

MESTRADO



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica

Simulação Numérica de Escoamentos de
Fluidos com Efeitos de Rotação

Autor:

William Hiroshi Kuvabara Pereira

Orientador:

João Batista Campos Silva

Ilha Solteira – SP

24 / 07 / 2010

Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos com Efeitos de Rotação



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Campus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56, 15385-000, Ilha Solteira - SP
www.ppgem.feis.unesp.br

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**“Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos com
Efeitos de Rotação”**

William Hiroshi Kuvabara Pereira

Orientador: Prof. Dr. João Batista Campos Silva

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia - UNESP – Campus de Ilha
Solteira, para obtenção do título de Mestre em
Engenharia Mecânica.

Área de Conhecimento: Ciências Térmicas.

Ilha Solteira – SP
Julho/2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

P436s	Pereira, William Hiroshi Kuvabara. Simulação numérica de escoamentos de fluidos com efeitos de rotação William Hiroshi Kuvabara Pereira. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2012 193 f. : il. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Ciências Térmicas, 2010 Orientador: João Batista Campos Silva Inclui bibliografia 1. Método de elementos finitos. 2. Equações de navier-stokes. 3. Simulação de grandes escalas de turbulência. 4. Máquinas de fluxo. 5. Aceleração centrípeta. 6. Aceleração de coriolis.
-------	---



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos com Efeitos de Rotação

AUTOR: WILLIAM HIROSHI KUVABARA PEREIRA

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA

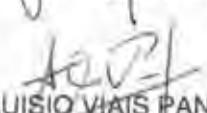
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA, Área: CIÊNCIAS TÉRMICAS, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. JOÃO BATISTA APARECIDO

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. ALUISIO VAIS PANTALEAO

Departamento de Engenharia Avançada / Vale Soluções em Energia

Data da realização: 24 de julho de 2010.

À minha família, e à
Viviane Lívero da Silva, amor da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a **Deus**, cuja fé sempre me motivou a persistir no caminho não importando quão oneroso se apresentasse, e pelo conhecimento que me proporcionou.

A todas as pessoas que me acompanharam nessa etapa de minha vida e que, podendo ou não estar próximas, direta ou indiretamente, colaboraram e foram igualmente importantes para a realização desse trabalho.

Aos colegas do curso de Engenharia Mecânica, em especial José Nassif Jr., Edilson Guimarães, Fernando Henrique Dib, Ricardo Mesquita, Rodnei Passolongo, Rogério Kimura e Thomaz Ernesto, por todo o apoio e cooperação no desenvolvimento da pesquisa e também pelos momentos de convívio e descontração que foram fundamentais.

Aos amigos de República, Alysson Tavares, Bruno do Vale Silva, Marcos Onofre de Vita e Thiago Antonini Alves, com os quais compartilhei bons anos de minha vida e agradeço pela amizade, paciência, companheirismo e pelos momentos inesquecíveis.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pelo apoio financeiro na forma de bolsa de Mestrado.

Ao Prof. Dr. Cássio Roberto Macedo Maia, orientador de graduação e estimado amigo, pelos valiosos ensinamentos e boas lições de vida proporcionadas.

Ao Prof. Dr. Ricardo Alan Verdú Ramos, pela generosidade no fornecimento de suporte físico através de empréstimo de computadores necessários no auxílio do processamento da pesquisa.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. João Batista Campos Silva, que aceitou me orientar durante o mestrado, por toda a sabedoria e paciência em fornecer os conhecimentos necessários, pela dedicação e apoio nos momentos de dificuldade, e acima de tudo, por colaborar com meu desenvolvimento intelectual e humano.

Aos Profs. Drs. Aluisio Viais Pantaleão e João Batista Aparecido por aceitarem participar de minha banca de defesa e pelas sugestões de correção e ensinamentos valiosos.

A todo o corpo docente e aos funcionários da Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, que de alguma forma deram suporte para o trabalho.

Por último, mas não menos importante, meu eterno agradecimento aos meus pais José Pereira (in memoriam) e Tereza Sanae Kuvabara Pereira, pela vida, amor, carinho, apoio e incentivo que sempre estiveram presentes em seus gestos e palavras. E à minha querida namorada Viviane Lívero da Silva, que em palavras não consigo descrever todo o amor, carinho e dedicação demonstrados e que, junto com meus e seus pais, me forneceu toda a força para que eu atingisse e conquistasse meus objetivos.

Enfim, a todos que de certa forma colaboraram para a realização dessa dissertação de mestrado, o meu muito obrigado e minha eterna gratidão.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”.

Charles Chaplin

Resumo

PEREIRA, William Hiroshi Kuvabara. **Simulação numérica de escoamentos de fluidos com efeitos de rotação**. 2012. 193 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista- UNESP, Ilha Solteira, 2010.

Neste trabalho foram realizadas simulações numéricas de escoamentos viscosos, incompressíveis e transientes com efeitos de rotação em um sistema não-inercial de referência, por meio do método de elementos finitos por volumes de controle; com a metodologia de simulação de grandes escalas (LES) para a modelagem da turbulência. Os domínios de cálculo foram discretizados utilizando elementos finitos quadrilaterais de nove nós e as equações são integradas em volumes de controle ao redor dos nós dos elementos finitos. Com a aplicação da metodologia de simulação de grandes escalas (LES), as equações governantes passam por um processo de filtragem e assim as maiores escalas são resolvidas diretamente pela solução das equações de Navier-Stokes filtradas, enquanto as escalas menores são modeladas pelo modelo de viscosidade turbulenta de Smagorinsky. Alguns casos de escoamentos bidimensionais nas variáveis primitivas u , v e p aplicados às máquinas de fluxo, tanto axiais, como radiais, foram realizados para estudar o efeito das acelerações centrípeta e de Coriolis, por meio do adimensional número de rotação Ro , e das instabilidades geradas nos escoamentos.

Palavras-chave: Método de elementos finitos. Equações de Navier-Stokes. Simulação de grandes escalas de turbulência. Máquinas de fluxo. Aceleração centrípeta. Aceleração de Coriolis.

Abstract

PEREIRA, William Hiroshi Kuvabara. **Numerical simulation of fluid flows with rotation effects**. 2012. 193 f. Dissertation (Mechanical Engineering M. Sc.)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista- UNESP, Ilha Solteira, 2010, Ilha Solteira

In this work it has been done numerical simulations of viscous transient incompressible fluid flows with rotation effects in a non inertial system of reference, by the control volume based finite element method; with the methodology of large-eddy simulation (LES) to model turbulence. The domains of calculation are discretized in quadrilateral finite elements with nine nodes and the equations are integrated in control volumes around the node of the finite elements. By the application of LES, the governing equations are filtered and this way the large scales are directly solved by the solution of the filtered Navier-Stokes equations, while the sub-grid scales are modeled by the eddy viscosity model of Smagorinsky. Some cases of two-dimensional flows in primitive variables u , v and p applied to axial and radial turbomachines were simulated to analyze the effect of the centripetal and Coriolis accelerations, considering the dimensionless number of rotation and the instabilities generated in the flows.

Keywords: Finite element method. Navier-stokes equations. Large-eddy simulation. Turbomachines. Centripetal acceleration. Coriolis acceleration.

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Região de interesse do escoamento e sistemas de referência inercial e móvel ...	33
Figura 2.2 - Tratamento de estruturas das grandes e pequenas escalas da turbulência com LES Fonte: Schafer (2006).	39
Figura 2.3 - Função $f(x)$ e sua componente filtrada.....	40
Figura 2.4 - Esquema unidimensional do filtro	41
Figura 3.1 - Domínio discretizado em triângulos e quadriláteros.	47
Figura 3.2 - Elementos subdivididos em subvolumes de controle de formas diferentes.	48
Figura 3.3 - Subvolumes de controle compondo um elemento quadrilateral de nove nós.....	56
Figura 3.4 - Mapeamento do elemento no sistema global para o sistema local.	60
Figura 3.5 - Arranjo das variáveis u , v e p localmente num elemento.	64
Figura 3.6 - Elemento subdividido em volumes de controle.....	66
Figura 3.7 - Definição de frente e nomenclatura usada no método frontal.....	68
Figura 3.8 - Ilustração da formação do índice das variáveis na matriz global.	68
Figura 3.9 - Formação do vetor do índice global do primeiro grau de liberdade por nó	69
Figura 3.10 - Formação do vetor do número de graus de liberdade por nó	69
Figura 3.11 - Estrutura do programa computacional.....	72
Figura 4.1 - Perfil de uma palheta do rotor turbina VKI T152.....	74
Figura 4.2 - Cascata de palhetas no rotor e no estator da turbina VKI T152	75
Figura 4.3 – Seção de passagem do escoamento entre duas palhetas consecutivas para turbina VKI T152.....	75
Figura 4.4 – Ampliação nas regiões problemáticas para geração da malha.....	76
Figura 4.5 – Domínio final com as simplificações necessárias adotadas.....	77
Figura 4.6 - Esquema do domínio com as condições de contorno impostas em referencial não-inercial	78
Figura 4.7 - Malha de elementos quadriláteros.	80
Figura 4.8 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,5$	81
Figura 4.9 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,25$	81
Figura 4.10 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$	82
Figura 4.11 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 1,0$	83
Figura 4.12 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 2,0$	83

Figura 4.13 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$	84
Figura 4.14 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 0,5$	85
Figura 4.15 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 1,25$	85
Figura 4.16 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$	86
Figura 4.17 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,6$	86
Figura 4.18 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$	87
Figura 4.19 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,8$	87
Figura 4.20 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$	88
Figura 4.21 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$	89
Figura 4.22 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 1,6$	89
Figura 4.23 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$	90
Figura 4.24 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 0,6$	91
Figura 4.25 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$	91
Figura 4.26 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 1,8$	92
Figura 4.27 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$	92
Figura 4.28 - Corte normal de uma turbina radial tipo Francis.....	93
Figura 4.29 - Definição dos parâmetros geométricos.....	94
Figura 4.30 - Subdivisão da geometria para pré-processamento.....	95
Figura 4.31 - Malha de 2840 elementos geradas no pré-processamento com auxílio do ANSYS	95
Figura 4.33 - Condições de contorno para o caso de máquina radial.....	97
Figura 4.34 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,02$	100
Figura 4.35 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,1$	100
Figura 4.36 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,5$	101
Figura 4.37 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,04$	101
Figura 4.38 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,1$	102
Figura 4.39 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,5$	102
Figura 4.40 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,04$	103
Figura 4.41 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,1$	104
Figura 4.42 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 106$ e $t = 0,5$	104
Figura 4.43 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,04$	105
Figura 4.44 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 106$ e $t = 0,1$	105
Figura 4.45 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,5$	106

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 - Significado de parâmetros presentes na adimensionalização.....	45
Tabela 3.1 - Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com quatro nós.....	55
Tabela 3.2 - Funções de interpolação e suas derivadas para elementos com nove nós.....	56
Tabela 4.1 - Parâmetros geométricos utilizados na composição do domínio.....	77
Tabela 4.2 – Casos simulados para a máquina radial.	99

Lista de Símbolos e Siglas

Letras Latinas

a	aceleração da partícula em relação ao referencial não inercial
A	área de um volume de controle
A_i	aceleração da partícula em relação ao referencial inercial
C_s	constante de Smagorinsky
$\frac{d()}{dt}$	derivada com relação ao tempo
$\frac{D()}{Dt}$	derivada material com relação ao tempo
f	função genérica a ser filtrada
$\overline{f}$	componente representativa das grandes escalas da turbulência
f'	componente representativa das pequenas escalas da turbulência
g_i	aceleração da gravidade
$G(\vec{x} - \vec{x}')$	função filtro
J	Matriz jacobiana da transformação
k	energia cinética turbulenta
L	Comprimento característico
N_α	função de interpolação para o espaço
$N_{\alpha'}$	função de interpolação para pressão
p	pressão dimensional

P	pressão adimensional
R	posição de um ponto em relação a um referencial inercial
Re	número de Reynolds
Ro	número de rotação
r	posição da partícula em relação ao sistema não inercial
S_{u_i}	termo fonte na equação de quantidade de movimentação na direção x_i
$\bar{S}_{ij}$	taxa de deformação
$t = \frac{t^D w_0}{L}$	tempo adimensional
T	temperatura
u	componente da velocidade dimensional na direção do eixo x
U_i	componente de velocidade adimensional em notação tensorial cartesiana na direção do eixo X_i
V	volume de um elemento de controle
V_i	velocidade da partícula
w_i	Componente da velocidade relativa do escoamento ao longo do eixo x_i
x_i	abscissa no sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial
$X_i = \frac{x_i}{L}$	eixos do sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial

Letras Gregas

α	aceleração de Coriolis
ξ	abscissa do sistema de coordenadas local no elemento de referência
$\frac{\partial()}{\partial t}$	derivada parcial com relação ao tempo
Δ	espessura do filtro
δ_{ij}	delta de Kronecker
ε_{ijk}	tensor alternante da notação indicial de Einstein
ϕ	variável qualquer na equação de transporte de um escalar
η	ordenada do sistema de coordenadas local no elemento de referência
ρ	massa específica

μ	viscosidade dinâmica
μ_e	viscosidade dinâmica efetiva
μ_t	viscosidade turbulenta
ν	viscosidade cinemática
ν_e	viscosidade cinemática efetiva
ν_t	viscosidade cinemática turbulenta
τ_{ij}	tensões viscosas
Γ_{ij}	tensor de Reynolds submalha
θ	caracteriza o caso utilizado na discretização do tempo
ω	velocidade angular
ω_j	componente da velocidade angular de rotação do escoamento em torno do eixo x_j
$\vec{\nabla}$	vetor gradiente
Φ	função potencial
Ω_i	Componente adimensional da velocidade angular de rotação do escoamento em torno do eixo x_i

Índices Superiores

e	refere-se a uma variável para o elemento
M	a derivada é em relação ao sistema não inercial
n	significa a grandeza avaliada no tempo t
$n+1$	significa a grandeza avaliada no tempo $t + \Delta t$
$*$	indica variável dimensional

Índices Inferiores

i, j, k	representam a direção do eixo no sistema de coordenadas
α	índice que indica o número do nó local ou do subvolume de controle num elemento.
β	representa a função de interpolação associada ao nó de um elemento
0	representa uma variável ou propriedade num estado de referência T_0

O variável refere-se à origem do sistema não inercial

Abreviações

CFD - Dinâmica de Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics*)

CVFDM – Método de Diferença Finitas baseado em Volume de Controle (*Control Volume Finite Difference Method*)

CVFEM – Método de Elementos Finitos baseado em Volume de Controle (*Control Volume-Finite Element Method*)

DNS – Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation*)

FDM – Método de Diferença Finitas (*Finite Difference Method*)

FEM – Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method*)

FVM - Método de Volumes Finitos (*Finite Volume Method*)

GFEM – Método de Elementos Finitos de Galerkin (*Galerkin Finite Element Method*)

LDV – *Laser Doppler Velocimetry*

LES – Simulação de Grandes Escalas (*Large Eddy Simulation*)

LSFEM – Método dos Mínimos quadrados dos Elementos Finitos (*Least Squares Finite Element Method*)

MWR – Método de Resíduos Ponderados (*Method of Weighted Residuals*)

RANS – Equação Médias de Reynolds (*Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*)

Siglas

ASME – Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos (*American Society of Mechanical Engineers*)

DEM – Departamento de Engenharia Mecânica

FEIS – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

NASA - Agência Espacial Norte Americana (National Aeronautics and Space Administration).

UNESP – Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL	17
1.2	MÉTODOS NUMÉRICOS	19
1.3	SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS.....	22
1.4	OBJETIVOS DO TRABALHO.....	25
1.5	REVISÃO DA LITERATURA	26
2	MODELO MATEMÁTICO	32
2.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	32
2.1.1	Escoamentos com Efeito de Rotação	32
2.2	METODOLOGIA DE SIMULAÇÃO DA TURBULÊNCIA: LES.....	38
2.2.1	Processo de Filtragem das Equações e de Separação das Escalas	39
2.2.2	Modelagem Submalha da Turbulência: Modelo de Smagorinsky	42
2.3	ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS.....	44
3	MODELO NUMÉRICO	47
3.1	DISCRETIZAÇÃO DOS DOMÍNIOS PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS	47
3.2	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	49
3.2.1	Discretização no Tempo	49
3.2.2	Discretização Espacial das Equações - Aplicação de um Método de Elementos Finitos por Volumes de Controle (CVFEM)	51
3.3	FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	54
3.4	CÁLCULO DAS MATRIZES NOS ELEMENTOS.....	59
3.5	SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DISCRETIZADAS	66
3.6	ESTRUTURA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL	70
3.6.1	DIMENS	70
3.6.2	DINPUT	70
3.6.3	DRIVES	70
3.6.4	ITERAT	71
4	RESULTADOS	73
4.1	ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL COM EFEITO DE ROTAÇÃO SOBRE AS PÁS DE UMA TURBINA AXIAL.....	73
4.1.1	Geometria e Condições de Contorno.....	74

4.1.2	Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^4$	81
4.1.3	Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^5$	86
4.2	ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL COM EFEITO DE ROTAÇÃO SOBRE AS PÁS DE UMA TURBINA RADIAL.....	93
4.2.1	Geometria e Condições de Contorno.....	93
4.2.2	Condições de Contorno.....	97
4.2.3	Equações particulares para o caso proposto	97
4.2.4	Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^5$	99
4.2.5	Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^6$	103
5	CONCLUSÕES	107
6	REFERÊNCIAS	109
	APÊNDICE A – FIGURAS DE RESULTADOS PARA A TURBINA AXIAL	116
A.1	- RESULTADOS DA SIMULAÇÃO PARA O CASO DE $Re = 10^4$	116
A.1.1	- NORMA DA VELOCIDADE RELATIVA $\ \vec{W}\ $	116
A.1.2	- COMPONENTE U DA VELOCIDADE RELATIVA	123
A.1.3	- LINHAS DE CORRENTE.....	129
A.1.4	- CAMPO DE PRESSÃO	136
A.2	- RESULTADOS DA SIMULAÇÃO PARA O CASO DE $Re = 10^5$	142
A.2.1	- NORMA DA VELOCIDADE RELATIVA $\ \vec{W}\ $	142
A.2.2	- COMPONENTE U DA VELOCIDADE RELATIVA.....	150
A.2.3	- LINHAS DE CORRENTE	158
A.2.4	- CAMPO DE PRESSÃO.....	166
	APÊNDICE B – FIGURAS DE RESULTADOS PARA A TURBINA RADIAL	175
B.1	- RESULTADOS DA SIMULAÇÃO PARA O CASO DE $Re = 10^5$	175
B.1.1	- NORMA DA VELOCIDADE RELATIVA $\ \vec{W}\ $	175
B.1.2	- COMPONENTE U DA VELOCIDADE RELATIVA.....	180
B.2	- RESULTADOS DA SIMULAÇÃO PARA O CASO DE $Re = 10^6$	184
B.2.1	- NORMA DA VELOCIDADE RELATIVA $\ \vec{W}\ $	185
B.2.2	- COMPONENTE U DA VELOCIDADE RELATIVA.....	189

1 Introdução

1.1 Dinâmica dos Fluidos Computacional

O escoamento dos fluidos desperta o interesse do homem desde seus tempos remotos devido a sua presença em muitos fenômenos da natureza e em grande parte de processos de aplicação nos campos da física e engenharia.

Historicamente, a mecânica dos fluidos preocupou-se em estudar esses movimentos experimentalmente muito antes do que matematicamente (FORTUNA, 2002), uma vez que a descrição matemática de tais fenômenos só foi possível após uma série de esforços de vários cientistas, que culminou no século XIX nas equações de Navier-Stokes. No entanto, como tais equações são caracterizadas por serem equações diferenciais não lineares aplicadas às mais diversificadas configurações de geometria ou domínios, a solução analítica das equações de Navier-Stokes só pode ser aplicada em alguns poucos casos simples e idealizados.

Por esse motivo que, além de se valer dos métodos analíticos, cientistas e pesquisadores que estudam os fenômenos de transporte e transferência de calor utilizam as técnicas experimentais e os métodos numéricos como outras ferramentas de abordagem em seus estudos.

A grande vantagem do uso da metodologia experimental é o fato de tratar com a configuração real do problema, entretanto, o fenômeno em estudo nem sempre é passível de reprodução em laboratório, pode ser de altíssimo custo e muitas vezes não pode ser realizado por questões de segurança, como é o caso da transferência de calor no núcleo de reatores nucleares (MALISKA, 1995).

Por volta da década de 1960, o advento de computadores, mesmo que ainda com capacidades de processamento limitadas, proporcionaram uma revolução no modo de aplicação dos princípios de mecânica dos fluidos e transferência de calor nos projetos de engenharia. Na década atual, com as capacidades de processamento muito superiores às iniciais, os problemas podem ser resolvidos a um custo baixo, em poucos segundos de tempo computacional, enquanto poderiam levar anos para serem resolvidos com os métodos computacionais antecessores.

Temos testemunhado, nas últimas décadas, o crescimento da importância de novas metodologias de ataque à problemas complexos na mecânica dos fluidos e transferência de calor às quais tem se tornado conhecidas como Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD - *Computational Fluid Dynamics*).

A Dinâmica dos Fluidos Computacional utiliza os métodos computacionais para analisar problemas com sistemas que envolvam escoamento de fluidos e/ou transferência de calor e massa utilizando os métodos numéricos em simulações baseadas no computador.

Entre alguns exemplos de aplicação do CFD dados por Versteeg e Malalasekera (1995), estão: aerodinâmica de aeronaves e veículos (sustentação e arraste); hidrodinâmica de navios; usina de energia: combustão em motores e turbinas a gás; turbomáquinas; difusores; engenharia elétrica e eletrônica: arrefecimento dos equipamentos; engenharia de processo químico: mistura e separação, moldagem de polímeros; engenharia naval: cargas em estruturas *off-shore*, entre outros.

Pode-se citar diversas razões que levaram ao crescimento do interesse de cientistas e engenheiros a desenvolverem estudos nesta área (LÖNER, 2001):

- **necessidade de prever o comportamento de um determinado produto**, pois defeitos não visíveis podem causar falhas e ter efeito devastador sobre o produtor;
- **o custo de um experimento pode ser muito alto**, por exemplo, um teste subterrâneo de um artefato nuclear custaria, aproximadamente, U\$ 10⁸;
- **alguns experimentos podem ser proibitivos**, ou por não serem passíveis de reprodução em laboratório, ou por terem alto risco, como por exemplo, situações biomédicas;
- **a introspecção é uma das grandes vantagens do CFD**, pois simulações numéricas podem, em determinadas aplicações, fornecer mais informações sobre o escoamento do que os experimentos. Quando comparamos, por exemplo, uma malha com 2x10⁷ pontos, podemos dizer que é equivalente à um experimento com 2x10⁷ sensores ou instrumentos de medida;

Tradicionalmente, ambos os métodos experimentais e teóricos têm sido utilizados para desenvolver projetos para equipamentos e veículos envolvendo escoamento de fluidos e

transferência de calor. Com o advento do computador digital, um terceiro método, a aproximação numérica, se tornou disponível. Embora a experimentação continue a ser importante, principalmente quando estão envolvidos escoamentos muito complexos, a tendência evidente aponta para a maior confiabilidade nas previsões baseadas no computador nos projetos de engenharia (ANDERSON; TANNEHILL; PLETCHER, 1984).

1.2 Métodos Numéricos

Segundo Saabas (1991), a simulação computacional de escoamentos de fluidos requer:

- 1) Um modelo matemático do problema físico, o qual deve incluir equações diferenciais, modelos de turbulência e condições de contorno que reflitam a distribuição das variáveis dependentes desconhecidas na região de interesse;
- 2) Um método numérico para a solução do modelo matemático em domínios de formas regulares e irregulares, e;
- 3) Uma implementação do método numérico.

O modelo matemático em conjunto com um procedimento de solução numérica é conhecido como modelo numérico.

A dinâmica dos fluidos computacional (CFD) tem como ferramenta os métodos numéricos para o cálculo das variáveis desconhecidas pertinentes aos escoamentos em pontos do domínio físico, geralmente denominados de pontos nodais, ou simplesmente nós. Os principais métodos utilizados nas simulações numéricas de escoamentos de fluidos são (CAMPOS-SILVA, 1998): Método de diferenças finitas (FDM - *Finite Difference Method*); Métodos de Diferenças Finitas baseado em Volumes de Controle (CVFDM - *Control Volume Finite Difference Method*); Método de Volumes Finitos (FVM - *Finite Volume Method*); Métodos de Elementos Finitos (FEM - *Finite Element Method*) e Métodos de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle (CVFEM - *Control Volume-Finite Element Method*). Na realidade, todos estes métodos numéricos derivam de um único método conhecido como Método de Resíduos Ponderados (MWR - *Method of Weighted Residuals*), sendo diferenciados matematicamente pela função de ponderação ou, simplesmente, função

peso aplicada na anulação do resíduo. Alguns comentários sobre os principais métodos utilizados para cálculos de escoamentos de fluidos são feitos a seguir.

A aplicação do método de diferenças finitas para resolver equações diferenciais ordinárias iniciou-se aproximadamente na virada do século XIX. Atualmente tem sido utilizado para o cálculo de escoamentos de fluidos, transferência de calor, nas áreas de eletrotécnica e eletrônica, observando-se os trabalhos publicados nas áreas. No entanto, vários autores afirmam que uma limitação deste método está na discretização de domínios com complexidade geométrica, problema este que pode ser parcialmente resolvido pelo uso de malhas não-ortogonais.

Um método apresentado por Patankar (1980); denominado na literatura de método de volumes finitos (FVM), também chamado por muitos autores de método de diferenças finitas baseado em volumes de controle (CVFDM), constitui-se hoje em um dos principais métodos para análise numérica de escoamentos e transferência de calor. A característica principal deste método é a fácil interpretação física dos termos das equações em termos de fluxos, fontes e forças, devido ao fato da formulação resultante ser de natureza conservativa uma vez que tal formulação é obtida através dos princípios de conservação. O método de volumes de controle com malhas ortogonais e não-ortogonais em coordenadas generalizadas, para o tratamento de geometrias irregulares, tem sido implementado por vários grupos de pesquisa e aplicado na solução de problemas de escoamentos e transferência de calor, (CAMPOS-SILVA, 1998).

Apresentado no fim da década de 1950 na indústria aeronáutica, o método de elementos finitos emergiu como uma dos mais poderosos métodos numéricos até então concebidos. Entre os atributos básicos do método que levaram à sua aceitação e utilização para os problemas mais generalizados está à facilidade de modelagem em geometrias complexas, o tratamento consistente de condições de contorno do tipo diferencial e a possibilidade de ser programado em um formato flexível e de propósito geral. O sucesso do método de elementos finitos aplicado à mecânica estrutural, condução de calor e outros problemas do tipo potencial, no início da década de 1970, provocou um grande ímpeto para a utilização do método na simulação de problemas na dinâmica dos fluidos. Daquela época para cá sofreu algumas reformulações e, após a inserção do método na área, pode-se encontrar uma vasta literatura devotada à teoria e aplicação do mesmo, (DATT; TOUZOT, 1984).

A principal dificuldade era devido à presença de operadores de convecção na formulação de problemas de fluxo com base em descrições cinemáticas além da Lagrangeana. Operadores de convecção são, na verdade, não-simétricos e, portanto, a propriedade de melhor aproximação na norma de energia do método de Galerkin, que é a base para o sucesso em casos simétricos, são perdidos quando a convecção domina o processo de transporte. Para superar essa dificuldade, o método de elementos finitos tem sido combinado com técnicas de *upwind*, que procuram adequá-lo para o cálculo de escoamentos de fluidos e transferência de calor para altos números de Reynolds e de Péclet, e atualmente este método é também muito utilizado para simulação numérica tanto de escoamentos laminares quanto turbulentos e/ou transferência de calor. De forma bastante sucinta, o termo *upwind* denomina uma técnica especial de discretizar os termos convectivos das equações de transporte, em problemas nos quais predomina a convecção, de forma que a influência do escoamento à montante tem mais peso sobre os coeficientes da matriz das equações discretizadas. O objetivo é eliminar coeficientes negativos nas equações algébricas que podem levar a resultados sem significado físico. O presente trabalho não utiliza tal técnica.

O método de elementos finitos clássico é conhecido como método de elementos finitos de Galerkin. Outra variante do método de elementos finitos é conhecida como método de elementos finitos de mínimos quadrados (LSFEM – *Least Squares Finite Element Method*). Neste trabalho, é abordada uma terceira vertente do método de elementos finitos conhecida como Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle (CVFEM) ou também conhecido como Método de Subdomínios. No presente trabalho será utilizado o termo CVFEM.

Segundo Saabas (1991), CVFEM oferece uma combinação da flexibilidade geométrica do FEM e a fácil interpretação física associada com o Método de Volumes Finitos (FVM).

A formulação de CVFEM envolve cinco passos básicos, Saabas (1991):

- 1) A discretização do domínio de cálculo em elementos e uma discretização adicional em volumes de controle associados com os nós dos elementos;
- 2) A prescrição de funções de interpolação apropriadas baseadas nos elementos para as variáveis dependentes;
- 3) Derivação de equações discretizadas, que são aproximações algébricas das equações diferenciais governantes;

- 4) Uma montagem de elemento por elemento das equações discretizadas;
- 5) Prescrição de um processo para resolver as equações discretizadas resultantes.

A aplicação de um método numérico também pode ser dividida em três etapas principais, as quais, na nomenclatura do método de elementos finitos, são: pré-processamento, processamento e pós-processamento. A etapa de pré-processamento envolve os seguintes procedimentos: definição da geometria da região de interesse ou domínio físico do problema: o domínio computacional; geração da malha: onde ocorre a discretização do domínio por subdivisão do mesmo através de algum tipo de elemento definido; definição das propriedades do fluido, além da especificação das condições iniciais e de contorno apropriadas. Na fase de processamento, aplica-se um “solver” (nome usado na literatura para programas numéricos), onde ocorrem os seguintes passos: aproximação das variáveis desconhecidas do escoamento (velocidade, pressão, temperatura) por meio de funções simples; discretização por substituição das aproximações nas equações conservativas do escoamento e subsequentes manipulações matemáticas; solução das equações algébricas resultantes. Na etapa de pós-processamento os resultados são analisados para se verificar a validade do modelo numérico, geralmente através de ferramentas de visualização gráfica, onde é possível gerar figuras mostrando os vetores de velocidade do escoamento, ou mesmo uma visualização dos campos de pressão ou temperatura ou qualquer variável de interesse através de uma escala de cores. Uma vez validado o “solver”, pode-se aplicá-lo para o projeto de modelos de equipamentos onde ocorrem os escoamentos. A seguir será apresentada uma breve descrição de metodologias aplicadas à simulação de escoamentos turbulentos e posteriormente serão definidos os objetivos principais do trabalho.

1.3 Simulação de Escoamentos Turbulentos

Em vários ramos da mecânica dos fluidos, nosso entendimento é inibido pela presença de turbulência. Embora muitos estudos experimentais e teóricos tenham contribuído para aumentar significativamente a nossa compreensão física, uma teoria abrangente e de previsão dos fluxos turbulentos ainda não foi estabelecida. Portanto, a previsão de fluxo turbulento depende fortemente de estratégias de simulação. O desenvolvimento de métodos confiáveis para o cálculo do fluxo turbulento terá um impacto significativo sobre uma variedade de avanços tecnológicos. Estes vão desde o design de automóveis e aviões, para turbomáquinas,

câmaras de combustão, e engenharia de processos. Um desenvolvimento histórico detalhado sobre a turbulência pode ser encontrado em Freire (2002).

A turbulência pode ser definida como sendo um regime de operação a que pode estar submetido um sistema dinâmico com elevado número de graus de liberdade. Dentre esses sistemas dinâmicos podem se enquadrar os escoamentos de fluidos a elevados números de Reynolds, considerados os mais complexos e mais espetaculares fenômenos encontrados na natureza (SILVEIRA NETO, 2002).

As características da turbulência segundo, Silveira-Neto (2002, 2003) e Tejada-Martínez (2002) são:

1) Os escoamentos turbulentos são tridimensionais, são rotacionais, irregulares e randômicos, no sentido de que a velocidade varia randomicamente com o tempo;

2) Ocorrem a altos números de Reynolds. O número de Reynolds representa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas do escoamento;

3) São fortemente dissipativos, ou seja, há continuamente conversão de energia cinética em energia interna. Assim, a turbulência decai se não houver energia sendo fornecida continuamente;

4) São caracterizados pelo amplo espectro de escalas de movimento diferentemente dos escoamentos laminares, os quais tem poucas escalas. Tais escoamentos apresentam uma série de estruturas turbilhonares que podem variar desde o tamanho do domínio até muitas ordens de magnitude menores. Esses vórtices distribuem-se segundo um espectro de frequências. Vórtices maiores têm frequência menor e os menores têm frequências maiores;

5) São fortemente difusivos. As flutuações de velocidade na turbulência resultam em taxas de transferência de quantidade de movimento, calor e massa (ou qualquer outra propriedade escalar) que podem ser muitas ordens de magnitude maiores do que aquelas devido ao transporte molecular (ou difusão molecular). De fato, quando porções de fluido deslocam-se em vórtices, levam consigo suas propriedades transportando-as para outra região do escoamento. Neste sentido, o transporte de propriedades pelos vórtices turbulentos é análogo ao transporte difusivo molecular, mas em escala muito maior;

6) A turbulência é característica de escoamentos e não de fluidos. Se o número de Reynolds é suficientemente alto, a maioria das dinâmicas associadas à menor escala na turbulência é a mesma para todos os fluidos. Em resumo, as características principais de escoamentos turbulentos não são controladas pelas propriedades da partícula do fluido.

O procedimento mais intuitivo de simulação que visa calcular a solução completa e transiente das equações de Navier-Stokes é conhecido como simulação numérica direta (DNS – *Direct Numerical Simulation*) da turbulência. DNS não envolve modelagem ou aproximação exceto sua natureza numérica e a princípio pode proporcionar soluções que possuem todas as características dinamicamente relevantes do escoamento. No entanto, foi constatado que para a abordagem ser capaz de resolver as pequenas escalas dos escoamentos turbulentos, seriam necessárias malhas suficiente refinadas para a obtenção de resultados coerentes com os fenômenos físicos presentes nas mesmas. Obviamente, este fato exigiria maior capacidade computacional devido ao elevado número de graus de liberdade a ser calculado e, portanto, tem aplicação apenas para os casos de baixos números de Reynolds.

Reynolds (1884), citado por Zachi (2006), iniciou uma reflexão sobre esse assunto e propôs um processo de decomposição das equações conservativas, de tal forma a se analisar o comportamento do escoamento e modelar suas flutuações. Essa decomposição conduz ao denominado *problema de fechamento da turbulência* (SILVEIRA NETO, 2002).

Esse processo de decomposição das equações governantes do escoamento deu origem à dois métodos de simulação da turbulência:

- a) Equações médias de Reynolds (RANS - *Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*), para as quais as escalas da turbulência são separadas nas escalas relativas ao comportamento médio e nas escalas relativas às flutuações em relação a essa média;
- b) Equações de Navier-Stokes filtradas (SMAGORINSKY, 1963), para as quais as escalas da turbulência são separadas em dois grupos, ou seja, o grupo das grandes escalas e o grupo das pequenas escalas.

A simulação das grandes escalas (LES - *Large Eddy Simulation*), como é conhecida a metodologia de Smagorinsky, a qual é utilizada neste trabalho, pode ser vista como uma metodologia intermediária entre a simulação direta e a simulação via equações médias de Reynolds. RANS tem custo computacional mais baixo que DNS, porém somente estruturas

maiores são resolvidas e as condições de contorno não são tão simples de serem impostas. A vantagem de LES sobre DNS é que, devido ao processo de separação das escalas e ao processo de modelagem dos tensores submalhas adicionais que aparecem, é possível resolver escoamentos a altos números de Reynolds.

Devido a essas características, LES tornou-se uma das mais promissoras metodologias de escoamentos turbulentos. Segundo Bogey et al. (2003) entre os três diferentes métodos, LES aparece como o mais interessante para aproximar uma ampla classe de escoamentos, uma vez que não é restrito a baixos números de Reynolds e, ao contrário do método RANS, uma parte importante das pequenas escalas pode ser calculada precisamente, se consideradas corretamente pela resolução da malha.

1.4 Objetivos do Trabalho

O presente trabalho tem como objetivo principal, simular escoamentos incompressíveis de fluidos viscosos, em regime transiente, com efeitos rotacionais em máquinas de fluxo, introduzindo modificações na metodologia de simulação de grandes escalas de turbulência introduzida por Lima (2005) no código computacional desenvolvido por Campos-Silva (1998).

Para tal simulação, será aplicado o método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM) no qual será empregado o elemento quadrilateral com nove nós para a discretização de domínios bidimensionais e obtenção de resultados em variáveis primitivas (u , v , p), para diferentes valores de número de Reynolds e de número de rotação do sistema de referência local (rotacional), comparando os efeitos que as acelerações centrípeta e de Coriolis pode causar no campo de escoamento no decorrer do regime transiente.

Os elementos finitos mais utilizados, segundo literatura pesquisada, no método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) para cálculos de escoamentos de fluidos são os elementos triangulares com três ou seis nós ou elementos quadrilaterais com quatro nós. O elemento finito quadrilateral de nove nós é caracterizado por conter três nós em cada uma das faces e um nó central. Neste elemento podem ser definidas funções de interpolação quadráticas que podem levar a melhores resultados do que com o uso de funções de interpolação lineares. Outra vantagem deste elemento é sua versatilidade geométrica, pois pode ser deformado para representar, de maneira mais precisa, contornos curvos de muitos

domínios com complexidade geométrica onde os escoamentos ocorrem. O uso de elementos finitos lineares pode comprometer a aproximação de contornos irregulares ou curvos se a malha não puder ser suficientemente refinada ou o elemento usado não for apropriado.

1.5 Revisão da Literatura

Durante esta revisão, serão relatados alguns trabalhos sobre o desenvolvimento e aplicação do método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) para a solução de problemas de escoamento de fluidos ou transferência de calor, como também, trabalhos relacionados à escoamento de fluidos em máquinas de fluxo que vêm sendo estudados nas últimas décadas.

Segundo Baliga e Patankar (1980), o desenvolvimento do método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) foi uma tentativa no sentido de preencher a necessidade de melhores métodos em problemas de convecção difusão; principalmente para o tratamento de geometrias complexas sem o uso de coordenadas generalizadas. Tentando combinar, dessa forma, a versatilidade do método de elementos finitos para discretizar geometrias irregulares por meio de malhas não estruturadas com as propriedades de conservação da formulação dos métodos de volume de controle.

Desde sua apresentação, o método passou por várias melhorias como mostrado nos trabalhos de Prakash e Patankar (1985), Prakash (1986), Hookey, Baliga e Prakash (1988a,b) e Schneider e Raw (1986, 1987a, b). A maior evolução foi verificada nos problemas bidimensionais, devido à dificuldade da análise de problemas tridimensionais. Os novos desenvolvimentos foram basicamente em funções de interpolação e introdução de técnicas de "upwind". Outros aspectos examinados foram quanto à ordem de interpolação da velocidade e da pressão. Quando se usa o mesmo número de nós de interpolação para estas variáveis, tem-se a chamada formulação de ordem igual ou de variáveis co-localizadas. Quando a interpolação de velocidade e pressão é feita por número de nós diferentes esta é chamada de interpolação por ordem desigual ou de variáveis desencontradas.

Prakash e Patankar (1987a,b) aplicaram o método para problemas de escoamentos parabólicos tridimensionais resolvendo casos de escoamentos em dutos de seção retangular e elíptica e num difusor de seção quadrada. Posteriormente, Forsyth (1991), Forsyth e Shao (1991) e Letniewski e Forsyth (1991) fizeram aplicações de escoamentos bidimensionais e

tridimensionais de contaminantes não aquosos na fase líquida (NAPL), em meios porosos. Neste tipo de problema, as equações resolvidas envolvem gradiente de pressão nas fases e as equações das fases estão acopladas através de uma grandeza chamada de porosidade.

Hafez (1995) fez uma combinação de elementos finitos com volumes finitos em malha não estruturada de elementos triangulares lineares, para calcular casos de escoamentos compressíveis e incompressíveis, resolvendo as equações de escoamentos potenciais de Euler e equações de Navier-Stokes. Esse autor utilizou o método de viscosidade artificial para evitar o desacoplamento entre velocidade e pressão e capturar ondas de choque. Termos transientes artificiais também foram introduzidos para garantir convergência para solução de regime permanente. As aplicações foram para escoamentos em torno de perfis aerodinâmicos.

Sobre as funções de interpolação utilizadas no método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM), Abbassi (2003) comparou a função de interpolação exponencial expressa no sistema de coordenadas local do elemento com a clássica função de interpolação linear expressa no sistema de coordenadas global para escoamentos bidimensionais de fluidos incompressíveis, mais especificamente o caso do vórtice de Green-Taylor, cuja solução analítica é conhecida, utilizando elementos triangulares para discretização do domínio. Foram comparadas, também, a estabilidade do processo numérico e a precisão das soluções.

Campos Silva (1998) utilizou a metodologia CVFEM para resolver escoamentos incompressíveis em domínios bidimensionais, sem utilizar modelos de turbulência, fazendo uso de uma malha estruturada formada por quadriláteros de nove nós. Foi utilizado o tipo de formulação mista para interpolação das variáveis, utilizando-se dois tipos de funções: as originais do elemento, as quais conduziram a resultados satisfatórios; e a técnica *upwind*, a qual se apresenta como uma alternativa, de forma a se evitar resultados espúrios.

Omri e Nasrallah (1999) apresentaram um estudo numérico de convecção mista transiente de escoamento laminar em uma cavidade com ar resfriado em que um fluido é injetado a uma temperatura inferior à temperatura inicial da cavidade. Neste trabalho, foi empregado o CVFEM usando elementos triangulares para discretizar as equações governantes. Para investigar a qualidade da ventilação e refrigeração, os campos dinâmico e térmico foram numericamente determinados para uma ampla faixa de número de Reynolds e

de Richardson e para diferentes localizações de entrada e saída e para os regimes transiente e permanente.

Na área de estudo sobre transferência de calor por radiação, Salah (2005) apresentou uma metodologia baseada na utilização do CVFEM e o uso da matriz formulação da Equação de Transferência Radiativa discretizada para predizer transferência de calor radiativa, onde mostra a vantagem da metodologia quando comparada com métodos antecessores no que diz respeito a evitar problemas na solução dos casos para geometrias complexas e quando ocorre dispersão e/ou superfícies de fronteira não-negras. Grissa et al. (2007) desenvolveu um algoritmo tridimensional para a transferência de calor radiativa em meios onde ocorre emissão, absorção e dispersão, utilizando uma aproximação baseada em CVFEM, pela primeira vez, segundo o autor, a análise tridimensional nos meios participantes.

Martinez (2005) comparou, através de análise de erro numérico, os métodos de CVFEM com o tradicional método de elementos finitos de Galerkin (GFEM) e o método de elementos finitos de Petrov-Galerkin usando *upwind* de linha de corrente, no contexto de processos de advecção-difusão de um escalar.

Na área de pesquisa em geologia, recentemente, Mello, Rodrigues e Rossa (2009) descreveram em seu trabalho um método de elementos finitos por volumes de controle tridimensional para resolver numericamente as equações diferenciais parciais governantes dos processos geológicos envolvidas na evolução de bacias sedimentares, em que tais processos incluem deposição e deformação de sedimentos, geração de hidrocarbonetos, escoamento de fluidos multifase, e transferência de calor em meios porosos deformáveis. Para discretizar as geometrias complexas foram utilizadas malhas tetraedrais não estruturadas.

Na área de pesquisa referente à escoamentos em máquinas de fluxos, algumas pesquisas foram realizadas no banco de periódicos da ASME, e alguns trabalhos relacionados ao presente trabalho podem ser citados.

Arnone e Swanson (1993) publicaram em seu trabalho um código computacional desenvolvido para solucionar as equações médias de Reynolds (RANS) e que foi aplicado usando malhas tipo H e C para escoamento através das pás, de perfil de arco bi circular, de turbinas a gás; o modelo de viscosidade de Baldwin-Lomax foi utilizado para o fechamento da turbulência. A integração no tempo foi feita baseada no esquema de Runge-Kutta explícita de quarta ordem. Por fim, os autores compararam os resultados com resultados experimentais.

No trabalho de Lee et al. (1993) foi desenvolvido um método preciso no tempo para o cálculo de escoamento potencial para escoamentos incompressíveis transientes através de uma grade de múltiplas fileiras lineares de pás. No método proposto, as superfícies do contorno são representadas pela distribuição de vórtices lineares e fontes de singularidades constantes sobre painéis discretos. Ajustaram uma coordenada local para cada objeto se movendo de forma independente e a esteira de vórtice da pá foi tratada em cada passo de tempo.

Dorney e Verdon (1994) modificaram uma análise das equações de Navier-Stokes para uma fila de múltiplas pás introduzindo uma análise não-linear para escoamentos invíscidos e viscosos e aplicou para prever escoamentos transientes excitados por distúrbios entrópicos, acústicos e causados por vórtices. Os resultados obtidos pela análise não linear foram comparados com os resultados analíticos e numéricos baseados na teoria do escoamento invíscido linearizado.

Arima et al. (1999) desenvolveu um código de simulação computacional para escoamentos viscosos tridimensionais em turbomáquinas baseado nas equações de Navier-Stokes compressíveis com média no tempo e o modelo $k-\epsilon$ de turbulência para baixo números de Reynolds. O código é usado para computar o campo de escoamento para dois rotores NASA e os resultados numéricos são comparados ao dados experimentais baseados em sonda aerodinâmica e medidas de anemômetro laser.

Höhn e Heinig (2000) procuraram enfatizar em seu trabalho o estudo da interação do escoamento transiente em uma turbina de baixa pressão de múltiplos estágios, aplicando um código computacional para resolver as equações de Navier-Stokes médias de Reynolds acurado no tempo. Para simulação da turbulência foi utilizado o modelo de uma equação de Spalart–Allmaras e para integração das equações conservativas no tempo foi feita através de um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem.

Sewall e Tafti (2008) desenvolverem um trabalho para prever com precisão o fluxo de calor e a transferência de calor no duto interno de resfriamento com nervuras de uma pá rotativa de turbina a gás utilizando LES como modelo de turbulência. Os cálculos foram feitos para números fixados de Reynolds e de rotação enquanto variou o parâmetro de empuxo entre quatro valores. Os resultados foram comparados com resultados experimentais anteriores.

Sarkar (2009) estudou o efeito das estruturas da esteira na evolução da camada limite sobre o lado de sucção de uma pá de turbina de baixa pressão com alta elevação utilizando

simulação de grandes escalas com um número de Reynolds baseado na corda axial e na velocidade de entrada. Os dados de esteira de características diferentes foram extraídos de um LES precursor de um escoamento através de um cilindro.

Matsunuma (2007) investigou experimentalmente o campo de escoamento transiente em um rotor de turbina anular usando o sistema LDV (*Laser Doppler Velocimetry*). Medições detalhadas da distribuição de velocidades, ângulo de escoamento, intensidade da turbulência foram realizadas para condições de número de Reynolds muito baixo. Os dados obtidos foram analisados de ambos os pontos de vista: de um sistema de referência absoluto (estacionário) e do sistema de referência relativo (rotacional).

Majidi (2005) utilizou uma análise me CFD para resolver o escoamento viscoso tridimensional e transiente em todo o rotor e estator de uma bomba centrífuga. Os resultados dos cálculos foram usados para predizer a interação rotor/estator e para obter a distribuição de pressão transiente no rotor e no invólucro da voluta. Com essa distribuição foi possível o cálculo da carga sobre as pás do rotor. Para tal processo, foi necessário utilizar múltiplos sistemas de referência e uma técnica de malha deslizante para considerar tal interação rotor/estator.

Sbardella e Imregun (2001) descreveram, em seu trabalho, a teoria e implementação numérica para um esquema tridimensional baseado em volumes finitos para solução das equações de Navier-Stokes médias de Favre transientes linearizadas para a aplicação em turbomáquinas. Para a discretização do domínio foi utilizada uma malha mista com elementos triangulares e quadrilaterais para casos bidimensionais e tetraedros, primas triangulares e hexaedros para casos tridimensionais. As equações de escoamentos viscosos transientes e linearizadas foram derivadas assumindo pequenas perturbações harmônicas de um escoamento permanente e as equações resultantes foram resolvidas usando uma técnica de falso tempo marchante.

Hall, Florea e Lanzkron (1995) propuseram uma nova técnica para a computação dos escoamentos transientes sobre cascatas de turbomáquinas. Começando com uma descrição da frequência do domínio CFD para escoamentos aerodinâmicos transientes, formaram um grande, esparso, generalizado problema de autovalor não-hermitiano que descrevessem os modos naturais e as frequências do movimento do fluido sobre a cascata. Posteriormente, usando algumas autofunções resultantes, construíram um modelo de ordem reduzida do

campo de escoamento transiente que possibilitou na estimativa da carga aerodinâmica sobre os perfis.

Estes são apenas alguns dos trabalhos que estão disponíveis no banco de dados do *International Journal of Turbomachinery* que procuram aplicar métodos CFD para escoamentos e transferência de calor sobre turbomáquinas, sejam eles compressíveis ou incompressíveis, analisando os mais diversos parâmetros do escoamento, utilizando modelos adequados de turbulência. Os trabalhos sobre o método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) aplicados a problemas ligados tanto as áreas de ciências térmicas quanto a outras como, por exemplo, geologia, meteorologia, materiais, estruturas, foram pesquisados no banco de dados da base *Compendex*.

2 Modelo Matemático

Neste capítulo, é apresentado o modelo matemático para a proposta de simulação de escoamentos incompressíveis com efeitos de rotação, em regime transiente, de fluidos viscosos. As equações foram escritas de forma a permitir tanto simulações de escoamentos em variáveis adimensionais, quanto variáveis dimensionais. Além disso, podem representar tanto a modelagem de escoamentos laminares quanto turbulentos, o que será demonstrado adiante na apresentação dos resultados para ambos os casos.

2.1 Formulação Matemática

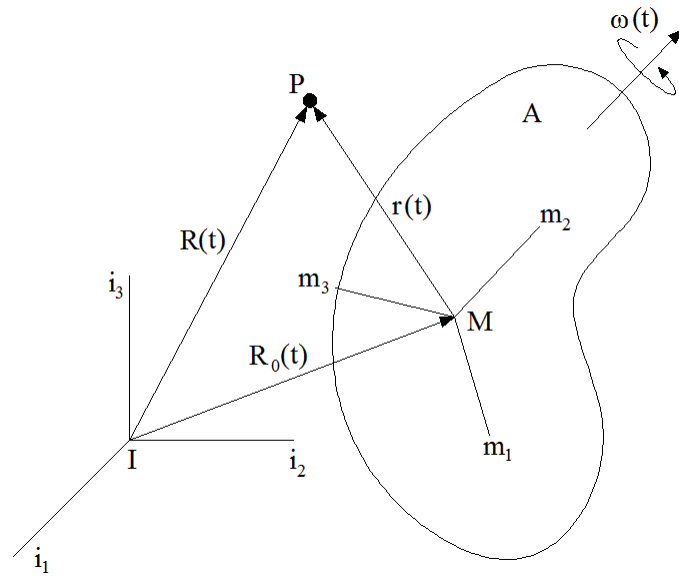
2.1.1 Escoamentos com Efeito de Rotação

Na análise de escoamentos com rotação baseados em uma formulação Euleriana da mecânica, a utilização de sistemas de referência auxiliares é, mais do que apenas vantajoso, muitas vezes essencial para o sucesso da análise.

Considere a Figura 2.1, onde A corresponde a uma região que delimita uma quantidade de fluido, e nesta região ocorrerá o escoamento de interesse. Tal região pode estar transladando e rotacionando relativo ao espaço inercial. Se por acaso, para a análise do escoamento fosse fixada uma malha Euleriana no sistema inercial, as equações de Navier-Stokes seriam válidas, no entanto a região contendo o fluido se moveria para dentro e para fora dos pontos da malha, e a análise se tornaria complicada. Em contrapartida, se assumirmos que uma malha Euleriana seja fixada em um sistema de referência da região móvel que seja não-inercial, as fronteiras da região fluida são facilmente definidas, no entanto, as equações de Navier-Stokes não podem ser usadas no sistema de referência não-inercial.

A dificuldade é resolvida usando uma malha fixada no sistema rotacional e então incluir termos nas equações de Navier-Stokes para compensar o fato da malha ser não-inercial. Tais termos são facilmente entendidos em termos de acelerações relativas de um ponto.

Figura 2.1 - Região de interesse do escoamento e sistemas de referência inercial e móvel



Fonte: Vanio (1993).

De acordo com Vanyo (1993), a posição de um ponto P, relativa a um sistema de referência não inercial que se move e gira em relação a um sistema de referência inercial, pode ser expressa como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_o + \mathbf{r} \quad (2.1)$$

A velocidade da partícula pode ser obtida, então, pela derivada da posição $\mathbf{R}$ em relação ao tempo, como a seguir.

$$\mathbf{Vi} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_o}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.2)$$

A derivada da posição do ponto no referencial móvel em relação ao sistema fixo pode ser obtida usando o operador genérico,

$$\frac{d(\quad)}{dt} = \frac{d^M(\quad)}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\quad) \quad (2.3)$$

em que $\frac{d^M(\quad)}{dt}$ indica derivada em relação ao sistema móvel. Desta forma, resulta,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^M \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.4)$$

A velocidade inercial ou absoluta do ponto P pode ser obtida, assim, como a soma da velocidade relativa, $\mathbf{w}$, da velocidade absoluta de translação da origem do sistema móvel, $\mathbf{V}_o$, e da velocidade tangencial, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, devido à rotação do sistema móvel no referencial fixo.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= \mathbf{w} + [\mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \\ \textbf{Inercial} &= \textbf{Local} + \textbf{Origem} + \textbf{Tangencial} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Da mesma maneira, a aceleração do ponto P relativa ao referencial fixo pode ser obtida pela derivada da velocidade $\mathbf{V}_i$ com relação ao tempo,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \frac{d\mathbf{V}_o}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ \mathbf{A}_i &= \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = \frac{d^M \mathbf{w}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} + \frac{d\mathbf{V}_o}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d^M \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{A}_i &= \mathbf{a} + [\mathbf{A}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}] \\ \textbf{Inercial} &= \textbf{Local} + \textbf{Origem} + \textbf{Centrípeta} + \textbf{Coriolis} + \textbf{Tangencial} \end{aligned} \quad (2.6)$$

A aceleração local $\mathbf{a}$, é simplesmente a derivada substancial tomada nesse sistema.

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \bar{\nabla}) \mathbf{w} \quad (2.7)$$

onde as variáveis e derivadas presentes acima são todas relativas ao referencial não inercial, dessa forma:

$$\mathbf{A}_i = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \bar{\nabla}) \mathbf{w} + \mathbf{A}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad (2.8)$$

Nas equações mostradas, $\mathbf{A}_o$, $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ definem o movimento do referencial não inercial, $\mathbf{r}$ representa os pontos da malha no mesmo referencial e $\mathbf{w}$, $\bar{\nabla}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ são todos termos relativos a este mesmo referencial.

A equação de quantidade de movimento, para um sistema com rotação apenas e sem variação da velocidade angular ($\mathbf{A}_o$ e α são desprezados), pode ser expressa na forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} \right) = \rho \mathbf{g} - \vec{\nabla} p^* + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.9)$$

A componente de força centrípeta ($\rho(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))$) pode ser embutida no termo de pressão, notando que a velocidade tangencial pode ser expressa como $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ e, portanto, $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \mathbf{u}$. Assim, se obtém que:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{u} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

Para provar tais igualdades, vamos supor que:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k} \quad e \quad \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (2.11)$$

A velocidade tangencial expressa por $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ fica da seguinte maneira.

$$\mathbf{u} = (\omega_2 z - \omega_3 y) \mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z) \mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x) \mathbf{k} \quad (2.12)$$

O produto vetorial correspondente à aceleração centrípeta pode então ser desenvolvido a partir da eq. (2.11) e (2.12), resultando em,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \\ &= [\omega_2 (\omega_1 y - \omega_2 x) - \omega_3 (\omega_3 x - \omega_1 z)] \mathbf{i} + \\ &+ [\omega_3 (\omega_2 z - \omega_3 y) - \omega_1 (\omega_1 y - \omega_2 x)] \mathbf{j} + \\ &+ [\omega_1 (\omega_3 x - \omega_1 z) - \omega_2 (\omega_2 z - \omega_3 y)] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.13)$$

O gradiente do produto escalar do vetor velocidade tangencial por ele mesmo, presente na eq. (2.10) pode ser desenvolvido também como:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = & 2[\omega_3(\omega_3 x - \omega_1 z) - \omega_2(\omega_1 y - \omega_2 x)]\mathbf{i} + \\ & + 2[\omega_1(\omega_1 y - \omega_2 x) - \omega_3(\omega_2 z - \omega_3 y)]\mathbf{j} + \\ & + 2[\omega_2(\omega_2 z - \omega_3 y) - \omega_1(\omega_3 x - \omega_1 z)]\mathbf{k}\end{aligned}\quad (2.14)$$

Desta forma:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = & [\omega_2(\omega_1 y - \omega_2 x) - \omega_3(\omega_3 x - \omega_1 z)]\mathbf{i} + \\ & + [\omega_3(\omega_2 z - \omega_3 y) - \omega_1(\omega_1 y - \omega_2 x)]\mathbf{j} + \\ & + [\omega_1(\omega_3 x - \omega_1 z) - \omega_2(\omega_2 z - \omega_3 y)]\mathbf{k}\end{aligned}\quad (2.15)$$

Assim, as equações (2.13) e (2.15) provam ser verdadeiras as igualdades da eq. (2.10).

Expressando a força de campo como o gradiente de alguma função potencial Φ , pode-se expressar o termo de pressão na forma:

$$\vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \left[p^* + \rho \Phi - \frac{1}{2} \rho (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right] \quad (2.16)$$

Nessa simplificação, p^* representa todas as pressões exceto aquelas causadas pelas forças de campo e/ou efeitos centrífugos.

A equação de quantidade de movimento pode então ser reescrita na forma

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{w} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.17)$$

Ou na forma conservativa

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + 2\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.18)$$

Em notação de índices, a equação de quantidade de movimento pode ser reescrita na forma,

$$\frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_j w_i)}{\partial x_j} + 2\rho \varepsilon_{ijk} \omega_j w_k = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.19)$$

Podemos também expressar a equação somente em termos das componentes da velocidade relativa, onde temos, para um fluido newtoniano:

$$\frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_j w_i)}{\partial x_j} + 2\rho \varepsilon_{ijk} \omega_j w_k = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2.20)$$

Em coordenadas cartesianas a equação de quantidade de movimento pode ser expandida, em 2D, como:

$$\frac{\partial(\rho w_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_1 w_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_2 w_1)}{\partial y} - 2\rho \omega_3 w_2 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial(\rho w_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_1 w_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_2 w_2)}{\partial y} + 2\rho \omega_3 w_1 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$$

Ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_1 w_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_2 w_1)}{\partial y} - 2\rho \omega_3 w_2 &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_1 w_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_2 w_2)}{\partial y} + 2\rho \omega_3 w_1 &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(2 \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

Na qual a pressão engloba os termos

$$p = p^* + \rho \Phi - \frac{1}{2} \rho \omega_3^2 (x^2 + y^2) \quad (2.23)$$

Nas Equações (2.17) a (2.22), foi demonstrado que podemos desenvolver uma formulação onde a componente de força devido à aceleração centrípeta pôde ser embutida na pressão, juntamente com as forças de campo, resultando em uma expressão para a pressão como nas Eqs. (2.16) e (2.23). No entanto, durante a aplicação das equações no capítulo 4, deixaremos de forma explícita as componentes de Coriolis e centrípeta da aceleração. Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_j w_i)}{\partial x_j} = \\ - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \right) - 2\rho \varepsilon_{ijk} \omega_j w_k - \rho(\omega_j x_j) \omega_i + \rho(\omega_j \omega_j) x_i \end{aligned} \quad (2.24)$$

Neste caso, a pressão englobará os termos

$$p = p^* + \rho\Phi \quad (2.25)$$

E, para completar o sistema de equações conservativas, temos também a equação da continuidade para escoamentos incompressíveis na forma conservativa e em notação tensorial.

$$\frac{\partial(\rho w_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.26)$$

2.2 Metodologia de Simulação da Turbulência: LES

Para simulação das escalas de turbulência nos escoamentos bidimensionais incompressíveis de fluidos newtonianos, em regime transiente com efeitos rotacionais, foi implementada a metodologia de simulação de grandes escalas (LES).

Os movimentos das grandes escalas são geralmente mais energéticos que o das pequenas; seu tamanho e força fazem delas transportadores muito mais eficientes das propriedades conservativas. As escalas menores são geralmente mais fracas e fornecem menor transporte dessas propriedades. Portanto, uma metodologia que trata as grandes escalas mais exatamente que as pequenas pode fazer sentido, e a simulação direta dos grandes turbilhões é apenas uma das abordagens.

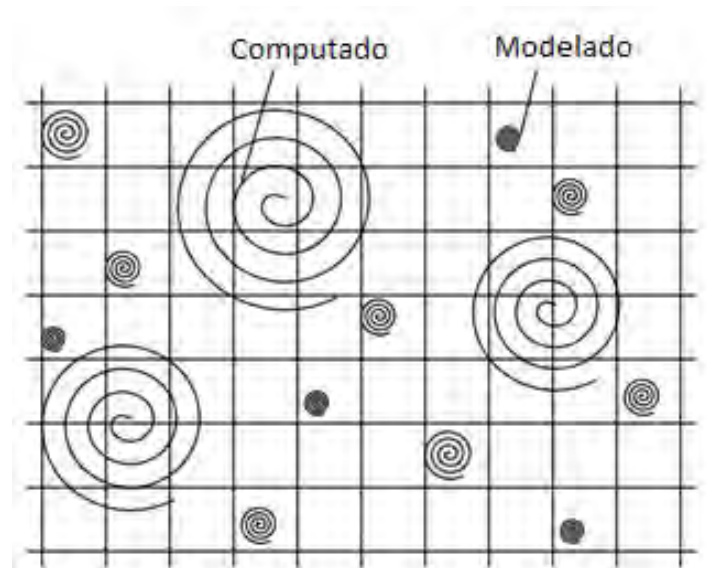
A idéia básica de LES é de submeter às variáveis do escoamento por um processo de filtragem que separa as escalas, computando diretamente os termos filtrados das grandes escalas de turbulência, que podem ser resolvidas usando as equações do movimento para a atual malha numérica e modelar as estruturas de pequena escala (estruturas submalha) para qual a atual malha é muito grosseira (Figura 2.2).

A vantagem de LES é que, para malhas suficientemente finas, as estruturas das pequenas escalas são fáceis de modelar e o erro relacionado ao modelo numérico diminui à medida que a malha se torna mais refinada.

Devido a este processo de separação de escalas do escoamento, LES é o método preferido para escoamentos no qual o número de Reynolds é muito alto ou a geometria é muito complexa para permitir a aplicação do DNS (FERZIGER, 2002) e, atualmente, vem sendo bastante empregada em problemas de interesse prático.

Segundo Frigo (2004) e Zang et al. (1993) uma das primeiras aplicações da LES em engenharia foi realizada por Deardorff (1970) na investigação de um escoamento turbulento no interior de um canal a altos números de Reynolds.

Figura 2.2 - Tratamento de estruturas das grandes e pequenas escalas da turbulência com LES Fonte: Schafer (2006).



Fonte: Schafer (2006).

2.2.1 Processo de Filtragem das Equações e de Separação das Escalas

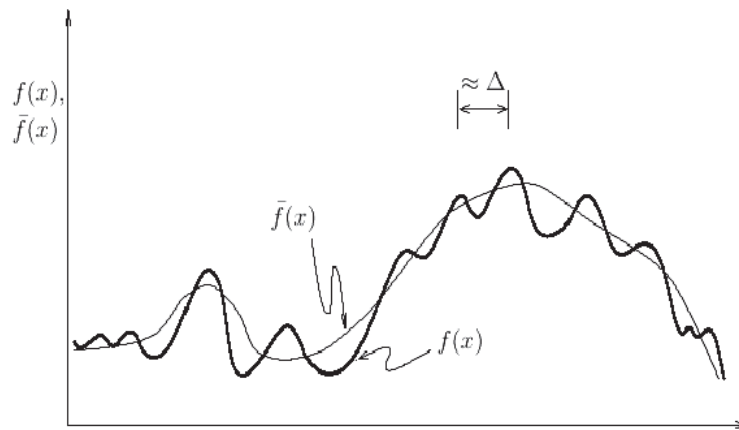
A solução direta das equações (2.20) e (2.26) é possível apenas para baixos números de Reynolds. Para simulação de escoamentos a altos números de Reynolds utilizando LES, é necessário decompor as quantidades do escoamento. Nesse sentido, denotando uma variável

genérica por $f(\vec{x}, t)$, ela será representada pela soma de sua componente filtrada (grandes escalas), $\bar{f}(\vec{x}, t)$, e de sua componente flutuante (pequenas escalas), $f'(\vec{x}, t)$, como:

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t) \quad (2.27)$$

As Figura 2.3 e Figura 2.4 ilustram, respectivamente, os esquemas da função $f(x)$ e sua componente filtrada $\bar{f}(x)$ e o esquema unidimensional do filtro, apresentados por (TEJADA-MARTÍNEZ, 2002).

Figura 2.3 - Função $f(x)$ e sua componente filtrada



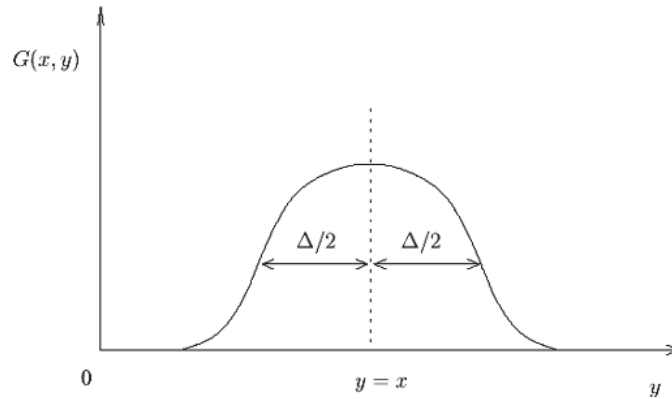
Fonte: Tejada – Martínez (2002).

A operação de filtragem serve para diminuir escalas na ordem da largura do filtro. A parte filtrada, ou seja, a componente das grandes escalas $\bar{f}$ é obtida com o auxílio de uma integral de convolução envolvendo a função a ser filtrada f e uma função filtro apropriada, como:

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int_D f(\vec{x}', t) G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (2.28)$$

G representa a função filtro; uma das mais utilizadas é a função filtro por volume, dada a seguir:

$$G(\vec{x}) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & \text{se } |\vec{x}| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{se } |\vec{x}| > \Delta/2 \end{cases} \quad (2.29)$$

Figura 2.4 - Esquema unidimensional do filtro

Fonte: Tejada-Martínez (2002).

Outros tipos de filtragem são: *funções gaussianas*, *Top-Hat* ou *Sharp Fourier cut-off filters*, *box*, Chung (2002). Cada filtro tem um comprimento característico associado Δ , geralmente definido como $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ com Δ_{x_i} sendo o comprimento da malha no eixo x_i . Portanto, escalas de tamanho maior que Δ são as grandes escalas enquanto àquelas menores que Δ são as pequenas escalas a serem modeladas.

Em função do processo de filtragem acima, as propriedades clássicas da decomposição de Reynolds não são mais verificadas, ou seja:

$$\begin{cases} \overline{\bar{u}_i u'_j} \neq 0 \\ \overline{\bar{u}_i} \neq \bar{u}_i \end{cases} \quad (2.30)$$

Este item não tem o intuito de explicar detalhadamente todos os processos de filtragem, uma explicação mais detalhada do mesmo pode ser encontrada em Frigo (2004), Silveira-Neto (2003) e Tejada-Martínez (2002). Na prática, o que mais se utiliza é um tipo de média volumétrica local, como processo de filtragem, com um comprimento característico da escala dado pelo tamanho da malha, (SHYY et al., 1997).

Aplicando-se o processo de filtragem nas Eqs. (2.20) e (2.26) obtém-se:

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial(\rho \bar{w}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.31)$$

Equação da Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial(\rho \bar{w}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{w_j w_i})}{\partial x_j} + 2\rho \varepsilon_{ijk} \omega_j \bar{w}_k = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2.32)$$

Observa-se que, não se consegue resolver a Eq. (2.32) nessa forma na qual está escrita. Trata-se de uma equação de transporte para w_i e, no entanto, nos termos não lineares aparece o produto filtrado das variáveis e não o produto das variáveis filtradas, como deveria ser. Assim, podem-se escrever este produto na forma:

$$\rho \overline{w_j w_i} = \rho \left(\bar{w}_j \bar{w}_i + \overline{w_j w_i} - \bar{w}_j \bar{w}_i \right) \quad (2.33)$$

Essa igualdade, quando substituída nas equações acima, resulta em:

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial(\rho \bar{w}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.34)$$

Equação da Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial(\rho \bar{w}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{w}_j \bar{w}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right) - \Gamma_{ij} \right) - 2\rho \varepsilon_{ijk} \omega_j \bar{w}_k \quad (2.35)$$

Na equação (2.35), o termo Γ_{ij} que aparece devido ao processo de filtragem, corresponde à tensão submalha. É importante ressaltar que esse termo é considerado ter natureza física semelhante ao tensor viscoso molecular, apesar de sua origem ligada ao termo não linear. Desta forma, é natural transpor estes termos para o segundo membro das equações de quantidade de movimento e agrupá-lo como tensor viscoso.

2.2.2 Modelagem Submalha da Turbulência: Modelo de Smagorinsky

Para a modelagem dos elementos submalha das equações governantes, iremos nos valer da hipótese do matemático francês Boussinesq que, analisando um escoamento tridimensional cisalhante, estabeleceu uma analogia entre as tensões de Reynolds e as tensões viscosas. Em tal aproximação, podemos expressar o tensor de Reynolds submalha em função

da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta, como segue:

$$\Gamma_{ij} = \rho \left(\overline{w_i w_j} - \bar{w}_i \bar{w}_j \right) = -\mu_t \left(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.36)$$

onde μ_t é a viscosidade turbulenta. É importante destacar que, enquanto a viscosidade absoluta μ é uma propriedade do fluido, a viscosidade turbulenta, μ_t , é uma propriedade do escoamento, podendo variar no espaço e no tempo.

A energia cinética turbulenta pode ser incorporada à pressão estática, dando origem a uma pressão modificada.

$$\bar{p}_t = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \quad (2.37)$$

Segundo Smagorinsky, a viscosidade dinâmica turbulenta pode ser expressa em função da taxa de deformação e da escala de comprimento, constituindo-se uma espécie de comprimento de mistura, por meio da expressão:

$$\mu_t = \rho (C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \quad (2.38)$$

sendo C_s é a constante de Smagorinsky, Δ a espessura do filtro e $|\bar{S}|$ o módulo do tensor taxa de cisalhamento, dados por:

$$\Delta = (\Delta x \Delta y)^{1/2} \quad (2.39)$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (2.40)$$

A energia cinética turbulenta, k , e a taxa de deformação, $\bar{S}_{ij}$, são definidas como:

$$k = \frac{\tau_{ii}}{2} \quad (2.41)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.42)$$

Substituindo as definições das hipóteses acima, eq. (2.36) a (2.42), nas eq. (2.34) e (2.35), temos o novo sistema de equações, onde as variáveis dimensionais serão marcadas com um * como índice sobrescrito.

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial(\rho^* \bar{w}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.43)$$

Equação da Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial(\rho^D \bar{w}_i)}{\partial t^D} + \frac{\partial(\rho^* \bar{w}_j \bar{w}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}_t^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu^* + \mu_t^*) \left(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right) \right) + \bar{S}_{u_i} \quad (2.44)$$

Com o termo fonte

$$\bar{S}_{u_i} = -2 \rho^* \varepsilon_{ijk} \omega_j^* \bar{w}_k \quad (2.45)$$

2.3 Adimensionalização das Variáveis

A dificuldade de implementação das Eqs. (2.43) e (2.44), as quais representam matematicamente um escoamento, está em se fixar propriedades físicas que satisfaçam os mais diversos fluidos. Com isto, a opção por variáveis adimensionais torna-se muito relevante; porém é importante frisar que os parâmetros tomados como referência para a adimensionalização devem ser definidos de acordo com as características geométricas, cinemáticas e dinâmicas do problema a ser considerado. No caso de escoamentos envolvendo convecção forçada ou mista, podem-se definir as grandezas adimensionais da seguinte forma:

$$X_i = \frac{x_i}{L}; \quad U_i = \frac{\bar{w}_i}{w_0}; \quad \bar{P} = \frac{(\bar{p}_t^* - p_0)}{\rho_0 w_0^2}; \quad t = \frac{t^* w_0}{L} \quad (2.46)$$

que são os adimensionais do espaço, da velocidade, da pressão e do tempo.

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}; \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0}; \quad \nu = \frac{\nu^*}{\nu_0}; \quad \Omega_j = \frac{\omega_j}{\Omega_0}; \quad Ro = \frac{L \Omega_0}{w_0} \quad (2.47)$$

Na Eq. (2.47) estão os adimensionais da massa específica, da viscosidade absoluta, da viscosidade cinemática, da velocidade angular de rotação em torno do eixo j e o número de rotação. Nas equações acima, temos a tabela para o significado de alguns termos:

Tabela 2.1 - Significado de parâmetros presentes na adimensionalização.

Parâmetro	Descrição
L	Comprimento de referência para o problema
w_0	Velocidade relativa de referência
p_0	Pressão de referência
ρ_0	Massa específica de referência numa temperatura de referência T_0
μ_0	Viscosidade absoluta de referência numa temperatura de referência T_0
ν_0	Viscosidade cinemática de referência numa temperatura de referência T_0
ω_j	Componente da velocidade angular de rotação do escoamento em torno do eixo x_j .

Cabe destacar que, da maneira que foi definido, o número de rotação Ro representa a razão entre as acelerações decorrentes do movimento rotativo e as acelerações convectivas. Dessa forma, quando este adimensional foi maior que a unidade, iremos pressupor escoamentos onde os fenômenos rotacionais prevalecem sobre os convectivos na aplicação.

Usando as variáveis adimensionais nas Eqs. (2.43) e (2.44), tais equações podem ser reescritas da seguinte forma:

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial X_i} = 0 \quad (2.48)$$

Equação da Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial X_j} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\mu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu_e}{\partial X_j} \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + S_{u_i} \quad (2.49)$$

O termo fonte da Eq. (2.49) é dado por:

$$S_{u_i} = -2\rho \varepsilon_{ijk} Ro \Omega_j U_k \quad (2.50)$$

Caso deixarmos a componente da aceleração centrípeta explícita na equação, o termo fonte fica:

$$S_{u_i} = -2\rho \varepsilon_{ijk} Ro \Omega_j U_k - \rho (\Omega_j X_j) \Omega_i Ro^2 + \rho (\Omega_j \Omega_j) X_i Ro^2 \quad (2.51)$$

O conjunto de Eqs. (2.48) a (2.51) , embora, as variáveis estejam escritas na forma adimensional, pode ser utilizado para cálculo de escoamentos com variáveis dimensionais, como dito anteriormente, para isto basta tomar Re unitário. No cálculo de escoamentos utilizando as variáveis adimensionais, as propriedades físicas são tomadas unitárias.

