

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"



FACULDADE DE ENGENHARIA

CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

SANDERSON MANOEL DA CONCEIÇÃO

**ESTUDO DE MODELOS ESPECTRAIS DE VIGAS PARA
CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES E
MONITORAMENTO DA INTEGRIDADE ESTRUTURAL**

Ilha Solteira

2016

SANDERSON MANOEL DA CONCEIÇÃO

**ESTUDO DE MODELOS ESPECTRAIS DE VIGAS PARA
CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES E
MONITORAMENTO DA INTEGRIDADE ESTRUTURAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Prof. Dr. Vicente Lopes Junior
Orientador

Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno
Coorientador

Ilha Solteira
2016



FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C744e Conceição, Sanderson Manoel da.
Estudo de modelos espectrais de vigas para controle ativo de vibrações e monitoramento da integridade estrutural / Sanderson Manoel da Conceição. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2016
132 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2016

Orientador: Vicente Lopes Junior
Coorientador: Douglas Domingues Bueno
Inclui bibliografia

1. Método dos elementos espectrais. 2. Controle de vibrações. 3. Monitoramento da integridade estrutural. 4. Impedância eletromecânica. 5. Modelagem matemática.


Raiane da Silva Santos

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

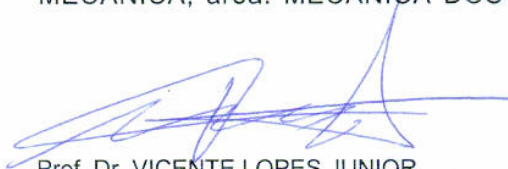
TÍTULO DA TESE: Estudos de modelos espectrais de vigas para controle ativo de vibrações e monitoramento da integridade estrutural

AUTOR: SANDERSON MANOEL DA CONCEIÇÃO

ORIENTADOR: VICENTE LOPES JUNIOR

COORDENADOR: DOUGLAS DOMINGUES BUENO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA MECÂNICA, área: MECÂNICA DOS SÓLIDOS pela Comissão Examinadora:



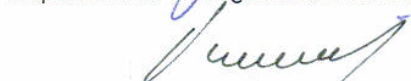
Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. JOAO ANTONIO PEREIRA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



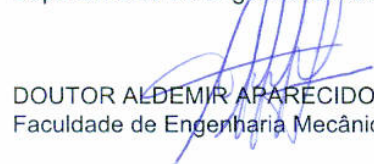
Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru



Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru



DOUTOR ALDEMIR APARECIDO CAVALINI JUNIOR

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Ilha Solteira, 20 de dezembro de 2016

Para a minha esposa Vânia, pelo amor e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus por tudo que tem me concedido.

Ao Professor Vicente Lopes Junior pela orientação desde os anos de iniciação científica, pelo incentivo, paciência e pela oportunidade de realizar este trabalho.

Ao Professor Douglas Domingues Bueno pela coorientação deste trabalho. Em especial, por ter me "trazido" para a área de mecânica dos sólidos, pelas discussões, pela paciência e pela dedicação em coorientar este trabalho.

Ao Professor Michael John Brennan pelas discussões durante o decorrer deste trabalho.

Ao Professor João Antonio Pereira pelas sugestões e discussões no exame de qualificação e na comissão de acompanhamento.

Aos membros do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes com quem tive a oportunidade de conviver nos últimos anos. Em especial ao Marcelo Francisco Maestá, Danilo Damasceno Sabino, Sydney Bruce Shiki, entre tantos, agradeço pela convivência e amizade.

Aos professores dos departamentos de matemática e engenharia mecânica, assim com aos funcionários da FEIS - UNESP.

À minha família pelo apoio.

Por último, mas não menos, à minha esposa Vânia, por ter sempre me incentivado a continuar neste caminho.

“A persistência é o menor caminho do êxito.”

Charles Chaplin

RESUMO

A ideia central deste trabalho é utilizar o método dos Elementos Espectrais (SEM, do inglês *Spectral Element Method*) para aplicações de controle ativo de vibrações e monitoramento da integridade estrutural (SHM, do inglês *Structural Health Monitoring*). Diversos trabalhos têm abordado estes tópicos de forma independente. No entanto, para aplicações reais de engenharia, utilizar os mesmos atuadores, sensores e sistemas de aquisição de dados para controle e monitoramento pode reduzir investimentos e simplificar processos. Por esta motivação, este trabalho apresenta um estudo de modelos espectrais para estruturas do tipo viga considerando aplicações de controle de vibrações e monitoramento da integridade estrutural. Na modelagem são considerados os modelos de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko, além de transdutores piezelétricos acoplados. A técnica de controle clássico PID (Proporcional, Integral, Derivativo) é explorada e uma nova modelagem é proposta para se considerar técnicas modernas de controle por realimentação de estados na formulação espectral. Em particular, discute-se o controlador LQR (do inglês, *Linear Quadratic Regulator*), no entanto, a metodologia permite se considerar outras técnicas de controle por realimentação baseada na representação no espaço de estados. Também, especificamente para monitoramento estrutural, no presente trabalho de tese apresenta-se uma discussão sobre índices de detecção de danos. Índices de detecção calculados a partir de sinais experimentais têm sido amplamente utilizados em trabalhos da literatura de SHM. No entanto, pouco tem sido esclarecido sobre seus comportamentos em função das características estruturais e dos danos. Neste sentido, o presente trabalho apresenta uma discussão do comportamento de índices baseados na norma H_2 , norma H_∞ e no CCDDM (*Correlation coefficient deviation metric*), para duas faixas de frequência, em função da severidade do dano e quantidade de amortecimento no sistema. Os resultados obtidos indicam que a formulação por Elementos Espectrais é adequada para viabilizar os projetos simultâneos de um controlador de vibrações e um sistema de monitoramento estrutural utilizando os mesmos equipamentos e simplificando análises ao se utilizar um único modelo dinâmico do sistema.

Palavras-chave: Método dos elementos espectrais. Controle de vibrações. Monitoramento da integridade estrutural. Impedância eletromecânica. Modelagem matemática.

ABSTRACT

The main idea of this thesis is to use the Spectral Element Method (SEM), in applications of Active Vibration Control (AVC) and Structural Health Monitoring (SHM). These two topics have been approached in several works, but in an independent way. However, for real engineering applications, to use the same actuators, sensors and data acquisition systems to active control and structural monitoring can reduce the costs and simplify processes. For this reason, this thesis presents a study of spectral models for beam-like structures considering applications of vibration control and structural health monitoring. The Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories are used in the spectral modelling and the piezoelectric transducers bonded in the structures are also considered. A classical control technique, PID (Proportional, Integral, Derivative) is explored and a new modelling approach to consider modern control methods of state feedback is proposed in spectral formulation. In particular, the Linear Quadratic Regulator (LQR) is discussed, however, this methodology allows for any other state feedback control techniques based in state space representation. Also, specifically for structural monitoring, is presented a discussion about damage detection indices. Detection indices computed from experimental data have been widely used in SHM studies. However, little has been clarified about their behaviours due to structural characteristics and damages. In this context, this work presents a discussion of the behaviour of indices based in the H_2 norm, H_∞ norm and CCDDM (Correlation coefficient deviation metric), for two frequency ranges, depending on the severity of damage and amount of damping in the system. The obtained results indicate that the spectral element formulation is suited to enable the simultaneous design of a vibration controller and a structural monitoring system using the same data acquisition systems and simplifying analysis when using just one dynamic model of the system.

Keywords: Spectral element method. Vibration control. Structural health monitoring. Electromechanical impedance technique. Mathematical modelling.

LISTA DE FIGURAS

Figure 1	Ilustração de um elemento de viga.	26
Figure 2	Seção de um elemento de viga.	26
Figure 3	Forças e deslocamentos em um elemento de viga de Timoshenko. . . .	30
Figure 4	Forças e deslocamentos em um elemento de viga de Euler-Bernoulli. .	34
Figure 5	Função de Resposta em Frequência para uma viga de Euler-Bernoulli.	36
Figure 6	Função de Resposta em Frequência para uma viga de Timoshenko. . .	37
Figure 7	Função de Resposta em Frequência (1ª faixa de freq.).	37
Figure 8	Função de Resposta em Frequência (2ª faixa de freq.).	38
Figure 9	Forças e deslocamentos em um elemento de barra.	40
Figure 10	Função de Resposta em Frequência de uma barra em deslocamento axial.	42
Figure 11	Elemento de viga com duas camadas.	44
Figure 12	Forças e graus de liberdade para um elemento de viga com duas camadas.	48
Figure 13	Viga com duas camadas.	52
Figure 14	FRF para viga com duas camadas.	52
Figure 15	FRF para viga com duas camadas (para a faixa de frequências de 10k a 20k Hz).	53
Figure 16	Elemento de viga com uma camada de PZT.	55
Figure 17	Viga com dois PZTs acoplados.	61
Figure 18	Configuração de viga com dois PZTs acoplados.	61
Figure 19	FRF de uma viga com dois PZTs acoplados considerando a resposta no PZT 2 e a entrada no PZT 1.	61
Figure 20	FRF de uma viga com dois PZTs acoplados (para a faixa de frequências de 0 a 10k Hz).	62

Figure 21	FRF de uma viga com dois PZTs acoplados (para a faixa de frequências de 10 a 50k Hz).	63
Figure 22	Configuração de uma viga com dois PZTs e controle PID.	65
Figure 23	Configuração de uma viga com dois PZTs acoplados, sendo o PZT 1 o atuador e o PZT 2 o sensor de saída.	66
Figure 24	FRF da viga Engastada-Livre com e sem controle, para os ganhos ($K_p = 5000000$, $K_d = 10000$; $K_i = 0.005$).	67
Figure 25	FRF da viga Engastada-Livre com e sem controle, para os ganhos ($K_p = 500000$, $K_d = 1000$; $K_i = 0.05$).	67
Figure 26	FRF da viga Engastada-Livre com controle.	68
Figure 27	Forças e deslocamentos em um elemento de viga com 8 graus de liberdade.	70
Figure 28	Configuração de uma viga Engastada-Engastada com PZTs.	73
Figure 29	FRF relacionando w e N^p da viga Engastada-Engastada com e sem controle.	73
Figure 30	FRF relacionando θ_b e N^p da viga Engastada-Engastada com e sem controle.	74
Figure 31	FRF relacionando θ_p e N^p da viga Engastada-Engastada com e sem controle.	74
Figure 32	Configuração da viga multicamadas com 7 elementos para avaliação de danos estruturais.	76
Figure 33	FRF para a estrutura intacta e com dano de 1% usando o modelo de Euler-Bernoulli	77
Figure 34	FRF para a estrutura intacta e com dano de 5% usando o modelo de Euler-Bernoulli	78
Figure 35	FRF para a estrutura intacta e com dano de 10% usando o modelo de Euler-Bernoulli	79
Figure 36	FRF para a estrutura intacta e com dano de 20% usando o modelo de Euler-Bernoulli	80

Figure 37	FRF para a estrutura intacta e com dano de 50% usando o modelo de Euler-Bernoulli	81
Figure 38	FRF para a estrutura intacta e com dano de 80% usando o modelo de Euler-Bernoulli	82
Figure 39	FRF para a estrutura intacta e com dano de 1% usando o modelo de Timoshenko	83
Figure 40	FRF para a estrutura intacta e com dano de 5% usando o modelo de Timoshenko	83
Figure 41	FRF para a estrutura intacta e com dano de 10% usando o modelo de Timoshenko	84
Figure 42	FRF para a estrutura intacta e com dano de 20% usando o modelo de Timoshenko	84
Figure 43	FRF para a estrutura intacta e com dano de 50% usando o modelo de Timoshenko	85
Figure 44	FRF para a estrutura intacta e com dano de 80% usando o modelo de Timoshenko	85
Figure 45	Ilustração das normas H_2 e H_∞	87
Figure 46	FRF da estrutura sem amortecimento e diferentes severidades de dano.	89
Figure 47	FRF da estrutura com amortecimento 1 e diferentes severidades de dano.	89
Figure 48	FRF da estrutura com amortecimento 2 e diferentes severidades de dano.	90
Figure 49	FRF da estrutura com amortecimento 3 e diferentes severidades de dano.	90
Figure 50	FRF da estrutura com amortecimento 4 e diferentes severidades de dano.	91
Figure 51	FRF da estrutura com amortecimento 5 e diferentes severidades de dano.	92
Figure 52	Índice σ_∞ para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	93
Figure 53	Variação das frequências para as normas H_∞ de diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	94
Figure 54	Norma H_∞ para diferentes níveis de amortecimento.	94
Figure 55	Índice σ_2 para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	95
Figure 56	Norma H_2 para diferentes níveis de amortecimento.	96

Figure 57	Índice σ_2 obtidos com diferentes discretizações na frequência.	97
Figure 58	Índice σ_{ccdm} para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	98
Figure 59	Índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	99
Figure 60	FRF da estrutura com amortecimento 1 e diferentes severidades de dano.	100
Figure 61	FRF da estrutura com amortecimento 2 e diferentes severidades de dano.	101
Figure 62	FRF da estrutura com amortecimento 3 e diferentes severidades de dano.	102
Figure 63	FRF da estrutura com amortecimento 4 e diferentes severidades de dano.	102
Figure 64	FRF da estrutura com amortecimento 5 e diferentes severidades de dano.	103
Figure 65	Índice σ_∞ para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	103
Figure 66	Variação das frequências para as normas H_∞ de diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	104
Figure 67	Norma H_∞ para diferentes níveis de amortecimento.	104
Figure 68	Índice σ_2 para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	105
Figure 69	Norma H_2 para diferentes níveis de amortecimento.	105
Figure 70	Índice σ_{ccdm} para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	106
Figure 71	Índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.	106
Figure 72	FRF do sistema intacto com ruídos.	108
Figure 73	Índice σ_∞ para diferentes níveis de ruído (30 a 50 kHz).	109
Figure 74	Índice σ_2 para diferentes níveis de ruído (30 a 50 kHz).	109
Figure 75	Índice σ_{ccdm} para diferentes níveis de ruído (30 a 50 kHz).	110
Figure 76	Índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ para diferentes níveis de ruído (30 a 50 kHz).	110
Figure 77	Índice σ_∞ para diferentes níveis de ruído (50 a 100 kHz).	111
Figure 78	Índice σ_2 para diferentes níveis de ruído (50 a 100 kHz).	112
Figure 79	Índice σ_{ccdm} para diferentes níveis de ruído (50 a 100 kHz).	112

Figure 80	Índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ para diferentes níveis de ruído (50 a 100 kHz).	113
Figure 81	FRF do sistema intacto com ruídos (50 a 100 kHz).	113
Figure 82	Diagrama de blocos de um sistema contínuo.	130
Figure 83	Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.	131

LISTA DE ABREVIACÕES E SBOLOS

Letras Latinas

$\mathbb{L}$	Operador estrutural diferencial linear
$\mathbb{M}$	Operador inercial
M	Momento fletor
Q	Força cortante
$\mathbf{f}$	vetor de forças
w	Deslocamento transversal
W	Deslocamento transversal em frequência
$\mathbf{d}$	Vetor de deslocamentos
$\mathbf{H}_T$	Matriz de deslocamentos espectrais para uma viga de Timoshenko
$\mathbf{H}_{EB}$	Matriz de deslocamentos espectrais para uma viga de Euler-Bernoulli
$\mathbf{F}_{EB}$	Matriz de Forças espectrais para uma viga de Euler-Bernoulli
$\mathbf{F}_T$	Matriz de Forças espectrais para uma viga de Timoshenko
$\mathbf{N}_W$	Funções de forma para o deslocamento transversal
$\mathbf{N}_\Theta$	Funções de forma para rotação
$\mathbf{S}_{EB}$	Matriz do elemento espectral para uma viga de Euler-Bernoulli
$\mathbf{S}_T$	Matriz do elemento espectral para uma viga de Timoshenko
u	Deslocamento logitudinal
U	Deslocamento logitudinal em frequência
N	Força axial
$\mathbf{N}_B$	Funções de forma para uma barra
$\mathbf{H}_B$	Matriz de deslocamentos espectrais para uma barra
$\mathbf{F}_B$	Matriz do forças espectrais para uma barra
$\mathbf{S}_B$	Matriz do elemento espectral para uma barra
T	Energia Cinética
V	Energia Potencial
δW	Trabalho Virtual
V_c	Tensão elétrica aplicada no PZT
i	Unidade imaginária
E	Módulo de elasticidade
A	Área da seção transversal
G	Módulo de cisalhamento
I	Momento de inércia

K_p	Ganho proporcional
K_d	Ganho derivativo
K_i	Ganho integral
E_3	Campo elétrico
C_{11}^D	Rigidez elástica
h_{31}	constante piezelétrica
D_3	Deslocamento elétrico

Letras Gregas

ρ	densidade
κ	fator de correção de cisalhamento
θ, θ_b	rotação da viga
θ_p	rotação do PZT
σ_1	tensão mecânica
ε_1	deformação mecânica
β_{33}^S	constante dielétrica
η	coeficiente de amortecimento
γ_1	deformação por cisalhamento
τ_p	tensão de cisalhamento

Siglas

SEM	Spectral Element Method
FEM	Finite Element Method
FRF	Função de Resposta em Frequência
PZT	Lead Zirconate Titanate
LQR	Linear Quadratic Regulator
PID	Proporcional - Integral - Derivativo
SHM	Structural Health Monitoring
AVC	Active Vibration Control
MIMO	Multiple Input Multiple Output
SISO	Single Input Single Output
ERA	Eigensystem Realization Algorithm
LMI	Linear Matrix Inequalities

CONTEÚDO

1	Introdução	18
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO	20
2	Método dos Elementos Espectrais	21
2.1	FORMULAÇÃO BASEADA NA RELAÇÃO FORÇA-DESLOCAMENTO . . .	21
2.2	VIGAS EM FLEXÃO	24
2.2.1	Viga de Timoshenko	27
2.2.2	Viga de Euler-Bernoulli	33
2.3	BARRAS EM MOVIMENTO LONGITUDINAL	39
3	Estruturas Multicamadas	43
3.1	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI	43
3.1.1	Modelos Espectrais	47
3.1.2	Equação do Elemento Espectral	50
4	Estruturas Inteligentes	54
4.1	ELEMENTO ESPECTRAL COM PZT ACOPLADO	54
4.2	MODELAGEM ESPECTRAL POR EULER-BERNOULLI	56
4.3	MODELAGEM ESPECTRAL POR TIMOSHENKO	57
5	Elemento Espectral com Controle Ativo	64
5.1	CONTROLADOR PID ESPECTRAL	64
5.2	CONTROLADORES MODERNOS	69
5.3	CONTROLE COM ELEMENTO ESPECTRAL	69
6	Monitoramento da Integridade Estrutural	76

6.1	DETECÇÃO DE DANOS USANDO ÍNDICES	86
6.1.1	Avaliação da Detectabilidade baseada em Índices: Faixa de Frequência de 30-50 kHz	88
6.1.2	Avaliação da Detectabilidade baseada em Índices: Faixa de Frequência de 50-100 kHz	99
6.2	FAIXA DE VALORES DE ÍNDICES	107
7	Considerações Finais	115
7.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	118
	REFERÊNCIAS	119
	APÊNDICE A - Matrizes utilizadas no Método dos Elementos Finitos	123
A.1	MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS	123
	Matrizes de rigidez e massa para uma barra	123
	Viga de Euler-Bernoulli	123
	Viga de Timoshenko	124
	Matrizes de rigidez, massa e amortecimento para uma viga de duas camadas	125
	APÊNDICE B - Cálculo do número de onda através das matrizes de estado	127
B.1	MATRIZES DE ESTADOS	127
	Elementos da matriz A	127
	Elementos da matriz B	127
	Elementos da matriz C	128
	Elementos da matriz P	128
	Elementos da matriz Q	129
B.1.1	Matriz Espectral	129
	APÊNDICE C - Ganho do Regulador Linear Quadrático	130
C.1	REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO	130

1 INTRODUÇÃO

O comportamento e as características dinâmicas de uma estrutura são de grande importância na engenharia, de maneira que, é necessário predizê-las de maneira eficiente e econômica. O Método dos Elementos Finitos (FEM, do inglês, *Finite Element Method*) é um dos métodos computacionais mais utilizados em muitas áreas da engenharia e da ciência. Embora este método possa ser usado em diversos tipos de geometria, condições de contorno e materiais, ele também apresenta limitações para obter soluções precisas, especialmente para problemas em alta faixa de frequência.

