos que a contribuição da matemática para o futuro profissional foi atendida, pois, os alunos mostraram maior capacidade de entendimento, de comunicação verbal e escrita e de saber trabalhar em equipe.

Trigésima semana: Prova bimestral B₃

A prova foi formulada por meio de enunciados de situações-problema de assuntos estudados até a presente data e retirados de temas da área de Administração e Economia.

Questões propostas:

1) A lei $i = 2 + \frac{1}{d+1}$ representa a relação entre a taxa de inflação anual e a taxa de desemprego em milhares de trabalhadores da população economicamente ativa de uma cidade no ano de 2.001. Pede-se:

a) Esboçar o gráfico. (valor 1.5)

b) A taxa de inflação se a taxa de desemprego for nula. (valor 1.5)

2) A média dos perímetros cefálicos das crianças obedece à lei $p_c = \sqrt{40t + 900}$, em que t é a idade das crianças em meses. Determinar:

a) O perímetro cefálico do recém-nascido. (valor 1.0)

b) O perímetro cefálico de uma criança com 3 anos e 4 meses de idade. (valor 1.5)

c) Se pode ser considerada como uma medida normal um perímetro cefálico 52 cm, para uma criança de 17 meses e 15 dias.(justifique) (valor 1.5)

3) Nas férias de julho, os alunos do Curso de Administração executam serviços para uma administradora e cobram R\$ 100,00 por balancete executado. A empresa por sua vez vende esse trabalho por p reais. Sabe-se que o número de consumidores que usam essa empresa para esse serviço é $(200 - p)$. Pede-se:

a) A expressão do lucro da empresa em função do preço p . (valor 1.0)

b) O preço para que se tenha lucro máximo. (valor 1.0)

c) O esboço do gráfico da função lucro. (valor 1.0)

UNIDADE IV

Foram utilizadas seis semanas, com quatro aulas semanais, para o desenvolvimento e as aplicações da Unidade IV, Custo Marginal e Receita Marginal.

A seguir, apresentamos os tópicos da Unidade IV

Custo Marginal e Receita Marginal

1. Introdução
2. Velocidade média
3. Variação da função
4. Taxa média de variação
5. Custo Marginal
 - 5.1. Custo marginal dado através de funções
 - 5.1.1. Função constante
 - 5.1.2. Função linear
 - 5.1.3. Função quadrática
 - 5.1.4. Função parábola cúbica
 - 5.1.5. Função $C(q) = q^n$
 - 5.2. Aplicações de custo e receita marginal

Objetivos da unidade IV

- *Estudar o significado de Custo Marginal e Receita Marginal em situações-problema da economia e da administração.*
- *Resolver situações-problema que envolvem Custo, Receita, Lucro com as noções de maximização e minimização.*

Trigésima primeira semana

1. Introdução

Objetivando construir os conceitos de custo marginal e receita marginal, foram apresentadas aos grupos duas situações-problema, com enunciados preparados a partir de tema retirado da aula de física do ensino médio e da área de economia. O problema da velocidade foi escolhido por ser muito conhecido dos alunos e porque ilustra bem a

comparação entre duas grandezas. Na plenária, com ajuda do professor, Pedro e Fernanda apresentaram as soluções.

Situação-problema 1: Problema do velocímetro quebrado

— *Fernanda! No último feriado prolongado, estava viajando com meus tios quando observamos que o velocímetro do carro estava quebrado. Então meu tio perguntou qual a velocidade em que estávamos viajando.*

— *Pedro, como você resolve esse problema?*

Fernanda, quando meu tio perguntou, olhei para fora do carro e verifiquei que estávamos passando pelo km 20 e, naquele momento, marcava o relógio 9 horas. Para saber a velocidade era só esperar passar uma hora e verificar a quilometragem indicada na pista. Assim, às 10 horas passamos pelo km 140, portanto o carro desenvolvia uma velocidade de 120 km/h.

Nesse instante, Fernanda disse:

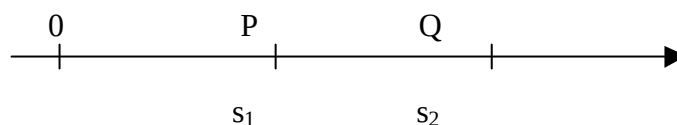
— Pedro, esperar uma hora para verificar a velocidade do carro não tem sentido. Se o carro está a 120 km/h é o mesmo que:

$\frac{120 \text{ km}}{60 \text{ min}}$ ou $\frac{2 \text{ km}}{1 \text{ min}}$ ou 2 km/min . Podemos, ainda, obter a velocidade colocando:
 $\frac{2 \text{ km}}{1 \text{ min}}$ ou $\frac{2000 \text{ m}}{60 \text{ s}}$ ou $\frac{200 \text{ m}}{6 \text{ s}}$ ou $\frac{100 \text{ m}}{3 \text{ s}}$ ou, ainda, podemos dizer 33,33 m/s.

O professor, participando dessa discussão, completou dizendo que nem sempre a velocidade ao longo de 120 km é constante. Que se o velocímetro do carro não estivesse quebrado, poderíamos verificar que a velocidade do carro, durante o trajeto, passou por variações freqüentes, ora crescentes, ora decrescentes, que nesse caso, só se pode falar em velocidade média e explicou:

2. Velocidade média

Velocidade média é o espaço percorrido dividido pelo tempo gasto em percorrê-lo.



Se um automóvel ocupa a posição P de abscissa s_1 , no instante t_1 , e outra posição Q de abscissa s_2 , no instante t_2 , indicamos por:

$Ds = s_2 - s_1$ (variação do espaço, deslocamento)

$Dt = t_2 - t_1$ (variação do tempo). Então dizemos que a velocidade média nesse

intervalo de tempo é $v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{Ds}{Dt}$.

Seja um automóvel movendo-se sobre uma curva de equação $s=f(t)$, sendo s o deslocamento do automóvel a partir da origem, no instante t , e suponhamos que $f(t)$ tenha o gráfico abaixo:

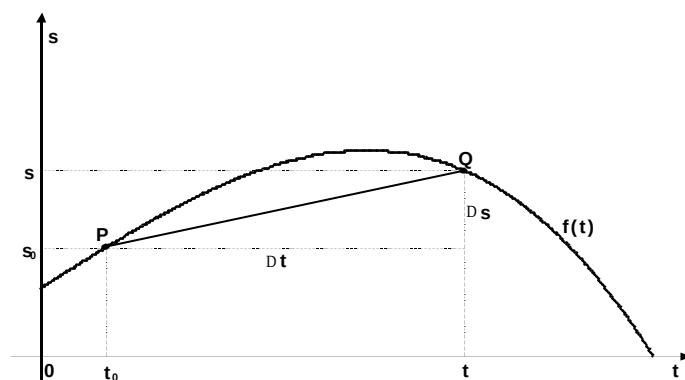


fig. 113

Assim, quando o automóvel se desloca de P para Q sobre a curva, tem-se:

$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ e é igual à inclinação da reta por PQ , isto é, a velocidade média de P para Q é

dada pelo coeficiente angular da reta por P e Q .

3. Variação da função

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$ e x_1 e x_2 elementos de A . Chama-se taxa de variação da função $f(x)$, para x variando de x_1 a x_2 , a diferença $f(x_2) - f(x_1)$.

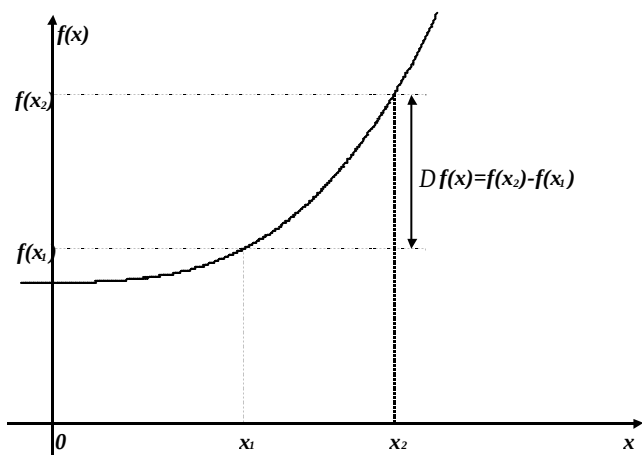


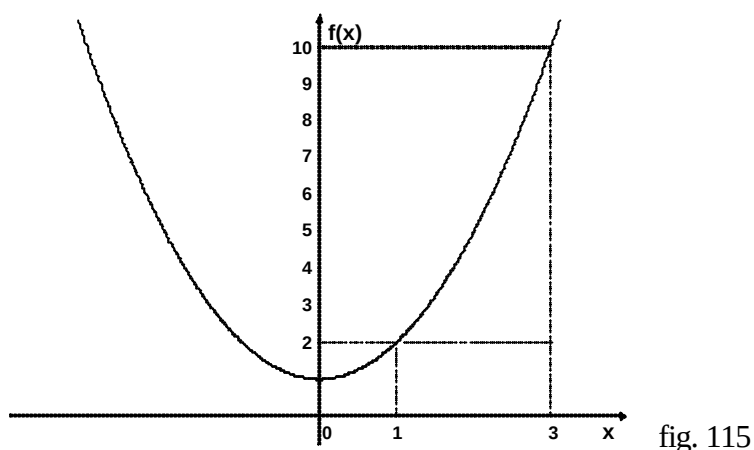
fig. 114

Notação:

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) \quad \text{ou} \quad \Delta y = f(x_2) - f(x_1) \quad \text{e} \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

Exemplo

Qual a taxa de variação da função $f: \rightarrow$ sendo $x \mapsto x^2 + 1$, quando x varia de 1 a 3.



Do gráfico podemos observar:

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$f(x_2) = f(3) = 3^2 + 1 = 10, \quad f(x_1) = f(1) = 1^2 + 1 = 2. \quad \text{Logo } \Delta f = 10 - 2 = 8$$

Situação-problema 2: Problema da variação do lucro

O lucro semanal de um fabricante, em função do preço de venda, é dado pela lei denominada função lucro $L(p) = 20(10 - p)(p - 2)$. Determinar:

- A taxa de variação do lucro se o preço p varia de R\$ 2,00 a R\$ 6,00.
- A taxa de variação do lucro para cada vez que o preço aumenta R\$ 1,00 e o valor do preço imediatamente anterior.

a) Devemos determinar $\Delta L = L(p_2) - L(p_1)$

Se $p_1 = \text{R\$ } 2,00$, então $L(p_1) = L(2) = 0$,

Se $p_2 = \text{R\$ } 6,00$, então $L(p_2) = L(6) = 320$. Portanto $\Delta L = 320 - 0 = 320$. Assim a taxa de variação é $\Delta L = \text{R\$ } 320,00$.

Gráfico da função

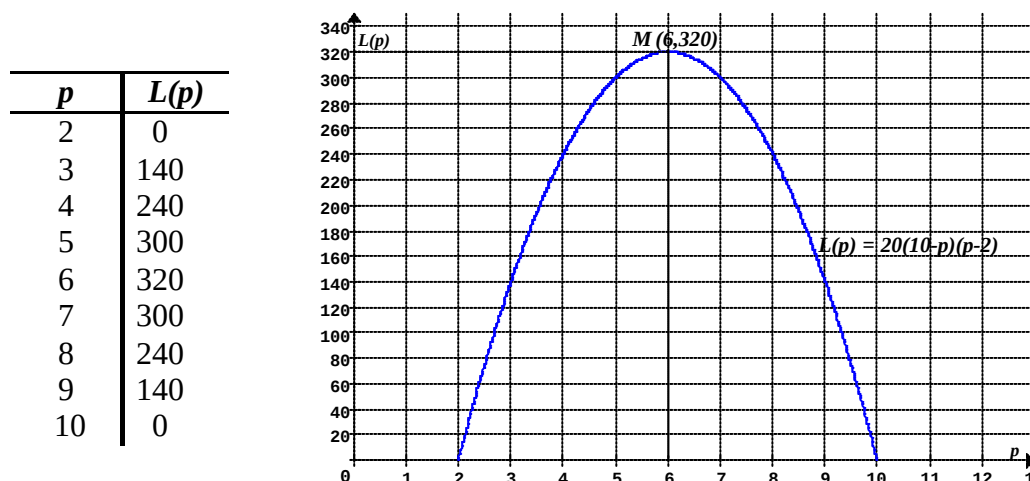


fig. 116

b) Usando os valores da tabela, podemos escrever a variação para cada aumento de R\$ 1,00.

$$\Delta L_1 = L(3) - L(2) = 140 - 0 = 140$$

$$\Delta L_2 = L(4) - L(3) = 240 - 140 = 100$$

$$\Delta L_3 = L(5) - L(4) = 300 - 240 = 60$$

$$\Delta L_4 = L(6) - L(5) = 320 - 300 = 20$$

$$\Delta L_5 = L(7) - L(6) = 300 - 320 = -20$$

$$\Delta L_6 = L(8) - L(7) = 240 - 300 = -60$$

$$\Delta L_7 = L(9) - L(8) = 140 - 240 = -100$$

$$\Delta L_8 = L(10) - L(9) = 0 - 140 = -140$$

Desta forma, podemos observar que, o fato da curva lucro não ser uma função afim cuja representação é uma reta, a cada aumento de R\$ 1,00 a variação é um número distinto do anterior.

4. Taxa média de variação

Vejamos agora o quociente da taxa de variação da função pela amplitude do intervalo considerado.

Seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, uma função com $A \subset \mathbb{R}$ e x_1 e x_2 elementos de A .

Chama-se taxa média de variação da função $f(x)$ ao quociente

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ ou}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

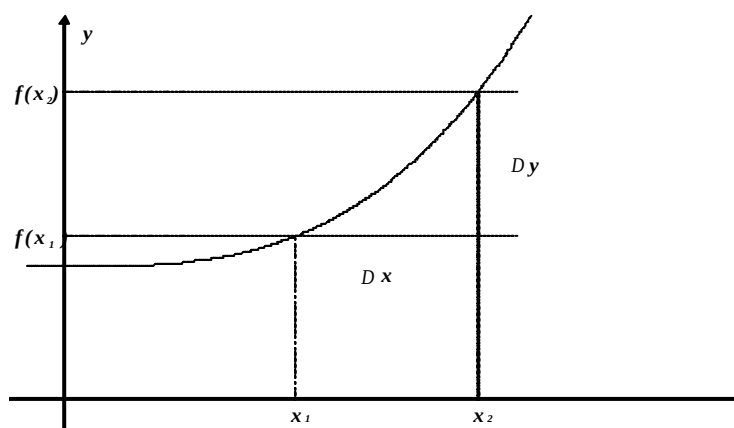


fig.117

Exercícios de aplicação 15

- a) Determinar a taxa média de variação da função $f(x) = x^2$, quando x varia no intervalo de 1 a 2.