Na Eq.(2.49), a viscosidade efetiva será considerada da seguinte forma:

$$\mu_e = \begin{cases} \mu \Rightarrow \text{escoamentos laminares} \\ \mu + \mu_t \Rightarrow \text{escoamentos turbulentos} \end{cases} \quad (2.52)$$

O parâmetro adimensional número de Reynolds, Re , é definido em função das propriedades de referência da seguinte maneira:

$$Re = \frac{\rho_0 w_0 L}{\mu_0} \quad (2.53)$$

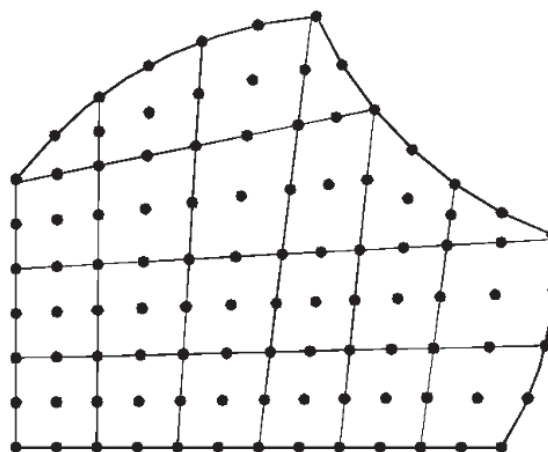
3 Modelo Numérico

Neste capítulo, é apresentada a metodologia numérica para resolver o sistema de equações diferenciais governantes apresentado no capítulo 2, onde serão mostradas algumas das etapas, de como proceder com o método de elementos finitos por volumes de controle.

3.1 Discretização dos Domínios para Problemas Bidimensionais

Os elementos mais utilizados para discretização de domínios bidimensionais pelo método de elementos finitos são os triângulos e/ou quadriláteros. Dentre os elementos disponíveis para geometrias bidimensionais, os triangulares são os mais simples e se adaptam bem a contornos irregulares, segundo Baker e Pepper (1991). Entretanto, elementos quadrilaterais quadráticos, quando deformados, também podem representar de forma satisfatória contornos irregulares, porém em alguns casos pode ser conveniente uma combinação dos dois tipos de elementos, quadrilaterais e triangulares, (ZIENKIEWICZ; MORGAN, 1993). A Figura 3.1 ilustra uma combinação dos dois tipos de elementos. A discretização a ser apresentada serve para ambos os tipos de elementos.

Figura 3.1 - Domínio discretizado em triângulos e quadriláteros.

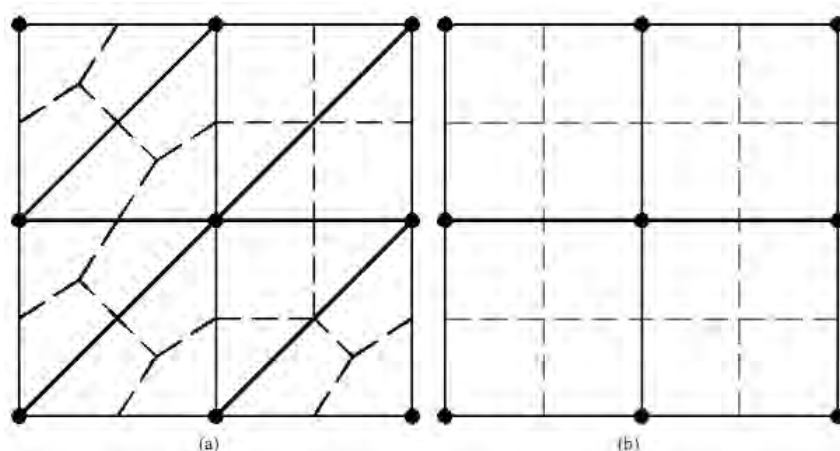


Fonte: Campos-Silva (1998).

A Figura 3.2 ilustra elementos triangulares e quadrilaterais subdivididos em subvolumes de controle. Cada elemento triangular com três nós, localizados nos vértices, pode ser composto em três subvolumes de controle, obtidos, por exemplo, unindo-se seu

centróide aos pontos médios dos lados, ou também em três subvolumes de controle, porém, simplesmente, unindo-se os pontos médios de dois lados ao ponto médio do terceiro, formando um subvolume com quatro lados e dois com três, como nos trabalhos de Saabas (1991, 1994). Os elementos quadrilaterais com quatro nós são compostos por quatro subvolumes de controle. Desta forma um volume de controle em torno de um nó será um polígono composto pelos lados dos subvolumes de controle de cada elemento que compartilha aquele determinado nó.

Figura 3.2 - Elementos subdivididos em subvolumes de controle de formas diferentes.
(a) Elementos triangulares. (b) Elementos quadrilaterais.



Fonte: Campos-Silva (1998).

O elemento finito utilizado neste trabalho é o elemento quadrilateral quadrático com nove pontos nodais. Este elemento possui uma vantagem que é a de poder ser deformado para representar com razoável exatidão fronteiras com curvatura, em domínios com complexidade geométrica. Campos-Silva (1998) utilizou este elemento para cálculos de escoamentos com e sem transferência de calor e recentemente Lima, Campos-Silva e Mansur (2004) utilizaram este elemento para cálculo de escoamento com modelagem da turbulência por LES.

O número de lados do volume de controle dependerá de quantos elementos compartilham um determinado nó. No caso de nós de fronteira do domínio, geralmente, o volume de controle será composto por dois subvolumes de controle.

Um determinado elemento será, em geral, subdividido em um número de subvolumes de controle igual ao seu número de nós, ou seja, no caso do elemento quadrilateral com nove pontos nodais, utilizado neste estudo, ele será subdividido em nove subvolumes de controle, como pode ser observado no item 3.4 na Figura 3.5 ou Figura 3.6.

3.2 Discretização das Equações

Nesta seção, é feita a discretização das equações. A integração das equações diferenciais parciais governantes pelo CVFEM deve ser feita nos subvolumes de controle dentro de cada elemento.

Primeiramente, é feita a discretização no tempo. Para isto, vários esquemas podem ser utilizados: desde um **esquema explícito** até um **esquema totalmente implícito**. O esquema totalmente explícito possui limitações quanto ao passo de tempo, por razões de estabilidade da solução. Já o esquema totalmente implícito, pode ter o passo de tempo fixado de acordo com a precisão desejada da solução. Em princípio, neste esquema, não há limitações quanto ao passo de tempo, sendo o mesmo incondicionalmente estável.

Posteriormente, na seção 3.2.2, é feita a discretização no espaço a partir da substituição das funções de interpolação nas equações integrais de conservação. A seguir são descritos os passos básicos para obtenção das equações discretizadas.

3.2.1 Discretização no Tempo

A discretização no tempo é definida, no presente estudo, por um parâmetro θ , o qual desempenhará o papel de indicador do esquema, ou seja, através deste parâmetro será indicado se o esquema é explícito ou implícito.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = \theta \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial t} + (1-\theta) \frac{\partial \phi^n}{\partial t} \quad (3.1)$$

Sendo θ a posição no intervalo de tempo, pode-se ter os casos (Reddy, 1993):

$$\theta = \begin{cases} 0: \text{Esquema explícito; diferenças para frente (ou Euler); condicionalmente} \\ \text{estável; ordem de precisão: } O(\Delta t) \\ 1/2: \text{Esquema implícito; Crank-Nicolson; estável;} \\ \text{ordem de precisão: } O((\Delta t)^2) \\ 2/3: \text{Esquema implícito; Método de Galerkin;} \\ \text{estável; ordem de precisão: } O((\Delta t)^2) \\ 1: \text{Esquema totalmente implícito; diferenças para trás;} \\ \text{estável; ordem de precisão: } O(\Delta t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Sejam U_i^n e P^n os campos de velocidade e pressão definidos no tempo t^n , e $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. A partir de U_i^n e condições de contorno especificadas, os campos de U_i^{n+1} e P^{n+1} são calculados pelas equações a seguir.

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho U_i)^{n+1} - (\rho U_i)^n}{\Delta t} + \\ & \theta \left[\frac{\partial(\rho U_j U_i)^{n+1}}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^{n+1}}{\partial X_i} \right) \right) + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \right] - \theta (S_{u_i})^{n+1} + \\ & (1-\theta) \left[\frac{\partial(\rho U_j U_i)^n}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^n}{\partial X_i} \right) \right) + \frac{\partial P^n}{\partial X_i} - (S_{u_i})^n \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

A qual pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} + \theta \left[\frac{\partial(\rho U_j U_i)^{n+1}}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^{n+1}}{\partial X_i} \right) \right) + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \right] = \\ & = \theta (S_{u_i})^{n+1} + R_{u_i}^n \end{aligned} \quad (3.4)$$

Na qual

$$R_{u_i}^n = \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} + (1-\theta) \left[\frac{\partial(\rho U_j U_i)^n}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^n}{\partial X_i} \right) \right) + \frac{\partial P^n}{\partial X_i} - (S_{u_i})^n \right] \quad (3.5)$$

Com a restrição da conservação da massa dada por:

$$\frac{\partial(\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} = 0 \quad (3.6)$$

Observa-se que tomando $\theta = 0$, o segundo e o terceiro termos da Eq. (3.3) anulam-se. Tais termos são formados pelas variáveis calculadas no mesmo nível de tempo que a incógnita. A equação fica, então, em função apenas das variáveis que já foram calculadas no passo de tempo anterior, o que caracteriza uma formulação explícita. Fazendo $\theta = 1$, observa-se que os termos anulados são os que possuem variáveis do instante de tempo anterior, restando apenas os que possuem as variáveis do tempo atual, caracterizando uma formulação

totalmente implícita. E, por fim, tomando $\theta = 1/2$ ou $\theta = 2/3$, nenhum termo será anulado, entrando no cálculo da incógnita tanto os termos com as variáveis do mesmo nível de tempo, como as variáveis do nível de tempo anterior, o que caracteriza a formulação implícita.

Na equação (3.4), o passo de tempo para o esquema explícito pode ser fixado de acordo com a natureza da equação (parabólica, elíptica ou hiperbólica). Hirsch (1988) apresenta várias maneiras de se analisar a estabilidade de soluções e de como fixar o passo de tempo para satisfazer esses critérios de estabilidade.

3.2.2 Discretização Espacial das Equações - Aplicação de um Método de Elementos Finitos por Volumes de Controle (CVFEM)

A discretização espacial das equações, no método de elementos finitos de Galerkin, é feita a partir da formulação fraca das mesmas. Esta forma fraca das equações é obtida fazendo-se o produto escalar dos termos das equações por funções de ponderação ou peso e integrando-as por partes sobre o domínio, com o objetivo de abaixar o grau do operador de segunda ordem. Isto, na realidade, corresponde ao método de resíduos ponderados.

No caso de métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM), a função peso é feita constante e unitária dentro de cada volume de controle. Assim, a partir da integração por partes das Eqs. (3.4) a (3.6) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} dV + \int_V \theta \frac{\partial (\rho U_j U_i)^{n+1}}{\partial X_j} dV - \int_V \theta \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^{n+1}}{\partial X_i} \right) \right] dV \\ & + \int_V \theta \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dV = \int_V \theta (S_{u_i})^{n+1} dV + (R_{u_i})^n \end{aligned} \quad (3.7)$$

na qual

$$\begin{aligned} (R_{u_i})^n &= \int_V \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} dV - \int_V (1-\theta) \frac{\partial (\rho U_j U_i)^n}{\partial X_j} dV + \\ & \int_V (1-\theta) \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^n}{\partial X_i} \right) \right] dV - \int_V (1-\theta) \frac{\partial P^n}{\partial X_i} dV + \int_V (1-\theta) (S_{u_i})^n dV \end{aligned} \quad (3.8)$$

A equação de conservação da massa:

$$\int_V \frac{\partial(\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} dV = 0 \quad (3.9)$$

Utilizando o Teorema da Divergência, pode-se transformar as seguintes integrais de volume em integrais de área:

$$\int_V \theta \frac{\partial(\rho U_j U_i)^{n+1}}{\partial X_j} dV = \oint_A \theta (\rho U_j U_i)^{n+1} n_j dA \quad (3.10)$$

$$\int_V (1-\theta) \frac{\partial(\rho U_j U_i)^n}{\partial X_j} dV = \oint_A (1-\theta) (\rho U_j U_i)^n n_j dA \quad (3.11)$$

$$\int_V \theta \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^{n+1}}{\partial X_i} \right) \right] dV = \oint_A \theta \left[\frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^{n+1}}{\partial X_i} \right) \right] n_j dA \quad (3.12)$$

$$\int_V (1-\theta) \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^n}{\partial X_i} \right) \right] dV = \oint_A (1-\theta) \left[\frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^n}{\partial X_i} \right) \right] n_j dA \quad (3.13)$$

Substituindo as Eqs. (3.10) a (3.13) nas Eqs. (3.7) a (3.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} dV + \oint_A \theta \left[(\rho U_j U_i)^{n+1} - \frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^{n+1}}{\partial X_i} \right) \right] n_j dA + \\ & + \int_V \theta \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dV = \theta \int_V (S_{u_i})^{n+1} dV + (R_{u_i})^n \end{aligned} \quad (3.14)$$

na qual:

$$\begin{aligned} (R_{u_i})^n &= \int_V \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} dV - \oint_A (1-\theta) \left[(\rho U_j U_i)^n - \frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^n}{\partial X_i} \right) \right] n_j dA - \\ & - \int_V (1-\theta) \frac{\partial P^n}{\partial X_i} dV + (1-\theta) \int_V (S_{u_i})^n dV \end{aligned} \quad (3.15)$$

com restrição da equação da continuidade:

$$\int_V \frac{\partial(\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} dV = 0 \quad (3.16)$$

Nas Eqs. (3.14) a (3.16), n_j representa as componentes do vetor normal para fora das áreas de fronteiras dos volumes de controle, apontando na direção do eixo X_j . Esse vetor é definido como:

$$\vec{n}dA = (n_1\vec{i} + n_2\vec{j}) \quad (3.17)$$

resultando, para problemas bidimensionais com integração no sentido anti-horário:

$$\vec{n}dA = dy\vec{i} - dx\vec{j} \quad (3.18)$$

Portanto, algumas das relações presentes nas Eqs. (3.14) a (3.16), podem ser desenvolvidas da seguinte maneira

$$\rho U_j U_i \bullet n_j dA = \rho U_1 U_i \bullet n_1 dA + \rho U_2 U_i \bullet n_2 dA = \rho U U_i dY - \rho V U_i dX \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \bullet n_j dA = \frac{\partial U_i}{\partial X_1} \bullet n_1 dA + \frac{\partial U_i}{\partial X_2} \bullet n_2 dA = \frac{\partial U_i}{\partial X} dY - \frac{\partial U_i}{\partial Y} dX \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial X_i} \bullet n_j dA = \frac{\partial U_1}{\partial X_i} \bullet n_1 dA + \frac{\partial U_2}{\partial X_i} \bullet n_2 dA = \frac{\partial U}{\partial X_i} dY - \frac{\partial V}{\partial X_i} dX \quad (3.21)$$

Substituindo as Eqs. (3.19) a (3.21) nas Eqs. (3.14) a (3.16), tem-se o novo sistema de equações:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} dV + \oint_A \theta \left[(\rho U U_i)^{n+1} - \frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial X} \right] dY - \\ & - \oint_A \theta \left[(\rho V U_i)^{n+1} - \frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial Y} \right] dX - \oint_A \theta \frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U^{n+1}}{\partial X_i} dY - \frac{\partial V^{n+1}}{\partial X_i} dX \right) + \\ & + \int_V \theta \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dV = \int_V \theta (S_{u_i})^{n+1} dV + (R_{u_i})^n \end{aligned} \quad (3.22)$$

na qual:

$$\begin{aligned}
(R_{u_i})^n = & \int_V \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} dV - \oint_A (1-\theta) \left[(\rho U U_i)^n - \frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \frac{\partial U_i^n}{\partial X} \right] dY + \\
& + \oint_A (1-\theta) \left[(\rho V U_i)^n - \frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \frac{\partial U_i^n}{\partial Y} \right] dX + \oint_A (1-\theta) \frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U^n}{\partial X_i} dY - \frac{\partial V^n}{\partial X_i} dX \right) - \\
& - \int_V (1-\theta) \frac{\partial P^n}{\partial X_i} dV + (1-\theta) \int_V (S_{u_i})^n dV
\end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\int_V \frac{\partial (\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} dV = 0 \quad (3.24)$$

Na Eq. (3.22) o termo cruzado foi separado, pois na implementação computacional ele é desprezado.

Para se obter o sistema algébrico de equações, as Eqs. (3.22) a (3.24) são aplicadas para cada subvolume de controle dentro de um elemento. O sistema completo de equações algébricas é obtido somando-se a contribuição de elemento por elemento. Esse procedimento facilita a obtenção das matrizes globais e em nenhuma forma afeta o princípio de conservação, uma vez que, quando for levada em consideração a contribuição de cada elemento para todos os nós, a contribuição para os volumes de controle completos terá sido feita. O procedimento adotado na maioria dos trabalhos é integrar as equações para um volume de controle completo similar ao que é feito no método de volumes finitos. No presente trabalho seguiu-se o procedimento adotado no método clássico de elementos finitos, como em Campos-Silva (1998).

3.3 Funções de Interpolação

Na metodologia de elementos finitos baseado em volumes de controle, após a integração das equações, deve-se interpolar as variáveis desconhecidas. No método de elementos finitos as variáveis desconhecidas podem ser interpoladas, dentro de um elemento, na forma:

$$U_i^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha=1}^{NNEl} N_{\alpha}^e(\Omega) U_{i\alpha}^e(t) \quad (3.25)$$

$$P^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha'=1}^{NNEL} N_{\alpha'}^e(\Omega) P_{\alpha'}^e(t) \quad (3.26)$$

Onde N_α e $N_{\alpha'}$ são funções de interpolação bidimensionais dentro de um elemento (vide Tabela 3.1 e 3.2); $U_{i\alpha}^e$ e $P_{\alpha'}^e$, respectivamente os valores nodais da velocidade no nó α e da pressão no nó α' de um elemento finito. Usa-se α' para considerar que a pressão pode ser interpolada por funções de interpolação de ordem diferente daquela usada para interpolar a velocidade ou outro escalar qualquer. Geralmente, a ordem das funções de interpolação para a pressão é mais baixa do que as utilizadas para interpolar a velocidade, desta forma evita-se valores não realísticos para a pressão.

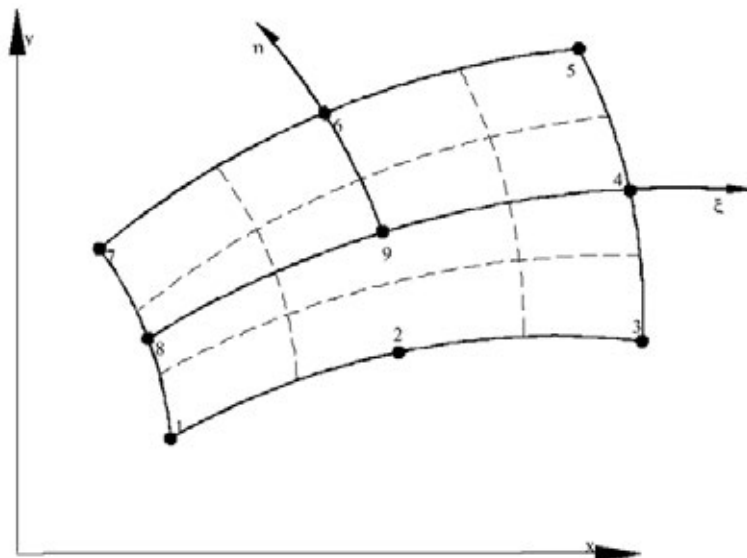
Considera-se, agora, um determinado subvolume de controle associado ao nó α de um elemento. A discretização das Eqs. (3.22) a (3.24) é feita, no presente trabalho, considerando elementos quadrilaterais com nove nós. Este desenvolvimento é baseado principalmente no trabalho de Campos-Silva (1998). As velocidades são interpoladas valendo-se dos valores nodais nos nove nós do elemento, enquanto a pressão é interpolada usando-se apenas os quatro nós de cantos. Esta forma de interpolar a pressão por funções de interpolação de ordem diferente das funções de interpolação da velocidade é conhecida como formulação mista e é equivalente à interpolação por malha deslocada em volumes finitos. Um elemento finito e seus respectivos subvolumes de controle (indicados por linhas tracejadas) são mostrados na Fig. 3.3. Cada subvolume de controle é identificado pelo número do nó a ele associado.

Tabela 3.1 - Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com quatro nós.

α	N_α	$\partial N_\alpha / \partial \xi$	$\partial N_\alpha / \partial \eta$
1	$\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$	$-\frac{(1-\eta)}{4}$	$-\frac{(1-\xi)}{4}$
2	$\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$	$\frac{(1-\eta)}{4}$	$-\frac{(1+\xi)}{4}$
3	$\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\xi)}{4}$
4	$\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$	$-\frac{(1+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\xi)}{4}$

Tabela 3.2 - Funções de interpolação e suas derivadas para elementos com nove nós.

α	N_α	$\partial N_\alpha / \partial \xi$	$\partial N_\alpha / \partial \eta$
1	$\frac{(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$	$\frac{(1-2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$	$\frac{(1-\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$
2	$\frac{-(1-\xi^2)(1-\eta)\eta}{2}$	$(1-\eta)\xi\eta$	$\frac{-(1-\xi^2)(1-2\eta)}{2}$
3	$\frac{-(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$	$\frac{-(1+2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$	$\frac{-(1+\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$
4	$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$	$\frac{(1+2\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$-(1+\xi)\xi\eta$
5	$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{4}$	$\frac{(1+2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$	$\frac{(1+\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$
6	$\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)\eta}{2}$	$-(1+\eta)\xi\eta$	$\frac{(1-\xi^2)(1+2\eta)}{2}$
7	$\frac{-(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta}{4}$	$\frac{-(1-2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$	$\frac{-(1-\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$
8	$\frac{-(1-\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$	$\frac{-(1-2\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$(1-\xi)\xi\eta$
9	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$	$-2(1-\eta^2)\xi$	$-2(1-\xi^2)\eta$

Figura 3.3 - Subvolumes de controle compondo um elemento quadrilateral de nove nós.

Fonte: Campos-Silva (1998).

A vantagem do elemento de nove nós quando comparado com o elemento de oito nós (elemento de *serendipity*) é que, no primeiro caso, todas as faces dos subvolumes de controle

são linhas de coordenadas constantes dentro do elemento de referência. Isto não seria possível para o segundo elemento que, geralmente, é o mais utilizado no método clássico de elementos finitos de Galerkin para cálculo de escoamentos de fluidos.

No caso de problemas bidimensionais, as integrais (Eqs. (3.22) a (3.24)) de volume se transformarão em integrais de área e as integrais de área serão simplesmente integrais de linha, em contornos dos subvolumes de controle. Considerando então as equações para um subvolume de controle associado a um determinado nó α de um elemento obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{A_\alpha} \frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} dA + \theta \sum_{K=1}^{NF} \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left((\rho U U_i)^{n+1} - \frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^{n+1}}{\partial X} \right) dY - \\
 & - \theta \sum_{K=1}^{NF} \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left((\rho V U_i)^{n+1} - \frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^{n+1}}{\partial Y} \right) dX + \int_{A_\alpha} \theta \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dA - \\
 & - \theta \sum_{K=1}^{NF} \int_{\Gamma_{K\alpha}} \frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial (U)^{n+1}}{\partial X_i} dY + \frac{\partial (V)^{n+1}}{\partial X_i} dX \right) - \theta \int_{A_\alpha} (S_{u_i})^{n+1} dA - \\
 & - (R_{u_i\alpha})^n + \text{contribuições similares de outros elementos para o nó } \alpha \\
 & + \text{contribuições de contornos se for o caso} = 0
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\int_{A_\alpha} \frac{\partial (\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} dA + \text{contribuições de outros elementos para o nó } \alpha = 0 \tag{3.28}$$

Na Eq. (3.27) a expressão para $(R_{u_i\alpha})^n$ é igual a:

$$\begin{aligned}
 (R_{u_i\alpha})^n &= \int_{A_\alpha} \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} dA - (1-\theta) \sum_{K=1}^{NF} \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left((\rho U U_i)^n - \frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^n}{\partial X} \right) dY + \\
 & + (1-\theta) \sum_{K=1}^{NF} \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left((\rho V U_i)^n - \frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \frac{\partial (U_i)^n}{\partial Y} \right) dX + \\
 & + (1-\theta) \sum_{K=1}^{NF} \int_{\Gamma_{K\alpha}} \frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \left(\frac{\partial (U)^n}{\partial X_i} dY + \frac{\partial (V)^n}{\partial X_i} dX \right) - \\
 & - (1-\theta) \int_{A_\alpha} \frac{\partial P^n}{\partial X_i} dA + (1-\theta) \int_{A_\alpha} (S_{u_i})^n dA
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Substituindo as funções de interpolação, definidas pelas Eqs. (3.25) e (3.26) nas Eqs. (3.27) a (3.29), obtém-se o seguinte sistema, na forma escalar, para um elemento:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} + \theta (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^{n+1} \right) (U_{i\beta}^e)^{n+1} + \theta H_{i\alpha\beta'}^e (P_{\beta'}^e)^{n+1} = \\
& = \left(\frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} - (1-\theta) (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^n \right) (U_{i\beta}^e)^n + \theta (S_{i\alpha}^e)^{n+1} + (1-\theta) \left((S_{i\alpha}^e)^n - H_{i\alpha\beta'}^e (P_{\beta'}^e)^n \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$D_{i\alpha'\beta}^e (U_{i\beta}^e)^{n+1} = 0 \tag{3.31}$$

Nestas equações, as matrizes são definidas por:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{A_{SVC\alpha}} \rho N_{\beta} dA \tag{3.32}$$

$$C_{\alpha\beta}^n = \oint_{\Gamma_{SVC\alpha}} \rho N_{\beta} U_j^n n_j d\Gamma \tag{3.33}$$

$$K_{\alpha\beta} = \oint_{\Gamma_{SVC\alpha}} \frac{\mu_e}{\text{Re}} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X_j} n_j d\Gamma \tag{3.34}$$

$$H_{i\alpha\beta'} = \int_{A_{SVC\alpha}} \frac{\partial N_{\beta'}}{\partial X_i} dA \tag{3.35}$$

$$D_{i\alpha'\beta} = \int_{A_{SVC\alpha'}} \rho \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X_i} dA \tag{3.36}$$

$$S_{i\alpha}^{n+1} = \oint_{\Gamma_{SVC\alpha}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu_e}{\partial X_j} \frac{\partial U_j^{n+1}}{\partial X_i} n_j d\Gamma + \int_{A_{SVC\alpha}} (S_{u_i})^{n+1} dA \tag{3.37}$$

nas quais $A_{SVC\alpha}$ é a área de um subvolume de controle, $\Gamma_{SVC\alpha}$ o contorno do subvolume de controle e NF representa o número de faces do subvolume de controle.

As funções de interpolação podem ser encontradas em livros de elementos finitos, como, por exemplo, Datt e Touzot (1984), ou funções de interpolação especiais podem ser obtidas procurando-se modelar adequadamente os vários termos (convectivos, difusivos, pressão, fontes) para se evitar resultados não realísticos. Resultados sem significado físico podem surgir, principalmente, quando o número de Reynolds é muito elevado e o problema se torna convectivo dominante. Uma forma de se contornar esse problema é utilizar técnicas de

upwind para se interpolar os termos convectivos. Entretanto, entende-se que, se a malha puder ser suficientemente refinada, não é necessária nenhuma técnica de *upwind*.

3.4 Cálculo das Matrizes nos Elementos

Uma vez definidas as funções de interpolação, os elementos das matrizes definidas nas Eqs. (3.32) a (3.37) podem ser resolvidas para se obter os coeficientes das matrizes nos elementos. Antes de montar a matriz global, necessita-se do cálculo das matrizes nos elementos. Este trabalho é facilitado fazendo-se o mapeamento de cada elemento do domínio real em um elemento de referência denominado Elemento Mestre. Tal mapeamento é feito em função das coordenadas globais dos nós do elemento e das funções de interpolação definidas em coordenadas locais no elemento. A Figura 3.4 ilustra o mapeamento de um elemento qualquer no elemento mestre. O elemento finito mostrado nessa figura, que pode ser deformado em coordenadas globais, será um elemento quadrado de comprimento dos lados igual a 2, em coordenadas locais.

Elemento de Referência

Seja um elemento V^r definido em um espaço adimensional abstrato com uma forma geométrica adequada e conveniente. A geometria do elemento de referência mapeará a geometria do elemento real usando expressões de transformação geométrica.

Por exemplo, considere a região quadrilateral mostrada na Figura 3.4. Tal elemento é o utilizado na discretização das equações de quantidade de movimento no presente trabalho.

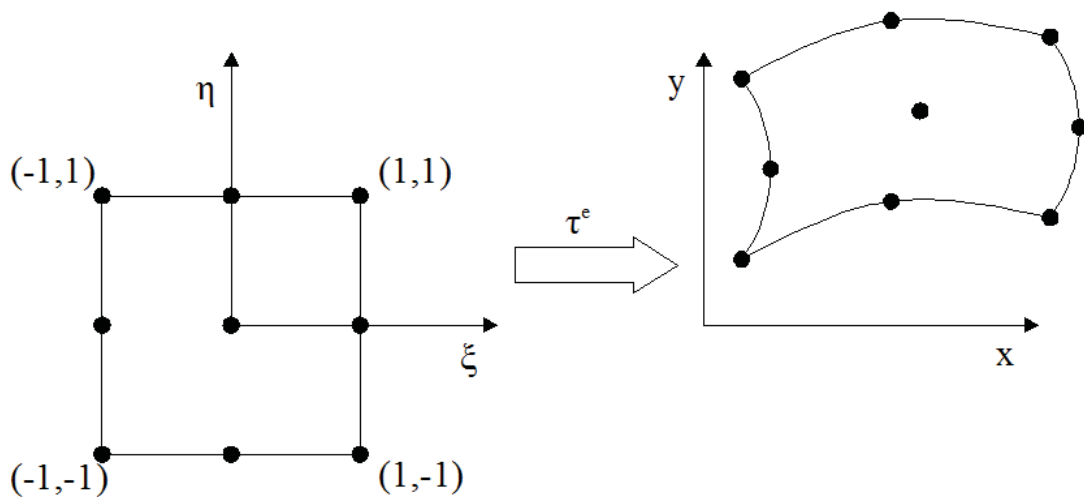
A transformação τ^e define as coordenadas de cada ponto do elemento real (x, y) em termos das coordenadas abstratas (ξ, η) do correspondente ponto do elemento de referência, conforme a regra abaixo:

$$\tau^e: \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi, x_i, x_j, x_k, \dots), \quad (3.38)$$

As transformações τ^e são escolhidas de modo a satisfazer as seguintes propriedades:

- 1) para cada ponto do elemento de referência V^r , há um e somente um ponto de um dado elemento real V^e ;
- 2) os nós geométricos do elemento de referência correspondem aos nós geométricos do elemento real;
- 3) cada parcela do contorno do elemento de referência, definido pelos nós geométricos do contorno, corresponde à porção do contorno do elemento real definido pelo nó correspondente.

Figura 3.4 - Mapeamento do elemento no sistema global para o sistema local.



Fonte: Campos-Silva (1998).

Na Seção 3.3 foi mostrado que a formulação pelo método CVPFEM gera um sistema de equações algébricas e que em cada coeficiente das matrizes estão envolvidas integrais, nas quais alguns termos são derivadas das funções de interpolação com relação às coordenadas globais x e y . Transformações na forma,

$$x = f_1(\xi) \quad \text{e} \quad y = f_2(\eta) \quad (3.39)$$

são requeridas a fim de reescrever as integrais em termos de ξ e η ($-1 \leq \xi, \eta \leq 1$).

Aqui, aproxima-se a geometria da mesma maneira que são aproximadas as variáveis dependentes. Essa aproximação pode ser escrita na forma:

$$X_i = \sum_{\beta=1}^{NNEL} N_{\beta}(\xi, \eta) X_{i\beta}^e \quad \text{e} \quad Y_i = \sum_{\beta=1}^{NNEL} N_{\beta}(\xi, \eta) Y_{i\beta}^e \quad (3.40)$$

nas quais $X_{i\beta}^e$ e $Y_{i\beta}^e$ são as coordenadas globais no i -ésimo nó do elemento e N_{β} são funções de interpolação apresentadas na Tabela 3.1 para elementos lineares e na Tabela 3.2 para elementos quadráticos.

Nas Tabela 3.1 e Tabela 3.2 também são apresentadas as suas derivadas das funções de interpolação, que são necessárias na avaliação das matrizes dos elementos. Essas funções de interpolação podem ser encontradas em vários livros de elementos finitos, como, por exemplo, em Datt e Touzot (1984).

Como a matriz do elemento envolve derivadas das funções de interpolação com relação a coordenadas cartesianas, elas devem ser transformadas em derivadas em função de coordenadas generalizadas. Utilizando a Regra da Cadeia da derivação, tem-se que:

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.41)$$

ou, em notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^e] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

na qual se relaciona as derivadas de N_i^e com as coordenadas locais e globais.

A matriz $[J^e]$ é chamada matriz Jacobiana da transformação. Essa matriz deve ser invertida, para fornecer:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^e]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

o que requer que a matriz jacobiana seja não singular.

Do sistema de Eqs. (3.43), pode-se escrever as equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i^e}{\partial x} &= \frac{1}{\det[J]} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} &= \frac{1}{\det[J]} \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \right)\end{aligned}\quad (3.44)$$

nas quais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^{Nnós} x_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^{Nnós} y_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^{Nnós} x_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^{Nnós} y_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (3.45)$$

Onde $Nnós$ é o número de nós do elemento.

Para que seja possível o cálculo das derivadas das funções de interpolação, uma condição necessária e suficiente para que a inversa da matriz jacobiana exista, é que o determinante de (J) , seja não nulo, ou seja:

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \neq 0 \quad (3.46)$$

Logo, as integrais de áreas, em coordenadas locais nos elementos, podem ser representadas, genericamente, por:

$$\int_{A^e} f(x, y) dx dy = \int_{A^r} f(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad (3.47)$$

As integrais no contorno podem ser representadas na forma:

$$\int_{S^e} f dx_i = \int_{S^r} f \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j \quad (3.48)$$

na qual

$$\xi_j = \begin{cases} \xi & \text{para } j = 1 \\ \eta & \text{para } j = 2 \end{cases} \quad (3.49)$$

na qual os índices superiores r e e representam os elementos no plano de referência e no plano real, respectivamente.

Todas as transformações de coordenadas, para facilitar a integração das equações, são feitas, localmente, em nível de elemento. Diferente do que é feito no método de volumes finitos (FVM) em coordenadas generalizadas; em que as equações governantes, escritas em coordenadas cartesianas, são transformadas para equações em coordenadas generalizadas. O cálculo das matrizes pode ser feito elemento por elemento e montando-se a matriz global no final para se obter a solução do sistema completo. As integrais em contornos de subvolumes de controle são efetuadas usando três pontos de Gauss e em áreas de subvolumes de controle dentro de elementos finitos, nove pontos de Gauss.

As matrizes convectivas e difusivas, para um elemento, Figura 3.6, são construídas na forma:

$$\begin{aligned} C(1, \beta) &= -FLUC(1, \beta) + FLUC(12, \beta) \\ C(2, \beta) &= FLUC(1, \beta) + FLUC(2, \beta) - FLUC(3, \beta) \\ C(3, \beta) &= FLUC(3, \beta) + FLUC(4, \beta) \\ C(4, \beta) &= -FLUC(4, \beta) + FLUC(5, \beta) + FLUC(6, \beta) \\ C(5, \beta) &= -FLUC(6, \beta) + FLUC(7, \beta) \\ C(6, \beta) &= -FLUC(7, \beta) - FLUC(8, \beta) + FLUC(9, \beta) \\ C(7, \beta) &= -FLUC(9, \beta) - FLUC(10, \beta) \\ C(8, \beta) &= FLUC(10, \beta) - FLUC(11, \beta) + FLUC(12, \beta) \\ C(9, \beta) &= -FLUC(2, \beta) - FLUC(5, \beta) + FLUC(8, \beta) + FLUC(11, \beta) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
K(1, \beta) &= -FLUD(1, \beta) + FLUD(12, \beta) \\
K(2, \beta) &= FLUD(1, \beta) + FLUD(2, \beta) - FLUD(3, \beta) \\
K(3, \beta) &= FLUD(3, \beta) + FLUD(4, \beta) \\
K(4, \beta) &= -FLUD(4, \beta) + FLUD(5, \beta) + FLUD(6, \beta) \\
K(5, \beta) &= -FLUD(6, \beta) + FLUD(7, \beta) \\
K(6, \beta) &= -FLUD(7, \beta) - FLUD(8, \beta) + FLUD(9, \beta) \\
K(7, \beta) &= -FLUD(9, \beta) - FLUD(10, \beta) \\
K(8, \beta) &= FLUD(10, \beta) - FLUD(11, \beta) + FLUD(12, \beta) \\
K(9, \beta) &= -FLUD(2, \beta) - FLUD(5, \beta) + FLUD(8, \beta) + FLUD(11, \beta)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Nas Equações (3.50) e (3.51), os fluxos convectivos e difusivos são definidos por:

$$FLUC(ip, \beta) = \int_{ip} \rho \left(U \frac{\partial y}{\partial \eta} - V \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) N_\beta d\eta + \int_{ip} \rho \left(U \frac{\partial y}{\partial \xi} - V \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) N_\beta d\xi \tag{3.52}$$

$$FLUD(ip, \beta) = \int_{ip} \mu_e \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\eta + \int_{ip} \mu_e \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi \tag{3.53}$$

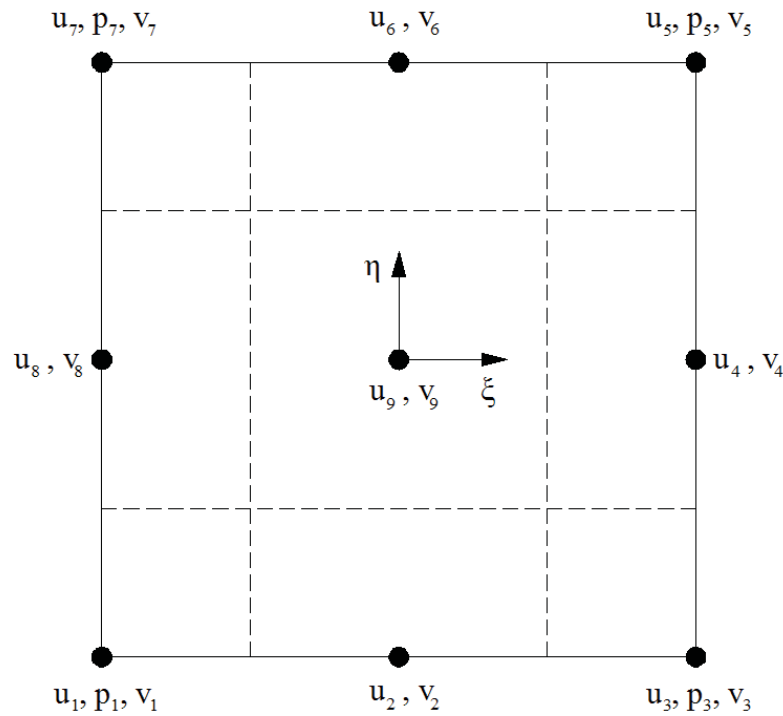
onde ip representa um determinado contorno de um subvolume de controle dentro de um elemento como mostrado na Figura 3.6.

A matriz de massa é calculada de forma consistente como:

$$M(\alpha, \beta) = \int_{A_\alpha} \rho N_\beta |J| d\xi d\eta \tag{3.54}$$

O arranjo das variáveis dentro de um elemento é mostrado na Figura 3.5. Para os campos de velocidade e pressão, cada elemento conterá vinte e dois graus de liberdade. Em cada nó de canto existirão três graus de liberdade: duas componentes de velocidades e uma de pressão. Nos demais nós existirão somente duas componentes de velocidade.

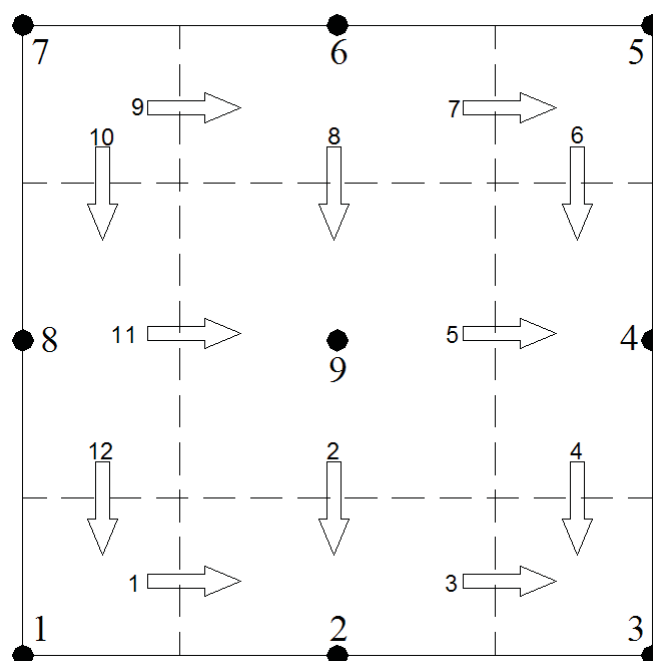
Figura 3.5 - Arranjo das variáveis u , v e p localmente num elemento.



Fonte: Campos-Silva (1998).

As matrizes nos elementos são calculadas durante o processo de solução num processo iterativo, devido às não linearidades dos termos convectivos e difusivos. Parte dos cálculos requeridos tais como valores das funções de interpolação e suas derivadas em pontos de Gauss, nas áreas e contornos de subvolumes de controle, são feitos uma única vez e armazenados em arquivos temporários, que são lidos durante o processo de cálculo das matrizes dos elementos. Este procedimento tem por objetivo reduzir o tempo computacional, para compensar, em parte, o tempo gasto pelo método frontal, o qual faz leitura de dados em disco. Para um sistema computacional com memória de processamento suficientemente grande, poder-se-ia armazenar os dados na própria memória, o que aceleraria em muito o processo de cálculo. O método de solução, descrito no próximo item, requer armazenamento e leitura de muitos dados no disco rígido, o que eleva o tempo total de processamento. Entretanto, ele é apropriado para sistemas de pequeno porte, em que a capacidade de memória pode ser ainda uma limitação.

Figura 3.6 - Elemento subdividido em volumes de controle



Fonte: Campos Silva (1998).

3.5 Solução do Sistema de Equações Discretizadas

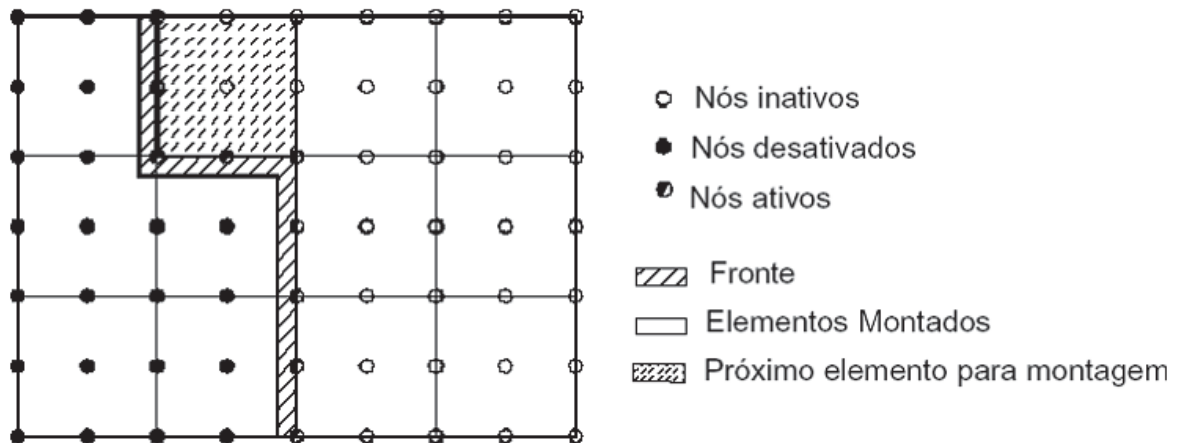
O método de solução adotado foi o método frontal, descrito por Taylor e Hughes (1981). O primeiro objetivo do método frontal é a eliminação de variáveis logo após sua introdução, via equações apropriadas, dentro da matriz global. Imediatamente após todas as contribuições de todos os elementos para um nó particular terem sido montadas, então as variáveis correspondentes e associadas com aquele nó podem ser eliminadas. Desta forma, a matriz completa nunca é montada, visto que todas as equações reduzidas podem ser eliminadas da memória e armazenadas em disco. As equações mantidas na memória, com os nós e variáveis correspondentes são denominadas *fronte* e o número de variáveis desconhecidas dentro do *fronte* é denominado *largura do fronte*. A largura do fronte muda continuamente, visto que, uma vez que todas as contribuições para um nó tenham sido completamente somadas, então a redução da equação correspondente, baseada sobre um pivoteamento diagonal, pode ser executada. Nos métodos de solução para matrizes simétricas, apenas a triangular superior da matriz é armazenada em qualquer tempo. Entretanto, para matriz global assimétrica, que é o caso do presente estudo, um procedimento diferente é adotado. Uma área de memória pré-assinalada para a matriz global é preenchida de contribuições de elementos. A maior entrada diagonal nesta área pré-assinalada de memória é encontrada e usada como pivô num processo de eliminação direta de Gauss. Quando são

eliminadas, o máximo número de equações pré-determinadas, as equações reduzidas correspondentes são escritas no disco e mais elementos e equações correspondentes introduzidos na memória. O requerimento mínimo de memória para matrizes assimétricas é quase duas vezes maior que o requerido para matrizes simétricas. As equações, nós e variáveis correntemente na memória são denominados ativos, aqueles guardados em disco são denominados desativados e aqueles para serem ainda introduzidas na memória são denominados inativos. Isto é mostrado esquematicamente na Fig. 3.7. Foi construída uma rotina por Campos-Silva (1998) para elementos com nove nós e escoamentos laminares baseada em Taylor e Hughes (1981). No presente trabalho, tal rotina foi modificada de tal modo a poder ser capaz de solucionar escoamentos turbulentos com efeitos rotacionais do domínio.

O método frontal tem a vantagem de que, em nenhum instante, a matriz global necessita ser montada completamente, sendo que a maior matriz montada é definida por um parâmetro que define o tamanho do fronte. Desta forma, a solução do sistema pode ser realizada em computadores com memórias relativamente pequenas e com média capacidade de armazenamento em disco. O preço a se pagar é um tempo maior para a solução, visto que, durante o processamento, serão lidos dados armazenados em disco e este processo ainda é muito lento. Este método também pode ser adaptado para uma solução segregada, em que cada equação é resolvida separadamente. No caso de problemas tridimensionais, uma solução segregada pode ser mais efetiva em termos de armazenamento de variáveis na memória do computador.

O método frontal de solução foi escolhido também pelo enfoque que se adotou, o qual é baseado, principalmente, no método de montagem da matriz global, como no método de elementos finitos de Galerkin. Na maioria dos trabalhos sobre o método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM), o enfoque é similar ao do método de volumes finitos, em que o acoplamento pressão-velocidade é resolvido por métodos baseados no método SIMPLE, Patankar (1980). Assim, soluções segregadas são mais utilizadas. Nos métodos de volumes finitos, os sistemas resultantes, geralmente, são matrizes com três, cinco ou nove diagonais, dependendo de quantos nós vizinhos são considerados, para calcular os fluxos para os volumes de controle.

Figura 3.7 - Definição de frente e nomenclatura usada no método frontal



Fonte: Taylor e Hughes (1981).

Para se identificar cada variável, utilizam-se dois vetores: um que contém o número de graus de liberdade por nó e outro que identifica o número do primeiro grau de liberdade em cada nó. Na solução das equações do movimento, o primeiro grau de liberdade corresponde à componente de velocidade U ; o segundo a pressão, se for um nó de canto, e o terceiro grau de liberdade corresponde à velocidade V . Cada nó local num elemento tem um número global que é dado pela matriz de conectividade definida quando se gera a malha. Taylor e Hughes (1981) mostram, numa maneira bem clara, o processo de montagem das matrizes nos elementos e da matriz global.

No presente trabalho, como se adotou o processo de solução misto, isto é, existem mais nós de velocidade do que de pressão, tem-se número de graus de liberdade variável por nó, como está mostrado na Figura 3.5. No contexto global, uma variável é identificada por um índice definido na forma, Taylor e Hughes (1981), Figura 3.8:

Figura 3.8 - Ilustração da formação do índice das variáveis na matriz global.

$$\begin{aligned} itotu &= nadfm(no) \\ itotv &= nadfm(no) + nodfm(no) - 1 \\ \text{if } (nodfm(no).eq.3) &\rightarrow itotp = nadfm(no) + nodfm(no) - 2 \end{aligned}$$

Fonte: Campos-Silva (1998).

Na Figura 3.9, $nadfm$ é um vetor que contém o número global do primeiro grau de liberdade em cada nó, que corresponde à velocidade u ; $itotv$ corresponde ao número global do terceiro grau de liberdade em nós onde são calculados (u, v, p) ou ao número global do

segundo grau de liberdade onde são calculados (u, v); *itotp* representa a variável pressão em nós onde esta é calculada.

No presente caso, o vetor *nadfm* é formado da maneira ilustrada na Figura 3.9, enquanto que o vetor *nodfm*, para um elemento quadrático qualquer, pode ser formado seguindo o procedimento mostrado na Figura 3.10.

Figura 3.9 - Formação do vetor do índice global do primeiro grau de liberdade por nó

```
nadfm(1) = 1
do ipoin = 2, npoin
  nadfm(ipoin) = nadfm(ipoin-1) + nodfm(ipoin-1)
```

Fonte: Campos-Silva (1998).

Figura 3.10 - Formação do vetor do número de graus de liberdade por nó

```
nodfm = número máximo de graus de liberdade num nó
do ielem = 1, nelem
  do inodp = 1, nnodp - 2, 2
    nodfm(lnods(ielelem, inodp)) = ndofm
    nodfm(lnods(ielelem, inodp + 1)) = ndofm - 1
```

Fonte: Campos-Silva (1998).

Na Figura 3.10, *nodfm* = 3 para solução do escoamento, *nelem* é o número de elementos na malha, *nnodp* é o número de nós num elemento e *lnods* é a matriz de conectividade. O critério de convergência ou de parada da solução, baseando-se em Taylor e Hughes (1981), é definido como:

$$\frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\phi^{k+1}} \leq \varepsilon \quad (3.55)$$

O valor de ε pode ser definido de acordo com o grau de precisão que se deseja na solução, onde ϕ representa cada variável dentro do sistema global e k é a iteração no processo de solução. A cada iteração, a nova variável, é atualizada usando um fator de relaxação na forma:

$$\tilde{\phi}^{k+1} = relax.\phi^k + (1-relax).\phi^{k+1}, \quad 0 < relax < 1 \quad (3.56)$$

O valor do fator de relaxação, geralmente é tomado entre 0,5 e 0,9.

3.6 Estrutura do programa computacional

A estrutura do programa é apresentada pela Fig. 3.11, na qual se pode observar a seqüência de chamada das sub-rotinas. A função de cada sub-rotina é brevemente descrita abaixo, bem como as sub-rotinas chamadas por cada uma delas:

3.6.1 DIMENS

Nesta sub-rotina, estão definidas as dimensões máximas da matriz de conectividade, o tamanho máximo do fronte, bem como o número máximo de pontos da malha e número máximo de variáveis (o número total de variáveis é calculado na sub-rotina **DINPUT** descrita abaixo). Pode ser modificada para definir um dimensionamento dinâmico das matrizes e vetores usados no programa.

3.6.2 DINPUT

Nesta sub-rotina, são lidos os dados de controle como, coordenadas e numeração dos elementos na matriz de conectividade, as propriedades físicas do fluido, dados da geometria do problema, as condições iniciais e as condições de fronteira. Os vetores contendo o número de graus de liberdade por nó e o número global do primeiro grau de liberdade de cada nó, também são definidos nesta sub-rotina. São chamadas duas sub-rotinas para checar os dados; **DIAGN1** checa os dados de controle (dimensões dos vetores) e os restantes são checados pelo **DIAGN2** (coordenadas e matriz de conectividade). Se algum erro for detectado durante a execução do programa, a execução é parada e o erro é impresso num arquivo de saída.

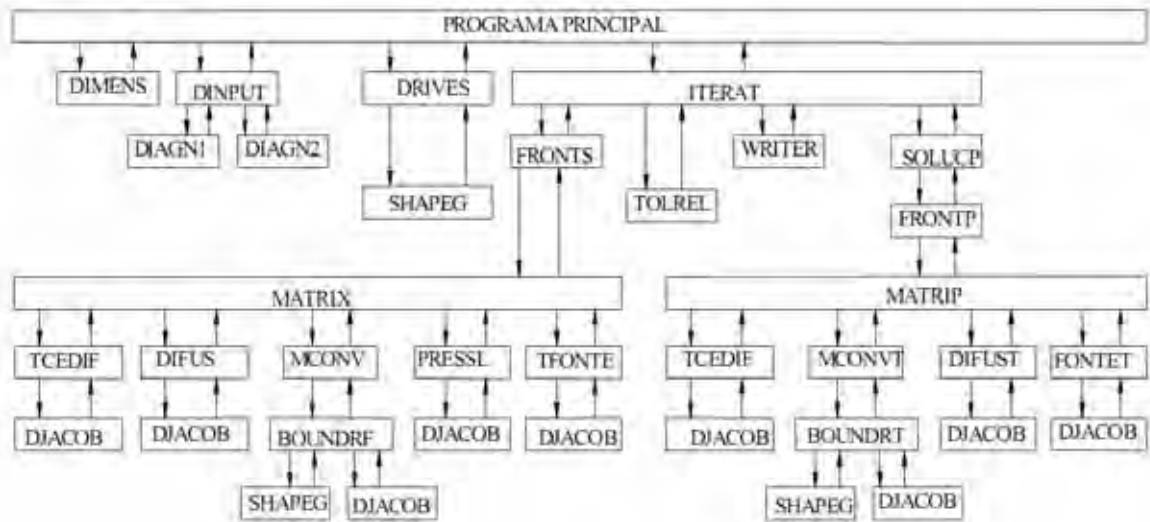
3.6.3 DRIVES

Nesta sub-rotina, calculam-se as funções de interpolação e suas derivadas em todos os pontos de Gauss em áreas (9 pontos) e contornos (3 pontos) dos subvolumes de controle dentro dos elementos de referência (9 nós para velocidades e outros escalares, 4 nós para pressão), onde as integrações são realizadas, através da sub-rotina **SHAPEG**. Estes dados são armazenados em arquivos no disco rígido e são lidos no cálculo das matrizes dos elementos.

3.6.4 ITERAT

Esta sub-rotina faz a chamada da sub-rotina principal **FRONTS** para solução da matriz do problema e verifica se as variáveis calculadas estão dentro de uma tolerância especificada por um processo iterativo através da sub-rotina **TOLREL**. Os resultados são impressos pela sub-rotina **WRITER**. A sub-rotina **SOLUES** é chamada para fazer o cálculo de um escalar qualquer, como, por exemplo, concentração de massa e a sub-rotina **FUNCORR** para o cálculo da função de corrente. A sub-rotina **FRONTS** formula a matriz global, impõe as condições de contorno e resolve os sistemas resultantes de equações usando o método frontal não simétrico de solução. **FRONTS** chama a sub-rotina **MATRIX** que calcula as matrizes dos elementos de acordo com o modelo numérico proposto e o vetor do lado direito do sistema de equações. **MATRIX** por sua vez chama várias outras sub-rotinas para cálculo dos vários termos das equações. As sub-rotinas chamadas por **MATRIX** são: **TCEDIF**, que calcula os fluxos convectivos e difusivos nos contornos dos subvolumes de controle, que, por sua vez, chama as sub-rotinas **DJACOB**, para o cálculo do jacobiano em termos do sistema de coordenadas locais e **VISTUR** para calcular a viscosidade turbulenta. **MCONV**, que monta a matriz dos termos convectivos e difusivos dentro de cada elemento; **DIFUS** que monta a matriz dos termos difusivos e calcula a matriz de massa, chama **DJACOB**; **PRESSL** que calcula as matrizes dos termos de pressão das equações de quantidade de movimento e as matrizes dos termos da equação de continuidade, chama a **DJACOB**; a sub-rotina **TFONTE** calcula os vetores dos termos fonte das equações de quantidade de movimento, nesta sub-rotina se define se o caso é de convecção natural ou mista, chama a **DJACOB**; **BOUNDRF** esta sub-rotina calcula a matriz dos fluxos convectivos em contornos externos de cada elemento, chama a sub-rotina **SHAPEG** e a sub-rotina **MCONV3** que monta a matriz dos termos convectivos. A sub-rotina **SOLUES** chama as sub-rotinas **WRITES** para impressão dos resultados e a **FRONTP**, a qual tem a mesma função da sub-rotina **FRONTS**; **FRONTP** chama **MATRIP**, que, por sua vez, chama **TCEDIE** para calcular as matrizes dos termos convectivos e difusivos; **DIFUES** para criar as matrizes dos termos difusivos e **MCONES** que monta a matriz dos termos convectivos e difusivos dentro de cada elemento e chama **BOUNDRT** para calcular os fluxos convectivos em contornos externos dos elementos.

Figura 3.11 - Estrutura do programa computacional



Fonte: Campos-Silva (1998).

4 Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados da aplicação do método numérico para o escoamento incompressível e transiente de fluidos sobre máquinas de fluxo com efeito de rotação. Primeiro, para o caso de escoamentos em máquinas de fluxo axiais e posteriormente para um caso de máquina radial. Os casos propostos foram analisados para alguns números de Reynolds e para alguns valores de número de Rotação, no intuito de comparar a influência deste adimensional nos campos de velocidade e pressão.

No presente trabalho foi utilizado um código computacional escrito em FORTRAN no qual o Método de Elementos Finitos por Volumes de Controle foi aplicado para discretização das equações conservativas.

Para os escoamentos simulados, foi adotado o esquema totalmente implícito (3.2), desse modo, não é necessário se impor nenhuma condição inicial para o campo de pressão. Em todos os casos, para o primeiro passo de tempo, a condição inicial para a velocidades foi imposta como sendo zero em todos os pontos da malha, exceto caso nos contornos fossem impostos valores de velocidades especificados.

Para as simulações realizadas foram utilizados 4 computadores AMD Athlon 64 3700+ de 2.2 GHz de velocidade com 2 Gb de memória RAM de 667 Hz, e 1 computador Intel Core 2 Duo E7400 de 3.02 GHz de velocidade e 3 Gb de memória RAM de 800 MHz, cada um executando um caso diferente em processamento individual, não sendo aplicado o processamento paralelo.

4.1 Escoamento incompressível com efeito de rotação sobre as pás de uma turbina axial.

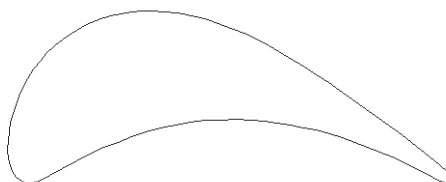
Para simular o escoamento sobre máquinas de fluxo, no caso uma turbina axial, optamos por utilizar um perfil o mais curvado possível de modo que se originassem estruturas secundárias interessantes à análise como recirculações e instabilidades turbulentas no domínio analisado. Nesse intuito, escolhemos um perfil do Instituto Von Karman, a VKI T152, baseada no trabalho de Cardamone (2006), que realizou análises tanto numéricas quanto

experimentais sobre parâmetros relacionados ao escoamento compressível em três perfis de turbinas do mesmo instituto.

4.1.1 Geometria e Condições de Contorno

A Figura 4.1 mostra o perfil de uma palheta do rotor da turbina VKI T152, gerado com auxílio do software de CAD AutoCAD, que será utilizada como base para a composição do domínio de simulação do problema.

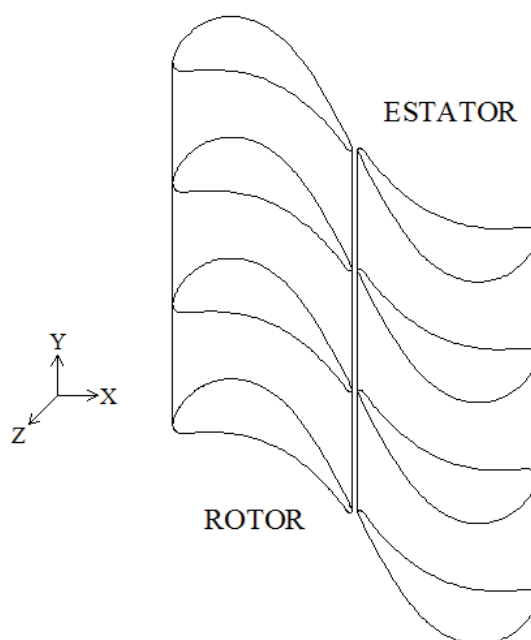
Figura 4.1- Perfil de uma palheta do rotor turbina VKI T152



Fonte: Pereira (2010).

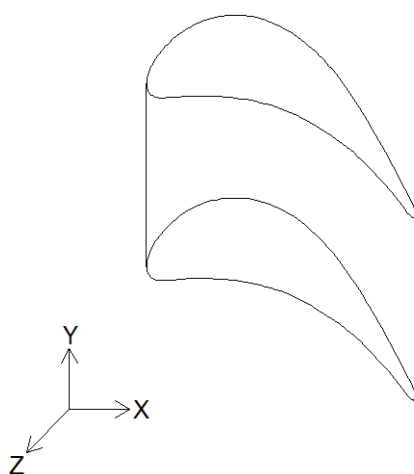
A intenção inicial era de simular o escoamento passando através de uma cascata de palhetas da referenciada turbina, como representado na Figura 4.2, analisando além da passagem do fluido pelo rotor, seu posterior escoamento pelo estator. No entanto, frente à dificuldade de implementar computacionalmente o acoplamento das partes estática e dinâmica do problema, no que diz respeito às condições de contorno na interface dos dois subdomínios, optou-se apenas pela análise do escoamento no rotor e, além disso, apenas em uma seção de passagem entre duas palhetas consecutivas, uma vez que o escoamento é o mesmo entre duas palhetas quaisquer. Tal simplificação está mostrada na Figura 4.3.

Figura 4.2 - Cascata de palhetas no rotor e no estator da turbina VKI T152



Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.3 – Seção de passagem do escoamento entre duas palhetas consecutivas para turbina VKI T152

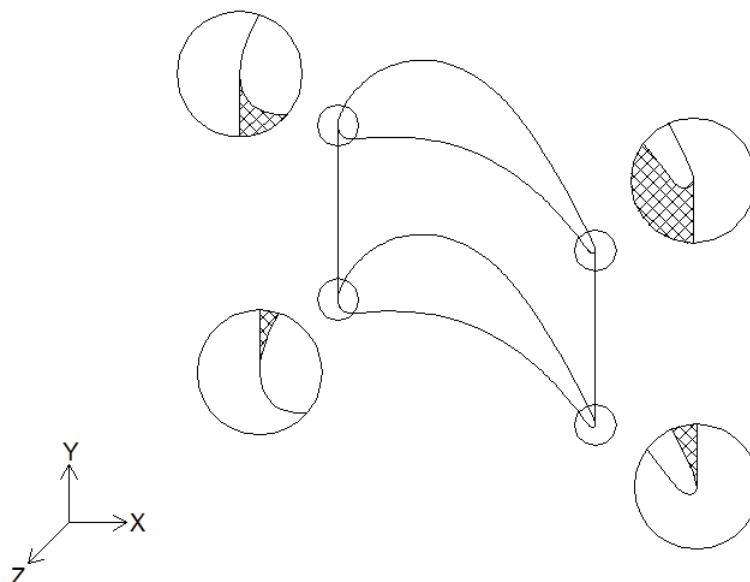


Fonte: Pereira (2010).

Apesar dessa simplificação colocada para a geometria, outro inconveniente aparece quando esta é importada para o software ANSYS, na etapa de geração da malha de elementos finitos. Do modo que o domínio foi definido na figura anterior, as áreas com angulação muito elevada, que se encontram nas ampliações na Figura 4.4, correspondendo às áreas hachuradas

nas mesmas, apresentam sérias dificuldades para serem divididas em elementos finitos quadrilaterais.

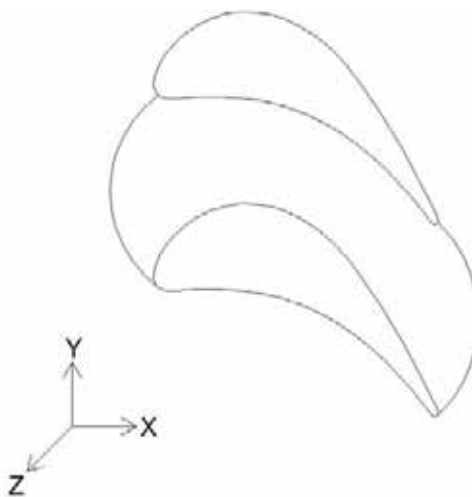
Figura 4.4 – Ampliação nas regiões problemáticas para geração da malha



Fonte: Pereira (2010).

Para que tal problema fosse contornado, foi necessária uma adaptação nos contornos do domínio para que fosse possível a geração da malha: as linhas que definem as fronteiras de entrada e saída do domínio precisavam ser curvadas, de tal modo que a angulação nas regiões se tornasse mais suave e, assim, as mesmas poderiam ser mais facilmente divididas nos elementos finitos requeridos. Logo, nossa geometria final para o domínio é a ilustrada na Figura 4.5.

Figura 4.5 –Domínio final com as simplificações necessárias adotadas



Fonte: Pereira (2010).

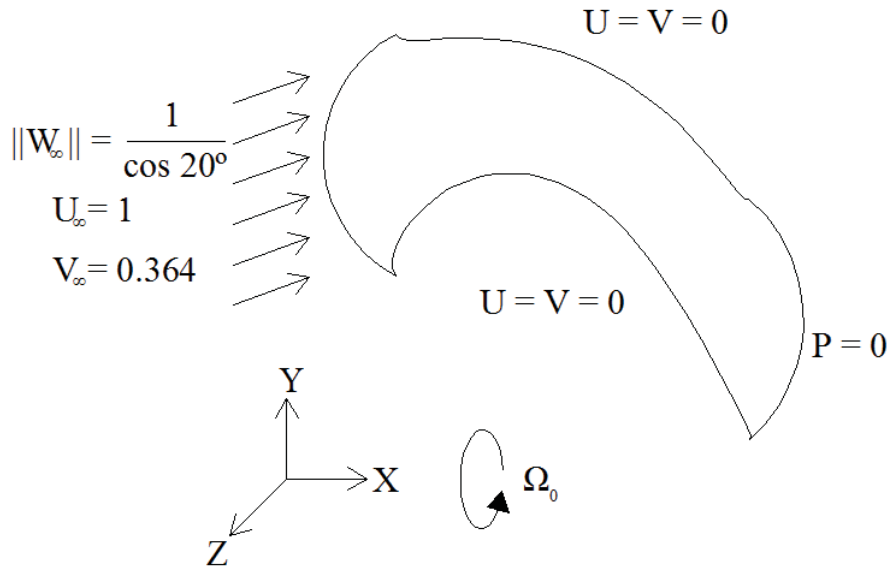
Os parâmetros geométricos utilizados na definição do domínio e das condições de contorno impostas para o problema estão mostrados na **Tabela 4.1**.

Tabela 4.1 - Parâmetros geométricos utilizados na composição do domínio.

Parâmetro	Valor
Ângulo de ataque (α)	45°
Comprimento da corda do perfil (L)	1
Passo	0.6

Juntamente, as condições de contorno aplicadas são: componente U da velocidade relativa prescrita na entrada do domínio unitária, condição de não-deslizamento nas paredes dos perfis, e na fronteira de saída foi imposta pressão nula, conforme ilustrado na Figura 4.6.

Figura 4.6 - Esquema do domínio com as condições de contorno impostas em referencial não-inercial



Fonte: Pereira (2010).

As equações para o caso particular de escoamento como foi colocado, tem as equações governantes de acordo com as simplificações nas Eqs. (2.48), (2.49) e (2.50), lembrando que todas as variáveis adimensionais presentes são relativas ao referencial não inercial, conforme proposto e deduzido no capítulo 2. Logo:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \quad (4.3)$$

A viscosidade efetiva nas Eqs. (4.2) e (4.3) é definida como $1 + \nu_t$. As variáveis adimensionais de espaço, das velocidades, da pressão, do número de Reynolds, da viscosidade turbulenta, da velocidade angular e do número de rotação utilizadas nas equações (4.1) a (4.3) foram definidas no capítulo 2, e aplicadas para o caso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{x}{L}; \quad Y = \frac{y}{L}; \quad U = \frac{u}{U_\infty}; \quad V = \frac{v}{U_\infty}; \quad P = \frac{p_t - p_0}{\rho U_\infty^2}; \\
\text{Re} &= \frac{\rho U_\infty L}{\mu}; \quad \nu_t = \frac{\nu_t^*}{\nu} \text{Re}; \quad \Omega_j = \frac{\omega_j}{\Omega_0}; \quad \text{Ro} = \frac{L \Omega_0}{U_\infty}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Percebe-se nas equações. (4.2) e (4.3), que o componente da aceleração de Coriolis desaparece, e para a máquina axial, da maneira em que foram colocadas as variáveis na Figura 4.6, isso realmente acontece, como será mostrado abaixo.

Da forma como foi proposto o problema bidimensional, as variáveis foram definidas como se segue:

$$\Omega_i \hat{e}_i = \Omega_1 \hat{e}_1, \quad U_j \hat{e}_j = U_1 \hat{e}_1 + U_2 \hat{e}_2 \quad e \quad X_k \hat{e}_k = X_1 \hat{e}_1 + X_2 \hat{e}_2 \tag{4.5}$$

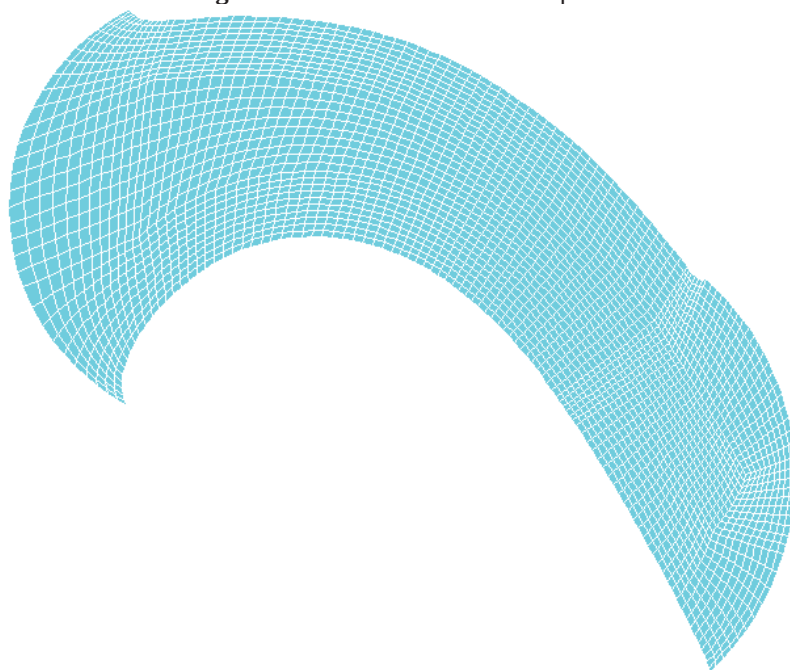
Assim, o termo correspondente à aceleração de Coriolis, pode ser desenvolvido, a partir da eq. (2.51), para as direções 1 e 2.

$$-2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k \hat{e}_i = -2(\varepsilon_{123} \Omega_2 U_3 + \varepsilon_{132} \Omega_3 U_2) \hat{e}_1 - 2(\varepsilon_{231} \Omega_3 U_1 + \varepsilon_{213} \Omega_1 U_3) \hat{e}_2 \tag{4.6}$$

Portanto, como não foi considerada nem a rotação em torno do eixo 3 nem a velocidade na mesma direção, todos os termos se anulam pela presença de pelo menos uma dessas duas variáveis.

A Figura 4.7 mostra a malha utilizada para discretização do domínio em elementos finitos quadrilaterais, utilizando o pré-processador do ANSYS 5.2. No entanto, o mesmo gera elementos de oito nós e, com o arquivo de conectividade gerado pelo ANSYS, o nono nó de cada elemento será gerado por interpolação das coordenadas dos demais.

Figura 4.7 - Malha de elementos quadrilaterais.



Fonte: Pereira (2010).

A malha ilustrada na Figura 4.7, aplicada na simulação, possui 2900 elementos e 11841 nós. Os casos simulados para malha foram para os valores de número de Reynolds (Re) de 10^4 e 10^5 , nos quais para cada um desses foi variado o número de rotação (Ro) entre os valores inteiros 1 e 2.

Os escoamentos foram calculados para valor de tempo adimensional partindo do zero até o valor 3 e os passos de tempo adotados foram diferentes, de acordo com a dificuldade de convergência apresentada em cada caso.

Para exemplificar, no caso de número de Reynolds igual a 10^4 e número de Rotação igual a 1 o passo de tempo foi de 2×10^{-2} . Para o número de Rotação igual a 2, para o mesmo número de Reynolds, o passo de tempo foi de 5×10^{-3} . Enquanto que, para os casos de número de Reynolds de 10^5 , em ambos os casos de número de Rotação foi utilizado o passo de tempo de $2,5 \times 10^{-3}$.

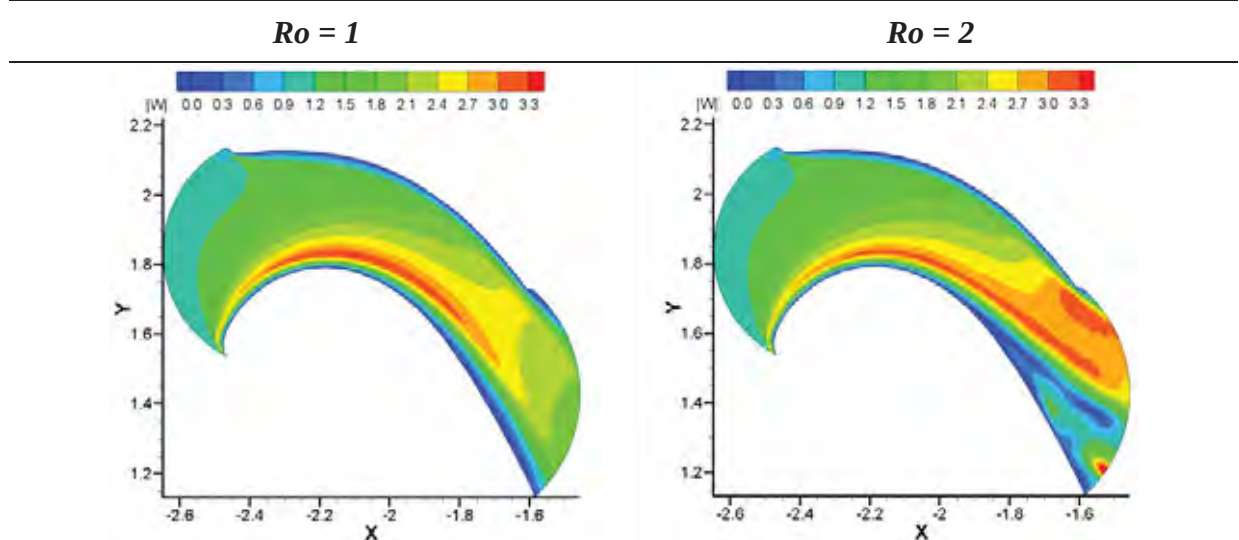
Para todos os casos de Reynolds, as condições iniciais dos campos de velocidades foram tomadas como nulas. Não houve utilização do campo de velocidade, para um número de Reynolds obtido, como condição inicial, por exemplo, para a solução do caso com o mesmo número de Reynolds, mas número de rotação diferente. Para a simulação utilizando o modelo de Smagorinsky, foi utilizada a constante de Smagorinsky com o valor $C_s = 0,1612$.

A seguir, mostramos alguns dos resultados para os casos propostos em itens que contém o campo da norma da velocidade relativa $\|\vec{w}\|$, o campo da componente U da velocidade relativa, as linhas de corrente e o campo de pressão. Uma evolução mais completa dos campos escalares e linhas de corrente, para o caso da turbina axial, pode ser encontrada no Apêndice A.