O Método dos Elementos Espectrais (SEM, do inglês, *Spectral Element Method*) é uma técnica relativamente nova que, de algum modo, combina a flexibilidade geométrica, as características comuns e as vantagens competitivas dos métodos de ordem mais baixa (FEM) com a exatidão e a convergência rápida dos métodos de ordem mais alta (métodos espectrais). O SEM é semelhante ao método dos Elementos Finitos em alguns aspectos, mas a grande diferença é que enquanto no FEM as matrizes elementares (matrizes de massa e rigidez) são escritas no domínio do tempo, no SEM a matriz espectral é escrita no domínio de frequência. Isso permite que a inércia da massa distribuída seja representada de uma forma exata. Consequentemente, esta formulação espectral permite a descrição exata das soluções dinâmicas. As respostas dinâmicas de uma estrutura são então obtidas no domínio de frequência. As respostas no domínio do tempo podem ser obtidas através da transformada inversa de Fourier.

Neste contexto, diversas aplicações têm envolvido modelagem espectral. Destacam-se entre tópicos de grande interesse da engenharia as aplicações de controle ativo de vibrações e o desenvolvimento de sistemas de monitoramento da integridade estrutural. Ambos temas têm sido amplamente explorados por diversos pesquisadores, porém, de forma independente. No entanto, em algumas aplicações os tópicos requerem equipamentos semelhantes, ou seja, sistema de aquisição de dados, sensores e atuadores - e, portanto, uma discussão integrada destas demandas pode resultar em redução de investimentos e simplificação de processos de engenharia.

O controle de vibrações em estruturas flexíveis é de grande interesse para a engenharia, pois vibrações indesejadas podem surgir nas mais diversas situações como em máquinas rotativas, ônibus, trens e aeronaves, pontes, edifícios, entre outros. O excesso de vibrações pode acarretar

inúmeros problemas como desconforto em automóveis, danos em componentes eletrônicos, ruído sonoro e falhas em equipamentos. A exposição humana à vibração pode resultar em dores, desconforto e até eficiência reduzida. As vibrações indesejadas podem ser eliminadas através de técnicas de controle passivo como o balanceamento em máquinas rotativas, a introdução de amortecimento através de materiais viscoelásticos e o isolamento de vibrações inserindo um novo membro que isola o elemento vibratório da fonte de vibração. O uso destas técnicas tem como desvantagem adicionar massa ao sistema, o que as torna muitas vezes, inconvenientes. Técnicas de controle de vibrações modernas permitem reduzir as vibrações da estrutura sem adicionar massa ao sistema, tais técnicas são conhecidas como controle ativo de vibrações (AVC, do inglês, *Active Vibration Control*). Muitas destas técnicas fazem o uso de materiais que, quando estão sujeitos à variações de tensão, temperatura, tensão elétrica, e outras, apresentam mudanças em suas propriedades. Tais materiais são chamados de materiais inteligentes. Projeto de controladores com materiais inteligentes incluem o magnetoreológico (MESQUITA NETO, 2008) e materiais piezelétricos (PZT, do inglês *Lead Zitanate Titanate*) (GONÇALVES, 2003; SILVA, 2005; GATTI; BRENNAN ; GARDONIO, 2007; BUENO, 2007).

Também com significativa demanda na engenharia, o monitoramento da integridade estrutural (SHM, do inglês, *Structural Health Monitoring*) tornou-se nas últimas décadas uma tópico de grande importância para diversos sistemas mecânicos. O monitoramento constante de estruturas mecânicas, civis e aeroespaciais, possibilita segurança e reduz custos de manutenção. Nos EUA mais de \$ 200 bilhões são gastos anualmente na manutenção de fábricas, equipamentos e instalações (GIURGIUTIU, 2008).

O monitoramento da integridade estrutural é feito através de inúmeras técnicas, como Impedância eletromecânica (BAPTISTA, 2010; GONZALEZ, 2012; PEAIRS, 2006), inteligência artificial (FRANÇA, 2014), series temporais (SILVA, 2008; SHIKI, 2016), algoritmos genéticos (TEBALDI, 2004), análises de propagação de ondas (FRANCO, 2009), entre outras. De modo geral, em diversas abordagens, o monitoramento é feito comparando sinais da estrutura saudável (*baseline*) com dados que podem apresentar danos. Os materiais piezelétricos desempenham um importante papel em SHM, pois podem ser usados como sensores e atuadores, e devido a sua natureza, podem ser usados em avaliações não-destrutivas.

Diante do exposto, o presente trabalho apresenta um estudo do método dos Elementos Espectrais para aplicações de controle de vibrações e monitoramento da integridade estrutural. A seguir apresenta-se os objetivos gerais e específicos do trabalho. O capítulo 2 apresenta a formulação básica para vigas e barras e o capítulo 3 a modelagem para vigas com diferentes materiais, denominadas multicamadas. Ainda, o capítulo 4 apresenta a modelagem do acoplamento de transdutores piezelétricos à vigas. Os capítulos 5 e 6 apresentam, respectivamente, as aplicações de controle de vibrações e monitoramento da integridade estrutural. O capítulo 7 apresenta as considerações finais e o anexo A apresenta informações gerais sobre o método

dos Elementos Finitos usado para comparação de resultados. Finalmente, o anexo B apresenta detalhes complementares da formulação da viga de Timoshenko de duas camadas e anexo C a formulação básica do controlador LQR utilizado no trabalho.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo principal deste trabalho é discutir o método dos Elementos Espectrais para o projeto simultâneo de sistemas de controle ativo de vibrações e monitoramento da integridade estrutural.

Destacam-se entre os objetivos secundários os seguintes tópicos:

- desenvolver uma formulação para inclusão de ganhos de controle por realimentação de estados nas formulações por Elementos Espectrais;
- discutir o comportamento de índices de detecção de danos, amplamente utilizados na literatura de SHM experimental, em função da severidade de um dano em uma estrutura do tipo viga;
- avaliar o comportamento de índices de detecção de danos para diferentes quantidades de amortecimento estrutural visando auxiliar o projeto de sistemas de SHM.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS

A formulação de um modelo para uma estrutura utilizando a metodologia de Elementos Espectrais é bastante similar àquela que é feita utilizando o método de Elementos Finitos. A grande diferença é que, de modo geral, a formulação com elementos espectrais começa transformando a equação diferencial parcial, que rege o movimento, do tempo para o domínio da frequência usando a Transformada Discreta de Fourier. Nos problemas de uma dimensão, como resultado da Transformada Discreta de Fourier, a variável temporal desaparece e a frequência se transforma em uma variável independente, transformando a equação diferencial parcial original no domínio do tempo em uma equação diferencial ordinária no domínio da frequência, cuja solução é obtida de maneira exata. Neste capítulo será apresentada a formulação para elemento espectral baseada na relação força-deslocamento. Formulações baseadas no método variacional ou no método de vetor de estado também são muito utilizadas, mas não serão apresentadas neste trabalho. Estas formulações podem ser encontradas em (LEE, 2009).

2.1 FORMULAÇÃO BASEADA NA RELAÇÃO FORÇA-DESLOCAMENTO

A formulação de um modelo de elemento espectral para uma estrutura é feita através da relação direta entre as forças e deslocamentos nodais. De acordo com (LEE, 2009), a equação que governa o movimento de uma estrutura sujeita a vibrações forçadas pode ser representada simbolicamente por

$$\mathbb{L}u(x,t) + \mathbb{M}\ddot{u}(x,t) = p(x,t) \quad (1)$$

sendo $\mathbb{L}$ o operador estrutural diferencial linear dependente tanto do tempo t quanto do espaço x , e $\mathbb{M}$ o operador inercial. A derivada com relação ao tempo t é denotada por ponto (.). Os vetores de deslocamento e forças externas são respectivamente, $u(x,t)$ e $p(x,t)$.

Assumindo que a representação espectral das forças externas é dada por

$$p(x,t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n(x, \omega_n) \exp^{i\omega_n t} \quad (2)$$

sendo $P_n(x, \omega_n)$ os componentes espectrais (ou os coeficientes de Fourier) do vetor de forças externas $p(x, t)$, ω a variável frequencial e $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. De maneira similar, a solução da equação (1) pode ser dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x, \omega_n) \exp^{i\omega_n t} \quad (3)$$

sendo $U_n(x, \omega_n)$ os componentes espectrais do vetor de deslocamento $u(x, t)$.

Substituindo as equações (2) e (3) na equação (1) e assumindo que os componentes espectrais satisfazem a equação (1) em cada componente de frequência, obtém-se

$$\mathbb{L}U_n(x, \omega_n) - \omega_n^2 \mathbb{M}U_n(x, \omega_n) = P_n(x, \omega_n) \quad (4)$$

com $\mathbb{L}$ sendo o operador estrutural linear diferencial no domínio espacial.

As funções de forma no domínio da frequência, que serão usadas para obter a matriz de elemento espectral, podem ser obtidas da equação homogênea

$$\mathbb{L}U_n(x, \omega_n) - \omega_n^2 \mathbb{M}U_n(x, \omega_n) = 0 \quad (5)$$

Por simplicidade, o subscrito n pode ser omitido, e a equação (5) se escreve como

$$\mathbb{L}U(x, \omega) - \omega^2 \mathbb{M}U(x, \omega) = 0 \quad (6)$$

Uma solução geral para a equação (6) é dada pela solução harmônica

$$U(x) = \mathbf{c} \exp^{-ikx} \quad (7)$$

sendo $\mathbf{c}$ um vetor constante e k o número de onda. Substituindo a equação (7) na equação (6) se obtém o seguinte problema de autovalor

$$\mathbf{A}(k, \omega) \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Para que a equação (8) tenha solução não trivial, o determinante da matriz deve ser zero, ou seja

$$\det |\mathbf{A}(k, \omega)| = 0 \quad (9)$$

Este determinante fornece a equação característica cujas raízes são os números de onda

$$k_p + \alpha_{(p-1)}(\omega)k^{(p-1)} + \alpha_{(p-2)}(\omega)k^{(p-2)} + \dots + \alpha_1(\omega) + \alpha_0(\omega) = 0 \quad (10)$$

A equação (10) é chamada de relação de dispersão, com $k_1, k_2, \dots, k_p$ suas raízes distintas,

dependentes da frequência ω . Os autovetores $\mathbf{c}_i$ podem ser obtidos da equação (8) como

$$\mathbf{c} = a_i \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_i \end{Bmatrix} = a_i \phi_i \quad i = 1, \dots, p \quad (11)$$

O autovetor $\mathbf{c}_i$ é normalizado de maneira que uma componente do vetor normalizado ϕ_i torna-se unitária e as outras componentes são alocadas no vetor β_i . As constantes a_i são determinadas de maneira que satisfaçam as condições de contorno associadas ao problema. Assim que as soluções que satisfazem o problema de autovalor da equação (8) são encontradas, isto é, k_i e $\mathbf{c}_i$, a solução geral da equação (6) pode ser escrita como

$$U(x) = \sum_{i=1}^p \phi_i \exp^{-ik_i(\omega)x} a_i \equiv \mathbf{E}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (12)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, \omega) &= [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_p] \Lambda(x, \omega) \\ \Lambda(x, \omega) &= \text{diag}[\exp^{-ik_i(\omega)x}] \\ \mathbf{a} &= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p]^T \end{aligned} \quad (13)$$

Para um elemento finito de comprimento L , a equação (12) deve satisfazer as condições de contorno geométricas e naturais no nós $x = 0$ e $x = L$, os deslocamentos espectrais nodais e ângulos (ou, ou graus de liberdades nodais) e as forças espectrais nodais (ou, forças nodais).

Os deslocamentos são geralmente chamados de variáveis primárias e suas especificações de contorno constituem as condições de contorno geométricas. As variáveis primárias podem ser relacionadas com os deslocamentos na forma

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{L}_{GB} U(x) \quad (14)$$

com $\mathbf{L}_{GB}$ o operador diferencial linear para as condições de contorno geométricas.

Substituindo a equação (12) na equação (14) e então considerando os graus de liberdade nodais $\mathbf{d}$ especificados nos dois nós do elemento, obtém-se (LEE, 2009)

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} D(0) \\ D(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{GB} \mathbf{E}(x, \omega)|_{x=0} \\ \mathbf{L}_{GB} \mathbf{E}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \quad (15)$$

Isolando o vetor constante $\mathbf{a}$ da equação (12) e substituindo na equação (15), a solução geral pode ser reescrita em termos do vetor de graus de liberdade nodais como

$$U(x) = \mathbf{N}(x, \omega) \mathbf{d} \quad (16)$$

sendo $\mathbf{N}(x, \omega)$ funções de forma definidas por

$$\mathbf{N}(x, \omega) = \mathbf{E}(x, \omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (17)$$

As forças inerciais e os momentos são geralmente chamados de variáveis secundárias e suas especificações de contorno constituem as condições de contorno natural. A teoria de resistência dos materiais nos fornece a relação entre as variáveis secundárias e os deslocamentos na forma de

$$F(x) = \mathbf{L}_{NB} U(x) \quad (18)$$

com $\mathbf{L}_{NB}$ o operador diferencial linear para as condições de contorno naturais.

Substituindo a equação (16) na equação (18), e então considerando as forças nodais $\mathbf{f}_c$, que são as cargas concentradas nos dois nós do elemento, obtém-se a equação de elemento espectral

$$\mathbf{f}_c \equiv \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}(0) \\ +\mathbf{F}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{NB} \mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{NB} \mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{d} \equiv \mathbf{S}(\omega) \mathbf{d} \quad (19)$$

com

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{NB} \mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{NB} \mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (20)$$

e

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{NB} \mathbf{E}(x, \omega)|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{NB} \mathbf{E}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \quad (21)$$

A matriz $\mathbf{S}(\omega)$ é a matriz de rigidez dinâmica exata, no domínio da frequência, mais conhecida na literatura como matriz do elemento espectral. Na equação (19), os sinais mais (+) e menos (-) refletem a diferença entre as convenções de sinais usadas na teoria de resistência de materiais e aquelas usualmente adotadas nos métodos de Elementos Finitos ou de Elementos Espectrais. Na seção seguinte será apresentado o modelo do método de elementos espectrais para a teoria de vigas através da formulação força-deslocamento.

2.2 VIGAS EM FLEXÃO

São consideradas vigas estruturas cuja dimensão da seção transversal é pequena comparada com seu comprimento. Na prática, a regra tem a seguinte relação

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{largura}} \geq 10$$

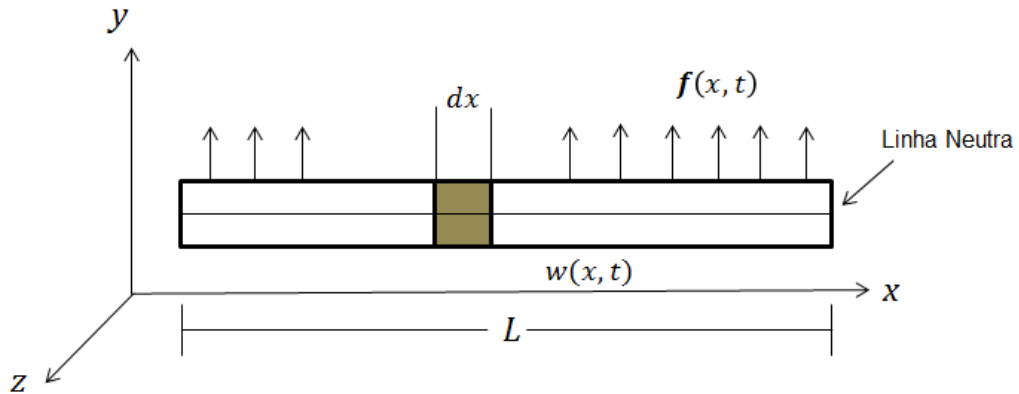
O modelo matemático para uma viga pode ser obtido examinando a seção de uma viga de seção transversal sujeita à uma força externa distribuída $f(x, t)$, conforme ilustrado na figura 1. Os esforços para uma seção elementar são apresentados em destaque na figura 2. Nesta figura, w é o deslocamento transversal, θ rotação, Q força cortante, M momento fletor e dx indica um diferencial de seção de viga.

Aplicando a 2ª lei de Newton no elemento da figura 2, na direção y tem-se a relação a seguir.

$$\mathbf{F}_y = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (22)$$

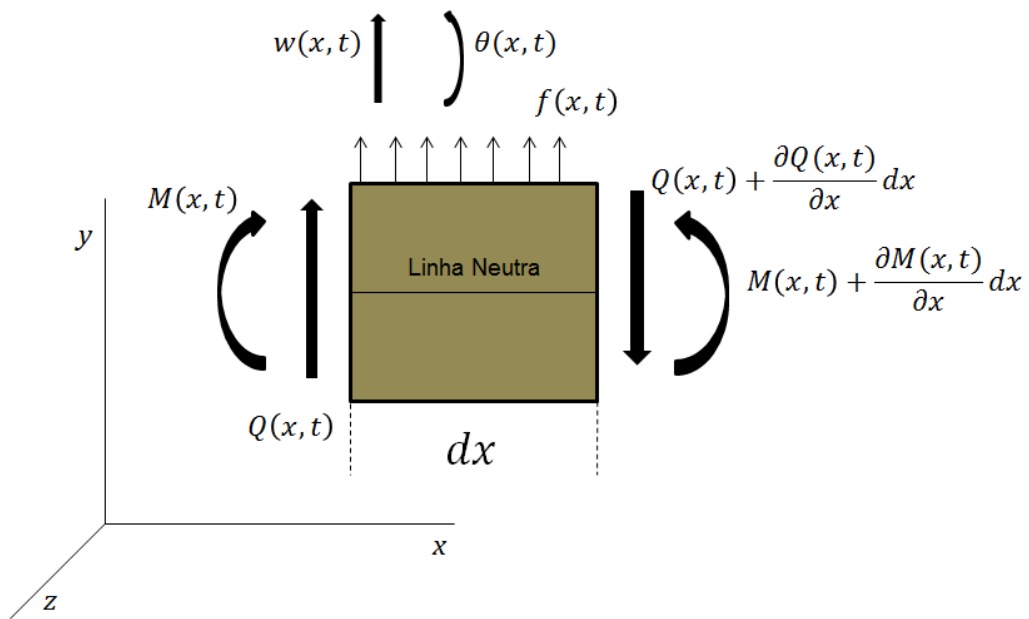
$$\rho A dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = Q(x, t) - \left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] + f(x, t) dx \quad (23)$$

Figure 1 - Ilustração de um elemento de viga.



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 2 - Seção de um elemento de viga.



Fonte: dados do próprio autor.

Simplificando a equação (23) é possível reescrever

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + f(x, t) \quad (24)$$

com ρ a densidade do material e A a área da seção transversal.

Os momentos em relação ao centro de gravidade do elemento da figura 2 são dados por

$$M_z = \rho I dx \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (25)$$

$$\rho I dx \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = \left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] - M(x,t) + \left[Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx \right] dx + f(x,t) \frac{dx^2}{2} \quad (26)$$

simplificando a equação (26), resulta em

$$\rho I \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + Q(x,t) \quad (27)$$

com I o momento da área da seção transversal e dx^2 assumido como zero uma vez que dx é suficientemente pequeno. Mais detalhes dessa formulação podem ser encontrados em (INMAN, 2001) ou (RAO, 2008).

Usando a teoria de resistência dos materiais, as relações entre Q , M , w , e θ são

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad Q = \kappa AG \left(\theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (28)$$

com E sendo o módulo de Young (ou de elasticidade), G o módulo de cisalhamento e κ o fator de correção de cisalhamento. O módulo de cisalhamento G e o módulo de Young estão relacionados pela expressão $E = 2(1 + \nu)G$, sendo ν o coeficiente de Poisson (HIBBELER, 2010), (BEER; JHONSTON JUNIOR., 1989). As variáveis independentes x e t foram omitidas para simplificar a notação.