Resolução:

$$\text{Se } x_1 = 1, \text{ então } f(x_1) = 1^2 = 1$$

$$\text{Se } x_2 = 2, \text{ então } f(x_2) = 2^2 = 4$$

$$\text{Logo a taxa de variação média é dada por: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

- b) Determinar a taxa média de variação da função $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a > 0$ para x variando nos intervalos:

1) $[1, 2]$

2) $[2, 3]$

3) $[n, n+1], n \in \mathbb{R}^*$

Resolução:

1) Se $x_1 = 1, f(x_1) = a + b$

Se $x_2 = 2, f(x_2) = 2a + b$, logo a taxa média de variação é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(2a + b) - (a + b)}{2 - 1} = \frac{a}{1} = a$$

2) Se $x_1 = 2, f(x_1) = 2a + b$

Se $x_2 = 3, f(x_2) = 3a + b$, logo a taxa média de variação é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(3a + b) - (2a + b)}{3 - 2} = a$$

3) Se $x_1 = n, f(x_1) = an + b$

Se $x_2 = n + 1, f(x_2) = a(n + 1) + b = an + a + b$, assim a taxa média de variação é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(an + a + b) - (an + b)}{n + 1 - n} = a$$

Logo podemos concluir que a taxa média de variação coincide com o coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos, isto é,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \quad (\text{coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos})$$

$$\text{Assim: } a = \text{tg } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

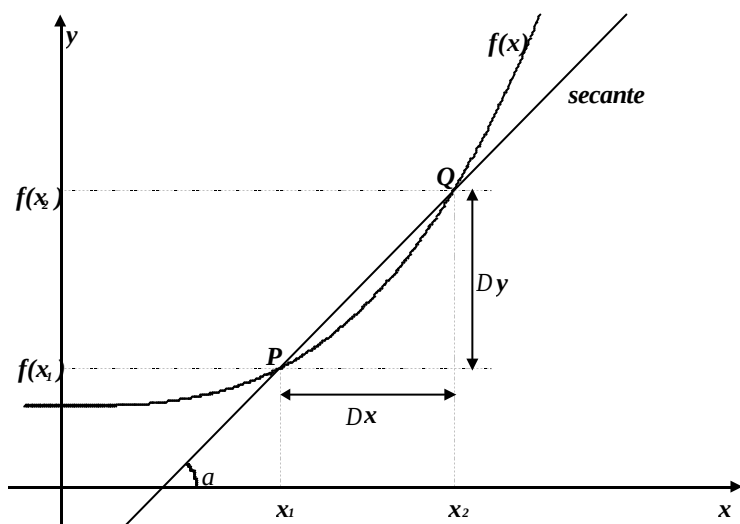


fig. 118

a) Sempre que considerarmos a função afim $f(x) = ax + b$, o coeficiente angular é dado por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } a = a$$

Para uma função $f(x)$ qualquer, podemos dizer que a taxa média de variação sempre coincide com o coeficiente angular da reta secante passando pelos pontos P e Q dados como na figura acima.

c) Determinar a equação da reta secante à função $f(x) = x^3 + 1$ nos pontos extremos do intervalo $[1,2]$ e fazer a representação gráfica.

Resolução:

Se $x_1 = 1$, então $f(x_1) = 2$ e se $x_2 = 2$, então $f(x_2) = 9$

$$a = \text{tg } a = \frac{Dy}{Dx} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 2}{2 - 1} = 7$$

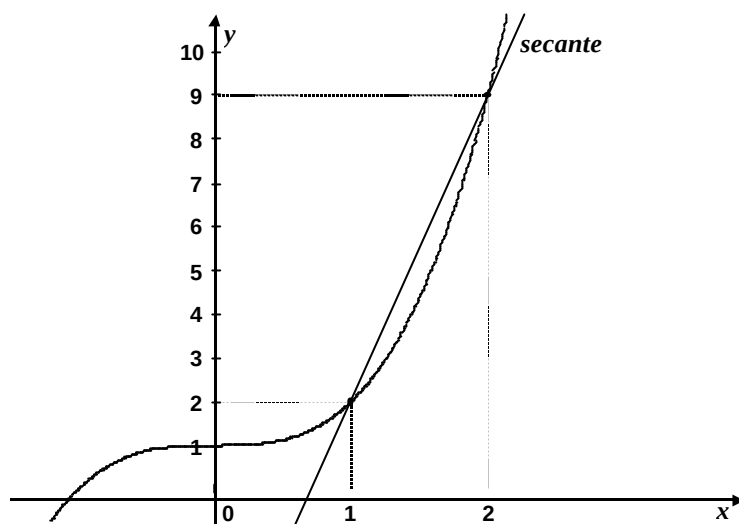


fig. 119

Sabemos que a equação que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0), \text{ onde, } x_0 = 1, y_0 = 2 \text{ e } m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$$

Substituindo, temos:

$$y - 2 = 7(x - 1) \text{ e } y = 7x - 5. \text{ Assim a equação da reta secante à função é } y = 7x - 5$$

Conclusões:

A primeira situação-problema apresentada nesta aula tinha o enunciado envolvendo o conceito de velocidade, já conhecido pelos alunos desde o ensino médio. Porém nosso objetivo foi o de chamar a atenção para a variação das duas grandezas: espaço e tempo. A segunda situação-problema, da área de economia, mostrava a variação das grandezas lucro e preço. Pareceu-nos que, por meio das explorações feitas das duas situações-problema, esses conceitos de velocidade e lucro foram assimilados.

Trigésima primeira semana

No início desse encontro, chamamos a atenção dos grupos, dizendo que na primeira situação-problema estudamos a variação do espaço em relação ao tempo e, na segunda, a variação do lucro em relação ao preço. Em seguida, perguntamos sobre a variação do custo de fabricação de um produto em relação à quantidade fabricada. Os grupos discutiram esse novo conceito. O grupo de Pedro e Fernanda, com a ajuda do professor, apresentou a seguinte situação-problema, cuja resolução necessitou de muita ajuda.

Situação-problema: Problema do custo de fabricação

— Pedro! Uma empresa verificou que, para fabricar q unidades de certo produto, o custo total é dado por $C(q) = q^2 + 1$ (reais). Determine:

a) O custo médio de variação quando se passa da primeira unidade para a terceira unidade.

b) O custo médio de variação quando se passa da primeira unidade para a segunda unidade.

c) O custo marginal de uma unidade de fabricação do produto.

a) Fernanda, se o ponto passa pela primeira unidade e pela terceira, então podemos escrever que passa por $P(1,2)$ e $Q(3,10)$. Assim a taxa média de variação é dada pelo coeficiente angular da reta secante por P e Q.

$$\frac{DC}{Dq} = \frac{C(3) - C(1)}{3 - 1} = \frac{(3^2 + 1) - (1^2 + 1)}{2} = \frac{10 - 2}{2} = 4$$

Desta maneira, o custo médio de variação é $\frac{\Delta C}{\Delta q} = \text{tg}\alpha = 4$, isto é, 4 é o coeficiente

angular da reta secante por P e Q.

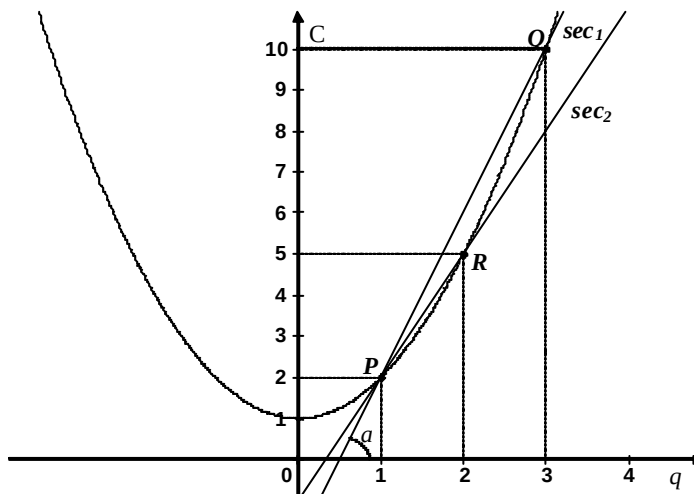


fig. 120

b) Analogamente ao item (a) $\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(2) - C(1)}{2 - 1} = \frac{5 - 2}{1} = 3$, isto é $\frac{DC}{Dq} = \text{tgb} = 3$

é o coeficiente angular da reta secante por P e R e, portanto, o custo médio de variação é de R\$ 3,00.

c) No item (a) o custo médio de variação foi obtido por meio do coeficiente angular $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ da reta secante por P e Q e em (b) o custo médio de variação foi obtido por meio do coeficiente angular $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ da reta secante por P e R. Agora definimos *custo marginal* como o coeficiente angular da reta tangente no ponto P(1,2).

Para obtermos o coeficiente angular da reta tangente no ponto P, fazemos o ponto R caminhar sobre o gráfico da curva ($C = q^2 + 1$) até atingir o ponto P.

Quando o ponto R converge para o ponto P, os valores de q convergem para o valor 1 (q tende para 1) por meio da seqüência

(A_n) = (2; 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001; ...) e, em correspondência, a variação $\Delta q = q - 1$ tende para zero pela seqüência (Δq) = (1; 0,1; 0,01; 0,001; ...).

Também, em correspondência, os valores da $\Delta C = (q^2 + 1) - 2 = q^2 - 1$ assumem os da seqüência (ΔC) = (3; 0,21; 0,0201; 0,002001; 0,00020001;...). Assim o custo médio de variação segue os valores da seqüência

$$\frac{\Delta C}{\Delta q} = (3; 2,1; 2,01; 2,001; 2,0001; 2,00001; ...) \text{ que converge para 2.}$$

Para melhor visualizar esse desenvolvimento, usamos a seguinte tabela

q	Δq (q - 1)	ΔC $q^2 - 1$	$\frac{DC}{Dq}$
2	1	3	3
1,1	0,1	0,21	2,1
1,01	0,01	0,0201	2,01
1,001	0,001	0,002001	2,001
1,0001	0,0001	0,00020001	2,0001
1,00001	0,00001	0,0000200001	2,00001
⋮	⋮	⋮	⋮
↓	↓	↓	↓
1	0	0	2

Dessa tabela podemos concluir que: quando q tende para 1, Δq tende para 0, e o quociente $\frac{DC}{Dq}$ tende para 2. Simbolicamente podemos escrever: $\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{DC}{Dq} = 2$

Logo 2 é o coeficiente angular da reta tangente à curva $C = q^2 + 1$, no

ponto P , e o custo marginal é dado por R\$ 2,00.

5. Custo Marginal

Em economia, o custo marginal é definido como a variação do custo que resulta quando a produção aumenta de uma quantidade muito pequena ou é o aumento do custo de produção em função de uma unidade adicional.

Para obtermos o custo marginal ($C_{\text{marg}}(q)$) ou a receita marginal ($R_{\text{marg}}(q)$) é só calcular: $\lim_{Dq \rightarrow 0} \frac{DC}{Dq}$ ou $\lim_{Dq \rightarrow 0} \frac{DR}{Dq}$ respectivamente.

A seguir, o professor apresentou em aula expositiva dialogada a função custo marginal de algumas funções elementares.

5.1. Custo marginal dado pelas funções

5.1.1. Função constante

Se a função custo é dada pela função constante K , então o custo marginal é zero.

Devemos calcular o quociente $\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(q) - C(q_0)}{\Delta q} = \frac{K - K}{\Delta q} = 0 = C_{\text{marg}}(q)$

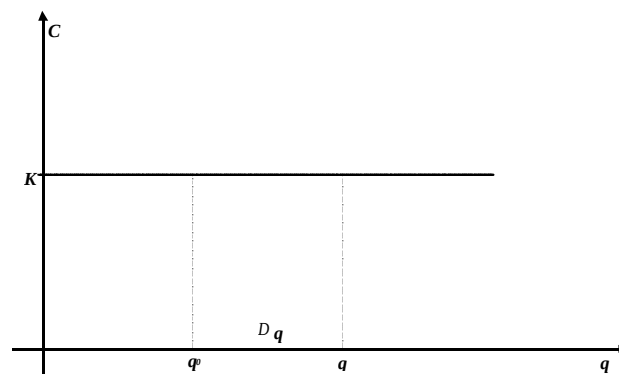


fig. 121

Logo: o $\lim_{Dq \rightarrow 0} \frac{DC}{Dq} = 0$. Assim o custo marginal de uma função custo constante é zero,

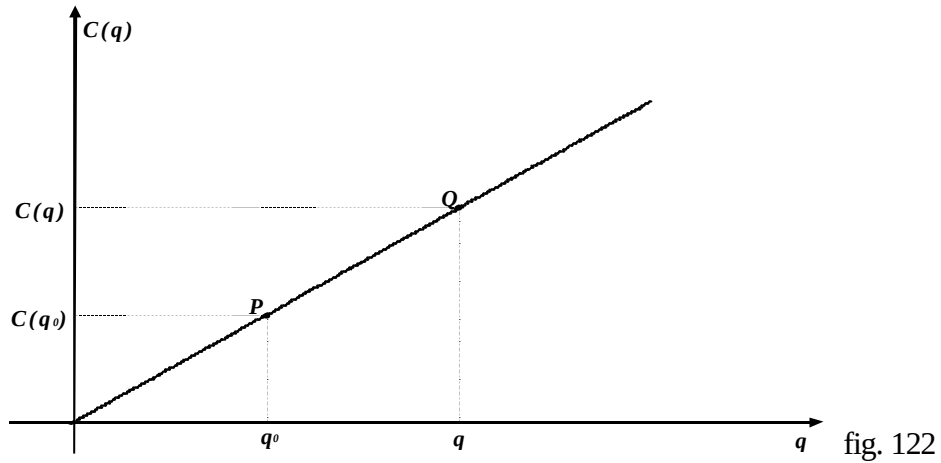
isto é, $C_{\text{marg}}(q) = 0$.