4.1.2 Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^4$

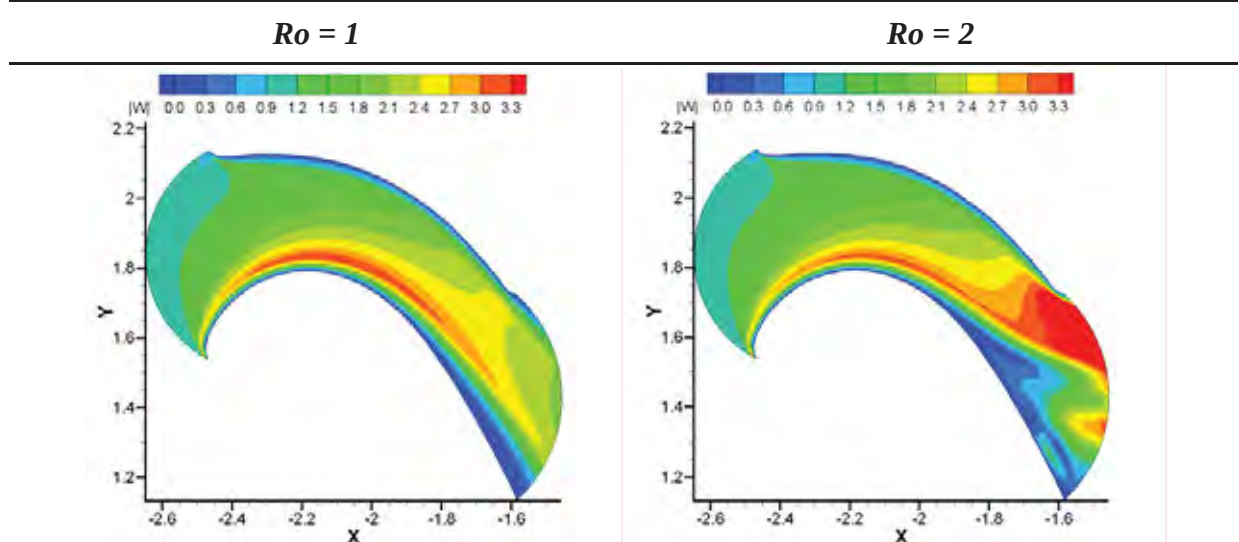
4.1.2.1 Norma da Velocidade Relativa $\|\vec{w}\|$

Figura 4.8 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,5$



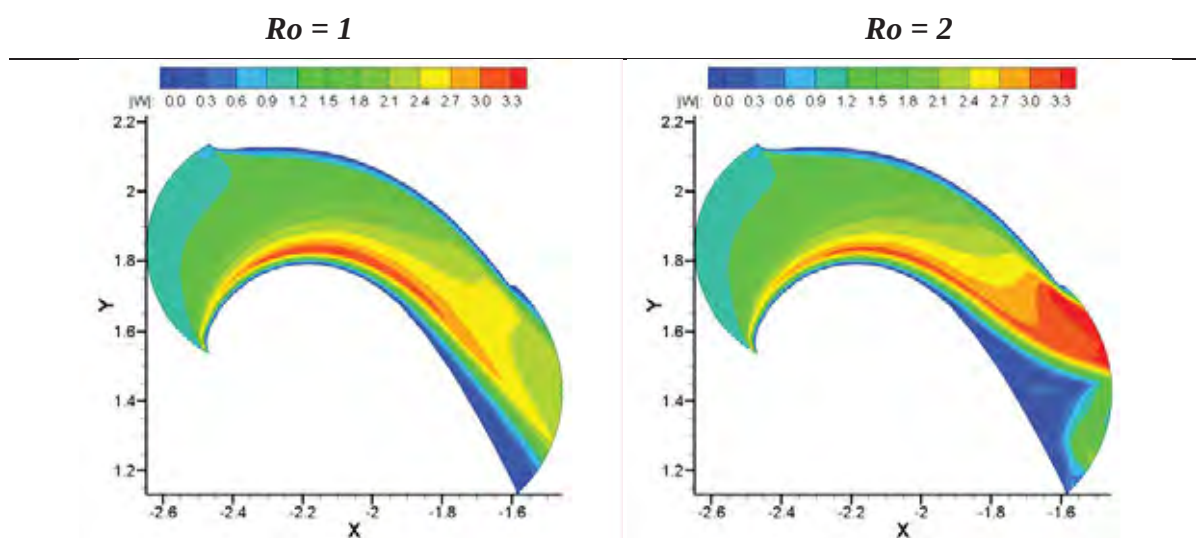
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.9 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,25$



Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.10 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

Se analisarmos as ilustrações sobre a evolução do campo de velocidade relativa, que estão representadas no Apêndice A, fica evidente que a sobreposição dos efeitos de rotação sobre os de convecção (aumento do número de rotação), causou mudanças significativas na estrutura do escoamento, mesmo para número de Reynolds não tão elevado, como no caso.

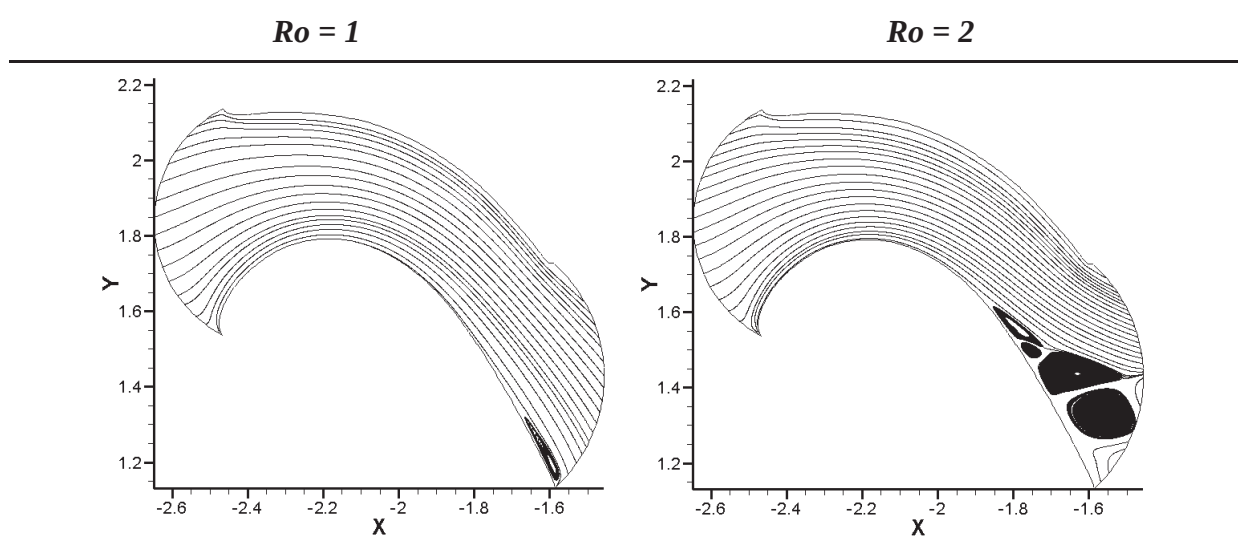
Pelas figuras de velocidade, podemos notar que, desde os instantes iniciais já ocorre uma diferenciação nos padrões do escoamento. Tais figuras são interessantes, pois demonstram valores quantitativos das velocidades, enquanto os aspectos qualitativos podem ser mais bem analisados pelos resultados de linhas de corrente.

Do ponto de vista quantitativo das velocidades, observamos que, para $Ro = 1$, o escoamento, desde tempo adimensional baixo, alcança valores de velocidade muito semelhantes ao que terá na condição de tempo final, ou seja, ocorre uma evolução lenta do escoamento até sua condição final, sendo muito parecidas as sucessivas configurações. Por outro lado, quando $Ro = 2$, o aumento da rotação adimensional repercute em uma influência significativa da palheta superior sobre o escoamento, conferindo-lhe aceleração na saída do domínio, demonstrada tanto pelo aumento dos valores de velocidades, que são notados pela área clara na região, como também pela alteração na direção do escoamento que, dessa vez,

contornou o perfil na saída do domínio. No Apêndice A estão também presentes ilustrações sobre a evolução da componente U da velocidade nos pontos do domínio.

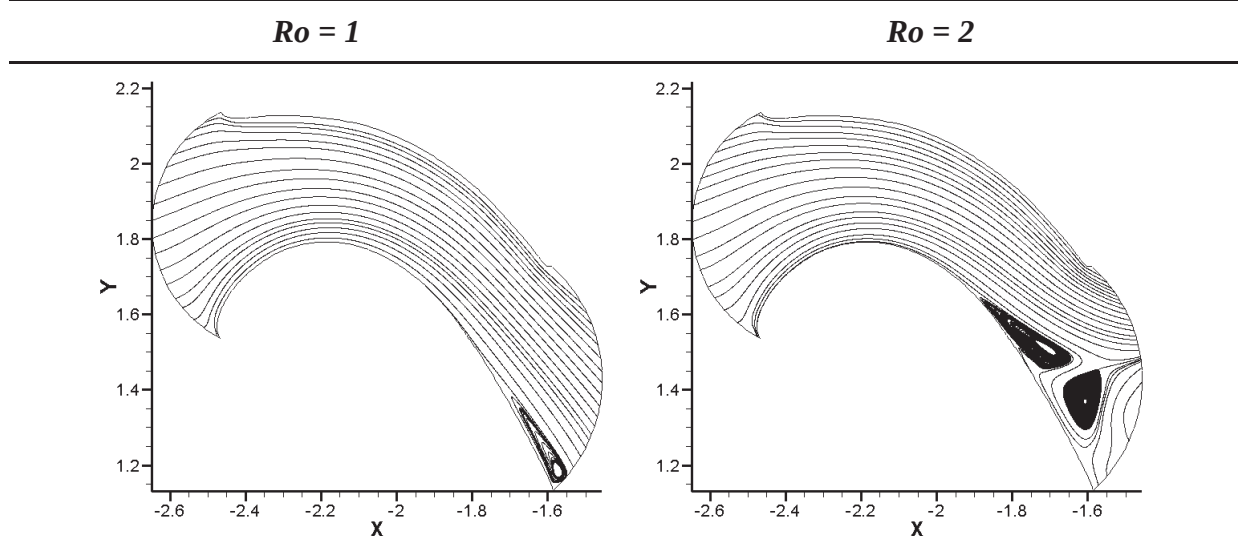
4.1.2.2 Linhas de Corrente

Figura 4.11 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 1,0$



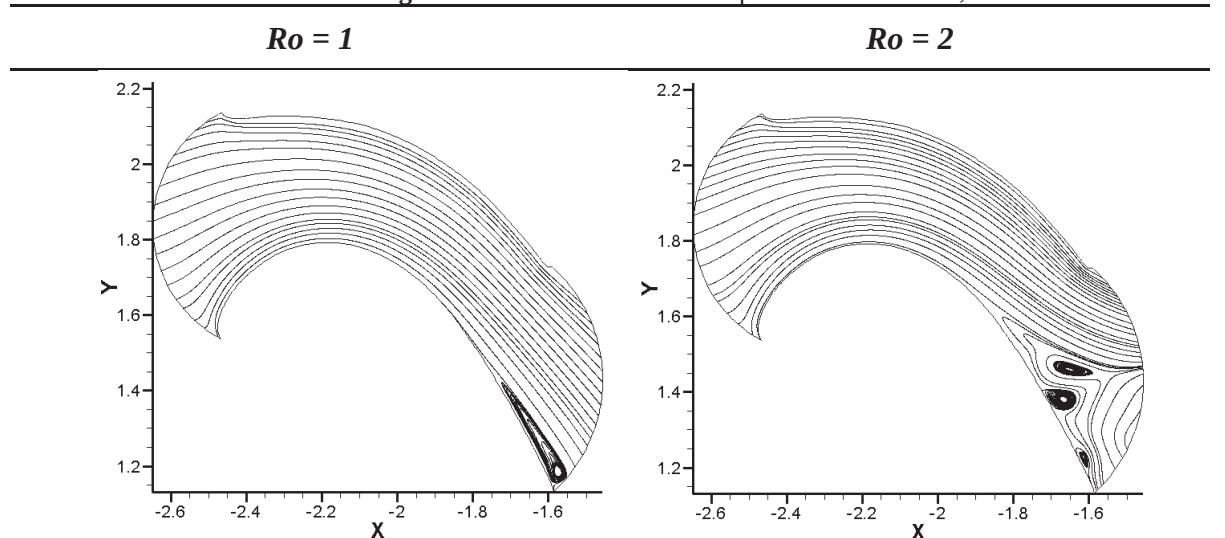
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.12 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 2,0$



Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.13 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$

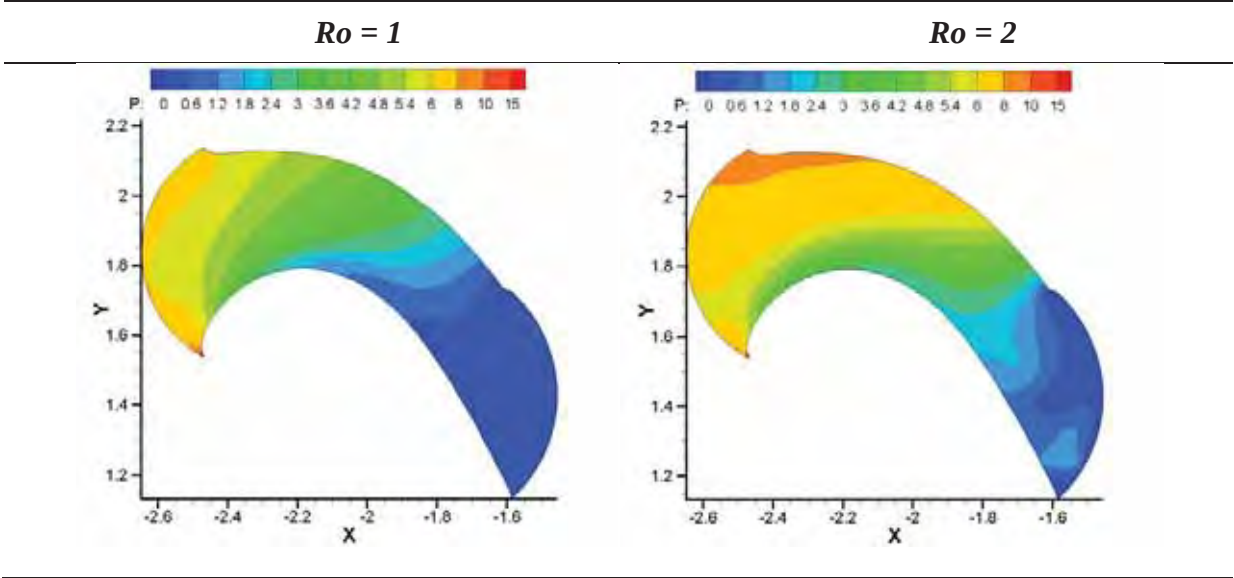


Fonte: Pereira (2010).

Analisando os resultados das linhas de corrente, presentes no Apêndice A e resumidamente apresentados acima, quando $Ro = 1$, podemos visualizar que durante intervalo de tempo razoável, o escoamento muda muito pouco, e por essas figuras, podemos notar que o escoamento descola gradativamente e aparece uma pequena recirculação sobre a palheta inferior, na região de saída do domínio, que pouco cresce até atingir o instante final, o que não era possível de se dizer pela figuras de campo. Em contrapartida, quando $Ro = 2$, as linhas de corrente revelam que o escoamento é fortemente caracterizado por instabilidades na região próxima à saída do domínio e, que estas mudam muito rápido no tempo, tendo em cada instante um padrão diferente, podendo ora ser uma recirculação pequena ora grande, ter vórtices grandes sozinhos ou acompanhados de pequenos, isolados ou em pares.

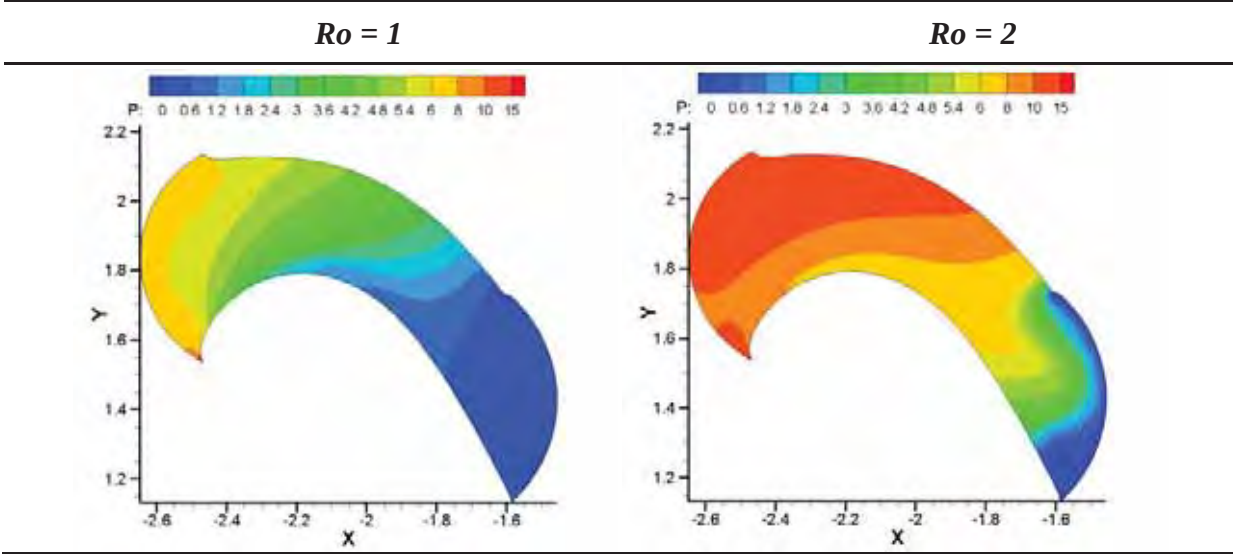
4.1.2.3 Campo de Pressão

Figura 4.14 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 0,5$



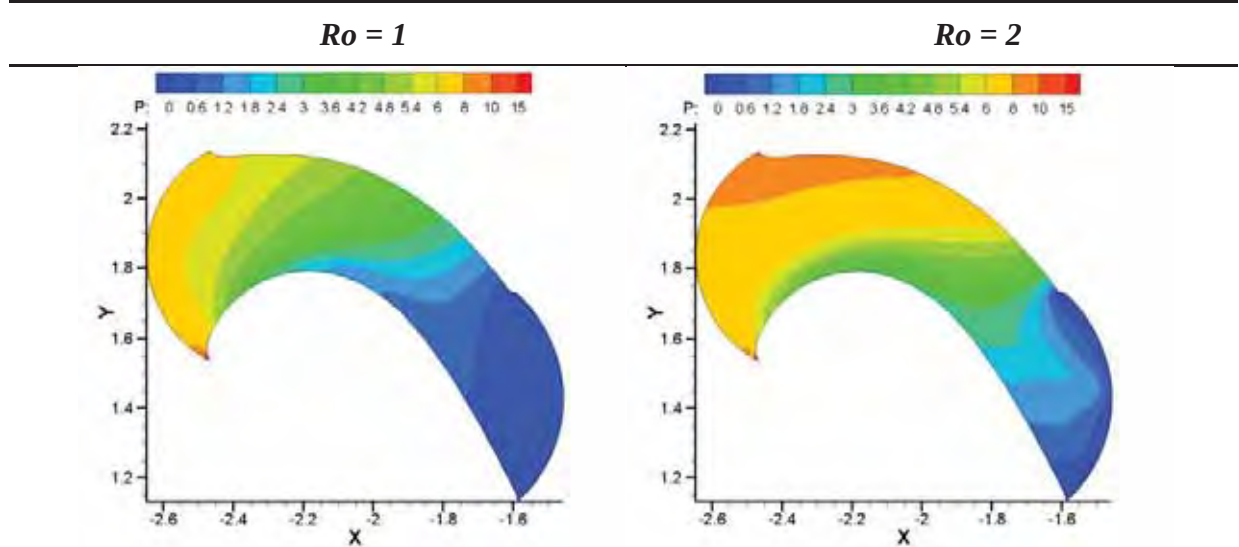
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.15 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 1,25$



Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.16 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$



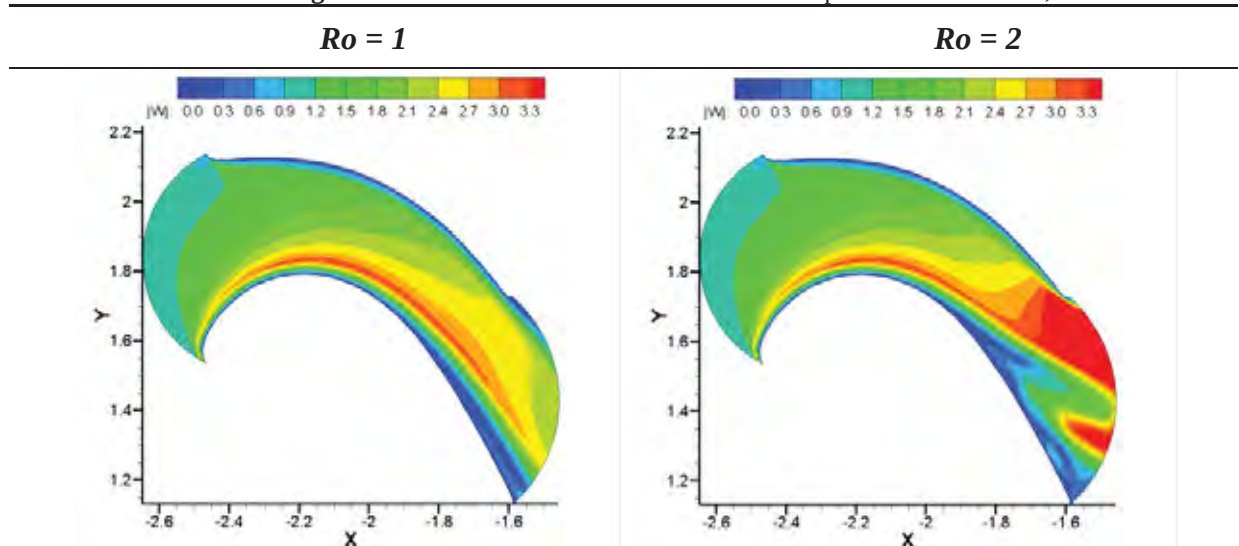
Fonte: Pereira (2010).

Das figuras de pressão, nota-se ainda, em complemento com os comentários sobre as velocidade e linhas de corrente que a pressão para os valores delimitados para as zonas, varia muito pouco para $Ro = 1$, enquanto que, para $Ro = 2$, é muito perceptível a constante mudança do escoamento, visto que hora há regiões claras na entrada do domínio, hora nem tanto, e todas as fronteiras das zonas estão mudando de posição.

4.1.3 Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^5$

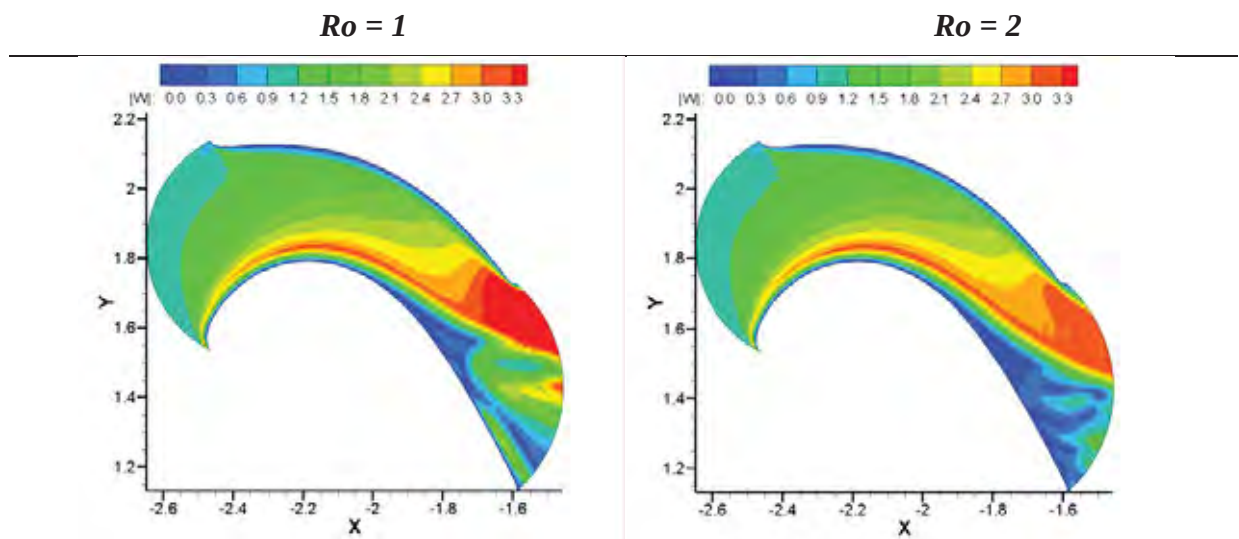
4.1.3.1 Norma da Velocidade Relativa $\|\vec{W}\|$

Figura 4.17 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,6$



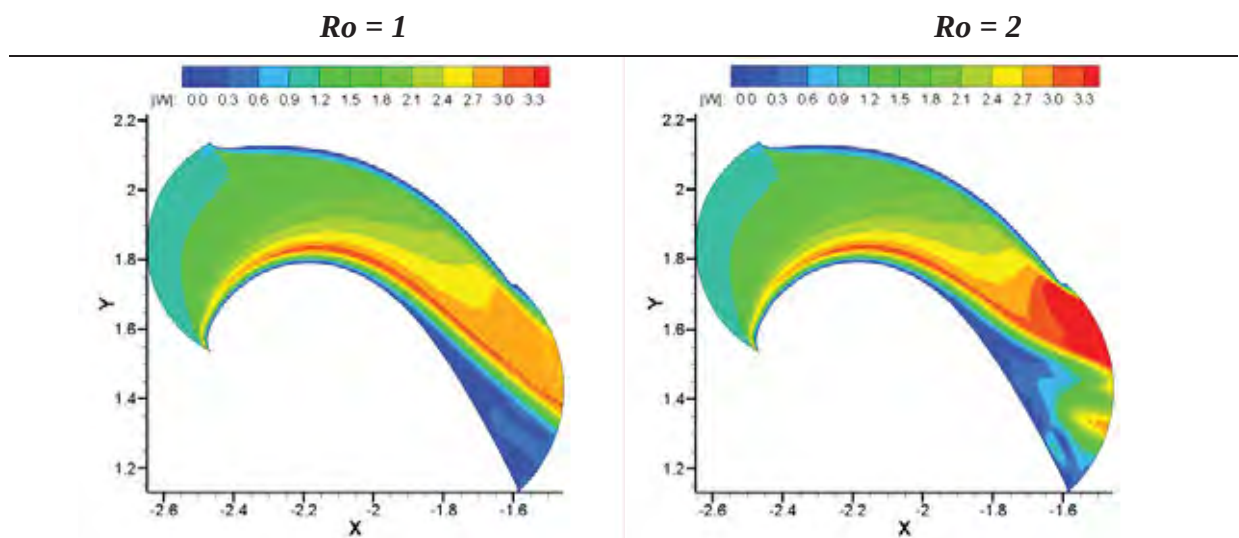
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.18 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$



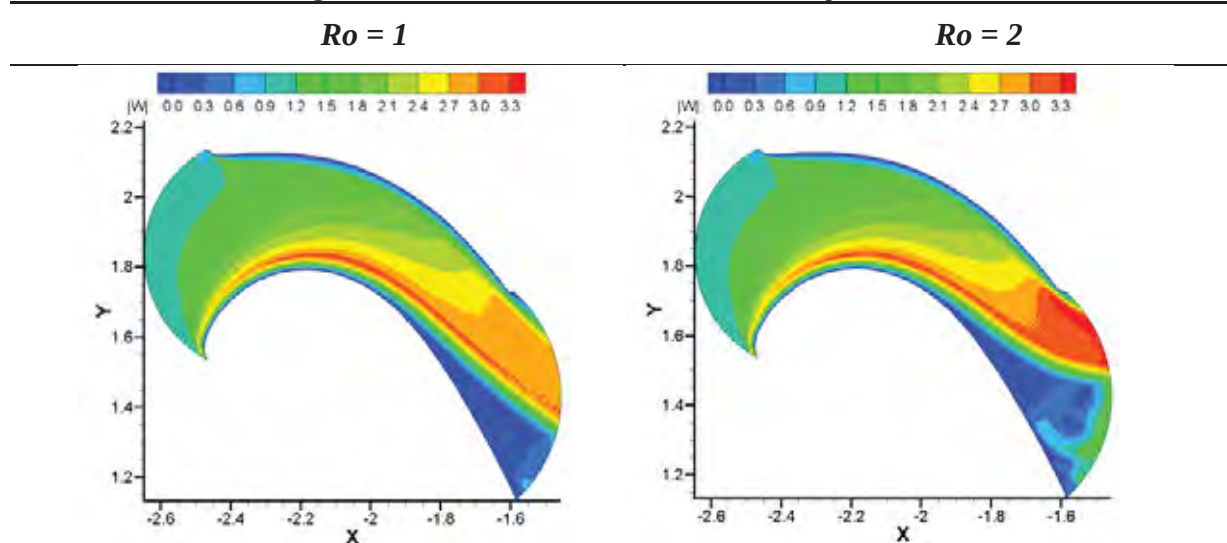
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.19 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,8$



Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.20 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

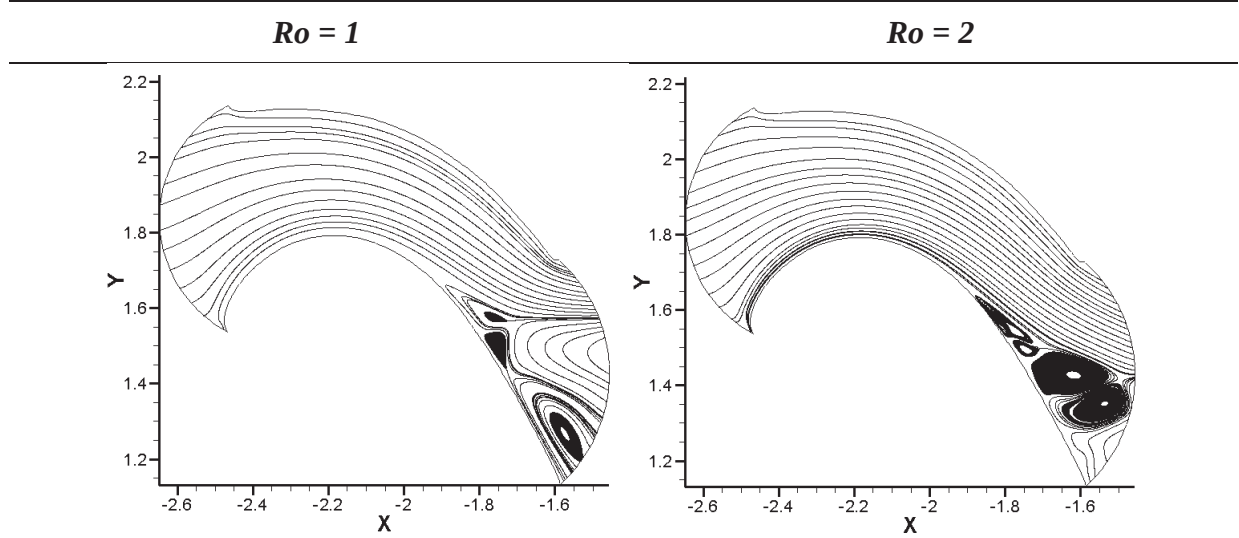
Analisando para $Re = 10^5$, quantitativamente as velocidades relativas, podemos dizer para $Ro = 1$ que o escoamento até $t = 0,6$ tinha uma tendência muito parecida com o escoamento para o caso de $Re = 10^4$, no entanto, após este, o descolamento do escoamento começou a gerar zonas de instabilidades na região do perfil inferior na saída do domínio e esse escoamento agora apresentou uma elevação de velocidade como um pulso, apenas uma vez, caracterizada no instante $t = 0,1$ e após isso o escoamento acomodou-se, atingindo praticamente o regime permanente em $t = 3,0$.

Para $Ro = 2$, as instabilidades aconteceram mais precocemente e se alastraram em uma região maior da saída do domínio, quando comparado com o caso de $Re = 10^4$, tendo três instantes em que houve uma aceleração elevada causada pela restrição na área de escoamento causada por essas instabilidades nos respectivos tempos, representada pelo aumento de velocidade intenso na saída superior do domínio.

Lembrando que, foram postadas nesse capítulo apenas poucas ilustrações de instantes de tempo adimensional interessantes para uma comparação breve, para um melhor entendimento da evolução dos campos de variáveis escalares, consultar o Apêndice A, para o caso de turbina axial. O componente U da velocidade para este caso também se encontra no referido.

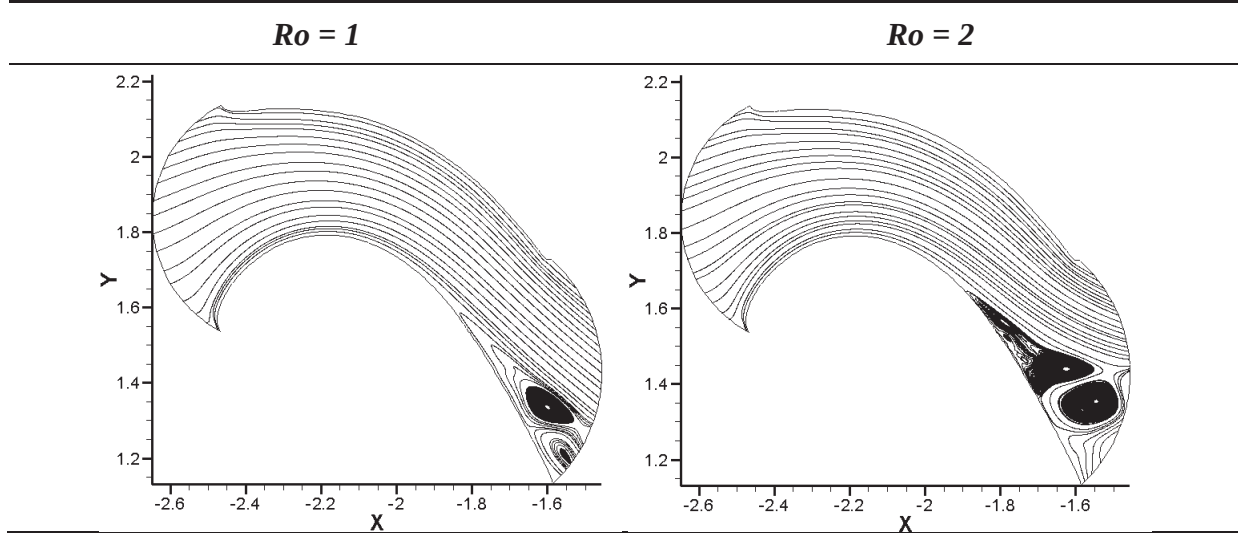
4.1.3.2 Linhas de Corrente

Figura 4.21 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$



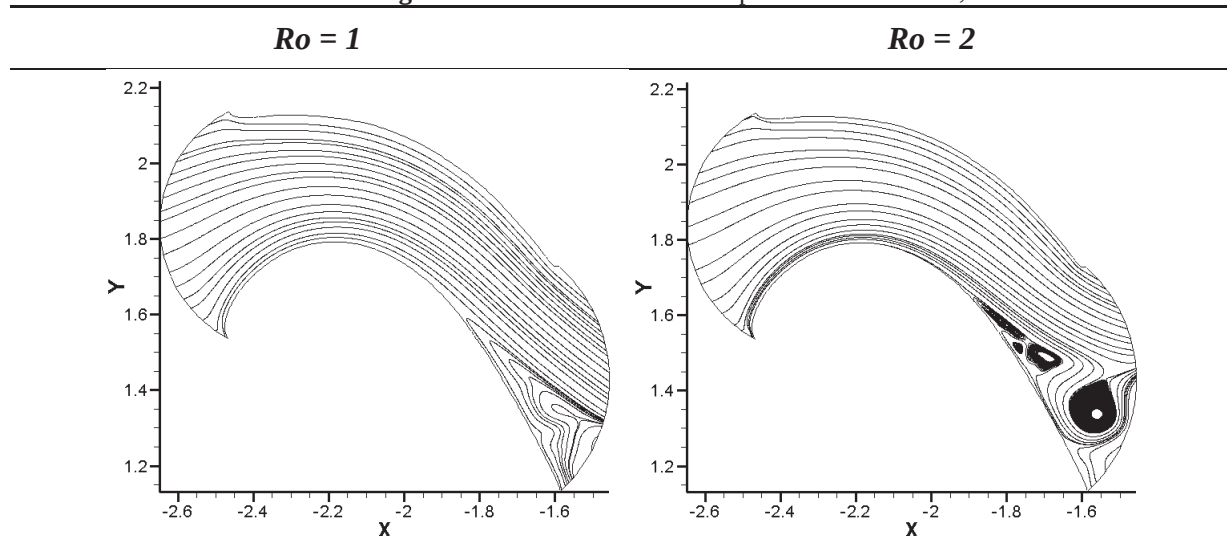
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.22 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 1,6$



Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.23 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

Pelas linhas de corrente, o escoamento com $Ro = 1$, diferente do caso de $Re = 10^4$, apresenta recirculações e vórtices que refletem uma instabilidade mais acentuada no instante de tempo $t = 1$, onde acontecia o pulso do escoamento. Após esse tempo, o que não era notado facilmente nas figuras de campo era o desenvolvimento dessas estruturas até o regime permanente, onde ocorrem vórtices importantes que vão aparecendo e desaparecendo até o escoamento chegar próximo ao regime permanente.

Quando $Ro = 2$, comparando com $Ro = 1$, novamente, o escoamento inicia sua turbulência em tempos mais baixos, já caracterizado por grandes recirculações, vórtices maiores aparecem com mais frequência e a mudança do comportamento turbulento nessa região de instabilidades é mais rápida, mudando bastante entre os intervalos de tempo ilustrados. Além disso, fica mais evidente nessas figuras, que este caso está longe ainda de seu regime permanente, visto que as duas últimas figuras são muito diferentes.

4.1.3.3 Campo de Pressão

Figura 4.24 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 0,6$

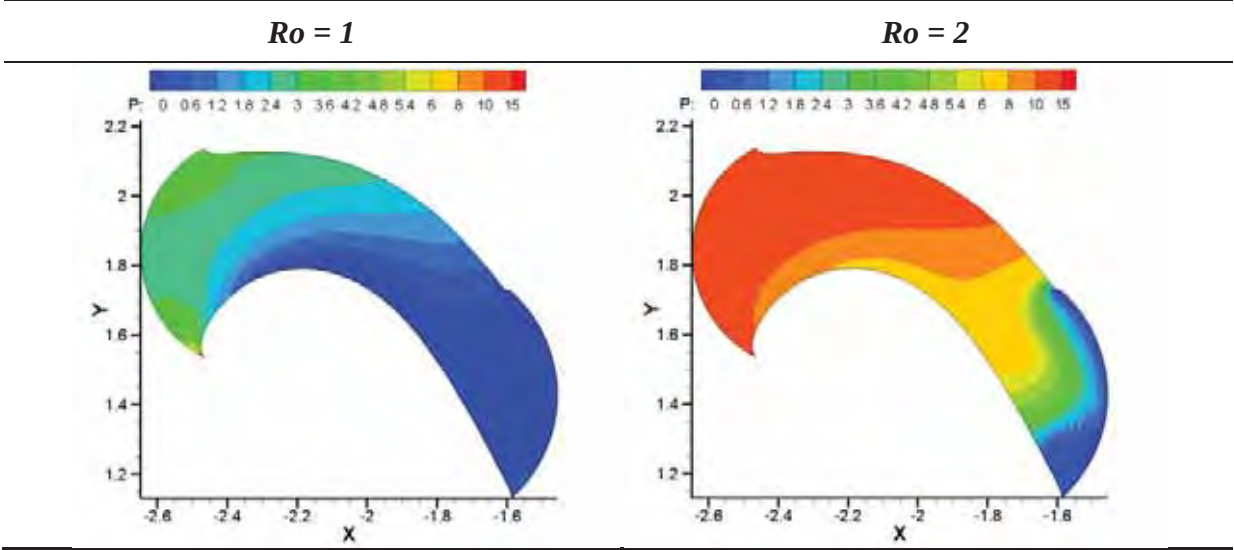


Figura 4.25 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$

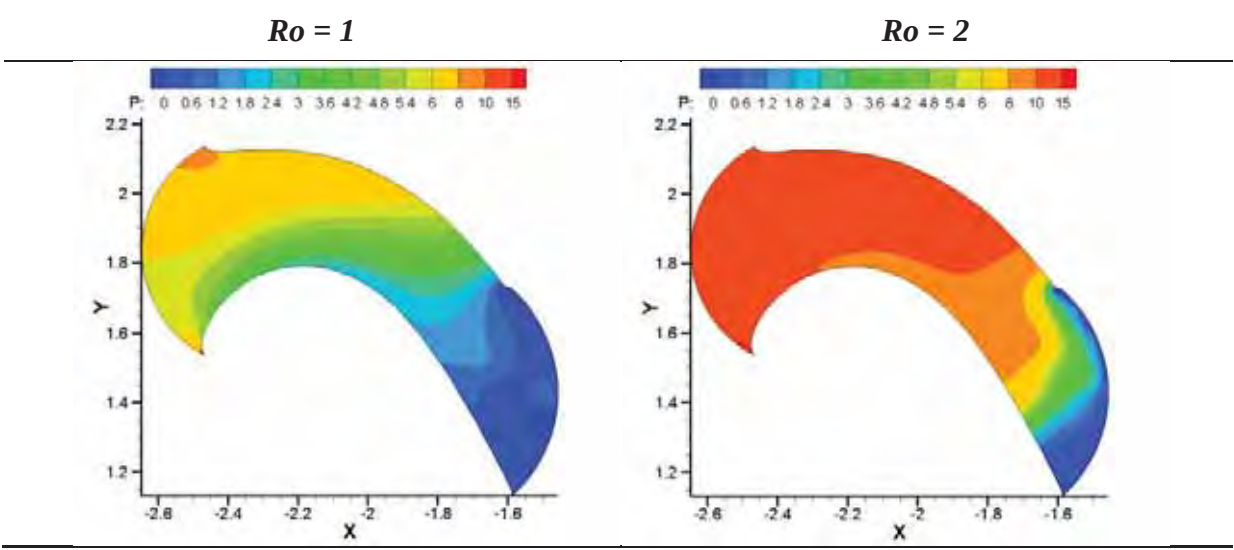
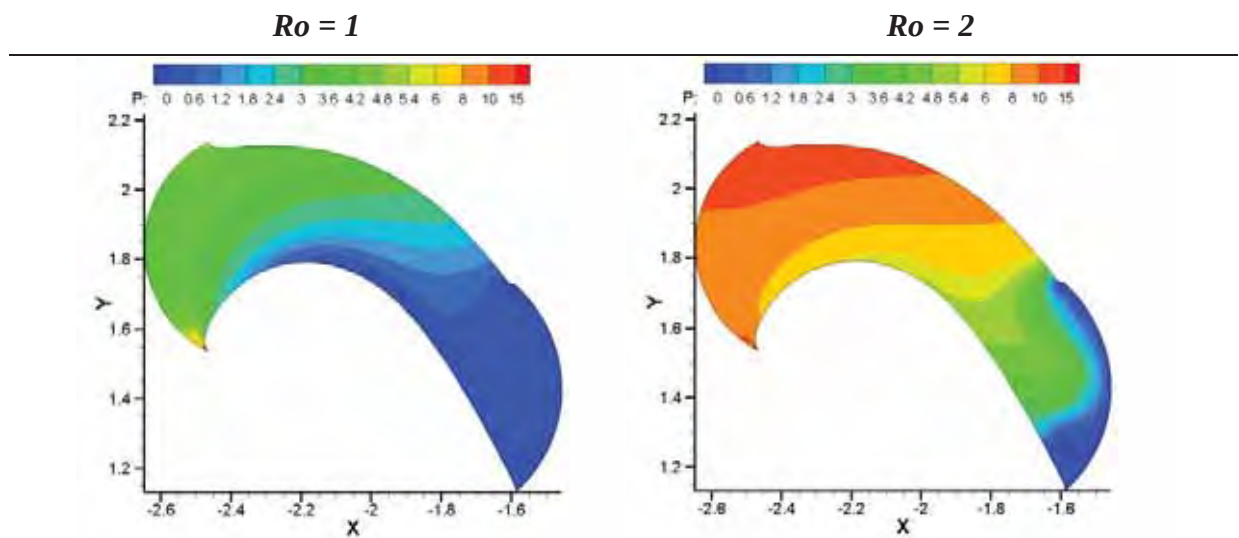
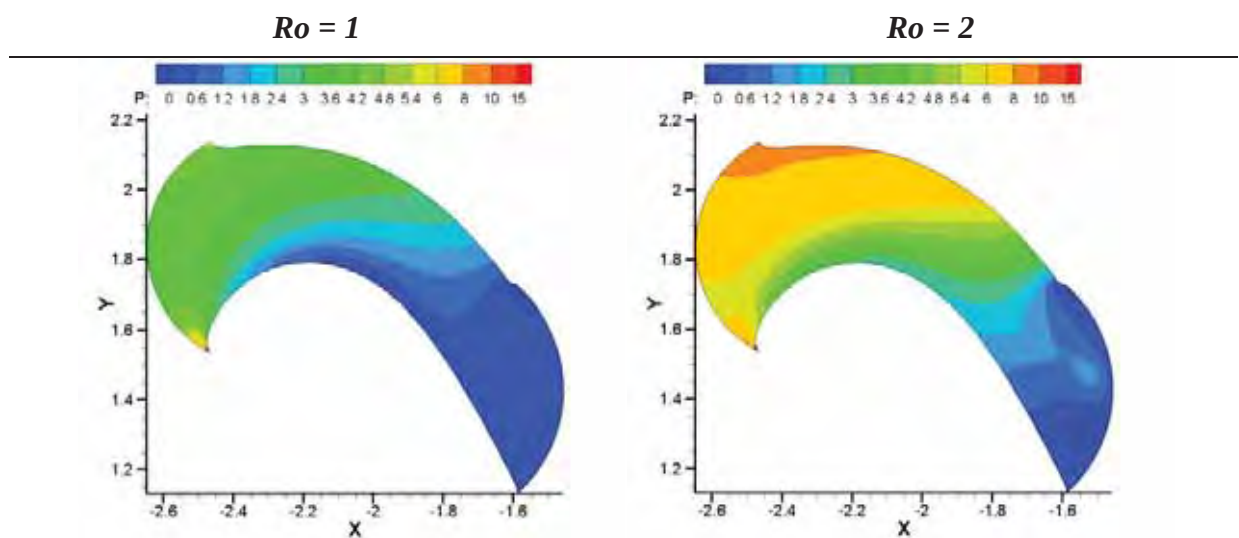


Figura 4.26 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 1,8$



Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.27 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

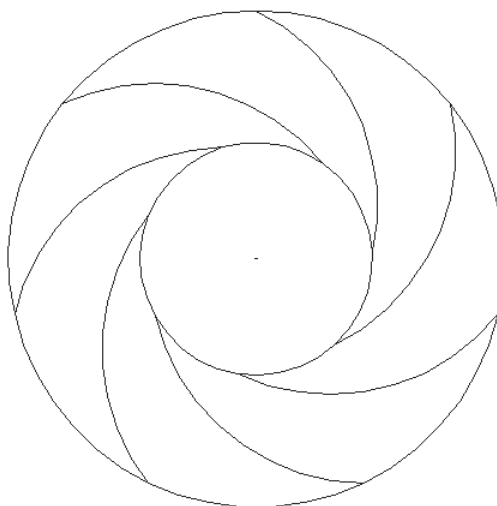
4.2 Escoamento incompressível com efeito de rotação sobre as pás de uma turbina radial.

Nessa seção, será utilizada a modelagem de escoamento com rotação para simular o escoamento de fluidos incompressíveis similar ao que ocorre em uma turbina tipo Francis, onde o mesmo procede da periferia ao centro do rotor. Serão calculados os campos de velocidade e estudaremos a influência do número de rotação nos mesmos para escoamentos com elevados números de Reynolds.

4.2.1 Geometria e Condições de Contorno

O domínio geométrico bidimensional para o caso proposto é derivado da vista resultante de um corte normal ao eixo de uma turbina instalada em uma instalação hidrelétrica. Tal corte é ilustrado pela Figura 4.28.

Figura 4.28 - Corte normal de uma turbina radial tipo Francis



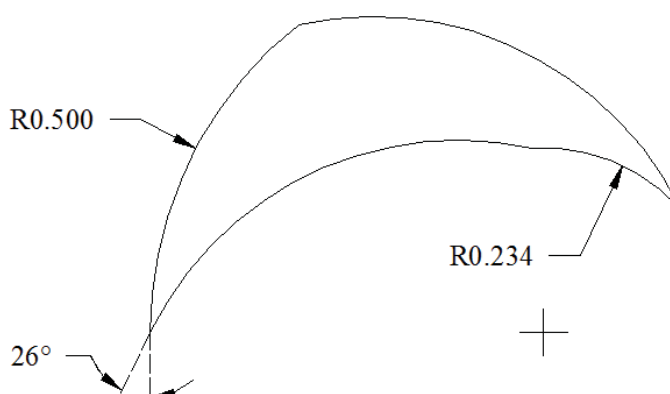
Fonte: Pereira (2010).

Para simplificação do processo de cálculo computacional e, conseqüente economia de tempo, será simulado o escoamento apenas em um dos canais do corte normal mostrado na figura anterior. Tal fato é coerente, uma vez que as mesmas características de escoamento são observadas em todos os canais.

A configuração geométrica do domínio foi adimensionalizada com base no diâmetro externo do rotor. Foi escolhido um ângulo de inclinação da pá na entrada do rotor, $\beta_1 = 26^\circ$, ângulo este pertencente a um intervalo de valores recomendados por Pfeleiderer e Petermann (1979) para ângulos de inclinação de pás na saída de rotores de bombas centrífugas.

Nosso domínio foi geometricamente definido como está na Figura 4.2929, gerado com o auxílio do software de CAD AutoCAD, onde são mostradas as dimensões para os raios interno e externo do rotor e o ângulo de inclinação das pás citado no parágrafo anterior.

Figura 4.29 - Definição dos parâmetros geométricos

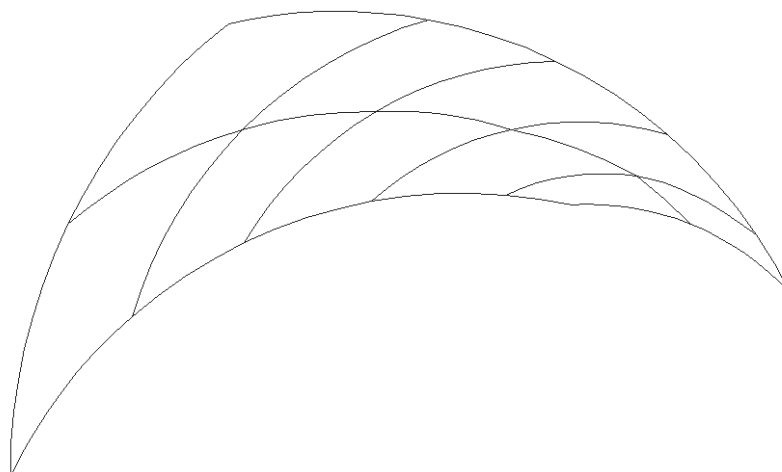


Fonte: Pereira (2010).

O traçado das pás do rotor foi obtido por meio do método do arco de circunferência, como descrito por Pfeleiderer (1960) com base nos raios interno e externo, e nos ângulos de inclinação das pás nos respectivos raios.

Após a definição geométrica do domínio, procedemos para a etapa de discretização do mesmo em elementos finitos quadrilaterais de nove nós por meio, novamente, do software ANSYS. Antes disso, tornou-se necessário, por meio do software de CAD, realizar uma divisão da geometria em subáreas, simplesmente com o objetivo de discretizar as mesmas de maneiras distintas, de tal modo que em áreas de maior interesse e/ou maior criticidade, o refinamento aplicado daria melhores condições de convergência para o cálculo numérico. Assim, temos a divisão apresentada na Figura 4.3030

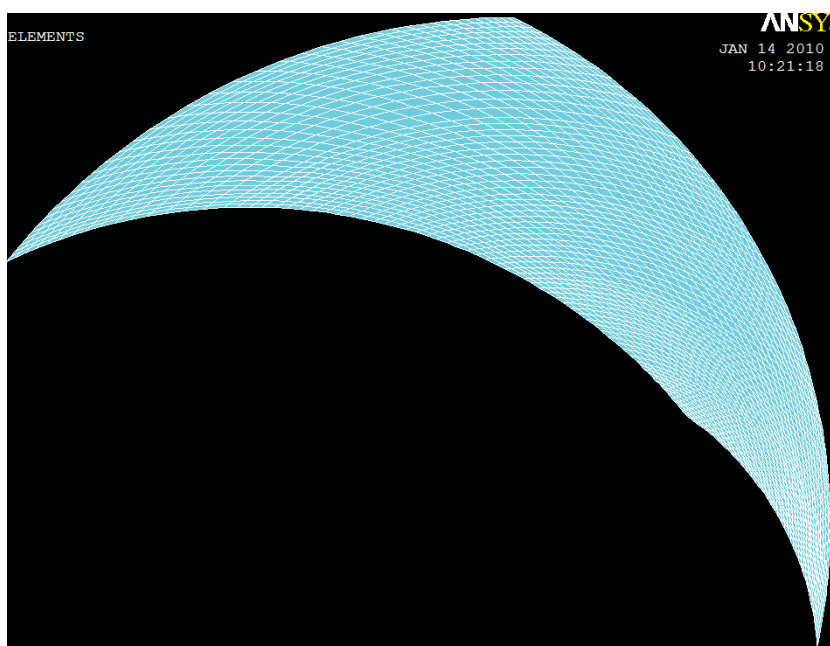
Figura 4.30 - Subdivisão da geometria para pré-processamento



Fonte: Pereira (2010).

A malha de elementos gerada no ANSYS com o refinamento adequado está mostrada na Figura 4.31, composta de 2840 elementos.

Figura 4.31 - Malha de 2840 elementos geradas no pré-processamento com auxílio do ANSYS



Fonte: Pereira (2010).

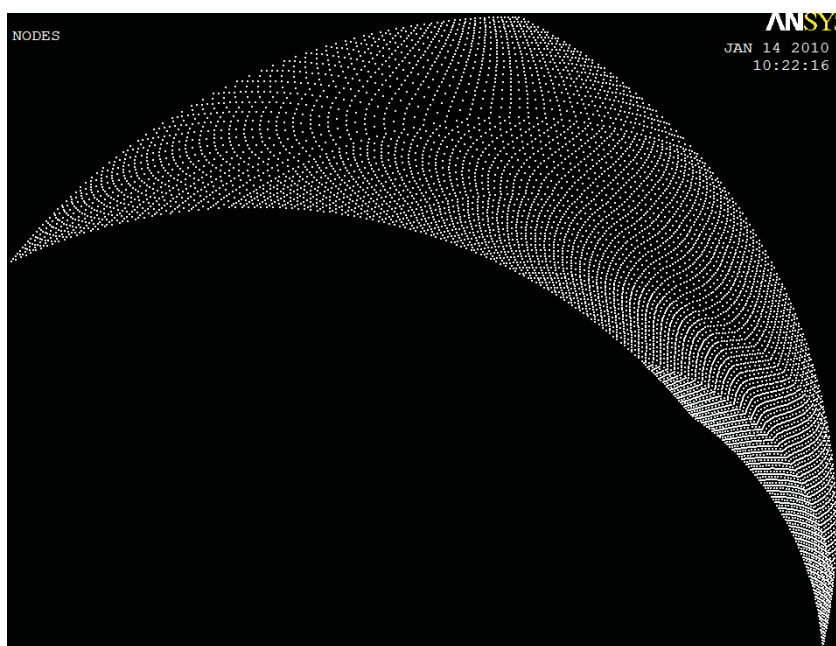
O refino das diferentes áreas foi feito de acordo com as regiões de maiores velocidades e gradiente das mesmas, intuitivamente foram refinadas as regiões próximas à seção de saída.

À medida que as áreas se distanciam da seção de saída, o refino foi se tornando gradativamente menor.

Pela experiência da simulação do caso anterior da turbina axial, as interseções das linhas de fronteira na seção de entrada poderiam apresentar grandes gradientes de pressão e velocidade, portanto nessas áreas o tamanho dos elementos utilizados é bem menor do que os mesmos que se aproximam do interior do domínio.

Para ilustrar de maneira diferente a discretização do domínio, na Figura 4. estão representados os nós pertencentes ao domínio, excluindo-se os nós do interior dos elementos, uma vez que, como já explicado, o software ANSYS gerou apenas elementos finitos quadrilaterais de oito nós, e o nó central de cada elemento, seria gerado pela interpolação das coordenadas dos oito demais nós dos elementos.

Figura 4.32 - Representação dos nós da malha mostrando os diferentes graus de refino



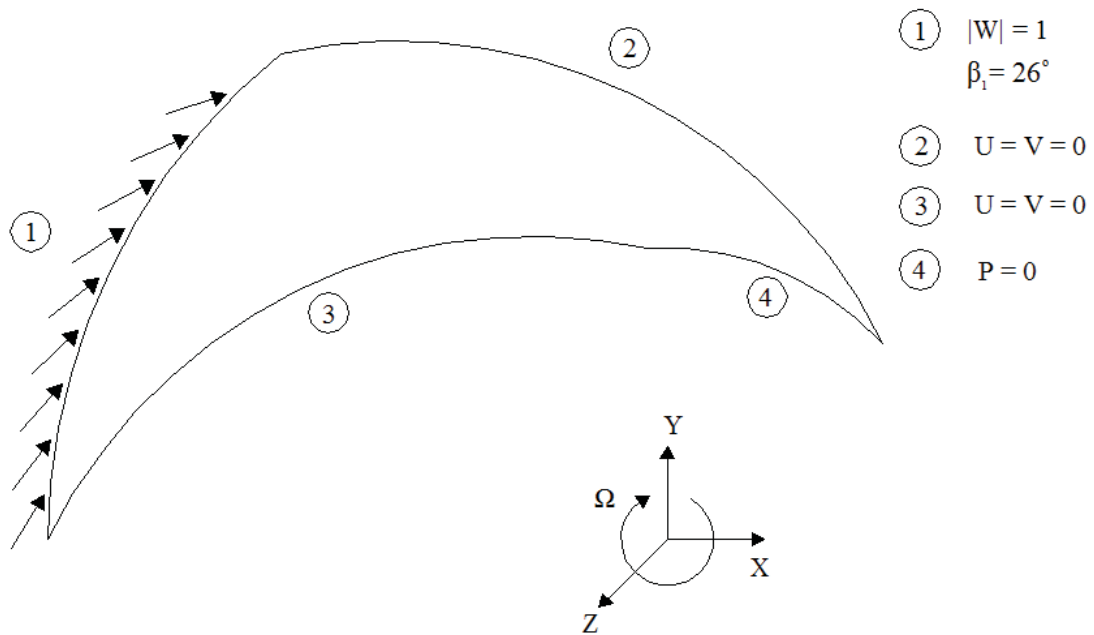
Fonte: Pereira (2010).

Pela Figura 4., fica claramente explícito o maior refino em determinadas regiões, representado pela maior concentração de nós nas respectivas regiões já citadas. Após a interpolação do nono nó de cada elemento, nossa malha possui 11583 nós.

4.2.2 Condições de Contorno

As condições de contorno impostas para esse caso de máquina radial serão as mesmas para o caso de máquina axial, tomando-se um cuidado especial com o ângulo das velocidades na seção de entrada. Tais condições estão ilustradas na **Erro! Fonte de referência não encontrada..**

Figura 4.32 - Condições de contorno para o caso de máquina radial



Fonte: Pereira (2010).

Nas fronteiras marcadas com os números 2 e 3 teremos condição de não deslizamento, na fronteira 4 teremos pressão adimensional nula e na fronteira 1, teremos o escoamento entrando no domínio com velocidade relativa $\vec{W}$ de norma unitária, imposta de tal maneira que tenha sempre a mesma angulação relativa nos nós da fronteira, ou seja, todas as velocidades entram tangenciando um palheta fictícia que passa por esse nó, que possui ângulo de inclinação β_1 .

4.2.3 Equações particulares para o caso proposto

As equações para o caso particular de escoamento sobre uma turbina radial têm as equações conservativas de acordo com as simplificações nas Eqs. (2.48), (2.49) e (2.50),

lembrando que todas as variáveis adimensionais presentes são relativas ao referencial não inercial. Sendo assim,

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + 2 \text{Ro} \Omega V \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - 2 \text{Ro} \Omega U \quad (4.9)$$

Os adimensionais das expressões acima foram apresentados pela equação (4.4), não sendo repetidos nesse item.

Note que nas equações (4.8) e (4.9), dessa vez, para o caso de máquina radial com velocidade angular definida da forma como foi, com componente apenas na direção do eixo Z, a componente da aceleração de Coriolis apresenta relevância.

Tal fato pode ser comprovado, como segue, com a definição das entidades vetoriais da mesma maneira como foi feito no caso da máquina axial.

$$\Omega_i \hat{e}_i = \Omega_3 \hat{e}_3 \quad , \quad U_j \hat{e}_j = U_1 \hat{e}_1 + U_2 \hat{e}_2 \quad e \quad X_k \hat{e}_k = X_1 \hat{e}_1 + X_2 \hat{e}_2 \quad (4.10)$$

Portanto, para a componente de Coriolis:

$$-2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k \hat{e}_i = -2(\varepsilon_{123} \Omega_2 U_3 + \varepsilon_{132} \Omega_3 U_2) \hat{e}_1 - 2(\varepsilon_{231} \Omega_3 U_1 + \varepsilon_{213} \Omega_1 U_3) \hat{e}_2 \quad (4.11)$$

Tendo considerado a direção 1 para X e 2 para Y, e as respectivas velocidades como U e V e a direção 3 para Z, temos a contribuição de Coriolis para as direções:

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow S_{u_i} = + 2 \text{Ro} \Omega_3 V \\ Y &\longrightarrow S_{u_i} = - 2 \text{Ro} \Omega_3 U \end{aligned} \quad (4.12)$$

De posse do domínio discretizado nos elementos finitos desejados, impostas as condições de contorno propostas e com as equações governantes para o problema apresentadas, nossa simulação irá proceder como no item anterior, para dois valores de número de Reynolds (Re) turbulentos, em que em cada um será calculado com dois números

de rotação (Ro), e será comparado o efeito deste último no campo de velocidade, analisando tanto a norma da velocidade relativa $\vec{W}$, como também a componente U da mesma.

Os valores de número de Reynolds avaliados foram 10^5 e 10^6 . Para o primeiro valor, os números de rotação adotados foram 4 e 8 e, para o segundo, os valores foram 4 e 10. Foi utilizado também o valor de número de rotação 1 também para ambos os casos, no entanto, a diferença de grandezas para esse valor, quando comparado com o valor 4 não foi tão significativa, e os resultados foram bastante semelhantes.

Os escoamentos foram simulados partindo do tempo adimensional 0 até 0.5, no entanto, os passos de tempo utilizados foram diferentes. Para $Re = 10^5$, o passo de tempo $\Delta t = 0.002$ foi suficiente para um tempo de cálculo satisfatório. Já para $Re = 10^6$, o mesmo passo de tempo se mostrou insuficiente para atingir boa convergência em tempos de cálculo computacionais equivalentes, principalmente para $Ro = 10$, então foi utilizado $\Delta t = 0.001$. Com este último, a convergência e o tempo de cálculo foram equivalentes ao alcançado pelo anterior, relativo ao que foi usado para número de Reynolds e Rotação menor. Os parâmetros utilizados na simulação estão resumidos na tabela

Tabela 4.2 – Casos simulados para a máquina radial.

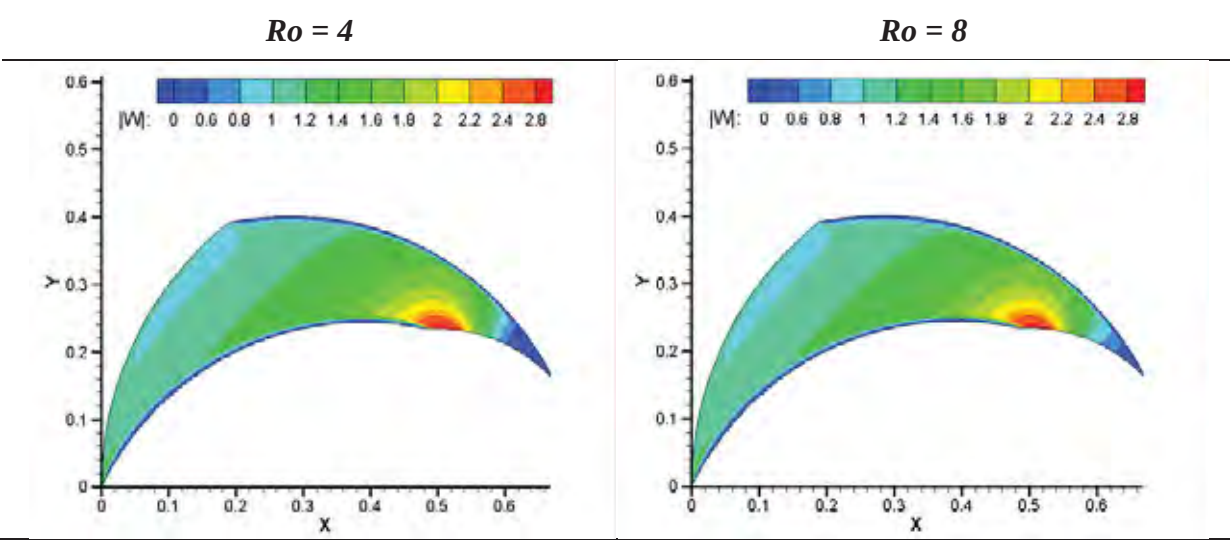
Número de Reynolds (Re)	10^5		10^6	
Número de Rotação (Ro)	4	8	4	10
Passo de tempo (Δt)	0,002	0,002	0,001	0,001

4.2.4 Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^5$

A seguir são apresentados resultados das simulações para o caso de número de Reynolds, $Re = 10^5$. São resultados para a norma da velocidade relativa, do componente U desta velocidade, das linhas de corrente e do campo de pressão. São considerados dois números de rotação, $Ro = 4$ e $Ro = 5$, para se verificar a influência deste parâmetro nos resultados.

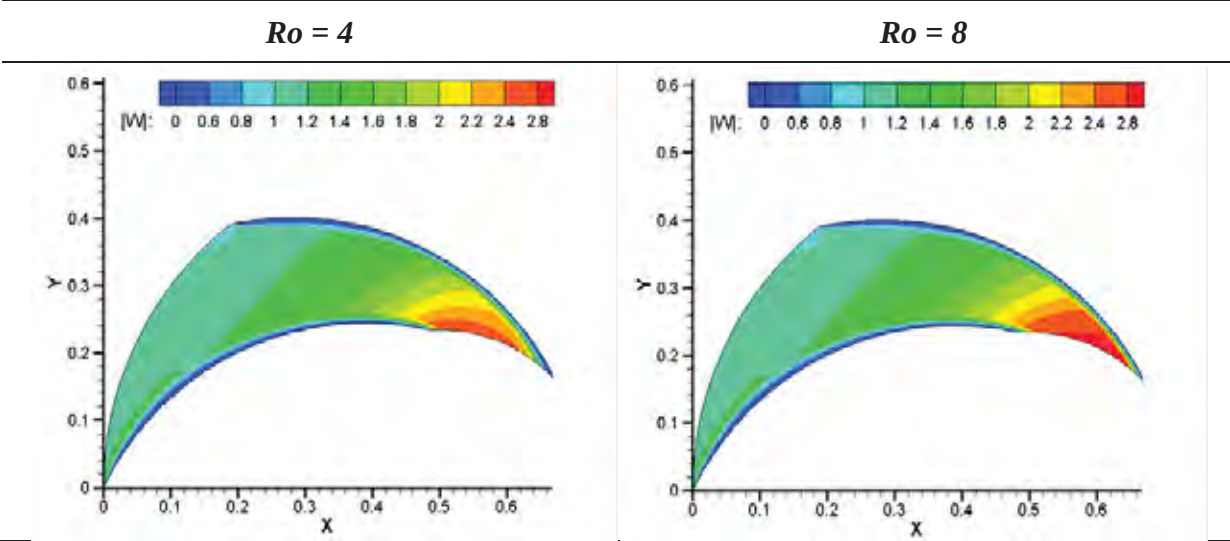
4.2.4.1 Norma da Velocidade Relativa $\|\vec{W}\|$.

Figura 4.33 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,02$



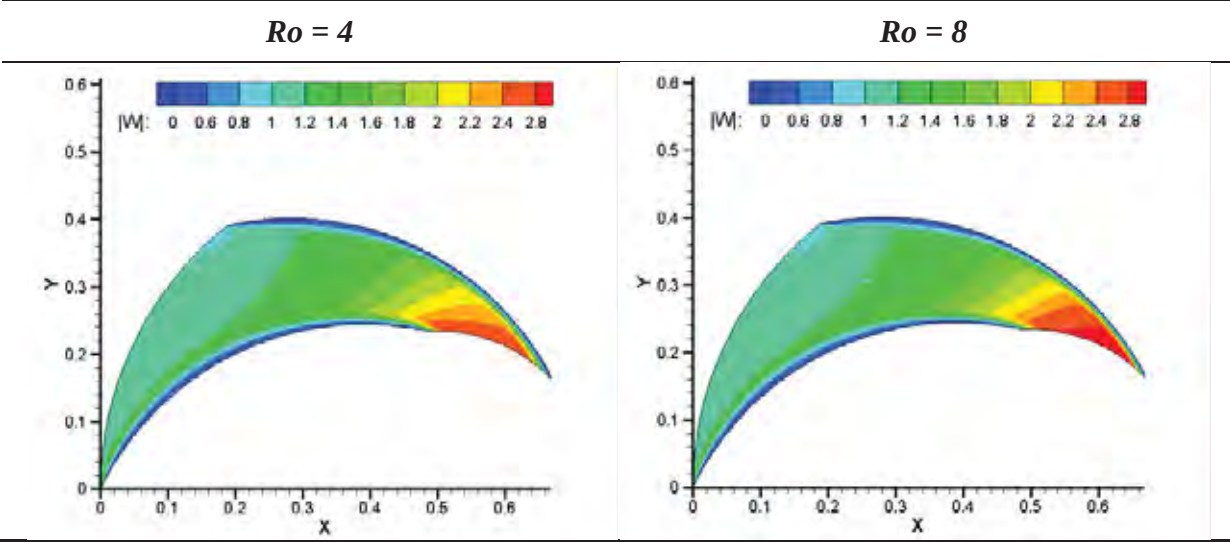
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.34 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,1$



Fonte: Pereira (2010).

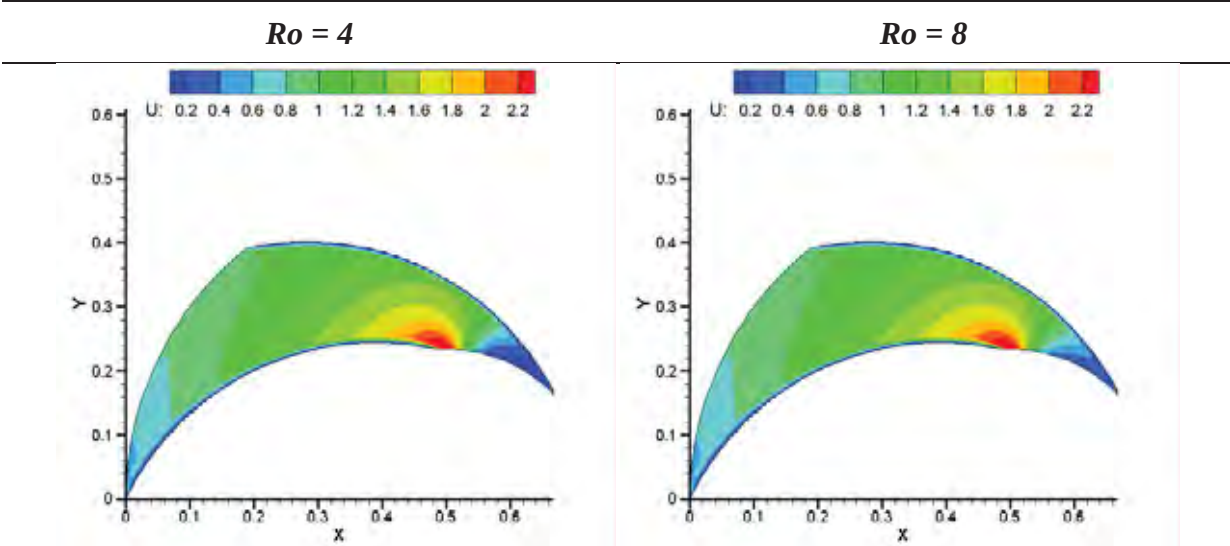
Figura 4.35 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,5$



Fonte: Pereira (2010).

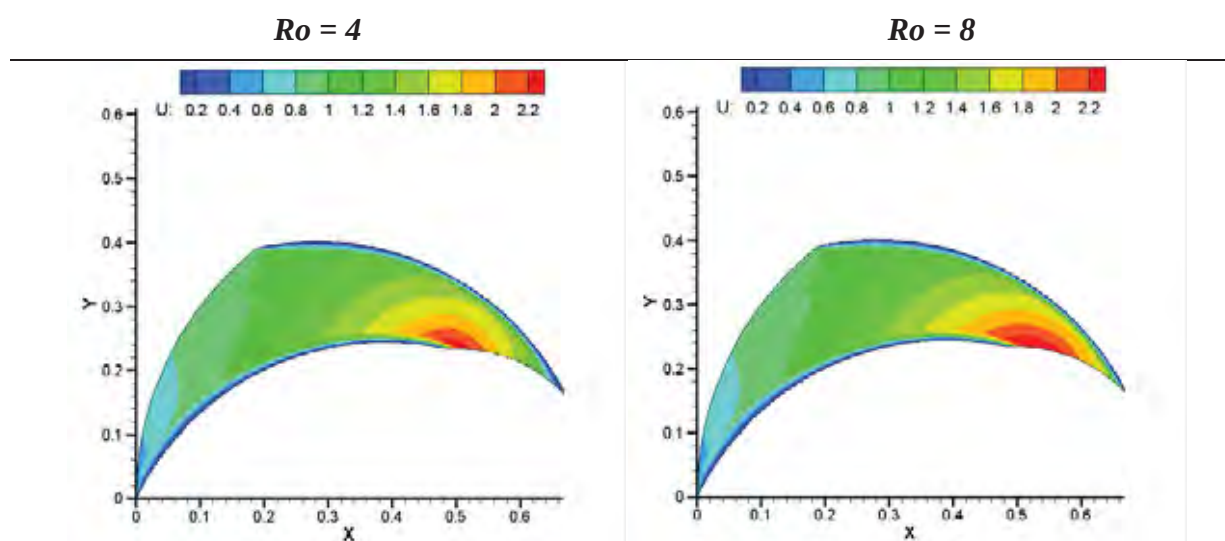
4.2.4.2 Componente U da Velocidade Relativa

Figura 4.36 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,04$



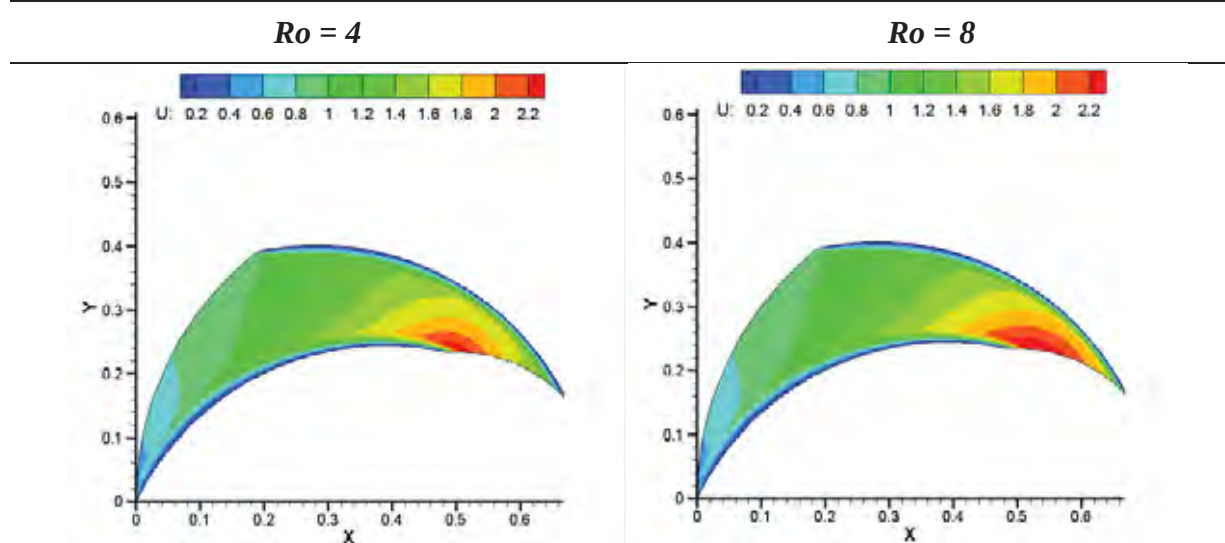
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.37 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,1$



Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.38 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,5$



Fonte: Pereira (2010).