2.2.1 Viga de Timoshenko

Utilizando as equações (24), (27) e (28) a equação de movimento para uma viga de Timoshenko é dada por

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} &= \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) + f(x,t) \\ \rho I \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} &= EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \kappa AG \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) \end{aligned} \quad (29)$$

A equação para o movimento livre é

$$\begin{aligned} \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) - \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} + \kappa GA \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Assumindo uma solução da equação (30) na forma espectral

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x, \omega_n) \exp^{i\omega_n t} \\ \theta(x, t) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Theta_n(x, \omega_n) \exp^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (31)$$

Substituindo a equação (31) na equação (30), obtém-se

$$\begin{aligned} \kappa A G \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \rho A \omega^2 W &= 0 \\ E I \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \kappa G A \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \Theta \right) + \rho I \omega^2 \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

As soluções gerais para a equação (32) são

$$\begin{aligned} W(x) &= \mathbf{a} \exp^{ik(\omega)x} \\ \Theta(x) &= \beta \mathbf{a} \exp^{ik(\omega)x} \end{aligned} \quad (33)$$

Substituindo a equação (33) na equação (32) obtém-se o seguinte problema de autovalor

$$\begin{bmatrix} \kappa G A k^2 - \rho A \omega^2 & -ik\kappa G A \\ ik\kappa G A & -EI k^2 - \kappa G A + \rho I \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

A equação (34) fornece a seguinte relação de dispersão a partir do polinômio característico da matriz

$$k^4 - \eta k_F^4 k^2 - k_F^4 (1 - \eta_1 k_G^4) = 0 \quad (35)$$

com

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad k_G = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{\kappa G A} \right)^{1/4} \quad (36)$$

e

$$\eta = \eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 = \frac{\rho I}{\rho A}, \quad \eta_2 = \frac{EI}{\kappa G A} \quad (37)$$

Resolvendo-se a equação (35), obtém-se as quatro raízes, que representam os números de

ondas

$$\begin{aligned} k_1 = -k_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} k_F \sqrt{\eta k_F^2 + \sqrt{\eta^2 k_F^4 + 4(1 - \eta_1 k_G^4)}} = k_t \\ k_3 = -k_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} k_F \sqrt{\eta k_F^2 - \sqrt{\eta^2 k_F^4 + 4(1 - \eta_1 k_G^4)}} = k_e \end{aligned} \quad (38)$$

sendo k_t e k_e número de onda.

Da primeira linha da equação (34), pode se obter a seguinte relação, que indica uma razão entre as amplitudes Θ e W ,

$$\beta_p(\omega) = \frac{1}{ik_p} (k_p^2 - k_G^4) = -ir_p(\omega) \quad p = 1, 2, 3, 4 \quad (39)$$

com

$$r_p(\omega) = \frac{1}{k_p} (k_p^2 - k_G^4) \quad (40)$$

Usando os quatro números de onda obtidos pela equação (35), a solução geral da equação (33) pode ser escrita como

$$W(x, \omega) = a_1 \exp^{-ik_t x} + a_2 \exp^{ik_t x} + a_3 \exp^{-ik_e x} + a_4 \exp^{ik_e x} = \mathbf{e}_W(x, \omega) \mathbf{a} \quad (41)$$

$$\Theta(x, \omega) = \beta_1 a_1 \exp^{-ik_t x} + \beta_2 a_2 \exp^{ik_t x} + \beta_3 a_3 \exp^{-ik_e x} + \beta_4 a_4 \exp^{ik_e x} = \mathbf{e}_\Theta(x, \omega) \mathbf{a}$$

com

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \right\}^T \quad (42)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_W &= \begin{bmatrix} \exp^{-ik_t x} & \exp^{ik_t x} & \exp^{-ik_e x} & \exp^{ik_e x} \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_\Theta &= \mathbf{e}_W \mathbf{B}(\omega) \end{aligned} \quad (43)$$

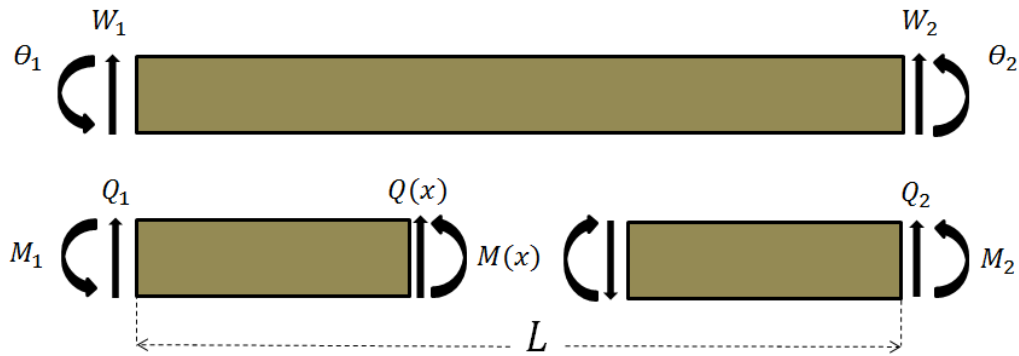
$$\mathbf{B}(\omega) = \text{diag}[\beta_p(\omega)]$$

Os deslocamentos nodais espectrais e as rotações nodais espectrais de uma viga de Timoshenko de comprimento L apresentado a seguir, (Fig. 3), podem ser alocados em um vetor de

deslocamento $\mathbf{d}$ como

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Theta_1 \\ W_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W(0) \\ \Theta(0) \\ W(L) \\ \Theta(L) \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Figure 3 - Forças e deslocamentos em um elemento de viga de Timoshenko.



Fonte: Adaptado de (LEE, 2009).

Substituindo as equações (41) no lado direito da equação (44), resulta em

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_W(0, \omega) \\ \mathbf{e}_\Theta(0, \omega) \\ \mathbf{e}_W(L, \omega) \\ \mathbf{e}_\Theta(L, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}_T(\omega) \mathbf{a} \quad (45)$$

com

$$\mathbf{H}_T(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ir_t & ir_t & -ir_e & ir_e \\ e_t & e_t^{-1} & e_e & e_e^{-1} \\ -ir_t e_t & -ir_t e_t^{-1} & -ir_e e_e & -ir_e e_e^{-1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

sendo e_t , e_e , r_t , e r_e definidos como

$$\begin{aligned} e_t &= \exp^{-ik_t L} & e_e &= \exp^{-ik_e L} \\ r_t &= \frac{1}{k_t}(k_t^2 - k_G^4) & r_e &= \frac{1}{k_e}(k_e^2 - k_G^4) \end{aligned} \quad (47)$$

Usando a equação (45), o vetor constante $\mathbf{a}$ pode ser substituído da equação (41), e a solução geral pode ser expressa como

$$\begin{aligned} W(x) &= \mathbf{N}_W(x, \omega) \mathbf{d} \\ \Theta(x) &= \mathbf{N}_\Theta(x, \omega) \mathbf{d} \end{aligned} \quad (48)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_W(x, \omega) &= \mathbf{e}_W(x, \omega) \mathbf{H}_T^{-1}(\omega) \\ \mathbf{N}_\Theta(x, \omega) &= \mathbf{e}_\Theta(x, \omega) \mathbf{H}_T^{-1}(\omega) = \mathbf{e}_W(x, \omega) \mathbf{B}(\omega) \mathbf{H}_T^{-1}(\omega) \end{aligned} \quad (49)$$

Da equação (28) tem-se

$$M = EI \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad Q = -\kappa AG \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \Theta \right) \quad (50)$$

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} \quad (51)$$

Aplicando a equação (48) na equação (50), e os resultados no lado direito da equação (51), pode se obter a seguinte relação

$$\mathbf{S}_T(\omega) \mathbf{d} = \mathbf{f}_c(\omega) \quad (52)$$

com $\mathbf{S}_T(\omega)$ a matriz de elemento espectral para uma viga de Timoshenko dada por

$$\mathbf{S}_T(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \mathbf{H}_T^{-1}(\omega) \quad (53)$$

com $\mathbf{F}(\omega)$ a matriz contendo as forças espectrais em todos os nós, definida pela equação (54) e

a matriz $\mathbf{H}(\omega)$ obtida pela equação (46).

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \mathbf{F}_T(\omega)\mathbf{a} \quad (54)$$

e

$$\mathbf{F}_T(\omega) = \begin{bmatrix} F_{T11} & F_{T12} & F_{T13} & F_{T14} \\ F_{T12} & F_{T22} & F_{T23} & F_{T24} \\ F_{T13} & F_{T23} & F_{T33} & F_{T34} \\ F_{T14} & F_{T24} & F_{T34} & F_{T44} \end{bmatrix} \quad (55)$$

com

$$\begin{aligned} F_{T11} &= -\kappa GA(-ik_t - \beta_1) & F_{T12} &= -\kappa GA(-ik_t - \beta_2) \\ F_{T13} &= -\kappa GA(-ik_e - \beta_3) & F_{T14} &= -\kappa GA(ik_e - \beta_4) \\ F_{T21} &= -EI(-ik_t \beta_1) & F_{T22} &= -EI(ik_t \beta_2) \\ F_{T23} &= -EI(-ik_e \beta_3) & F_{T24} &= -EI(ik_e \beta_4) \\ F_{T31} &= -F_{T11} \exp^{-ik_t L} & F_{T32} &= -F_{T12} \exp^{-ik_t L} \\ F_{T33} &= -F_{T13} \exp^{-ik_e L} & F_{T34} &= -F_{T14} \exp^{-ik_e L} \\ F_{T41} &= -F_{T21} \exp^{-ik_t L} & F_{T42} &= -F_{T22} \exp^{-ik_t L} \\ F_{T43} &= -F_{T23} \exp^{-ik_e L} & F_{T44} &= -F_{T24} \exp^{-ik_e L} \end{aligned} \quad (56)$$

Pode-se destacar que a matriz do elemento espectral $\mathbf{S}_T(\omega)$ é equivalente a matriz de rigidez dinâmica calculada através das matrizes de massa $\mathbf{M}$ e rigidez $\mathbf{K}$ pelo método dos Elementos Finitos, ou seja,

$$\mathbf{S}_T(\omega) \cong \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (57)$$

no entanto, a abordagem FEM pode implicar em restrição de análise a determinada faixa frequência visto há necessidade de refinamento na discretização da malha para problemas de alta frequência.

2.2.2 Viga de Euler-Bernoulli

A equação de movimento para uma viga de Euler-Bernoulli é obtida desprezando a deformação por cisalhamento $Q/(\kappa AG)$, e a inércia rotacional $\rho I \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}$. Com isto, a força cortante Q e a rotação θ são obtidas pela derivação espacial do momento fletor M e do deslocamento w , respectivamente. Assim

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (58)$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (59)$$

Utilizando as equações (24) e (27), a equação de movimento para uma viga de Euler-Bernoulli é (THOMSON; DAHLEH, 1998)

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + f(x,t) \quad (60)$$

A equação para o movimento livre é representada por

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (61)$$

Assumindo a solução da equação (31) e substituindo na equação (61), resulta na seguinte equação diferencial

$$EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} - \omega^2 \rho A W(x, \omega) = 0 \quad (62)$$

Substituindo a solução geral na forma espectral, equação (33) na equação anterior, resulta na seguinte relação de dispersão

$$k^4 - k_F^4 = 0 \quad (63)$$

sendo k_F o número de onda definido por

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad (64)$$

As quatro raízes fornecidas pela equação (63) são

$$k_1 = -k_2 = k_F \quad k_3 = -k_4 = ik_F \quad (65)$$

Para uma viga finita de comprimento L , a solução geral é obtida de forma semelhante a da equação (41)

$$W(x, \omega) = a_1 \exp^{-ik_l x} + a_2 \exp^{ik_l x} + a_3 \exp^{-ik_e x} + a_4 \exp^{ik_e x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (66)$$

com

$$\mathbf{e}(x, \omega) = \begin{bmatrix} \exp^{-ik_F x} & \exp^{-k_F x} & \exp^{ik_F x} & \exp^{k_F x} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\mathbf{a} = \left\{ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \right\}^T$$

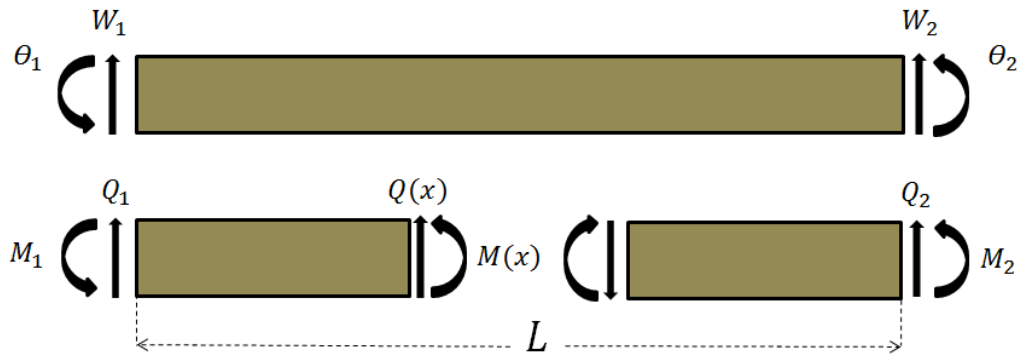
Os deslocamentos nodais espectrais e as rotações nodais espectrais de uma viga de Euler-Bernoulli de comprimento L podem ser alocados em um vetor de deslocamento $\mathbf{d}$ mostrado na equação (68). As forças e deslocamentos neste elemento são mostradas na figura (4), onde os subíndices 1 e 2 indicam o início e o fim do elemento, respectivamente.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(0, \omega) \\ \mathbf{e}'(0, \omega) \\ \mathbf{e}(L, \omega) \\ \mathbf{e}'(L, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}_{EB}(\omega) \mathbf{a} \quad (68)$$

com

$$\mathbf{H}_{EB}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_F & ik_F & ik_F & k_F \\ \exp^{-ik_F L} & \exp^{-k_F L} & \exp^{ik_F L} & \exp^{ik_F L} \\ -ik_F \exp^{-ik_F L} & -k_F \exp^{-k_F L} & ik_F \exp^{ik_F L} & k_F \exp^{k_F L} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Figure 4 - Forças e deslocamentos em um elemento de viga de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de (LEE, 2009).

Através da equação (68) o vetor constante $\mathbf{a}$ pode ser eliminado da equação (66) e a solução

geral pode ser expressa como

$$W(x) = \mathbf{N}_B(x, \omega) \mathbf{d} \quad (70)$$

sendo $\mathbf{N}_B(x, \omega)$ definido de forma similar a equação (49), assim

$$\mathbf{N}_B(x, \omega) = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}_{EB}^{-1}(\omega) \quad (71)$$

As forças nodais espectrais (força cortante e momento fletor) definidas para um elemento de viga de Euler-Bernoulli, podem ser relacionadas com as forças e momentos correspondentes definidas por

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} \quad (72)$$

Substituindo a equação (70) na equação (58) e na primeira parte da equação (50), e os resultados no lado direito da equação (72), permitem escrever

$$\mathbf{S}_{EB}(\omega) \mathbf{d}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (73)$$

com $\mathbf{S}_{EB}(\omega)$ a matriz de elemento espectral para uma viga de Euler-Bernoulli dada por

$$\mathbf{S}_{EB}(\omega) = \mathbf{F}_{EB}(\omega) \mathbf{H}_{EB}^{-1}(\omega) \quad (74)$$

sendo

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{F}_{EB}(\omega) \mathbf{a} \quad (75)$$

com

$$\mathbf{F}_{EB}(\omega) = -EI \begin{bmatrix} -ik_1^3 & -ik_2^3 & -ik_3^3 & -ik_4^3 \\ -k_1^2 & -k_2^2 & -k_3^2 & -k_4^2 \\ -ik_1^3 \exp^{-ik_1 L} & ik_2^3 \exp^{-ik_2 L} & ik_3^3 \exp^{-ik_3 L} & ik_4^3 \exp^{-ik_4 L} \\ k_1^2 \exp^{-ik_1 L} & k_2^2 \exp^{-ik_2 L} & k_3^2 \exp^{-ik_3 L} & k_4^2 \exp^{-ik_4 L} \end{bmatrix} \quad (76)$$

com $k_j, j = 1, 2, 3, 4$ definidos na equação (65).

A metodologia desenvolvida acima foi aplicada em uma estrutura tipo viga. Os testes foram realizados nesta estrutura por ser simples e conhecida as propriedades dinâmicas exatas. As propriedades físicas e geométricas da viga apresentadas na Tabela 4 foram definidas a partir de

um exemplar disponível em laboratório.

Table 4 - Propriedades físicas e geométricas da viga de alumínio.

Parâmetros da Viga	Valor
Módulo de Young (N/m^2)	71×10^9 ..
Módulo de Cisalhamento (N/m^2)	$25,5 \times 10^9$
Fator de Cisalhamento	$5/6$
Coefficiente de Poisson	0,3
Densidade (kg/m^3)	2710
Comprimento (m)	0,395
Largura (m)	0,025
Espessura (m)	0,005

Na figura 5 observa-se a função de resposta em frequência para o modelo de viga de Euler-Bernoulli apresentado na seção anterior. A resposta em frequência via FEM também é calculada para esta estrutura. As matrizes de massa e rigidez deste modelo são deduzidas em (LALANNE; BERTHIER, 1983) e são apresentadas no Apêndice A. Na modelagem FEM foram utilizados quarenta elementos para se obter resposta equivalente, com critério visual de comparação. Para facilitar a comparação destes resultados, não foi considerado amortecimento estrutural neste elemento.

Figure 5 - Função de Resposta em Frequência para uma viga de Euler-Bernoulli.

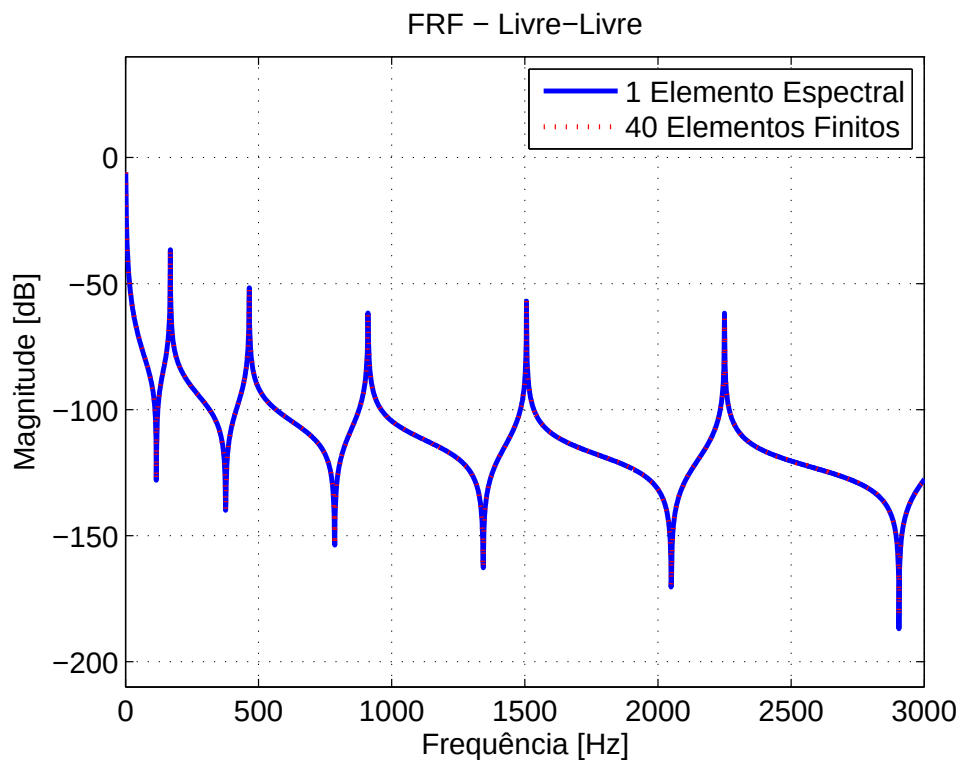


Figure 6 - Função de Resposta em Frequência para uma viga de Timoshenko.