5.1.2. Função linear

Se a função custo é dada pela função linear $C(q) = q$, então o custo marginal é 1.

Calculando o quociente $\frac{DC}{Dq} = \frac{C(q) - C(q_0)}{Dq} = \frac{(q - q_0)}{(q - q_0)} = 1$, logo $\lim_{Dq \rightarrow 0} \frac{DC}{Dq} = 1 = C_{\text{marg}}$

Isto é: $C_{\text{marg}}(q) = 1$



b) Se trocarmos a palavra custo por receita, temos:

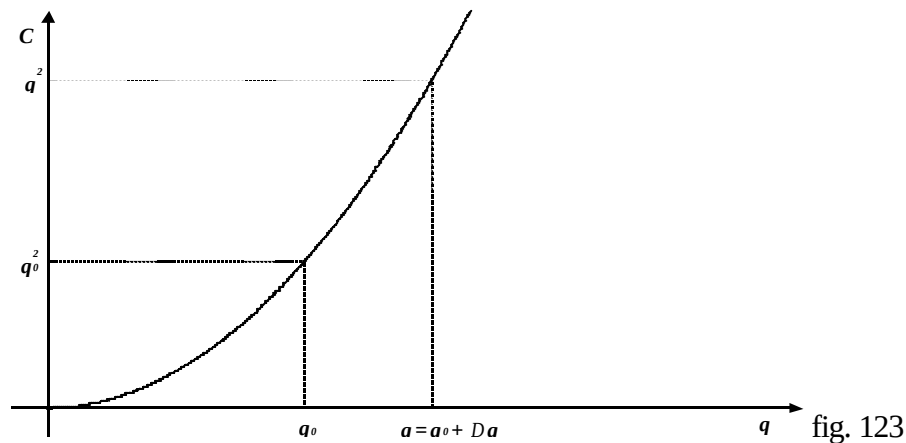
Se $R(q) = k$, então $R_{\text{marg}}(q) = 0$ e Se $R(q) = q$, então $R_{\text{marg}}(q) = 1$

5.1.3. Função quadrática

Se a função custo é dada pela função quadrática $C(q) = q^2$, então a função custo marginal é dada por $C_{\text{marg}}(q) = 2q$

1ª maneira: Calculamos diretamente o quociente:

$$\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(q) - C(q_0)}{\Delta q} = \frac{(q^2 - q_0^2)}{(q - q_0)} = \frac{(q - q_0)(q + q_0)}{(q - q_0)} = q + q_0$$



e passamos ao limite $\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} = (\lim_{q \rightarrow q_0} q + q_0) = 2q_0$

Para um ponto $q \neq 0$ qualquer, $C_{\text{marg}}(q_0) = 2q_0$ e a função custo marginal é dada por $C_{\text{marg}}(q) = 2q$.

2ª maneira: Essa solução consiste em escrever o quociente $\frac{DC}{Dq} = \frac{C(q) - C(q_0)}{Dq}$,

substituindo $q = q_0 + \Delta q$ e $C(q) = C(q_0 + \Delta q)$. Assim, podemos escrever:

$$\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(q_0 + \Delta q) - C(q_0)}{\Delta q} \quad \text{ou ainda}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C}{\Delta q} &= \frac{C(q + \Delta q) - C(q)}{\Delta q} = \frac{(q + \Delta q)^2 - q^2}{\Delta q} = \frac{q^2 + 2q\Delta q + \Delta q^2 - q^2}{\Delta q} = \\ &= \frac{\Delta q(2q + \Delta q)}{\Delta q} = 2q + \Delta q \end{aligned}$$

Passando para o $\lim_{\Delta q \rightarrow 0} (2q + \Delta q) = 2q$. Portanto $C_{\text{marg}}(q) = 2q$

5.1.4. Função parábola cúbica

Se a função custo for dada por $C(q) = q^3$, então a função custo marginal é dada por $C_{\text{marg}}(q) = 3q^2$.

Como fizemos nos exemplos anteriores, devemos calcular:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C}{\Delta q} &= \frac{C(q + \Delta q) - C(q)}{\Delta q} = \frac{(q + \Delta q)^3 - q^3}{\Delta q} = \frac{q^3 + 3q^2\Delta q + 3q\Delta q^2 + \Delta q^3 - q^3}{\Delta q} = \\ &= \frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{3q^2\Delta q + 3q\Delta q^2 + \Delta q^3}{\Delta q} = \frac{\Delta q(3q^2 + 3q\Delta q + \Delta q^2)}{\Delta q} = 3q^2 + 3q\Delta q + \Delta q^2 \end{aligned}$$

Logo $\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} = \lim_{q \rightarrow 0} (3q^2 + 3q\Delta q + \Delta q^2) = 3q^2$. Portanto $C_{\text{marg}}(q) = 3q^2$

5.1.5. Função $C(q) = q^n$

Pode-se mostrar que se $C(q) = q^n$ ($n \hat{=}$), então $C_{\text{marg}}(q) = nq^{n-1}$

5.2. Aplicações de custo e receita marginal

Exercícios de aplicação 16

1) Determinar o custo marginal e a receita marginal para as funções dadas:

a) $C(q) = q^5$

Solução: $C_{\text{marg}}(q) = 5q^4$

b) $C(q) = \sqrt{q}$

Solução: $C(q) = q^{\frac{1}{2}}$ e $C_{\text{marg}}(q) = \frac{1}{2} q^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{q}}$

c) $C(q) = q^2 + 3q^4 - 2$

Solução: $C_{\text{marg}}(q) = 2q + 4 \cdot 3q^3 + 0 = 2q + 12q^3$

d) $R(q) = \sqrt[3]{q} - 3q^2 + 2 = q^{\frac{1}{3}} - 3q^2 + 2$

Solução: $R_{\text{marg}}(q) = \frac{1}{3} q^{-\frac{2}{3}} - 6q = \frac{1}{3\sqrt[3]{q^2}} - 6q$

c) Pode-se mostrar que para a função exponencial e logarítmica tem-se :

Se $C(q) = a^q$ ($0 < a \neq 1$), então $C_{\text{marg}}(q) = a^q \cdot \ln a$

Se $C(q) = \log_a q$ ($0 < a \neq 1$), então $C_{\text{marg}}(q) = \frac{1}{q} \log_a e$

d) Dada uma função custo ou receita, podemos obter o valor do custo marginal ou da receita marginal, consultando a tabela de funções marginais:

função C	C_{marg}	R_{marg}
K (constante)	0	0
q	1	1
q^2	$2q$	$2q$
q^3	$3q^2$	$3q^2$
q^n	nq^{n-1}	nq^{n-1}
a^q	$a^q \cdot \ln a$	$a^q \cdot \ln a$
$(0 < a \neq 1)$		
e^q	e^q	e^q

2) Calcular o custo marginal da função $C(q) = q^2$ no ponto $q = 2$.

Resolução:

Pela tabela, a função custo marginal é dada por

$$C_{\text{marg}}(q) = 2q, \text{ e para } q = 2 \text{ segue}$$

$$C_{\text{marg}}(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

3) Calcular a receita marginal para $q = 1$ sendo $R_t = q^3 + 2q$

Da tabela de fórmulas, temos:

$$R_{\text{marg}}(q) = 3q^2 + 2, \text{ e para } q = 1, \text{ segue } R_{\text{marg}}(1) = 3(1)^2 + 2 = 5$$

Conclusões:

No desenvolvimento da situação-problema custo de fabricação, o professor utilizou os conceitos de seqüências convergentes para obter o conceito de custo marginal. Em seguida, fez aplicações desses conceitos para algumas funções elementares.

Trigésima terceira semana

Problemas aplicativos:

Problema do custo de calculadoras

Uma fábrica de calculadoras eletrônicas tem a função custo total representada pela função $C_t = 4q^2 + 20q + 16$.

a) Dar a função custo marginal.

b) Determinar o custo marginal para 3 calculadoras.

c) Esboçar o gráfico das funções custo total e custo marginal.

Resolução:

Usando a tabela de fórmulas, podemos escrever:

a) $C_{\text{marg}}(q) = 8q + 20$

b) para $q = 3$ segue, $C_{\text{marg}}(3) = 8 \cdot 3 + 20 = 44$ reais.

c) Gráfico

Seja $q = 0 \Rightarrow C_t = 16$, logo o gráfico passa por $A(0,16)$. Para $C_t = 0 \Rightarrow 4q^2 + 20q + 16 = 0 \Rightarrow$ dividindo por 4 segue $q^2 + 5q + 4 = 0$, e $q = -1$ e $q = -4$ são as raízes. Portanto o gráfico do C_t é uma parábola que passa por $A(0,16)$, $B(-1,0)$ e $C(-4,0)$.

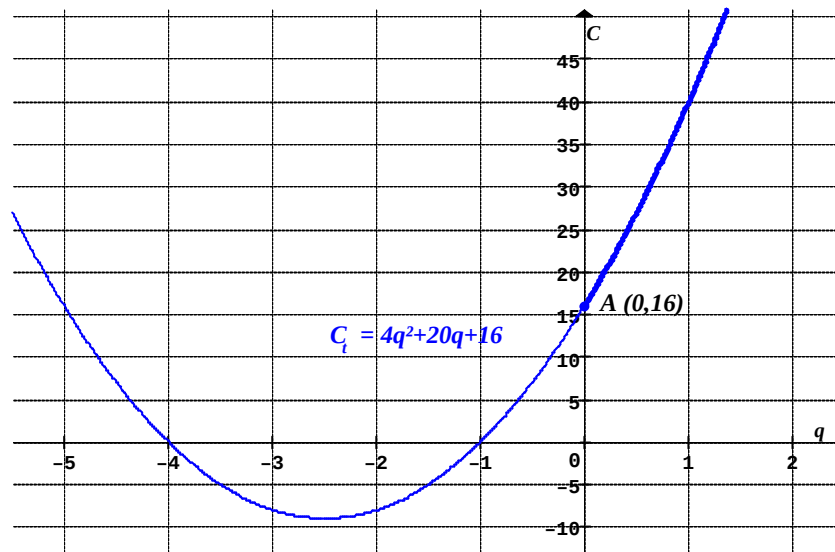


fig. 124

A equação do custo marginal é dada pela reta $C_{\text{marg}}(q) = 8q + 20$.

Para $q = 0$, $C_{\text{marg}}(0) = 20$ e se o $C_{\text{marg}} = 0$, segue $q = -\frac{5}{2}$. Portanto tem-se o

gráfico:

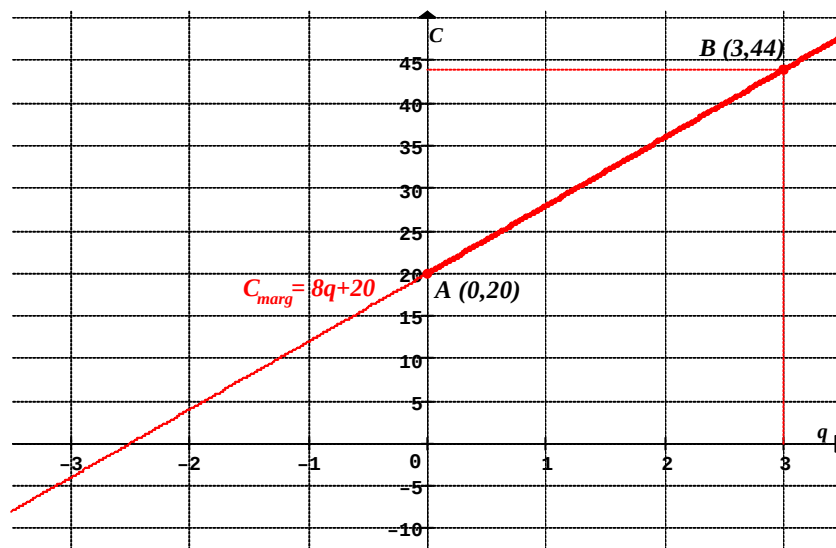


fig. 125

Problema da fábrica de fogões

A função receita total de uma fábrica de fogões é dada pela lei $R_t = -q^2 + 200q$. Dar a equação que representa a receita marginal, dizer quando a receita total é crescente, decrescente e máxima, e esboçar o gráfico das funções R_t e R_{marg} .

Resolução:

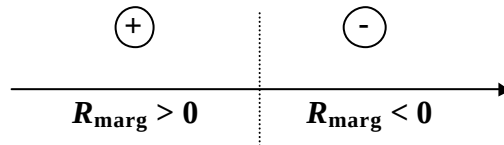
Usando a tabela de funções marginais, podemos escrever:

$$R_{\text{marg}} = -2q + 200$$

Determinando os interceptos da R_{marg} quando $q = 0$, segue $R_{\text{marg}} = 200 \Rightarrow A(0,200)$.

Quando $R_{\text{marg}} = 0 = -2q + 200 = 0$, segue $q = 100$. Logo B (100,0).