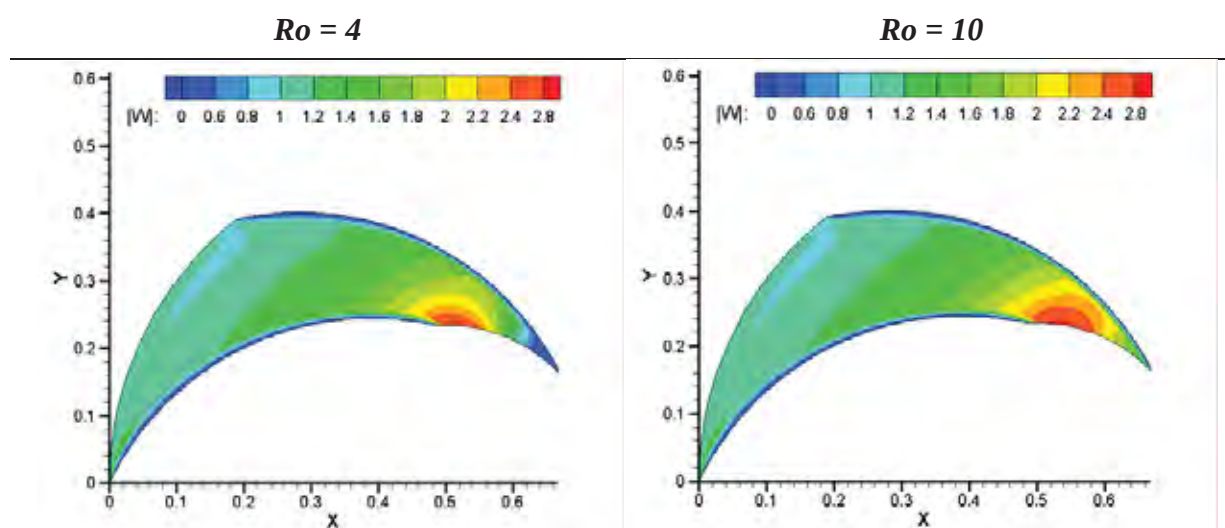
Uma observação das figuras mostra que o comportamento espereado do escoamento parece estar sendo simulado. Neste caso, ainda não foi possível avançar mais, por falta de tempo e a necessidade de encerramtno do trabalho.

4.2.5 Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^6$

Foram feitas simulações para número de Reynolds igual 10^6 , os quais são apresentados a seguir, com a finalidade de verificar a influência do número de Reynolds e a capacidade do programa computacional para estes casos. São resultados similares aos do caso do item anterior.

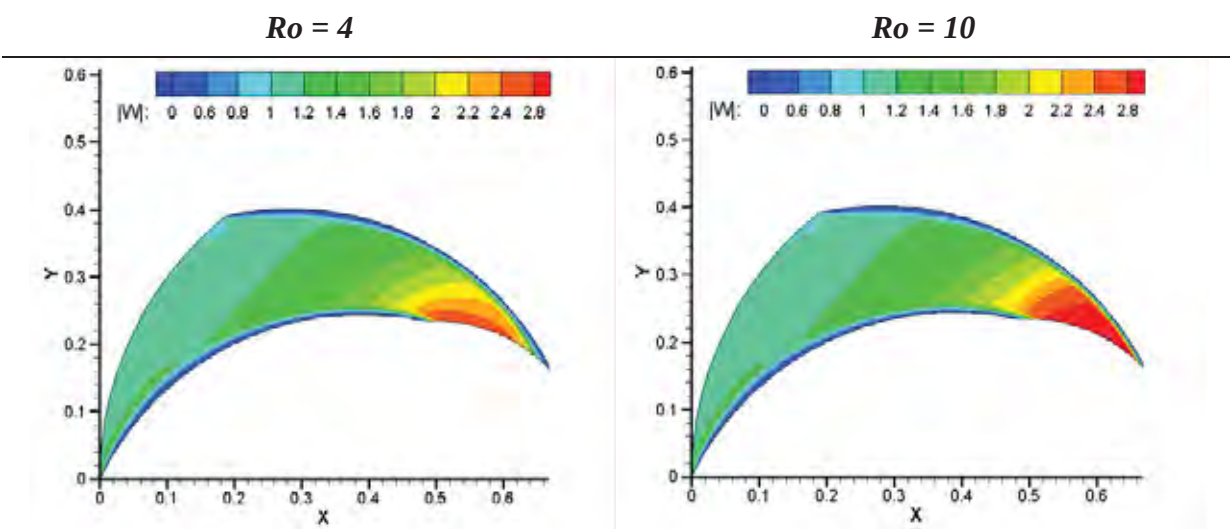
4.2.5.1 Norma da Velocidade Relativa $\|\vec{W}\|$.

Figura 4.39 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,04$



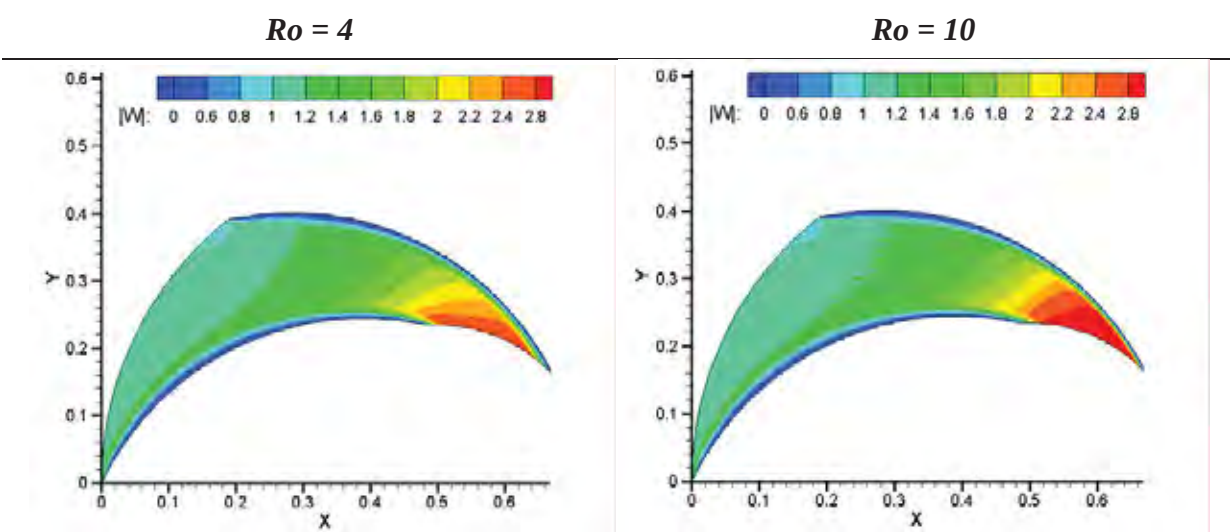
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.40 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,1$



Fonte: Pereira (2010).

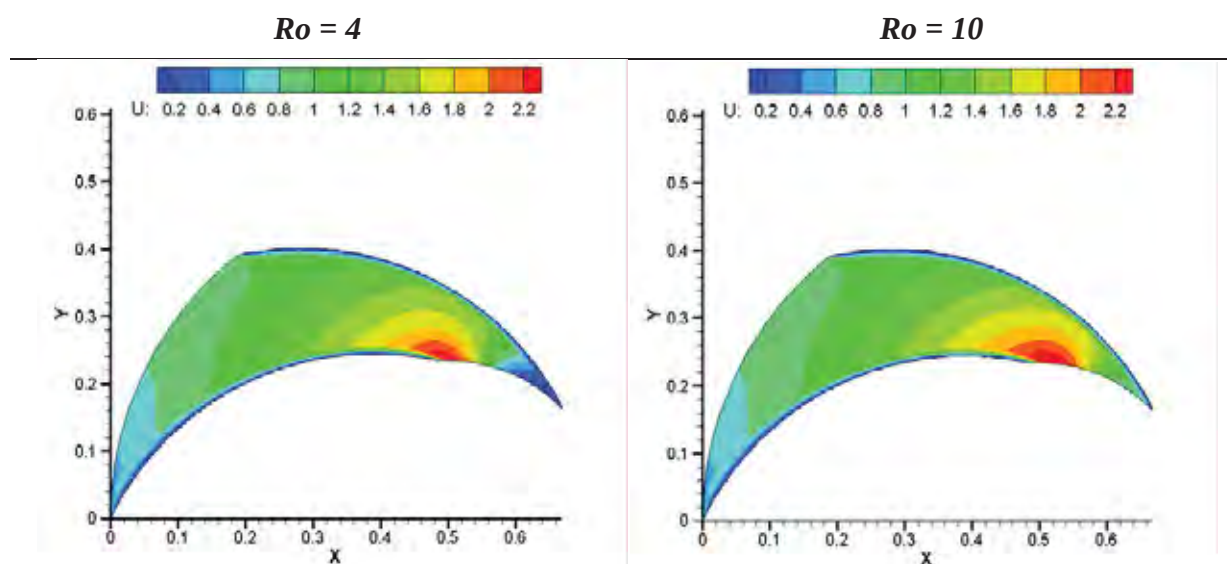
Figura 4.41 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,5$



Fonte: Pereira (2010).

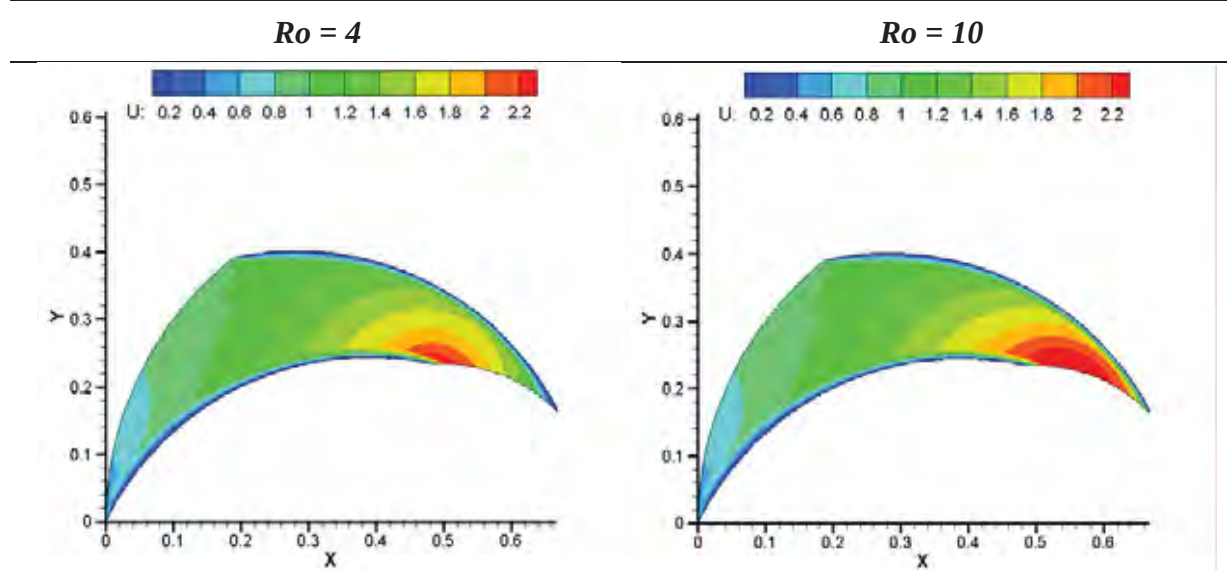
4.2.5.2 Componente U da Velocidade Relativa

Figura 4.42 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,04$



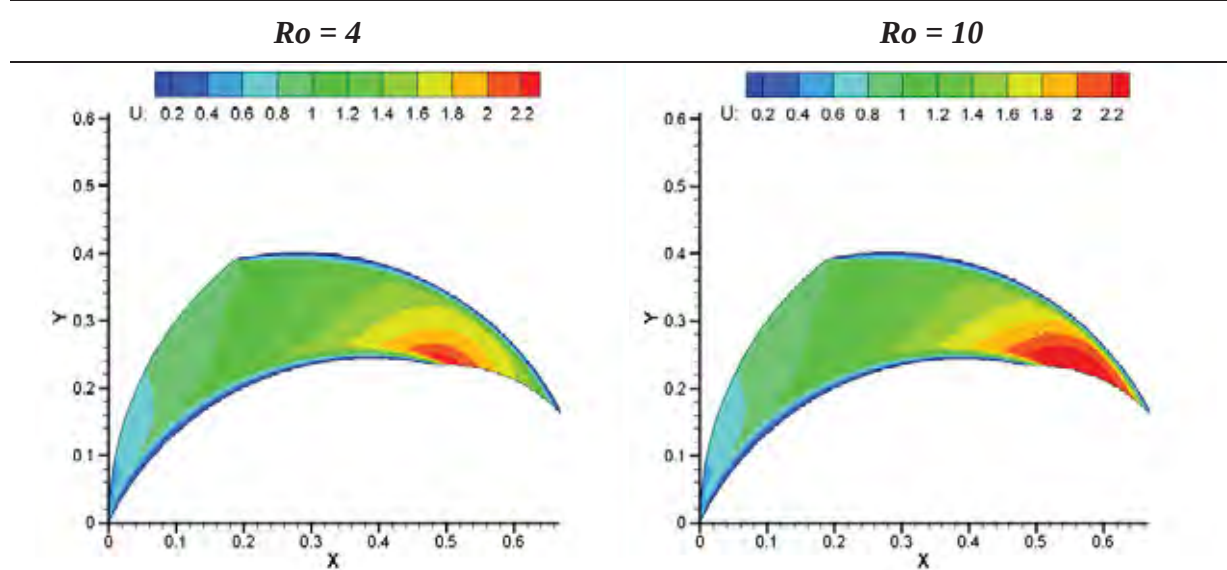
Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.43 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 106$ e $t = 0,1$



Fonte: Pereira (2010).

Figura 4.44 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,5$



Fonte: Pereira (2010).

No caso da máquina radial, da forma como foi proposta e modelada, com influência apenas da aceleração de Coriolis e para duas situações de escoamento turbulento, a variação do número de rotação pouco influenciou para o aparecimento de estruturas turbulentas de interesse, provavelmente muito influenciado pela geometria do problema numa disposição convergente.

Para ambos os casos de número de Reynolds, o que se percebe é que o aumento do número de rotação tem influencia na velocidade de evolução do padrão do escoamento, tornando-a maior. Outro ponto destacado é que para números de rotação maior as velocidades atingidas na saída do rotor e maiores as regiões de altas velocidades, representadas novamente pelas áreas mais claras.

5 Conclusões

Este trabalho consistiu numa extensão e aplicações de um código computacional desenvolvido para simular escoamentos incompressíveis transientes de fluidos viscosos, por um método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM).

O estudo sobre escoamentos com efeitos rotacionais mostrou que as acelerações centrípeta e de Coriolis, através do adimensional denominado número de rotação (Ro), afetam de forma relevante o escoamento em máquinas de fluxo axiais e radiais, mais acentuadamente no caso de máquinas axiais, onde os resultados mostraram grandes diferenças no padrão de escoamento entre números de rotação distintos e números de Reynolds iguais, gerando instabilidades e recirculações no escoamento, o que pode afetar diretamente a força de arrasto e de empuxo sobre as pás das máquinas.

Apesar das simplificações feitas nas etapas de definição do domínio, visto as dificuldades que apareceram para aplicar condições de contorno no caso da máquina axial, e a consequente utilização de apenas uma região entre duas palhetas consecutivas, os resultados obtidos mostram certa coerência com os escoamentos sobre perfis similares e podem servir de base para termos uma noção qualitativa e quantitativa dos efeitos rotacionais nos escoamentos em máquinas de fluxo e suas consequências nas forças envolvidas.

Testes mais conclusivos destes casos deverão ser realizados no futuro, para se verificar se os resultados estão realmente consistentes, uma vez que, como o código foi adaptado de um código validado por Lima (2005) para casos bem conhecidos, acredita-se que o modelo pode ter sido bem sucedido, embora necessite de aprimoramento, para ser capaz de simular escoamentos compressíveis, cuja gama de trabalhos encontrados na revisão foi maior.

Algumas sugestões para aprimoramento e trabalhos futuros sobre o tema:

- implementar outros algoritmos para a solução de sistemas algébricos de equações, visando reduzir os tempos computacionais;
- implementar novos modelos de turbulência para melhorar os resultados para números de Reynolds mais elevados e melhorar a convergência do processamento.

- Utilizar técnicas de processamento paralelo em *clusters* de computadores pessoais.
- Extensão do modelo para escoamentos tridimensionais.
- Melhorar o método de armazenamento dos dados na memória, trocando memória em disco para memória RAM, o que agilizará o processo computacional e é viável nos dias atuais.
- Implementar a simulação de escoamentos compressíveis com efeitos de rotação para simular, por exemplo, turbinas a gás, amplamente estudados na literatura.
- Aprimorar a definição das condições de contorno para simulação do escoamento no rotor e também no estator da turbina.

6 Referências

- ABBASSI, H.; BOUGHAMOURA, A.; NASRALLAH, S. B. A comparison between linear and exponential schemes in control volume finite element method. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, Swansea, v. 13, n. 4, p. 403-414, 2003.
- ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. **Computational fluid dynamics and heat transfer**. United States of America: McGraw-Hill, 1984. 307 p.
- ANSYS Revision 5.2. Houston: ANSYS, 1999.
- ARIMA, T. et al. A numerical investigation of transonic axial compressor rotor flow using a low-reynolds-number k- ϵ turbulence model. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 121, n. 1, p. 44-58, 1999.
- ARNONE, A.; SWANSON, R. C. A navier-stokes solver for turbomachinery applications. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 115, n. 1, p. 305-313, 1993.
- BAKER, A. J.; PEPPER, D. W. **Finite element 1-2-3**. Singapore: McGraw-Hill, 1991. 341 p.
- BALIGA, B.R.; PATANKAR, S.V. A new finite-element formulation for convection-diffusion problems. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 3, n. 3, p. 393-409, 1980.
- BOGEY, C.; BAILLY, C.; JUVÉ, D. Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible large eddy simulation. **Theoretical Computational Fluid Dynamics**, New York, v. 16, n. 4, p. 273–297, 2003-
- CAMPOS-SILVA, J. B. **Simulação numérica de escoamentos de fluidos pelo método de elementos finitos baseado em volumes de controle**. 1998. 159 f. Tese (Doutorado)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas- UNICAMP, Campinas, 1998.
- CARDAMONE, P. **Aerodynamic Optimisation of Highly Loaded Turbine Cascade Blades for Heavy Duty Gas Turbine Applications**. 2006. 151 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Aeronáutica e Astronáutica, Instituto de Propulsão à Jato, Universidade de Munique, Munique, 2006.

CHUNG, T. J. **Computational fluid dynamics**. United Kingdom: Cambridge University, 2002. 1022 p.

DEARDORFF, J. W. A numerical study of tri-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number. **Journal of Fluids Mechanics**, Cambridge, v. 41, n. 2, p. 453-480, 1970.

DATT, G.; TOUZOT, G. **The finite element method displayed**. Chichester: John Wiley & Sons, 1984. 509 p.

DORNEY, D. J.; VERDON, J. M. Numerical simulation of unsteady cascade flows. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 116, n. 4, p. 665-675, 1994.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. 3. ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 423 p.

FORSYTH, P. A. A control volume finite-element approach to NAPL groundwater contamination. **SIAM J. Sci. Stat. Comput.**, Philadelphia, v. 12, n. 5, p. 1029-1057, 1991.

FORSYTH, P. A.; SHAO, B. Y. Numerical simulation of gas venting for NAPL site remediation. **Adv. Water Resources**, Maryland Heights, v. 14, n. 6, p. 354-367, 1991.

FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. São Paulo: Edusp, 2002. 423 p.

FOX, R. W.; Mc DONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à mecânica dos fluidos**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos- LTC, 2006, 799 p.

FREIRE, A. Turbulência e seu desenvolvimento histórico. In: ESCOLA DE PRIMAVERA DE TRANSIÇÃO & TURBULÊNCIA, 3., 2001, Florianópolis **Anais...** Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina- UFSC, 2002. p. 53-81.

FRIGO, L. M. **Simulação numérica de escoamentos incompressíveis tridimensionais turbulentos e em transição**. 2004. 139 f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia / Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista- UNESP, Ilha Solteira, 2004.

GRISSA, H. et al. Three-dimensional radiative transfer modeling using the control volume finite element method. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Maryland Heights, v. 105, n. 3, p. 388-404, 2007.

HAFEZ, M. Finite element/finite volume solutions of full potential, euler and navier-stokes equations for compressible and incompressible flows. **International Journal of Numerical Methods in Fluids**, New York, v. 20, n. 8-9, p. 713 - 741, 1995.

HALL, K.C.; FLOREA, R.; LANZKRON, P. J. A reduced order model of unsteady flows in turbomachinery. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 117, n. 3, p. 375-383, 1995.

HIRSCH, C. **Numerical computation of external and internal flows**. Chichester: John Wiley & Sons, 1988. v. 1- Fundamentals of Numerical Discretization, 515 p.

HÖHN, W.; HEINIG, K. Numerical and experimental investigation of unsteady flow interaction in a low-pressure multistage turbine. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 122, n. 4, p. 628-636, 2000.

HOOKEY, N. A.; BALIGA, B. R. Evaluation and enhancements of some control volume finite-element method - part 1. convection diffusion problems. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 14, n. 3, p. 255-272, 1988a.

HOOKEY, N. A.; BALIGA, B. R. Evaluation and enhancements of some control volume finite-element method - part 2. incompressible fluid flow problems. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 4, n. 3, p. 273-293, 1988b.

LEE, Y. T. et al. Unsteady rotor dynamics in cascade. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 115, n. 1, p. 9, 1993.

LETNIEWSKI, F. W.; FORSYTH, P. A. A control volume finite element method for three-dimensional NAPL groundwater contamination. **Int. J. Numer. Methods Fluids**, New York, v. 13, n. 8, p. 955-970, 1991.

LIMA, R. C.; CAMPOS-SILVA, J. B.; MANSUR, S. S. Large eddy simulation of turbulent incompressible fluid flows by a nine-nodes control volume-finite element method. In:

CONGRESS OF THERMAL SCIENCES AND ENGINEERING- ENCIT, 10., 2004, Rio de Janeiro. **Proceedings...** Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2004. p. 10

LIMA, R. C. **Simulação das grandes escalas de escoamentos incompressíveis com transferência de calor e massa por um método de elementos finitos de subdomínios.**

2005. 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica/Ciências Térmicas) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.

LÖNER, R. **Applied computational fluid dynamics techniques – An introduction based on finite element methods.** Virginia: George Mason University Fairfax, 2001. p. 1.

MAJIDI, K. Numerical study of unsteady flow in a centrifugal pump. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 127, n. 2, p. 363-3719, 2005.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional.** Rio de Janeiro: LTC, 1995. 424 p.

MARTINEZ, M. J. Comparison of galerkin and control volume finite element for advection-diffusion problems. **Int.J.Numer.Meth.Fluids**, New York, v. 50, n. 3, p. 347 - 376, 2005.

MATOS, A. et al. Large-eddy simulation of turbulent flow over a two-dimensional cavity with temperature fluctuations. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Maryland Heights, v. 42, n. 1, p. 49-59, 1999.

MATSUNUMA, T. Unsteady flow field of an axial-flow turbine rotor at a low reynolds number. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 129, n. 2, p. 360-37112, 2007.

MELO, U. T; RODRIGUES, J. R. P.; ROSSA, A. L. A control-volume finite-element method for three-dimensional multiphase basin modeling. **Marine and Petroleum Geology**, Maryland Heights, v. 26, n. 4, p. 504-518, 2009.

OMRI, A.; NASRALLAH, S.B. Control volume finite element numerical simulation of mixed convection in an air-cooled cavity. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 36, n. 6, p. 615-637, 1999.

PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow.** Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 197 p.

PFLEIDERER, C.; PETERMANN, H. **Máquinas de Fluxo**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. 454 p.

PRAKASH, C. An improved control volume finite element method for heat and mass transfer, and fluid flow using equal-order velocity-pressure interpolation. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 9, n. 3, p. 253-276, 1986.

PRAKASH, C.; PATANKAR, S.V. A control volume finite element method for solving the navier-stokes equation using equal-order velocity-pressure interpolation. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 8, n. 3, p. 259-280, 1985.

PRAKASH, C.; PATANKAR, S.V. A control volume finite element method for predicting flow and heat transfer in ducts of arbitrary cross sections - part I: description of the method. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 12, n. 4, p. 389-412, 1987a.

PRAKASH, C.; PATANKAR, S.V. A control volume finite element method for predicting flow and heat transfer in ducts of arbitrary cross sections - part II: application for some test problems. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 12, n. 4, p. 413-437, 1987b.

REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1993. 684 p.

SAABAS, H. J.; BALIGA, B. R. Co-located equal order control volume - finite element method for multidimensional, incompressible, fluid flow – part I: formulation. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 26, n. 4, part B, p. 381-407, 1994.

SAABAS, H. J. **A control volume finite element method for three-dimensional, incompressible, viscous fluid flow**. 1991. 404 f. Thesis (Doctor)- Dept. of. Mech. Eng., McGill University, Montreal, 1991.

SALAH, M. B. et al. **Control volume finite element method for radiation**. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, Philadelphia, v. 48, n. 5, p. 477-497, 2005.

SARKAR, S. Influence of wake structure on unsteady flow in a low pressure turbine blade passage. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 131, n. 4, p. 14, 2009.

SBARDELLA, L.; IMREGUN, M. Linearized unsteady viscous turbomachinery flows using hybrid grids. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 123, n. 3, p. 568-582, 2001.

SCHÄFER, M. (2006). **Computational engineering**: introduction to numerical methods. New York: Springer Berlin Heidelberg, 2006. 326 p.

SCHNEIDER, G. E.; RAW, M. J. A skewed, positive influence coefficient upwinding procedure for control-volume-based finite-element convection-diffusion computation. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 9, n. 1, 1986, p. 1-16.

SCHNEIDER, G. E.; RAW, M. J. Control volume finite-element method for heat transfer and fluid flow using collocated variables - 1 computational procedure. **Numerical Heat Transfer**, Philadelphia, v. 11, n. 4, p. 363-390, 1987a.

SCHNEIDER, G. E.; RAW, M. J. Control volume finite-element method for heat transfer and fluid flow using collocated variables - 2 application e validation. **Numerical Heat Transfer**. Philadelphia, v. 11, n. 4, p. 391-416, 1087b.

SEWALL, E. A.; TAFTI, D. K. Large eddy simulation of flow and heat transfer in the developing flow region of a rotating gas turbine blade internal cooling duct with coriolis and buoyancy forces. **ASME - Journal of Turbomachinery**, New York, v. 130, n. 1, p. 7, 2008.

SHYY, W. et al. **Computational techniques for complex transport phenomena**. Cambridge: Cambridge University, 1197. 321p.

SILVEIRA-NETO, A. Fundamentos da turbulência nos fluidos. In: ESCOLA DE PRIMAVERA DE TRANSIÇÃO & TURBULÊNCIA, 3., 2002, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina- UFSC, 2002. p. 1-50.

SILVEIRA-NETO, A. **Turbulência nos fluidos aplicada**. Uberlândia: Faculdade de Engenharia Mecânica/ UFU, 2003. Apostila.

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with primitive equations. **Monthly Weather Review**, Boston, v. 91, n. 3, p. 99-164, 1963.

TAYLOR, C.; HUGHES, T.G. **Finite element programming of the Navier-Stokes equations**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1981. 244 p.

TECPLOT Version 6. Belevue: Amtec Enginnering, 1996.

TEJADA-MARTÍNEZ, A. E. **Dynamic subgrid-scale modeling for large-eddy simulation of turbulent flows with a stabilized finite element method**. 2002. 158 f. Thesis (PhD)- Rensselaer Polytechnic Institute, Department of Mechanical, Aerospace and Nuclear Engineering, Troy, 2002.

VANYO, J. P. **Rotating fluids in engineering and science**. Stoneham: Butterworth-Heinemann, 1993. 435 p.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method**. Malásia: Pearson Education Limited, 1995. 257 p.

ZACHI, J. M. **Simulação numérica de escoamentos de fluidos pelo método de elementos finitos baseado em volumes de controle em malhas não estruturadas**. 2006. 157 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica/Ciências Térmicas)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

ZANG, Y. et al. Large eddy simulation of turbulent cavity flow using a dynamic subgrid-scale model. **Engineering Applications of Large Eddy Simulation, ASME**, New York, v. 162, p.121, 1993.

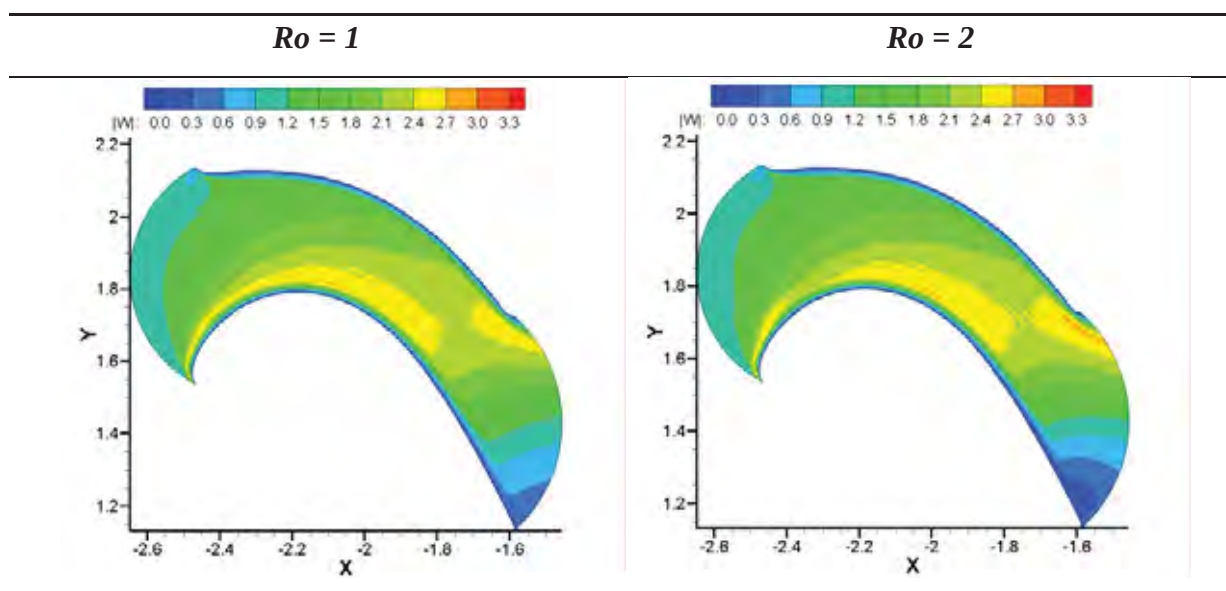
APÊNDICE A – FIGURAS DE RESULTADOS PARA A TURBINA AXIAL

A.1 - Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^4$

Os resultados mostrados a seguir ilustram evoluções dos campos de velocidade e de pressão. São apresentadas as normas do vetor velocidade; o componente U da velocidade, as linhas de corrente bem como o campo de pressão, para alguns números de Reynolds e dois diferentes números de rotação, em vários instantes de tempo. O objetivo de apresentação destes resultados é mostrar o comportamento do escoamento ao longo do tempo, para verificar se o programa computacional está simulando as características esperadas neste tipo de problema.

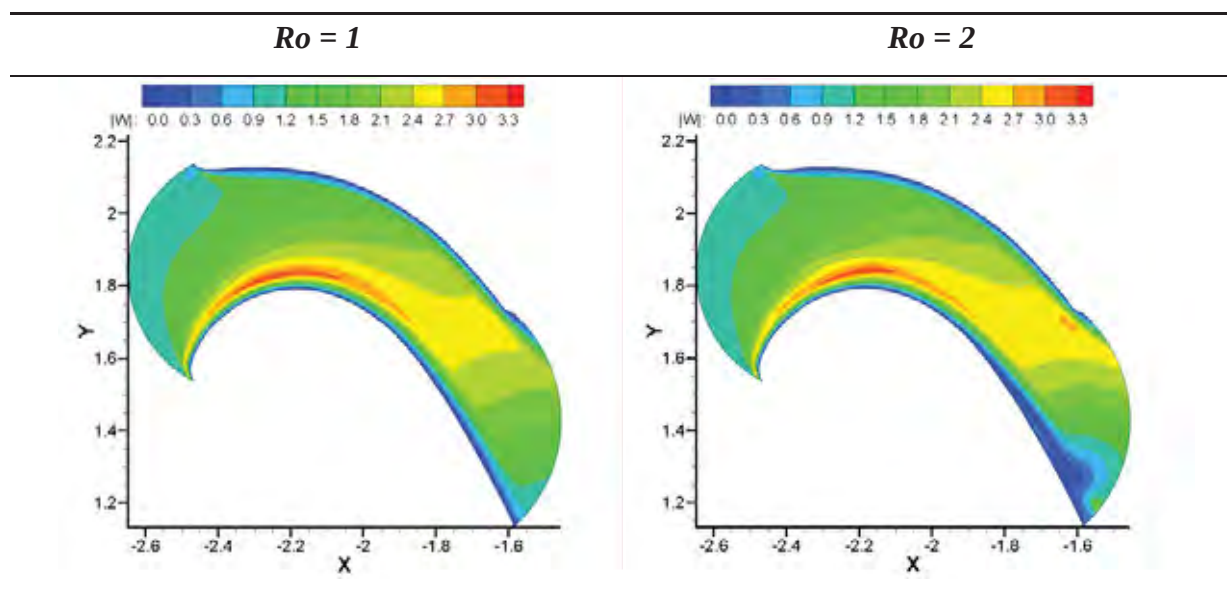
A.1.1 - norma da velocidade relativa $\|\vec{W}\|$

Figura A.1.1 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,1$



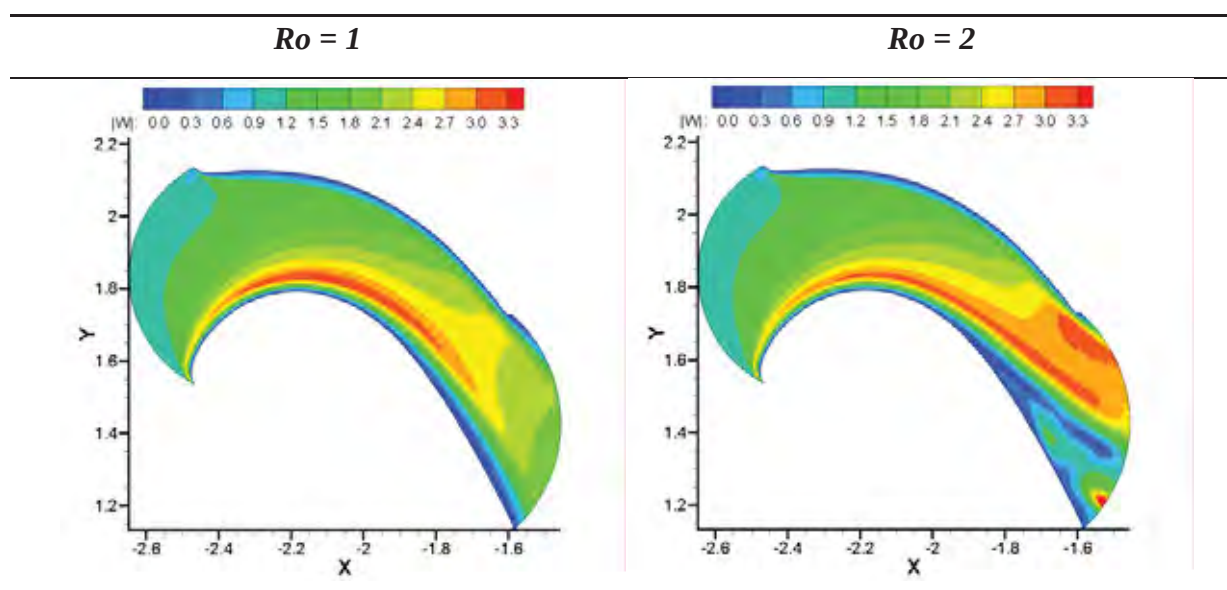
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.2 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,25$



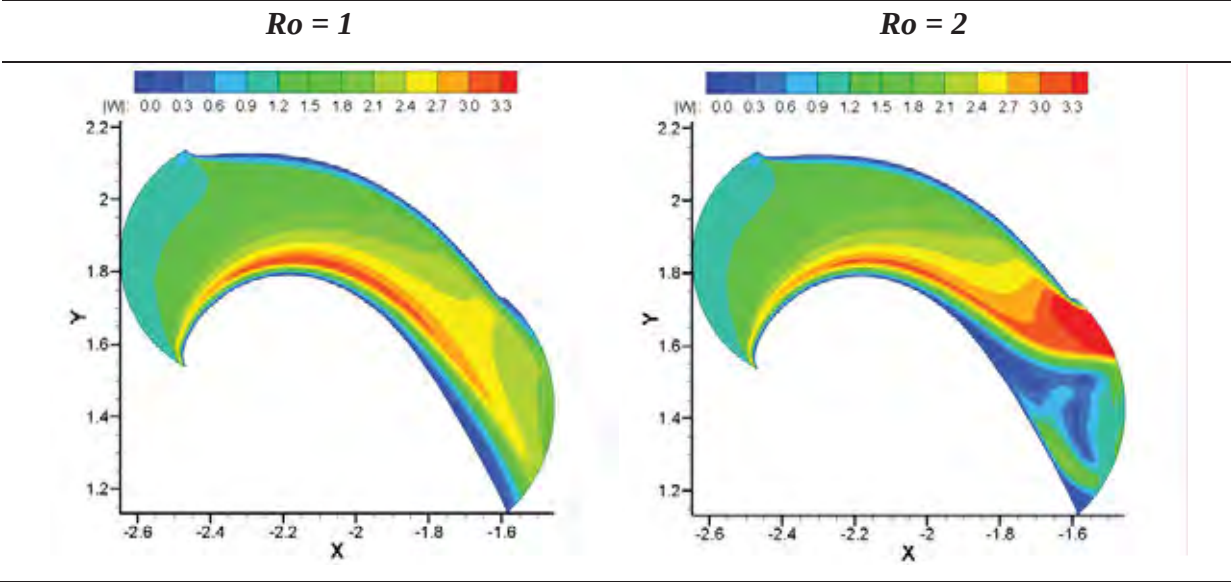
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.3 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,5$



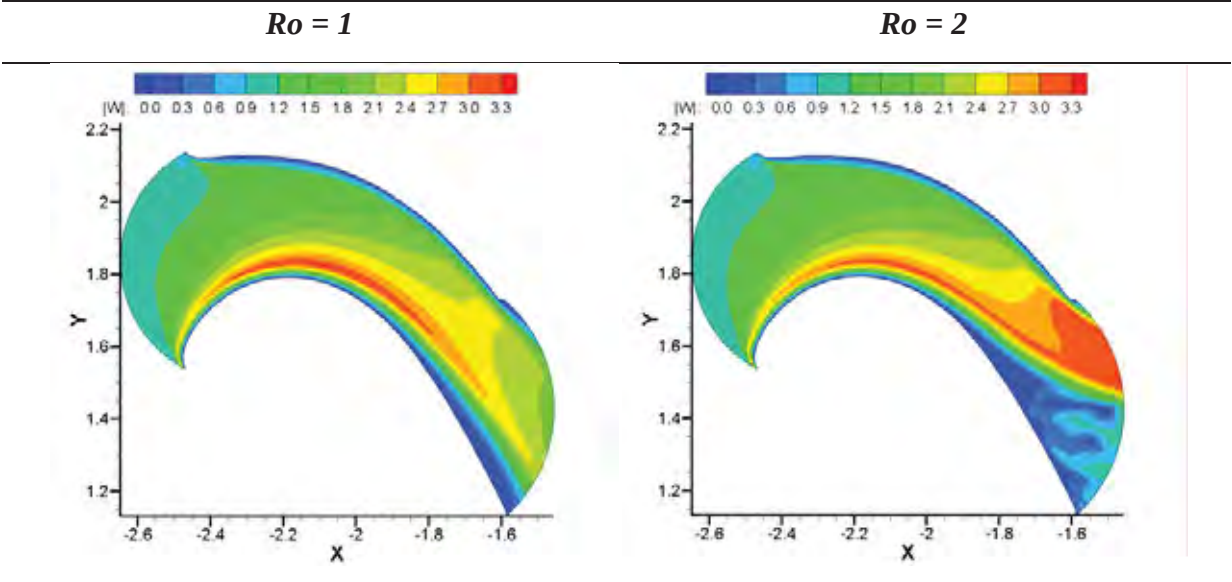
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.4 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,75$



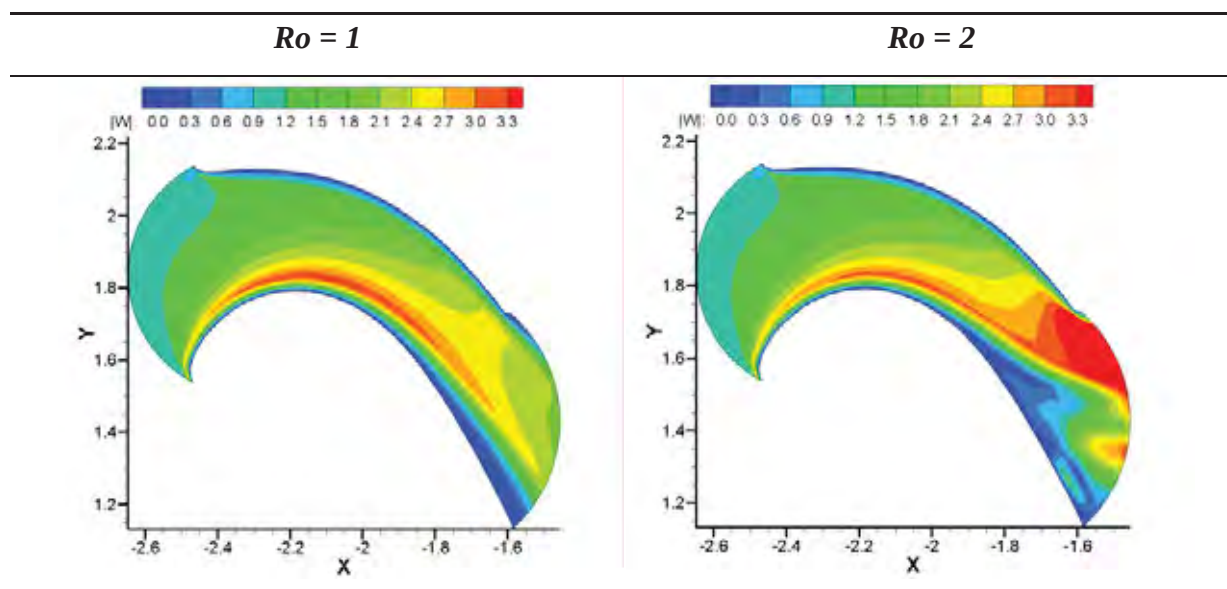
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.5 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,0$



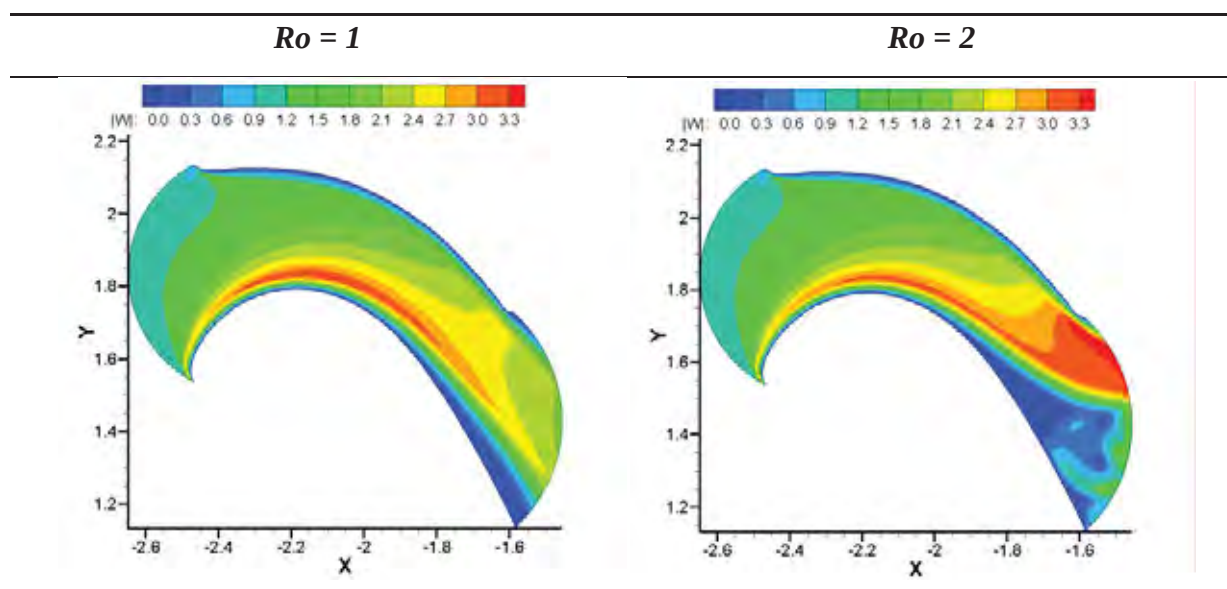
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.6 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,25$



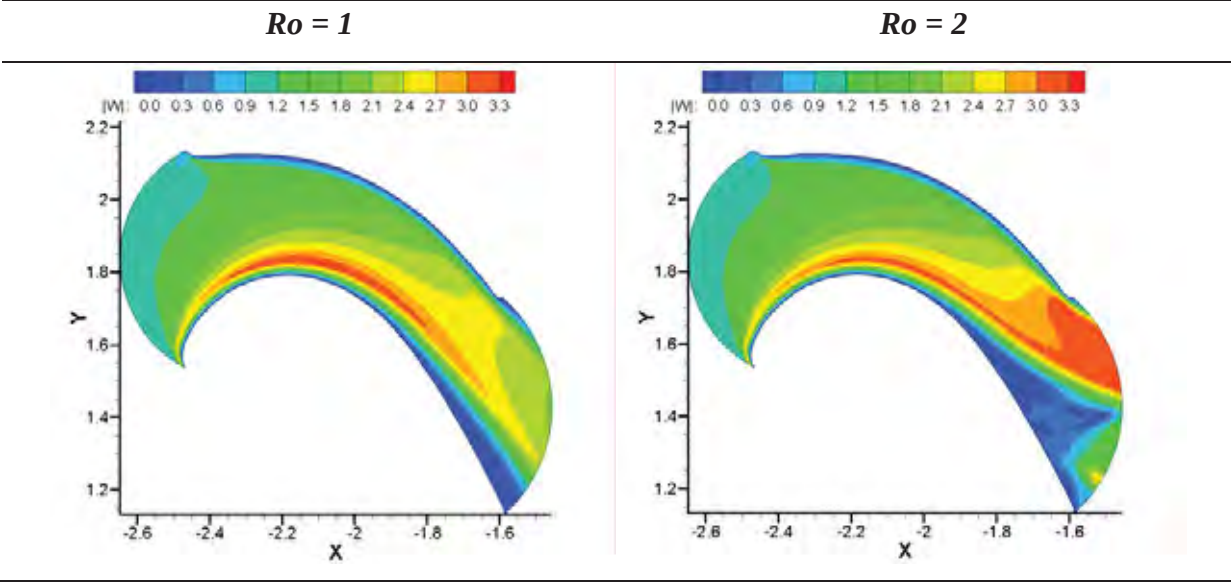
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.7 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,5$



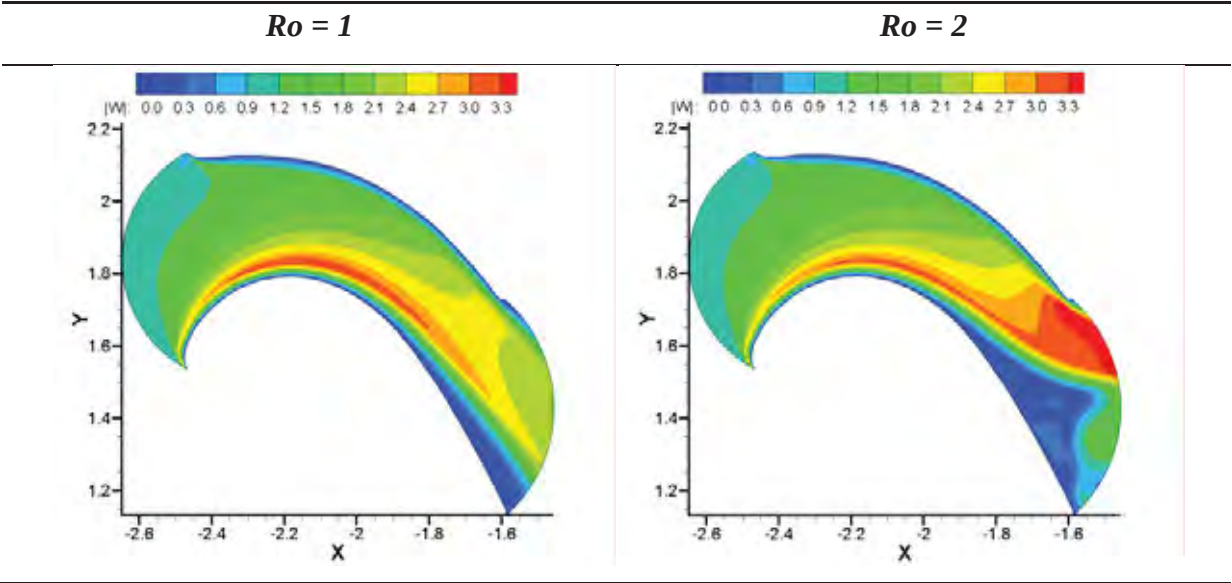
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.8 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,75$



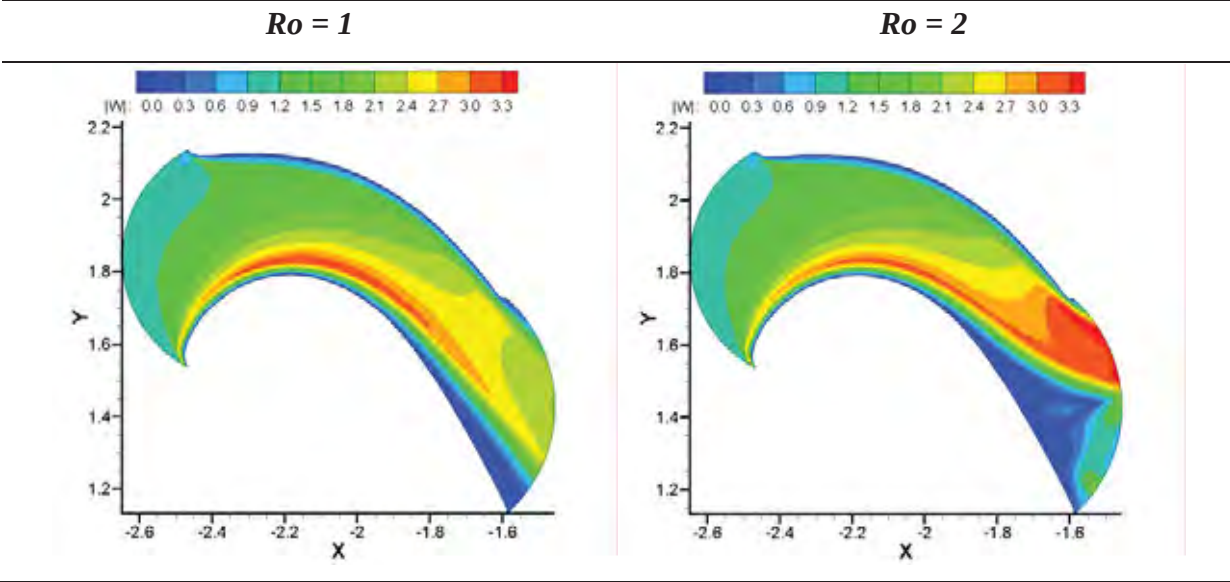
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.9 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 2,0$



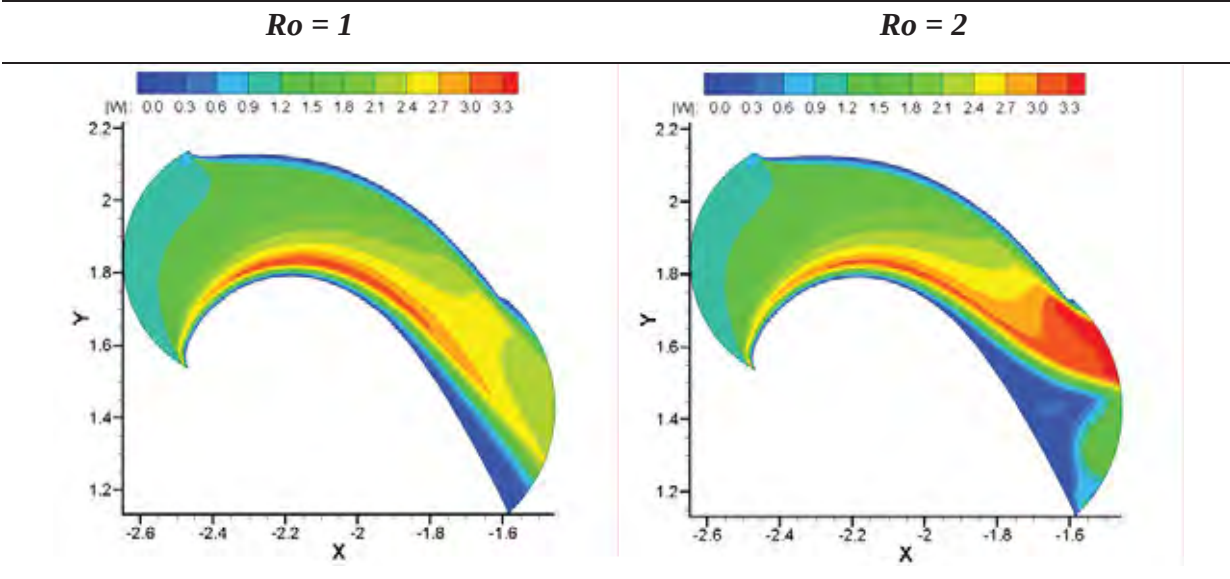
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.10 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 2,25$



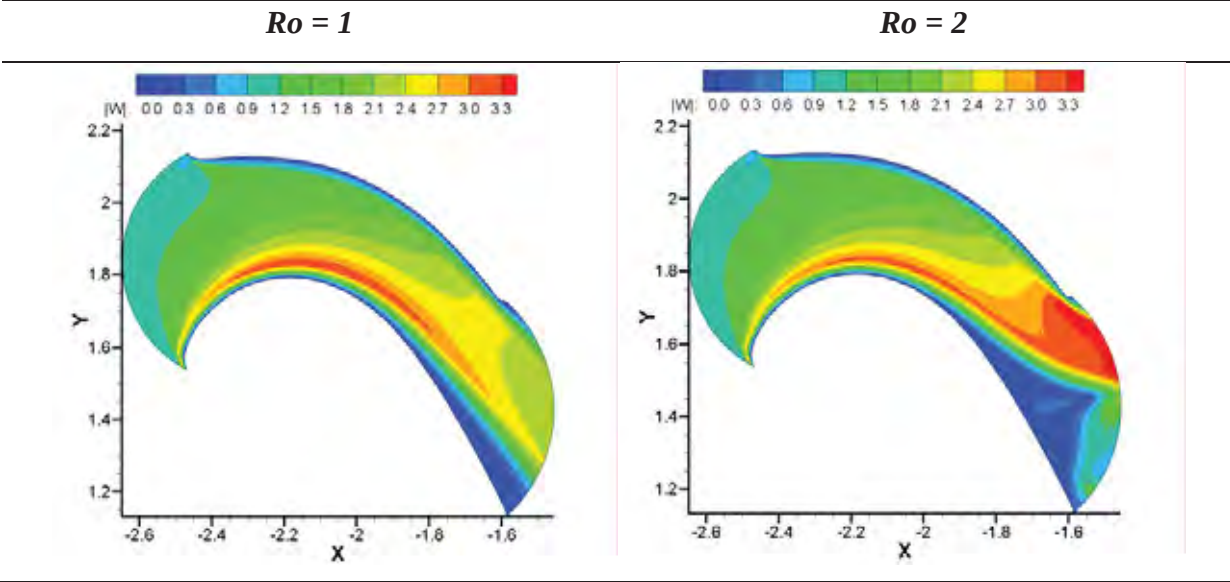
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.11 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 2,5$



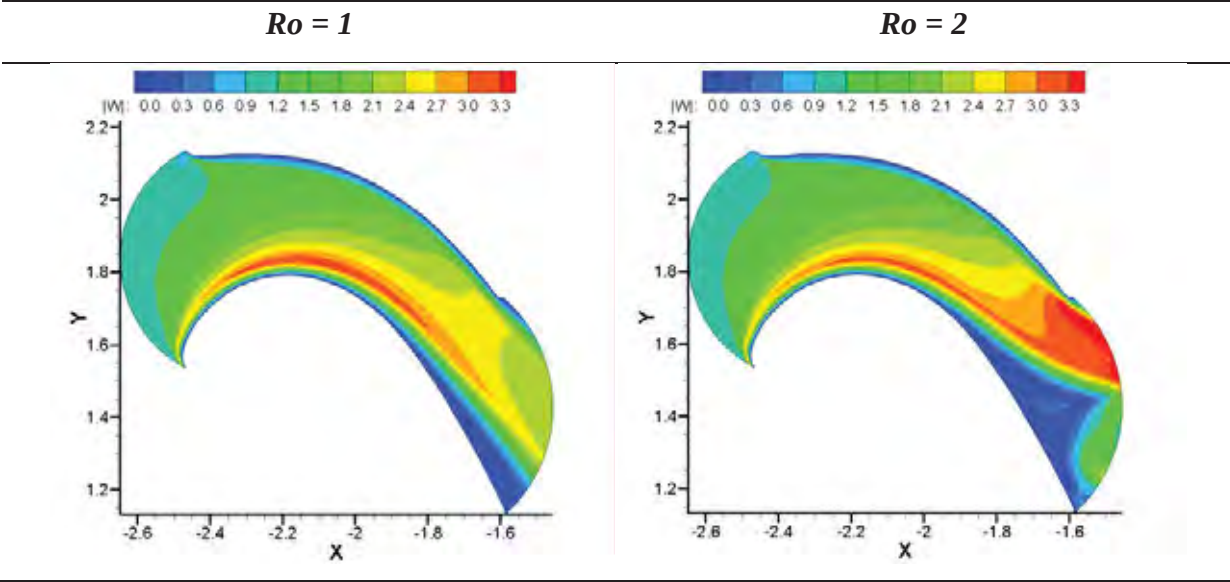
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.12 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 2,75$



Fonte: Pereira (2010).

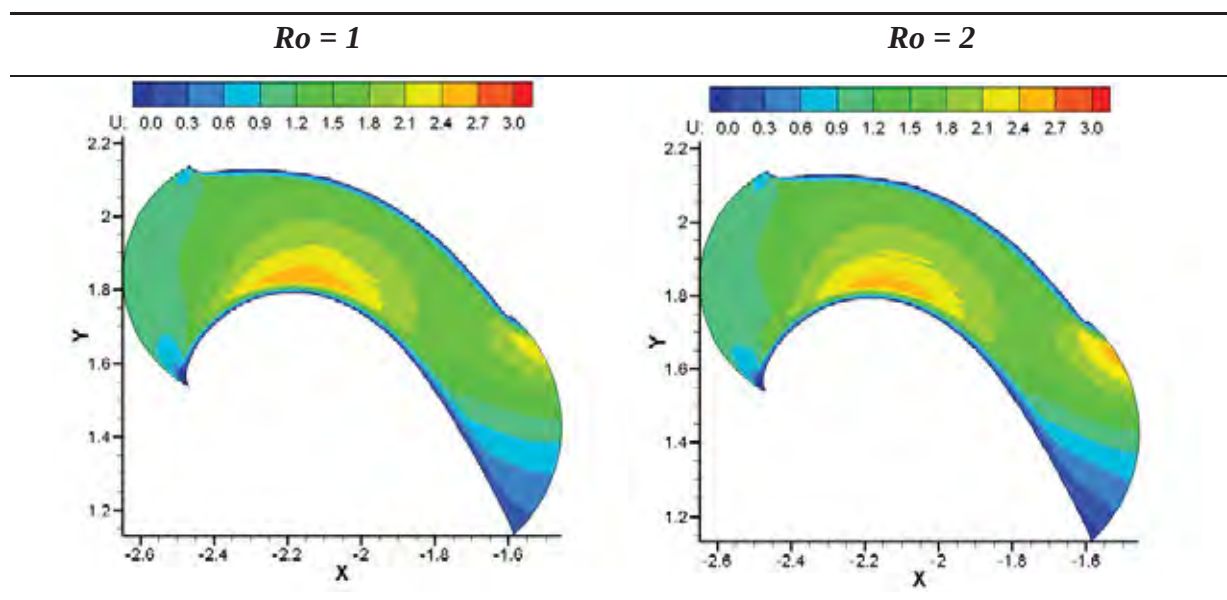
Figura A.1.13 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

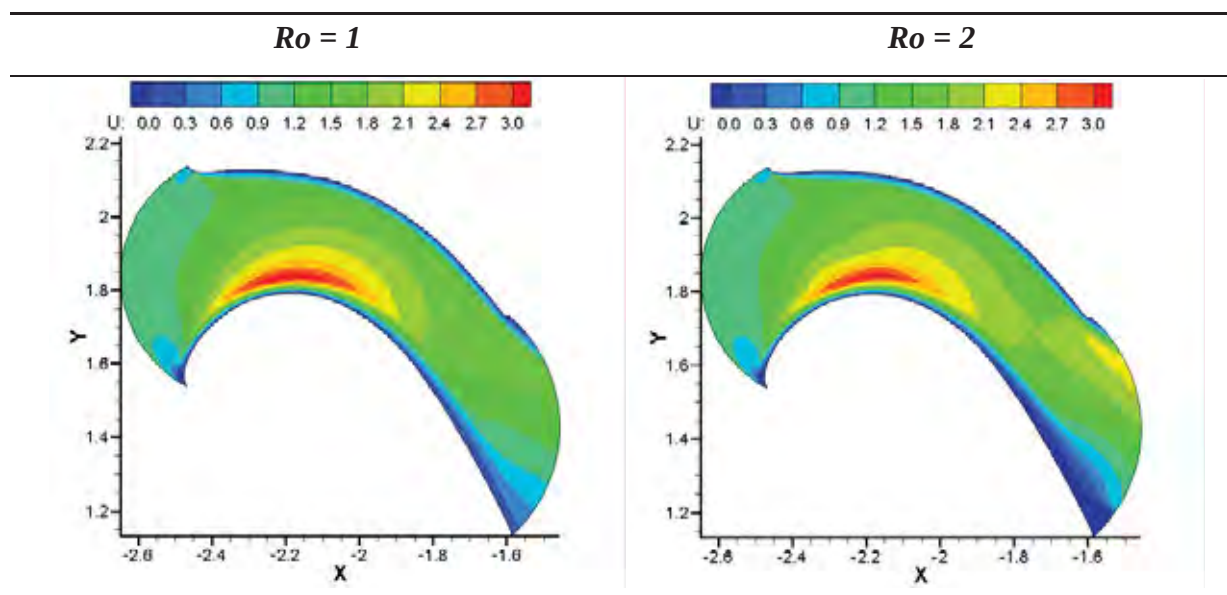
A.1.2 - Componente U da Velocidade Relativa

Figura A.1.14 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,1$



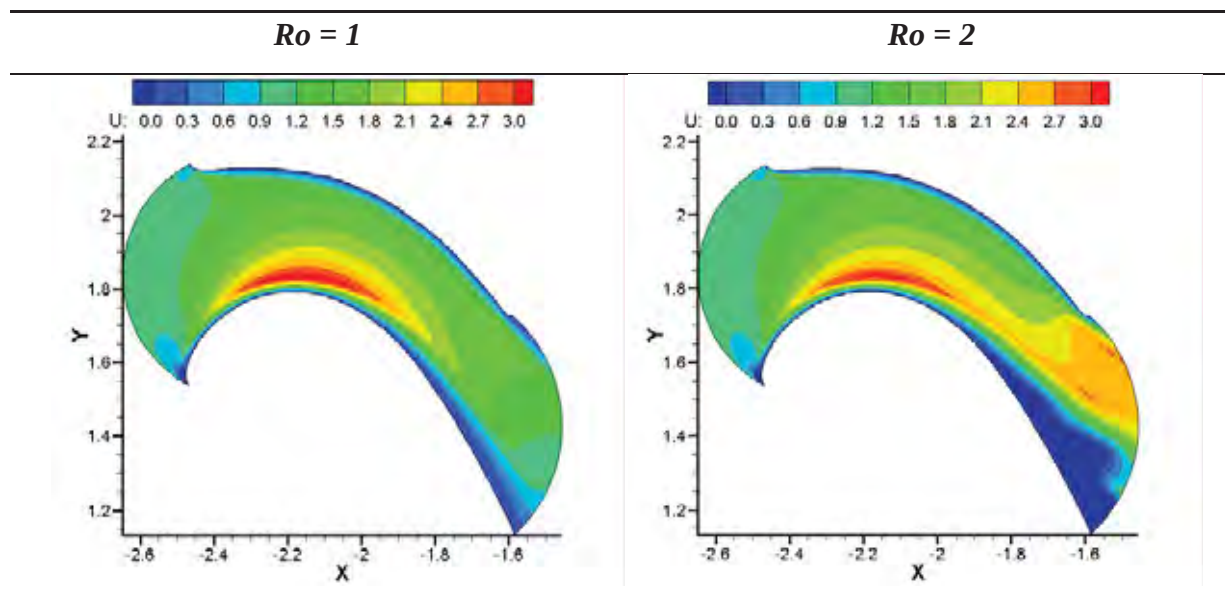
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.15 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,25$



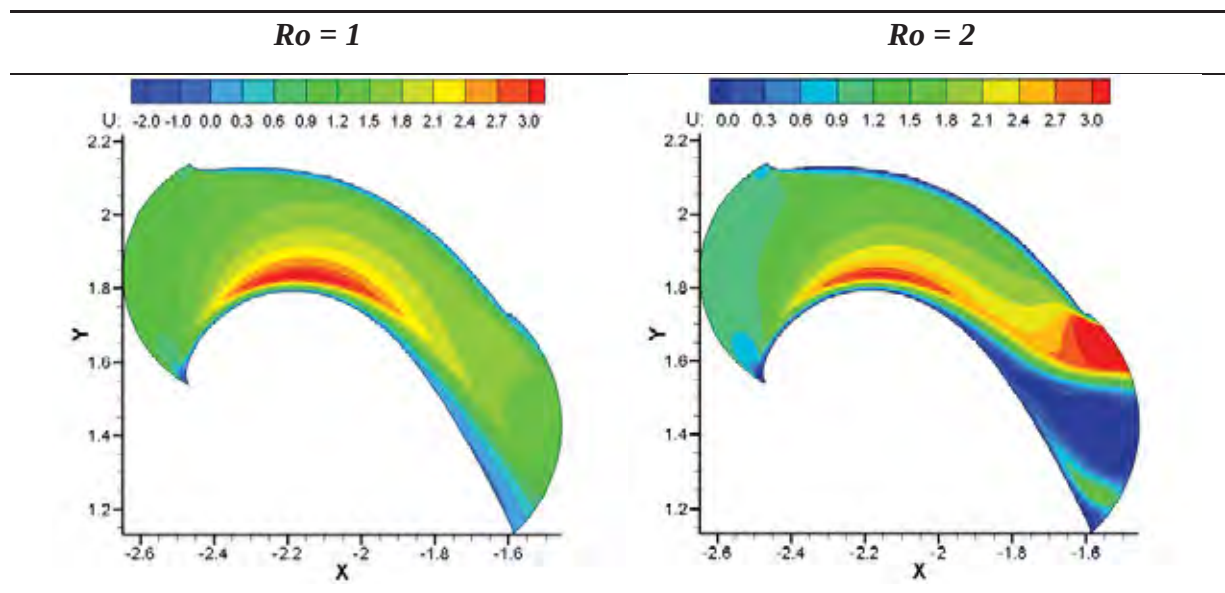
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.16 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,5$



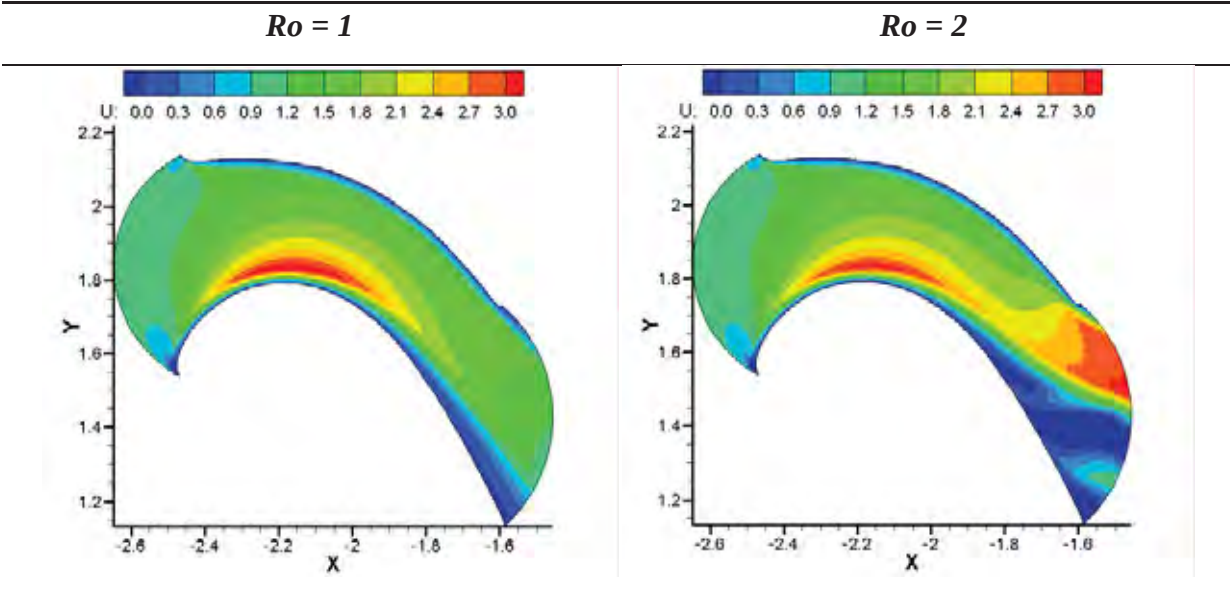
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.17 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 0,75$



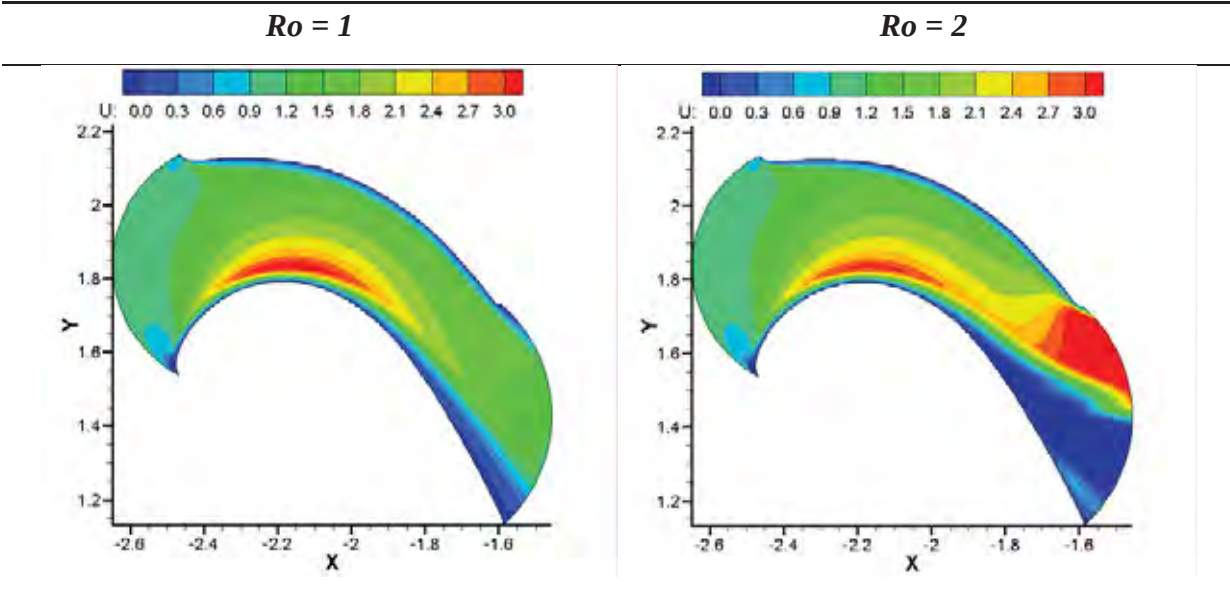
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.18 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,0$



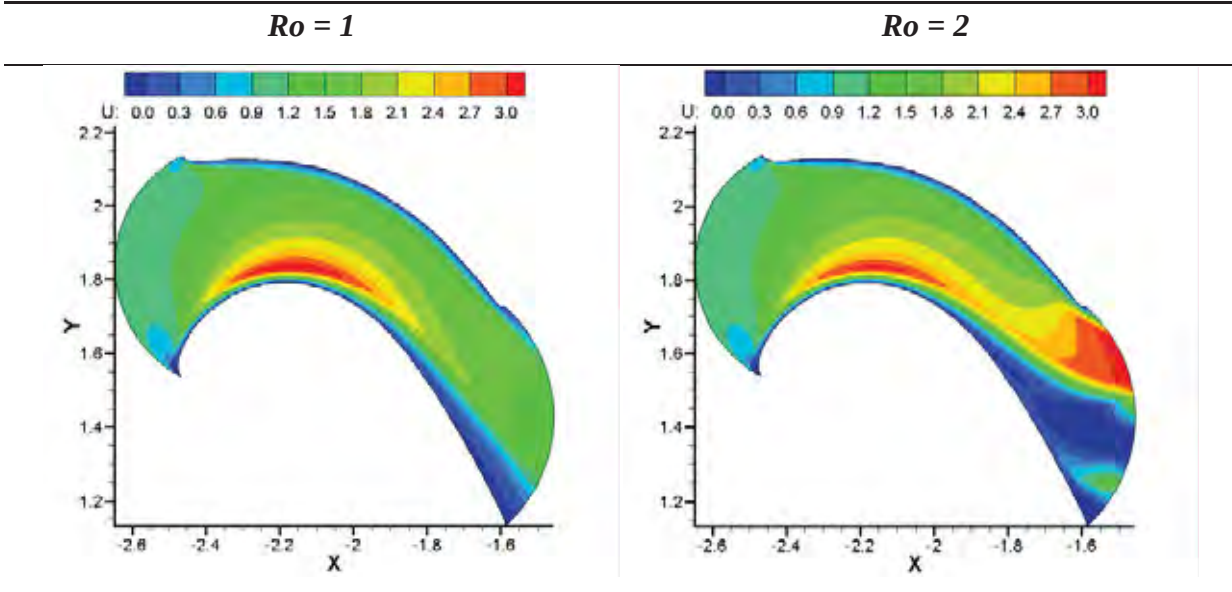
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.19 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,25$