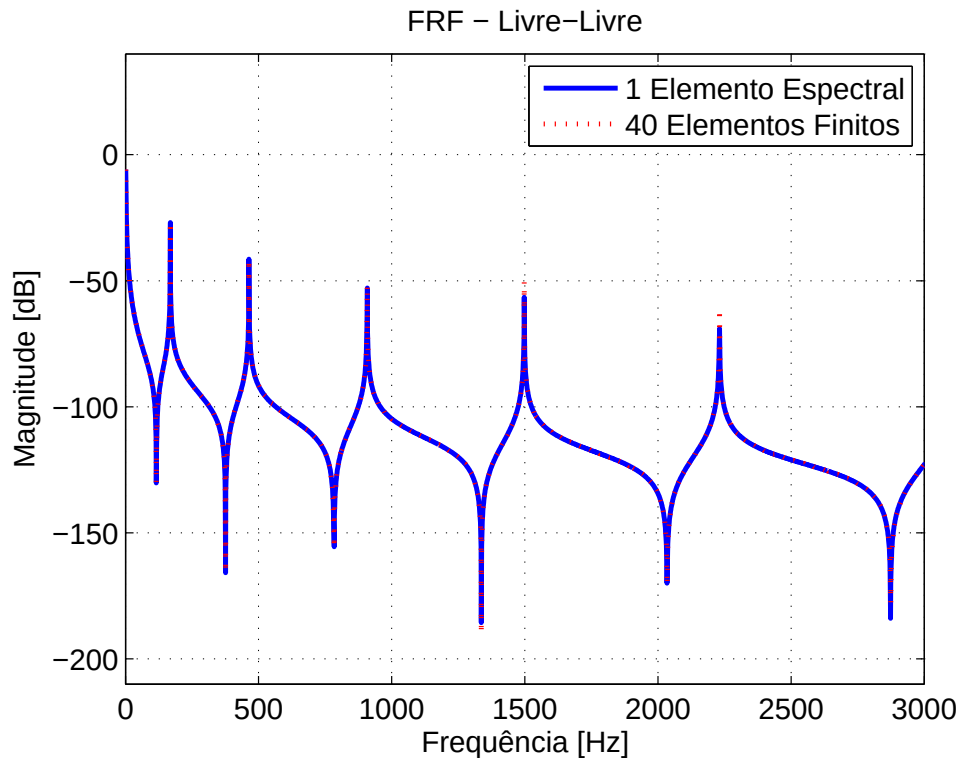


Figure 7 - Função de Resposta em Frequência (1ª faixa de freq.).

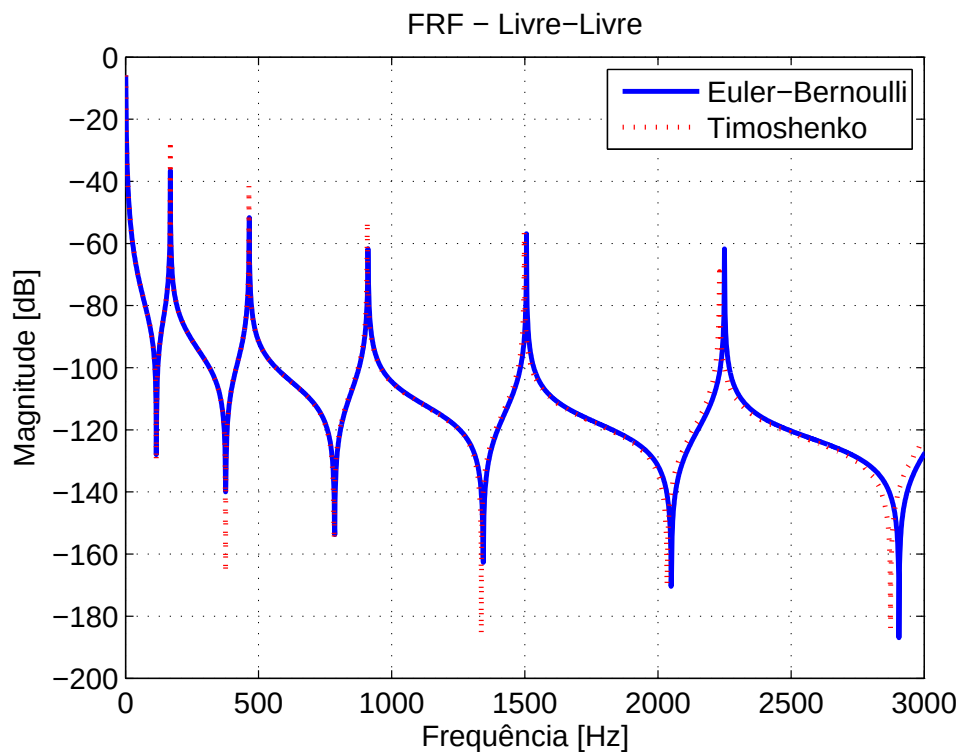
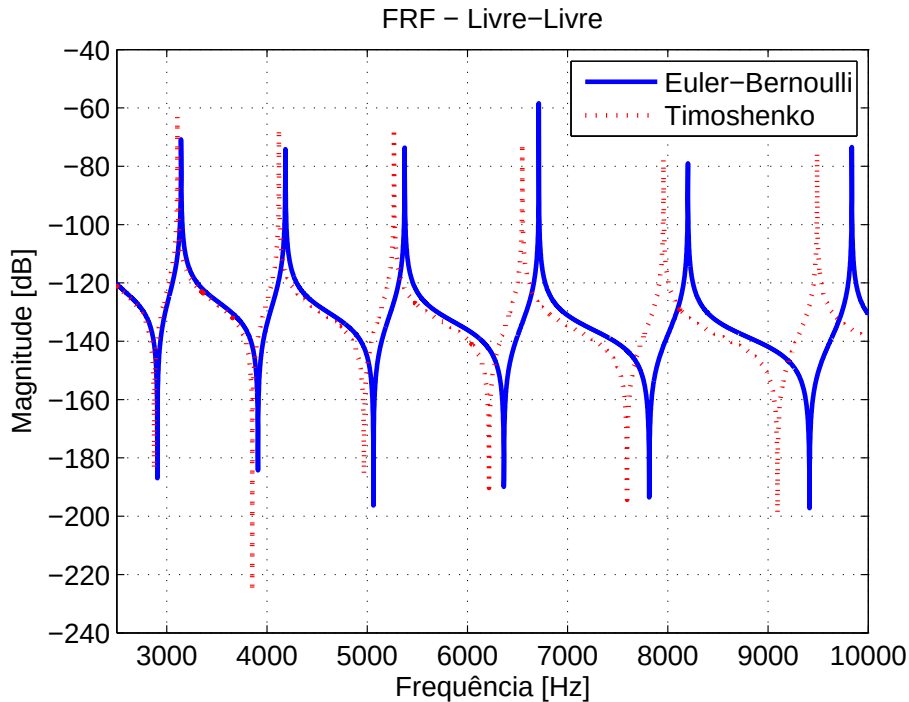


Figure 8 - Função de Resposta em Frequência (2ª faixa de freq.).



Fonte: dados do próprio autor.

Na figura 6 observa-se a resposta em frequência para o modelo de viga de Timoshenko apresentada na seção anterior. Similarmente, a resposta em frequência obtida por elementos finitos também é apresentada para a viga. Neste caso também foram utilizados quarenta elementos. As matrizes de massa e rigidez para um modelo de viga de Timoshenko podem ser encontradas em (PRZEMIENIECKI, 1968) e também são apresentadas no Apêndice A.

Nas figuras 7 e 8 são apresentadas as funções de resposta em frequência obtida via elementos espectrais para duas formulações de viga apresentadas anteriormente, Euler-Bernoulli e Timoshenko, em duas faixas diferentes de frequência. Nestes resultados nota-se que a formulação de Timoshenko, para frequências superiores a 3 kHz, apresenta frequências naturais inferiores às obtidas pela formulação de Euler-Bernoulli. Estas diferenças devem-se a deformação por cisalhamento e a inércia rotacional. Como discutido em (DOYLE, 1997), os números de onda determinados pela teoria de viga de Euler-Bernoulli não são válidos após 3 kHz. Portanto, acima desta frequência a teoria de viga de Timoshenko deve ser usada por considerar a deformação por cisalhamento e a inércia rotacional (WANG, 2013).

A seguir, apresenta-se a formulação para barras em movimento oscilatório longitudinal.

2.3 BARRAS EM MOVIMENTO LONGITUDINAL

A equação de uma barra em movimento longitudinal livre é dada por (SILVA, 1999)

$$EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (77)$$

sendo $u(x,t)$ o deslocamento axial. A força axial interna que age na barra é

$$N(x,t) = EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (78)$$

Assumindo uma solução como a da equação (31) e substituindo na equação (77), resulta no seguinte equação diferencial

$$EA \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \omega^2 \rho A U(x,t) = 0 \quad (79)$$

A solução da equação (79) é semelhante a solução para vigas, dada por

$$U(x) = \mathbf{a} \exp^{ik\omega x} \quad (80)$$

Substituindo a solução geral na forma espectral, equação (80) na equação (79), resulta na seguinte relação de dispersão

$$k^2 - k_L^2 = 0 \quad (81)$$

sendo k_L o número de onda definido por

$$k_L = \omega \left(\frac{\rho A}{EA} \right)^{1/2} \quad (82)$$

As duas raízes fornecidas pela equação (81) são

$$k_1 = -k_2 = k_L \quad (83)$$

Para uma barra finita de comprimento L , a solução geral é obtida de forma semelhante a da

equação (41)

$$U(x, \omega) = a_1 \exp^{-ik_L x} + a_2 \exp^{ik_L x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (84)$$

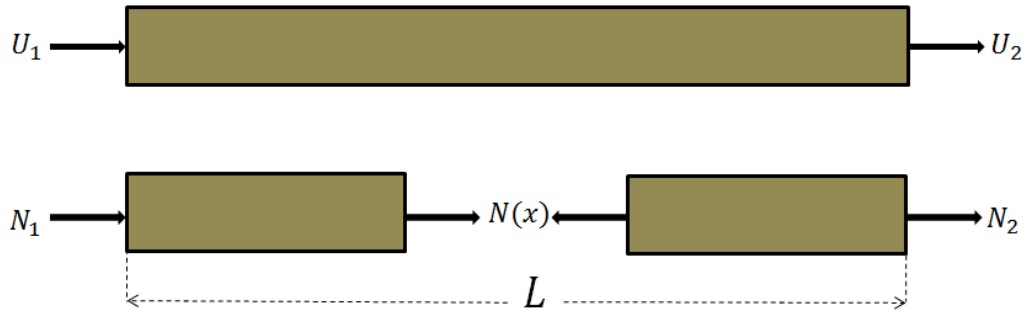
com

$$\mathbf{e}(x, \omega) = \begin{bmatrix} \exp^{-ik_L x} & \exp^{ik_L x} \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \end{Bmatrix}^T$$

Os deslocamentos nodais espectrais de uma barra de comprimento L , figura 9, podem ser alocados em um vetor de deslocamento $\mathbf{d}$ como

Figure 9 - Forças e deslocamentos em um elemento de barra.



Fonte: Adaptado de (LEE, 2009).

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -U(0) \\ U(L) \end{Bmatrix} \quad (86)$$

Substituindo a equação (84) na equação (86), resulta em

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(0, \omega) \\ \mathbf{e}(L, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}_B(\omega) \mathbf{a} \quad (87)$$

com

$$\mathbf{H}_B(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp^{-ik_L L} & \exp^{ik_L L} \end{bmatrix} \quad (88)$$

Através da equação (87), o vetor constante $\mathbf{a}$ pode ser eliminado da equação (84) e a solução

geral pode ser expressa como

$$U(x) = \mathbf{N}_B(x, \omega) \mathbf{d} \quad (89)$$

sendo $\mathbf{N}_B(x, \omega)$ definido igual a equação (49), assim

$$\mathbf{N}_B(x, \omega) = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \quad (90)$$

As componentes espectrais da força axial são relacionadas a $U(x)$ por

$$N(x) = EA \frac{\partial U}{\partial x} \quad (91)$$

As forças axiais nodais espectrais definidas para um elemento de barra, figura (9), podem ser relacionadas com as forças definidas por

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_B(\omega) \mathbf{a} \quad (92)$$

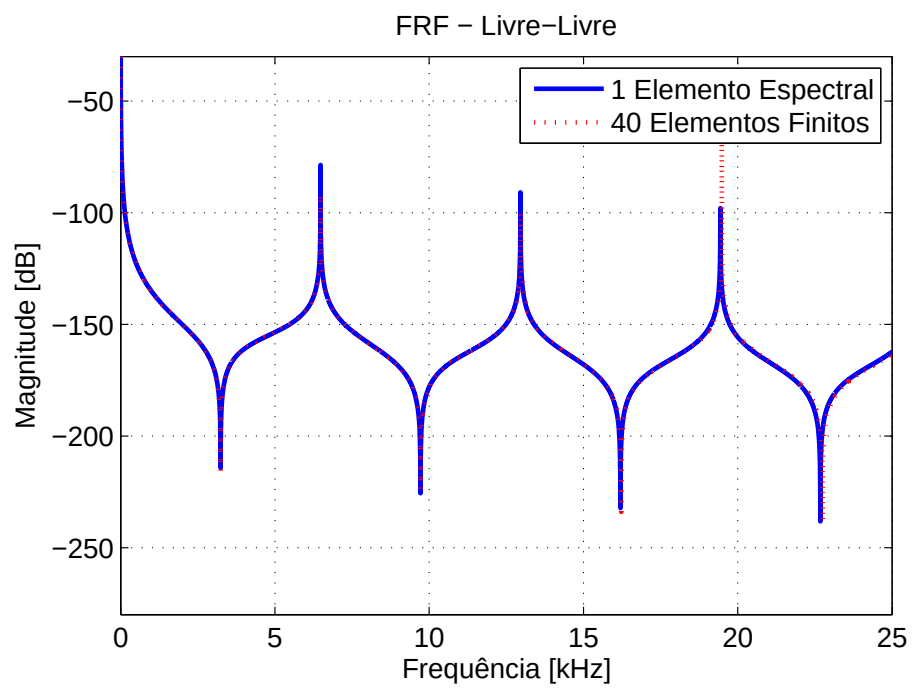
Assim como para os modelos de vigas, a matriz de elemento espectral para uma barra foi calculada usando a equação (20), através das matrizes de força e deslocamentos nodais espectrais,

$$\mathbf{S}_B(\omega) = \mathbf{F}_B(\omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \quad (93)$$

A mesma viga utilizada na aplicação anterior foi usada para obtenção da função de resposta em frequência para o deslocamento axial. O método de elementos finitos também foi utilizado para calcular um modelo de barra. As matrizes de massa e rigidez para uma barra são deduzidas em (LALANNE; BERTHIER, 1983) e apresentadas no Apêndice A.

Conforme observado, apenas um elemento espectral é suficiente para obter as funções de resposta em frequência, enquanto necessita-se de uma quantidade maior de elementos finitos. Os modelos espectrais de vigas e barras obtidos são base para o estudo de vigas com duas camadas e com materiais piezelétricos incorporados.

Figure 10 - Função de Resposta em Frequência de uma barra em deslocamento axial.



Fonte: dados do próprio autor.

3 ESTRUTURAS MULTICAMADAS

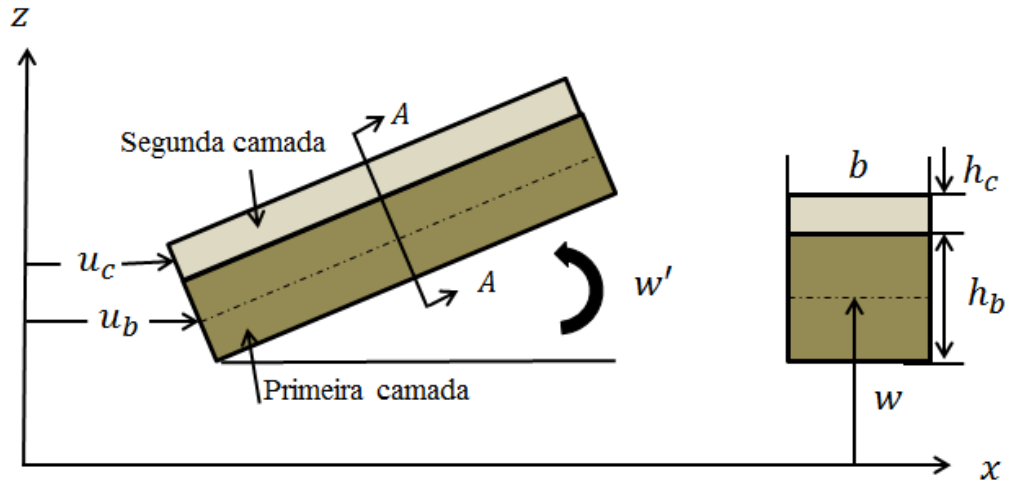
O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação espectral de estruturas multicamadas de maneira que estes resultados possam ser utilizados como base para modelos que utilizam materiais piezelétricos. As equações de movimento são obtidas usando o princípio de Hamilton, e através da aproximação variacional, obtêm-se os modelos espectrais. Serão apresentadas as formulações para as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

3.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI

A geometria e as deformações de uma viga com duas camadas elástica de comprimento L são mostradas na figura 11. Esta modelagem é usada para representar uma viga constituída por dois diferentes materiais e, portanto, é base importante para incluir os efeitos dos transdutores piezelétricos acoplados, conforme mostra o capítulo 4.

Na figura 11 $w(x, t)$ é o deslocamento transversal da viga base (primeira camada), $u_b(x, t)$ é o deslocamento axial da viga base, $u_c(x, t)$ é o deslocamento axial da segunda camada. As espessuras da primeira e segunda camada são denotadas por h_b e h_c , respectivamente. De modo geral, os subscritos b e c denotam propriedades e geometrias da primeira e segunda camada, respectivamente. Por simplicidade de notação, as derivadas parciais espaciais serão representadas por ($'$), enquanto que as derivadas parciais temporais serão representadas por ponto ($\cdot$) e as variáveis x e t serão omitidas.

Figure 11 - Elemento de viga com duas camadas.



Fonte: Adaptado de (LEE, 2009).

A equação de movimento é obtida assumindo as seguintes premissas (LEE, 2009)

1. As propriedades geométricas e materiais são uniformes ao longo da viga;
2. Continuidade perfeita nas interfaces;
3. As duas camadas apresentam o mesmo deslocamento transversal;
4. Pequenas amplitudes de vibração;
5. As duas camadas apresentam elasticidade linear;
6. São desprezadas as deformações por cisalhamento e as inércias rotacionais.

Assumindo uma condição de colagem perfeita, a seguinte relação cinemática é obtida

$$u_c = u_b - (h/2)w' \quad (94)$$

com

$$h = h_b + h_c \quad (95)$$

As equações de movimento são obtidas através do princípio variacional de Hamilton, (MEIROVITCH, 2003)

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (96)$$

sendo T e V as energias cinética e potencial, respectivamente, e δW o trabalho virtual. De acordo com (LEE, 2009), a energia potencial V e a energia T cinética são dadas por

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L [E_b A_b (u'_b)^2 + E_b I_b (w'')^2 + E_c I_c (w'')^2 + E_c A_c (u'_c)^2 + F (w')^2] dx \quad (97)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_b A_b (\dot{u}_b^2 + \dot{w}^2) + \rho_c A_c (\dot{u}_c^2 + \dot{w}^2)] dx \quad (98)$$

com E , A , I e ρ (para cada camada) módulo de elasticidade, área da seção transversal, momento de inércia e densidade, respectivamente, e F uma força de tração axial constante aplicada na viga. Substituindo a equação (94) nas equações (97) e (98) para eliminar o deslocamento axial da segunda camada u_c , a equação para energia cinética e energia potencial são reescritas como

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L [EA u_b'^2 + EI w''^2 - 2\beta w'' u_b + F w'^2] dx \quad (99)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho A \dot{u}_b^2 + \rho A \dot{w}^2 - 2\alpha \dot{w}' \dot{u}_b + \gamma \dot{w}'^2] dx \quad (100)$$

com

$$\begin{aligned} EA &= E_b A_b + E_c A_c & EI &= E_b I_b + E_c I_c + (1/4) E_c A_c h^2 \\ \rho A &= \rho_b A_b + \rho_c A_c & \alpha &= (1/2) \rho_c A_c h \\ \beta &= (1/2) E_c A_c h & \gamma &= (1/4) \rho_c A_c h^2 \end{aligned} \quad (101)$$

O trabalho virtual δW das forças externas, forças de amortecimento viscoso e forças de restrições é dado pela equação apresentada a seguir.