Observando o sinal da $R_{\text{marg}}(q)$, podemos escrever:



E segue a representação gráfica da receita marginal

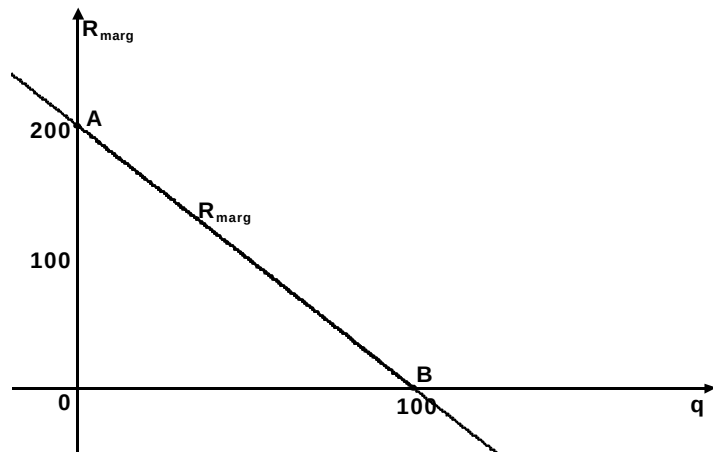
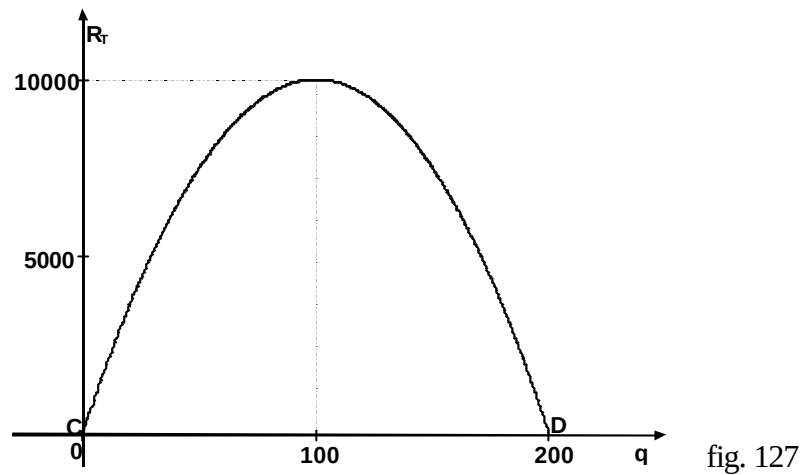


fig. 126

- e) 1) Quando a receita marginal é positiva, a receita total cresce.
2) Quando a receita marginal é negativa, a receita total decresce.
3) O custo (receita) marginal da soma de duas funções é a soma dos custos (receitas) marginais.

Para esboçarmos o gráfico da função receita total, determinamos seus interceptos:

Para $q = 0 \Rightarrow R_t = 0$ segue $C(0,0)$. Para $R_t = 0 \Rightarrow -q^2 + 200q = 0$, segue $q = 0$ e $q = 200$. E tem-se outro ponto da curva $D = (200,0)$. O gráfico é uma parábola e o vértice é o ponto de receita máxima: $V(100,10.000)$.



- f) O valor $q = 100$, que anula a função marginal, é o valor da receita para o qual a receita é máxima, isto é, a receita máxima é dada por :

$$R_{\text{máx}}(100, 10.000)$$

Assim, ao se vender 100 fogões, teremos $R_{\text{máx}}$ de 10.000 reais.

Problema dos chinelos magnéticos

A função receita total de uma fábrica de chinelos magnéticos é dada pela equação

$$R_T = -3q^2 + 600q, \text{ na qual } q \text{ representa a quantidade de chinelos vendidos.}$$

- Dar a equação que representa a receita marginal.
- Esboçar o gráfico da função receita total e da receita marginal.
- Usar o conceito de vértice da parábola para determinar qual a receita máxima que essa fábrica pode obter.

Resolução:

- Da tabela de funções marginais, podemos escrever: $R_{\text{marg}}(q) = -6q + 600$.

Segue que a receita marginal é uma reta que passa pelos pontos A(0, 600) e B(100,0).

- Esboçando o gráfico da receita marginal, tem-se.

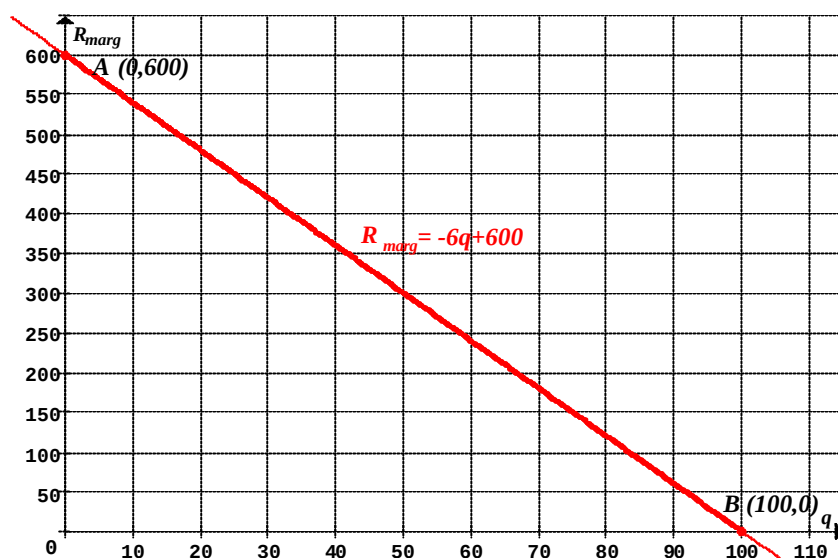


fig. 128

Para obtermos o esboço do gráfico, tomamos os interceptos:

i) Receita total é $R_t(q) = -3q^2 + 600q$, $q = 0$ e $q = 200$ são as raízes.

ii) Então a receita total passa por $C(0,0)$ e $D(200,0)$. Assim segue a representação gráfica.

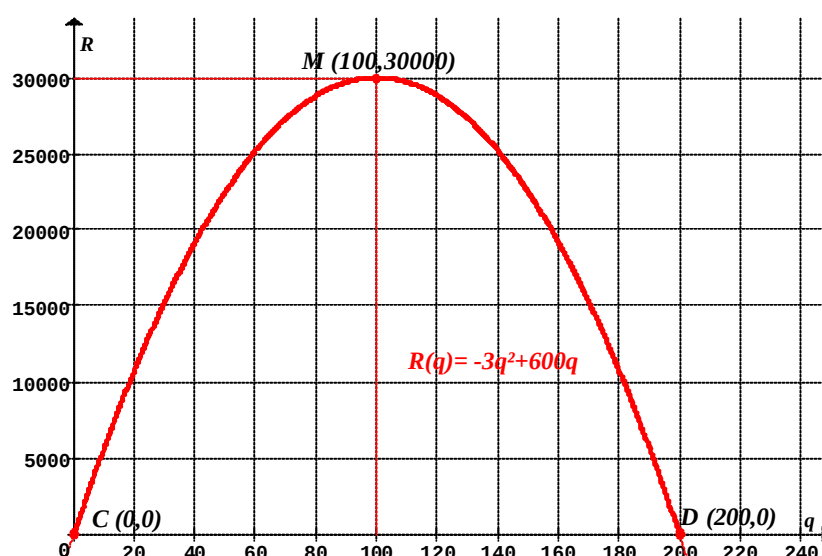


fig. 129

c) Fazendo $R_{\text{marg}}(q) = 0 = -6q + 600 = 0 \Rightarrow q = 100$. O coeficiente angular da reta tangente no ponto $M(100, 30.000)$ é zero, isto é, a reta tangente no ponto P é paralela ao eixo q e o ponto $M(100, 30.000)$ é o máximo da função receita total e seu valor é dado por $R_{\text{máx}} = 30.000$ reais.

Conclusões:

Tendo em vista que os grupos conheciam o conceito funções marginais e a suas fórmulas principais, as resoluções dos problemas aplicativos transcorreram com

normalidade, isto é, pareceu-nos que houve boa aprendizagem, pois, na plenária, as respostas às perguntas feitas foram dadas corretamente.

Trigésima quarta semana

O primeiro da lista dos problemas aplicativos a ser trabalhado nesta aula foi o problema de enunciado mais completo de todos, pois, para sua resolução, foi necessário construir-se a expressão da receita, conhecendo-se o preço, que era dado em função da quantidade. Dessa maneira, exigiu mais atenção dos grupos, na busca de conhecimentos adquiridos anteriormente, por exemplo a respeito das funções afim e quadráticas. Além disso, nesse modelo trabalhamos com custo, receita marginal, lucro e lucro máximo.

Problemas aplicativos

Problema da análise do mercado consumidor

Após a análise do mercado consumidor, a empresa fabricante dos óculos de sol da marca ABC estabeleceu o preço de seu produto variando segundo a lei $p = -q + 400$ (reais).

Pede-se:

- a) A expressão da receita total.*
- a) A receita marginal para a venda de dez óculos de sol.*
- b) A expressão do lucro, sabendo-se que o custo total é dado pela lei $C_T = 50q + 15.000$.*
- c) A quantidade vendida para a qual haverá lucro máximo.*

Resolução:

b) Sabemos que a função receita é dada por $R_T = q.p$, assim a receita em função da quantidade fabricada, é dada por: $R_T = q(q+400) = -q^2 + 400q$

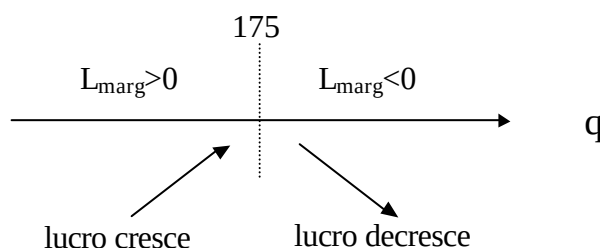
d) A função receita marginal obtém-se usando a tabela de fórmulas e é dada por $R_{mar} = -2q + 400$ e para $q = 10$ temos $R_{mar}(10) = -2(10) + 400 = 380$, isto é, a receita marginal no ponto $q = 10$ é R\$ 380,00.

e) O lucro obtém-se fazendo $L = R_T - C_T$, isto é, $L = (-q^2 + 400q) - (50q + 15.000)$.
Então $L = -q^2 + 350q - 15.000$.

d) Para obtermos lucro máximo, é só calcular o lucro marginal impondo $L_{\text{marg}} = 0$

Assim $L_{\text{marg}} = -2q + 350 = 0 \Rightarrow -2q = -350$ ou $q = 175$. Sabemos que para os valores q

para os quais $\begin{cases} L_{\text{marg}} > 0 & \text{o lucro cresce} \\ L_{\text{marg}} < 0 & \text{o lucro decresce} \end{cases}$ e representamos:



Portanto, se o lucro cresce e depois decresce então, para $q = 175$, tem-se lucro máximo.

Para $q = 175$, segue $L_{\text{máx}} = -175^2 + 350(175) - 15.000$, ou seja,

$$L_{\text{máx}} = -30.625 + 61.250 - 15.000 = 61.250 - 45.625 = 15.625$$

Assim o lucro máximo é de R\$15.625,00, quando forem vendidos 175 óculos de sol.

Problema do preço de aparelhos celulares

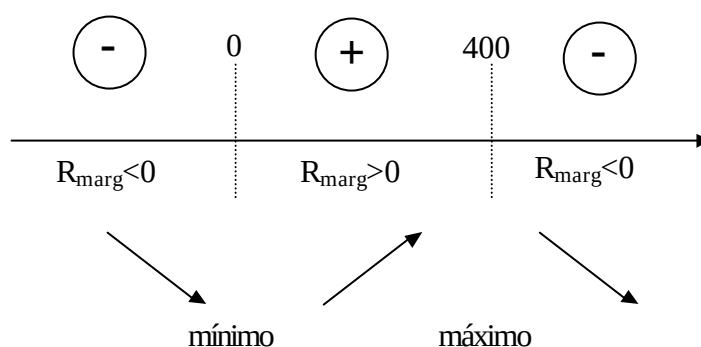
O preço de um aparelho celular digital varia com a quantidade vendida e é dado por $p = -q^2 + 600q$ (reais). Pede-se:

- A expressão da receita total e da marginal.
- A quantidade máxima vendida para a qual se tem receita máxima.
- Esboçar o gráfico das receitas total e marginal.

Resolução:

a) Sabemos que a receita total é dada por $R_t = p \cdot q$ e, substituindo p pelo seu valor dado $p = -q^2 + 600q$, temos $R_t = q(-q^2 + 600q) = -q^3 + 600q^2$ e a receita marginal é então dada por: $R_{\text{marg}} = -3q^2 + 1200$

b) Para obtermos a receita máxima, é só obter o valor que anula a receita marginal, isto é, $R_{\text{marg}} = -3q^2 + 1200 = 0$ ou $-q^2 + 400q = 0$ e os valores que anulam a R_{marg} são $q = 0$ e $q = 400$. Verificando para quais valores de q a receita marginal é positiva ou negativa, segue:



Logo, para $q=0$, tem-se mínimo $m(0,0)$, e, para $q=400$, tem-se máximo no ponto $M(400,32.000.000)$

c) Gráfico

Para a construção do gráfico, procuramos, em primeiro lugar, os interceptos da receita total $R_t = -q^3 + 600q^2 = q^2(-q+600)$.

Para $q=0$, tem-se $R_t=0$, e denotamos esse ponto por $A(0,0)$.

Para $q=600$, tem-se $R_t=0$, e denotamos o ponto por $B(600,0)$. Também conhecemos o ponto de máximo $M(400,32.000.000)$.

Em segundo lugar, procuramos os interceptos da receita marginal $R_{\text{marg}} = -3q^2 + 1200q$

Para $q=0$ tem-se $R_{\text{marg}}=0$, e denotamos esse ponto por $C(0,0)$. Para $q=400$, tem-se $R_{\text{marg}}=0$, e denotamos esse ponto por $D(400,0)$. Assim podemos representar os gráficos das receita total e marginal, lembrando que, para $q=200$, tem-se $E(200,120.000)$.