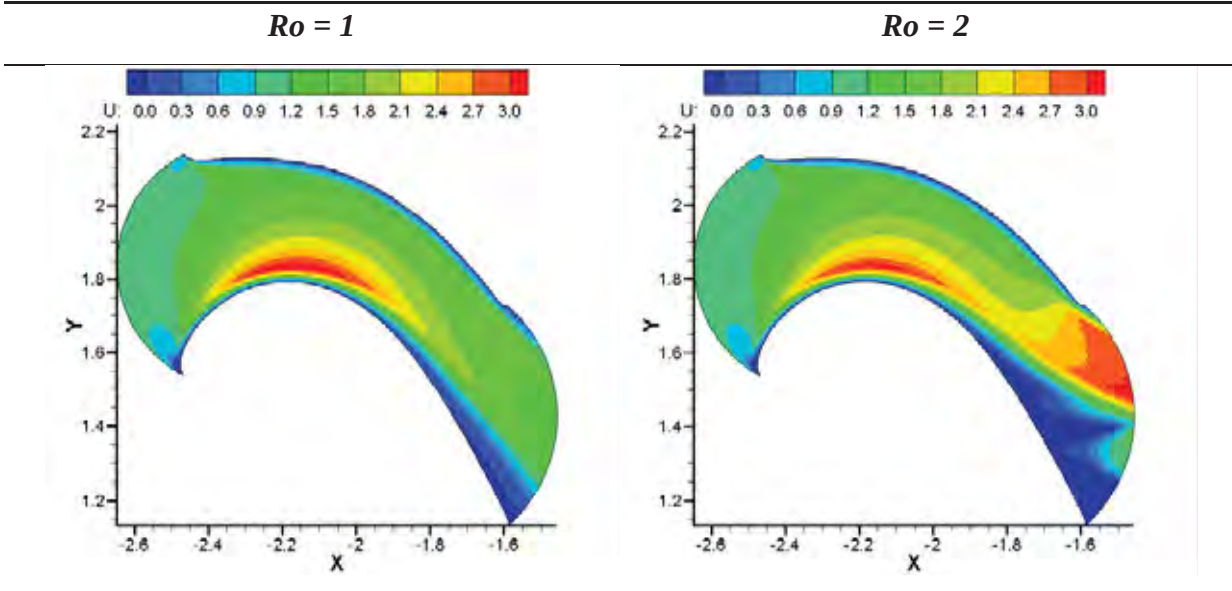
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.20 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,5$



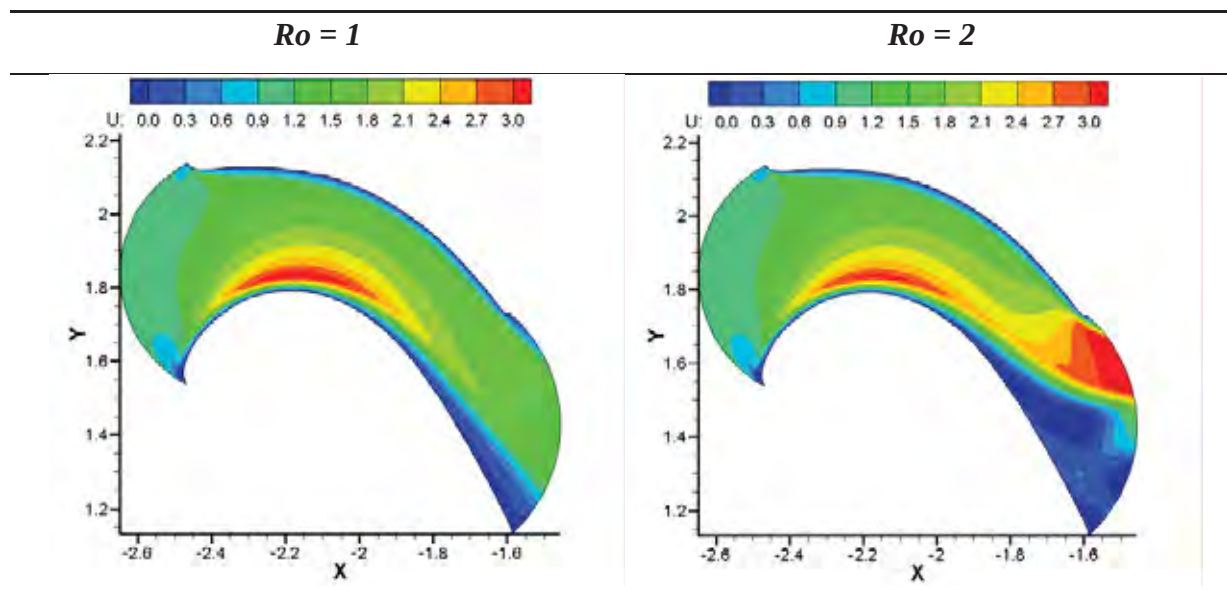
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.21 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 1,75$



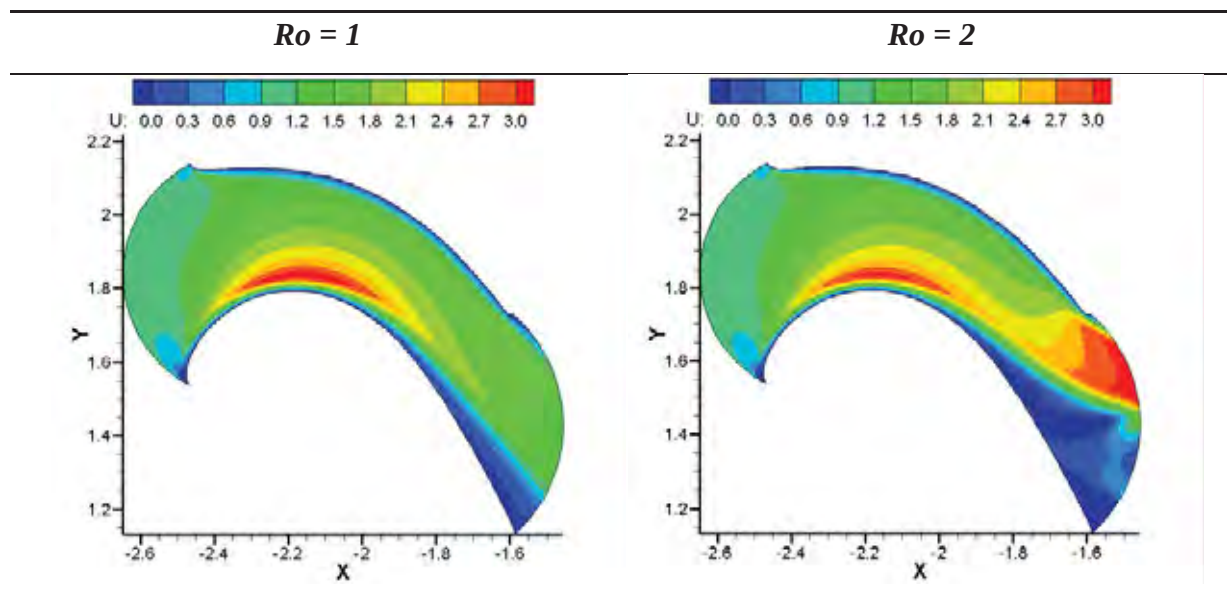
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.22 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 2,0$



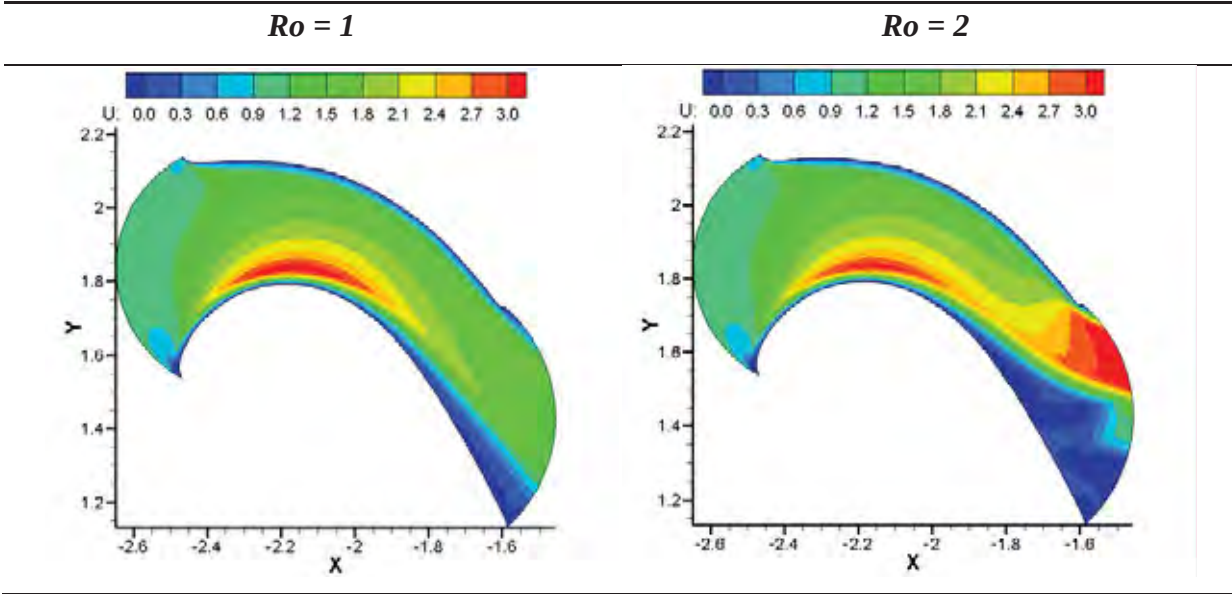
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.23 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 2,25$



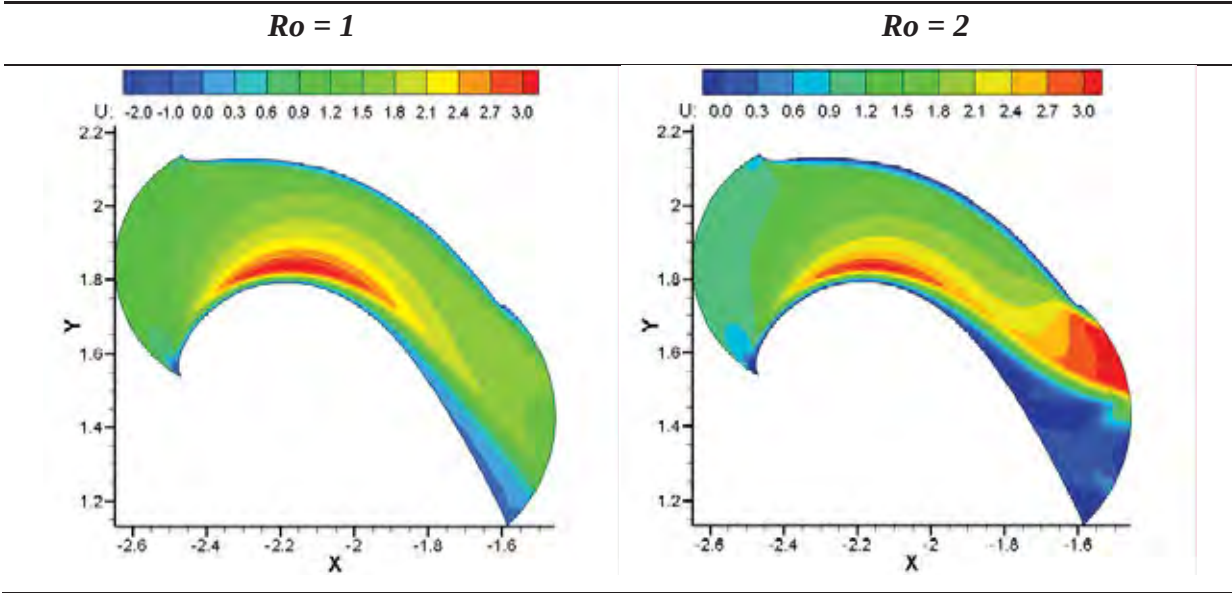
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.24 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 2,5$



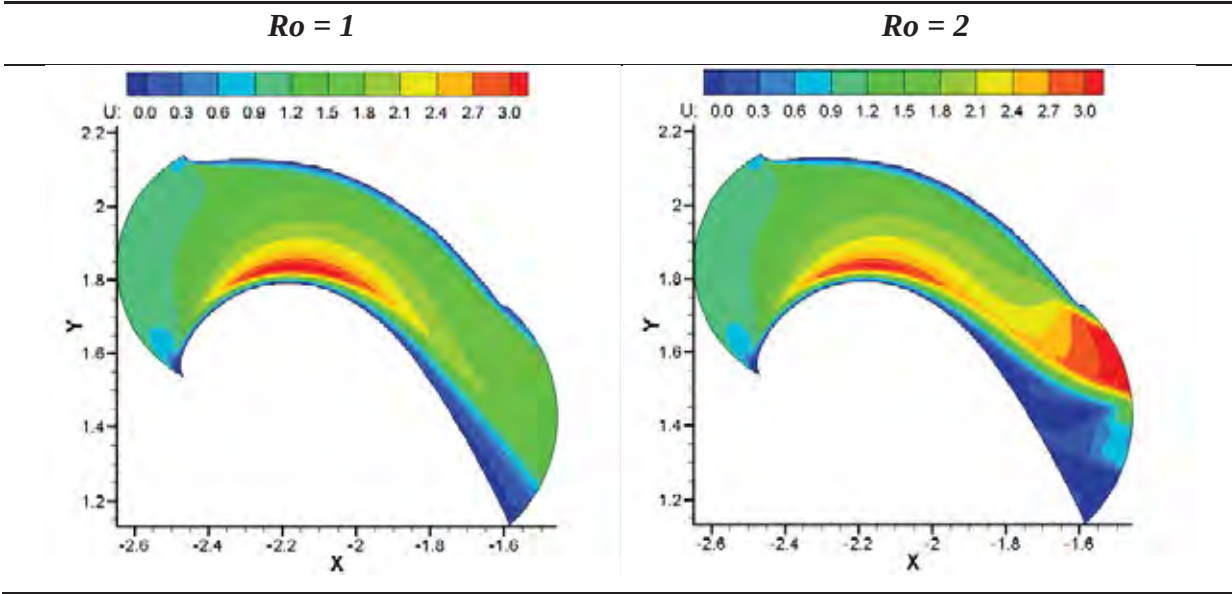
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.25 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 2,75$



Fonte: Pereira (2010).

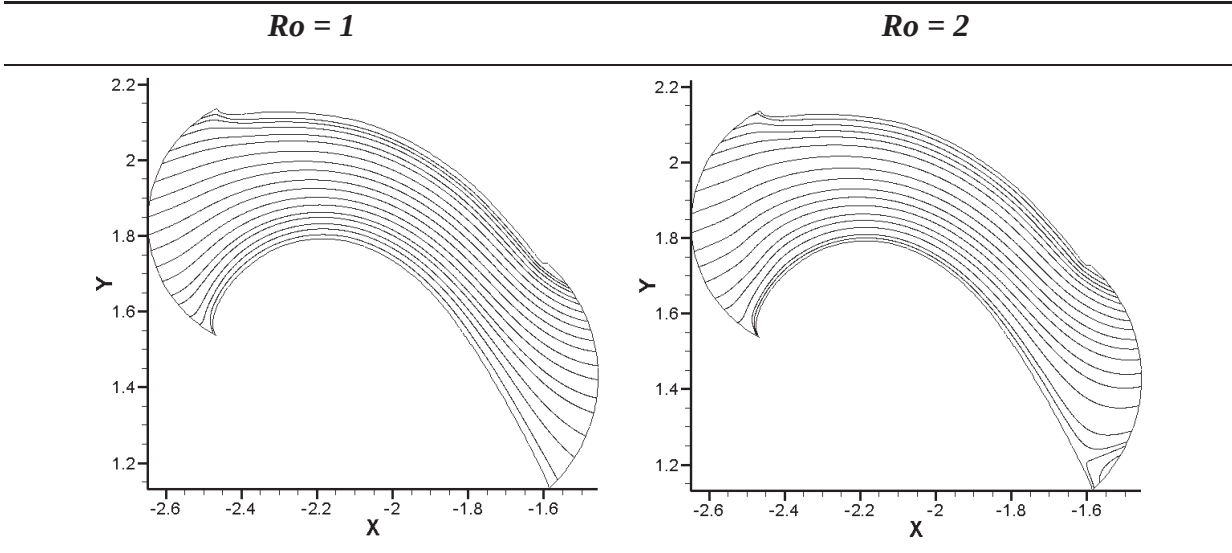
Figura A.1.26 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

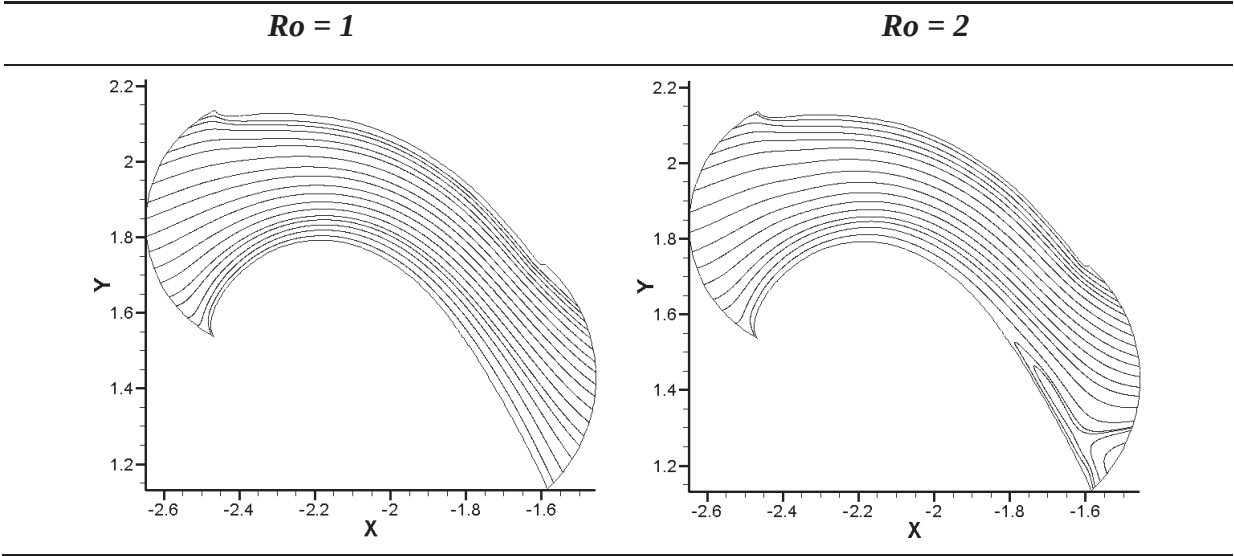
A.1.3 - Linhas de Corrente

Figura A.1.27 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 0,1$



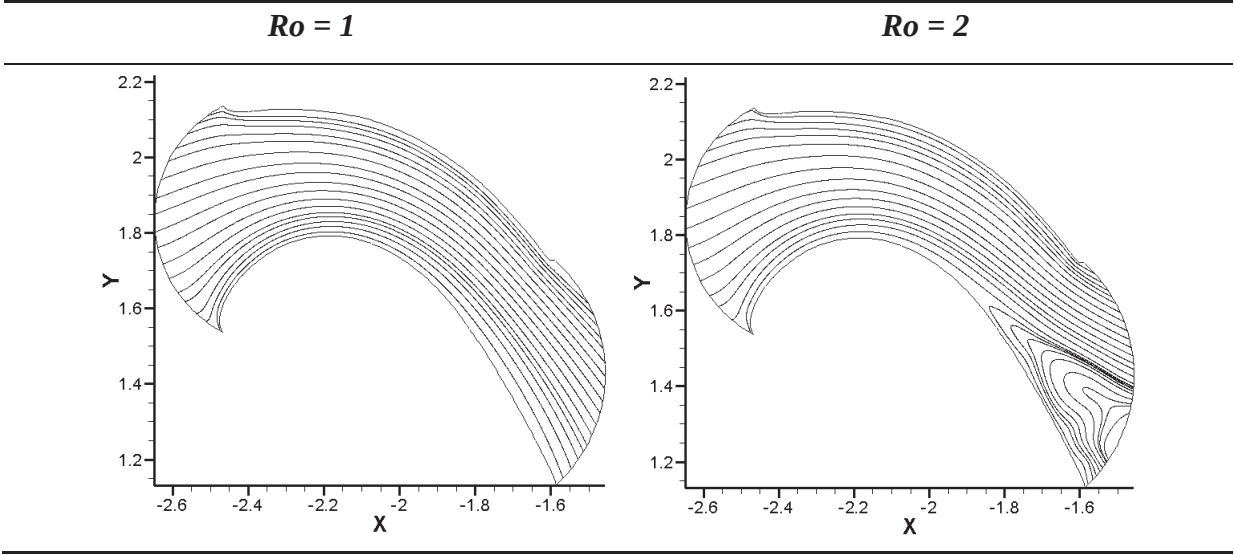
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.28 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 0,25$



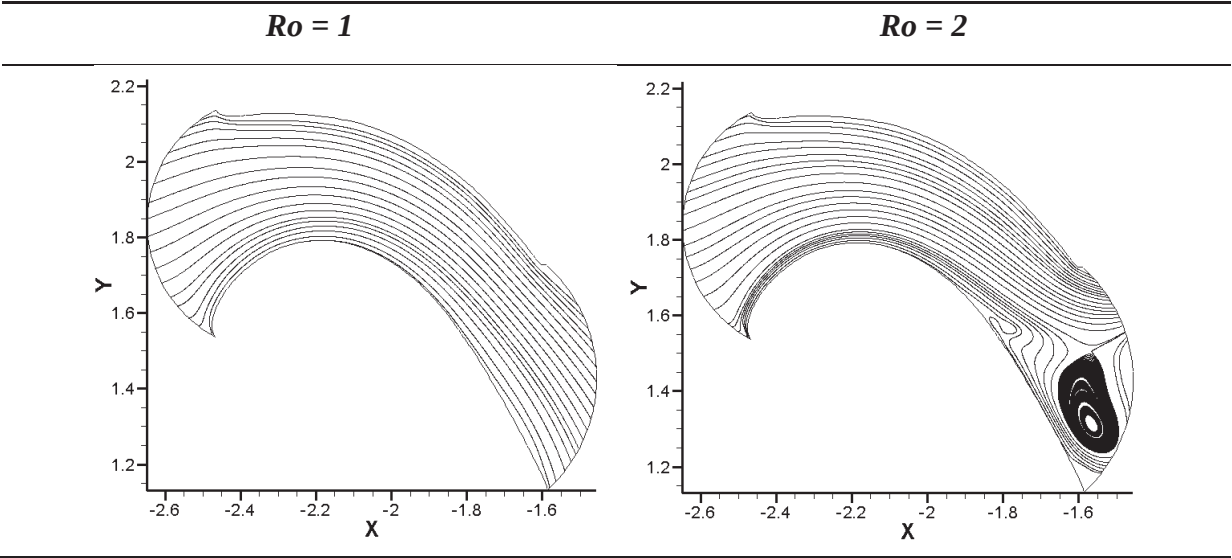
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.29 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 0,5$



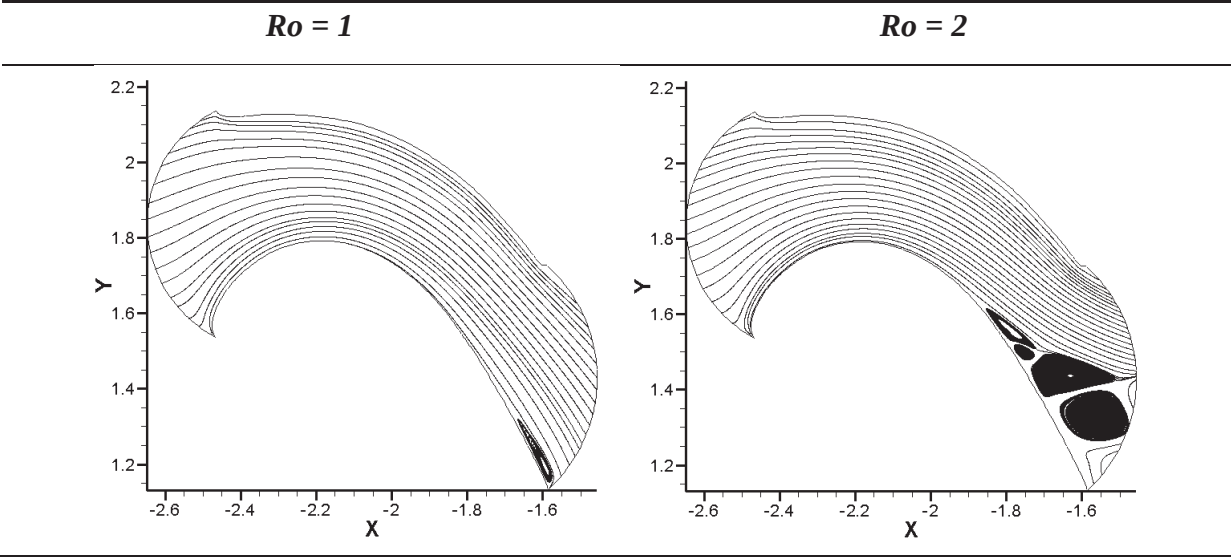
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.30 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 0,75$



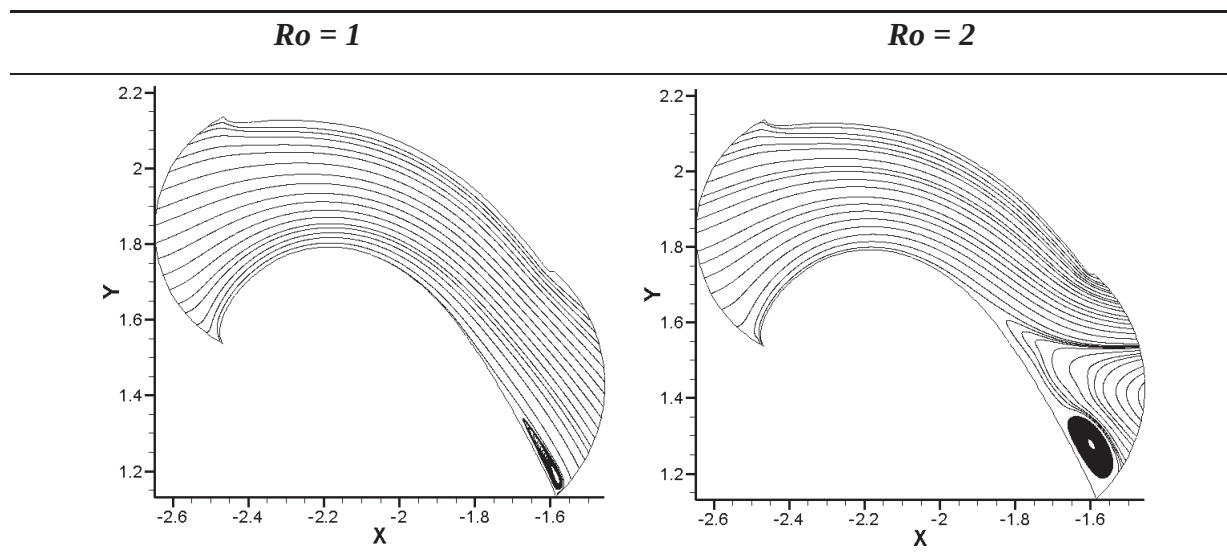
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.31 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 1,0$



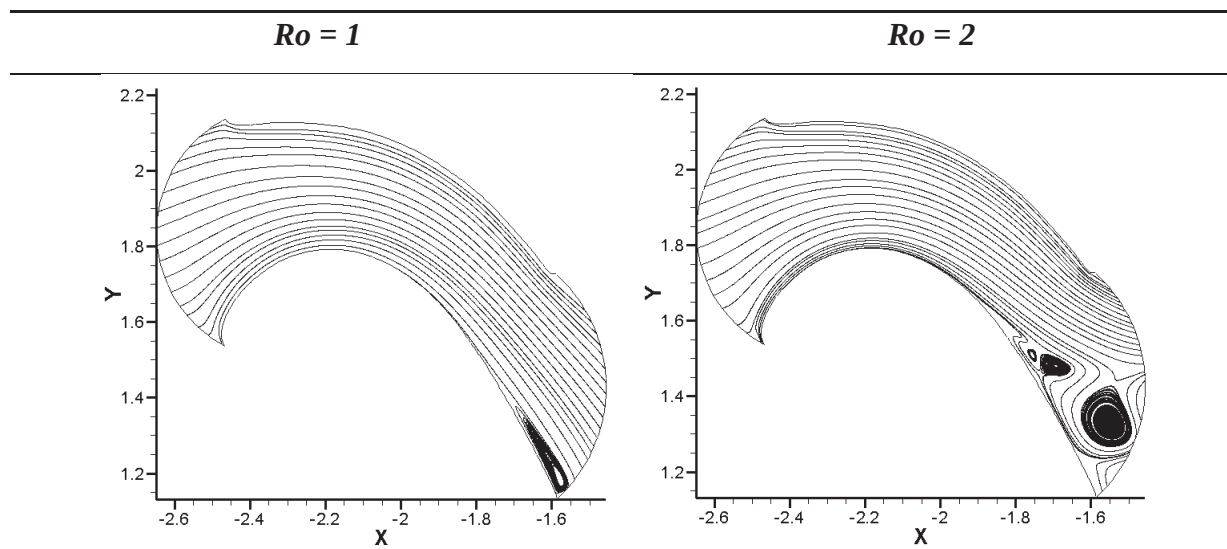
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.32 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 1,25$

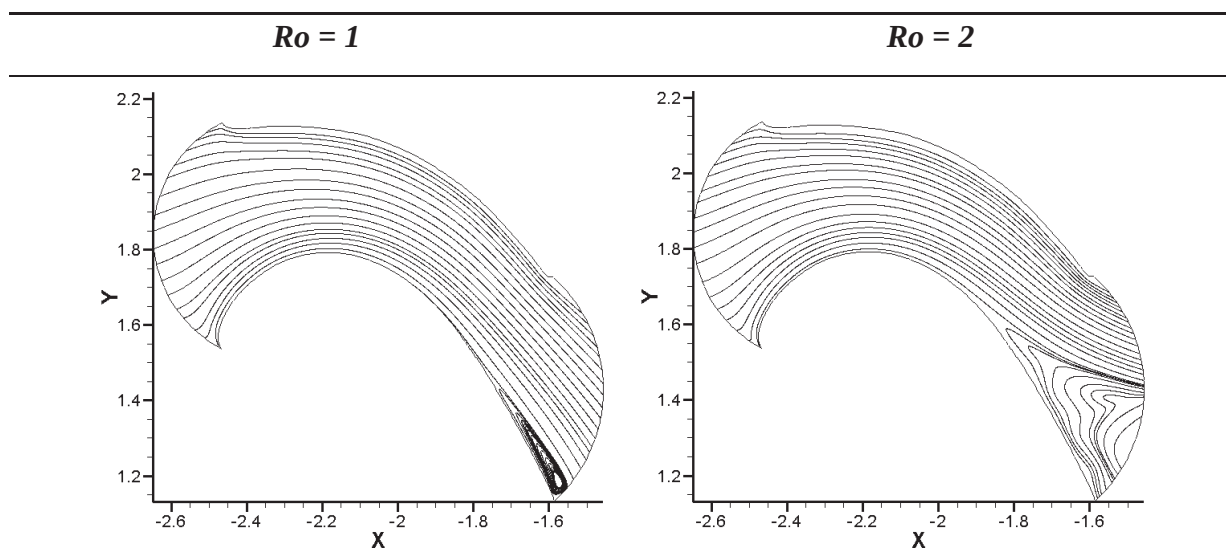


Fonte: Pereira (2010).

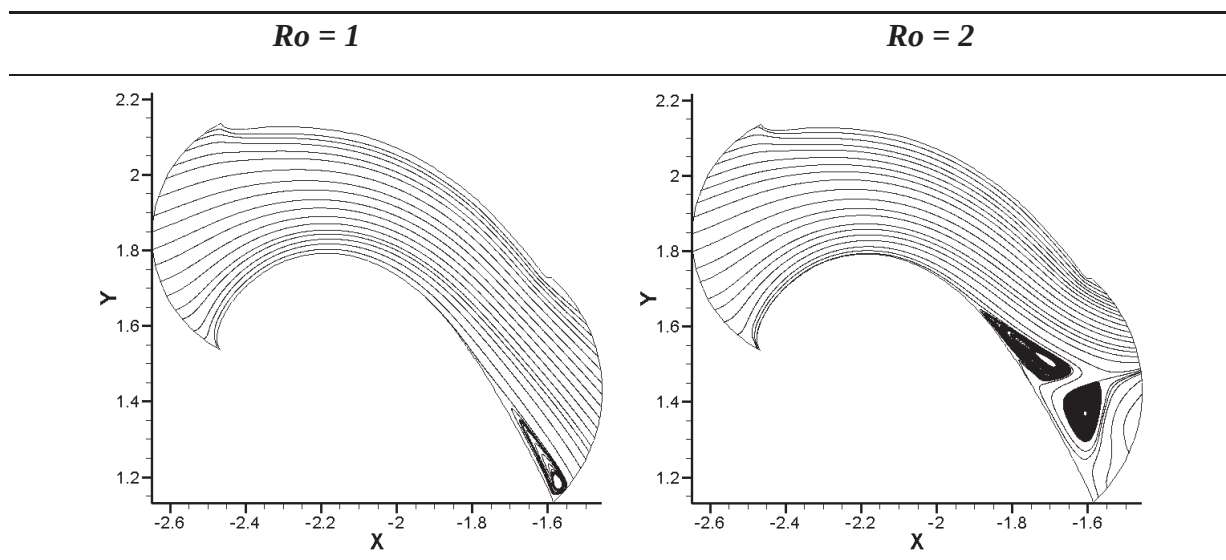
Figura A.1.33 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 1,5$



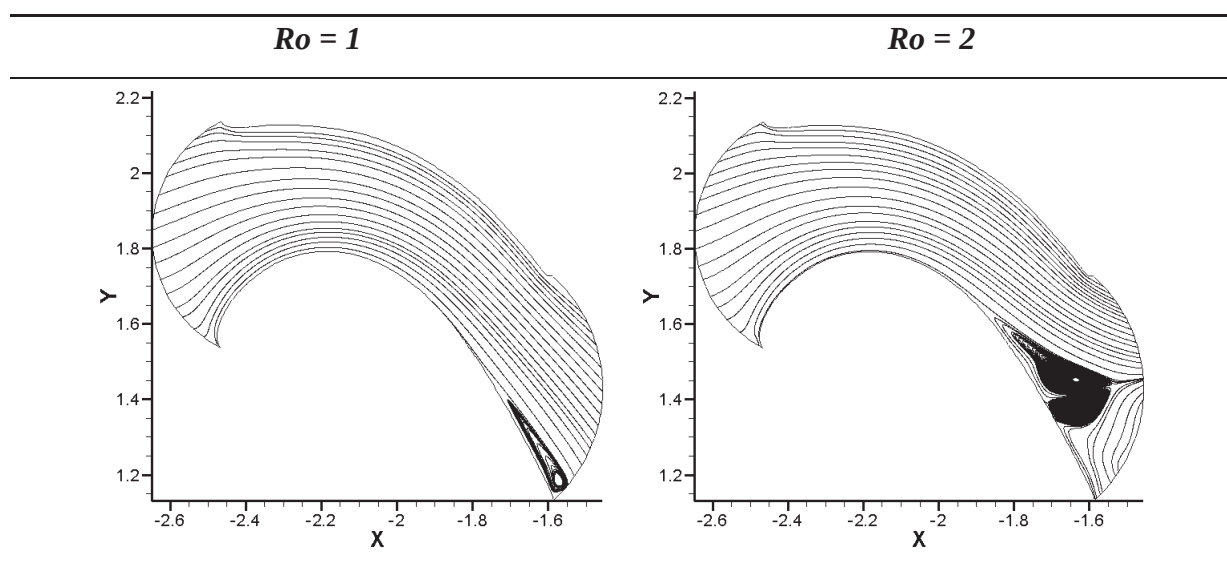
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.34 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 1,75$ 

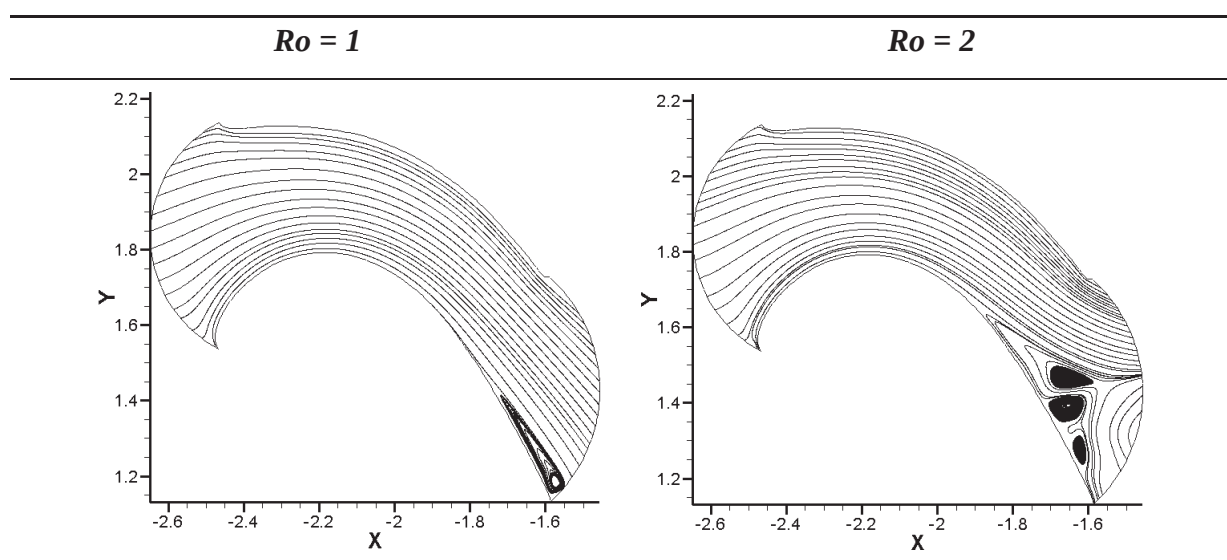
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.35 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 2,0$ 

Fonte: Pereira (2010).

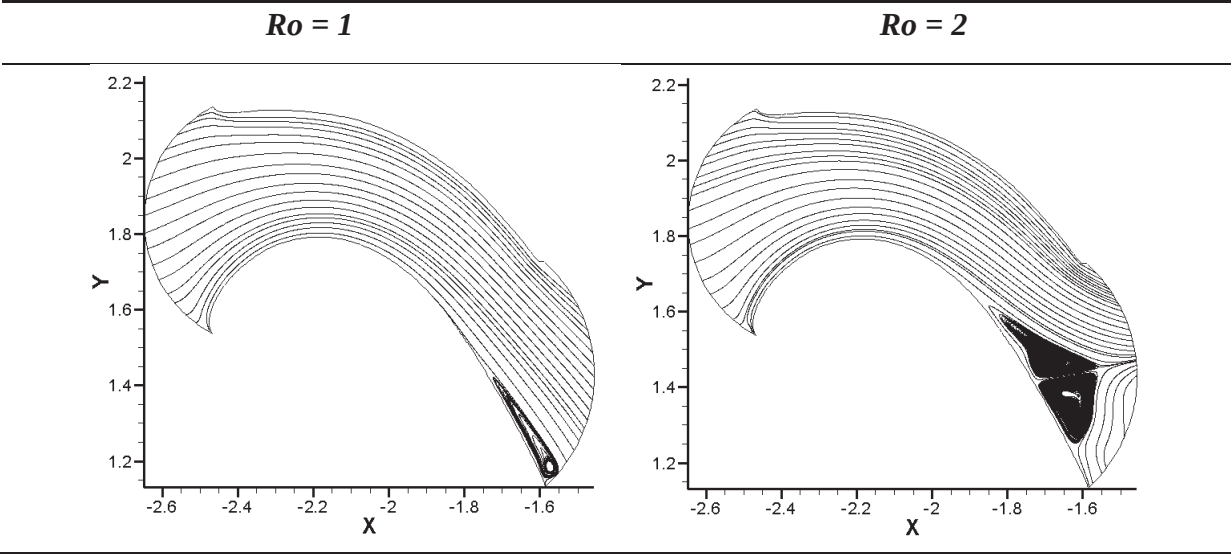
Figura A.1.36 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 2,25$ 

Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.37 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 2,5$ 

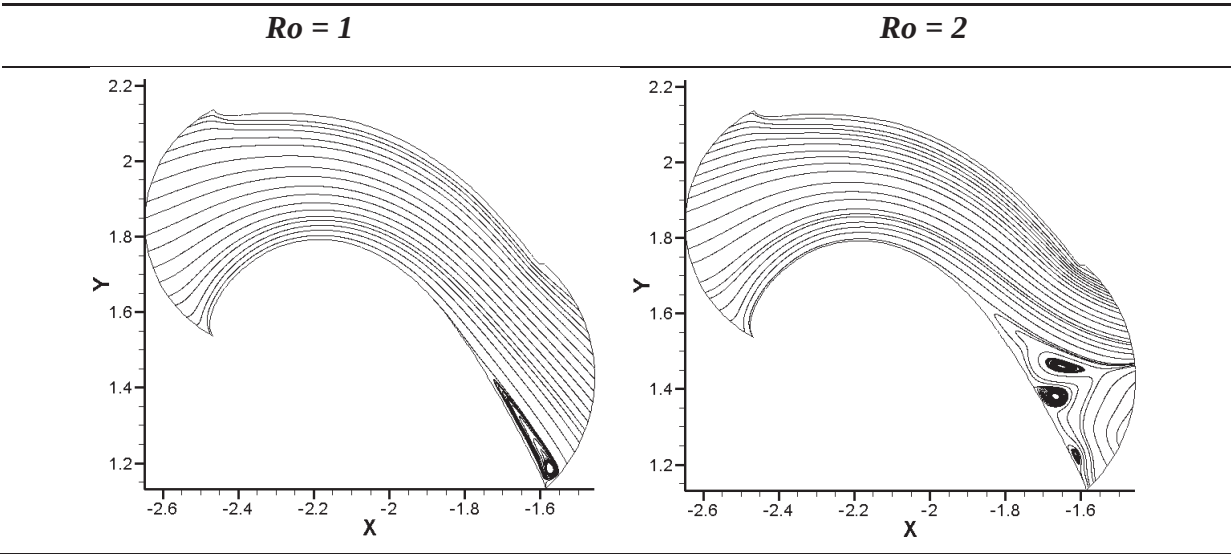
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.38 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 2,75$



Fonte: Pereira (2010).

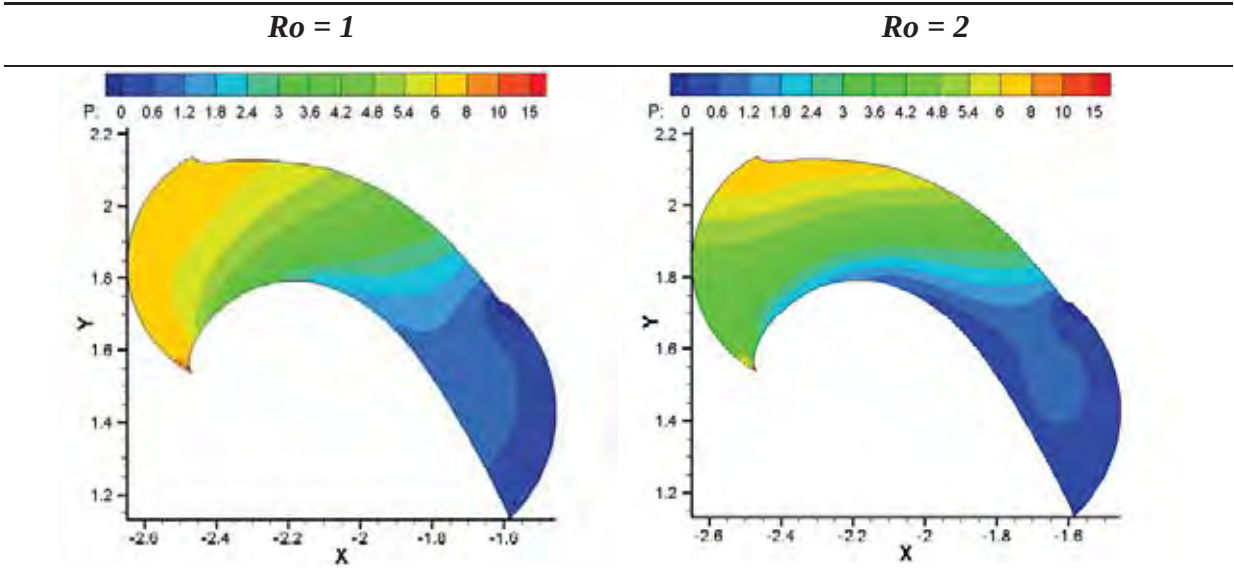
Figura A.1.39 - Linhas de Corrente para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

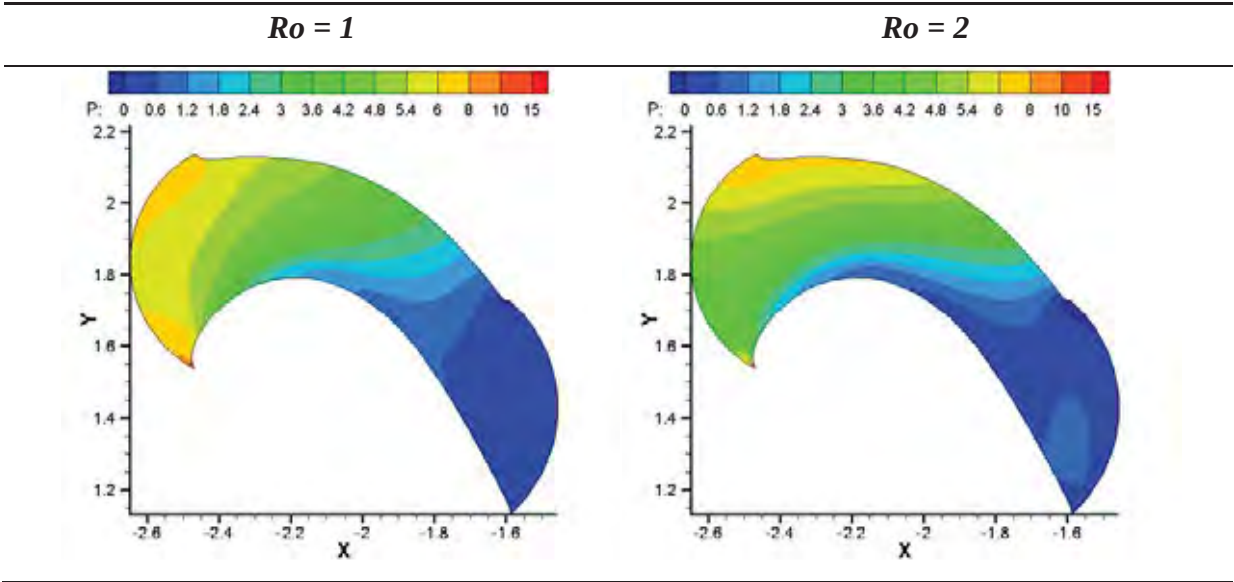
A.1.4 - Campo de Pressão

Figura A.1.40 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 0,1$



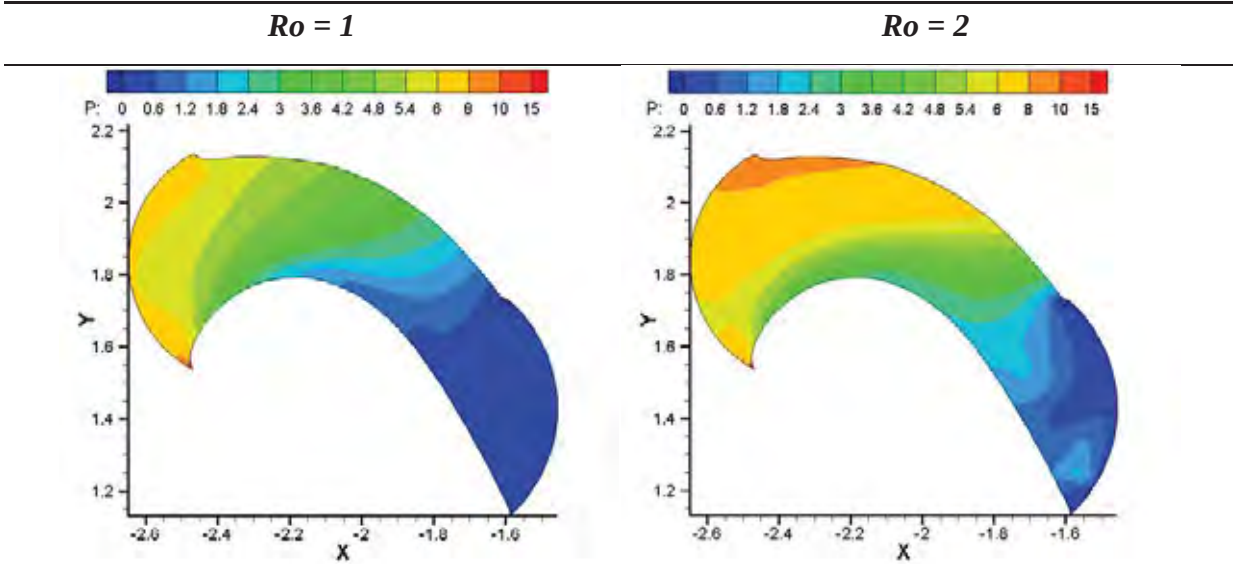
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.41 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 0,25$



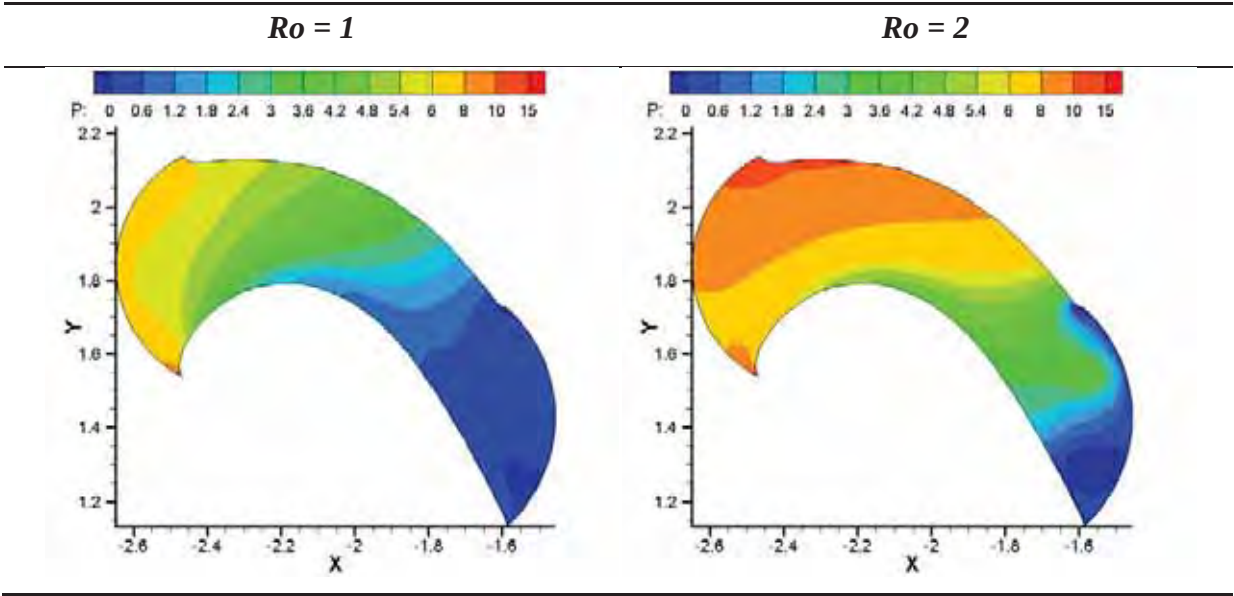
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.42 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 0,5$



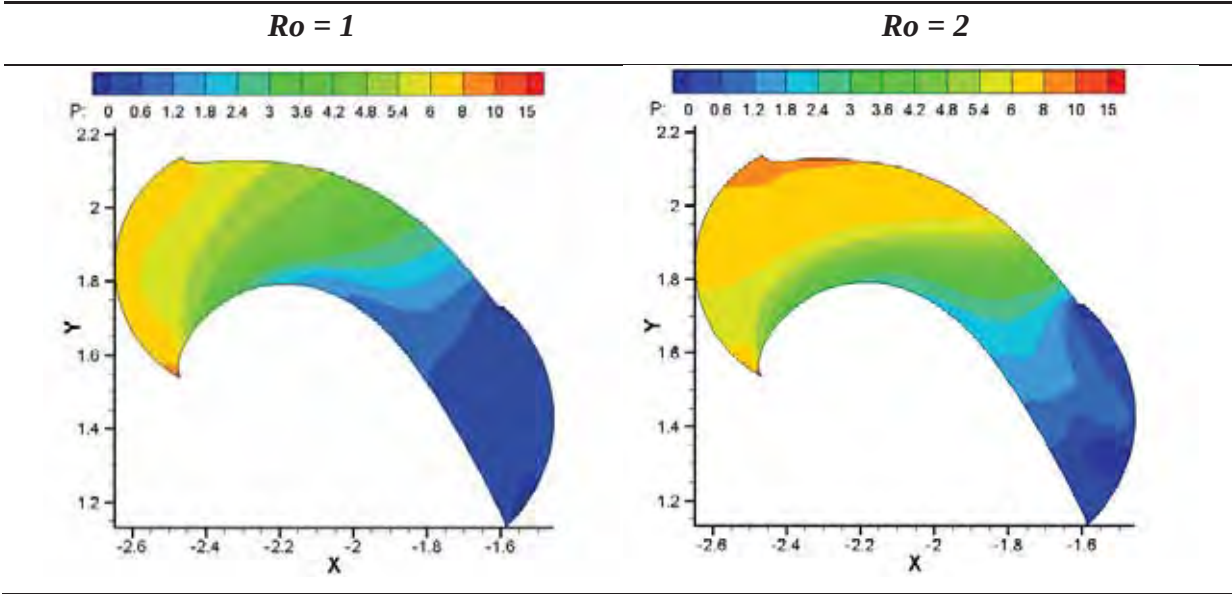
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.43 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 0,75$



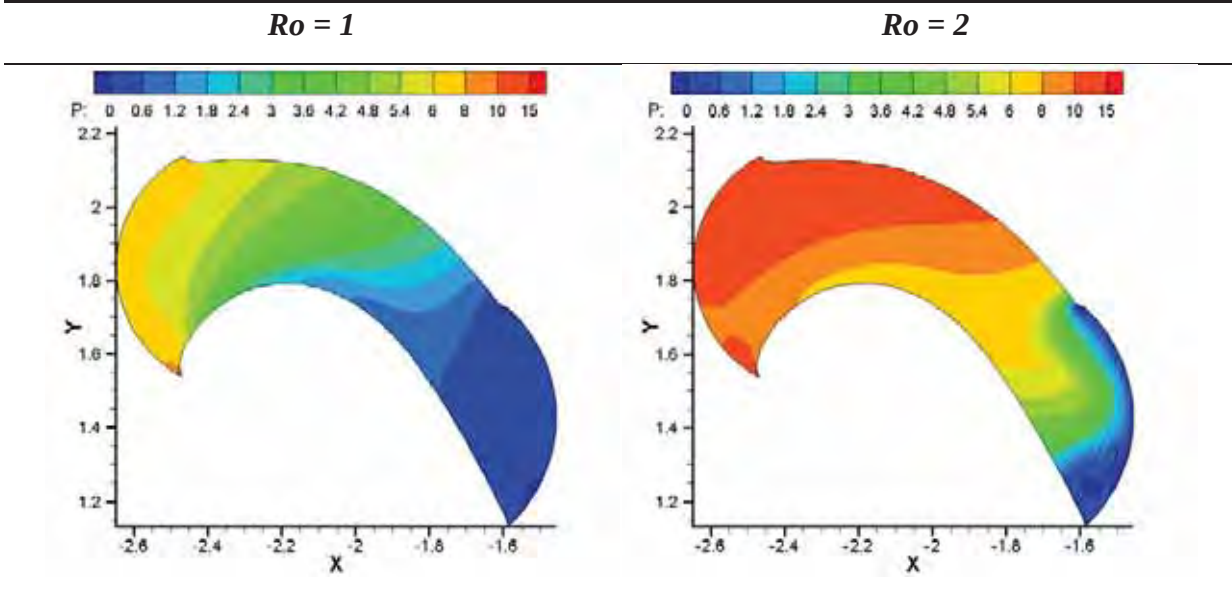
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.44 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 1,0$



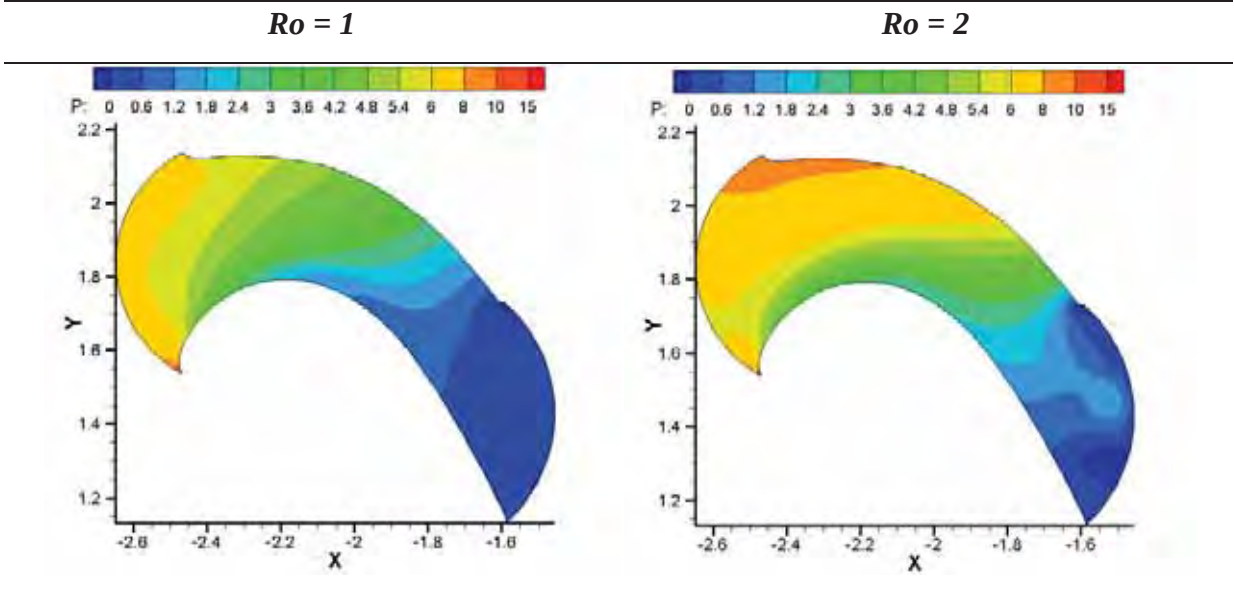
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.45 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 1,25$



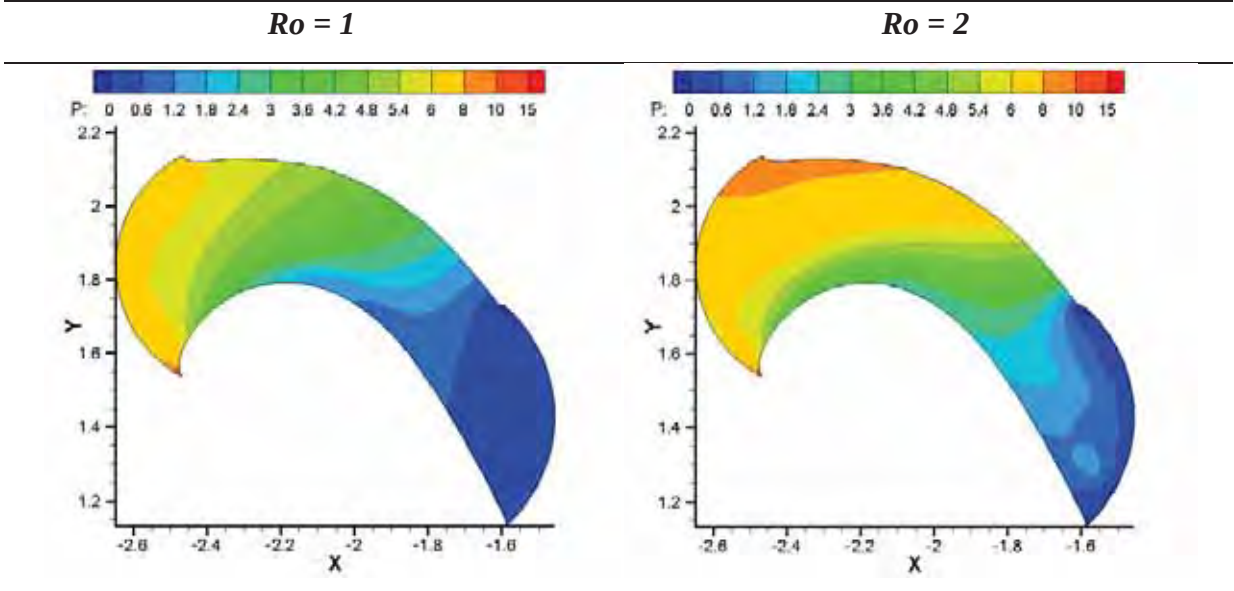
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.46 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 1,5$



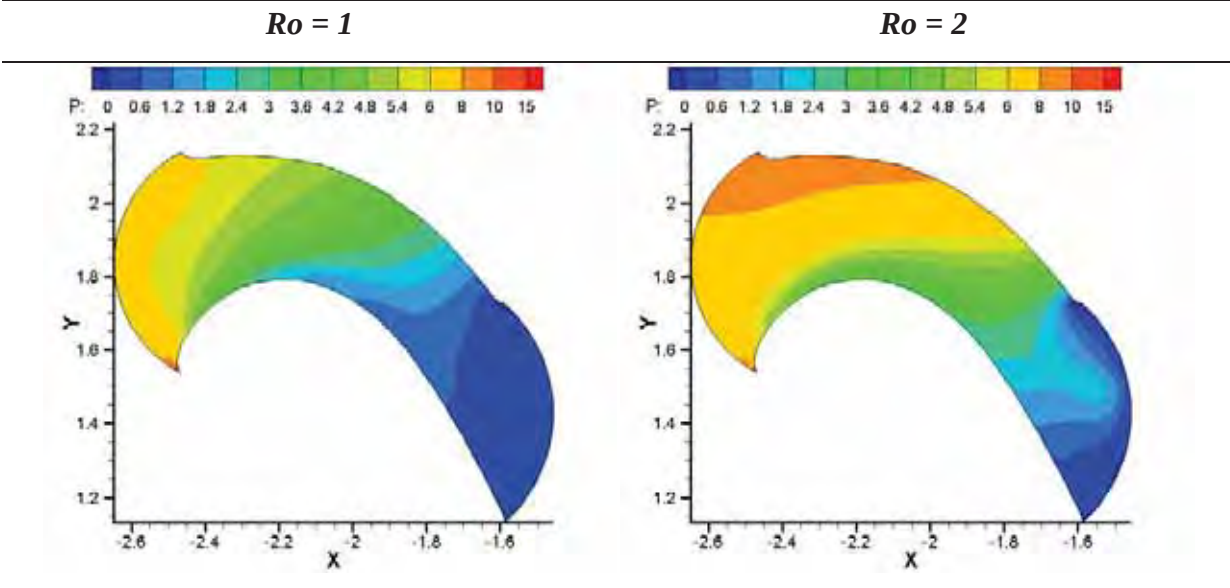
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.47 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 1,75$



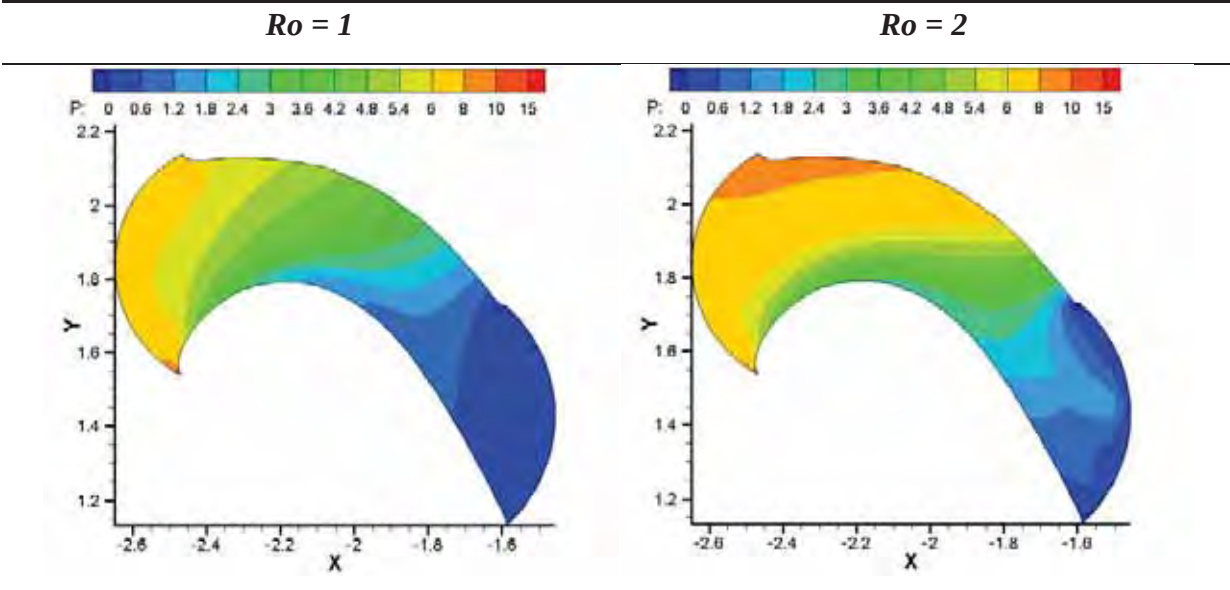
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.48 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 2,0$



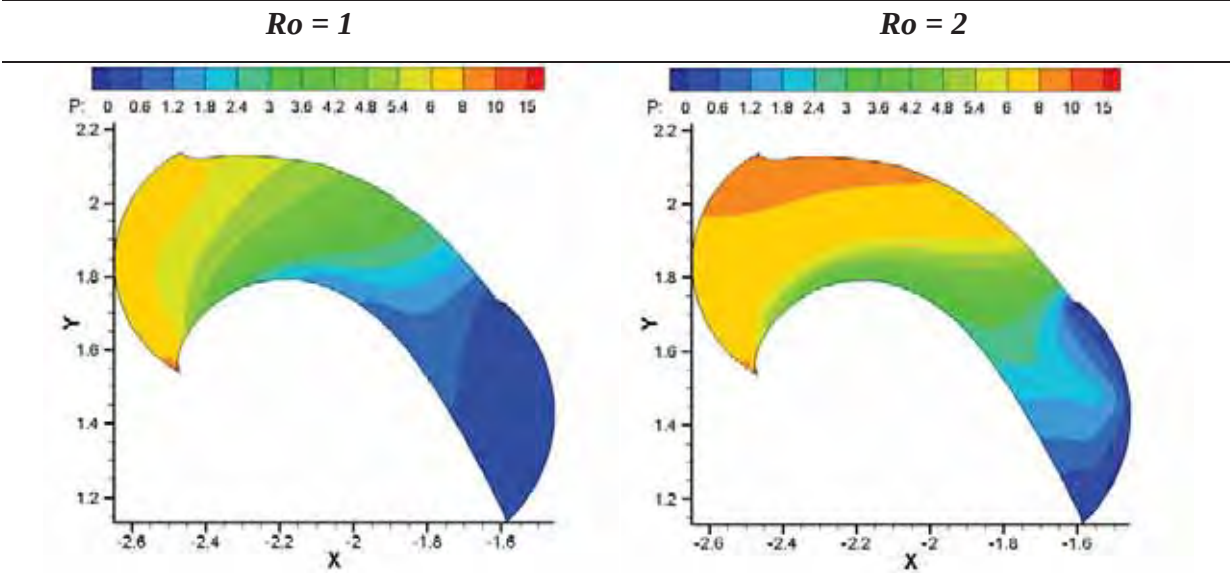
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.49 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 2,25$



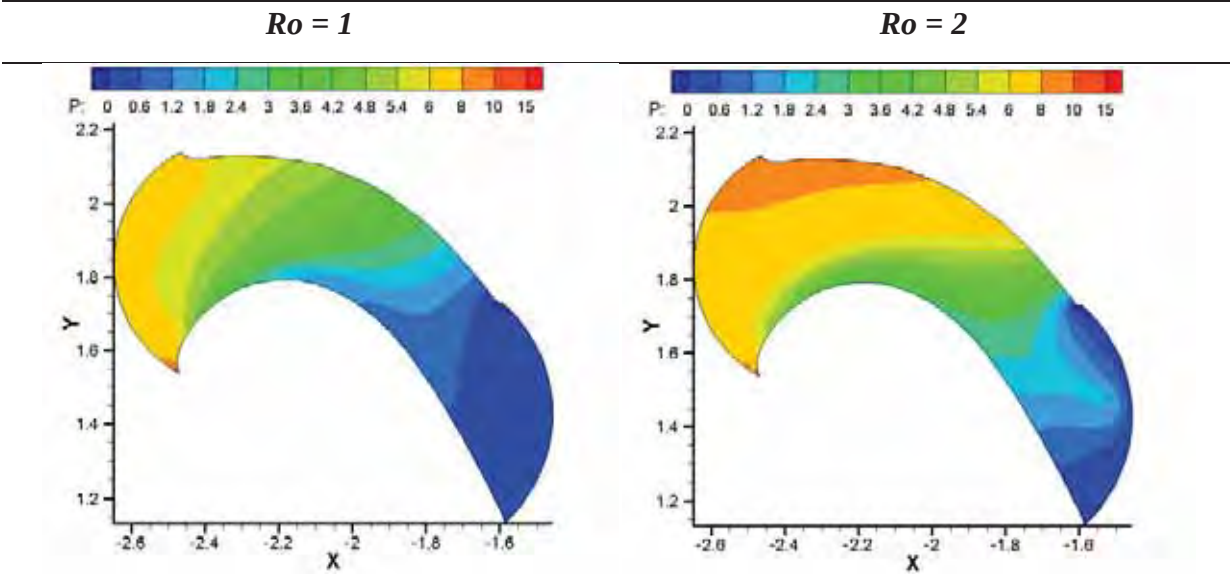
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.50 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 2,5$



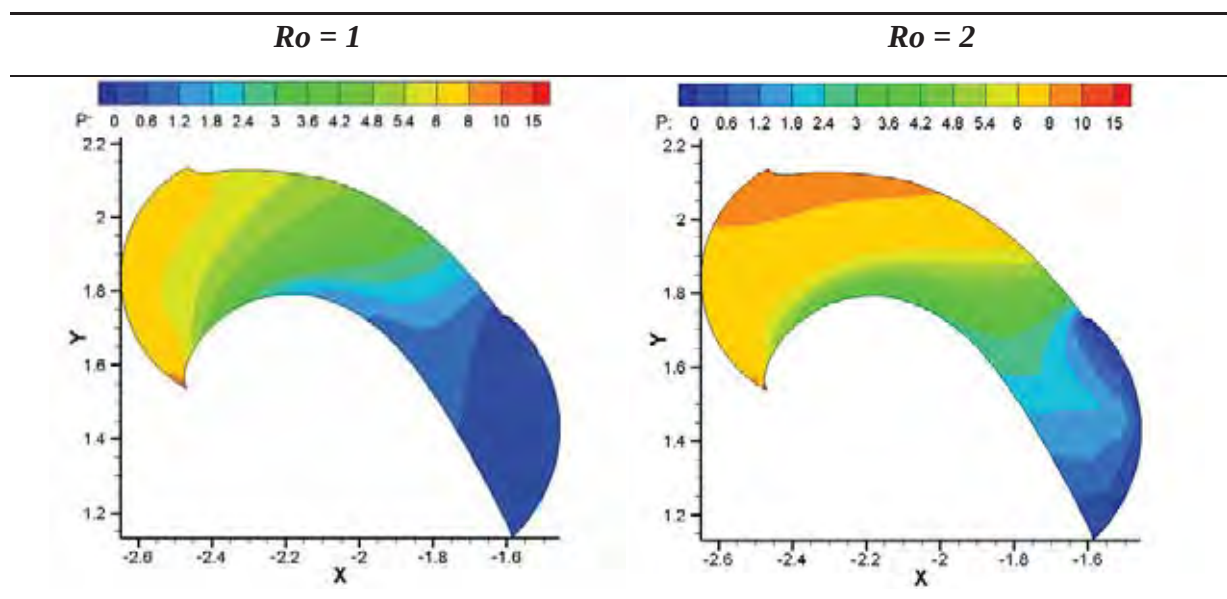
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.51 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 2,75$



Fonte: Pereira (2010).

Figura A.1.52 - Campo de pressão para $Re = 10^4$ e $t = 3,0$

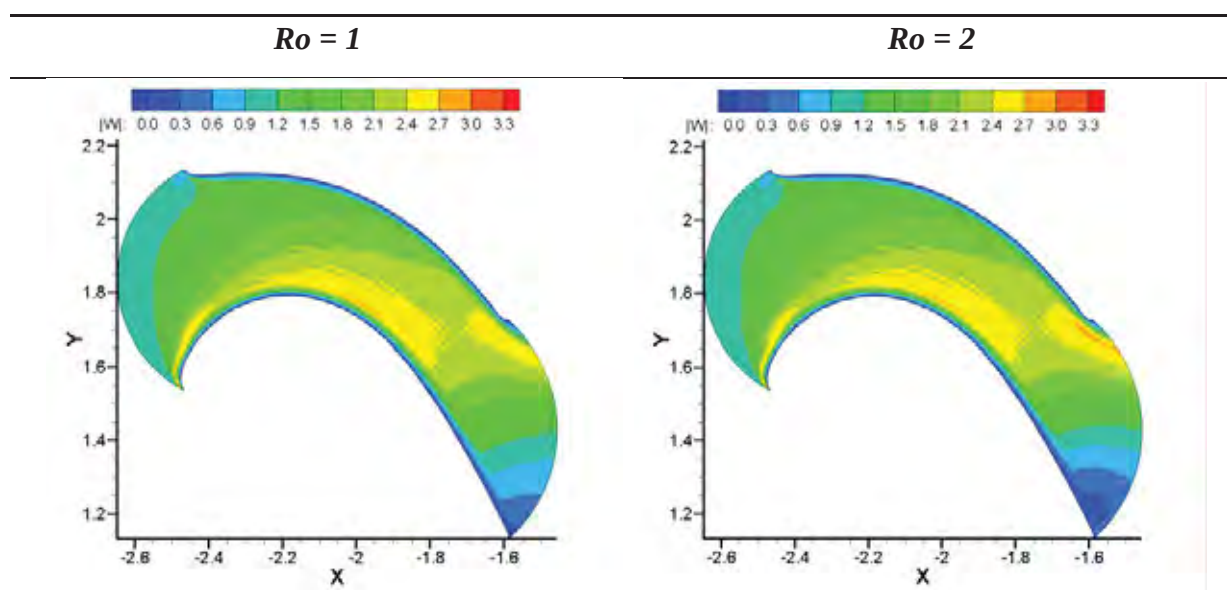


Fonte: Pereira (2010).