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L \mathbf{p}(x, t) \delta \mathbf{w} dx + \int_0^L \boldsymbol{\tau}(x, t) \delta \mathbf{u}_b dx - \int_0^L \int_{A_b} (c_b \dot{r}_b \delta r_b) dA_b dx \\ &\quad - \int_0^L \int_{A_b} (c_c \dot{r}_c \delta r_c) dA_c dx + \mathbf{N}_1(t) \delta \mathbf{u}_b(0, t) + \mathbf{N}_2(t) \delta \mathbf{u}_b(L, t) \\ &\quad + \mathbf{M}_1(t) \delta \mathbf{w}'(0, t) + \mathbf{M}_2(t) \delta \mathbf{w}'(L, t) \\ &\quad + \mathbf{Q}_1(t) \delta \mathbf{w}(0, t) + \mathbf{Q}_2(t) \delta \mathbf{w}(L, t) \end{aligned} \quad (102)$$

com

$$r_b = u_b \eta_x + w \eta_z \quad r_c = u_c \eta_x + w \eta_z \quad (103)$$

os vetores η_x e η_z são os vetores de direção unitários nas direções x e z , respectivamente. N_i , Q_i e M_i ($i = 1, 2$) são as forças e momentos associados com u_b , w e θ , respectivamente. c_b e c_c são os coeficientes de amortecimento viscoso, $p(x, t)$ e $\tau(x, t)$ são as forças externas aplicadas ao longo da viga. Substituindo a equação (103) na equação (102) e usando a equação (94) para expressar u_c em termos de u_b , e depois integrando por partes, o trabalho virtual δW é reescrito

como

$$\begin{aligned}\delta W = \int_0^L [p(x,t)\delta w + \tau(x,t)\delta u_b - cA\dot{u}_b\delta u_b + cA\dot{w}\delta w + c_4\dot{w}'\delta u_b + c_4\dot{u}_b\delta w' - c_1\dot{w}'\delta w'] dx \\ + N_1(t)\delta u_b(0,t) + N_2(t)\delta u_b(L,t) \\ + M_1(t)\delta w'(0,t) + M_2(t)\delta w'(L,t) \\ + Q_1(t)\delta w(0,t) + Q_2(t)\delta w(L,t)\end{aligned}\quad (104)$$

com

$$\begin{aligned}cA &= c_bA_b + c_cA_c \\ c_1 &= (1/4)c_cA_ch^2 \\ c_4 &= (1/2)c_cA_ch\end{aligned}\quad (105)$$

Substituindo as Equações (97), (98) e (104) no princípio de Hamilton, equação (96), as equações de movimento acopladas são dadas por

$$\begin{aligned}EIw'''' + \rho A\ddot{w} + cA\dot{w} &= -\alpha\ddot{u}_b' + \beta u_b''' + \gamma\ddot{w}'' + c_1\dot{w}'' - c_4\dot{u}_b' + Fw'' + p(x,t) \\ EAu_b'' - \rho A\ddot{u}_b - cA\dot{u}_b &= -\alpha\ddot{w}' + \beta w''' - c_4\dot{w}' - \tau(x,t)\end{aligned}\quad (106)$$

e as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned}Q(0,t) &= -Q_1(t) - Fw'(0,t) \quad \text{ou} \quad w(0,t) = w_1(t) \\ M(0,t) &= -M_1(t) \quad \text{ou} \quad w'(0,t) = \theta_1(t) \\ N(0,t) &= -N_1(t) \quad \text{ou} \quad u_b(0,t) = u_1(t) \\ Q(L,t) &= +Q_2(t) - Fw'(L,t) \quad \text{ou} \quad w(L,t) = w_2(t) \\ M(L,t) &= +M_2(t) \quad \text{ou} \quad w'(L,t) = \theta_2(t) \\ N(L,t) &= +N_2(t) \quad \text{ou} \quad u_b(L,t) = u_2(t)\end{aligned}\quad (107)$$

A força axial N , o momento fletor M e a força de cisalhamento cortante Q são relacionados com o deslocamento axial u_b , deslocamento transversal w e rotação θ por

$$\begin{aligned}Q(x,t) &= -EIw''' - \alpha\ddot{u}_b + \beta u_b'' + \gamma\ddot{w}' + c_1\dot{w}' - c_4\dot{u}_b \\ M(x,t) &= EIw'' - \beta u_b' \\ N(x,t) &= EAu_b' - \beta w''\end{aligned}\quad (108)$$

O amortecimento estrutural pode ser introduzido através do módulo de elasticidade complexo, definido por

$$E_b^* = E_b(1 + i\eta_b) \quad E_c^* = E_c(1 + i\eta_c) \quad (109)$$

sendo η_b e η_c os fatores de perda das duas camadas.

3.1.1 Modelos Espectrais

O primeiro passo para a formulação do elemento espectral é transformar as equações de movimento, equação (106), para o domínio da frequência através da transformada de Fourier. Para isso, utilizam-se as formas espectrais dos deslocamentos transversal e axial, dadas por

$$\begin{Bmatrix} w(x,t) \\ u_b(x,t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} W_n(x, \omega_n) \\ U_n(x, \omega_n) \end{Bmatrix} \exp^{i\omega_n t} \quad (110)$$

assim como as formas espectrais das forças e momentos

$$\begin{Bmatrix} p(x,t) \\ \tau(x,t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} P_n(x, \omega_n) \\ T_n(x, \omega_n) \end{Bmatrix} \exp^{i\omega_n t}$$

$$\begin{Bmatrix} Q(x,t) \\ M(x,t) \\ N(x,t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} Q_n(x, \omega_n) \\ M_n(x, \omega_n) \\ N_n(x, \omega_n) \end{Bmatrix} \exp^{i\omega_n t} \quad (111)$$

com $i = 1, 2$. Substituindo as equações (110) e (111) nas equações (106) e (107), as equações de movimento no domínio da frequência são obtidas como

$$\begin{aligned} EIW'''' - \omega^2 \rho AW + i\omega c AW &= \omega^2 \alpha U' + \beta U''' - \omega^2 \gamma W'' + i\omega c_1 W'' - i\omega c_4 U' + Fw'' + P(x) \\ EAU'' + \omega^2 \rho AU - i\omega c AU &= \omega^2 \alpha W' + \beta W''' - i\omega c_4 W' - T(x,t) \end{aligned} \quad (112)$$

e as condições de contorno são

$$\begin{aligned} Q(0) &= -Q_1 - FW'(0) \quad \text{ou} \quad W(0) = W_1 \\ M(0) &= -M_1 \quad \text{ou} \quad W'(0) = \Theta_1 \\ N(0) &= -N_1 \quad \text{ou} \quad U(0) = U_1 \\ Q(L) &= Q_2(t) - FW'(L) \quad \text{ou} \quad W(L) = W_2 \\ M(L) &= M_2 \quad \text{ou} \quad W'(L) = \Theta_2 \\ N(L) &= N_2 \quad \text{ou} \quad U(L) = U_2 \end{aligned} \quad (113)$$

De maneira similar, substituindo as equações (110) e (111) nas expressões para forças e momentos, equação (108), obtêm-se a seguinte relação força-deslocamento espectral

$$\begin{aligned} Q(x) &= -EIW''' + \omega^2 \alpha U + \beta U'' - \omega^2 \gamma W' + i\omega c_1 W' - i\omega c_4 U \\ M(x) &= EIW'' - \beta U' \\ N(x) &= EAU' - \beta W'' \end{aligned} \quad (114)$$

Os deslocamentos nodais espectrais e as rotações nodais espectrais de uma viga de duas camadas de comprimento L , apresentados na figura(12) , podem ser alocados em um vetor de deslocamento $\mathbf{d}$ como

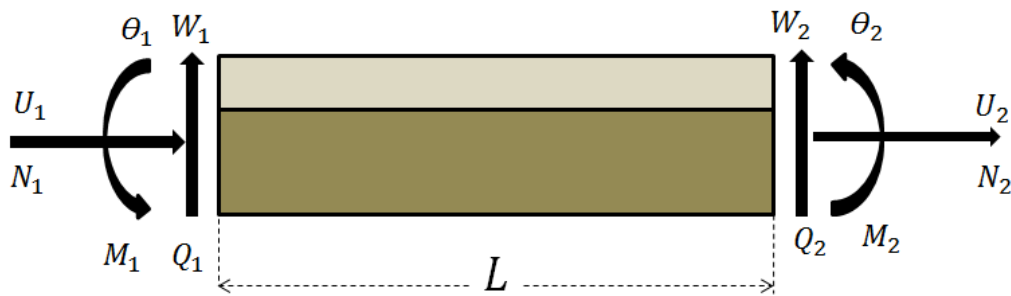
$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \left\{ U_1 \quad W_1 \quad \Theta_1 \quad U_2 \quad W_2 \quad \Theta_2 \right\}^T \\ &= \left\{ U(0) \quad W(0) \quad \Theta(0) \quad U(L) \quad W(L) \quad \Theta(L) \right\}^T \end{aligned} \quad (115)$$

Note na referida figura que, em termos de graus de liberdade, as duas camadas se comportam como apenas uma estrutura.

As forças e momentos nodais espectrais também podem ser alocados em um vetor $\mathbf{f}_c$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c &= \left\{ N_1 \quad Q_1 \quad M_1 \quad N_2 \quad Q_2 \quad M_2 \right\}^T \\ &= \left\{ -N(0) \quad -Q(0) - FW'(0) \quad -M(0) \quad N(L) \quad Q(L) - FW'(L) \quad M(L) \right\}^T \end{aligned} \quad (116)$$

Figure 12 - Forças e graus de liberdade para um elemento de viga com duas camadas.



Fonte: Adaptado de (LEE, 2009) .

As funções de forma no domínio da frequência, que são utilizadas para formular a equação de elemento espectral, são derivadas a partir da equação (112) considerando $P(x) = 0$ e $T(x) = 0$. As equações homogêneas de movimento são dadas por

$$\begin{aligned} EIW'''' - \omega^2 \rho A W + i\omega c A W &= \omega^2 \alpha U' + \beta U''' - \omega^2 \gamma W'' + i\omega c_1 W'' - i\omega c_4 U' + F W'' \\ EAU'' + \omega^2 \rho A U - i\omega c A U &= \omega^2 \alpha W' + \beta W''' - i\omega c_4 W' \end{aligned} \quad (117)$$

As soluções gerais para a equação (117) são assumidas de maneira semelhante à equação (33) e são dadas por

$$\begin{aligned} W(x) &= \mathbf{a} \exp^{-ik(\omega)x} \\ U(x) &= \mathbf{r} \mathbf{a} \exp^{-ik(\omega)x} \end{aligned} \quad (118)$$

Substituindo a equação (118) na equação (117), resulta no seguinte problema de autovalor

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (119)$$

com

$$\begin{aligned} X_{11} &= k^4 EI - \omega^2 \rho A + i\omega c A - \omega^2 k^2 \gamma + i\omega k^2 c_1 + k^2 F \\ X_{22} &= -k^2 EA + \omega^2 \rho A - i\omega c A \\ X_{12} &= \omega k c_4 + i\omega^2 k \alpha - ik^3 \beta \end{aligned} \quad (120)$$

A relação de dispersão é obtida igualando a zero o determinante da equação (119),

$$a_1 k^6 + a_2 k^4 + a_3 k^2 + a_4 = 0 \quad (121)$$

sendo

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta^2 - EAEI \\ a_2 &= \omega^2 (EA\gamma + EI\rho A - 2\alpha\beta) - i\omega (EIcA + EA c_1 - 2\beta c_4) - EAF \\ a_3 &= \omega^4 (\alpha^2 - \gamma\rho A) + i\omega^3 (\rho A c_1 + \gamma c A - 2\alpha c_4) + \omega^2 (EA\rho A + c A c_1 + F\rho A - c_4^2) - i\omega c A (EA + F) \\ a_4 &= -\rho A^2 \omega^4 + 2i\omega^3 \rho A c A + \omega^2 c A^2 \end{aligned} \quad (122)$$

A equação (121) fornece seis números de onda ($j = 1, 2, \dots, 6$). Para cada número de onda k_j , um correspondente r_j é obtido da equação (119) como

$$r_j = \frac{-\omega k_j c_4 - i\omega^2 k_j \alpha + ik_j^3 \beta}{-k_j^2 EA + \omega^2 \rho A - i\omega c A} \quad (123)$$

Cada r_j é alocado na matriz diagonal

$$\mathbf{R} = \text{diag}(r_j), \quad j = 1, \dots, 6 \quad (124)$$

Usando os seis números de onda, a solução geral da equação (117) é escrita como

$$W(x, \omega) = \sum_{j=1}^6 A_j \exp^{-ik_j x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (125)$$

$$U(x, \omega) = \sum_{j=1}^6 r_j A_j \exp^{-ik_j x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{R} \mathbf{a}$$

sendo

$$\mathbf{e}(x, \omega) = \begin{bmatrix} \exp^{-ik_1 x} & \exp^{-ik_2 x} & \exp^{-ik_3 x} & \exp^{-ik_4 x} & \exp^{-ik_5 x} & \exp^{-ik_6 x} \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$\mathbf{a} = \left\{ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \right\}^T$$

Aplicando a equação (125) no vetor de deslocamento nodal $\mathbf{d}$ definido na equação (115), obtêm-se

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \quad (127)$$

sendo $\mathbf{H}(\omega)$ tal que ($j = 1, \dots, 6$) e

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{(1,j)} &= r_j \\ \mathbf{H}_{(2,j)} &= 1 \\ \mathbf{H}_{(3,j)} &= -ik_j \\ \mathbf{H}_{(4,j)} &= r_j e_j \\ \mathbf{H}_{(5,j)} &= e_j \\ \mathbf{H}_{(6,j)} &= -ik_j e_j \end{aligned} \quad (128)$$

com

$$e_j = \exp^{-ik_j L} \quad (129)$$

3.1.2 Equação do Elemento Espectral

Um procedimento similar aquele apresentado na definição da equação (48) pode ser adotado para definir $W(x, \omega)$ e $U(x, \omega)$ em termos do vetor $\mathbf{d}$. Também de forma similar, as funções de forma podem ser obtidas por equação equivalente à equação (49). No entanto, neste caso existem $\mathbf{N}_W$ e $\mathbf{N}_U$. Finalmente, as equações do movimento podem ser obtidas pelo princípio variacional de Hamilton - detalhes desta formulação podem ser obtidos na referência (LEE, 2009). Assim, pode ser definida a matriz espectral da seguinte forma

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{H}^{-1}(\omega) \mathbf{D}(\omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (130)$$

sendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\omega) &= -E\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{E}\mathbf{K}\mathbf{R} + E/I\mathbf{K}^2\mathbf{E}\mathbf{K}^2 - i\beta(\mathbf{K}^2\mathbf{E}\mathbf{K}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{E}\mathbf{K}^2) \\
&\quad - \omega^2[\rho A(\mathbf{E} + \mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{R}) + i\alpha(\mathbf{K}\mathbf{E}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{K}) - \gamma\mathbf{K}\mathbf{E}\mathbf{K}] \\
&\quad + i\omega[cA(\mathbf{E} + \mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{R}) - c_1\mathbf{K}\mathbf{E}\mathbf{K} + ic_4(\mathbf{K}\mathbf{E}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{K})] - F\mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{R} \\
\mathbf{K} &= \text{diag}(k_i) \\
\mathbf{K}^2 &= \text{diag}(k_i^2) = (\mathbf{K}^2)^T \\
\mathbf{E}(\omega) &= \int_0^L \mathbf{e}^T(x, \omega) \mathbf{e}(x, \omega) dx = E_{pq}
\end{aligned} \tag{131}$$

$$E_{pq} = \begin{cases} \frac{i}{k_p + k_q} \left[\exp^{-i(k_p + k_q)L} \right], & \text{se } k_p + k_q \neq 0 \\ L, & \text{se } k_p + k_q = 0 \end{cases}$$

Definida a matriz de um elemento espectral $\mathbf{S}(\omega)$ pode-se então obter a matriz global, que representa uma viga discretizada com o número de elementos de interesse, a partir de procedimento de montagem similar aquele utilizado no Método dos Elementos Finitos. Então, a equação global pode ser escrita tal que

$$\mathbf{S}_g(\omega) \mathbf{d}_g(\omega) = \mathbf{f}_g(\omega) \tag{132}$$

com

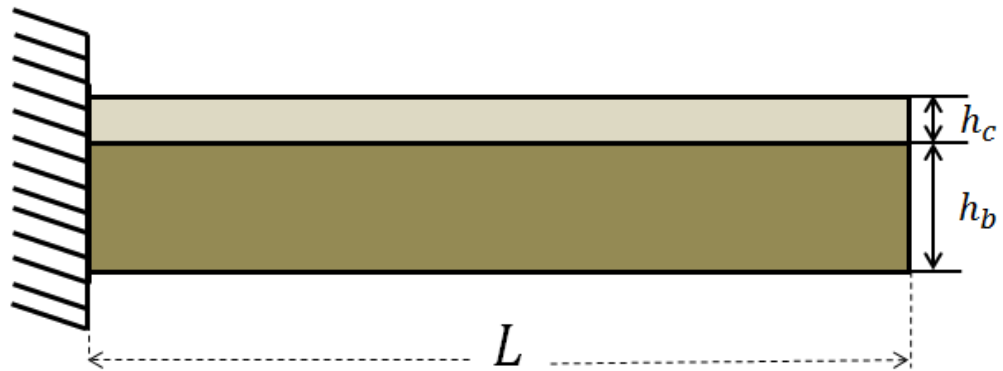
$$\mathbf{f}_g(\omega) = \mathbf{F}_g(\omega) \mathbf{a} \tag{133}$$

onde o índice g indica o modelo global, cuja ordem é dependente da discretização realizada, e $\mathbf{F}_g$ é a matriz global contendo as forças espectrais em todos os nós.

Similarmente aos casos com uma única camada, neste trabalho a matriz do elemento espectral é calculada utilizando as matrizes que contém os deslocamentos e as forças nodais, i.e., $\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{H}^{-1}$.

A formulação acima foi aplicada para a obtenção da resposta em frequência de uma viga engastada de duas camadas, figura 13, cujas propriedades físicas e geométricas se encontram na tabela 5. As figuras 14 e 15 mostram a resposta em frequência para a viga de duas camadas para duas faixas de frequências. A resposta em frequência via elementos finitos também é calculada para a viga. As matrizes de massa e rigidez para um modelo de viga de duas camadas utilizando o método de elementos finitos são apresentadas no Apêndice A. Nota-se nestas figuras que apenas um elemento espectral é suficiente para calcular a resposta em frequência, enquanto é necessário 80 elementos usando o método FEM. Foi utilizado 80 elementos finitos pois este número foi suficiente para calcular as mesmas frequências naturais em baixa frequência calculadas por um elemento espectral.

Figure 13 - Viga com duas camadas.