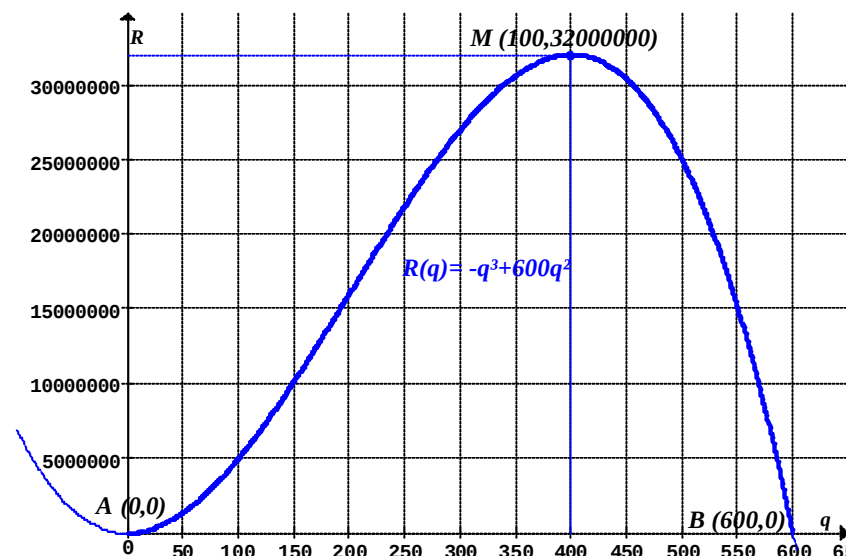


fig. 130

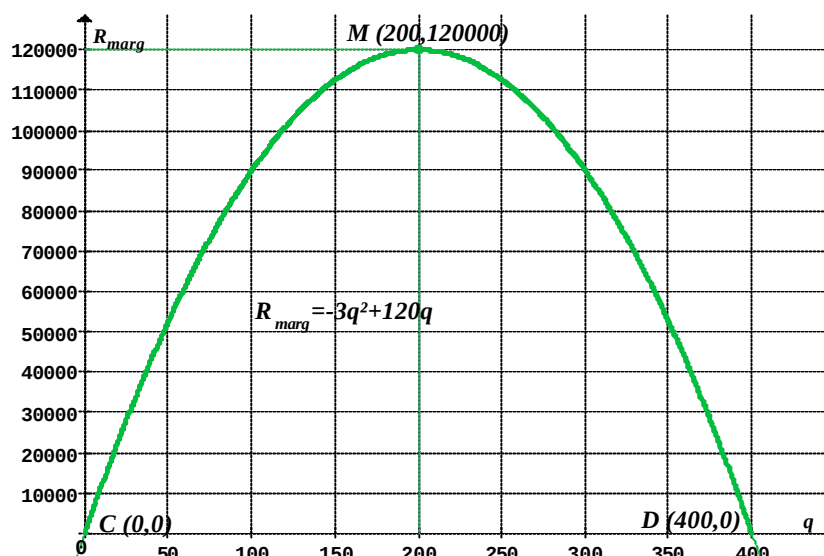


fig. 131

Conclusões:

Pelo fato de os grupos conhecerem o conceito e a fórmulas das principais funções marginais, os problemas aplicativos não apresentaram dificuldade para a sua resolução. A dificuldade maior ocorreu no momento da determinação dos pontos de máximo, pois os grupos deveriam determinar as raízes da função marginal e analisar o sinal da função marginal.

Trigésima quinta semana

Foram entregues aos grupos os enunciados dos problemas aplicativos envolvendo os conceitos de custo total e receita total, bem como os conceitos custo marginal e receita marginal. Após as discussões entre os elementos do grupo, o professor, em aula expositiva dialogada, apresentou as soluções dos problemas.

Exercícios de aplicação 17

1) O custo para produzir um par de chinelos magnéticos é R\$8,00. Verificou-se que, se o preço de venda for p reais, então o número de pares vendidos por semana é $120 - p$. Determinar o lucro semanal máximo.

2) O custo total semanal para se produzir motores de geladeira é dado por:

$C_t = -q^2 + 200q + 404$. Pede-se:

- a) A expressão do custo marginal.
- b) O custo marginal para produzir 50 motores.
- c) O número de motores produzidos para os quais se tem custo máximo.
- d) Esboço do gráfico do custo total.

3) A receita obtida na fabricação do pneu XR/350 é dada pela lei $R_t = -q^2 + 80q$.

Pede-se:

- a) A expressão da receita marginal.
- b) A quantidade para a qual se tem receita máxima.
- c) O esboço do gráfico da receita total e da receita marginal.

4) Seja $C_t = q^2 + 6q + 16$ o custo total de produção de q unidades de um produto. Pede-se:

- a) Esboçar o gráfico do custo total.
- b) Esboçar o gráfico do custo marginal.
- c) O custo marginal para 10 unidades.

Trigésima sexta semana

Da mesma maneira como ocorreu na aula anterior, foram entregues aos grupos os enunciados dos problemas aplicativos envolvendo os conceitos de custo total e receita total, lucro e prejuízo, bem como os conceitos custo marginal e receita marginal. Após as discussões entre os elementos do grupo, o professor, em aula expositiva dialogada, apresentou as soluções dos problemas.

Exercícios de aplicação 17 (continuação)

1) Uma firma produz mensalmente q impressoras do tipo XR/250, com custo total dado pela lei $C_t = q^2 + 10q + 120$. Sendo a demanda do mercado dada por $q = 1000 - p$, pede-se:

- a) A expressão do custo marginal.
- b) A expressão da receita total.
- c) O preço para o qual se tem receita máxima.
- d) O preço para o qual se tem lucro máximo.

e) O número de impressoras vendidas para quando se tem lucro máximo.

2) A equação da demanda de um determinado produto é dada por $q = -p+10$.

Determinar:

- a) A função receita total.
- b) A função receita marginal.
- c) O esboço do gráfico da receita total e da receita marginal.

3) O custo total de produção semanal de violões da marca JR/50 é dado por $C_t=900q+200$ e esse preço, que varia de acordo com a quantidade produzida, é dado por $p = -q^2+60q$. Pede-se:

- a) A receita total.
- b) A função receita marginal.
- c) A receita marginal para a venda de 10 violões.
- d) A função custo marginal.
- e) A função lucro.
- f) O número de violões que devem ser vendidos para se obter lucro máximo.

Conclusões:

Sempre utilizando a Metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas, encerramos a unidade IV. Começamos essa unidade com duas situações–problema que tiveram a finalidade de gerar os conceitos de derivada (receita marginal– custo marginal). A partir da obtenção das funções marginais, pudemos aplicar esses conceitos a uma série de problemas, cujos enunciados se relacionavam com as disciplinas profissionalizantes do Curso de Administração de Empresas.

Por meio desses conceitos foi possível resolver problemas que solicitavam: receita máxima, custo máximo e lucro máximo. Nas últimas duas semanas haviam sido entregues aos grupos uma série de problemas aplicativos com a finalidade de fixação desses conceitos.

Para a formação do Administrador Profissional essa unidade contribuiu dando-lhe uma visão de crescimento ou decréscimo da receita, do custo e do lucro, bem como seus pontos de máximo. Com o uso do processador matemático Winplot os alunos aprenderam a construir melhor e interpretar melhor os gráficos.

Desta unidade podemos dizer que os alunos adquiriram mais conhecimento em matemática e em informática. Demonstraram mais habilidades em resolver problemas, em trabalhar em equipe, em planejar e comunicar-se bem por escrito e verbalmente.

Com uso de enunciados envolvendo conceitos de receita, custo, lucro, oferta e demanda, que têm significados para estes alunos, buscamos tornar a sala de aula, um ambiente propício para desenvolver tais problemas da área de administração de empresas. Os problemas apresentados nestas aulas tornam os alunos mais familiarizados e motivados.

Trigésima sétima semana

Prova bimestral B₄

A prova foi formulada por meio de enunciados de situações-problema de assuntos estudados até presente data e retirados de temas da área de Administração e Economia.

Questões propostas:

1) Um fabricante de mesas para escritório verificou que, no ano de 2001, as quantidades produzidas e os respectivos custos seguem a tabela abaixo, onde x é a quantidade produzida e y o custo total.

quantidade	10	15	17	21	25	30
custo total	600	720	700	860	880	1000

Pede-se:

- a) A média aritmética das variáveis x e y . (valor 1,0)
- b) Estimar a reta que melhor se ajusta aos dados. (valor 1,0)
- c) O esboço do gráfico da reta e dos pontos dados. (valor 1,0)
- d) O custo total se forem produzidas 32 mesas. (valor 1,0)

2) A função receita total de uma fábrica de fogões é dada por: $R_t = q^2 + 400q$.

Pede-se:

- a) A expressão da receita marginal. (valor 1,0)
- b) A receita marginal para 4 fogões. (valor 1,0)
- c) A quantidade de fogões para que se tenha receita máxima. (valor 1,0)
- d) O esboço do gráfico da função custo marginal. (valor 1,0)

3) Na compra de uma chácara, os juros aplicados decrescem segundo a seqüência

$(A_n): a_n = 1 + \frac{1}{n}$, onde n representa os meses a partir da compra do imóvel. Os valores

pagos mensalmente em reais obedecem à lei $f(x) = 600x + 50$, onde x assume os valores da seqüência. Pede-se:

- a) Completar a tabela. (valor 1,0)

n	1	2	3	...	n	...	∞
$x = 1 + \frac{1}{n}$				...		...	
$f(x) = 600x + 50$							

- b) O valor pago na primeira prestação. (valor 0,5)
- c) O valor da prestação que ficará estável. (valor 0,5)

Trigésima oitava semana

Prova substitutiva geral

A prova foi formulada por meio de enunciados de situações-problema de assuntos estudados durante os dois semestres letivos e retirados de temas da área de Administração e Economia.

Questões propostas:

1) A média de exportação de soja nos primeiros meses do ano de 2002 encontra-se na tabela, e os dados estão em milhões de toneladas.

meses	jan	fev	março	abril	maio	jun
toneladas	8,6	6,8	10,8	20,2	17,4	21,0

Determinar:

- a) A média aritmética na variável x e y . (valor 1,0)
- b) A reta regressão linear que melhor se ajusta aos dados. (valor 1,0)
- c) A média de exportação para o mês de julho. (valor 1,0)
- d) O gráfico da reta e dos pontos dados. (valor 1,0)

2) Uma loja de fábrica confecciona blusas de lã, com custo total dado pela lei: $Ct = 3q^2 + 180$, sendo q a quantidade de blusas fabricadas do modelo XL. Sabe-se que a demanda é dada por $q = 60 - p$, sendo p o preço da blusa em reais. Determinar:

- a) A expressão da receita total. (valor 1,0)
- b) A expressão da receita marginal. (valor 1,0)
- c) O valor do preço para que a receita total seja máxima. (valor 1,0)
- d) Dar a expressão do custo marginal. (valor 1,0)

3) Dois produtos A (luxo) e B (super luxo) de uma mesma empresa apresentam as receitas dadas pelas leis: $R_A = 20q^2$ e $R_B = 200q$, onde q é a quantidade vendida. Pede-se:

- a) A quantidade para qual as receitas são iguais. (valor 1,0)
- b) O esboço do gráfico das duas receitas. (valor 1,0)

Trigésima nona semana

Exame Global

O Exame Global foi formulado por meio de enunciados de situações-problema de assuntos estudados durante os dois semestres letivos e retirados de temas da área de Administração e Economia.

Questões propostas:

1) Ângela, aluna do Curso de Administração, faz aplicações a longo prazo na companhia de investimentos RP. A empresa lhe propõe remunerar seu dinheiro segundo a lei $r(x) = 5.000x + 200$ reais. Os valores x são calculados mensalmente e assumem valores da

seqüência $(A_n): a_n = \frac{3n+2}{n}$. Pede-se:

- a) O valor aplicado no primeiro mês. (valor 1,0)
- b) Completar a tabela. (valor 1,0)
- c) O valor da remuneração que ficará estável. (valor 1,0)

n	1	2	3	...	n	...	∞
$(A_n): a_n = \frac{3n+2}{n}$				...		...	
$r(x) = 5000x + 200$							

2) Uma fábrica de pneus tem a lei custo total dada por $C_t = -20q^2 + 200q$. Pede-se:

- a) A expressão para o custo marginal. (valor 1,0)
- b) O custo marginal para fabricar 3 pneus. (valor 1,0)
- c) O número de pneus que se devem fabricar para ter custo máximo. (valor 1,0)
- d) O esboço do gráfico da função custo total e custo marginal. (valor 1,0)

3) Os valores abaixo representam o saldo da poupança (Diário do Comércio 5/10/2001).

meses	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set
toneladas	111,6	111,6	112,5	113,4	113,8	114,1	114,7

Determinar:

- a) A reta regressão linear que melhor se ajusta aos dados. (valor 1,0)
- b) O saldo da poupança par o mês de outubro. (valor 1,0)
- c) O gráfico da reta e dos pontos dados. (valor 1,0)

Quadragésima semana

Exame Especial Global

O Exame Especial Global foi formulado por meio de enunciados de situações-problema de assuntos estudados durante os dois semestres letivos e retirados de temas da área de Administração e Economia

Questões propostas:

1) A tabela abaixo apresenta a renda familiar de seis famílias pesquisadas e os correspondentes gastos com alimentos. A renda é dada em R\$ 1.000,00.

renda	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3,2
gastos	200	220	240	300	280	260

Determinar:

- a) A reta regressão linear que melhor se ajusta aos dados. (valor 1,0)
- b) O gasto de uma família de renda R\$ 3.000,00. (valor 1,0)
- c) O gráfico da reta e dos pontos dados. (valor 1,0)

2) Sabendo-se que os pagamentos mensais de um empréstimo de imóveis obedece à lei $p(x) = 620x + 30$ reais, e que o valor x assume os valores da sequência $(A_n): a_n = \frac{2n+1}{n}$.

Pede-se:

- a) Completar a tabela. (valor 1,0)

n	1	2	3	...	n	...	∞
				...		...	

- b) O valor pago na primeira prestação. (valor 1,0)
- c) O valor da prestação que ficará estável. (valor 1,0)

3) A função receita total de uma fábrica de bicicletas é dada por $R_t = -q^2 + 200q$.

Pede-se:

- a) A expressão da receita marginal. (valor 1,0)
- b) A receita marginal para 100 bicicletas. (valor 1,0)
- c) O ponto crítico se o custo total for dado por $C_t = 100q + 1.600$. (valor 1,0)
- d) O valor para o qual se tem lucro máximo. (valor 1,0)

Capítulo 5 Relatando Resultados

CAPITULO 5 RELATANDO RESULTADOS

Desde que começamos a lecionar a disciplina Matemática para o Curso de Administração da Unip-Campus Vergueiro, percebemos que o ensino tradicional, com aulas expositivas dialogadas, não criava um ambiente propício para uma boa aprendizagem de matemática. Observávamos um grande distanciamento entre a proposta de ensino de matemática oferecida e o desejo da Unip no que se refere à aprendizagem dos alunos. Estes, por sua vez, não apresentavam interesse e nem se motivavam com as aulas, ainda que tivéssemos grande empenho em sua preparação e apresentação.