A.2 – Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^5$

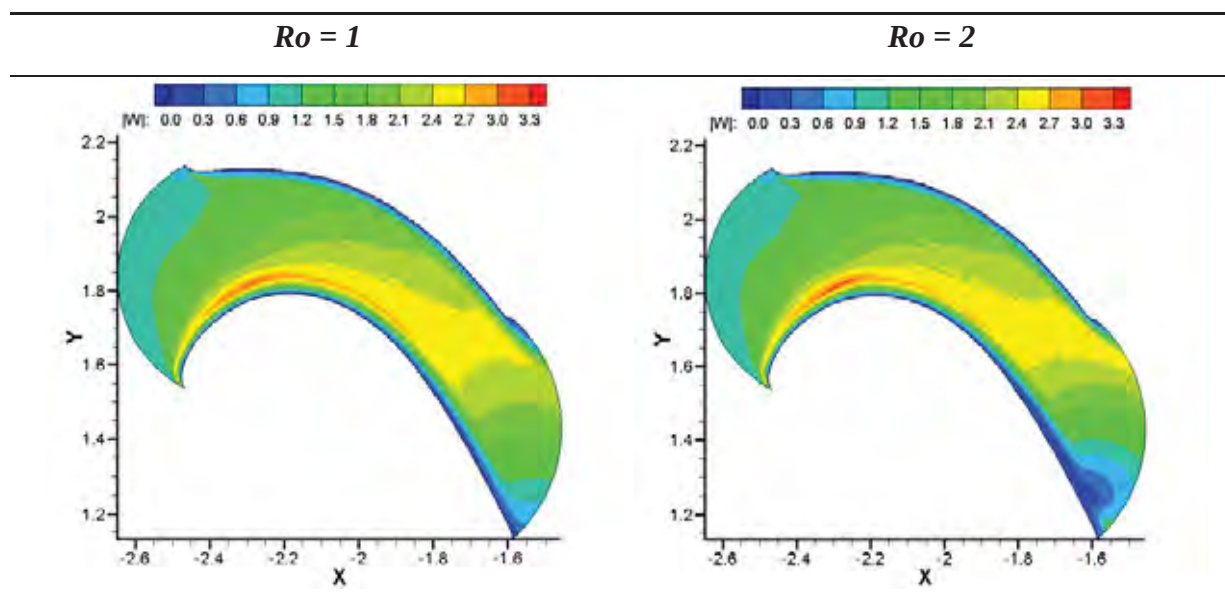
A.2.1 – Norma da Velocidade Relativa $\|\vec{W}\|$

Figura A.2.1 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,1$



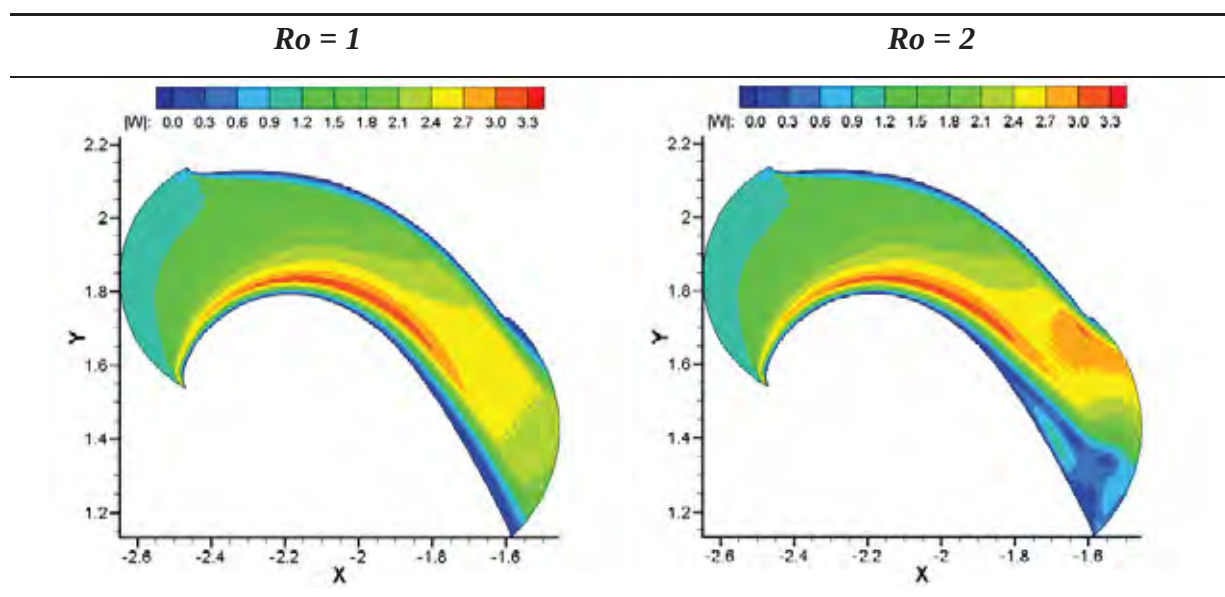
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.2 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,2$



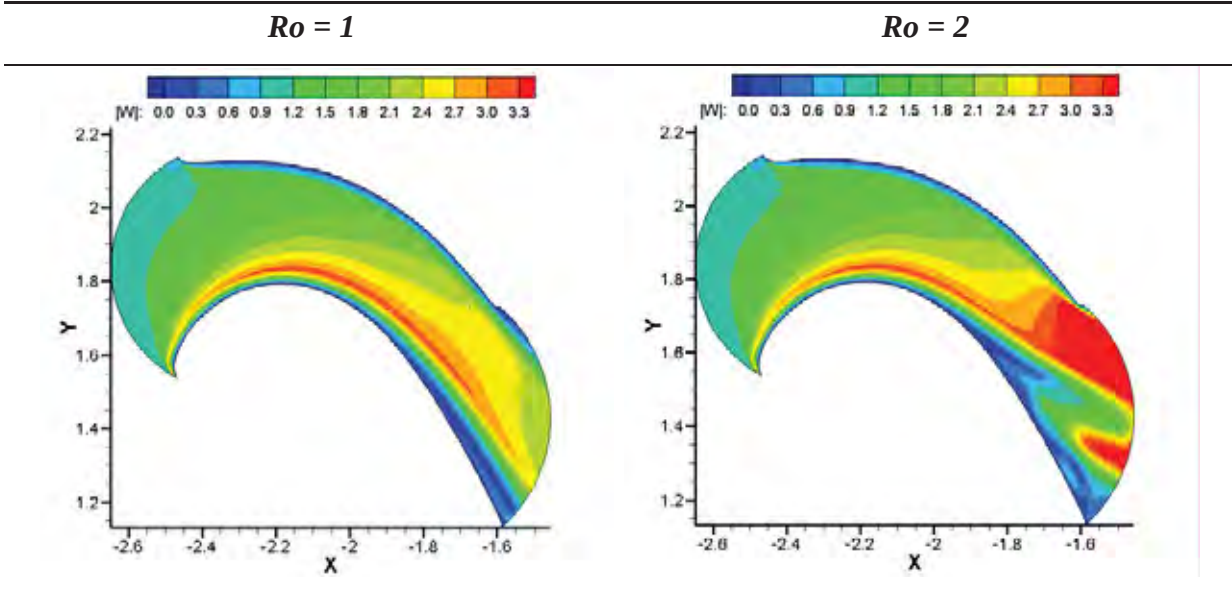
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.3 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,4$



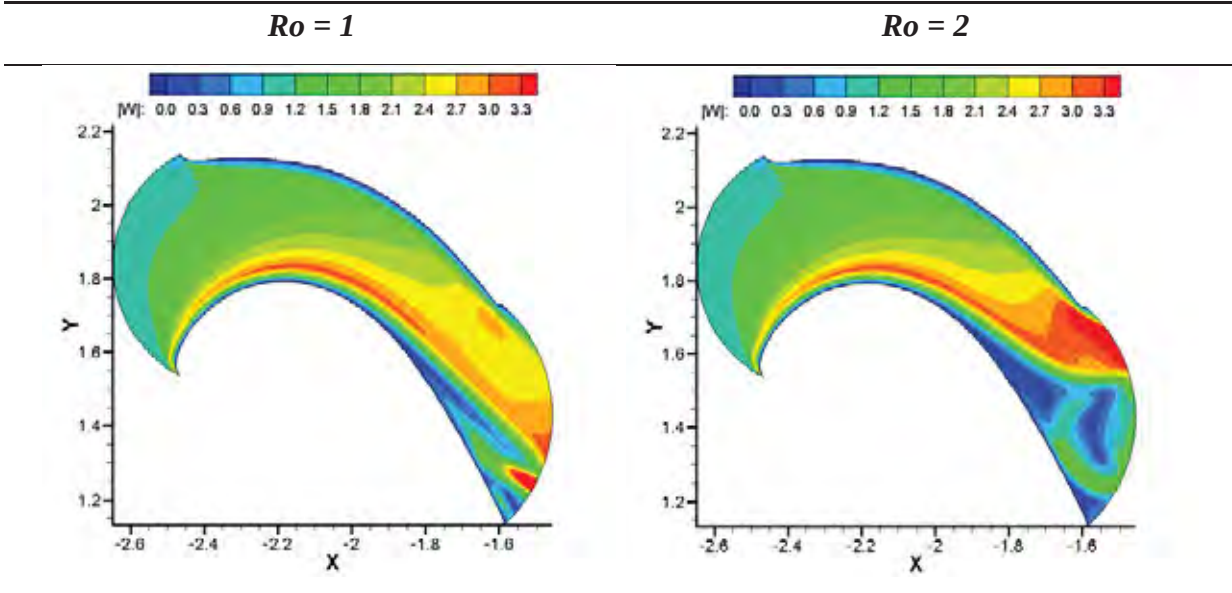
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.4 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,6$



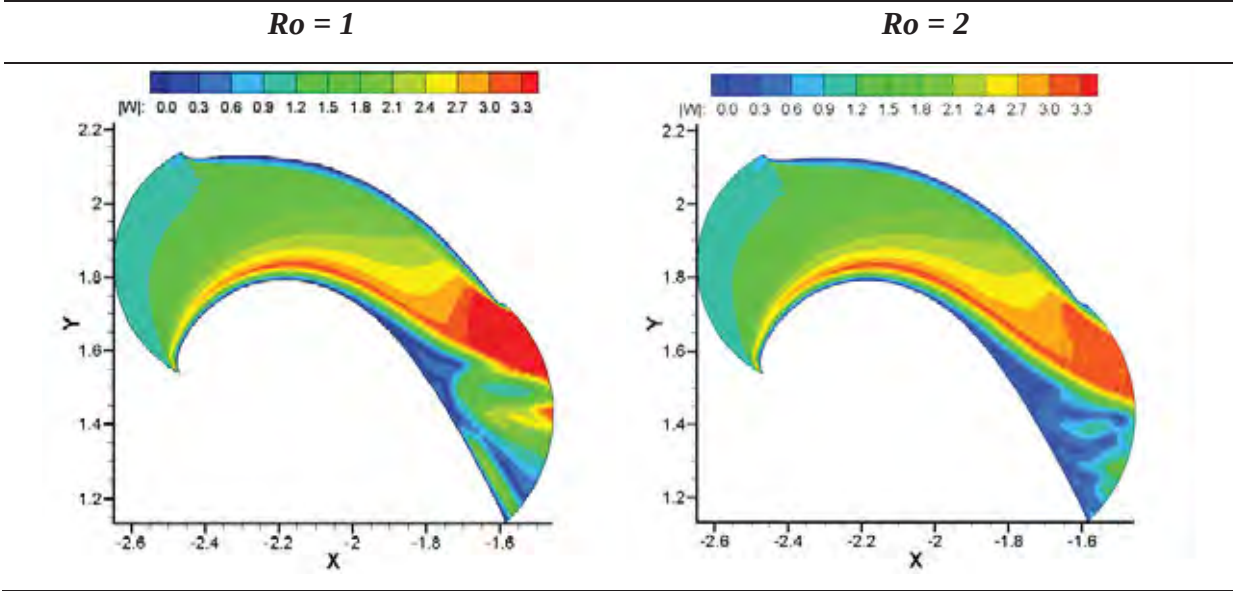
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.5 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,8$



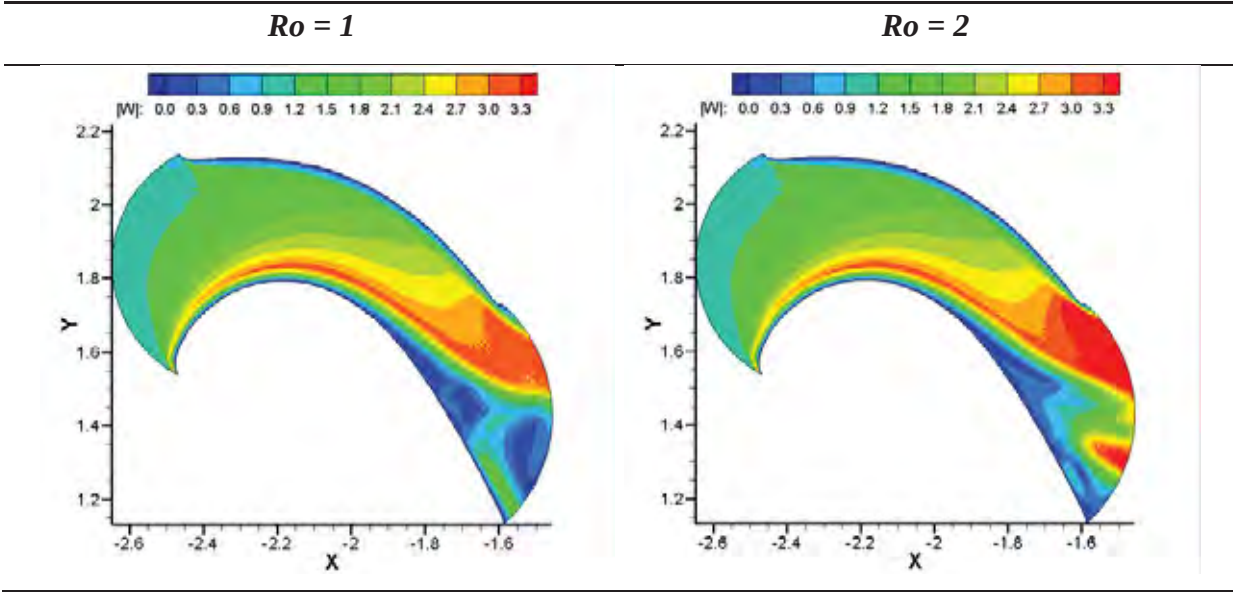
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.6 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$



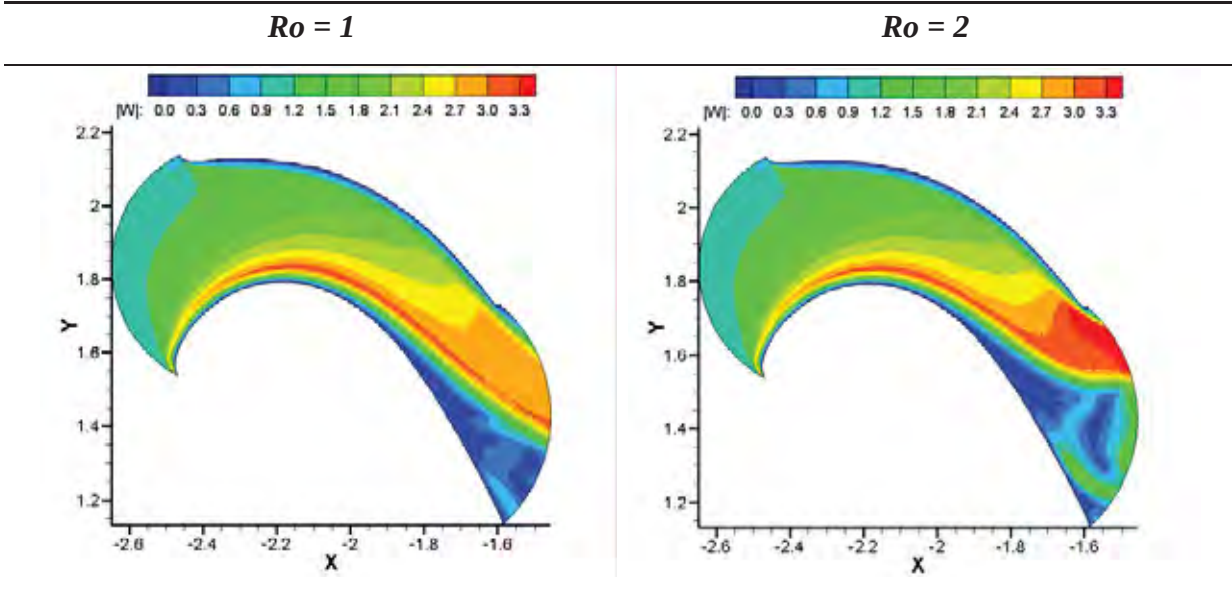
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.7 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,2$



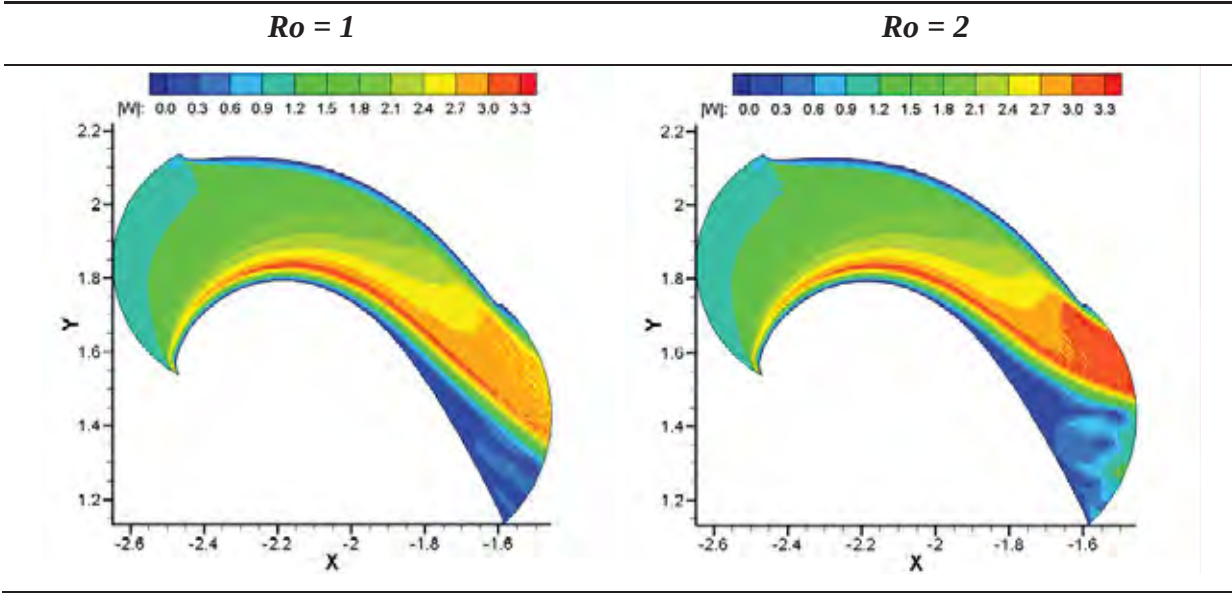
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.8 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,4$



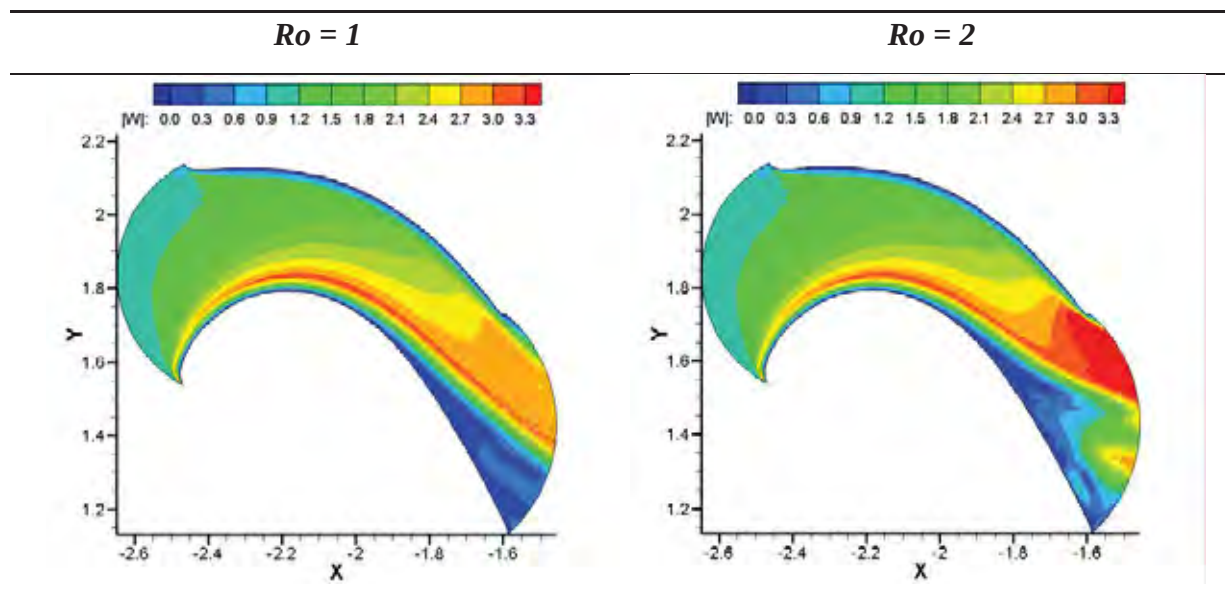
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.9 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,6$



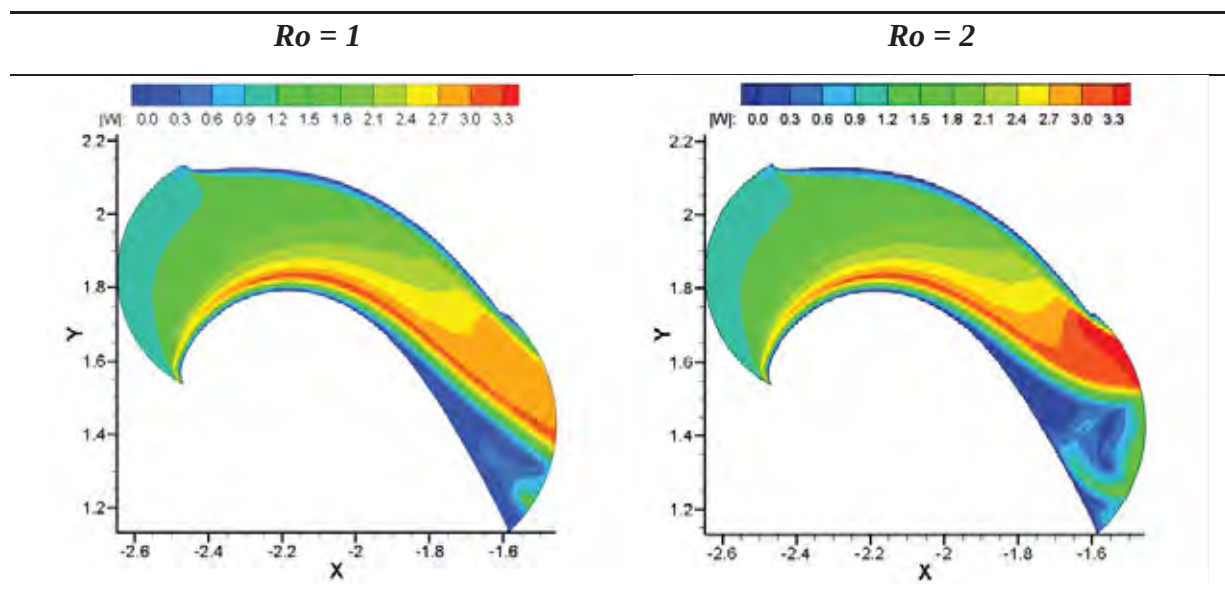
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.10 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,8$



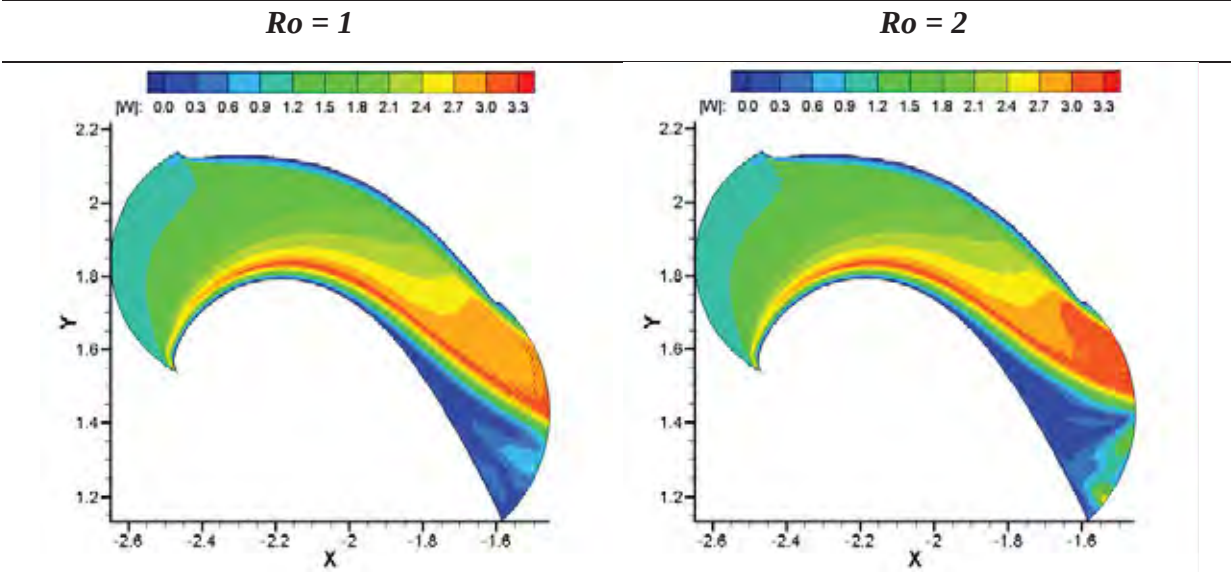
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.11 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,0$



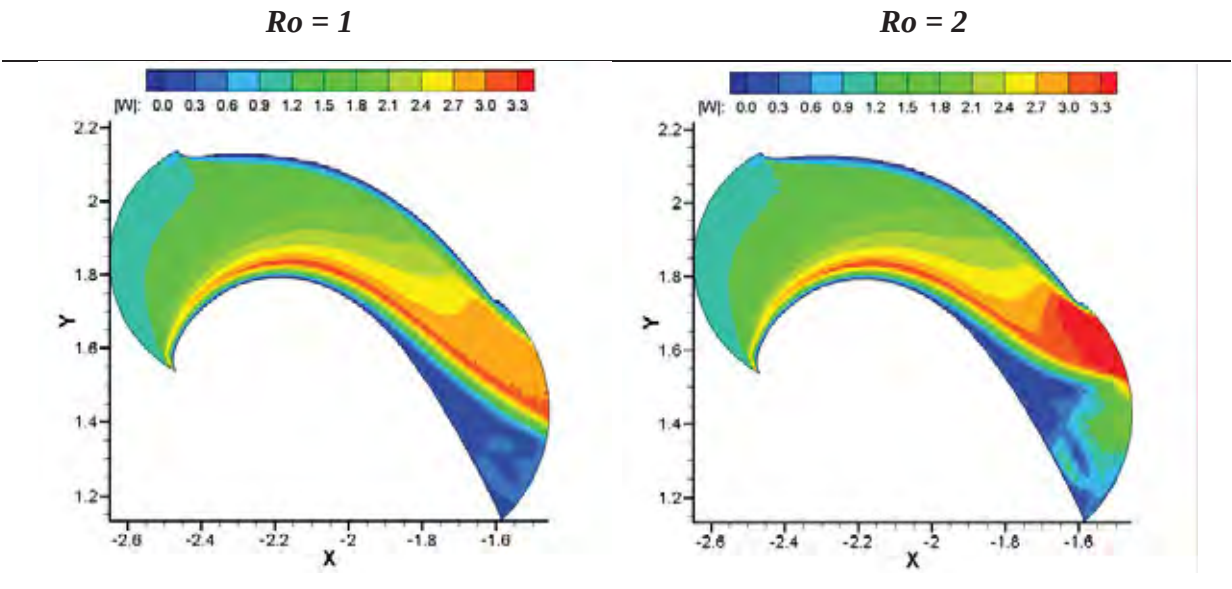
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.12 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,2$



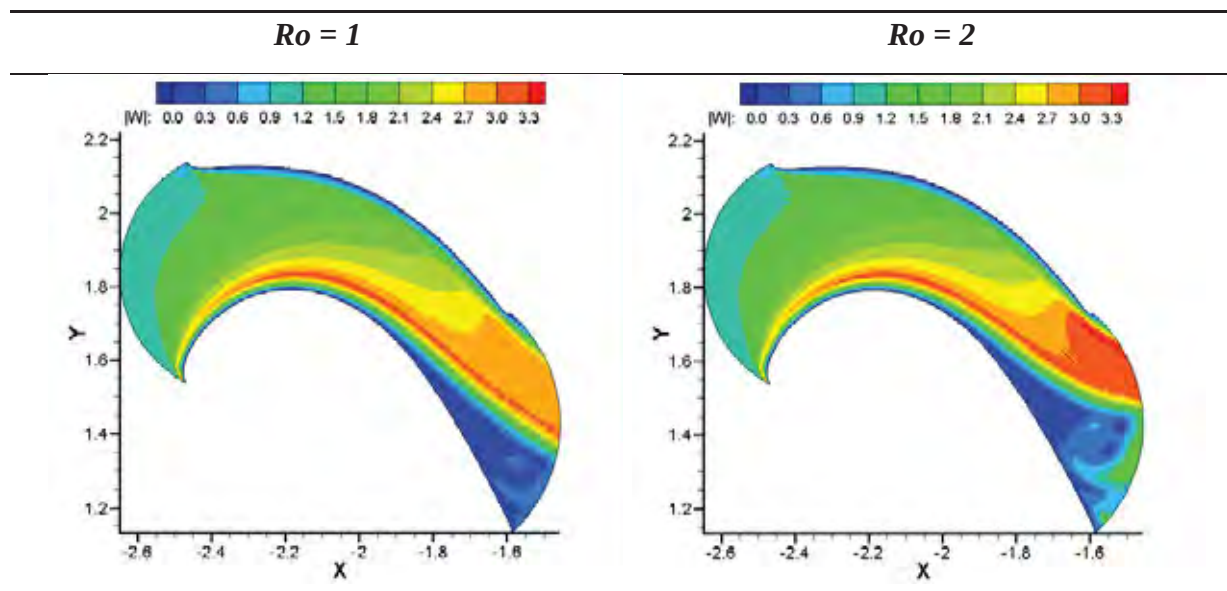
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.13 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,4$



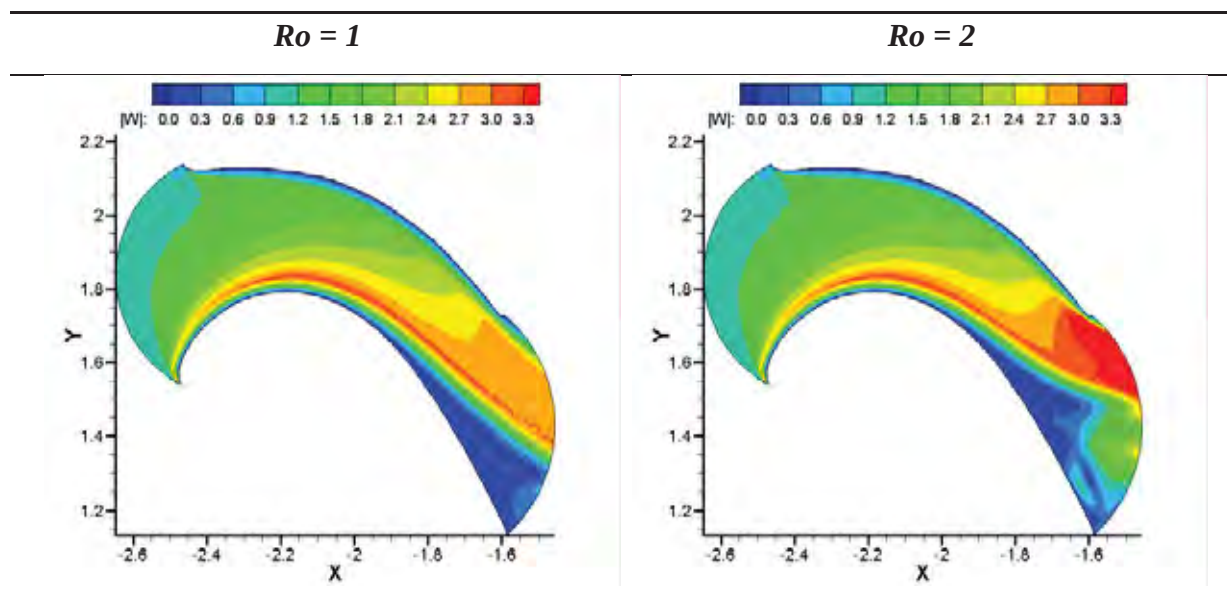
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.14 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,6$



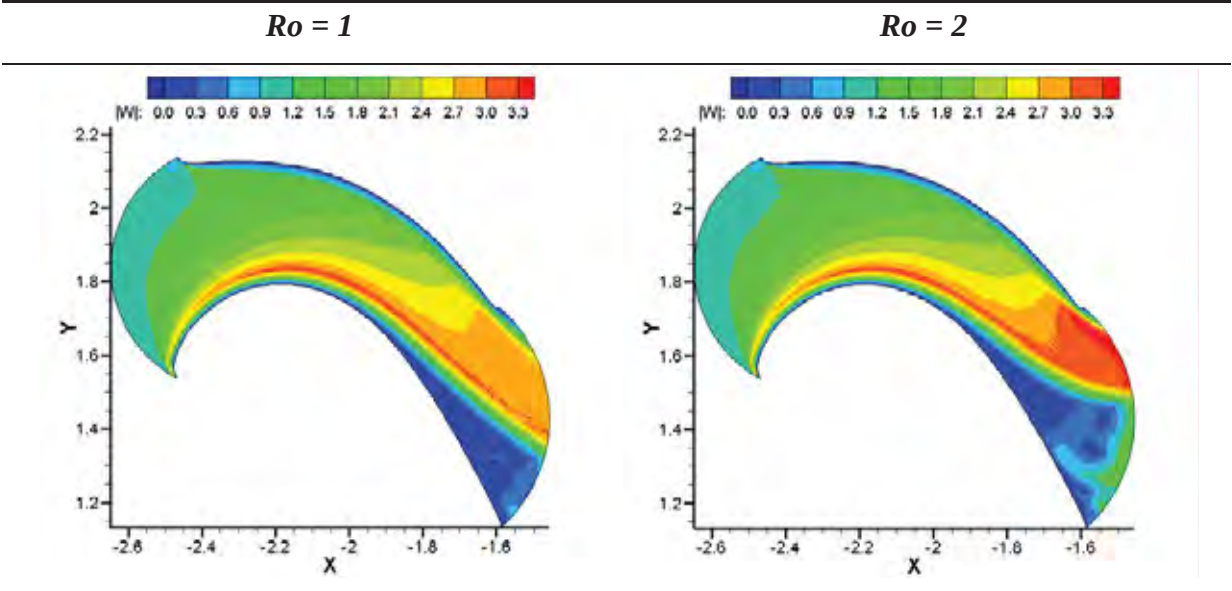
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.15 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,8$



Fonte: Pereira (2010).

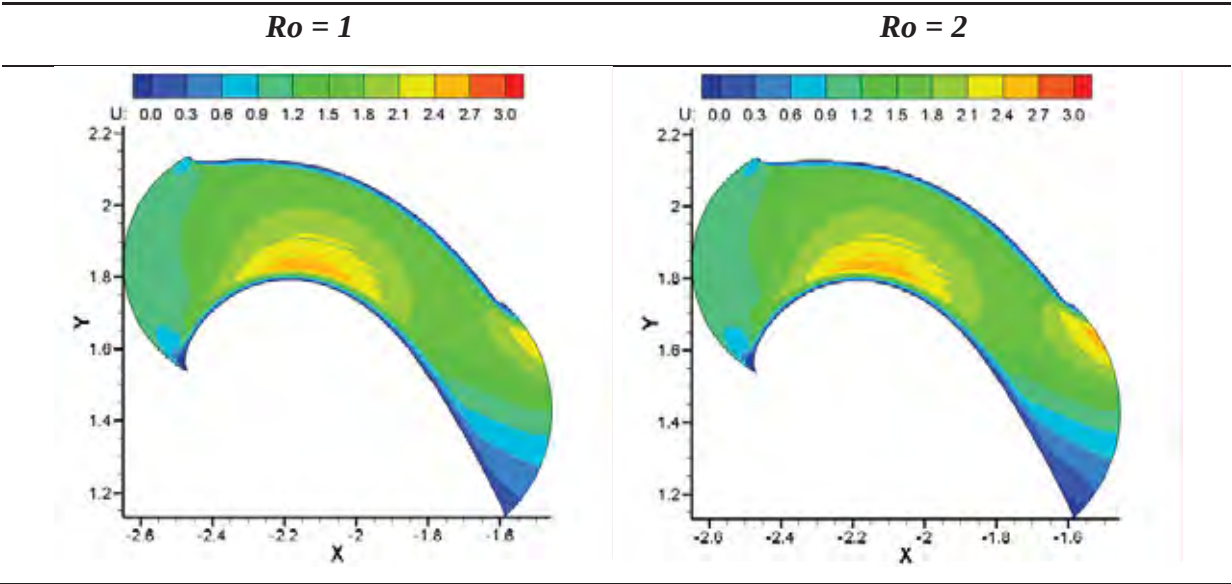
Figura A.2.16 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

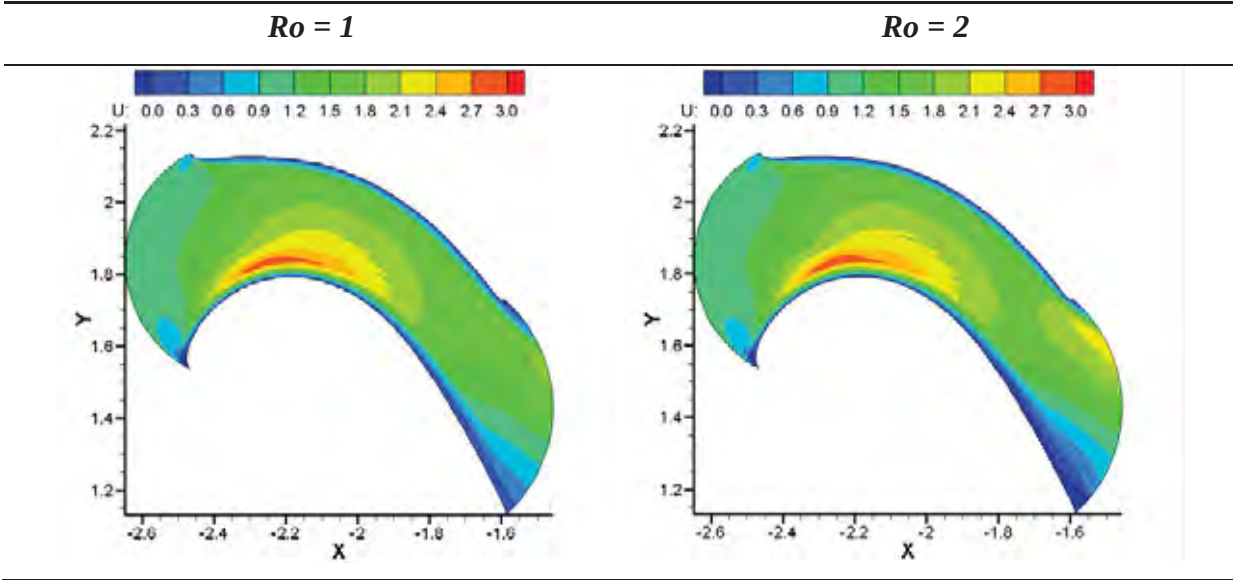
A.2.2 – Componente U da Velocidade Relativa

Figura A.2.17 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,1$



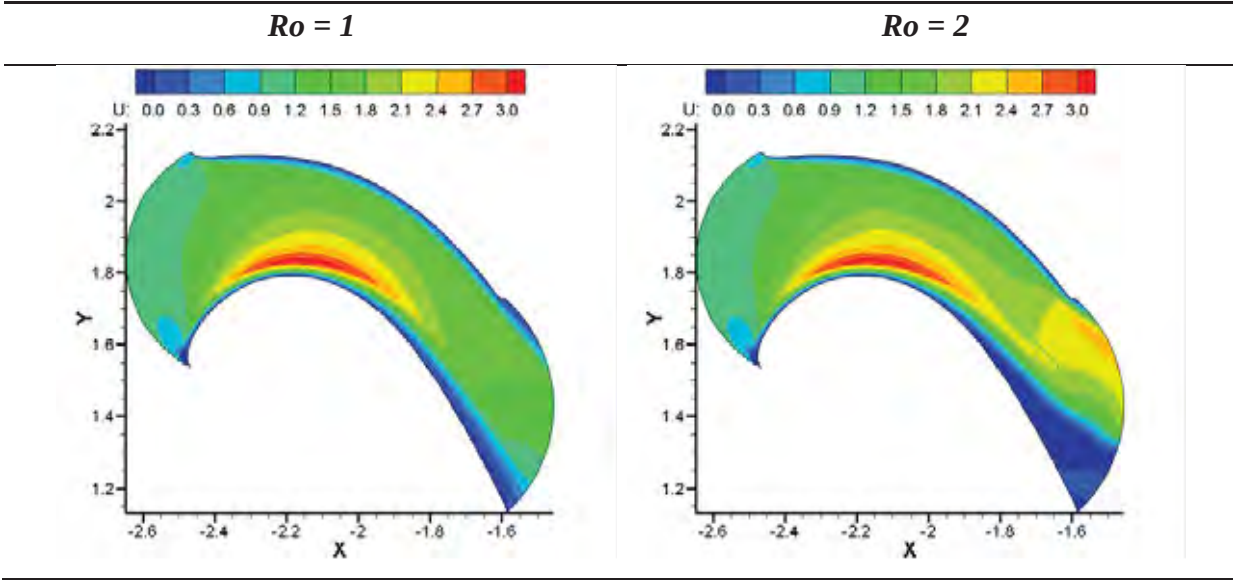
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.18 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,2$



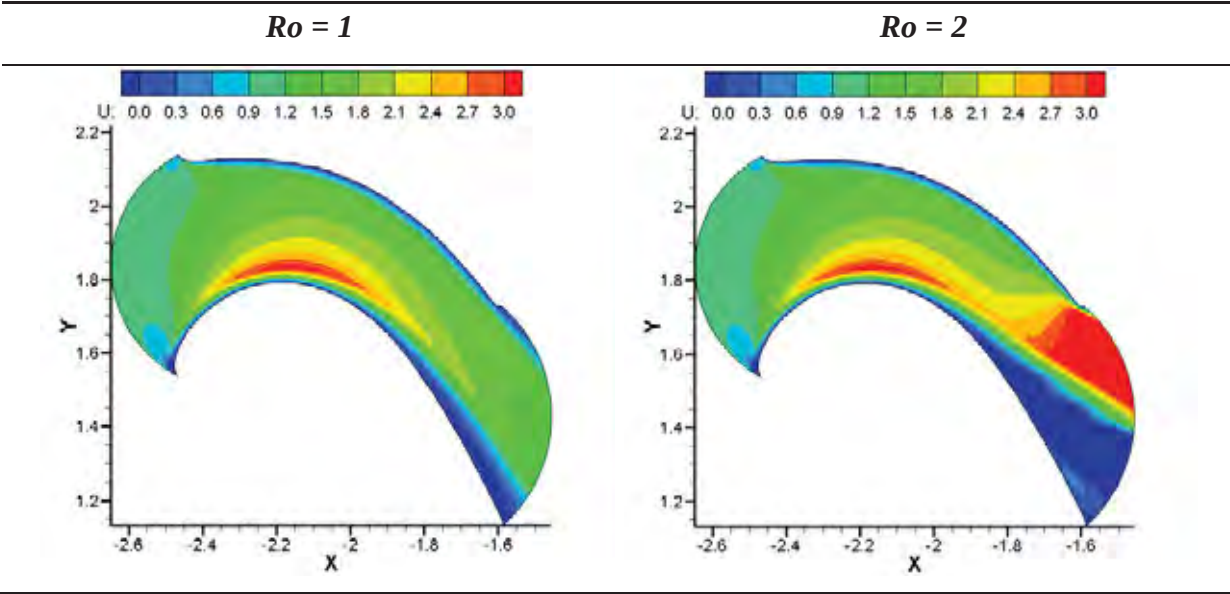
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.19 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,4$



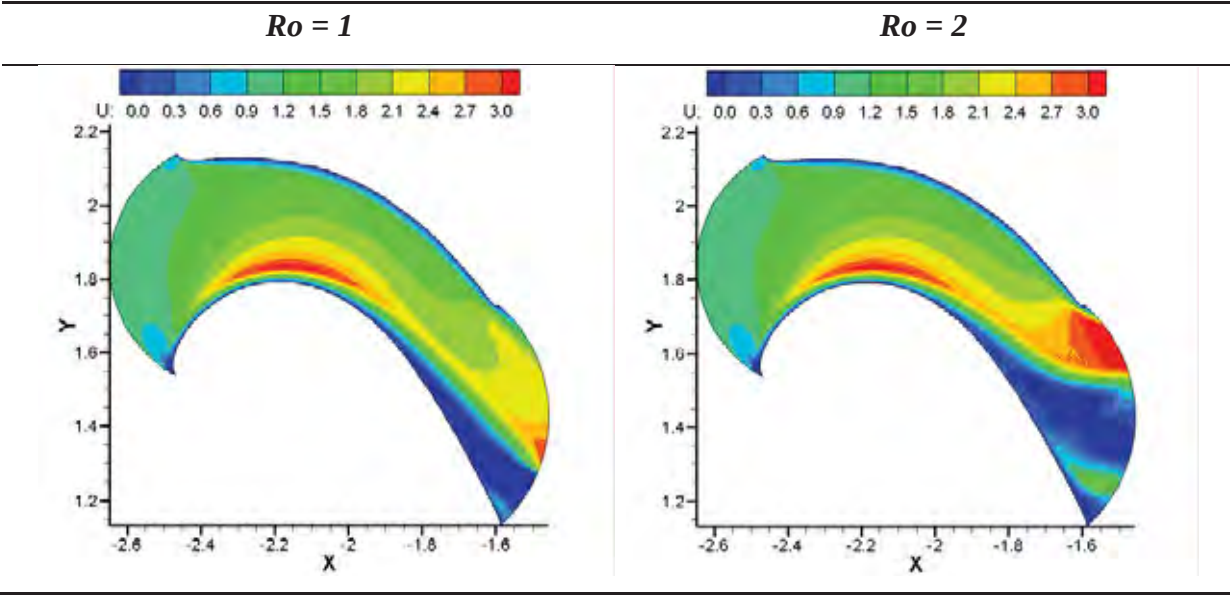
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.20 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,6$



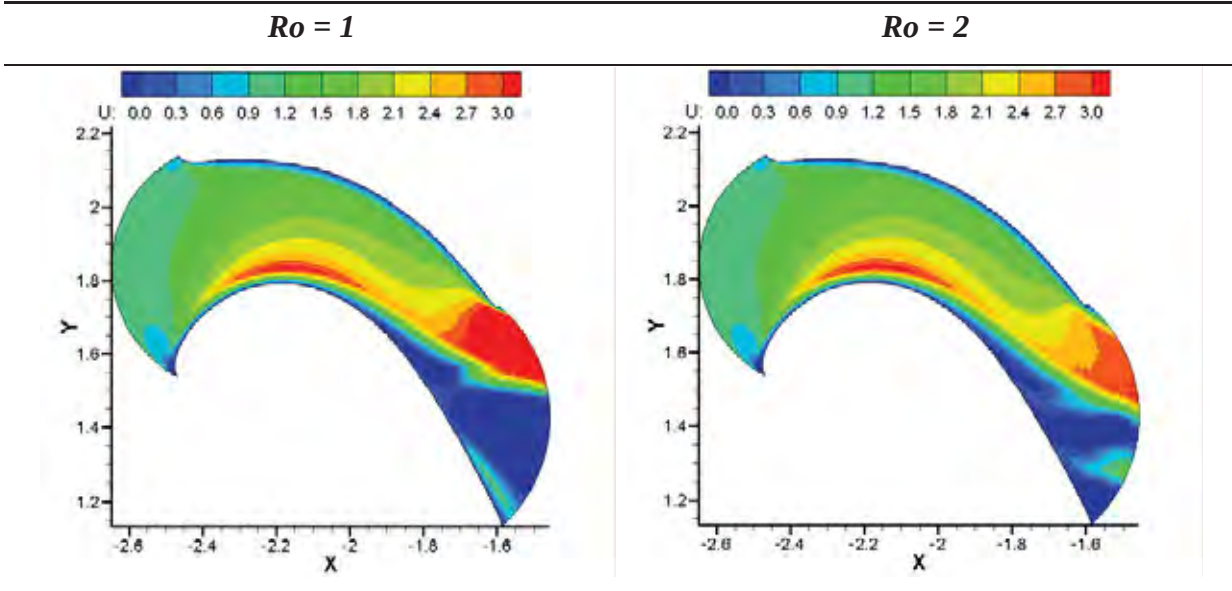
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.21 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,8$



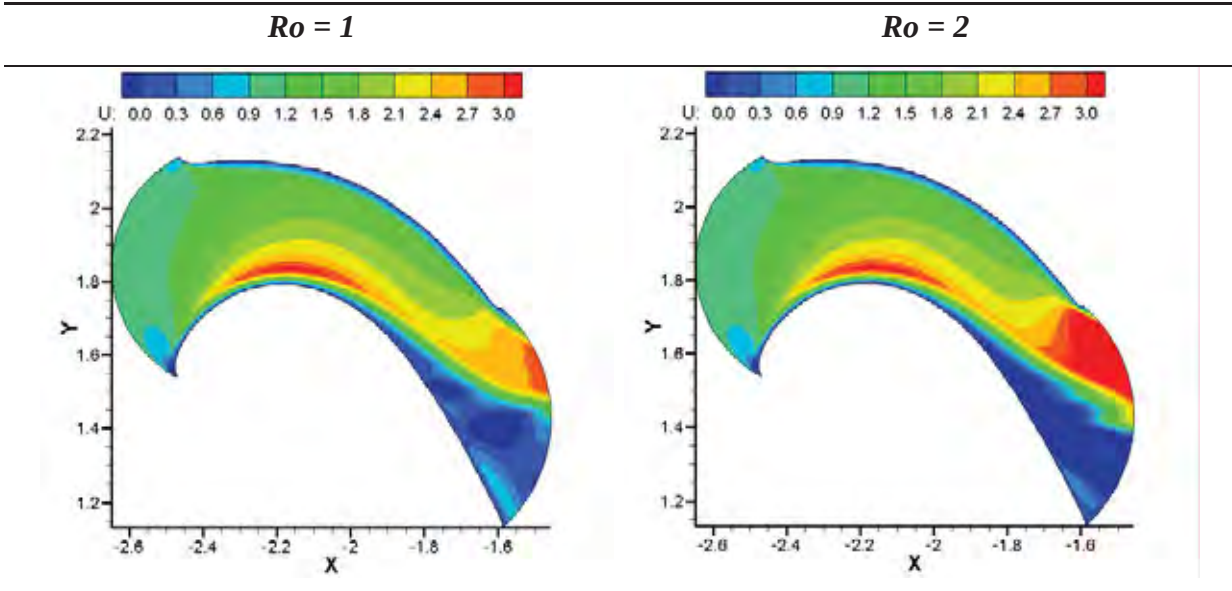
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.22 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$



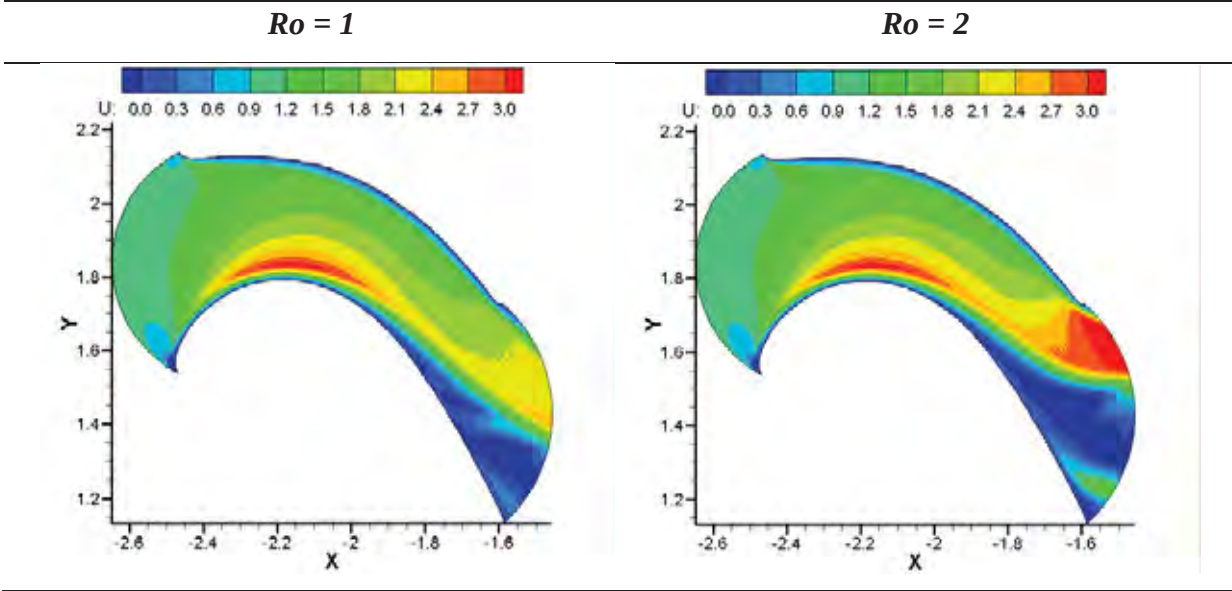
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.23 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,2$



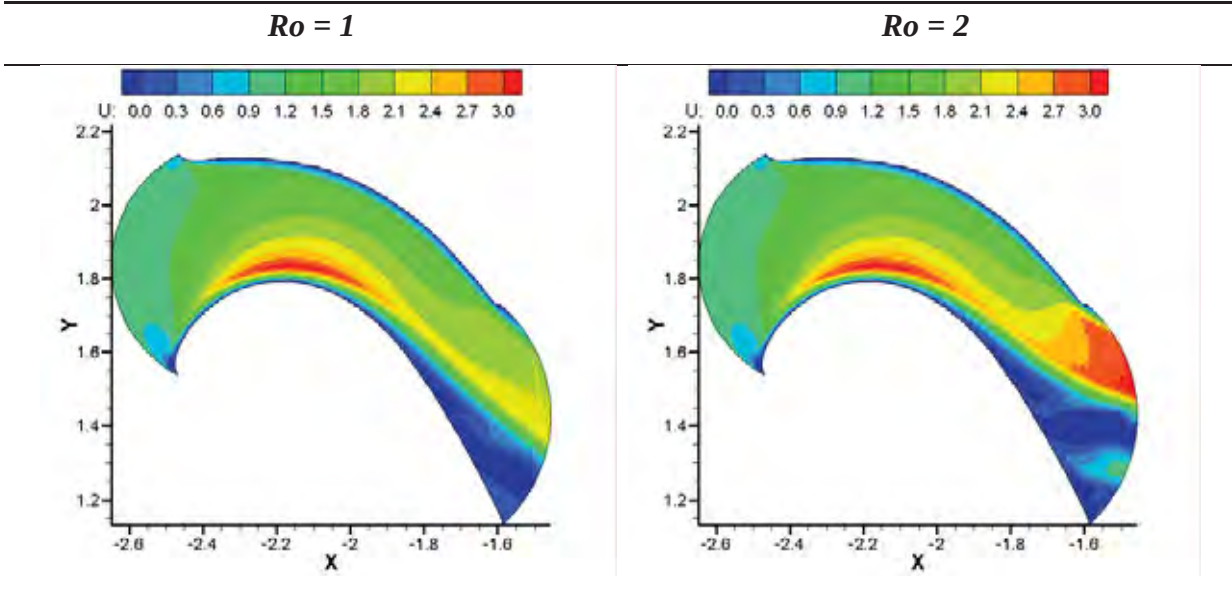
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.24 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,4$



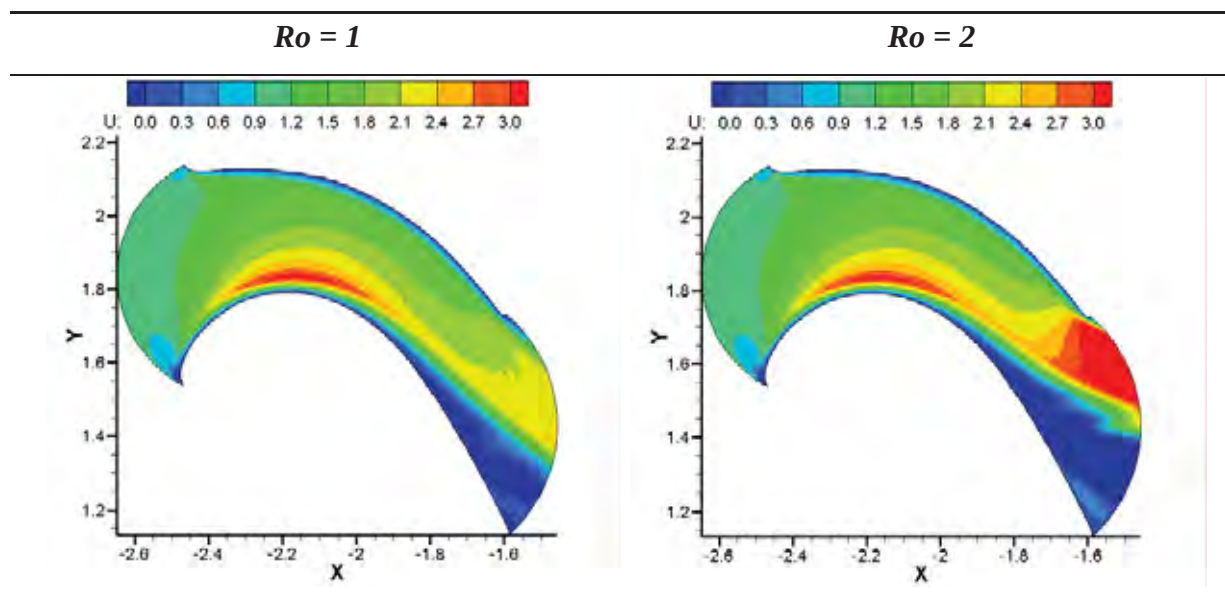
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.25 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,6$



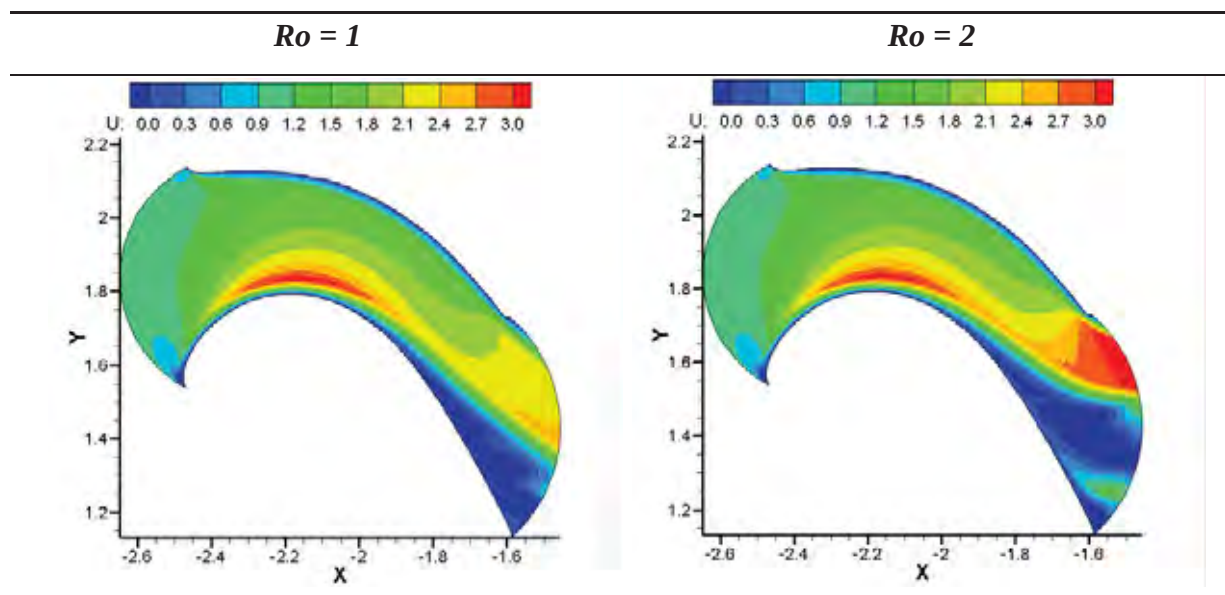
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.26 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 1,8$



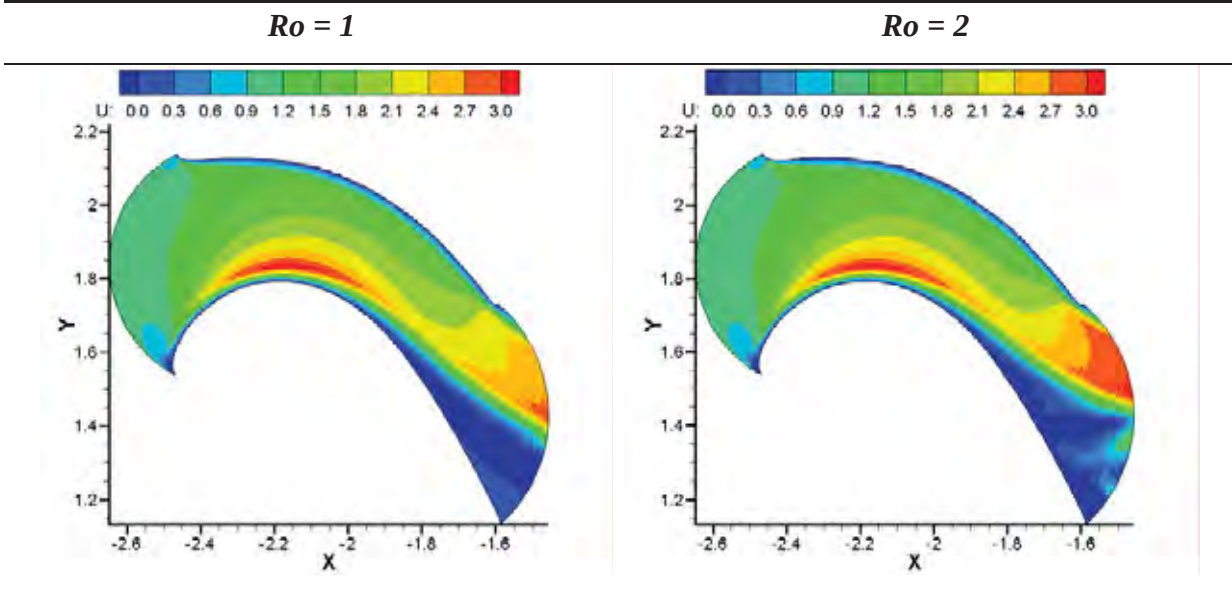
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.27 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,0$



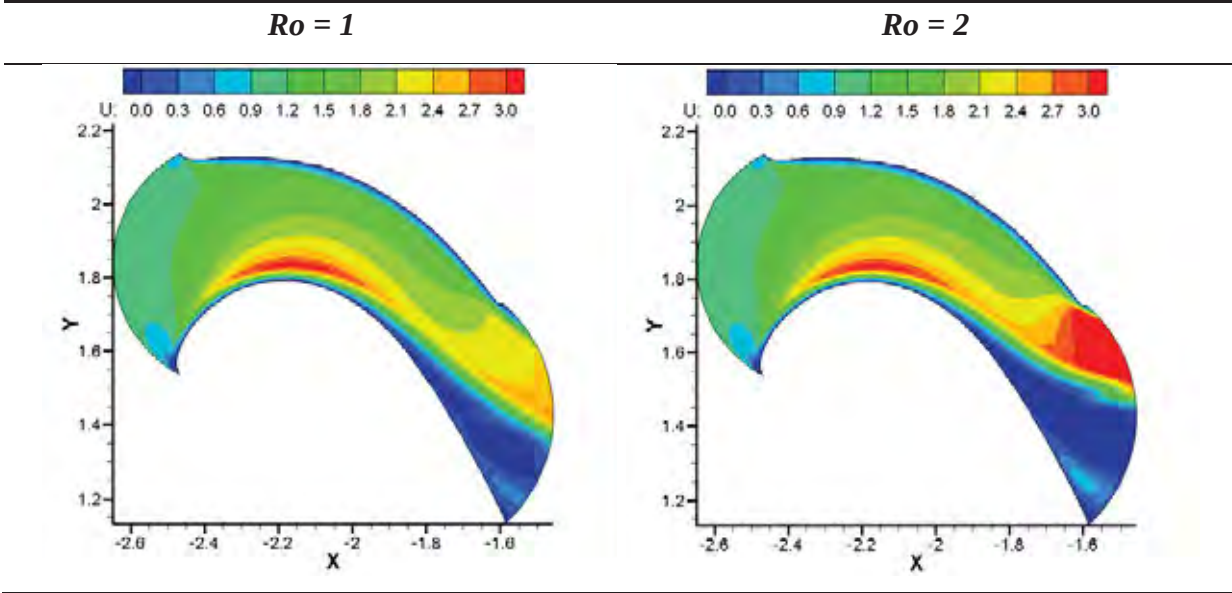
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.28 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,2$



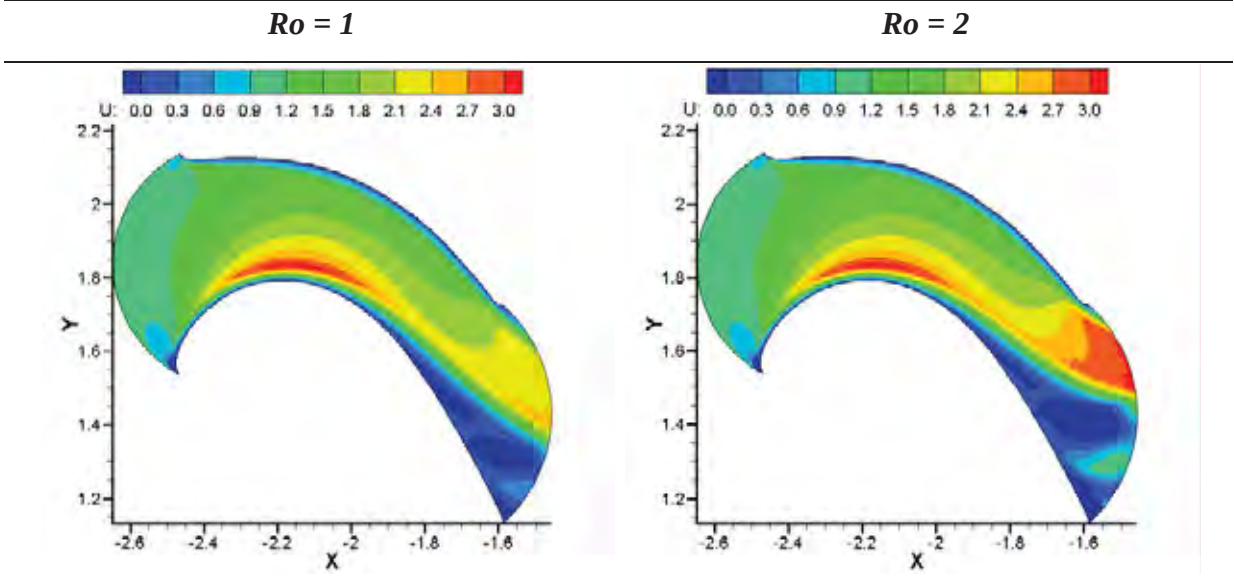
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.29 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,4$



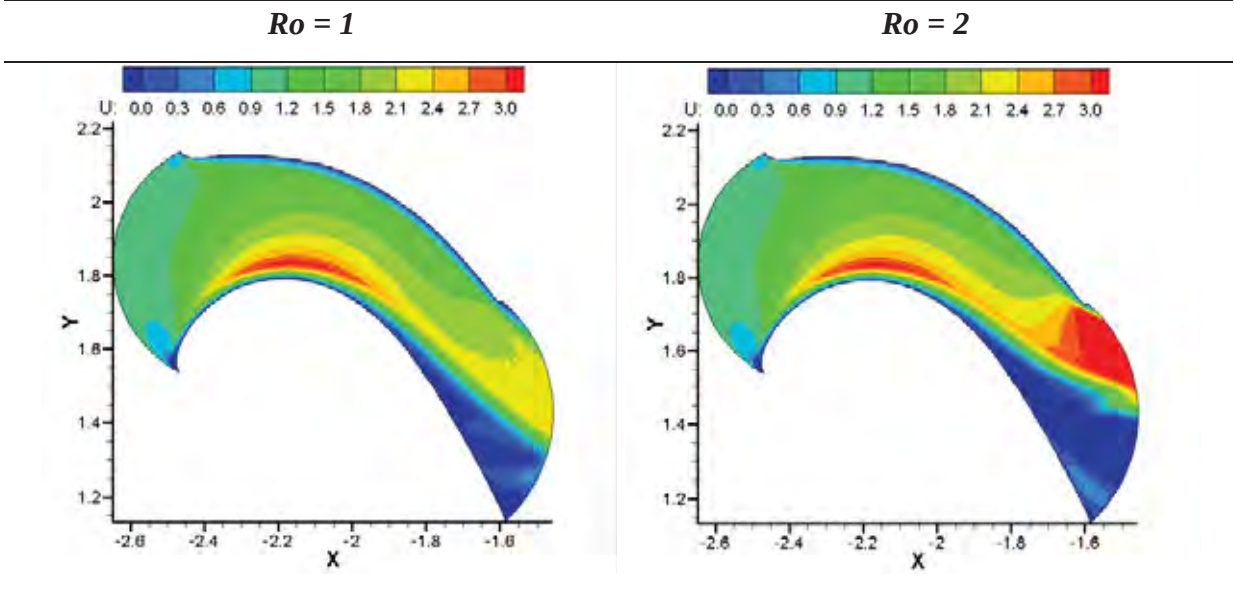
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.30 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,6$



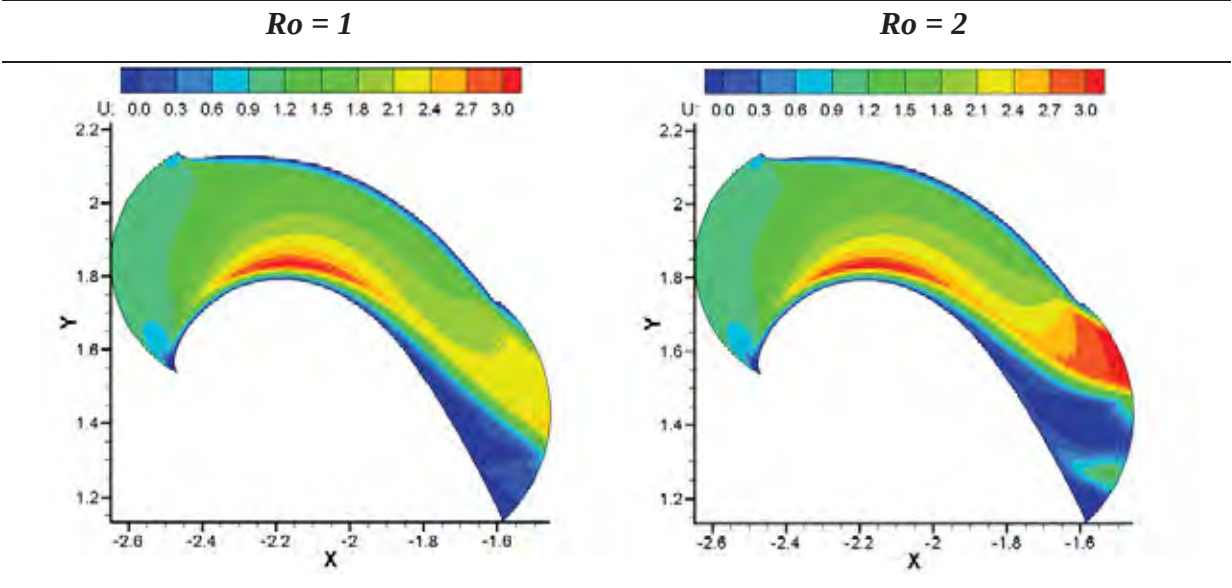
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.31 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 2,8$



Fonte: Pereira (2010).