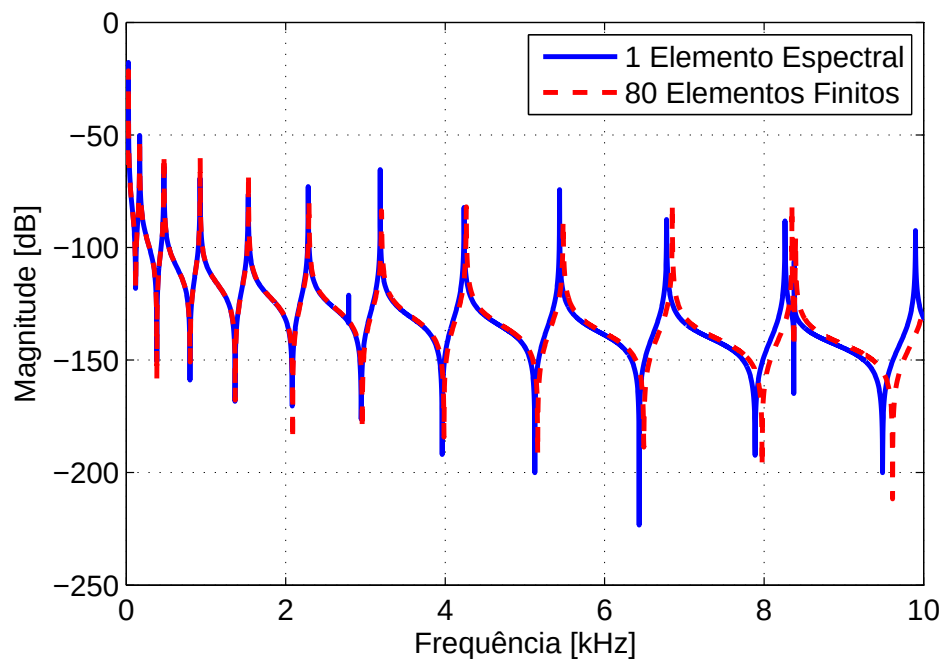


Fonte: Adaptado de (LEE, 2009).

Table 5 - Propriedades físicas e geométricas da viga com duas camadas.

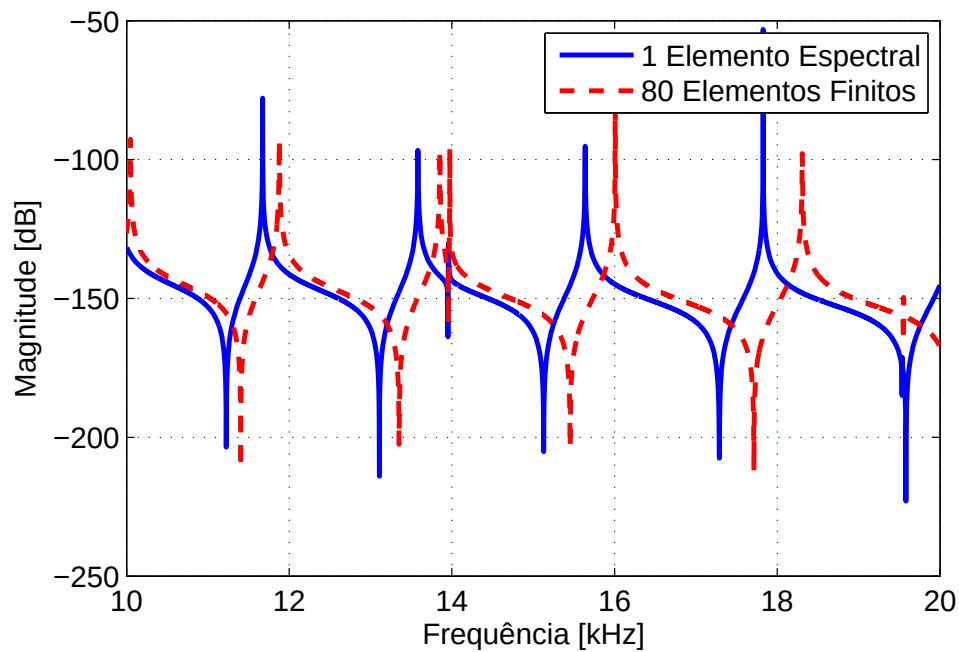
Parâmetros da Viga	Valor ..
Módulo de Young (N/m^2) - 1ª camada	71×10^9
Módulo de Young (N/m^2) - 2ª camada	60×10^9
Densidade (kg/m^3) - 1ª camada	2710 ..
Densidade (kg/m^3) - 2ª camada	7800 ..
Comprimento (m)	0,395 ..
Largura (m)	0,025 ..
Espessura (m) - 1ª camada	0,05 ..
Espessura (m) - 2ª camada	0,01 ..

Figure 14 - FRF para viga com duas camadas.



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 15 - FRF para viga com duas camadas (para a faixa de frequências de 10k a 20k Hz).



Fonte: dados do próprio autor.

Os resultados apresentados acima indicam claramente uma das vantagens da utilização da formulação espectral, pois o uso de um único elemento espectral implica em matrizes, que representam o sistema, de ordem significativamente menor que as matrizes obtidas por FEM. Ainda, nota-se também a degradação dos resultados do modelo FEM a medida que a frequência aumenta. Neste sentido, especialmente para aplicações de monitoramento estrutural, o modelo espectral se apresenta como adequado em relação ao de elementos finitos.

4 ESTRUTURAS INTELIGENTES

O uso de materiais inteligentes tem recebido grande atenção nas últimas décadas, com aplicações nas mais diversas áreas, da indústria automobilísticas à dispositivos médicos, veja (LEO, 2007). Estruturas com materiais inteligentes acoplados são chamadas de estruturas inteligentes. Os materiais inteligentes mais utilizados são os materiais piezelétricos, (PZT, *Lead Zirconate Titanate*), que devido suas propriedades, podem ser utilizados tanto como atuadores como sensores. Diversos trabalhos utilizaram estes materiais especialmente para aplicações de controle de vibrações e monitoramento estrutural (GONÇALVES, 2003; SILVA, 2005; BUENO, 2007; MARQUI, 2007; GATTI; BRENNAN ; GARDONIO, 2007; BAPTISTA, 2010). Assim, com base nesta ideia e, nos resultados apresentados no capítulo anterior, este capítulo apresenta dois modelos de viga com materiais piezelétricos acoplados.

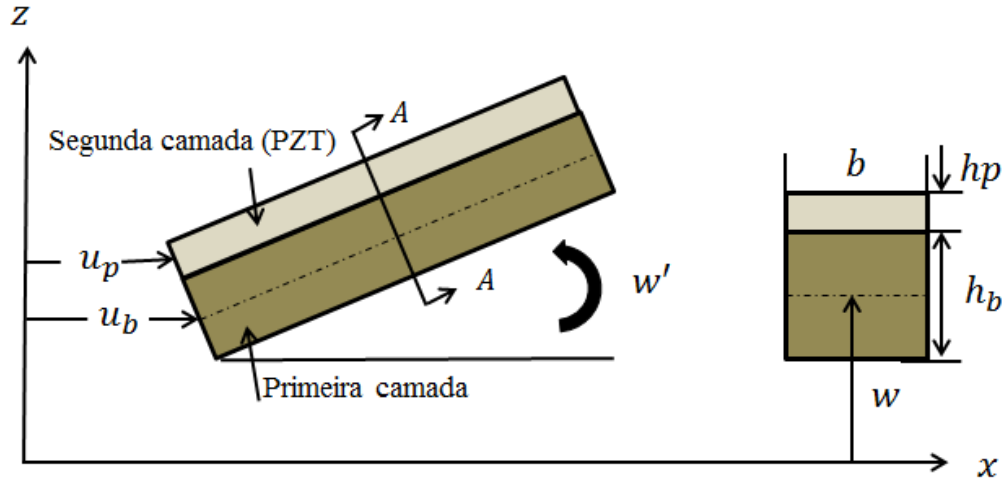
4.1 ELEMENTO ESPECTRAL COM PZT ACOPLADO

Na figura 16 apresenta-se um elemento de viga de duas camadas, sendo a primeira camada a base da viga e a segunda uma camada de material piezelétrico - similarmente ao conteúdo apresentado no capítulo 3. Nesta ilustração os subíndices b e p indicam respectivamente a base e o PZT. As espessuras da base e da camada de PZT são denotadas por h_b e h_p , respectivamente.

As equações de movimento serão obtidas assumindo as seguintes premissas, conforme discutido em (LEE, 2009):

- As propriedades geométricas e materiais são uniformes ao longo da viga;
- Continuidade perfeita nas interfaces;
- As duas camadas apresentam o mesmo deslocamento transversal;
- Pequenas amplitudes de vibração;
- São válidos os princípios lineares para a elasticidade e piezeletricidade;
- São desprezadas as deformações por cisalhamento e as inercias rotacionais;
- Tensão elétrica uniforme ao longo da viga.

Figure 16 - Elemento de viga com uma camada de PZT.



Fonte: Adaptado de (LEE, 2009)

Com base nas suposições acima, a seguinte relação cinemática é dada

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_b - \frac{h}{2} \mathbf{w}' \quad (134)$$

onde $h = h_b + h_p$.

Convencionalmente, costuma-se associar os eixos x , y e z aos números 1, 2 e 3, respectivamente. Considerando a polarização do material piezelétrico no eixo 3 e se a camada de PZT for muito fina, o deslocamento elétrico D_3 (carga/área) pode ser considerado constante ao longo de sua espessura. Nessa situação, o campo elétrico no plano é desprezado, especialmente quando a tensão elétrica aplicada na camada de PZT for uniforme ao longo do eixo da viga. De acordo com (WANG, 2013), as relações constitutivas para um material piezelétrico sob uma carga uniaxial é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^D & -h_{31} \\ -h_{31} & \beta_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad (135)$$

sendo σ_1 e ε_1 a tensão e deformação mecânica na direção x , respectivamente; E_3 é o campo elétrico (voltagem/comprimento), na direção z , C_{11}^D é a rigidez elástica; β_{33}^S é a constante dielétrica; e h_{31} é a constante piezelétrica e os superescritos D e S indicam respectivamente o deslocamento elétrico constante (circuito aberto) e tensão elétrica constante. As constantes do material são relacionadas com a constante piezelétrica através da relação

$$\begin{aligned} h_{31}^2 (\beta_{33}^S)^{-1} &= d_{31} E_p \\ E_p &= C_{11}^D - h_{31}^2 (\beta_{33}^S)^{-1} \end{aligned} \quad (136)$$

sendo d_{31} o coeficiente de carga piezelétrica.

Para o efeito piezoeletrico direto pode se considerar uma deformação constante assumindo também a condição de campo elétrico nulo. Pelo princípio de Hamilton encontram-se equações similares aquelas apresentadas na equação (106). No entanto, nas condições de contorno, nos termos $M(0, t)$ e $N(0, t)$, aparecem momento e força do PZT através das equações

$$\begin{aligned} M^p(t) &= (1/2)bhd_{31}E_pV_c(t) \\ N^p(t) &= bd_{31}E_pV_c(t) \end{aligned} \quad (137)$$

sendo V_c a tensão elétrica sobre o PZT e b o comprimento do elemento. Estes termos apresentados definem a força do PZT, conforme será discutido no capítulo 5, equação (164). Detalhes desta formulação são apresentados em (LEE, 2009). Além disso, o amortecimento estrutural para cada camada é calculado considerando o módulo de elasticidade complexo

$$\begin{aligned} C_{11}^{D*} &= C_{11}^D(1 + i\eta_p) \\ E_p^* &= E_p(1 + i\eta_p) \\ E_b^* &= E_b(1 + i\eta_b) \end{aligned} \quad (138)$$

sendo η_b e η_p fatores de perda para a base da viga e para a camada de PZT, respectivamente, (LEE, 2009).

As equações de movimento para uma viga de duas camadas com PZT são as mesmas apresentadas nas equações (106). No entanto, neste caso, as propriedades estruturais e de amortecimento são definidas pelas equações (136) e (138). Assim, a formulação apresentada no capítulo (3) para uma viga de duas camadas elástica-elástica pode ser utilizada para uma viga de duas camadas elástica-PZT.

4.2 MODELAGEM ESPECTRAL POR EULER-BERNOULLI

As equações de movimento podem ser transformadas no domínio da frequência por procedimento similar aquele apresentado nas seções anteriores. Neste caso, as formas espectrais das forças piezoeletricas, momentos e tensão elétrica são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}^p(x, t) \\ \mathbf{N}^p(x, t) \\ \mathbf{V}_c(x, t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_n^p(x, \omega_n) \\ \mathbf{N}_n^p(x, \omega_n) \\ \mathbf{V}_{c(n)}(x, \omega_n) \end{Bmatrix} \exp^{i\omega_n t} \quad (139)$$

Esta formulação baseada no modelo de Euler-Bernoulli não é a mais adequada para aplicações em alta frequência, que é o caso de monitoramento da integridade estrutural, visto que a deformação por cisalhamento e a inércia rotacional não são consideradas. Por isto, torna-se

importante obter a formulação do elemento de duas camadas com PZT acoplado baseada nas equações de Timoshenko, conforme apresentado na seção (4.3).

4.3 MODELAGEM ESPECTRAL POR TIMOSHENKO

Assumindo como lineares as equações constitutivas do PZT, (IEEE, 1987), e apenas o efeito d_{31} , as equações constitutivas reduzidas com as premissas da viga de Timoshenko são (WANG, 2013):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \gamma_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^E & 0 & d_{31} \\ 0 & S_{11}^E & 0 \\ d_{31} & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \tau_p \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (140)$$

sendo γ_1 a deformação por cisalhamento e τ_p a tensão de cisalhamento.

As equações de movimento para uma viga de Timoshenko com duas camadas são obtidas utilizando os mesmos princípios para uma viga de Euler-Bernoulli. Inicialmente, calcula-se as expressões para as energias de deformação e potencial, o trabalho virtual e depois é aplicado o princípio variacional de Hamilton. As expressões para a energia potencial para a viga e para o PZT são dadas por

$$V_b = \frac{1}{2} \int_0^L [E_b A_b (u'_b)^2 + G_b A_b (\theta_b^2 + (w')^2 - 2\theta_b w')] dx \quad (141)$$

$$\begin{aligned} V_p = \frac{1}{2} \int_0^L [(u'_b)^2 + \frac{h_b^2}{4} (\theta'_b)^2 + \frac{h_p^2}{3} (\theta'_p)^2 - h_b u'_b \theta'_b - h_p u'_b \theta'_p + \frac{h_p h_b}{2} \theta'_b \theta'_p] C_{11}^D A_p dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^L h_{31} D_3 A_p [u'_b + \frac{h_b}{2} \theta'_b + \frac{h_p}{1} \theta'_p] dx + \frac{1}{2} \int_0^L G_p A_p ([\theta_p^2 + 2\theta_p w' + (w')^2] dx \\ + \frac{1}{2} \int_0^L \beta_{33}^s D_3^2 A_p dx \end{aligned} \quad (142)$$

A energia potencial total é dada por

$$V = V_b + V_p \quad (143)$$

As expressões para a energia de deformação para o a viga e para o PZT são dadas por

$$T_b = \frac{1}{2} \int_0^L [m_b (\dot{u}_b^2 + \dot{w}^2) + \rho_b I_b \dot{\theta}_b^2] dx \quad (144)$$

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^L [\dot{u}_b^2 + \dot{w}^2 + \frac{h_b^2}{4} \dot{\theta}_b^2 + \frac{h_p^2}{3} \dot{\theta}_p^2 - h_b \dot{u}_b \dot{\theta}_b - h_p \dot{u}_b \dot{\theta}_p + \frac{h_b h_p}{2} \dot{\theta}_b \dot{\theta}_p] m_p dx \quad (145)$$

A energia de deformação total é

$$T = T_b + T_p \quad (146)$$

O trabalho virtual é dado por

$$W = \int_0^L [\hat{P}u_b + \hat{F}w + \hat{M}\theta_b + b_p V_c D_3] dx \quad (147)$$

sendo $\tilde{P}$ a força axial externa, $\tilde{M}$ o momento externo e $\tilde{F}$ a força transversal externa.

Substituindo as equações (143), (146) e (147), as equações de movimento são (LEE, 2009)

$$-m_b \ddot{u} - m_p \left(\ddot{u} - \frac{h_b}{2} \ddot{\theta}_b - \frac{\hat{h}_p}{h_p} \ddot{\theta}_p \right) + E_b A_b u'' + E_p A_p \left(u'' - \frac{h_b}{2} \theta_b'' - \frac{\hat{h}_p}{h_p} \theta_p'' \right) + \hat{P} = 0 \quad (148)$$

$$-(m_b + m_p) \ddot{w} + G_b A_b (w'' - \theta_b') + G_p A_p (w'' - \theta_p') + \hat{F} = 0 \quad (149)$$

$$m_p \frac{h_b}{2} \left(\ddot{u} - \frac{h_b}{2} \ddot{\theta}_b - \frac{\hat{h}_p}{h_p} \ddot{\theta}_p \right) - E_p A_p \frac{h_b}{2} \left(u'' - \frac{h_b}{2} \theta_b'' - \frac{\hat{h}_p}{h_p} \theta_p'' \right) - \rho_b I_b \ddot{\theta}_b + E_b I_b \theta_b'' + G_b A_b (w' - \theta_b) + \hat{M} = 0 \quad (150)$$

$$m_p \frac{\hat{h}_p}{h_p} \left(\ddot{u} - \frac{h_b}{2} \ddot{\theta}_b - \frac{\hat{I}_p}{\hat{h}_p} \ddot{\theta}_p \right) - E_p A_p \frac{\hat{h}_p}{h_p} \left(u'' - \frac{h_b}{2} \theta_b'' \right) + A_p \frac{\hat{h}_p}{h_p} \left(C_{11}^D \frac{\hat{I}_1}{\hat{h}_1} - \frac{h_{31}^2}{\beta_{33}^s} \frac{\hat{h}_1}{h_1} \right) \theta_p'' + G_p A_p (w' - \theta_p) = 0 \quad (151)$$

com $\hat{I} = \frac{h_p^3}{3}$ e $\hat{h}_p = \frac{h_p^2}{2}$

Os deslocamentos espectrais são dados por

$$\begin{pmatrix} u(x, t) \\ w(x, t) \\ \theta_b(x, t) \\ \theta_p(x, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{pmatrix} U_n(x, \omega_n) \\ W_n(x, \omega_n) \\ \Theta_{bn}(x, \omega_n) \\ \Theta_{pn}(x, \omega_n) \end{pmatrix} \exp^{i\omega_n t} \quad (152)$$

sendo $u(x, t)$ o deslocamento axial, $w(x, t)$ o deslocamento transversal, $\theta_b(x, t)$ o rotação da viga e $\theta_p(x, t)$ a rotação do PZT.

As forças espectrais são dadas por

$$\begin{Bmatrix} N(x,t) \\ Q(x,t) \\ M_b(x,t) \\ M_p(x,t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} N_n(x, \omega_n) \\ Q_n(x, \omega_n) \\ M_{bn}(x, \omega_n) \\ M_{pn}(x, \omega_n) \end{Bmatrix} \exp^{i\omega_n t} \quad (153)$$

sendo $N(x,t)$ a força axial, $Q(x,t)$ a força cortante, $M_b(x,t)$ o momento na viga e $M_p(x,t)$ o momento no PZT.

Os números de onda para as equação de movimento podem ser calculados de maneira simplificada escrevendo as equações (148), (149), (150) e (151), na seguinte expressão em espaço de estados

$$[\mathbf{A}]\mathbf{q}'' + [\mathbf{B}]\mathbf{q}' + \omega^2[\mathbf{C}]\mathbf{q} = 0 \quad (154)$$

$$\mathbf{q}(x, \omega) = \begin{Bmatrix} U \\ W \\ \Theta_{bn} \\ \Theta_{pn} \end{Bmatrix} \quad (155)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}' \end{Bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}\omega^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}' \end{Bmatrix} \quad (156)$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade de ordem 4. As expressões para as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são apresentadas no Apêndice B. Também

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}' \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \alpha_i \begin{Bmatrix} \Lambda(0) \\ \Lambda(L) \end{Bmatrix} \exp^{k_i x} \quad (157)$$

sendo Λ os autovetores obtidos para auxiliar no cálculo da matriz espectral.

Utilizando as equações (152) e (153), os deslocamentos e forças espectrais podem ser calculados nos dois nós do elemento e a matriz espectral de duas camadas pode ser obtida (VENUGOPAL ; WANG, 2014).