Mesmo inconformados com esse ambiente adverso, não atribuímos aos alunos toda a culpa do insucesso e fomos em busca de novas formas de ensino-aprendizagem para a disciplina Matemática.

Ao longo desses anos em que ministramos a disciplina, fizemos várias modificações no conteúdo programático. Sentíamos necessidade de um embasamento teórico-científico que nos permitisse aceitar como verdade determinadas conclusões elaboradas por nós. Só durante o desenvolvimento dessa pesquisa é que pudemos conhecer e selecionar um conjunto de informações didático-pedagógicas com as quais demos um novo enfoque ao ensino-aprendizagem de matemática, especialmente adaptado para o Curso de Administração de Empresas.

Utilizamos, neste trabalho de pesquisa, a metodologia de pesquisa de Romberg, que serviu de guia para todas as nossas atividades. Dessa forma, buscamos conhecer:

- O perfil do administrador profissional, para podermos verificar quais são os conhecimentos, as atitudes e as habilidades exigidas de um bom administrador e, assim, elaborar um novo conteúdo programático e uma nova metodologia de ensino-aprendizagem de matemática que ajudassem a formar melhores Administradores de Empresas.
- O perfil do corpo discente, pois desejávamos verificar as tendências, as aptidões e os conhecimentos matemáticos trazidos por esses alunos para o Curso de Administração de Empresas. Foram três os questionários aplicados e a partir deles, pudemos concluir que os alunos matriculados na primeira série, ano 2000 e ano 2001, do Curso de Administração de Empresas, Campus Vergueiro, ao buscar sua linha profissional, não tinham como interesse principal o Curso de Administração e que, além disso, apresentavam grandes dificuldades para acompanhar a disciplina Matemática nos moldes de um ensino tradicional.

- O perfil do corpo docente, utilizando dois questionários. Pela análise dos resultados e pelo fato de a disciplina Matemática fazer parte do currículo do ensino básico, verificamos quais tópicos são mais utilizados pela área profissionalizante e em que intensidade. Verificamos, ainda, que a metodologia usada pela maioria dos professores era a tradicional, isto é, aulas expositivas dialogadas.
- A realidade do ensino de matemática nas últimas décadas. Esta realidade foi apresentada por meio de depoimentos bibliográficos e indicou que o rendimento escolar dos alunos do Ensino Médio nas últimas décadas foi deficitário, isto é, o conhecimento matemático desses alunos não corresponde ao que se esperava deles num curso universitário. Estes dados são comprovados também por meio dos resultados dos Exames Nacionais do Ensino Médio (ENEM), ano 2001 e 2002, os quais mostram que o nível dos alunos em matemática é muito baixo. Quanto ao Exame Nacional de Cursos (Provão) de 1998 até 2002, estes mostram que a média no provão dos alunos dos Cursos de Matemática foi o menor de todos os cursos avaliados. Relativamente aos alunos matriculados nos anos 2000 e 2001, isso foi comprovado por meio dos resultados dos questionários aplicados por nós.

De posse dessas informações, fomos em busca de uma metodologia de ensino-aprendizagem que melhor atendesse ao perfil do administrador profissional proposto pelo MEC, pelo CFA e pela Unip. A metodologia de trabalho em sala de aula que passamos a adotar é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

Trabalhar com resoluções de problemas aparece, como recomendação do NCTM no início da década de 80, no documento *Uma Agenda para Ação*. Nesse a Resolução de Problemas é destacada como o foco do ensino de matemática nos anos 80. No Brasil, os PCN para a matemática foram publicados em 1997 para o primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental, em 1998 para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. Todos esses PCN indicavam a Resolução de Problemas como o ponto de partida para a atividade matemática a ser desenvolvida na sala de aula.

Após conhecermos essa nova metodologia, para a sala de aula, propusemos mudanças na ementa e no conteúdo programático da disciplina Matemática da Unip-Campus Vergueiro. Para nós, não fazia sentido iniciar as aulas dessa disciplina com revisões de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio. No nosso ponto de vista, os problemas advindos do fato de alguns alunos não terem visto certos tópicos de matemática ou, se os viram, deles terem-se esquecido, devem ser trabalhados como problemas secundários, no momento em que a dúvida

aparece dentro de uma situação problema. Uma outra razão para não termos mantido as tradicionais revisões no conteúdo programático decorreu do fato de partimos de situações-problema, com enunciados retirados de assuntos das disciplinas profissionalizantes, para chegarmos à construção de novos conteúdos e conceitos matemáticos.

Essa nova metodologia oferece ao aluno a oportunidade de usar seu centro lógico de raciocínio para a descoberta da solução dos problemas e a construção dos conceitos matemáticos subjacentes a eles. O aluno, trabalhando na resolução de um problema, tem a oportunidade de ser ousado, imaginativo, criativo e de saber tomar decisões matemáticas na busca da solução.

Durante o ano de 2001, aplicamos para alguns tópicos do programa, a Metodologia de Ensino de Matemática via Resolução de Problemas. Com a experiência obtida nesse ano, preparamos e aplicamos, no ano de 2002, um cronograma contendo as quarenta semanas de aula exigidas pelo currículo do curso. Para cada semana de aula, apresentamos o título do conteúdo programático da semana, os objetivos a alcançar e o conteúdo matemático a ser trabalhado.

Na elaboração desse conteúdo programático utilizamos:

Situações-problema: São situações elaboradas pelo professor ou situações propostas a partir de temas, para discussões nos grupos. Esses temas foram retirados da área de administração e economia e geraram enunciados de problemas elaborados com a ajuda do professor, que se serviu das falas de Pedro e Fernanda para representar as discussões de dois estudantes pertencentes a um dos grupos. As situações-problema tiveram a finalidade de gerar novos conceitos e conteúdos matemáticos.

Problemas aplicativos: Com os conceitos e conteúdos matemáticos obtidos a partir da situação-problema dada, o professor trabalhou temas da área de administração e economia.

Usamos também outras formas de trabalho em sala de aula e tarefas extraclasse, para treinamento ou fixação dos conceitos e conteúdos, construindo o que chamamos de: *exercícios de aplicação, problemas aplicativos variados e tarefas extraclasse.*

Na primeira aula, apresentamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas. Esse modelo de ensino era desconhecido dos alunos, que também não sabiam trabalhar em grupo. No início, houve um certo desconforto na escolha dos componentes do grupo, pois eles não se conheciam.

Observamos que, durante a resolução da primeira situação-problema, muitos alunos tentaram resolver o problema proposto individualmente. Somente depois de duas semanas de aula, os alunos já haviam efetivamente escolhido o grupo desejado e passaram a conhecer a nova sistemática de aula usada pelo professor. Observamos também que, durante a plenária,

muitos alunos apresentavam sua solução de maneira confusa, sem fundamentação, provocando risos dos colegas. Procuramos, nesses momentos, contornar a situação para que esses alunos não se sentissem humilhados e deixassem de apresentar suas idéias. Durante as semanas que se seguiram, percebemos que os alunos apresentavam suas soluções na plenária com maior clareza, com cuidado e que não mais ocorriam tumultos pelo fato de todos quererem falar ao mesmo tempo.

Na segunda semana de aula, ou melhor, na primeira semana efetiva de aula de matemática, iniciamos a construção do conceito de funções. Para isso, logo no início da aula pedimos que os alunos se reunissem em grupos de três e entregamos a primeira situação-problema denominada *Problema da livraria*. Lembramos a todos que daríamos tempo para a resolução do problema, depois, recolheríamos o texto e que na plenária discutiríamos a solução. Essa situação-problema foi a mais conturbada de todas as apresentadas durante o curso, pois os alunos:

- Não sabiam trabalhar em grupo;
- Não discutiam a questão com seus pares;
- Não conseguiam interpretar o texto;
- Não sabiam o significado de *descrever uma relação*;
- Não conseguiam representar graficamente a relação.

Portanto, durante a plenária, surgiram muitas perguntas, provocadas por problemas secundários, que resolvemos de imediato. Nesse dia, os grupos resolveram mais três situações-problema, porém estas transcorreram com normalidade e, a partir dessas situações, apresentamos o conceito de função.

No decorrer das semanas, os grupos foram se reunindo, sempre com os mesmos elementos. Já no início das aulas, todos os grupos se encontravam reunidos, sem que o professor tivesse de solicitar. Acostumados com o professor e com a metodologia aplicada, os alunos não ficavam nervosos quando ele se aproximava ou mesmo se sentava junto ao grupo para verificar o andamento da solução do problema. Para esses alunos, o professor passou a ser mais um companheiro do grupo do que vigia ou crítico.

Para cada novo conteúdo programático da disciplina Matemática, iniciávamos a aula com uma situação-problema, a qual tinha a finalidade de gerar o novo conceito matemático. Sempre com o propósito de construir os novos conceitos a partir de situações-problema, tivemos de pesquisar muito, pois a totalidade dos livros didáticos não segue o nosso modelo de ensino-aprendizagem. A maior dificuldade ocorreu na preparação do conceito de derivada, denominado *custo marginal e receita marginal* na área de economia e administração. Para esse fim, precisávamos também do conceito de limite, que é sempre apresentado por meio

das noções de vizinhança, tornando o conceito de limite muito formal para um curso de administração. Contornamos esse modelo, apresentando, em primeiro lugar, as noções de seqüências e estendendo o domínio dos números naturais para os reais. Assim, quando se calcula um limite de uma função, por exemplo, para x tendendo para o número 1, construímos uma seqüência em que x assume os valores de uma seqüência que converge para 1.

Quando nos referimos a Princípios e Padrões, publicado no ano 2000 pelo NCTM, verificamos que a metodologia de ensino-aprendizagem utilizada por nós atendeu a todos eles:

- *Princípio da equidade* - A equidade requer condições favoráveis para ajudar cada aluno a se desenvolver e ainda requer altas expectativas e oportunidades convenientes para todos. Em nossas aulas os problemas eram distribuídos aos grupos e estes discutiam, apresentavam as soluções e os entregavam. Na plenária, o professor, junto com a classe, chegava à solução. Desta maneira, todos tinham oportunidade de participação.
- *Princípio do currículo* - Um currículo de matemática bem articulado, organiza e integra idéias matemáticas importantes. O currículo de matemática para o curso de Administração de Empresas da Unip foi especialmente preparado observando-se a proposta do MEC, da Unip e também da pesquisa realizada pelo CFA, por meio da qual passamos a conhecer as habilidades, as atitudes e os conhecimentos exigidos de um bom administrador profissional.
- *Princípio de ensino e Princípio de aprendizagem* - Ensinar bem matemática é uma tarefa complexa. Para isso não há receitas fáceis e a compreensão conceitual é um importante componente da competência. Esse princípio foi atendido com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas, pois agora o aluno é partícipe da construção de seu conhecimento.
- *Princípio da avaliação* - Reunir evidência a partir de uma variedade de fontes é mais conveniente para produzir uma descrição precisa do crescimento do estudante. Essa nova metodologia permite que a avaliação seja contínua, isto é o aluno é avaliado enquanto atua no grupo, durante a resolução das situações-problema, na análise da solução entregue e, ainda, quanto ao seu desempenho na plenária. Dessa forma, atribuímos à avaliação a função de fornecer aos alunos informações sobre o seu desenvolvimento matemático e ao professor as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: que conhecimentos

matemáticos foram adquiridos, que raciocínios foram desenvolvidos e quais hábitos e valores foram incorporados pelos alunos. Além dessas avaliações, a Unip apresenta um calendário de provas bimestrais e exames.

- *Princípio da tecnologia* - A tecnologia é essencial para o ensino-aprendizagem, ela influencia a matemática que é ensinada aumentando a aprendizagem dos estudantes. Usamos calculadoras eletrônicas, em especial, para a Unidade II - Ajustamento de curvas, pois trabalhamos com tabelas estatísticas para obtenção da regressão linear. No segundo semestre de 2002, utilizamos o processador matemático WINPLOT para construções de gráficos. O uso desses instrumentos foi bem recebido pelos alunos.

Quanto aos padrões de conteúdo apresentados nos Standards 2000, praticamente todos foram atendidos:

- *Números e operações* - A maioria dos nossos aplicativos se baseava no conjunto dos números racionais, além disso, quando trabalhamos com a Unidade IV - derivadas, usamos o conjunto dos reais.
- *Álgebra* - Esse conteúdo foi o de maior ocorrência, especialmente na Unidade I - Funções.
- *Geometria* - Também foi contemplado, principalmente na construção de gráficos.
- *Medidas e Análise de dados e Probabilidade* - Aparecem especialmente na Unidade II - Ajustamento de curvas, em que foram construídos gráficos que exigiram escalas e com as quais foram feitas as interpretações da regressão linear.

Analisando o ensino-aprendizagem ocorrido nos anos que lecionamos Matemática para o Curso de Administração da Unip, podemos separá-lo em duas fases:

A primeira fase, aquela em que utilizávamos o modelo de ensino tradicional, com aulas expositivas dialogadas e cujo conteúdo programático e planejamento didático era direcionado para uma matemática, pela matemática isto é, aulas de revisões e com pouquíssimos problemas aplicativos. Nessa fase, o professor era o centro do ensino-aprendizagem e o aluno um espectador. Além de espectador, transcrevia no caderno dados fornecidos pelo professor na lousa. Assim, como motivar aulas de revisão com centenas de exercícios numéricos e algébricos? Penso que os alunos nessa fase eram indisciplinados, pois julgavam esses conteúdos inúteis, obsoletos e desinteressantes. Que interesse pode ter um

aluno em descobrir o processo de construção de um certo conhecimento matemático, se o professor parte da definição do conceito matemático?

A segunda fase iniciou-se em 2001, quando começamos a aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas. Nessa fase, percebemos que:

- Os alunos aprendem melhor quando é possível estabelecer uma ligação entre o mundo real, cotidiano, com problemas aplicativos da área profissionalizante e os temas do conteúdo programático.
- O uso dessa nova metodologia, quando aplicada aos alunos do Curso de Administração, apresenta melhor desempenho, pois esses alunos, em geral, não têm uma vocação especial para o abstrato.