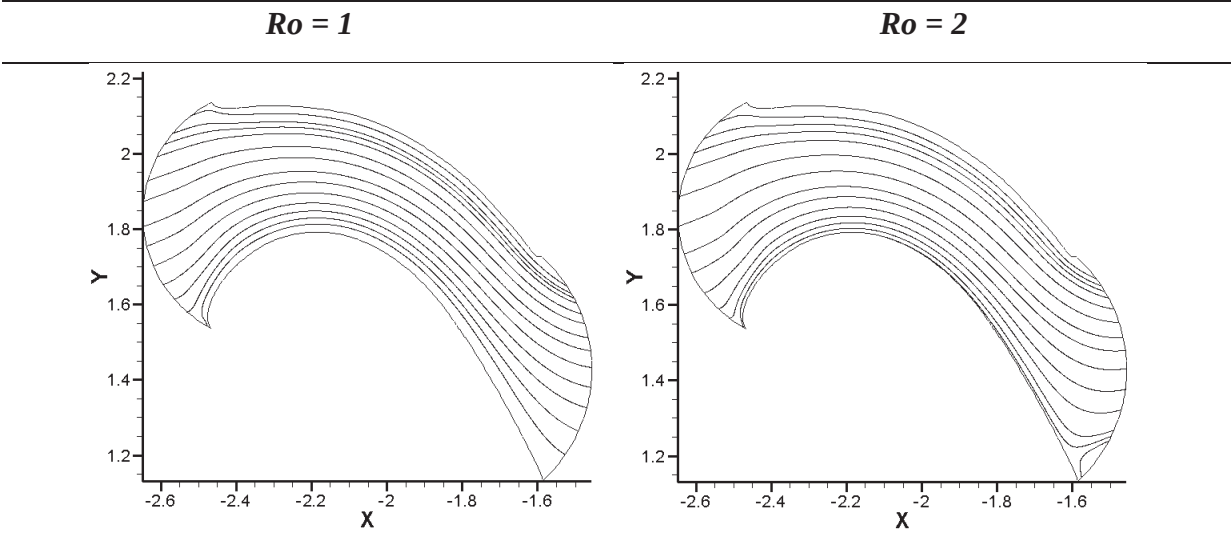
Figura A.2.32 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

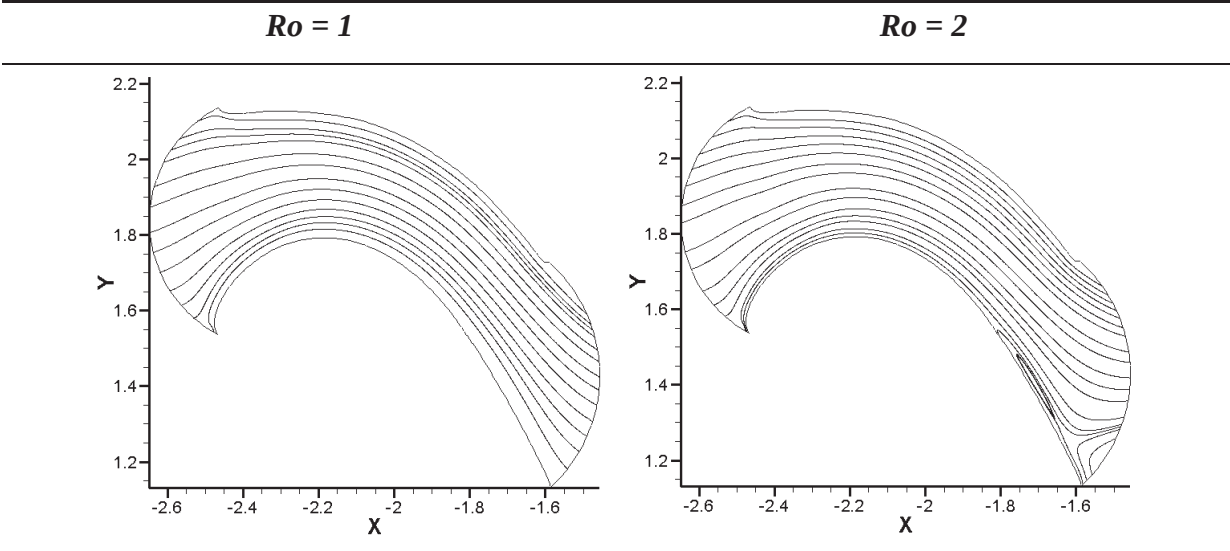
A.2.3 – Linhas de Corrente

Figura A.2.33 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 0,1$



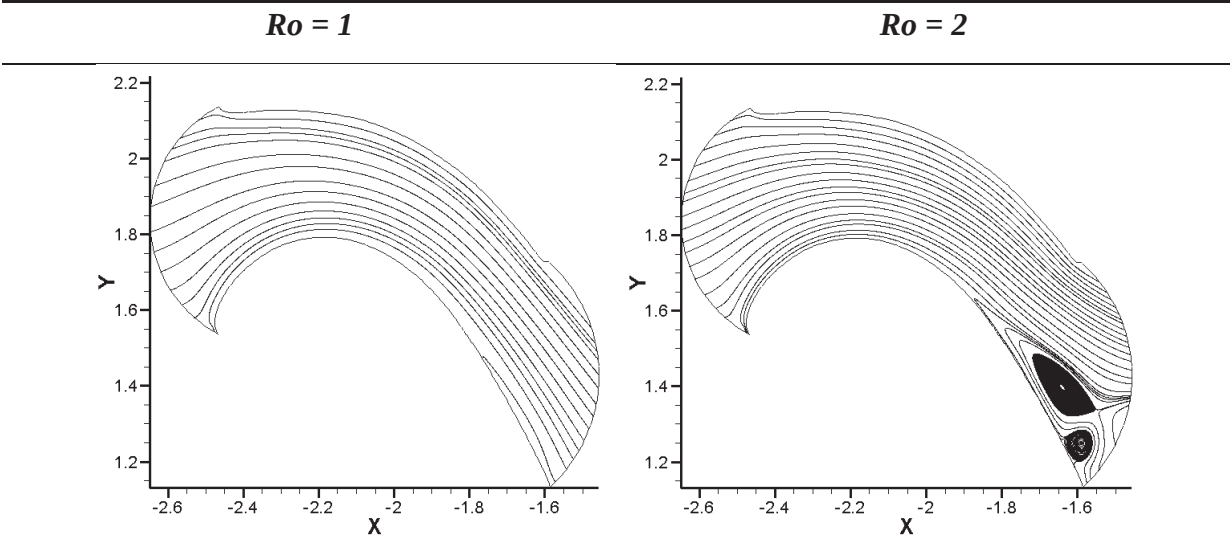
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.34 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 0,2$



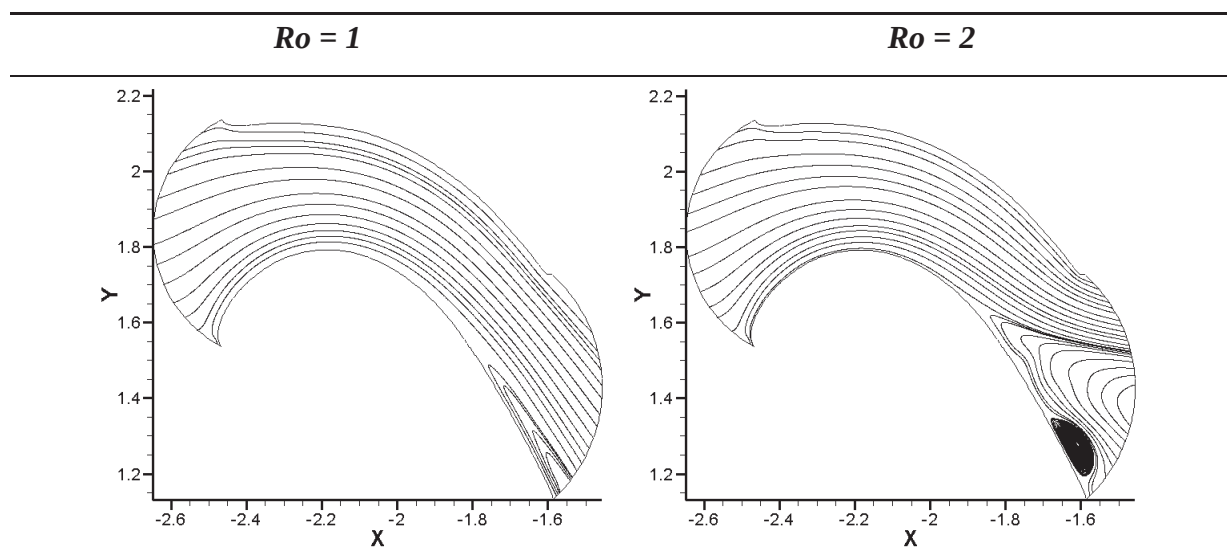
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.35 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 0,4$



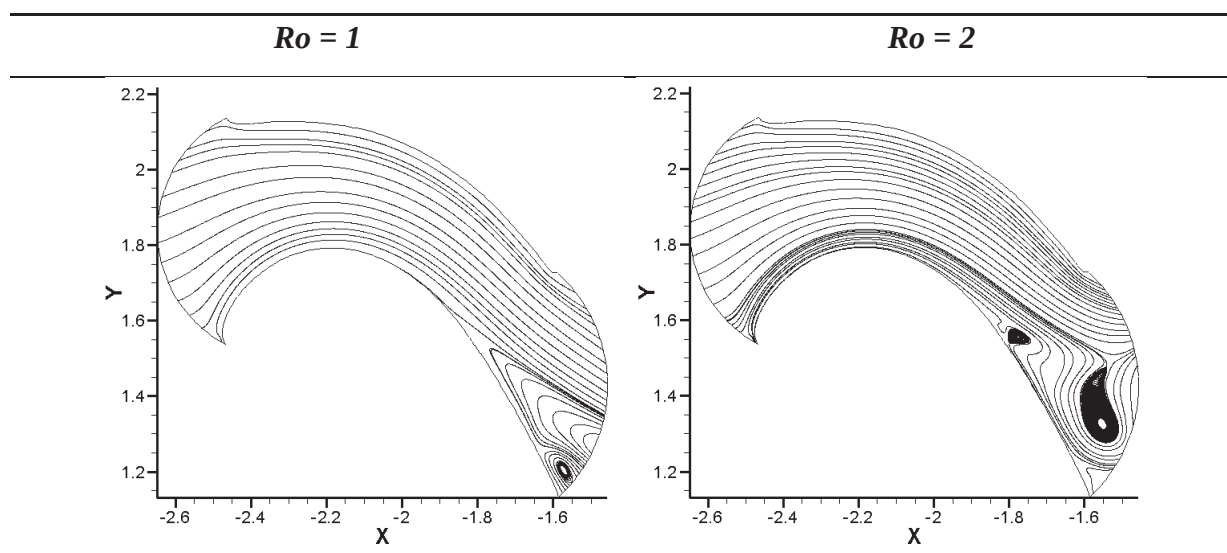
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.36 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 0,6$



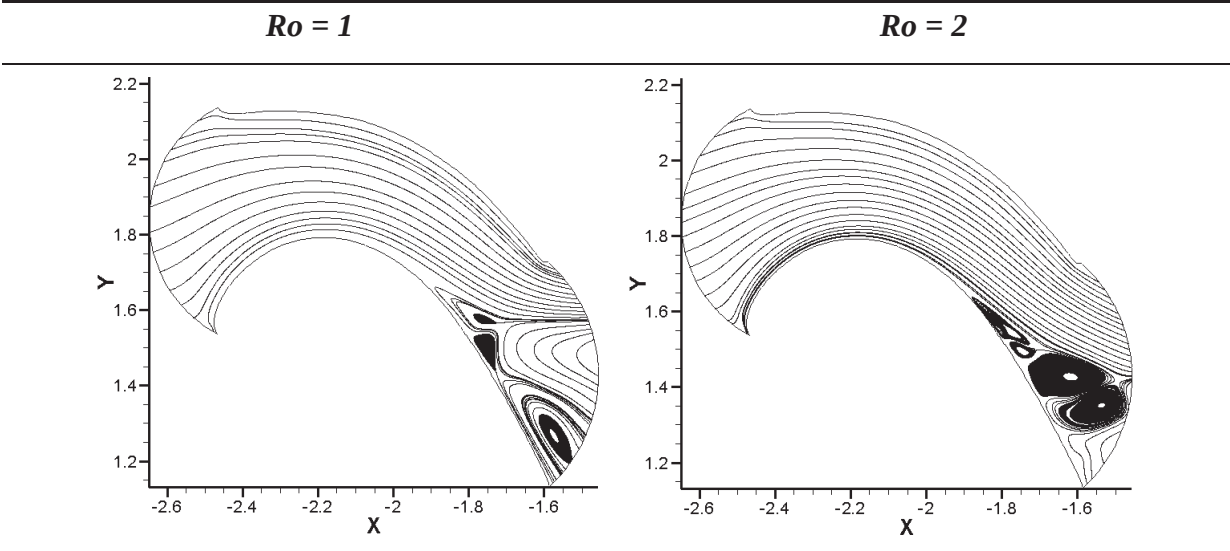
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.37 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 0,8$



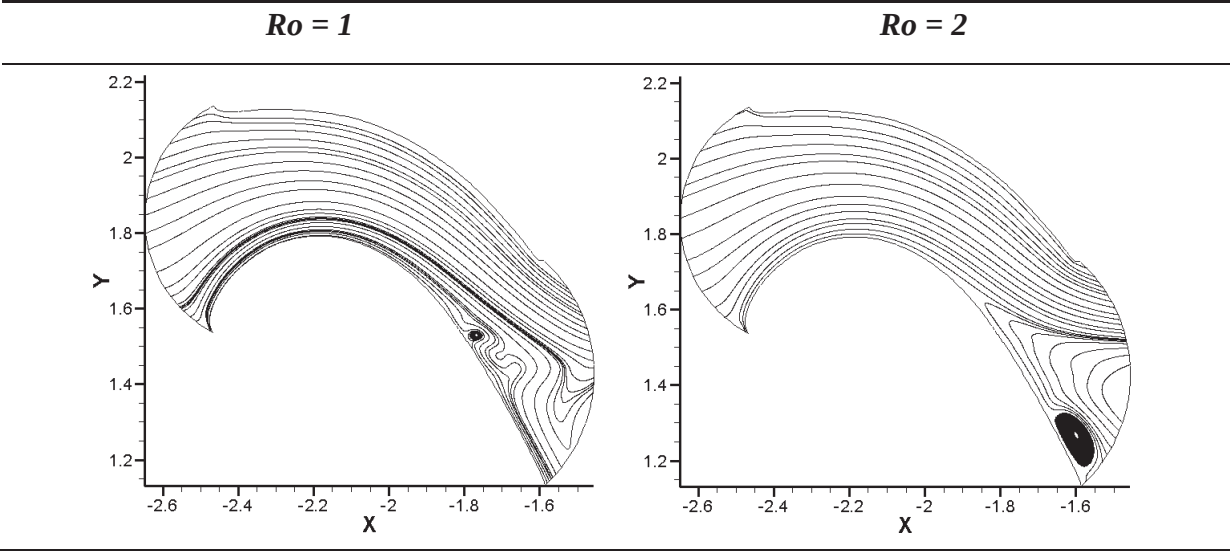
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.38 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$



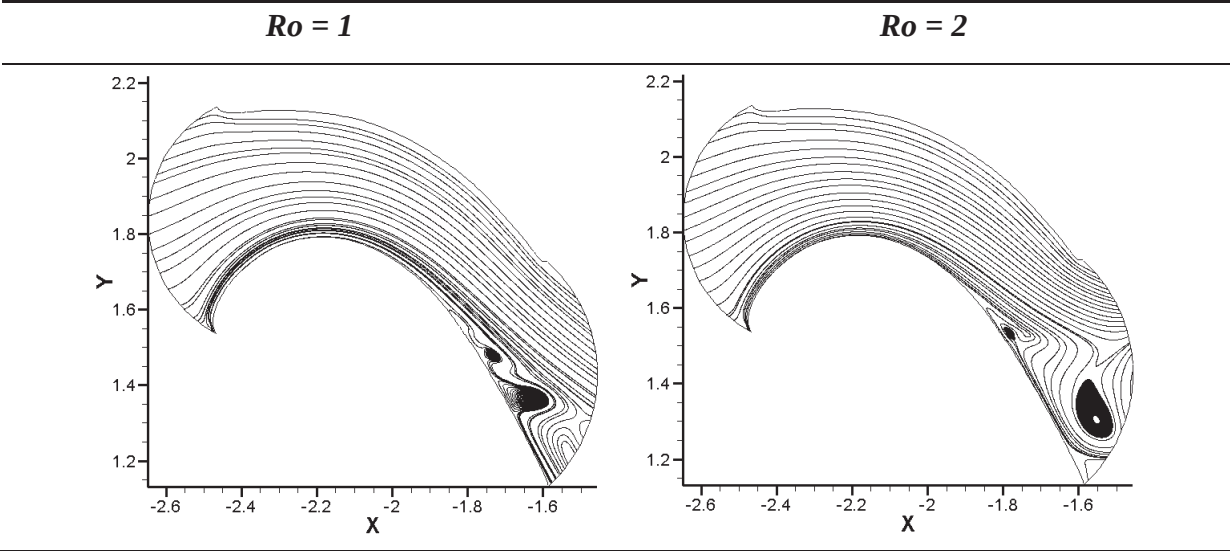
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.39 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 1,2$



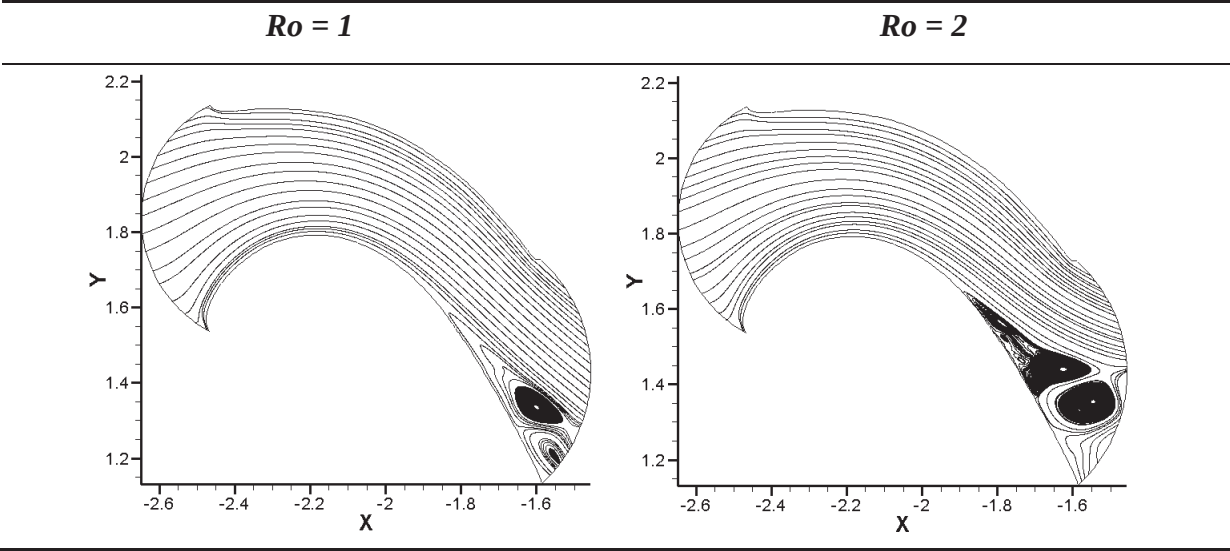
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.40 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 1,4$



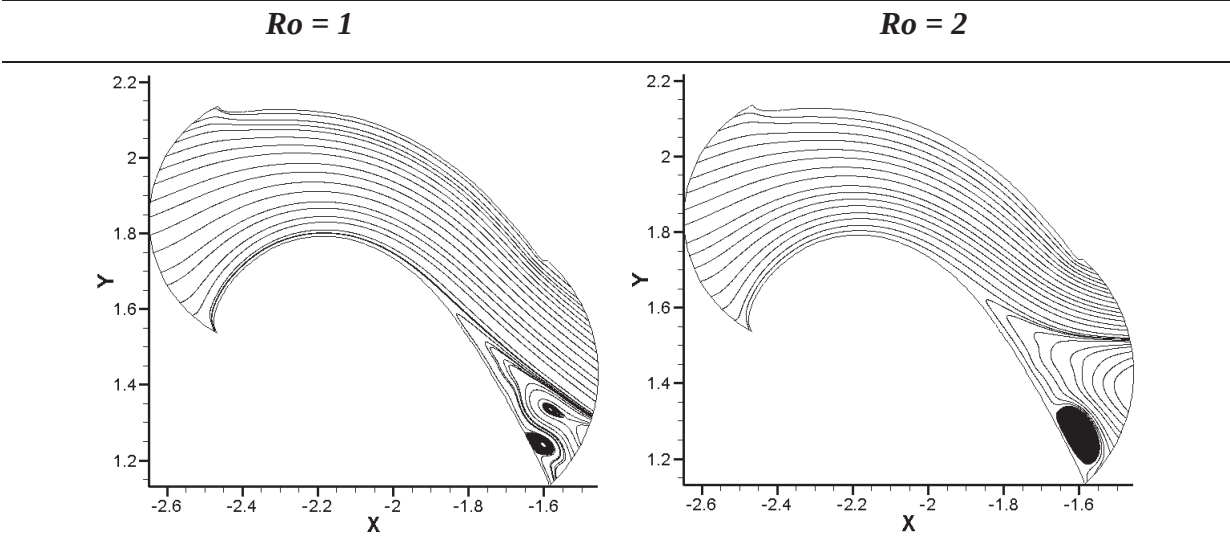
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.41 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 1,6$



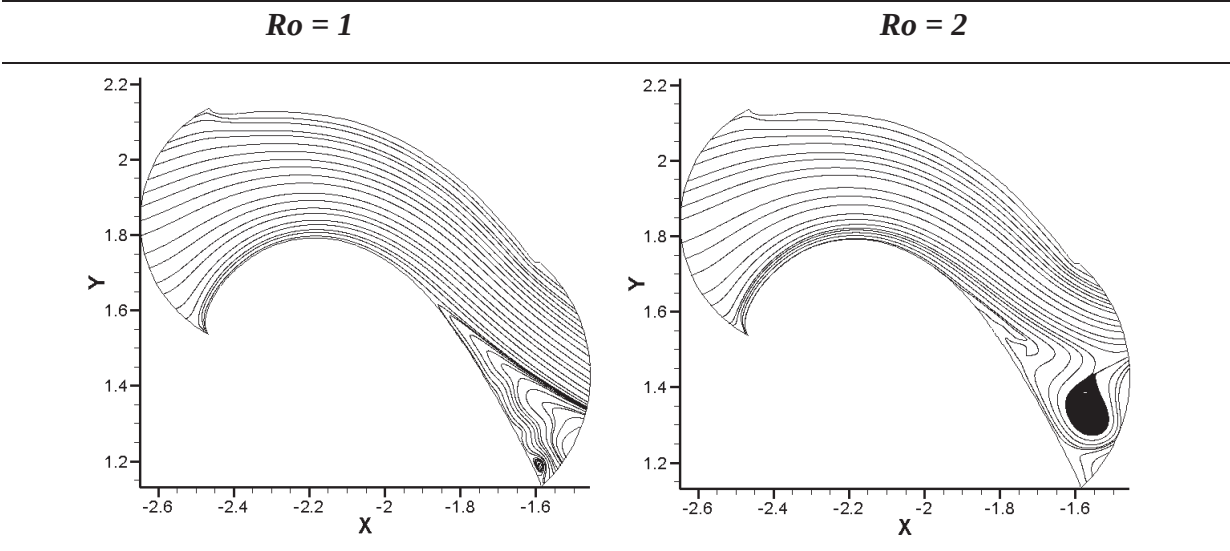
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.42 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 1,8$

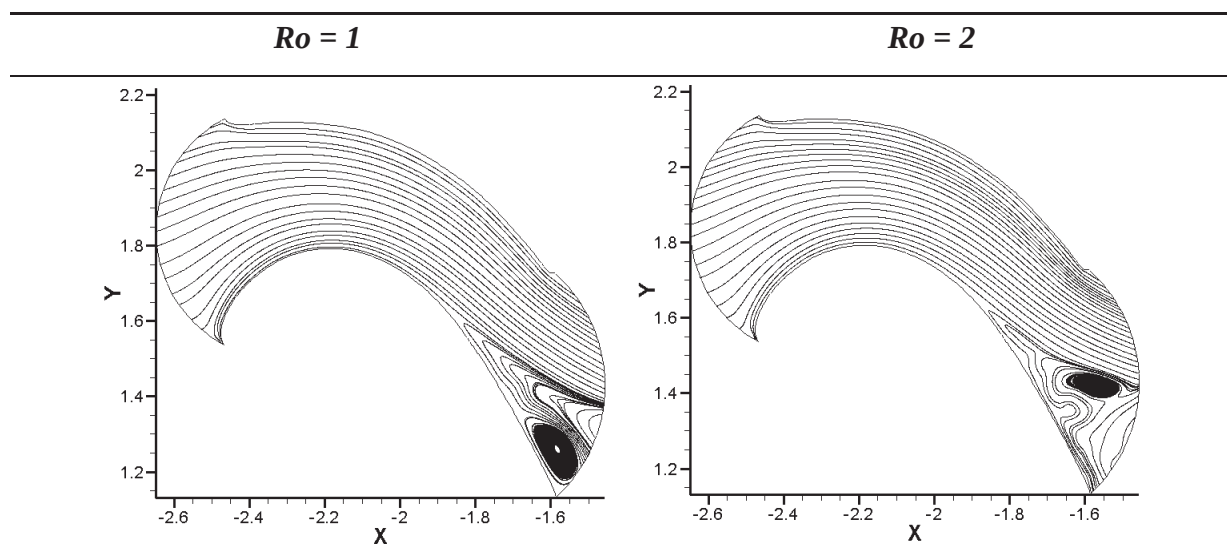


Fonte: Pereira (2010).

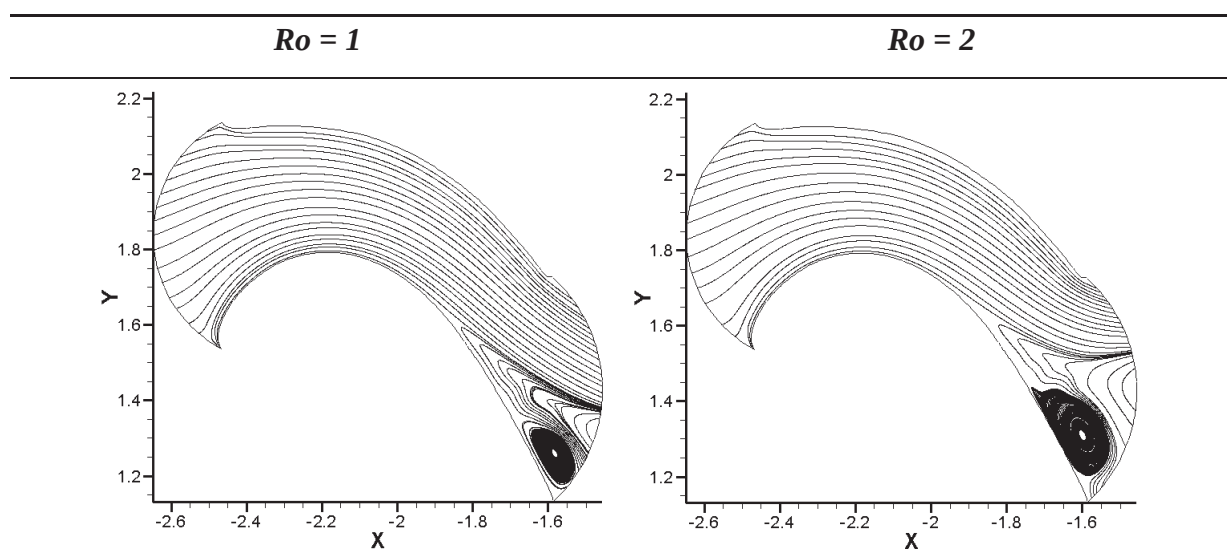
Figura A.2.43 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 2,0$



Fonte: Pereira (2010).

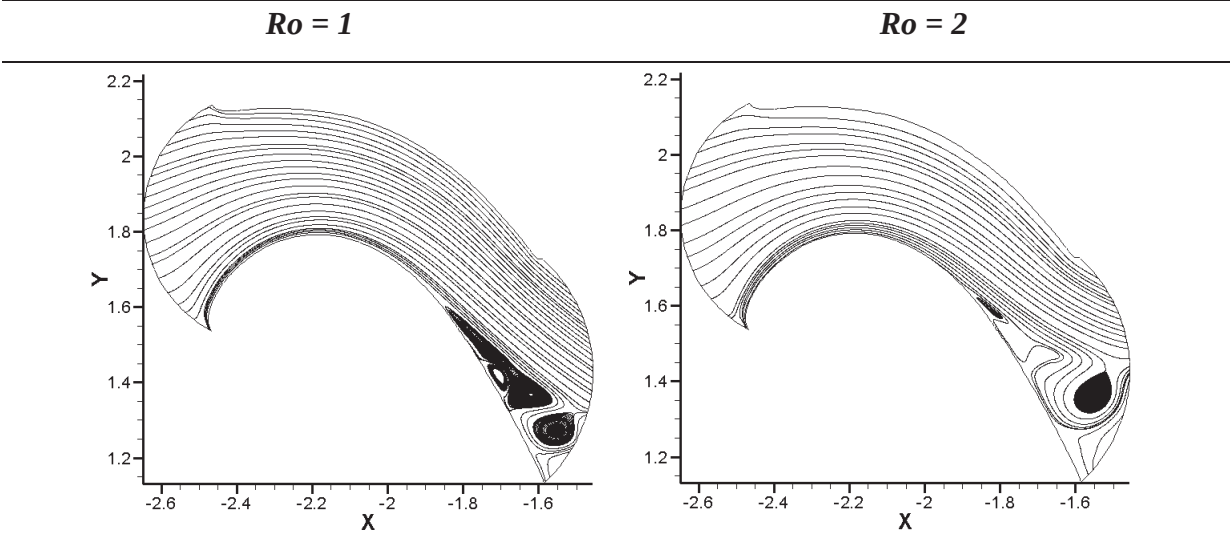
Figura A.2.44 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 2,2$ 

Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.45 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 2,4$ 

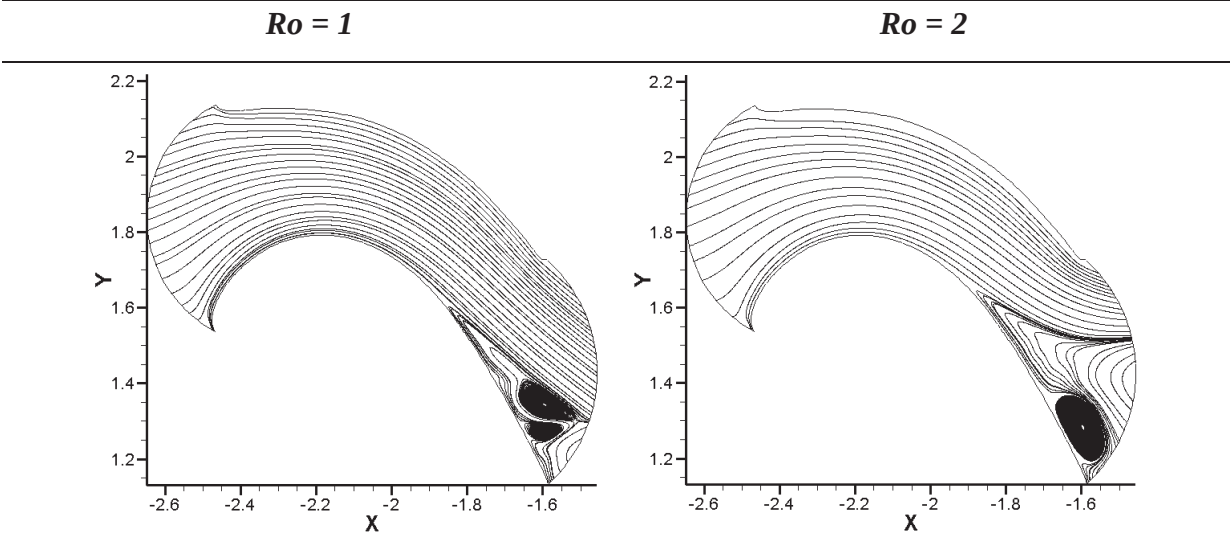
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.46 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 2,6$



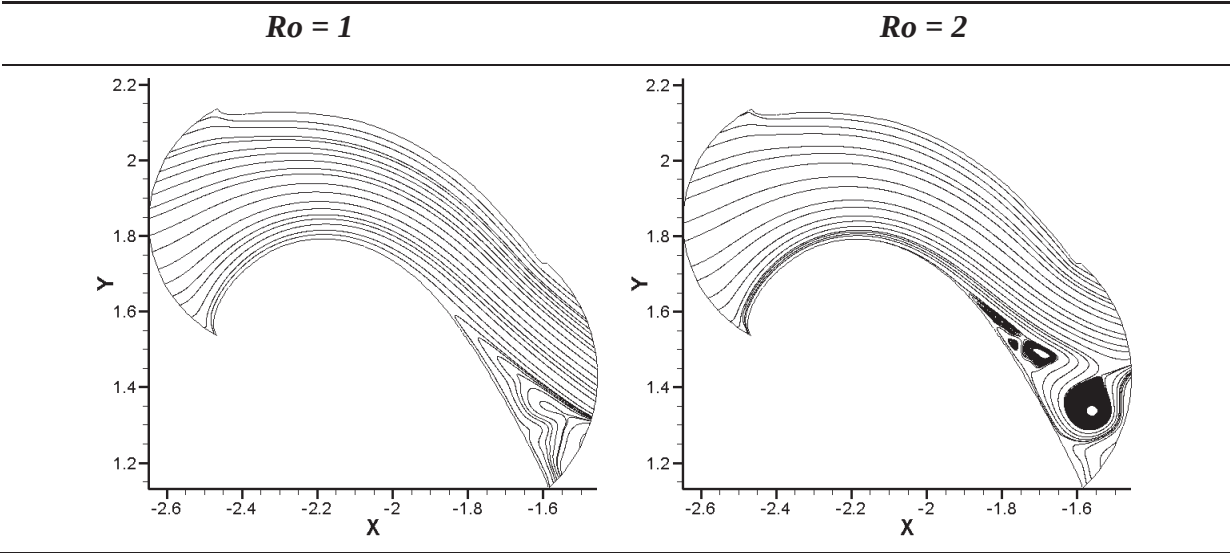
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.47 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 2,8$



Fonte: Pereira (2010).

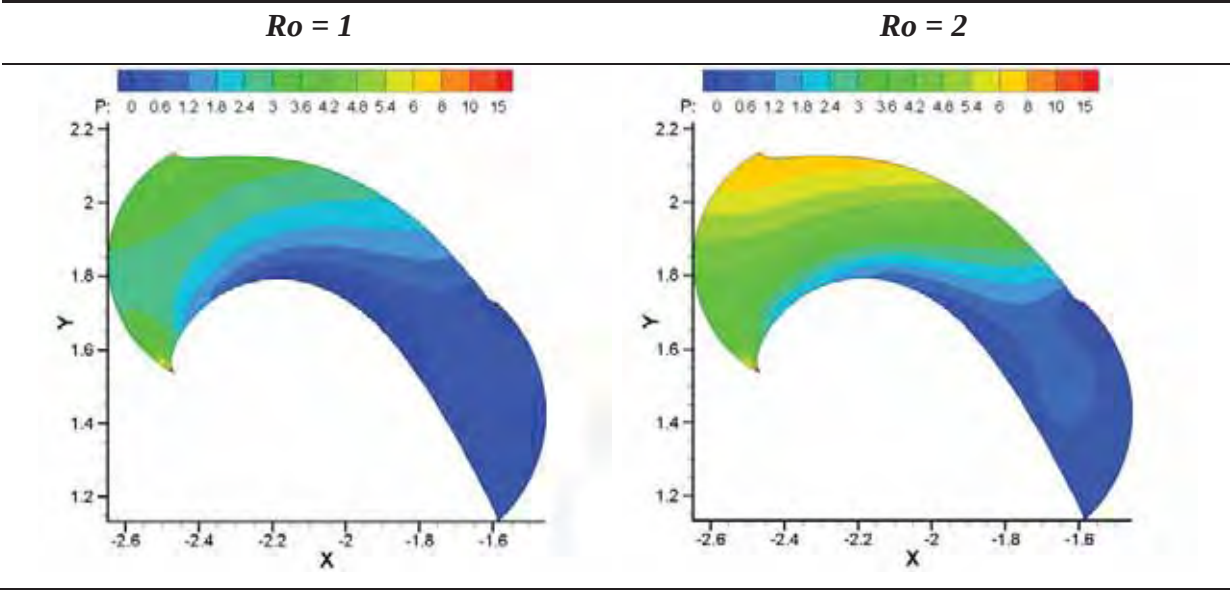
Figura A.2.48 - Linhas de Corrente para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

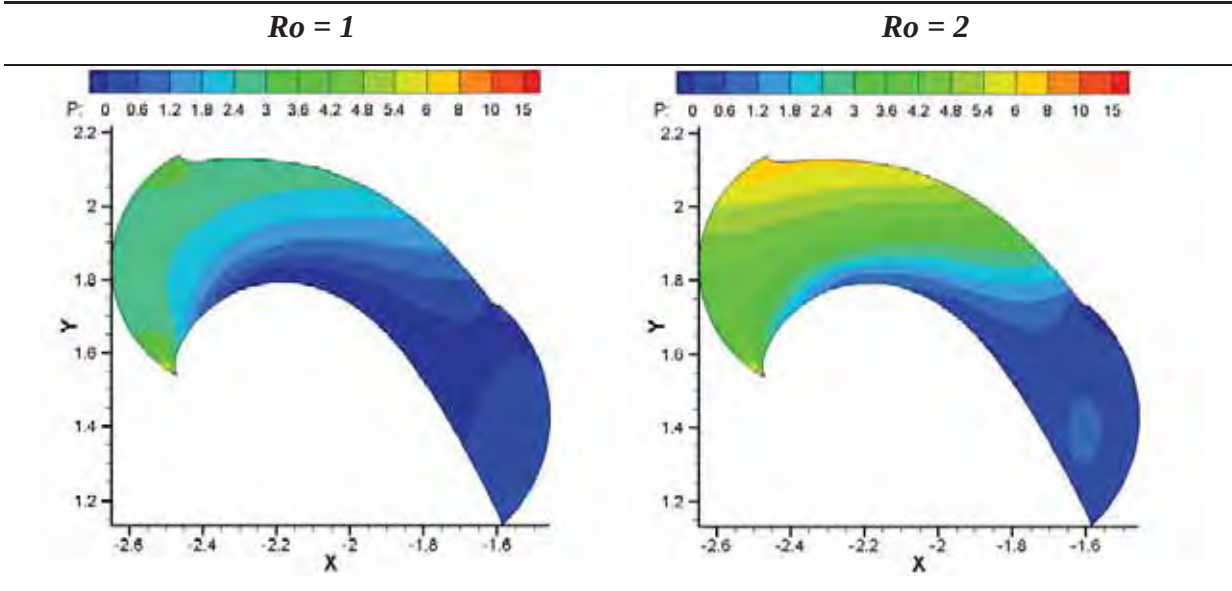
A.2.4 – Campo de Pressão

Figura A.2.49 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 0,2$



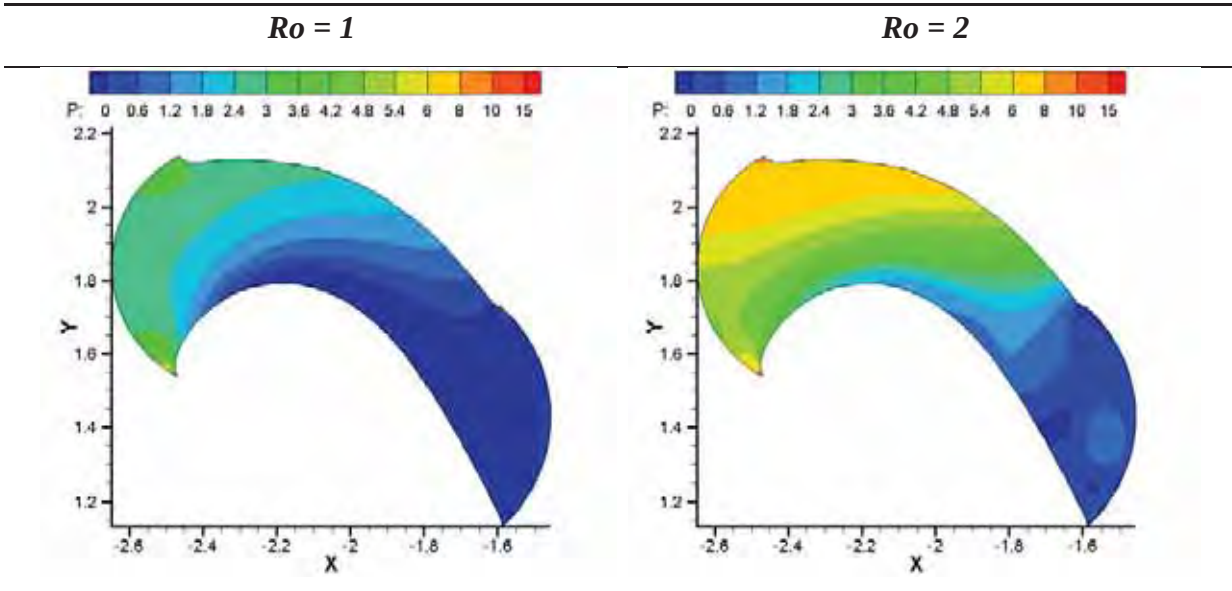
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.50 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 0,4$



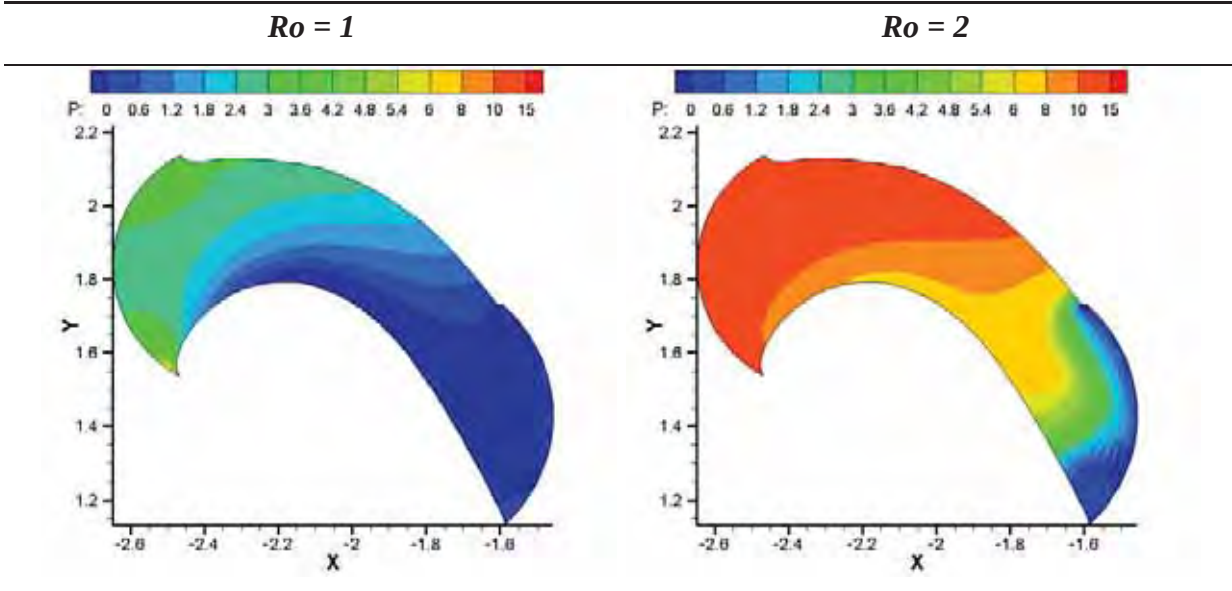
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.51 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 0,6$



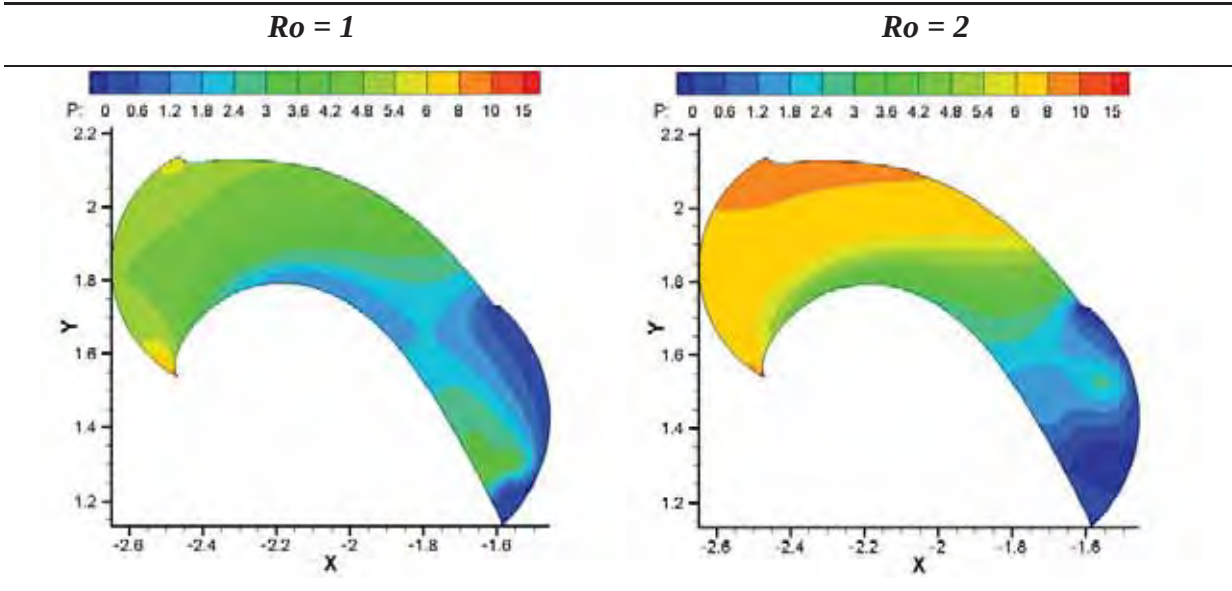
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.52 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 0,8$



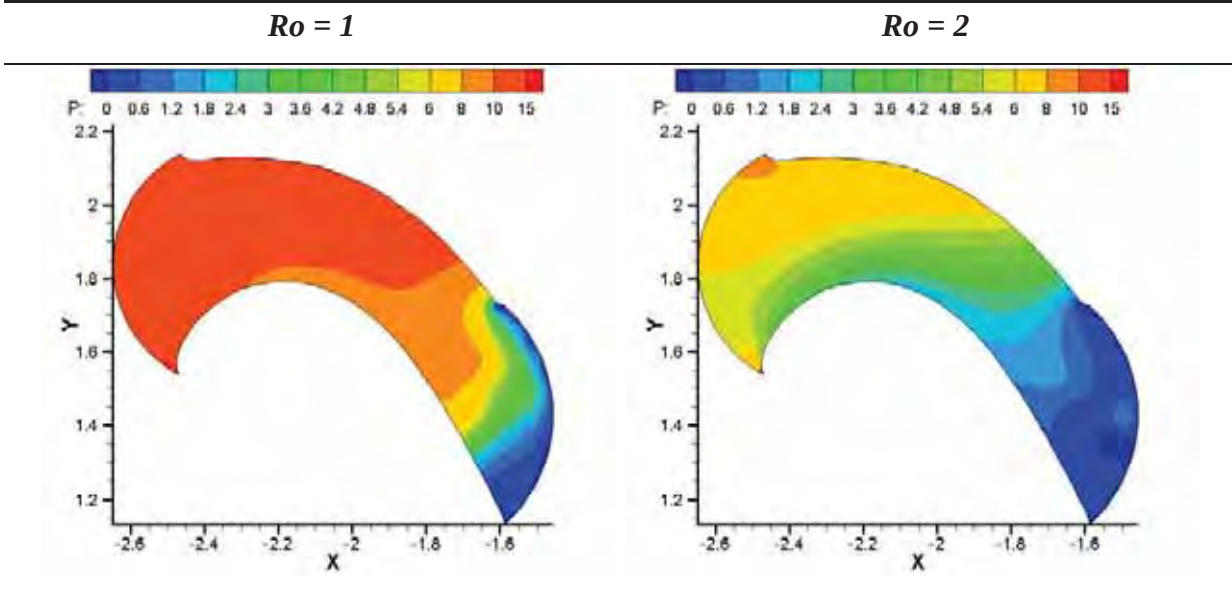
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.53 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 0,8$



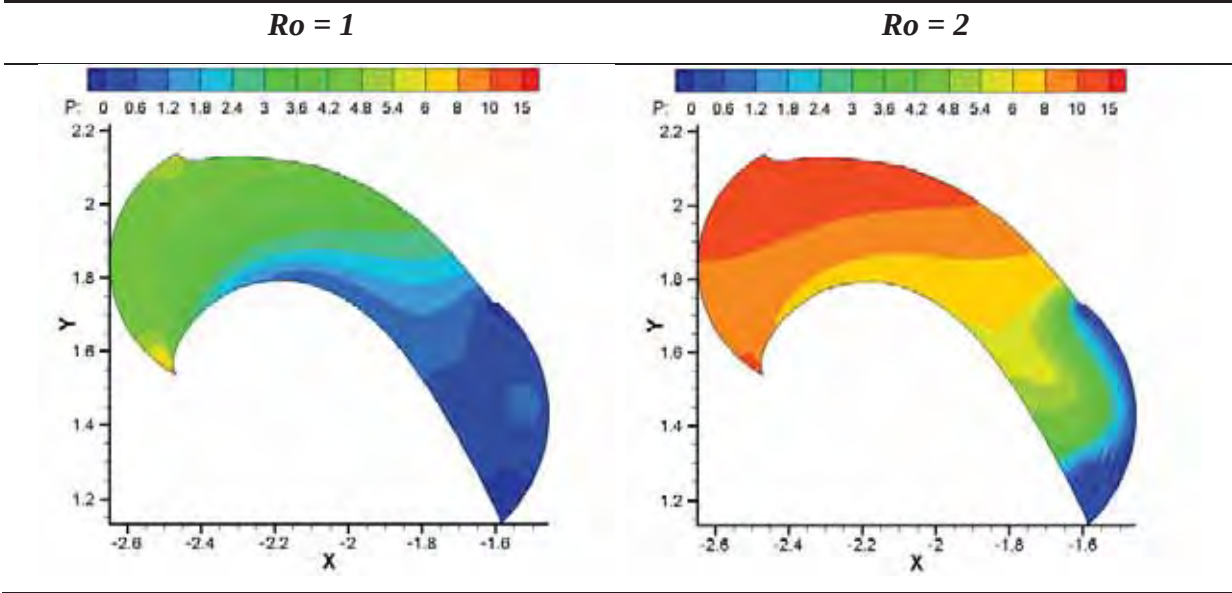
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.54 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 1,0$



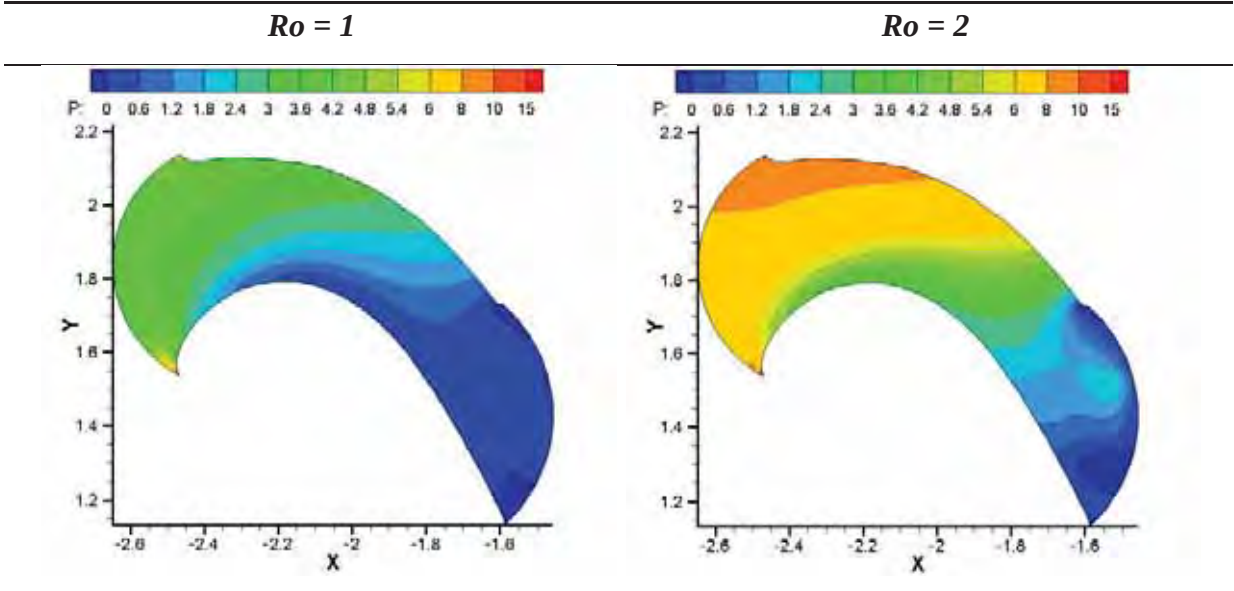
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.55 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 1,2$



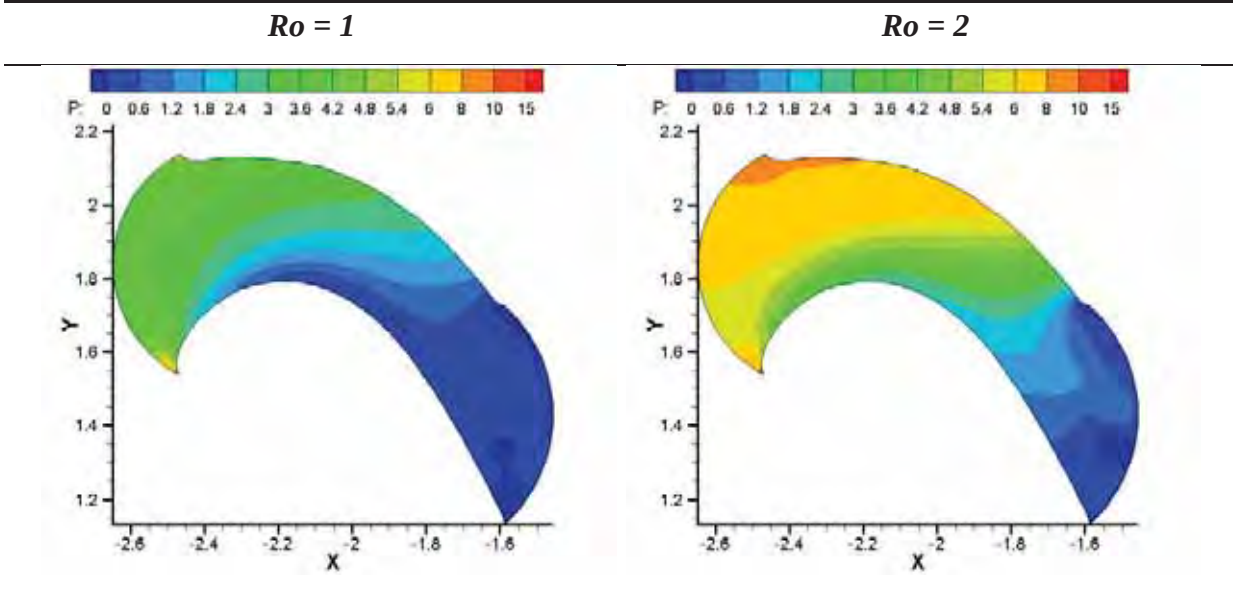
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.56 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 1,4$



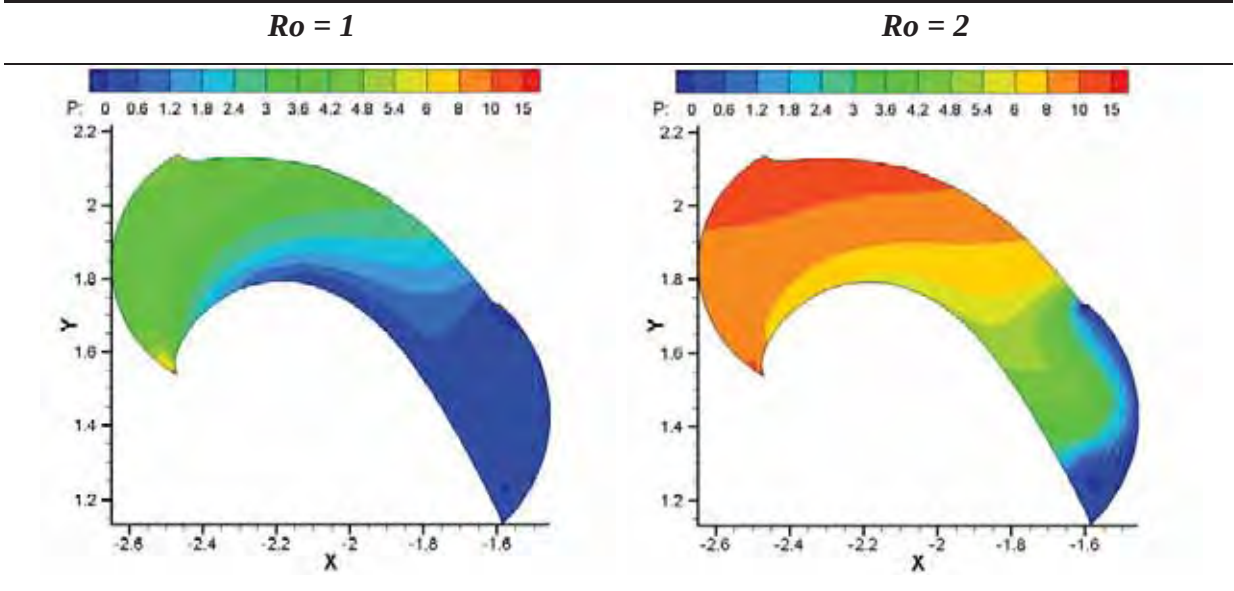
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.57 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 1,6$



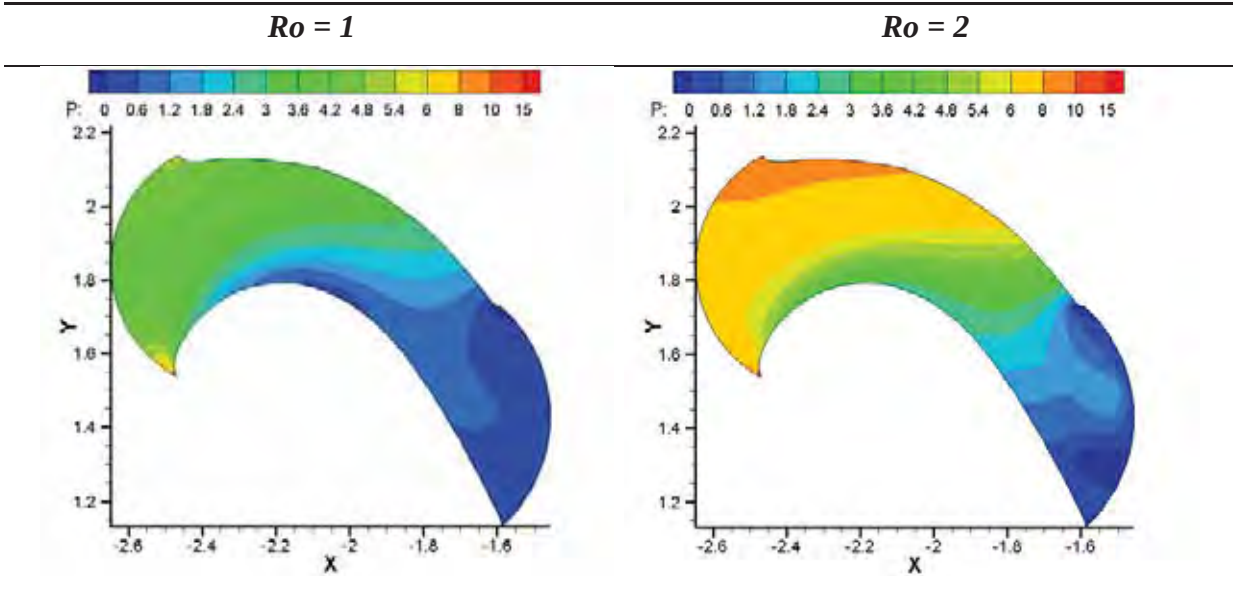
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.58 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 1,8$



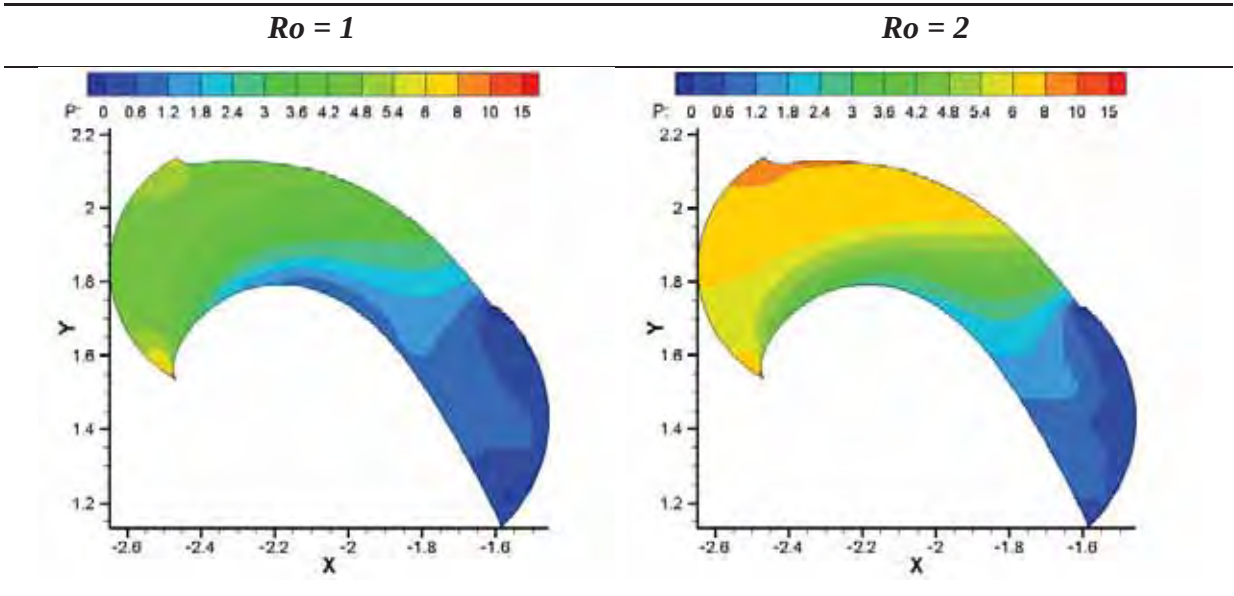
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.59 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 2,0$



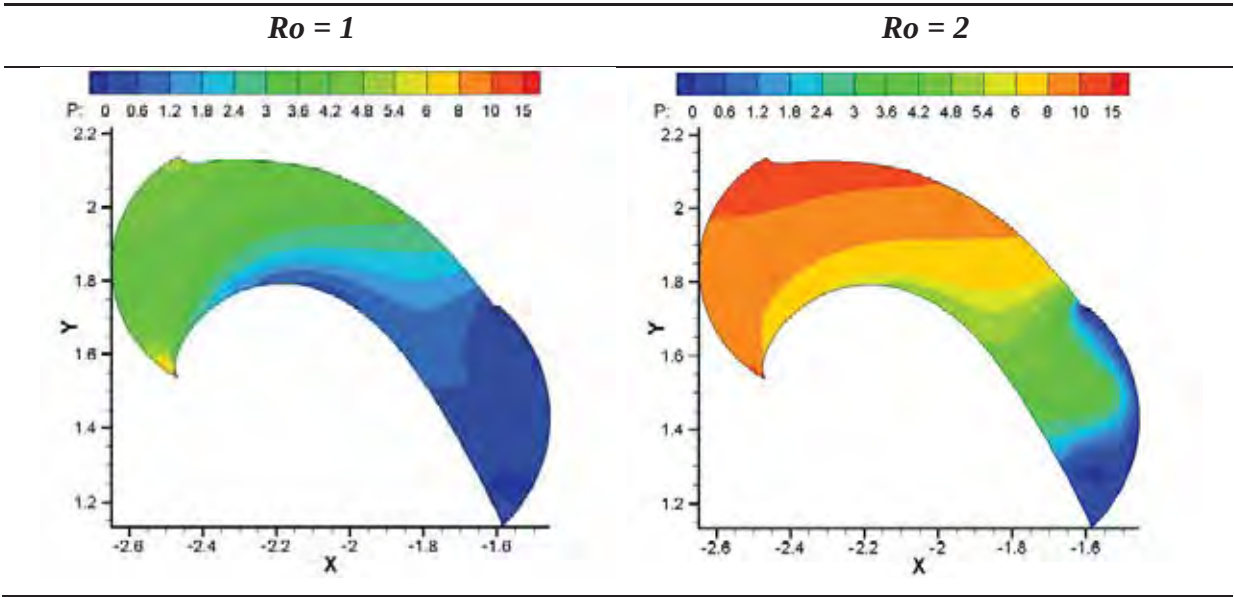
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.60 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 2,2$



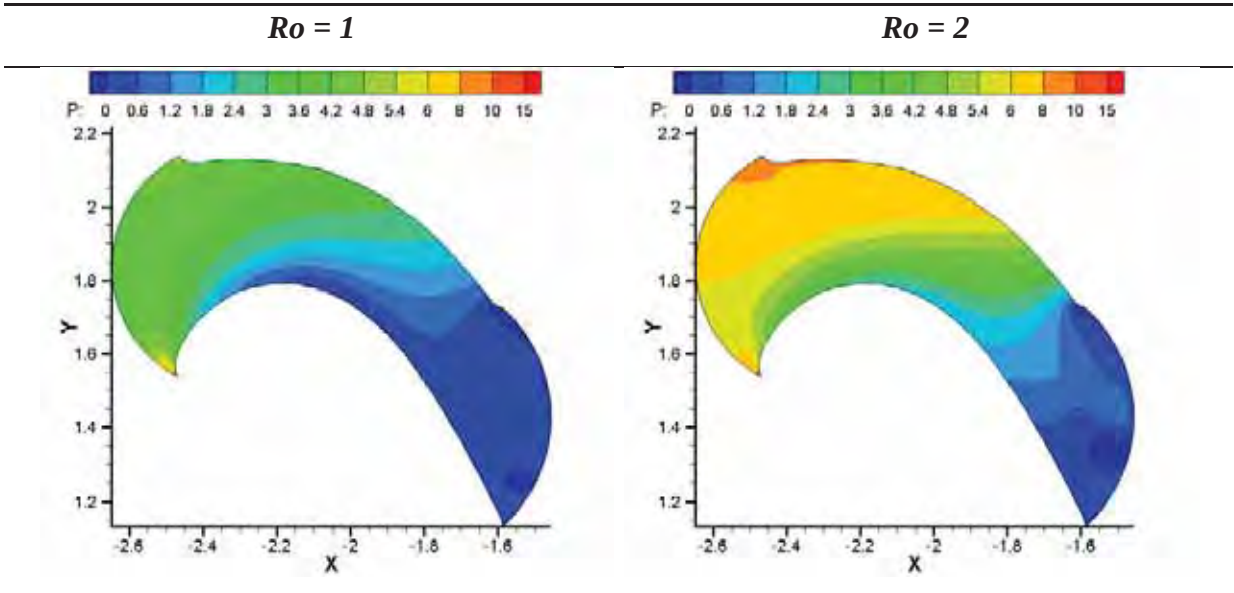
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.61 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 2,4$



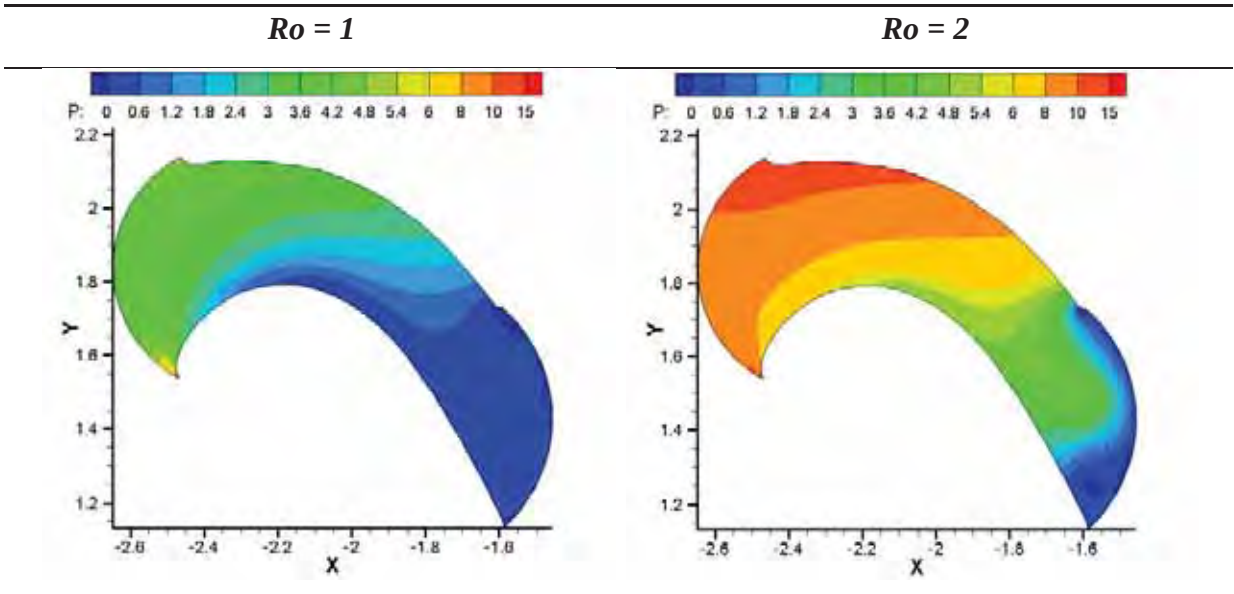
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.62 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 2,6$



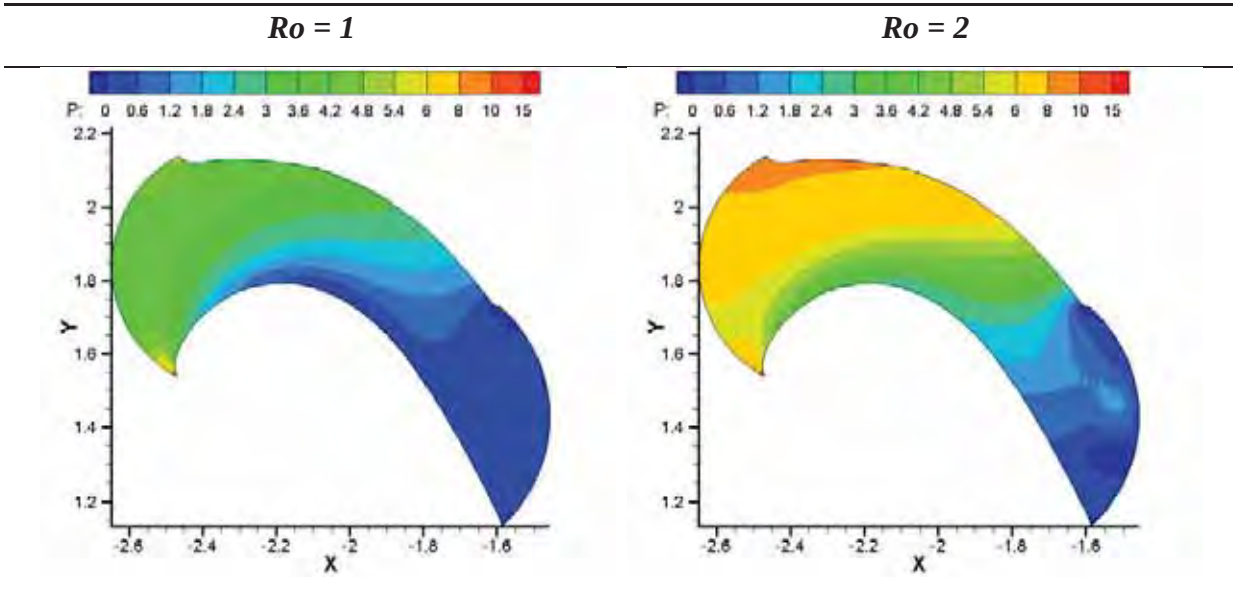
Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.63 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 2,8$



Fonte: Pereira (2010).

Figura A.2.64 - Campo de pressão para $Re = 10^5$ e $t = 3,0$



Fonte: Pereira (2010).

APÊNDICE B – FIGURAS DE RESULTADOS PARA A TURBINA RADIAL

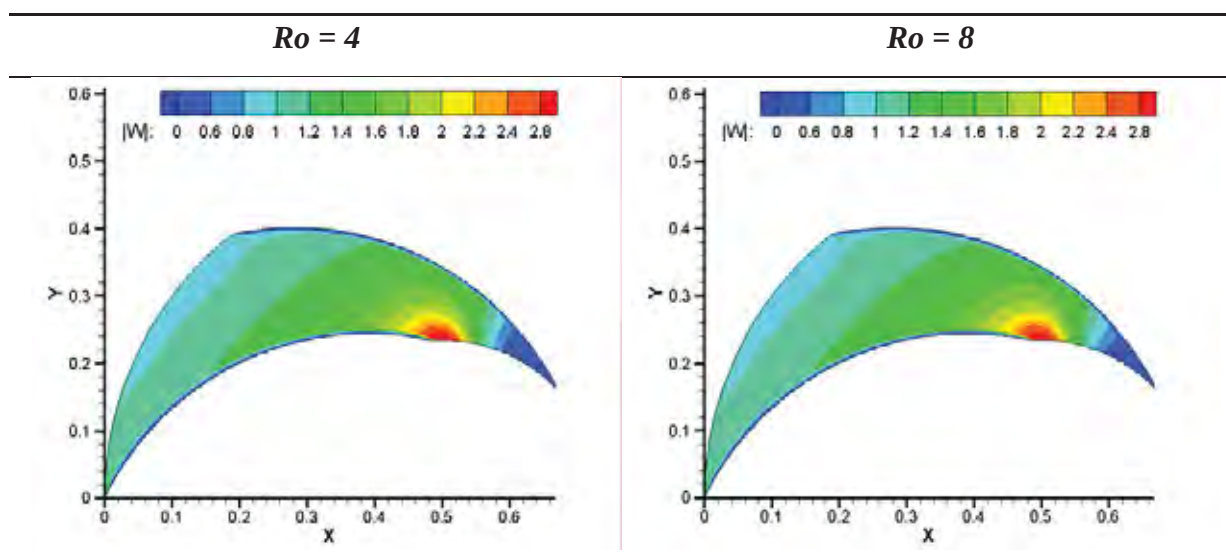
Neste apêndice são apresentados resultados dos campos de velocidade e para o caso de uma turbina radial. As evoluções destes campos são ilustradas pela norma da velocidade e pelo componente U da velocidade. Neste caso não se obteve muitos resultados e muito ainda se precisa investigar para verificar se o comportamento do escoamento é adequadamente simulado. Novamente se investiga a influência dos números de Reynolds e de diferentes números de rotação.

B.1 - Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^5$

Aqui são apresentados mais alguns resultados para o caso de simulação de escoamento numa turbina radial, considerando o número de Reynolds de 10^5 e dois valores do número de rotação: $Ro = 4$ e $Ro = 8$.