No processo de montagem do modelo espectral por Timoshenko foi necessário acoplar o modelo de barra com o modelo de viga simples, pois no modelo de duas camadas apresenta o efeito

de cisalhamento. Assim, a matriz do elemento espectral torna-se

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{B11} & 0 & 0 & S_{B12} & 0 & 0 \\ 0 & S_{T11} & S_{T12} & 0 & S_{T13} & S_{T14} \\ 0 & S_{T21} & S_{T22} & 0 & S_{T23} & S_{T24} \\ S_{B21} & 0 & 0 & S_{B22} & 0 & 0 \\ 0 & S_{T31} & S_{T32} & 0 & S_{T33} & S_{T34} \\ 0 & S_{T41} & S_{T42} & 0 & S_{T43} & S_{T44} \end{bmatrix} \quad (158)$$

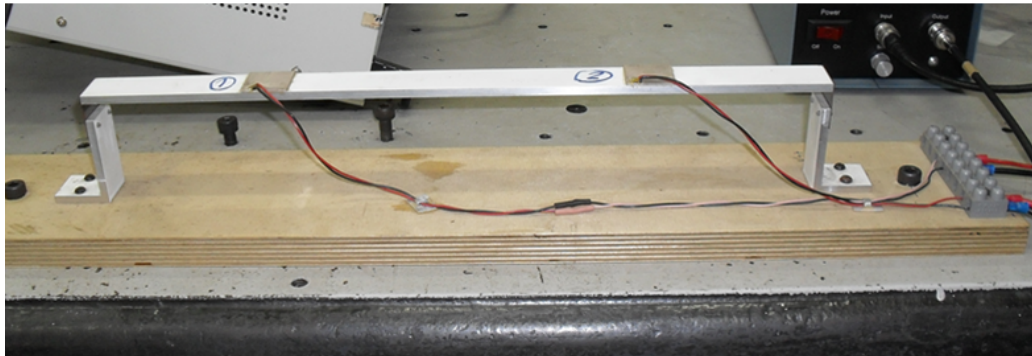
sendo S_{Tij} as componentes da matriz espectral definida na equação (53) e S_{Bij} as componentes da matriz espectral de uma barra definidas na equação (93). Nos modelos multicamadas baseados na teoria de Euler-Bernoulli, esse procedimento não foi necessário. Este ponto é de extrema importância, caso contrário não há continuidade nas informações dos graus de liberdade axiais.

A metodologia desenvolvida foi aplicada para uma estrutura similar à apresentada na figura 17. No entanto, por simplicidade, as análises são realizadas na condição livre-livre. A viga foi modelada com 5 elementos, conforme a figura 18. As propriedades físicas e geométricas se encontram na Tabela 6. As figuras (19) à (21) mostram a resposta em frequência para a saída no PZT 2. Pode-se observar tendência semelhante àquela apresentada no capítulo 3.

Table 6 - Propriedades físicas e geométricas da viga de alumínio e dos PZTs.

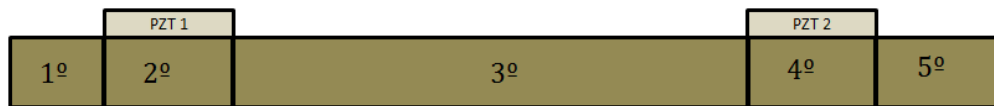
Propriedade	Viga	PZT
Módulo de Young (N/m^2)	71×10^9 ..	60×10^9 ...
Módulo de Cisalhamento (N/m^2)	$25,5 \times 10^9$	
Fator de Cisalhamento	5/6	
Coeficiente de Poisson	0,3	
Densidade (kg/m^3) -	2710	
Comprimento (m)	0,395	0,025
Largura (m)	0,025	0,025
Espessura (m)	0,05	0,01
Constante Dielétrica (m/V)		212×10^{-12}

Figure 17 - Viga com dois PZTs acoplados.



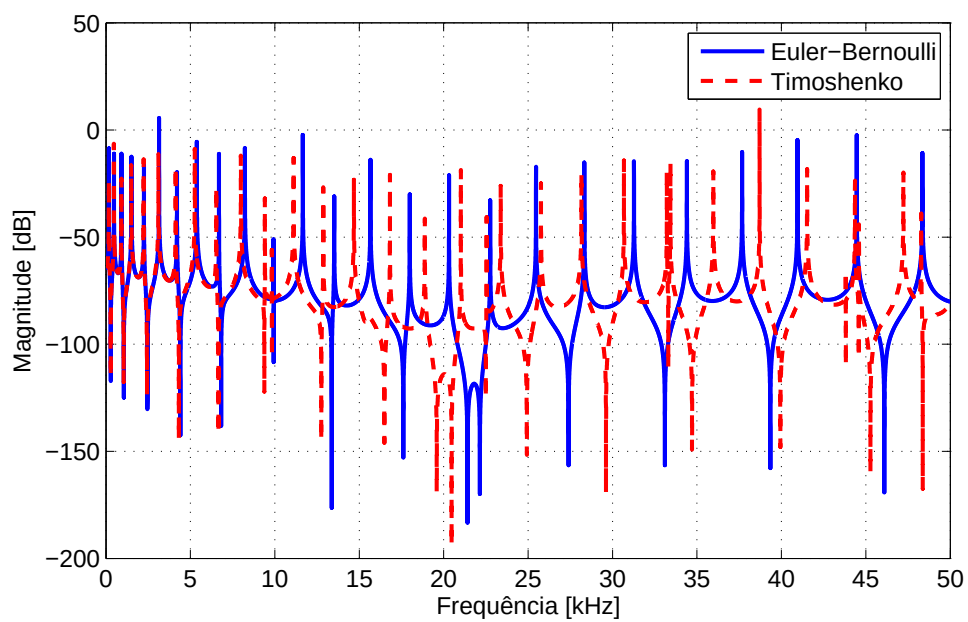
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 18 - Configuração de viga com dois PZTs acoplados.



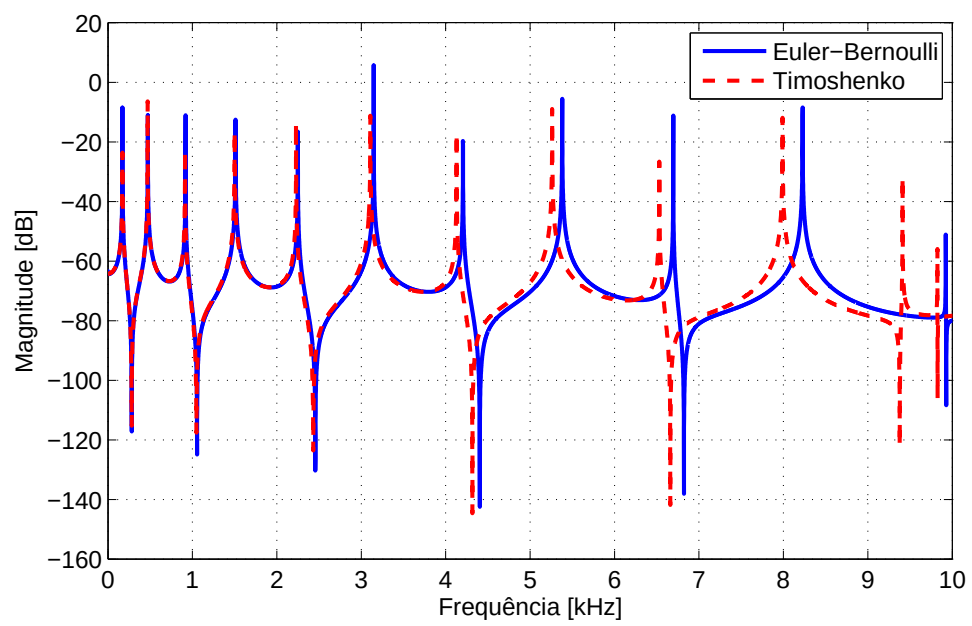
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 19 - FRF de uma viga com dois PZTs acoplados considerando a resposta no PZT 2 e a entrada no PZT 1.



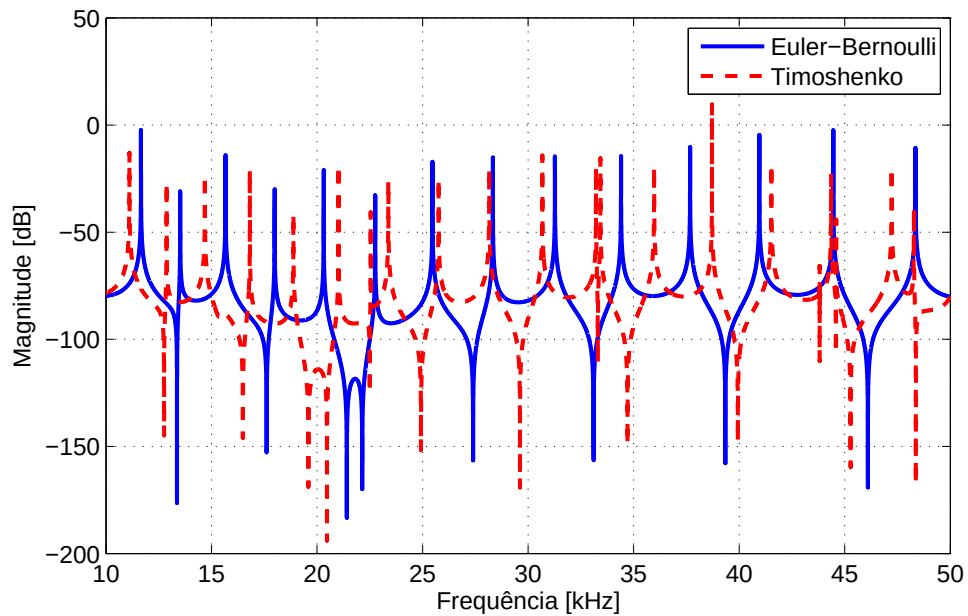
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 20 - FRF de uma viga com dois PZTs acoplados (para a faixa de frequências de 0 a 10k Hz).



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 21 - FRF de uma viga com dois PZTs acoplados (para a faixa de frequências de 10 a 50 kHz).



Fonte: dados do próprio autor.

Como observado no capítulo 2, os dois modelos apresentam diferenças, principalmente para faixas de frequências acima de 3 kHz. O modelo de Timoshenko apresenta um grau de liberdade a mais, a rotação do PZT, θ_p . Esses dois modelos serão utilizados para o projeto de controladores e detecção de danos estruturais.

5 ELEMENTO ESPECTRAL COM CONTROLE ATIVO

A modelagem por elementos espectrais permite também o projeto de sistemas de controle. Tais controladores podem atuar sobre elevados níveis de vibração, sem qualquer informação estrutural complementar e, também, podem ser acionados no contexto em que as vibrações indesejadas são originadas por falhas estruturais. Neste caso, um sistema de monitoramento da integridade estrutural é requerido para estratégias de reparo e/ou restrição de uso do equipamento/máquina sejam adotadas. Nesta seção são apresentadas formulações para a implementação de um sistema de controle usando a viga estrutural com o elemento piezelétrico acoplado.

5.1 CONTROLADOR PID ESPECTRAL

O controle proporcional-integral-derivativo (PID) foi implementado para o controle de vibrações em uma viga com materiais piezelétricos, figura 22. A tensão elétrica $V_c(t)$ aplicada no PZT é determinada pela vibração medida no ponto $x = x_0$ e é dada pela equação (159)

$$V_c(t) = -K_p w(x_0, t) - K_d \dot{w}(x_0, t) - K_i \ddot{w}(x_0, t) \quad (159)$$

sendo K_p , K_d e K_i os ganhos proporcional, derivativo e integral, respectivamente. A equação (159) pode ser reescrita na forma espectral como

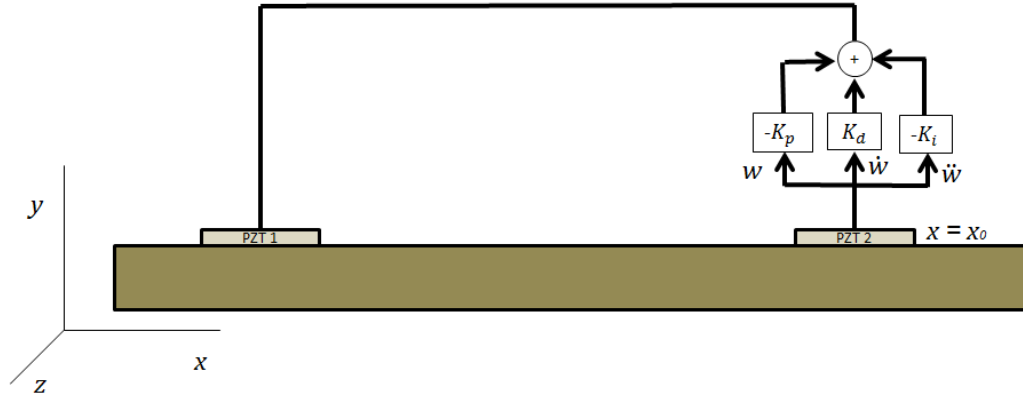
$$V_c(\omega) = -(K_p + i\omega K_d - \omega^2 K_i)W(x_0, \omega) \quad (160)$$

com

$$w(x_0, t) = W(x_0, \omega) \exp^{-i\omega t} \quad (161)$$

Usando uma função de forma como na equação (48), o deslocamento medido $W(x_0, \omega)$ pode ser relacionado com o vetor de deslocamento nodais espectrais $\mathbf{d}$ pelas funções de forma tal que $W(x_0, \omega) = \mathbf{N}_W(x_0, \omega)\mathbf{d}(\omega)$, sendo x_0 a posição do sensor. Assim, a equação da tensão elétrica

Figure 22 - Configuração de uma viga com dois PZTs e controle PID.



Fonte: dados do próprio autor.

pode ser reescrita por

$$V_c(\omega) = -(K_p + i\omega K_d - \omega^2 K_i) \mathbf{N}_W(x_0, \omega) \mathbf{d}(\omega) \quad (162)$$

A mesma estratégia pode ser adotada para as forças $\mathbf{f}_c^{piezo}$ em cada grau de liberdade do atuador, tal que

$$\begin{aligned} N^p &= bd_{31} E_p V_c(\omega) = -\chi_N \mathbf{N}_W(x_0, \omega) \mathbf{d}(\omega) \\ M^p &= \frac{1}{2} bd_{31} E_p h V_c(\omega) = -\chi_M \mathbf{N}_W(x_0, \omega) \mathbf{d}(\omega) \end{aligned} \quad (163)$$

sendo

$$\mathbf{f}_c^{piezo} = \begin{Bmatrix} -N^p & 0 & -M^p & N^p & 0 & M^p \end{Bmatrix}^T \quad (164)$$

e, também, considerando

$$\begin{aligned} \chi_N &= bd_{31} E_p (K_p + i\omega K_d - \omega^2 K_i) \\ \chi_M &= \frac{1}{2} bd_{31} E_p h (K_p + i\omega K_d - \omega^2 K_i) \end{aligned} \quad (165)$$

Considerando $\mathbf{f}_c^{piezo} = \mathbf{S}_{piezo}(\omega)\mathbf{d}(\omega)$, pode-se definir $\mathbf{S}_{piezo}(\omega)$ tal que

$$\mathbf{S}_{piezo}(\omega) = \begin{bmatrix} -\chi_N \mathbf{N}_w(x_0, \omega) \\ \mathbf{0} \\ -\chi_M \mathbf{N}_w(x_0, \omega) \\ \chi_N \mathbf{N}_w(x_0, \omega) \\ \mathbf{0} \\ \chi_M \mathbf{N}_w(x_0, \omega) \end{bmatrix} \quad (166)$$

Substituindo a relação anterior na equação de somatória de forças se obtém a equação de elemento espectral para uma viga de duas camadas (viga mais elementos piezelétricos) com os ganhos do controlador PID. Neste caso, a equação final do movimento é dada por

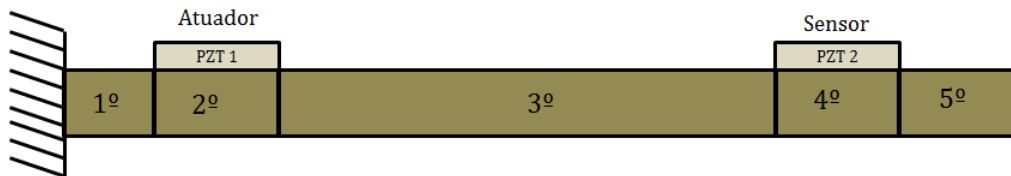
$$\mathbf{S}_{controle}(\omega)\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (167)$$

sendo

$$\mathbf{S}_{controle}(\omega) = \mathbf{S}(\omega) + \mathbf{S}_{piezo}(\omega) \quad (168)$$

Considerando os conceitos abordados neste capítulo, o controle PID foi implementado para a viga na condição engastada-livre, conforme mostra a figura (23). O modelo obtido foi através da teoria de Euler-Bernoulli considerando 5 elementos. O PZT do segundo elemento foi usado como atuador e o PZT do quarto elemento foi utilizado como sensor. Diferentes ganhos do controlador foram avaliados através de simulações numéricas. Os valores foram definidos de forma arbitrária para uma avaliação predominantemente qualitativa. Na figura 24 apresenta-se a resposta em frequência com e sem controle, com ganhos PID dados por: $K_p = 5 \times 10^6$, $K_d = 1 \times 10^4$; $K_i = 0,005$. A figura 25 mostra a resposta em frequência com e sem controle, com ganhos PID dados por: $K_p = 5 \times 10^5$, $K_d = 1000$; $K_i = 0,05$.

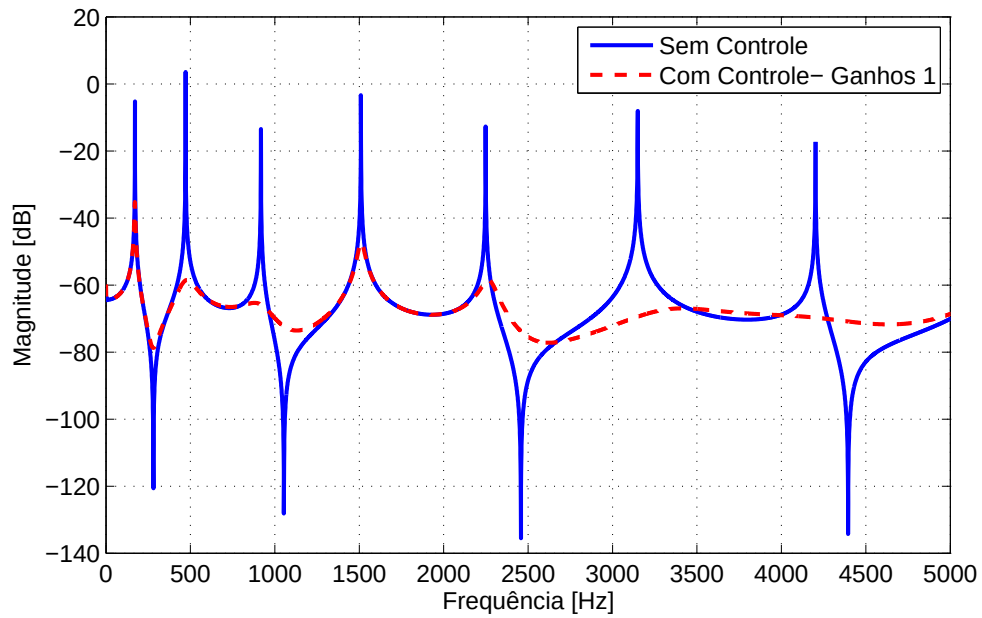
Figure 23 - Configuração de uma viga com dois PZTs acoplados, sendo o PZT 1 o atuador e o PZT 2 o sensor de saída.



Fonte: dados do próprio autor.