Quanto à formação do futuro Administrador Profissional podemos destacar as seguintes competências, obtidas com a aplicação do projeto:

Houve uma contribuição significativa na ampliação do conhecimento de matemática e de informática.

Com respeito às habilidades de um bom Administrador Profissional, a aplicação do projeto contribuiu para ampliar a capacidade de tomada de decisões, de comunicar-se bem por escrito e verbalmente, de planejar, de trabalhar em equipe, de assumir riscos e ter visão de problemas de várias áreas da administração.

Quanto às atitudes, essa metodologia permitiu que o pensamento inovador surgisse em um esforço colaborativo dos elementos dos grupos, e também contribui para motivar os elementos dos grupos, levando-os a desejar estudar e ser ético.

Ainda, essa metodologia aumenta a capacidade de :

- a) Integrar vários campos da matemática;
- b) Analisar criticamente textos matemáticos e redigi-los;
- c) Compreender e elaborar argumentações matemáticas na defesa da solução dada;
- d) Trabalhar com conceitos matemáticos abstratos.
- e) Ter capacidade de resolver novos problemas

É tradição dos alunos terem caderno com anotações de aula. No entanto, quando usamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas, as anotações no caderno ficam em segundo plano, porque a essência do trabalho está na discussão em grupo e na plenária. Contornamos esse problema da seguinte maneira:

- Entregamos cópia dos enunciados das situações-problema ou problemas aplicativos a todos os elementos do grupo, com espaço para a resolução.

- Após a resolução feita pelo grupo, uma única cópia é entregue ao professor para a avaliação, contendo o nome dos três elementos do grupo. Feita a correção, estas são devolvidas ao grupo. Portanto, todos os elementos do grupo terão o enunciado e a resolução.
- No final de cada tópico do conteúdo programático desenvolvido, entregamos uma cópia da teoria e das soluções dos problemas utilizados. Essa cópia é reproduzida pelos alunos.
- No ano seguinte os enunciados são modificados, redefinidos, para que os novos alunos não tenham acesso às soluções do ano anterior.

Esse trabalho de pesquisa desenvolvido por nós fornece subsídios para todos os Cursos de Administração de Empresas, pois oferecemos um modelo de ensino-aprendizagem de matemática, com respaldo nos PCN e testado por nós. Construindo a teoria matemática a partir de situações-problema retiradas do cotidiano do Curso de Administração. Os alunos, trabalhando em grupo, aprendem a interpretar textos, a discutir idéias, a propor soluções, tornando-se mais críticos, participativos e reflexivos. Dessa maneira, a matemática torna-se mais visível, agradável, sem perder o rigor. Assim, com alunos mais motivados, obtém-se maior aprendizagem e, como consequência, menor índice de reprovação e evasão.

Sabemos que a maioria do Corpo Docente que ensina Matemática não possui predisposição para mudanças e que para isso é necessário muito tempo. Entretanto divulgaremos junto aos professores de Matemática nosso trabalho. Procuraremos apresentar ao coordenador geral e aos coordenadores locais da Unip o nosso projeto de pesquisa, mostrando os motivos que nos levaram a propor mudanças no conteúdo programático e planejamento didático. Apresentamos em especial, a Metodologia de Ensino Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas.

De todo o trabalho realizado, podemos afirmar que os resultados foram compensadores. Agradecemos à Unip que nos proporcionou a oportunidade de analisar as dificuldades dos alunos e nos permitiu buscar outro caminho, tornando nossa pesquisa possível.

É possível elaborar e desenvolver um novo enfoque da disciplina Matemática a partir de aplicações na área profissionalizante de Administração de Empresas, acompanhado de uma nova ementa e novo conteúdo programático, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas, para o Curso de Administração de Empresas da Unip.

ANEXOS

Anexo 1

Anexo 2

Anexo 3

Anexo 4

Anexo 5

Questionário: Anexo 1

Perfil dos candidatos ao vestibular do Curso de Administração de Empresas da Unip- São Paulo, Capital, de Setembro de 1999

1. Idade:

1. ☐ 17 a 20 anos.
2. ☐ 21 a 24 anos.
3. ☐ 25 a 30 anos.
4. ☐ 31 a 40 anos.
5. ☐ Mais de 40 anos.

2. Estado Civil:

1. ☐ Solteiro.
2. ☐ Casado.
3. ☐ Viúvo.
4. ☐ Separado judicialmente.
5. ☐ Divorciado.
6. ☐ Outros.

3. Sua família possui casa própria?

1. ☐ Sim.
2. ☐ Não.

4. Renda familiar mensal (Inclua seu salário, caso trabalhe. Se for casado, refira-se à sua própria família):

1. ☐ Até R\$ 1000,00.
2. ☐ De R\$ 1000,00 a R\$ 2000,00.
3. ☐ De R\$ 2000,00 a R\$ 3000,00.
4. ☐ De R\$ 3000,00 a R\$ 4000,00.
5. ☐ De R\$ 4000,00 a R\$ 5000,00.
6. ☐ De R\$ 5000,00 a R\$ 6000,00.
7. ☐ Acima de R\$ 6000,00.

5. Você exerce trabalho remunerado?

1. ☐ Não.
2. ☐ Sim, período integral.
3. ☐ Sim, meio período.
4. ☐ Trabalhos eventuais.

6. Qual é sua renda pessoal mensal?

1. ☐ Até R\$ 500,00.
2. ☐ De R\$ 500,00 a 1000,00.
3. ☐ De R\$ 1000,00 a R\$ 1500,00.
4. ☐ De R\$ 1500,00 a R\$ 2000,00.
5. ☐ De R\$ 2000,00 a R\$ 2500,00.
6. ☐ De R\$ 2500,00 a R\$ 3000,00.
7. ☐ Acima de R\$ 3000,00.
8. ☐ Não tenho.

7. Você possui condução própria?

1. ☐ Sim.
2. ☐ Não.

8. Como pretende manter-se durante o curso?

1. ☐ Trabalhando.
2. ☐ Recursos dos pais.
3. ☐ Outros.

9. Grau de instrução do pai:

1. ☐ Nenhum.
2. ☐ Ensino fundamental incompleto.
3. ☐ Ensino fundamental completo.
4. ☐ Ensino médio incompleto.
5. ☐ Ensino médio completo.
6. ☐ Superior incompleto.
7. ☐ Superior completo.

10. grau de instrução da mãe:

1. ☐ Nenhum.
2. ☐ Ensino fundamental incompleto.
3. ☐ Ensino fundamental completo.
4. ☐ Ensino médio incompleto.
5. ☐ Ensino médio completo.
6. ☐ Superior incompleto.
7. ☐ Superior completo.

11. Em que turno cursou o ensino médio (2º grau, colegial ou equivalente)?

1. ☐ Todo diurno.
2. ☐ Todo noturno.
3. ☐ A maior parte diurno.
4. ☐ A maior parte noturno.

12. Qual é seu conhecimento em informática?

1. ☐ Nenhum.
2. ☐ Usuário de programas prontos (aplicativos).
3. ☐ Programa em uma ou mais linguagens.
4. ☐ Avançado (programação e sistemas complexos)

13. Configuração do micro pessoal (se for o caso, anote mais de uma alternativa):

1. ☐ 486.
2. ☐ Pentium.
3. ☐ CD-Rom.
4. ☐ Internet.
5. ☐ Macintosh.
6. ☐ Outro.
7. ☐ Não tenho micro.

14. Qual é seu conhecimento de idiomas?

1. ☐ Domino bem uma língua estrangeira ou mais.
2. ☐ Domino razoavelmente uma língua estrangeira ou mais.
3. ☐ Não possuo domínio algum de língua estrangeira.

15. Fez cursinho?

1. ☐ Não fiz cursinho.
2. ☐ Um semestre.
3. ☐ Um ano.
4. ☐ mais de um ano.
5. ☐ Cursinho que freqüentou (nome, cidade, estado)

Questionário: Anexo 2

Perfil do corpo discente ingressante - Ano 2000

I – Dados Pessoais

1. Sexo

1. ☐ masculino	2. ☐ feminino

2. Faixa etária

1. ☐ até 17 anos	3. ☐ acima de 23 anos
2. ☐ de 18 a 22 anos	

3. Estado civil

1. ☐ Solteiro(a)	3. ☐ Outros
2. ☐ Casado	

II – Dados sócio – econômicos

4. É independente financeiramente

1. ☐ sim	2. ☐ não

5. Trabalha na área de Administração

1. ☐ sim	2. ☐ não

III – Tendências e aptidões para o curso de Administração.

6. Qual foi o seu curso de 2º grau

1. () colegial	3. () outros
2. () técnico	

7. Indique (3) áreas de sua preferência profissional enquanto fazia o 2º grau.

1. () administração	2. () arquitetura
3. () artes	4. () agronomia
5. () comércio exterior	6. () comunicação
7. () contabilidade	8. () direito
9. () economia	10.() educação física
11.() engenharia	12.() ensino / educação
13.() finanças	14.() fisioterapia
15.() fonoaudiologia	16.() informática
17.() jornalismo	18.() marketing
19.() matemática	20.() medicina
21.() nuticionismo	22.() odontologia
23.() publicidade / propaganda	24.() veterinária
25.() outros	

8. Razão pela opção do curso de administração

1. () interesse real	2. () outros

9. Indique sua área de preferência no 2º grau.

1. () exatas	3. () humanas
2. () biológicas	

10. Você considerava a disciplina de matemática importante?

1. () sim	3. () não
2. () mais ou menos	

11. Grau de interesse pela disciplina matemática no 2º grau

1. () muito baixo	4. () alto
2. () baixo	5. () muito alto
3. () médio	

12. Grau de dificuldade com a disciplina matemática no 2º grau

1. () muito baixo	4. () alto
2. () baixo	5. () muito alto
3. () médio	

IV – Questões específicas de matemática

Como você avalia o grau de dificuldade para obter a solução dos exercícios ?

13. $\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}\right)$

1. () baixo	2. () médio	3. () alto

14. $2\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \div 4(2)^{-1}$

1. () baixo	2. () médio	3. () alto

15. $0,555... - 0,3 + 1,8 \times \frac{1}{2}$

1. () baixo	2. () médio	3. () alto

16. **Multiplicando** $9a^3xy^2$ por a^4bx^2y

1. () baixo	2. () médio	3. () alto

17. Multiplicando $5ax^2 - 3bx^3$ por $2ax$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

18. Multiplicando $x^2 + x + 2$ por $x - 2$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

19. Dividindo $-6x^3y^5 \div 2x^2y^3$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

20. Dividindo $\left(-\frac{1}{2}yz^2\right) \div \left(\frac{2}{3}y^2z\right)$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

21. Extraíndo a raiz $\sqrt{5^2 - 4^2}$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

22. Resolver a equação $2x - 3 = 5$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

23. Resolver a equação $\frac{2}{5}x = -\frac{8}{5}$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

24. Resolver a desigualdade $\frac{x-1}{2} \geq 3$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

25. Resolver a desigualdade $0,4x - 0,9 \leq 0,1$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

26. Resolver a equação $2x^2 + 2x = 0$

1. () baixo

2. () médio

3. () alto

Questionário: Anexo 3

Perfil do corpo discente ingressante- março 2001

I – Dados Pessoais

1. Sexo

1. () masculino

2. () feminino

2. Faixa etária

1. () 1 até 17 anos

3. () acima de 23 anos

2. () de 18 a 22 anos

3. Estado civil

1. () Solteiro(a)

2. () Casado

3. () Outros

II – Dados sócio – econômicos

4. É independente financeiramente

1. () sim

2. () não

11. Grau de interesse pela disciplina matemática no 2º grau

1. () muito baixo 2. () baixo 3. () médio
4. () alto 5. () muito alto

12. Grau de dificuldade com a disciplina matemática no 2º grau

1. () muito baixo 2. () baixo 3. () médio
4. () alto 5. () muito alto

IV – Questões específicas de matemática

Como você avalia o grau de dificuldade para obter a solução dos exercícios ?

13. $\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}\right)$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

14. $2\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \div 4(2)^{-1}$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

15. $0,555... - 0,3 + 1,8 \times \frac{1}{2}$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

16. **Multiplicando** $9a^3xy^2$ por a^4bx^2y

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

17. **Multiplicando** $5ax^2 - 3bx^3$ por $2ax$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

18. Multiplicando $x^2 + x + 2$ por $x - 2$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

19. Dividindo $-6x^3y^5 \div 2x^2y^3$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

20. Dividindo $\left(-\frac{1}{2}yz^2\right) \div \left(\frac{2}{3}y^2z\right)$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

21. Extrair a raiz $\sqrt{5^2 - 4^2}$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

22. Resolver a equação $2x - 3 = 5$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

23. Resolver a equação $\frac{2}{5}x = -\frac{8}{5}$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

24. Resolver a desigualdade $\frac{x-1}{2} \geq 3$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

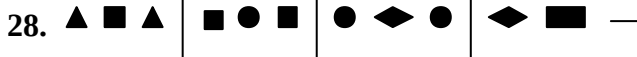
25. Resolver a desigualdade $0,4x - 0,9 \leq 0,1$

1. () baixo 2. () médio 3. () alto

26. Resolver a equação $2x^2 + 2x = 0$

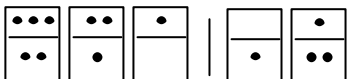
1. () baixo 2. () médio 3. () alto

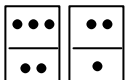
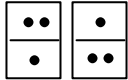
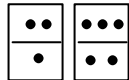
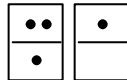
V – Selecione a melhor resposta para as seqüências dadas

27.  — 28.  —

 a.  b.  c.  d.

 a.  b.  c.  d.

29.  — — 

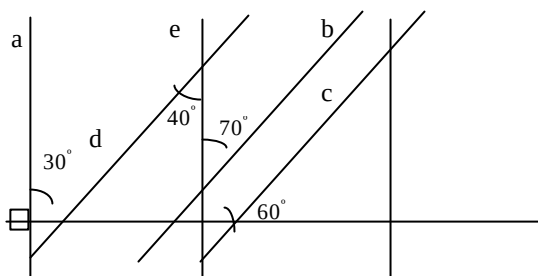
 a.  b.  c.  d.