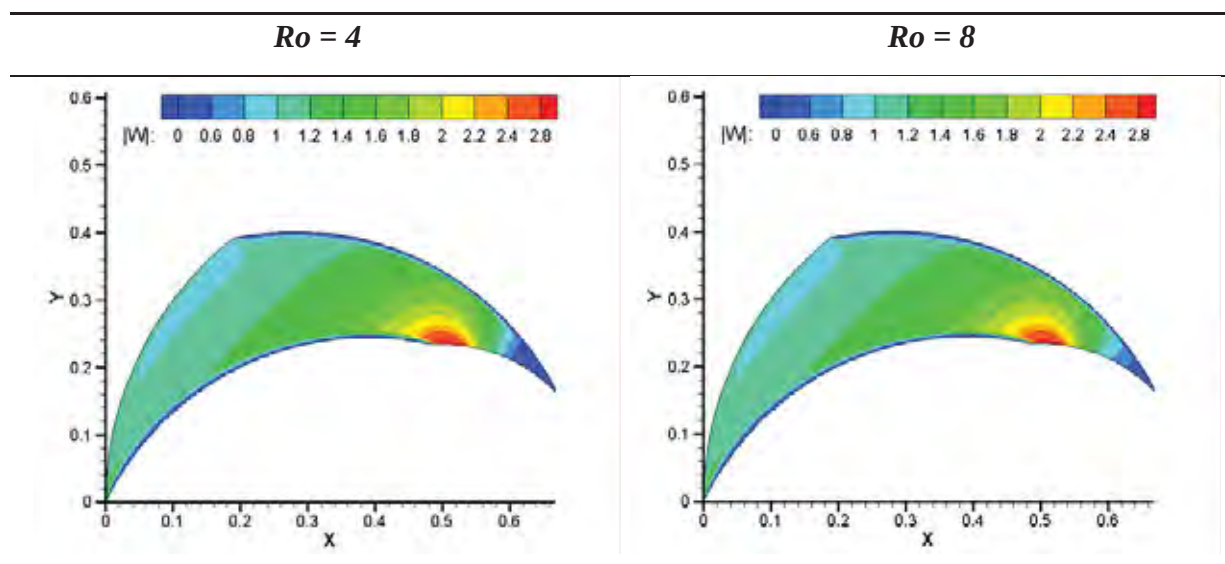
B.1.1 – Norma da Velocidade Relativa $\|\vec{W}\|$

Figura B.1.1 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,01$



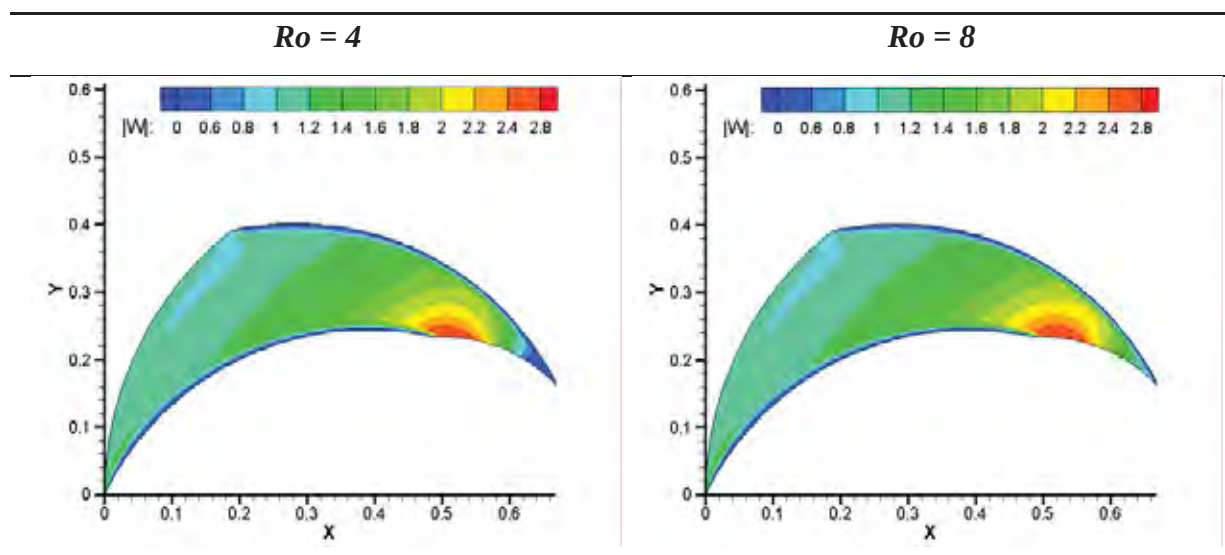
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.2 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,02$



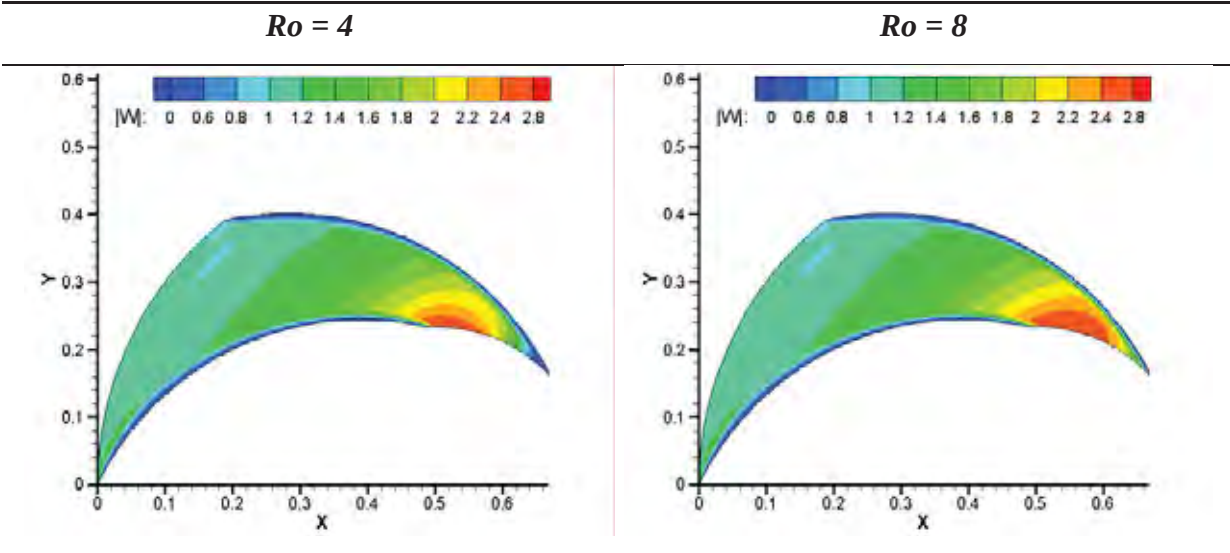
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.3 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,04$



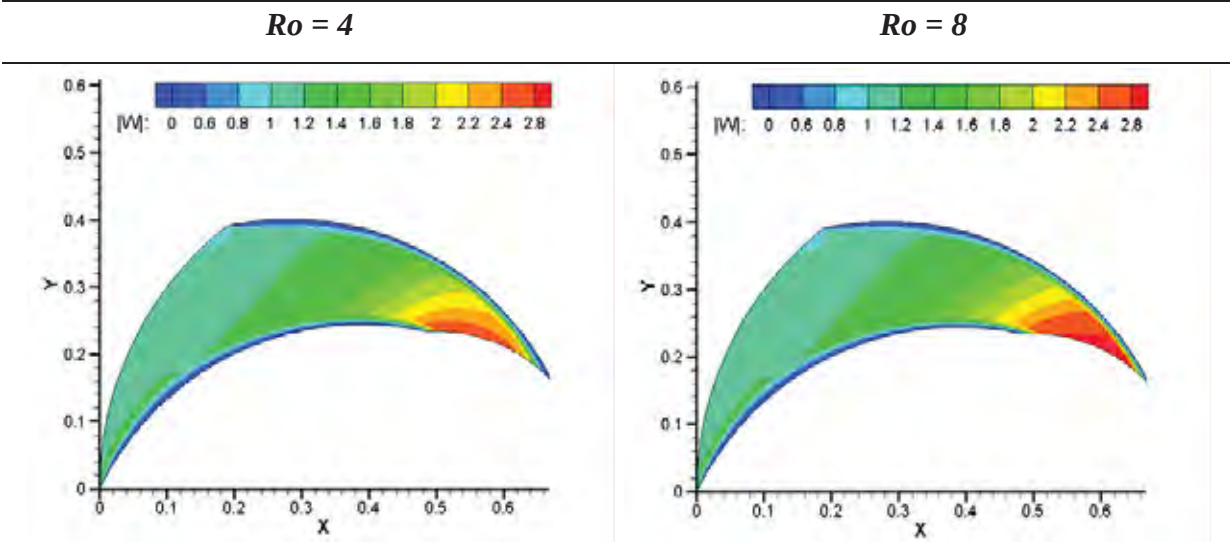
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.4 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,06$



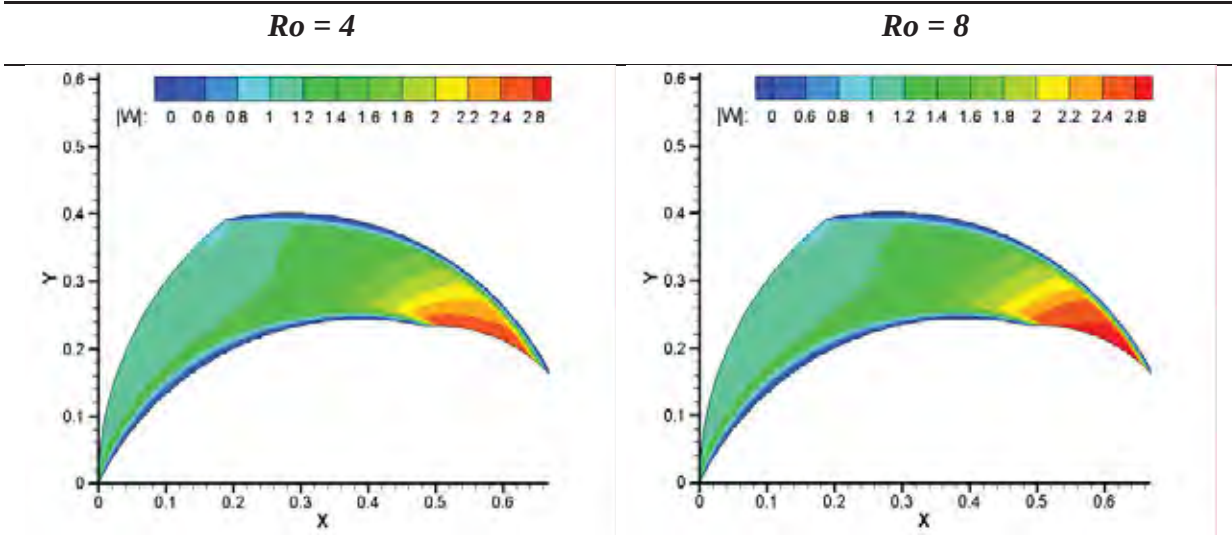
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.5 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,1$



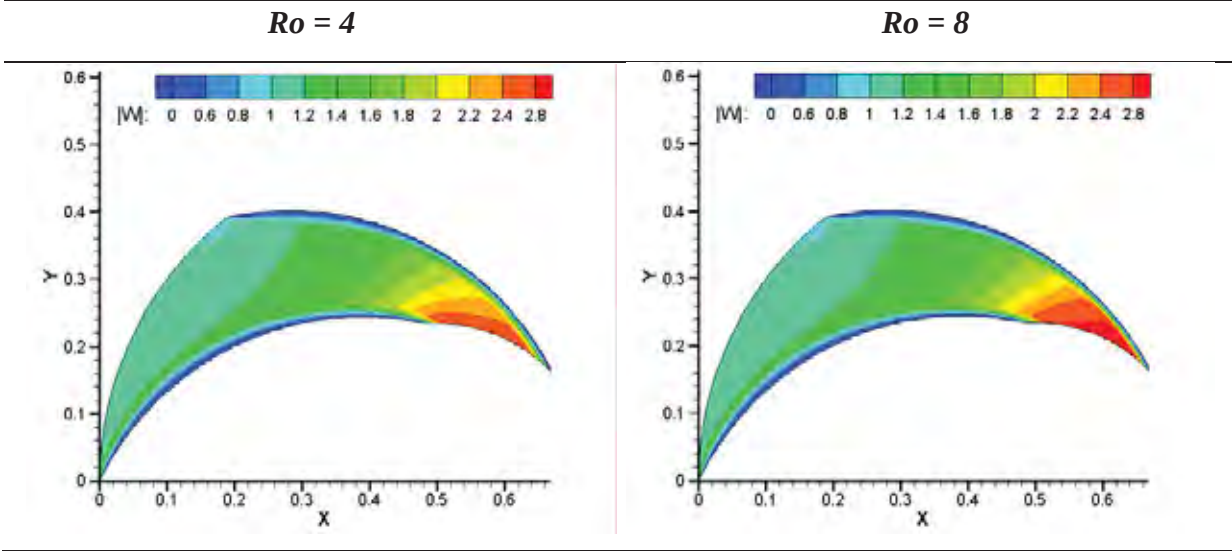
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.6 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,2$



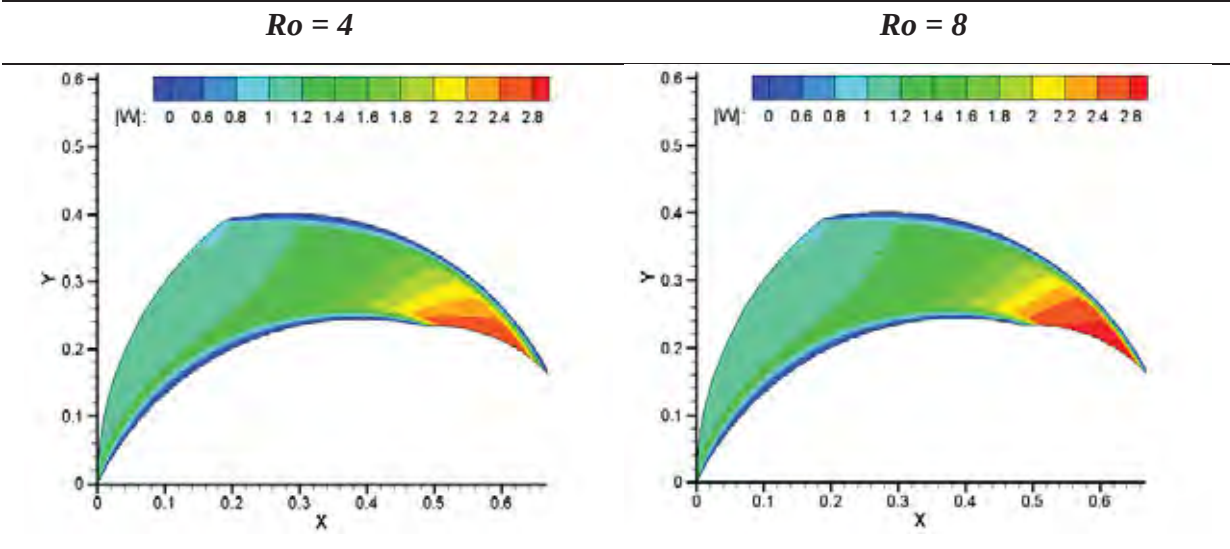
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.7 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,3$



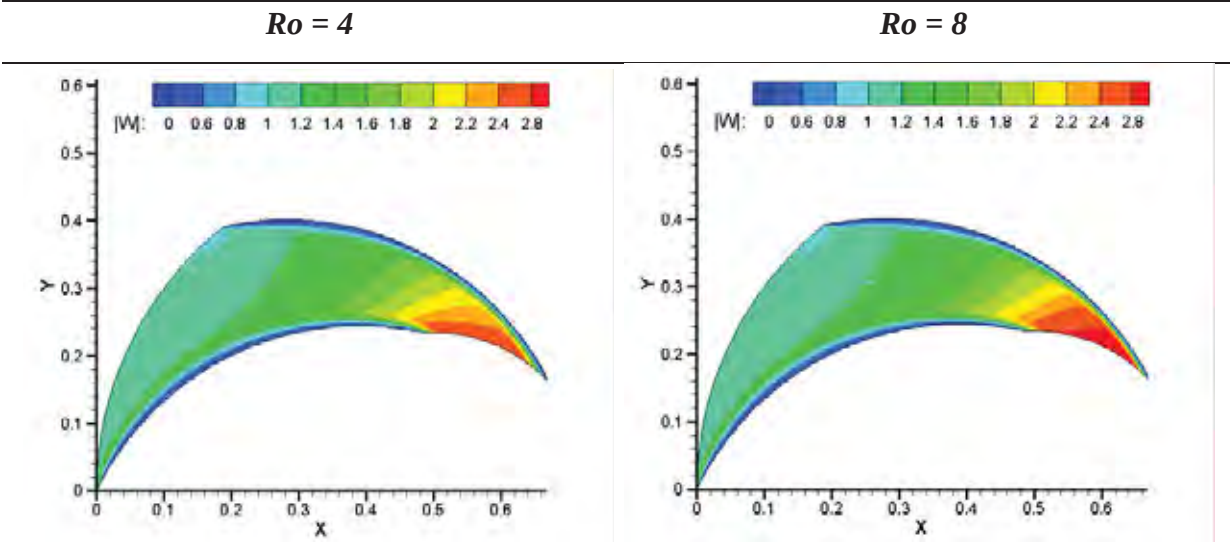
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.8 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,4$



Fonte: Pereira (2010).

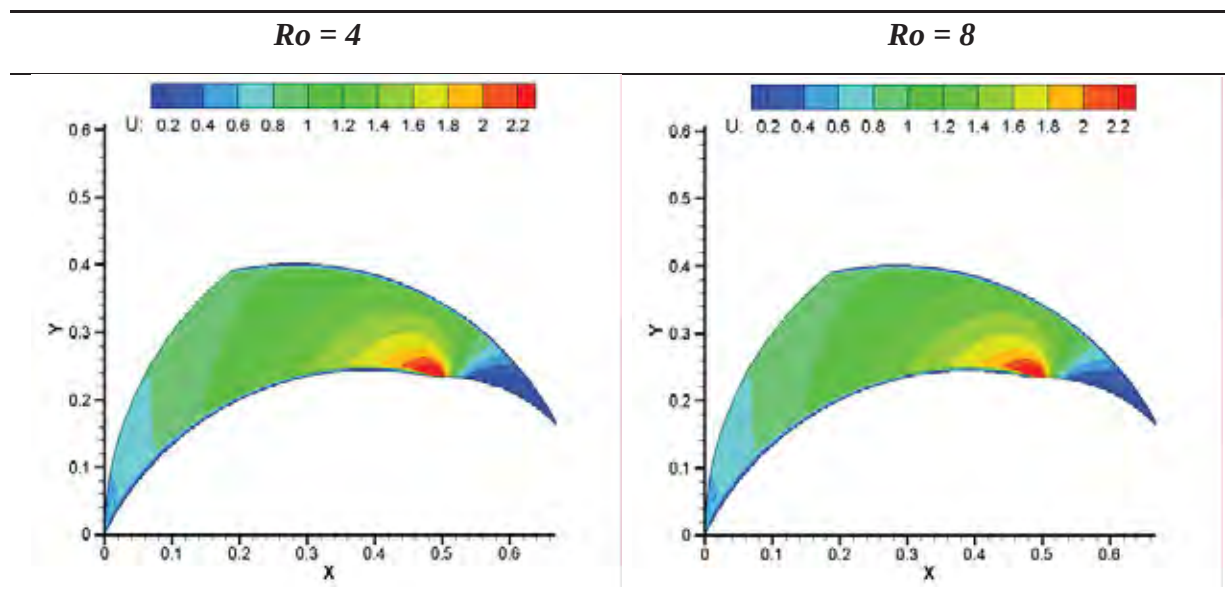
Figura B.1.9 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,5$



Fonte: Pereira (2010).

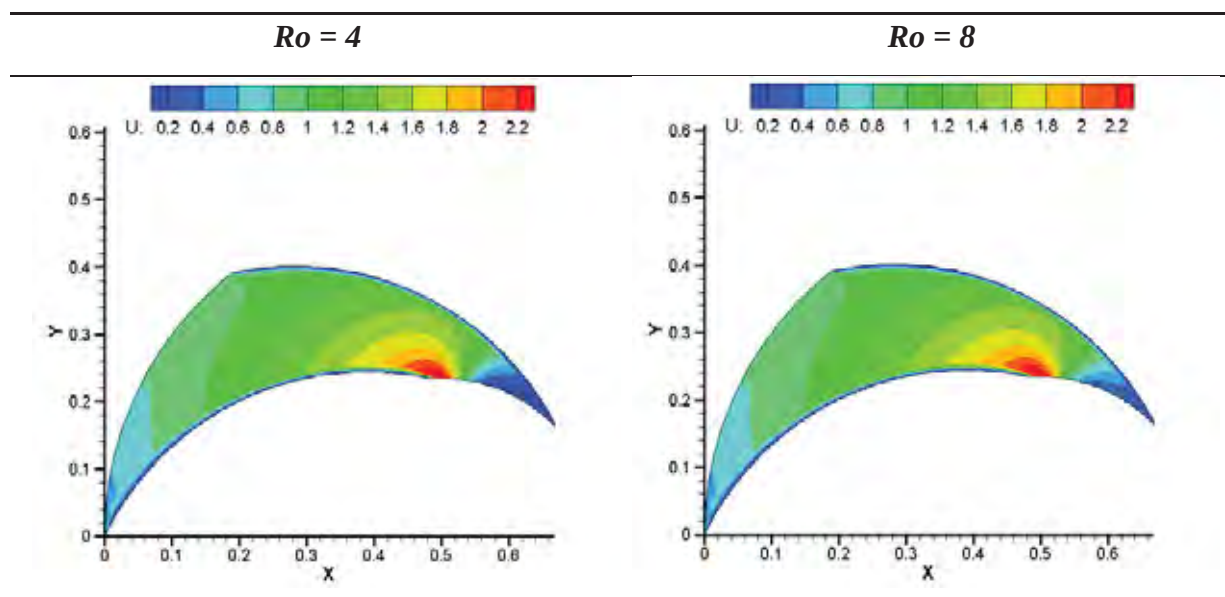
B.1.2 – Componente U da Velocidade Relativa

Figura B.1.10 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,01$



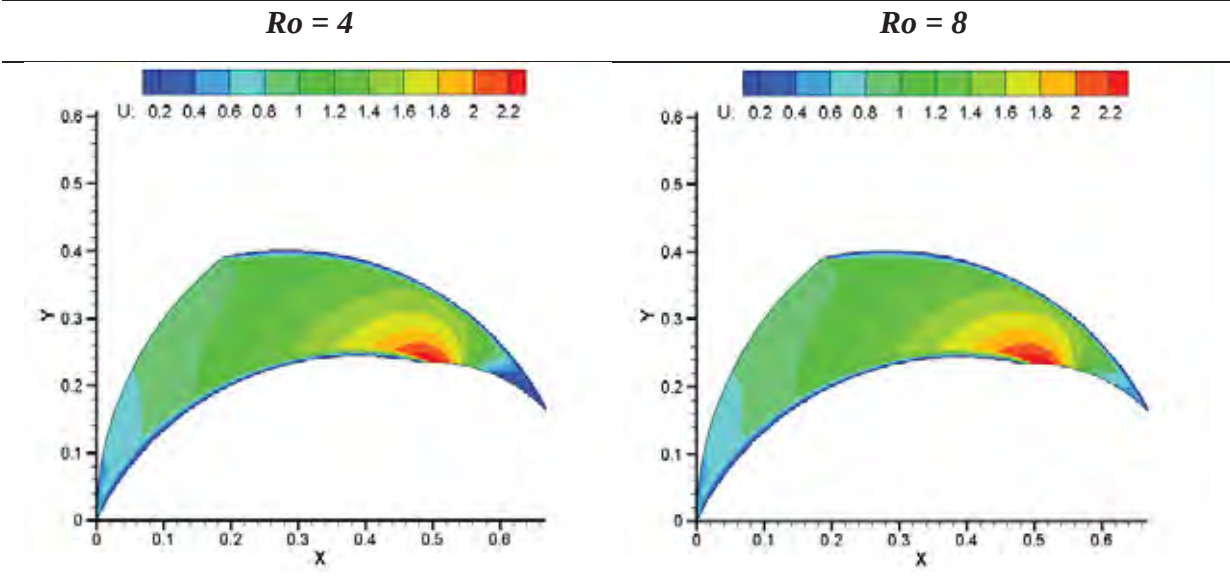
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.11 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,02$



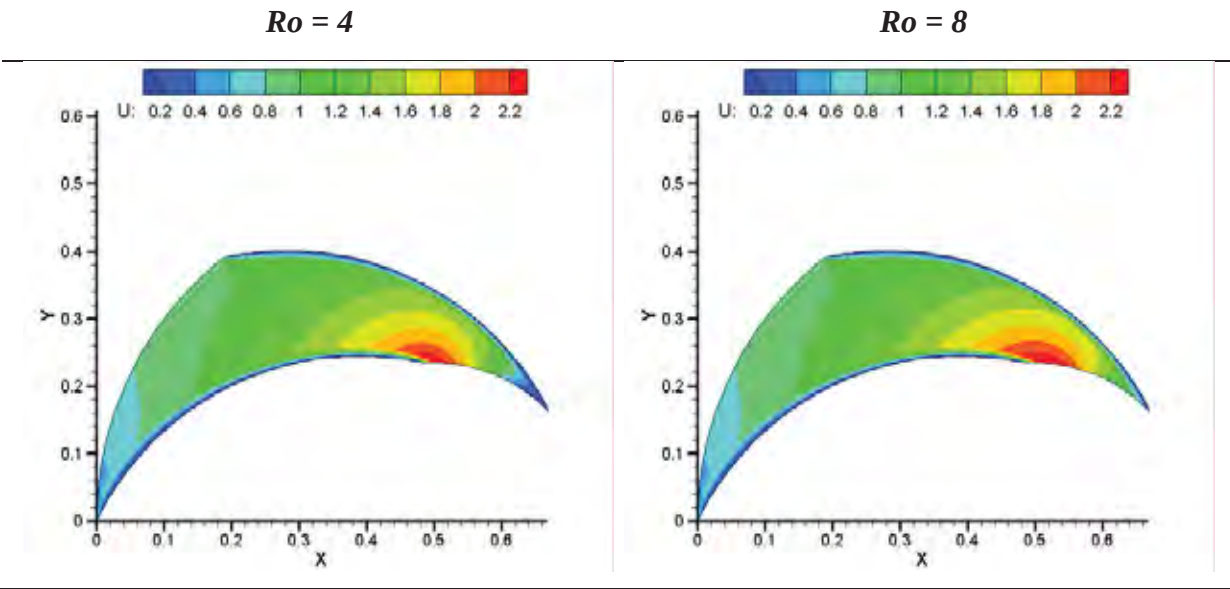
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.12 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,04$



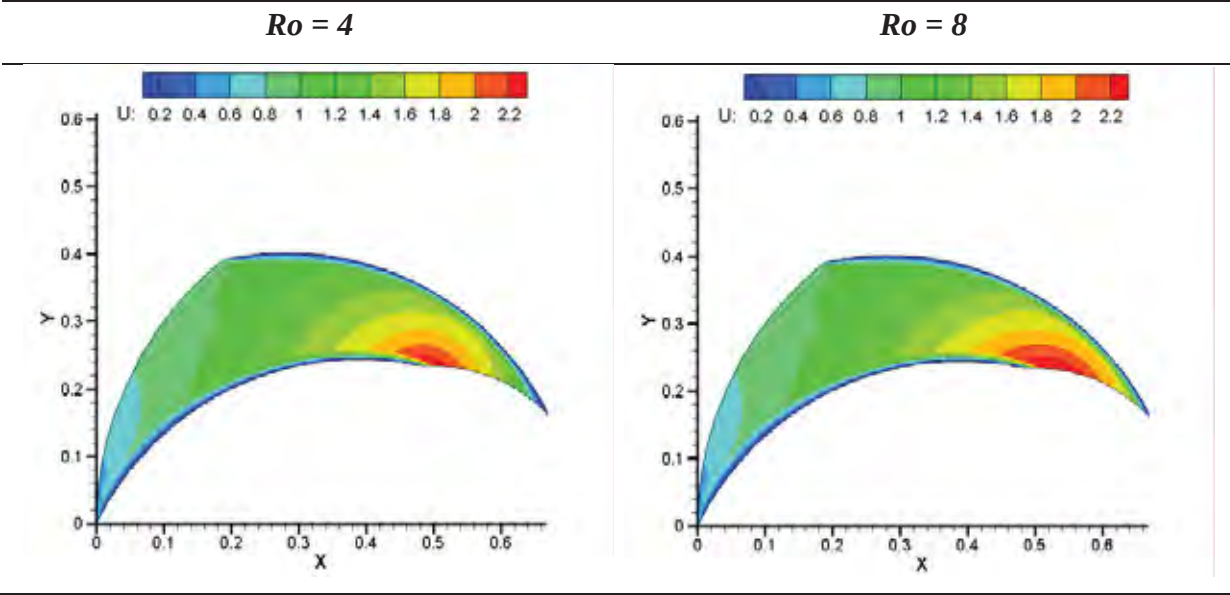
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.13 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,06$



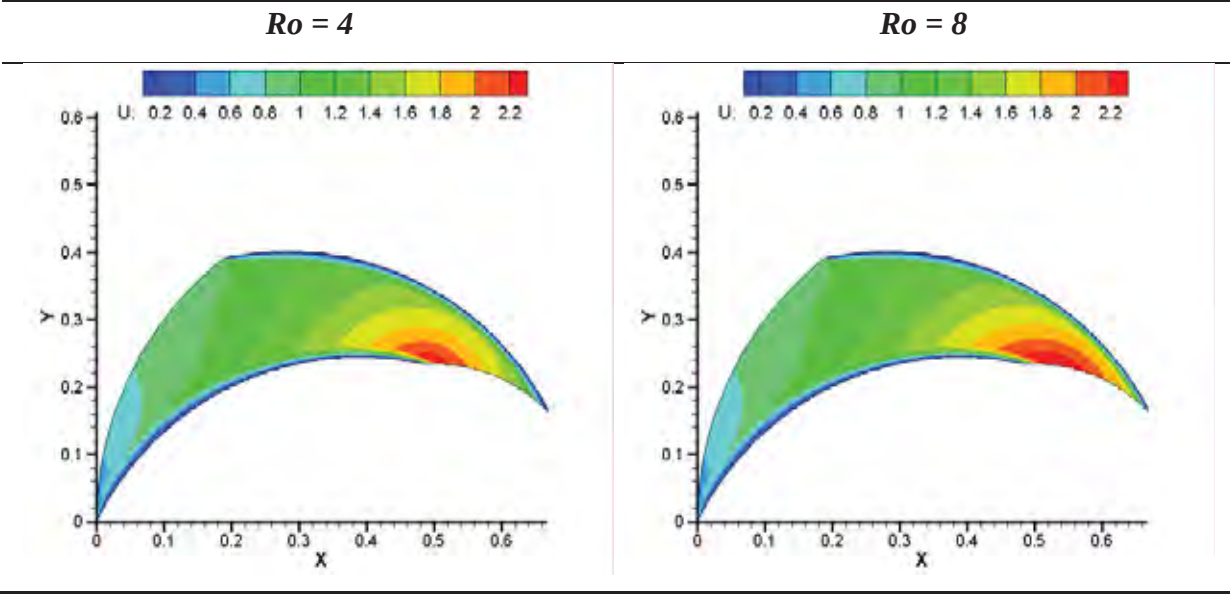
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.14 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,1$



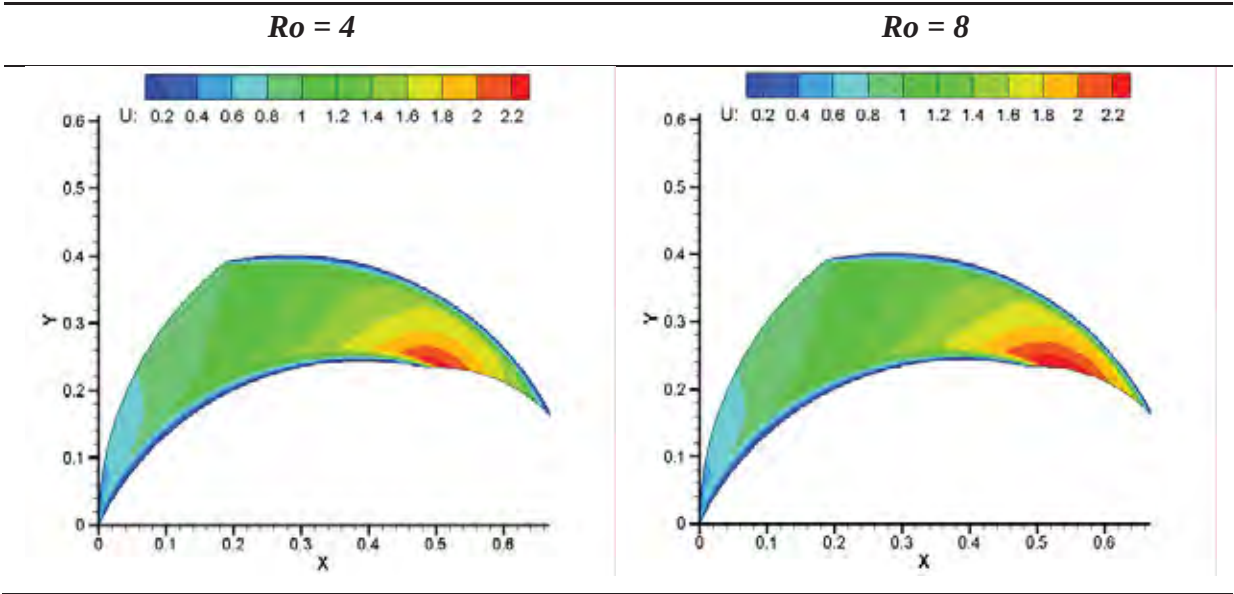
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.15 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,2$



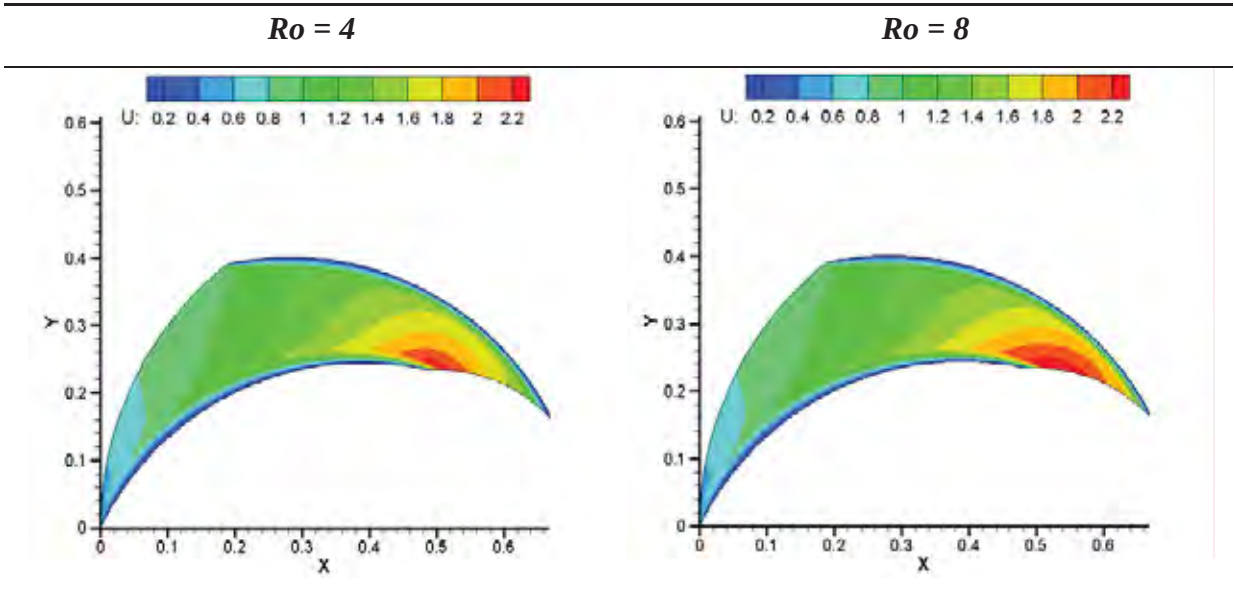
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.16 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,3$



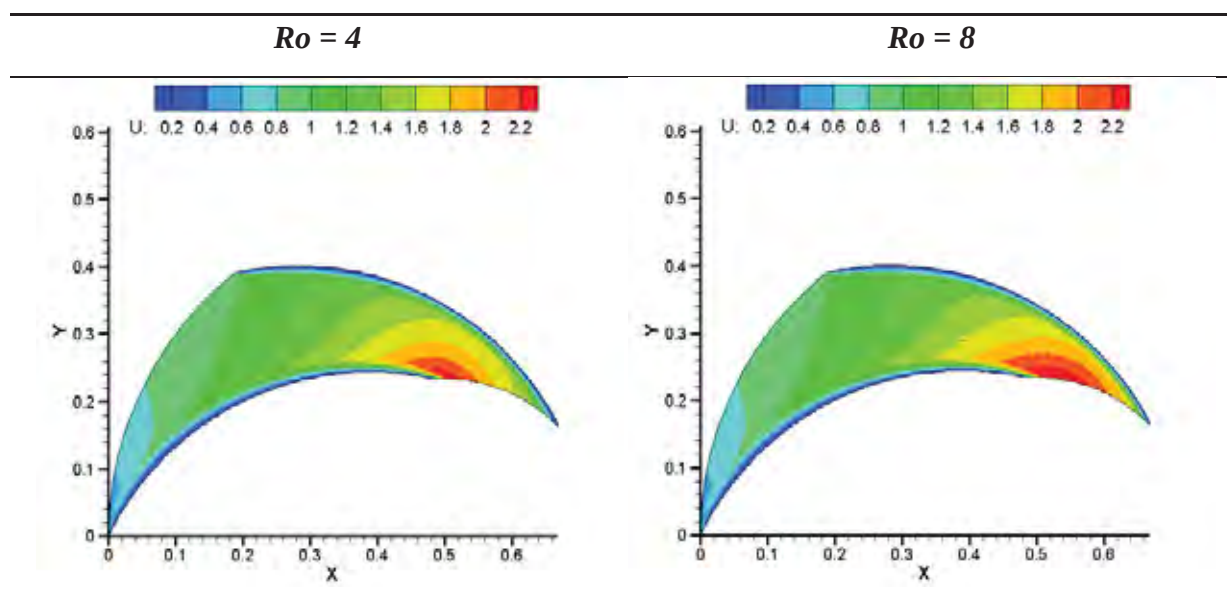
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.17 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,4$



Fonte: Pereira (2010).

Figura B.1.18 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^5$ e $t = 0,5$



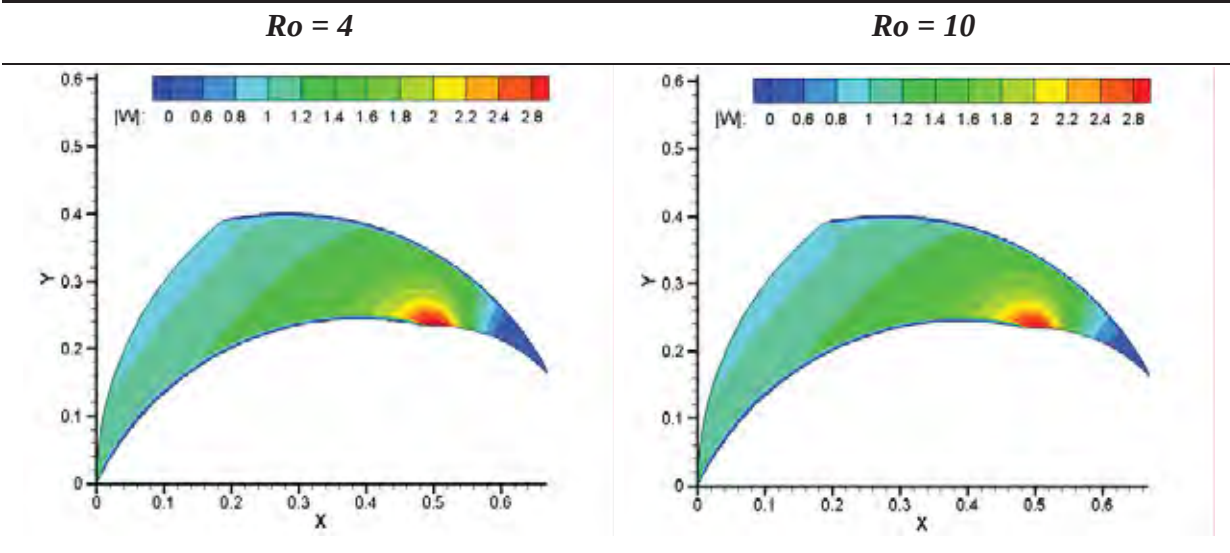
Fonte: Pereira (2010).

B.2 - Resultados da simulação para o caso de $Re = 10^6$

Neste item, mostram-se resultados de simulações para o caso de número de Reynolds 10^6 e número de rotação igual a 4 e 10 respectivamente. Os resultados aqui apresentados são apenas para o módulo da velocidade relativa e seu componente U

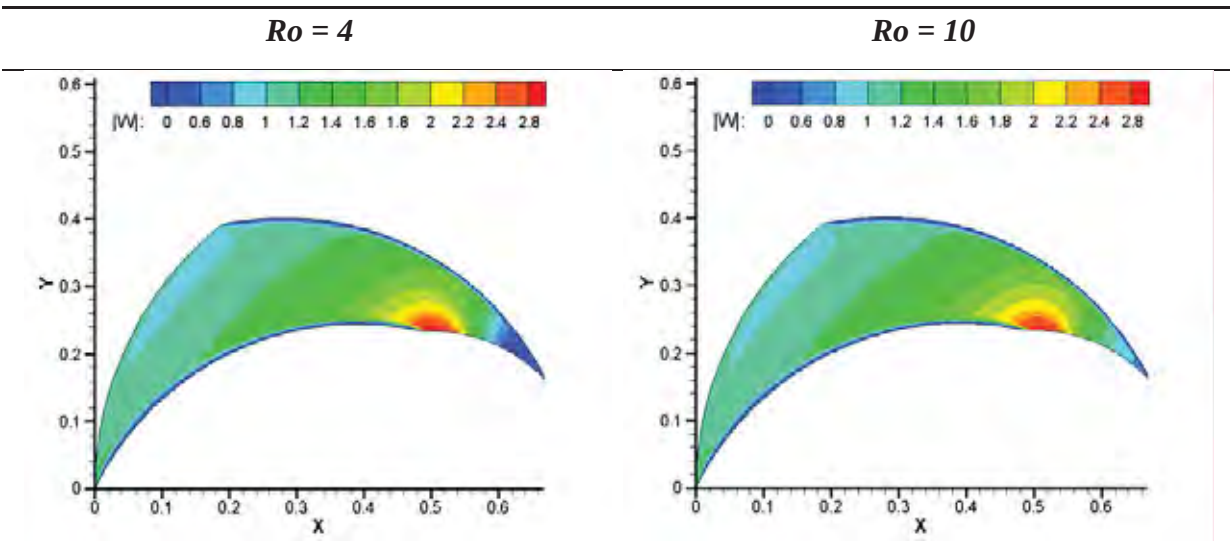
B.2.1 - Norma da Velocidade Relativa $\|\vec{W}\|$

Figura B.2.1 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,01$



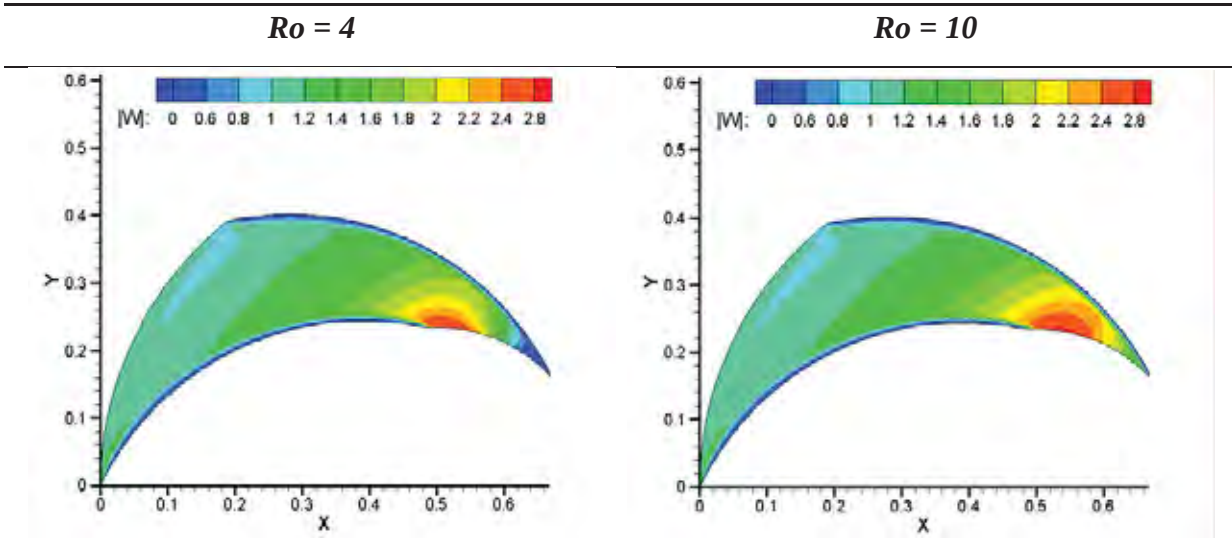
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.2 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,02$



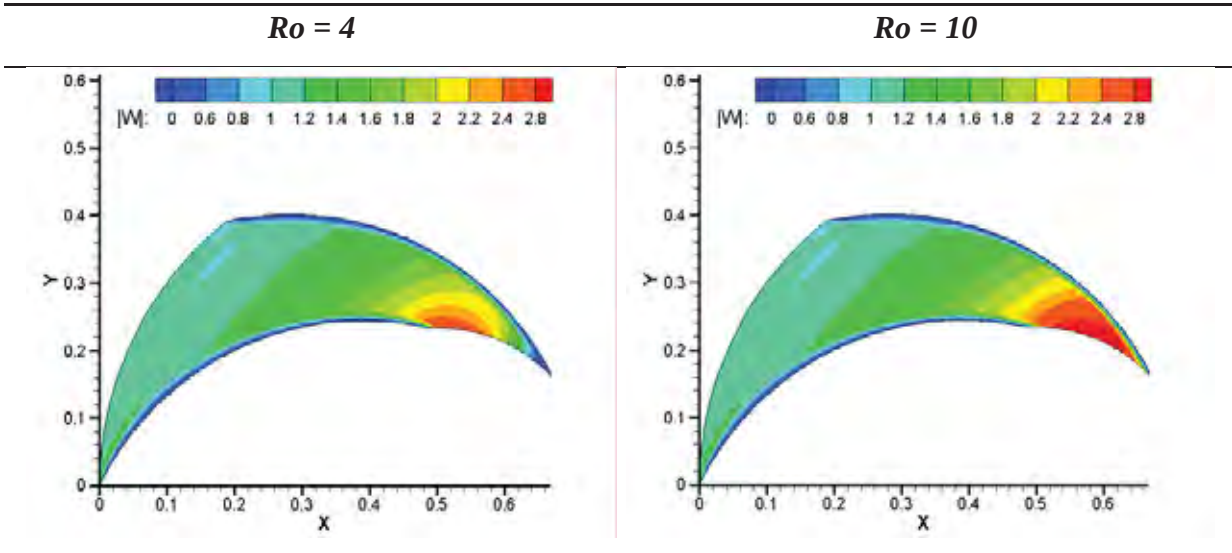
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.3 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,04$



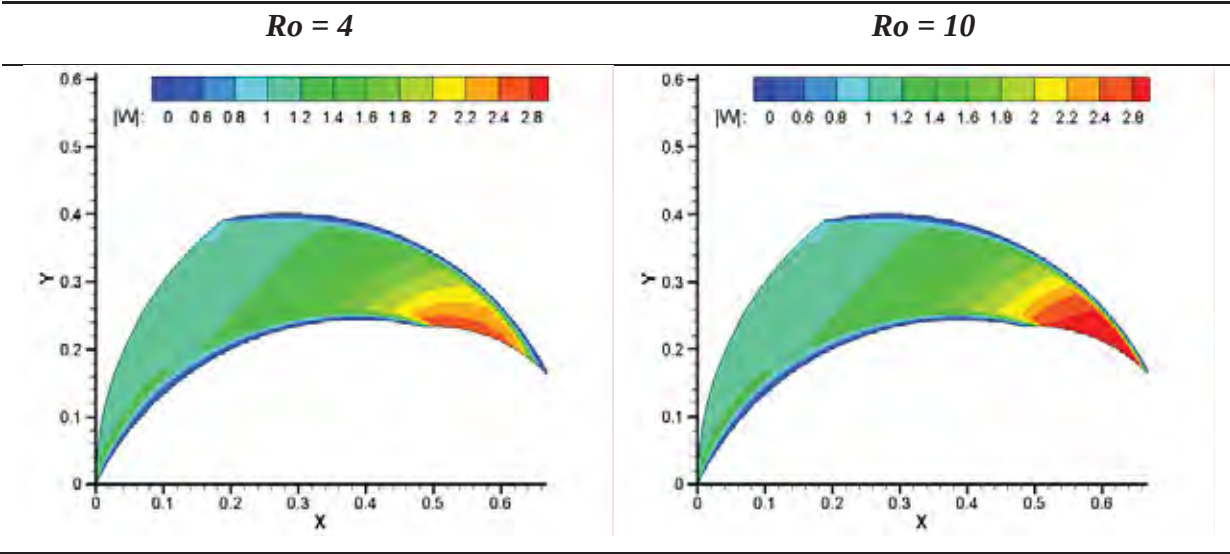
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.4 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,06$



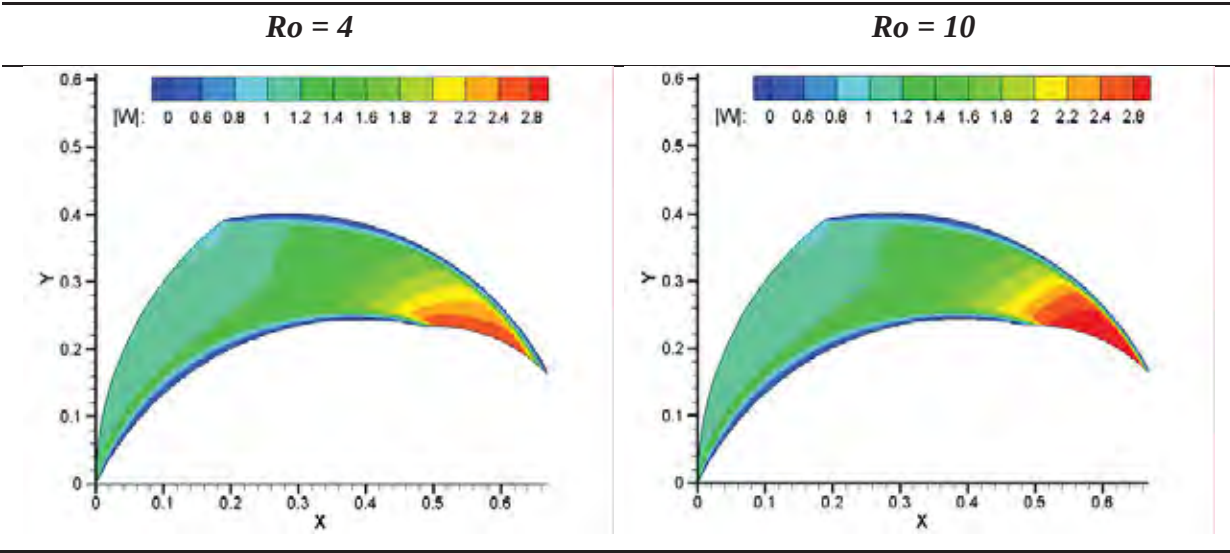
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.5 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,1$



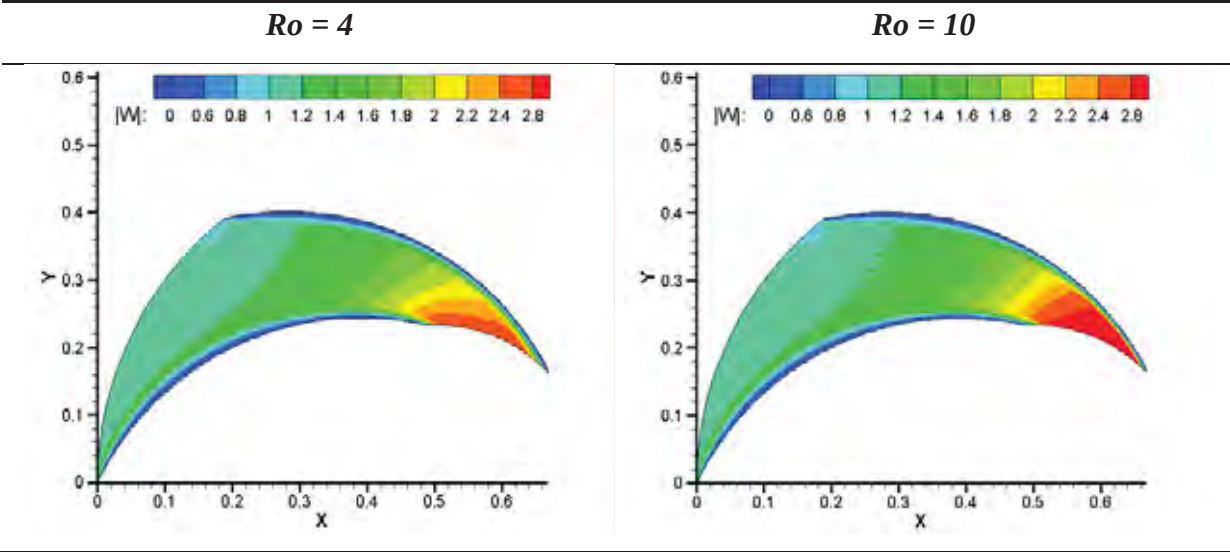
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.6 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,2$



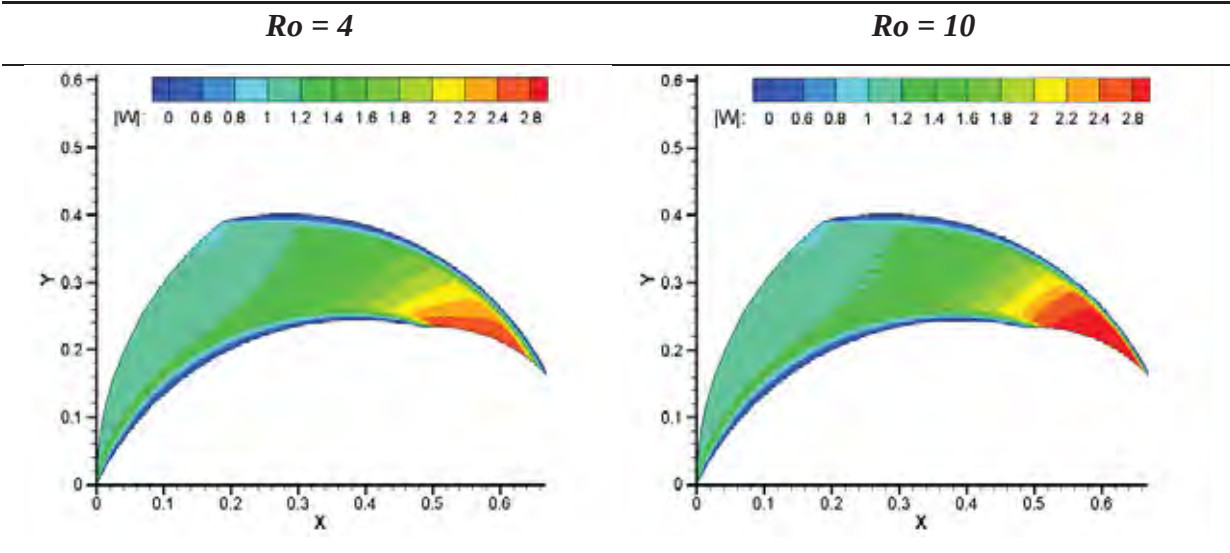
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.7 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,3$



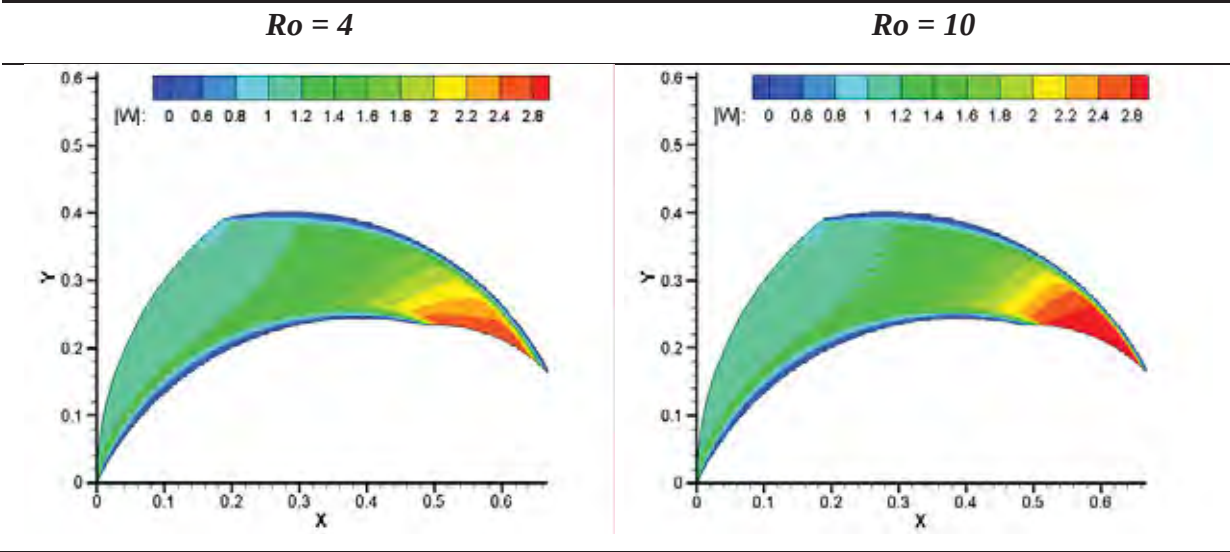
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.8 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,4$



Fonte: Pereira (2010).

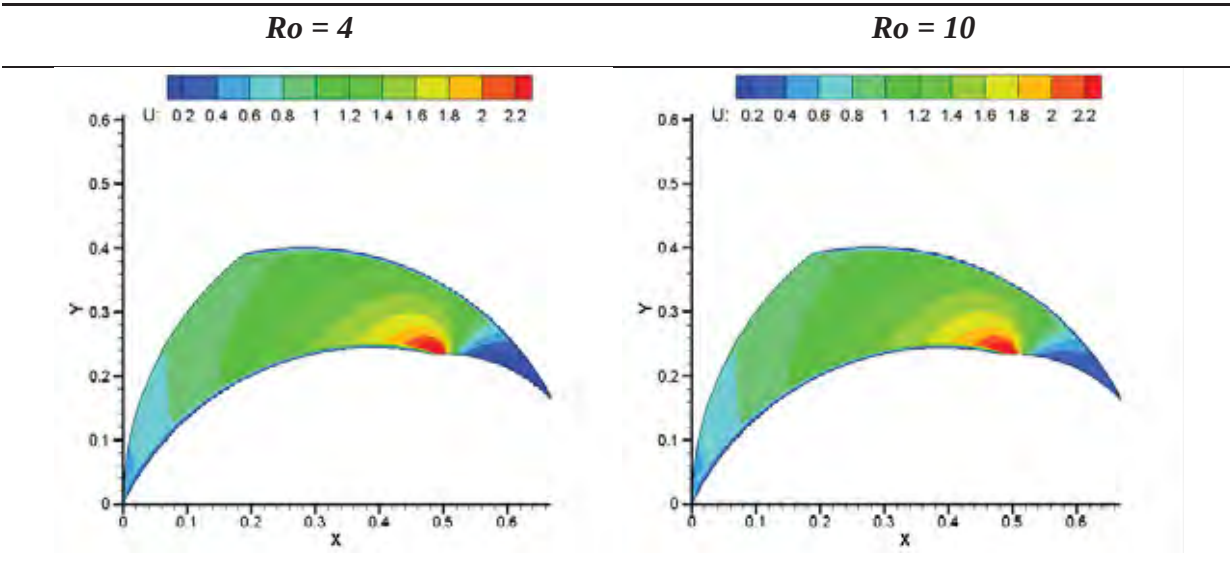
Figura B.2.9 - Norma do vetor velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,5$



Fonte: Pereira (2010).

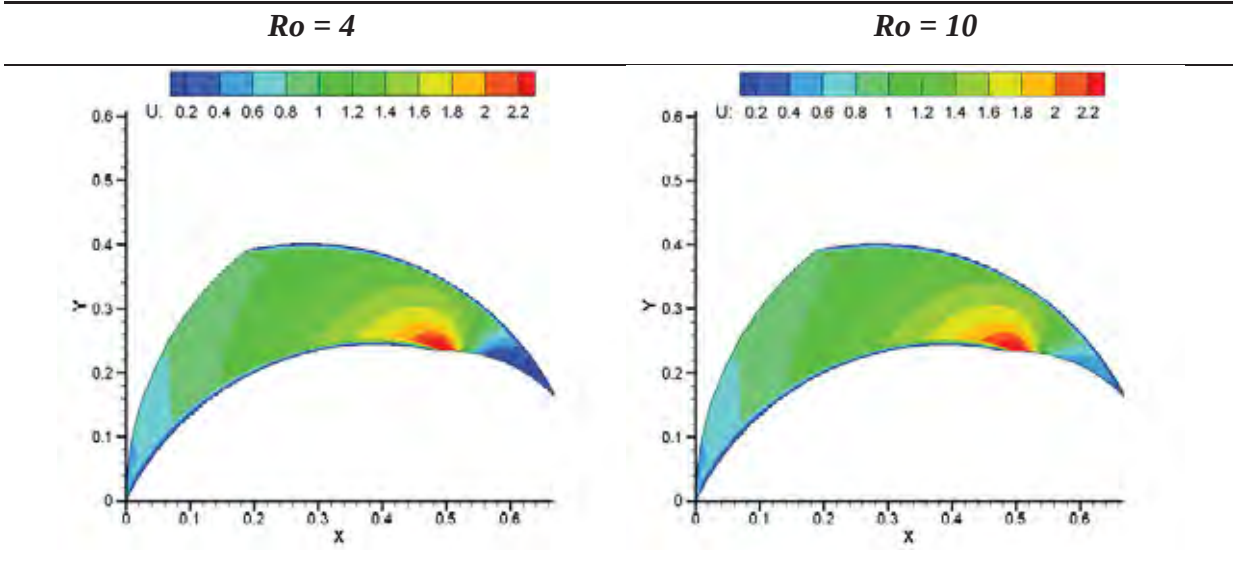
B.2.2 - Componente U da Velocidade Relativa

Figura B.2.10 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,01$



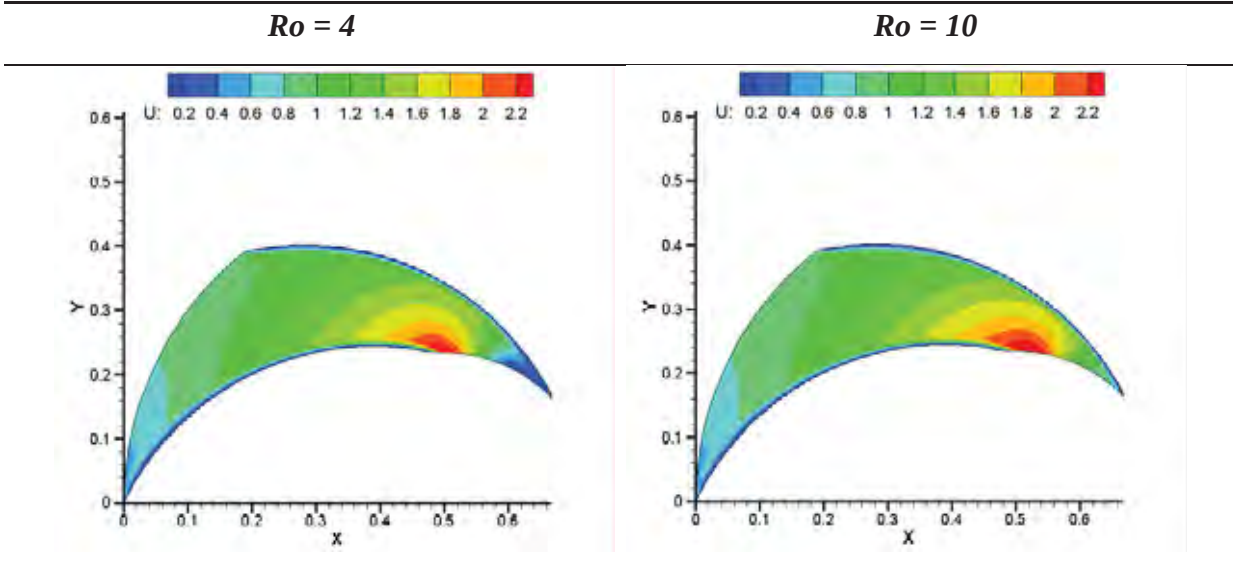
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.11 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,02$



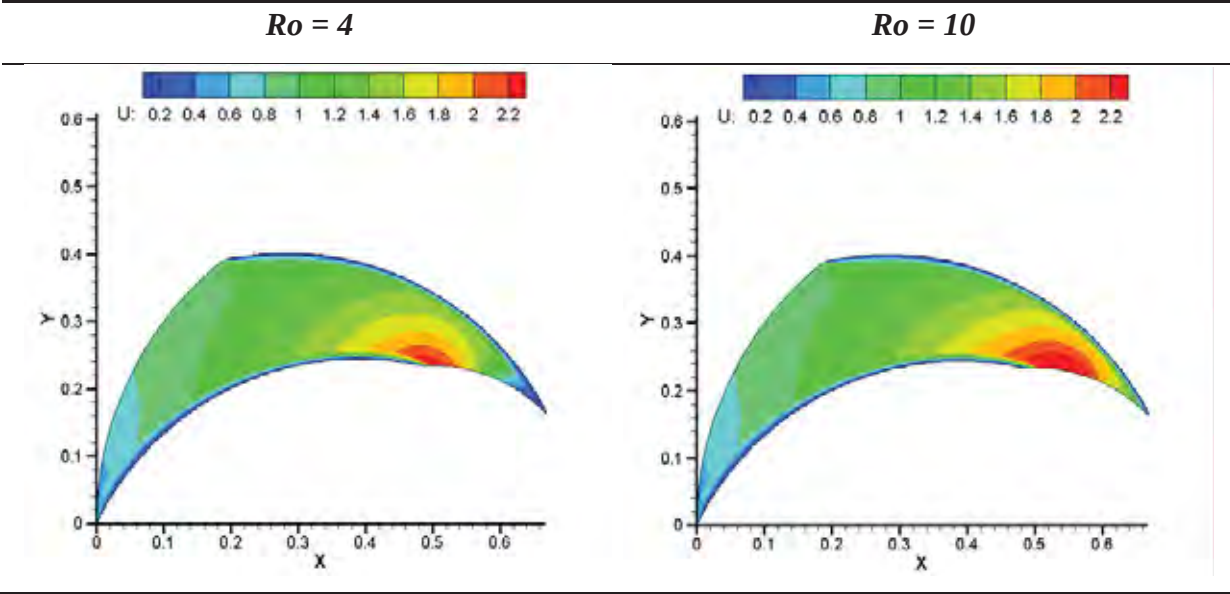
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.12 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,04$



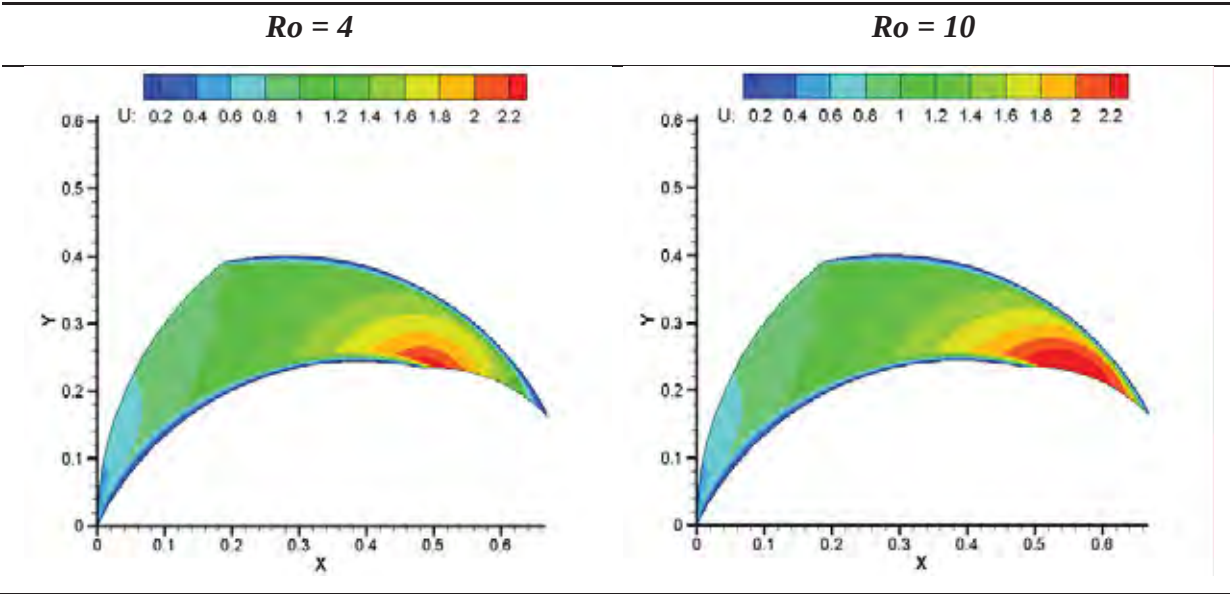
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.13 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,06$



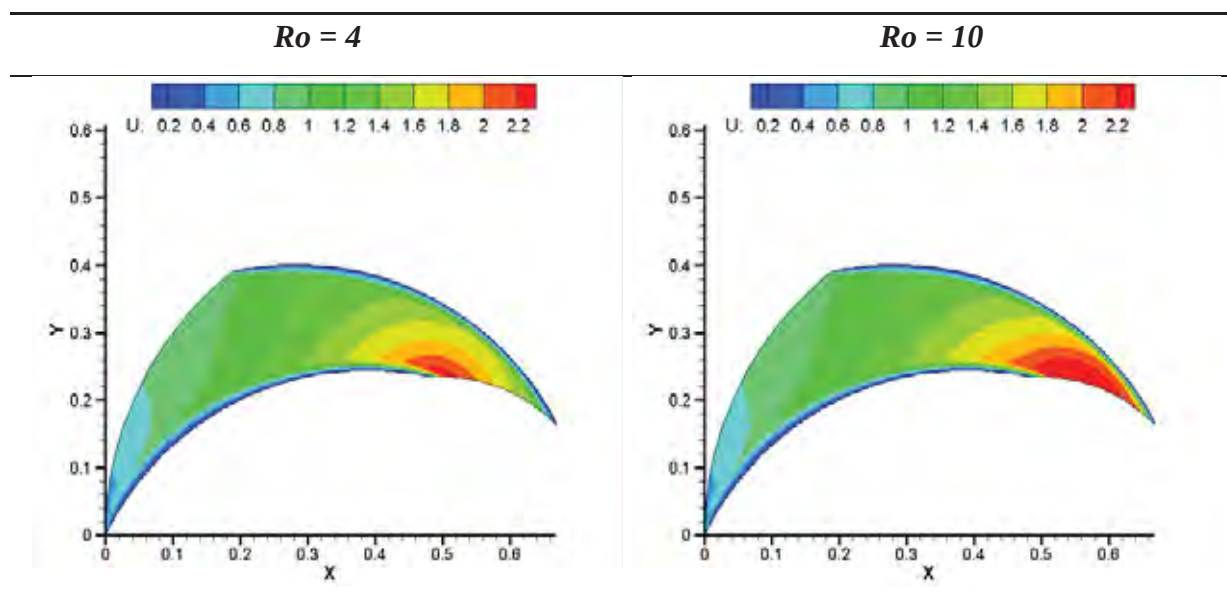
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.14 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,1$



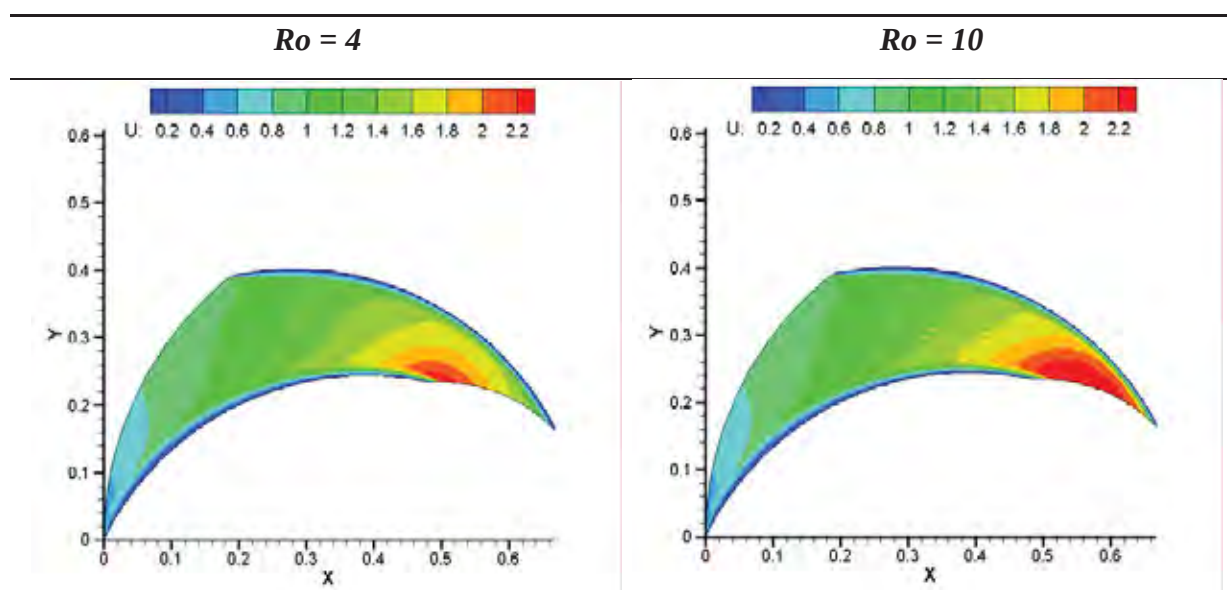
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.15 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,2$



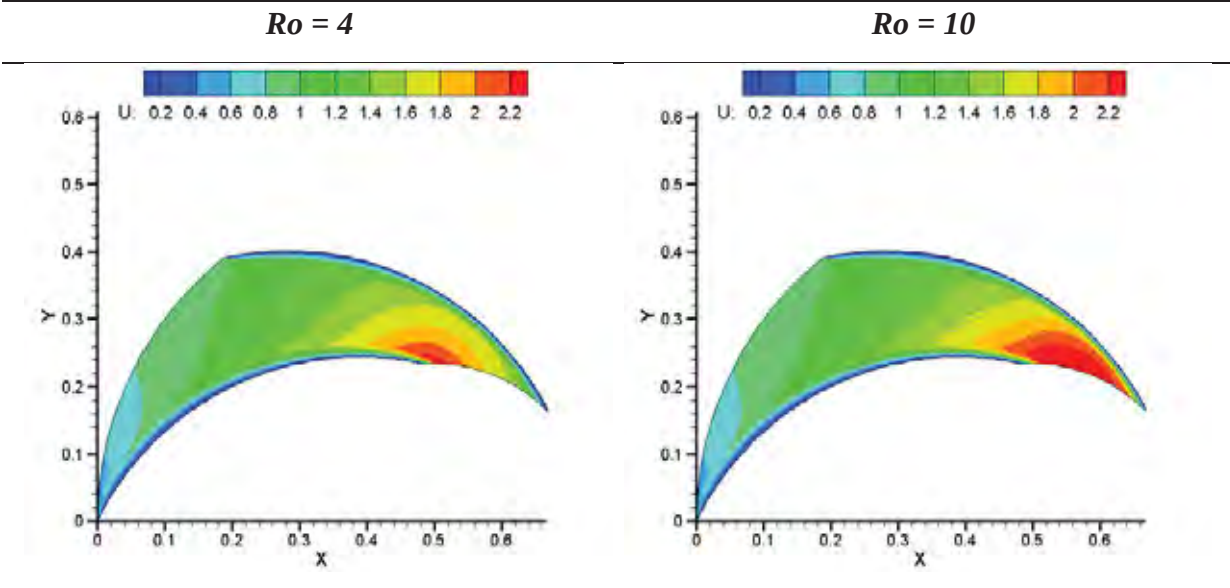
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.16 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,3$



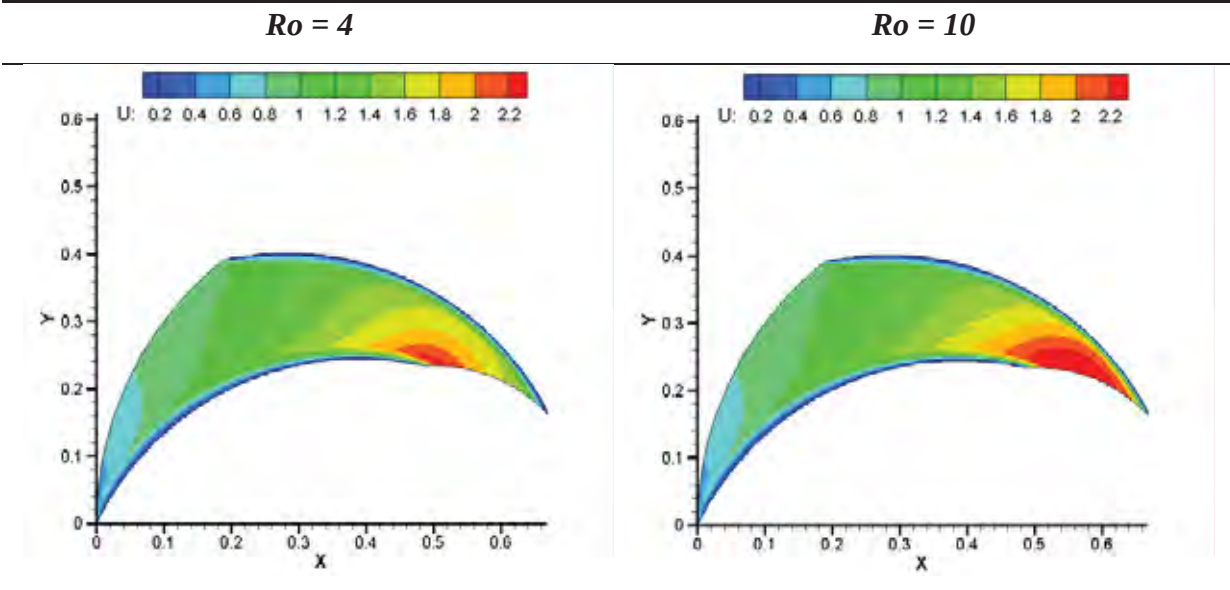
Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.17 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,4$



Fonte: Pereira (2010).

Figura B.2.18 - Campo da componente U da velocidade relativa para $Re = 10^6$ e $t = 0,5$



Fonte: Pereira (2010).