30. 896 | 684 | 472 | 26 —
3 2 1 0
a. b. c. d.

31. 14284 | 15308 | 1632 —
1 12 2 14
a. b. c. d.

32. O N M L K _ _ _ G F E D
H I J J I H K J I C B A
a. b. c. d.

33. As retas paralelas na figura são



- a. () d, b
b. () a, e
c. () b, c
d. () d, c

34. Se $a = 3$, qual das sentenças é verdadeira ?

- a. ☐ $9 - a > 6$ b. ☐ $3a < 8$ c. ☐ $2a > a^2$ d. ☐ $3a < a^3$

35. Qual o número que se deve colocar no lugar de x para a sentença

$8 - 15 + x = 1$ ser verdadeira ?

- a. ☐ -8 b. ☐ -7 c. ☐ 8 d. ☐ 7

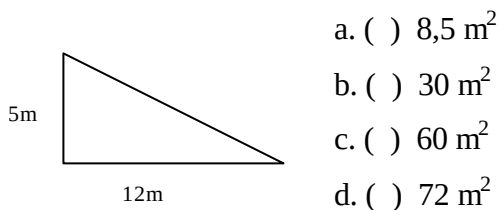
36. 3 horas e 30 minutos menos 1 hora e 42 minutos é igual a

- a. ☐ 1 hora e 8 minutos b. ☐ 1 hora e 48 minutos
c. ☐ 2 horas e 48 minutos d. ☐ 2 horas e 8 minutos

37. 6^3 é igual a

- a. ☐ 18 b. ☐ 36 c. ☐ 216 d. ☐ 918

38. A área do triângulo abaixo é



- a. ☐ $8,5 \text{ m}^2$
b. ☐ 30 m^2
c. ☐ 60 m^2
d. ☐ 72 m^2

39. Qual o perímetro do triângulo acima ?

- a. ☐ 20 m b. ☐ 30 m c. ☐ 17 m d. ☐ 34 m

40. Qual o número que adicionado a 50% dele mesmo é 27 ?

- a. ☐ 7 b. ☐ 9 c. ☐ 11 d. ☐ 18

41. Qual o valor equivalente a $13/25$

- a. ☐ 0.38 b. ☐ 0.4 c. ☐ 0.48 d. ☐ 0.52

42. O valor de -13^2 é

- a. ☐ -19 b. ☐ $+19$ c. ☐ -169 d. ☐ 169

Questionário: Anexo 4

Perfil do corpo docente que ministra a disciplina de Matemática do Curso de Administração de Empresas - Questionário

I – Dados Pessoais

1 – Formação Acadêmica

1. ☐ Especialização
2. ☐ Mestrando
3. ☐ Mestre
4. ☐ Doutorando
5. ☐ Doutor

II - Experiência Profissional

2 – Tempo de docência no Ensino Superior

- 1.(☐) até 5 anos
- 2.(☐) de 6 a 10 anos
- 3.(☐) de 11 a 15 anos
- 4.(☐) acima de 15 anos

3 - Tempo de docência na disciplina de matemática

1. ☐ até 5 anos
2. ☐ de 6 a 10 anos
3. ☐ de 11 a 15 anos
4. ☐ acima de 15 anos

III - Metodologia de ensino

4 - Qual a forma de aula que mais utiliza ?

1. ☐ aulas expositivas, tradicional (você fala, o aluno ouve)
2. ☐ aulas expositivas dialogadas com apostila
3. ☐ aulas expositivas dialogadas com livro adotado
4. ☐ aulas expositivas dialogadas e exercícios
5. ☐ aulas expositivas, dialogadas exercícios e trabalhos em grupo
6. ☐ a partir de resolução de problemas

5 - Do tempo disponível da aula, quanto em % é dedicado para a parte prática ?

1. ☐ até 20%
2. ☐ de 21% a 40%
3. ☐ de 41% a 60%
4. ☐ mais que 60%

6 - Recursos adicionais que utilizam para ministrar a disciplina

1. ☐ Projeção de filmes – retroprojektor – data show.
2. ☐ Estudo de caso
3. ☐ Laboratório de informática
4. ☐ Outros

IV - Outras informações

7 - Prepara as aulas com qual frequência?

1. ☐ Diária
2. ☐ Semanal
3. ☐ Mensal

8 - Na sua opinião, qual o grau de dificuldade dos estudantes para o entendimento da disciplina?

1. ☐ baixo
2. ☐ médio
3. ☐ alto
4. ☐ muito alto

9 - Usa calculadora em suas aulas

- ☐ Sim
- ☐ Não

10 - Na sua opinião, existe no mercado livro didático que seja adequado à disciplina de matemática?

1. ☐ Sim
2. ☐ Não

Questionário: Anexo 5

Perfil do corpo docente das disciplinas que usam Matemática no Curso de Administração de Empresas - Questionário

Preparamos o questionário e aplicamos aos professores de cinco (05) Campi da Universidade Paulista a saber:

- 1) Campus Luís Góis- diurno
- 2) Campus Paulista- noturno
- 3) Campus Rua da Paz- diurno e noturno
- 4) Campus Santana- noturno
- 5) Campus Vergueiro- diurno e noturno.

As disciplinas escolhidas foram aquelas que usam tópicos de matemática, com pouca ou grande intensidade, visando conhecer sua formação acadêmica, experiência profissional, metodologia usada e principalmente quais são os tópicos de matemática utilizado nas aulas ministradas.

Responderam ao questionário, 48 (quarenta e oito) docentes. A tabela que mostra o número de docentes por disciplina tem frequência irregular pois, um professor pode lecionar em mais de um (01) Campi da Universidade e pedimos que respondesse apenas uma vez.

I – Dados Pessoais

1 – Formação Acadêmica

- 1.() Especialização
- 2.() Mestrando
- 3.() Mestre
- 4.() Doutorando
- 5.() Doutor

II - Experiência Profissional

2 – Tempo de docência no Ensino Superior

- 1.() até 5 anos
- 2.() de 6 a 10 anos
- 3.() de 11 a 15 anos
- 4.() acima de 15 anos

3 - Tempo de docência na disciplina

- 1.() até 5 anos
- 2.() de 6 a 10 anos
- 3.() de 11 a 15 anos
- 4.() acima de 15 anos

III - Metodologia de ensino

4 - Qual a forma de aula que mais utiliza ?

- 1.() aulas expositivas, tradicional (você fala, o aluno ouve)
- 2.() aulas expositivas dialogadas com apostila
- 3.() aulas expositivas dialogadas com livro adotado
- 4.() aulas expositivas dialogadas e exercícios
- 5.() aulas expositivas, dialogadas exercícios e trabalhos em grupo
- 6.() a partir de resolução de problemas

5 - Do tempo disponível da aula, quanto em % é dedicado para a parte prática ?

- 1.() até 20%
- 2.() de 21% a 40%
- 3.() de 41% a 60%
- 4.() mais que 60%

6 - Recursos adicionais que utilizam para ministrar a disciplina

- 1.() Projeção de filmes – retroprojektor – data show.
- 2.() Estudo de caso
- 3.() Laboratório de informática
- 4.() Outros

IV - Outras informações

7 - Prepara as aulas com qual freqüência?

- 1.() Diária
- 2.() Semanal
- 3.() Mensal

8- Usa calculadora em suas aulas?

- 1.() Sim
- 2.() Não

9- Assinale os tópicos que são pré-requisitos para sua disciplina

- 1.() Operações com números inteiros
- 2.() Operações com números fracionários
- 3.() Operações com números decimais
- 4.() Operações com números reais
- 5.() Operações com números complexos
- 6.() Equações de 1º e 2º graus
- 7.() Inequações de 1º e 2º graus
- 8.() Relações
- 9.() Função do 1º grau
- 10.() Função do 2º grau
- 11.() Função modular
- 12.() Função exponencial
- 13.() Função logarítmica
- 14.() Mudança de base
- 15.() Equações com exponenciais e logarítmicas
- 16.() Representação gráfica - Reta
- 17.() Representação gráfica - parábola
- 18.() Funções trigonométricas
- 19.() Matrizes e determinantes
- 20.() Soluções de sistemas simples de duas variáveis
- 21.() Soluções de sistemas de equações lineares
- 22.() Análise combinatória
- 23.() Probabilidade
- 24.() Binômio de Newton
- 25.() Outros

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, Maria Célia de; MASETTO, Marcos T. *O Professor Universitário em Aula: Prática e Princípios Teóricos*. 8. ed. São Paulo: M.G.Ed. Associados, 1990.

ANDRADE, Rui Otávio Bernardes de, LIMA, Manolita Correia et alii. *Perfil, Formação e Oportunidades de Trabalho do Administrador Profissional*. São Paulo: E.S.P.M. , 1999.

AZEVEDO, L. L. *Uma Proposta de Mudança, na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na Metodologia de Ensino em Matemática Via Resolução de Problemas* – Rio Claro, Dissertação (Mestrado em Matemática). Rio Claro: UNESP, 1998.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Ed. UNESP, 1999.

BRASIL, Luis Alberto S. *Estudo dirigido de Matemática no Ginásio*. São Paulo: Ed. Fundo de Cultura, 1964.

BRASIL. Ministério de Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Matemática – Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental*. Brasília , 1998.

CHARNAY, R. *Aprendendo (com) a Resolução de Problemas*. I: PARRA, C. (org.) *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: Ed. Arte Médicas, 1996 .

CHIANG, Alpha C. *Matemática para Economistas*. São Paulo: Ed. Mac Graw Hill – EDUSP, 1982.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. *Formação de Professores de Matemática para o século XXI: O Grande Desafio*, Pró-Posições. Vol. 4, n. 1 [10], 1993.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan . *Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação de Matemática*. Campinas: Ed. UNICAMP, 1986.

_____, *Educação Matemática: Da teoria à Prática*. Campinas: Ed. Papirus, 1996.

DEMO, Pedro. *Desafios Modernos da Educação*. Petrópolis: Ed. Vozes, 1993.

DOWLING, Edward T. *Matemática Aplicada à Economia e Administração*. São Paulo: Ed. Mac Graw Hill, 1981.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução – Hygino H. Domingues – 2. ed. Campinas: Ed. UNICAMP, 1997.

GAZIRE, Eliane. S. *Resolução de Problemas: Perspectivas em Educação Matemática*. Dissertação (Mestrado em Matemática). Rio Claro: UNESP, 1989.

GIL, Antonio Carlos. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Ed. Atlas, 1995.

GÓMES, Angel Pérez . *Os Professores e a sua Formação. Temas de Educação*. Lisboa: Ed Dom Quixote, 1992.

HARIKI, Seiji. *Matemática aplicada*. São Paulo: Saraiva, 1999.

HAYDT, Regina Célia Cazaux. *Curso de Didática Geral*. Série Educação. São Paulo: Ática, 1997.

HOUAISS, A.. *Dicionário Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva , 2001

HOFFMANN, Laurence D. *Cálculo. Um curso Moderno e Suas Aplicações*. São Paulo: Livros Técnicos Científicos, 1990.

KILPATRICK, Jeremy. *A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving*. New Jersey, 1985.

KILPATRICK, Jeremy, SILVER, E.A. *Unfinished business challenges for mathematics educator in next decades*. NCTM – Learning Mathematics for new Century – 2000 Yearbook.

LEITHOLD, Louis. *Matemática Aplicada à Economia e Administração*. São Paulo: Harbra, 1988.

LIMA, Elon Lages. *Conceituação, Manipulação e Aplicações* - Revista do Professor de Matemática – n. 41 , 1999.

MICOTTI, Maria C. Oliveira. *O Ensino e as Propostas Pedagógicas*. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Ed. UNESP, 1999.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. *Aprendizagem*. São Carlos (mimiogr.), 1996

_____, *Ensino – Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo, Ed. UNESP, 1999.

PENTEADO, Horácio. (org.) *Ensino Fundamental e Competitividade Empresarial – Uma Proposta para a Ação do Governo*. Instituto Herbert Levy. São Paulo: 1992.

PEREZ, Geraldo. *Formação de Professores de Matemática sob a Perspectiva do Desenvolvimento Profissional*. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Ed. UNESP, 1999.

POLYA, George. *A Arte de Resolver Problemas*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Ed. Interciências, 1995.

PONTE, João Pedro. *Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação, Educação Matemática: Temas de Investigação*. Lisboa, I I E, 1992.

REVISTA ENSINO SUPERIOR. Revista mensal do Semesp (Sindicato das Entidades Mantenedoras de Estabelecimentos de Ensino Superior no Estado de São Paulo). Ed. Segmento – outubro 2002.

ROMBERG, Thomas A. *Perspectives on Scholarship and Research Methods*, In. Crows, D. A. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, NCTM, 1992.

SCHEIBE, Leda. *Pedagogia Universitária e Transformação Social*. Tese Doutorado em Educação. São Paulo: PUC, 1987.

SCHÖN, Donald A. *Formar Professores como Profissionais Reflexivos. Os Professores e sua Formação*. Antônio Nóvoa (org.), Lisboa, Ed. Dom Quixote, 1992.

SCHROEDER, T.L., Lester Jr., F.K. *Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving*. TRAFTON, P.R., SHULT, A.P. (Ed.) *New Directions for Elementary School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, (Year Book), 1989.

SENGE, Peter M. *A quinta disciplina-arte, teoria e prática da organização de aprendizagem*- Trad. Regina Amarante. Ed. Best Seller, São Paulo 1995.

SILVA, Sebastião Medeiros da . *Matemática para Cursos de Economia e Administração e Ciências Contábeis*. 5 ed. São Paulo: Atlas, 1999.

SOUZA JR., Arlindo J.. *Concepções do Professor Universitário sobre o Ensino de Matemática*, Dissertação (Mestrado em Matemática). Rio Claro: UNESP, 1993.

STRUICK, Dirk J. *História Concisa das Matemáticas*. Tradução João Cosme Santos Guerreiro. 3. ed..Lisboa: Ed. Gradiva, 1997.

WEBER, Jean E. *Matemática para Economia e Administração*.2.ed. São Paulo: Editora Harbra, 1986.