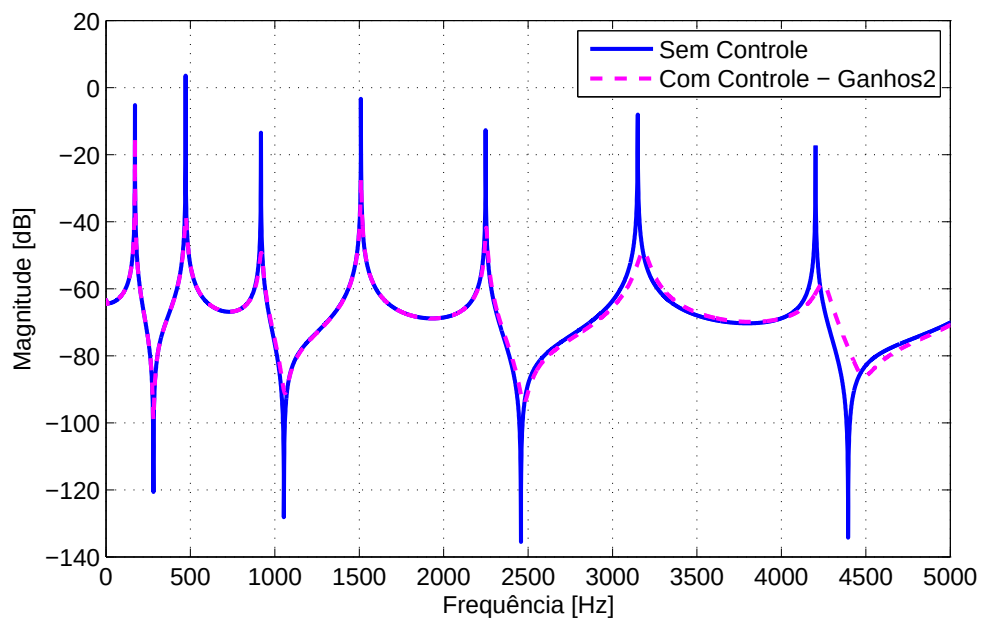
Para uma melhor visualização a figura 26 mostra uma comparação da resposta em frequência para os dois ganhos. O controle PID foi eficaz na redução das amplitudes das frequências naturais para a viga engastada. A implementação dos ganhos PID no modelo espectral é feita de maneira simples, de modo que esses ganhos são apenas somados nas posições dos graus de liberdade dos atuadores, através do uso da matriz definida na equação 166.

Figure 24 - FRF da viga Engastada-Livre com e sem controle, para os ganhos ($K_p = 5000000$, $K_d = 10000$; $K_i = 0.005$).



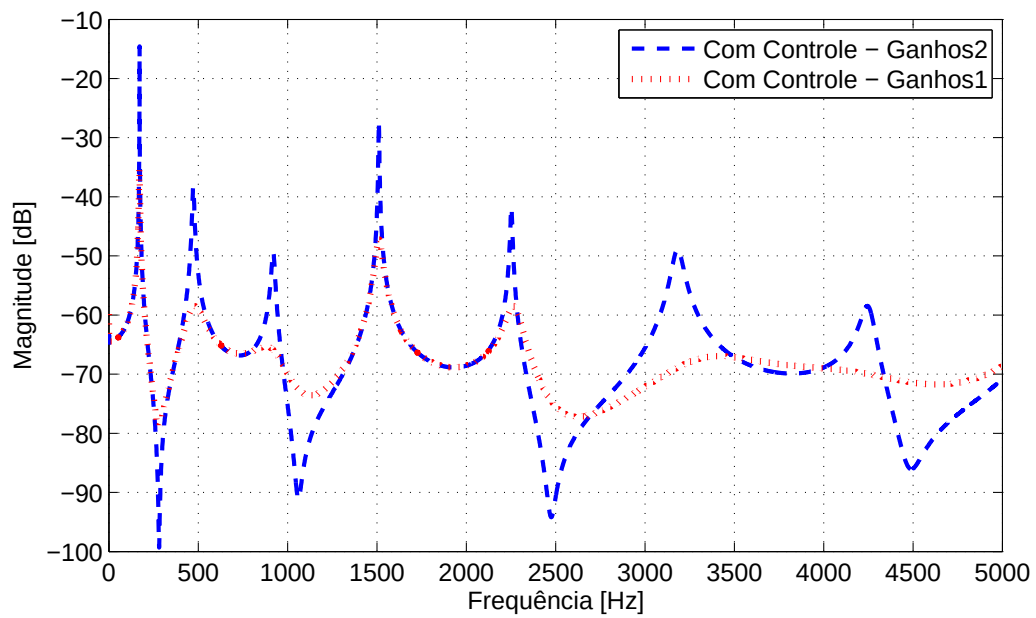
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 25 - FRF da viga Engastada-Livre com e sem controle, para os ganhos ($K_p = 500000$, $K_d = 1000$; $K_i = 0.05$).



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 26 - FRF da viga Engastada-Livre com controle.



Fonte: dados do próprio autor.

5.2 CONTROLADORES MODERNOS

Novas técnicas de controle têm sido desenvolvidas nos últimos anos. Em geral, tais técnicas requerem a representação dinâmica do sistema a ser controlado através da representação no espaço de estados. Nos trabalhos de (SILVA, 2005), (SANTOS, 2008), e (BUENO, 2007) técnicas de controladores robustos usando desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) foram usados no controle ativo de vibrações. (MOREIRA, 1998) também projetou um controlador com abordagem H_∞ , porém adaptado para específicas bandas de frequência.

As diferentes metodologias de controle, em geral, estão formuladas no domínio do tempo. Neste sentido, um modelo espectral de múltiplos graus de liberdade implica em um projeto de controlador MIMO (do inglês, *Multiple-Input Multiple-Output*) também devido a um único atuador PZT inserir momentos em 2 graus de liberdade. Então, nesta seção apresenta-se uma proposta de metodologia de projeto de controlador para modelos espectrais. Em particular, sem perda de generalidade, usa-se neste trabalho o controlador Regulador Linear Quadrático (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*), visto que é uma das técnicas mais populares na literatura de controle por realimentação. Detalhes desta formulação são apresentados no anexo C.1. A estratégia central proposta neste trabalho consiste em considerar um par de PZT's (um atuador e um sensor) e escrever uma função de resposta em frequência definida pela relação da tensão elétrica no sensor pela tensão elétrica no atuador. Assim, tem-se um sistema SISO, (do inglês *Single-Input Single-Output*) nas coordenadas de tensão elétrica ao invés do sistema nas coordenadas físicas de deslocamento, velocidade e aceleração. A abordagem proposta é apresentada na seção seguinte.

5.3 CONTROLE COM ELEMENTO ESPECTRAL

Nesta seção apresenta-se uma formulação que relaciona ganhos obtidos por qualquer técnica de realimentação de estados com um modelo espectral. Assim, a partir de um controlador SISO, projetado nas coordenadas modificadas é possível avaliar os efeitos do ganho de controle em qualquer dos graus de liberdade do sistema físico original.

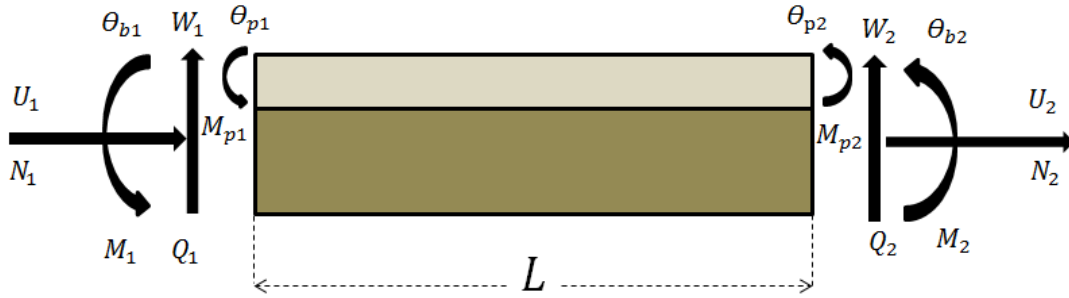
Considere o modelo espectral de uma viga modelada através da teoria de Timoshenko, considerando quatro graus de liberdade por nó, conforme ilustra a figura 27, cujos vetores contendo as forças e os deslocamentos nodais espectrais são, respectivamente,

$$\mathbf{f}(\omega) = \{ N_1 \quad Q_1 \quad M_1 \quad M_1^p \quad N_2 \quad Q_2 \quad M_2 \quad -M_2^p \}^T \quad (169)$$

e

$$\mathbf{d}(\omega) = \{ U_1 \quad W_1 \quad \Theta_{b1} \quad \Theta_{p1} \quad U_2 \quad W_2 \quad \Theta_{b2} \quad \Theta_{p2} \}^T \quad (170)$$

Figure 27 - Forças e deslocamentos em um elemento de viga com 8 graus de liberdade.



Fonte: dados do próprio autor.

A tensão elétrica aplicada no PZT, $V_c(\omega)$, é relacionada com o força axial N^p , conforme equação (163), e a tensão elétrica de saída do PZT, $V_o(\omega)$, é dada por (PEAIRS et al., 2007) e (CRAWLEY ; ANDERSON, 1990),

$$V_o(\omega) = C_s[\theta_{pj}(\omega) - \theta_{pi}(\omega)] \quad (171)$$

sendo C_s dada por

$$C_s = \frac{E_p h^{sensor} g_{31} b}{2L^{sensor}} \quad (172)$$

com E_p o módulo de Young do sensor, h^{sensor} a espessura, b a largura do sensor, L^{sensor} o comprimento e g_{31} o coeficiente de tensão elétrica do sensor. Os índices j e i denotam as posições dos graus de liberdade θ_p do sensor no vetor de deslocamentos nodais espectrais $\mathbf{d}$. Com isto, tem-se a FRF obtida através da tensão elétrica de saída pela entrada por

$$\frac{V_o(\omega)}{V_c(\omega)} = \frac{C_s[\theta_{pj}(\omega) - \theta_{pi}(\omega)]}{\frac{N^p}{bd_{31}E_p}} \quad (173)$$

$$\frac{V_o(\omega)}{V_c(\omega)} = C_s C_a \left[\frac{\theta_{pj}(\omega)}{N^p} - \frac{\theta_{pi}(\omega)}{N^p} \right] = C_s C_a [Y_{jz} - Y_{iz}] \quad (174)$$

sendo $C_a = \frac{N^p}{bd_{31}E_p}$ a constante do atuador. O índice z indica as colunas da matriz espectral global $\mathbf{S}(\omega)$ que corresponde a posição de N^p no vetor de forças $\mathbf{f}(\omega)$.

Denotando $C_s C_a [Y_{jz} - Y_{iz}]$ por $\tilde{Y}$, então, denota-se a FRF por

$$\frac{V_o(\omega)}{V_c(\omega)} = \tilde{Y}(\omega) \quad (175)$$

e, portanto, com a função de resposta em frequência $\tilde{Y}(\omega)$ é possível obter as matrizes em espaço de estados do sistema usando métodos de identificação de modelos como, por exemplo, o Algoritmo para Realização de Autosistemas (ERA, do inglês *Eigensystem Realization Algorithm*), cujos detalhes da formulação do algoritmo ERA não são tratadas neste trabalho, mas podem ser encontrados em (JUANG; PAPPA, 1985) ou em (JUANG, 1994). Destaca-se que no processo de identificação, o número de modos pode ser escolhido de acordo com os requisitos de cada projeto, sendo que problemas de controle são geralmente baseados em um número reduzido de modos para estruturas com pequena densidade modal.

A matriz de ganho $\tilde{\mathbf{G}}$ do controlador pode ser calculada utilizando as matrizes de estado $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}$ e $\tilde{\mathbf{D}}$ identificadas via ERA, ou algum outro método de interesse, como, por exemplo, o método de identificação por subespaço (OVERSCHEE; DE MOOR, 1994), (BUENO, 2007). Assim, a função de transferência em malha fechada é dada por

$$Y_{control}(\omega) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{control})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}} \quad (176)$$

onde $\mathbf{A}_{control}$ é dada por

$$\mathbf{A}_{control} = \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{G}} \quad (177)$$

Através das equações (220), (221) e (176), a função de transferência do controlador é dada por

$$\tilde{\mathbf{G}} = \frac{\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}_{control}}{\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{Y}}_{control}} \quad (178)$$

visto que

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{control}(\omega) = \frac{\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)}{1 + \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)} \quad (179)$$

Com a função de transferência $\tilde{\mathbf{G}}$ do controlador, é possível utilizar a equação (163) para somar estes ganho na matriz do elemento espectral. No entanto, é preciso incluir as constantes C_a e C_s para alterar o sistema de coordenadas no qual o ganho de controle é escrito. Ainda, para incluir o ganho de controle no sistema completo, considere o vetor de forças de controle $\mathbf{f}^{control}(\omega)$ definido por

$$\mathbf{f}^{control}(\omega) = \left\{ \begin{matrix} -N^p & 0 & M^p & M_{pzt}^p & N^p & 0 & -M^p & -M_{pzt}^p \end{matrix} \right\}^T \quad (180)$$

Com isto, considerando também as equações (173) e (175) é possível escrever

$$\mathbf{S}_{element}^{control} \mathbf{d} = \mathbf{f}^{control}(\omega) \quad (181)$$

sendo a matriz do elemento atuador com a influência do ganho de realimentação definida por

$$\mathbf{S}_{element}^{control} = \frac{\tilde{G}(\omega)}{C_s C_a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h/2 & 0 & 0 & 0 & h/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_p/2 & 0 & 0 & 0 & h_p/2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h/2 & 0 & 0 & 0 & -h/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_p/2 & 0 & 0 & 0 & -h_p/2 \end{bmatrix} \quad (182)$$

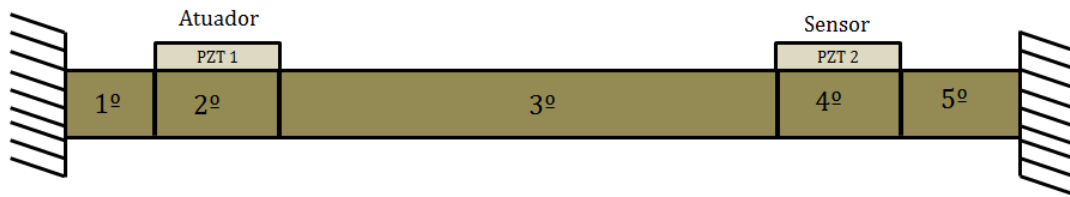
Finalmente, a matriz 8×8 acima deve ser convenientemente posicionada em uma matriz nula, de mesma ordem do sistema físico completo, para se obter a matriz $\mathbf{S}^{control}$ tal que, sendo $\mathbf{f}(\omega)$ definida por forças externas com realimentação de forças de controle e sendo $[\mathbf{S} - \mathbf{S}^{control}]$ a matriz espectral do sistema com controle, tem-se

$$[\mathbf{S} - \mathbf{S}^{control}] \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (183)$$

Esta nova metodologia foi aplicada para a mesma viga usada para o controle PID, porém na configuração bi-engastada, conforme ilustra a figura 28. Inicialmente, foi calculado a função de resposta em frequência entre a rotação no PZT 2 (sensor), θ_p , e a força axial no PZT 1 (atuador), N^p . Com esta FRF o modelo em espaço de estados foi obtido através do ERA. Métodos de identificação como o ERA podem adicionar modos computacionais nos modelos identificados para melhorar as estimativas, assim foi realizada uma redução do modelo na representação em espaço de estados para reduzir a ordem das matrizes. A metodologia usada para a redução do modelo foi a realização balanceada, cujos detalhes podem ser encontrados em (SKOGESTAD ; POSTLEWAITE, 2005) ou (OBINATA; ANDERSON, 2001).

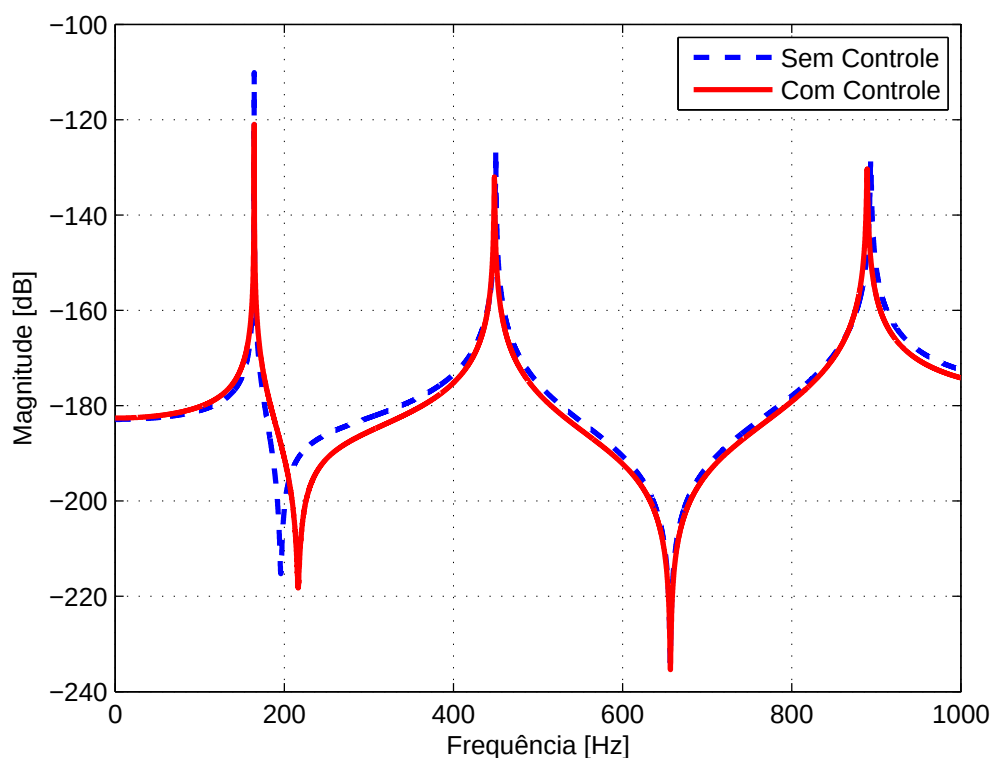
As Figuras 29, 30 e 31 mostram as FRFs entre o deslocamento transversal w , a rotação da viga θ_b e a rotação do PZT θ_p , medidos no PZT 2, e o força axial N^p , medido no PZT 1, repectivamente, com e sem controle. Nota-se nestes resultados que o controlador projetado introduz uma pequena alteração nas frequências devido a um aparente efeito de rigidez. Atribui-se tais diferenças a erros de truncamento numérico devido a processos de identificação do modelo no espaço de estados e a redução da ordem das matrizes para remover os modos computacionais. Este tópico é endereçado nas sugestões de trabalhos futuros e, portanto, poderá ser abordado em outros trabalhos. O controlador foi projetado até 1000 Hz, definido para compreender uma hipotética demanda de projeto de atenuação de vibrações nos 3 primeiros modos do sistema.

Figure 28 - Configuração de uma viga Engastada-Engastada com PZTs.



Fonte: dados do próprio autor.

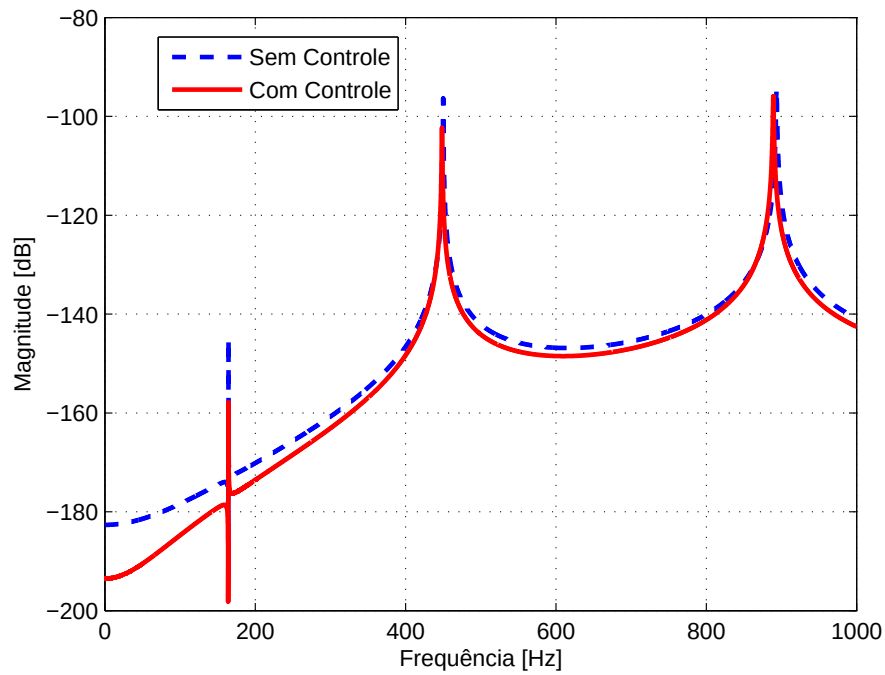
Figure 29 - FRF relacionando w e N^p da viga Engastada-Engastada com e sem controle.



Fonte: dados do próprio autor.

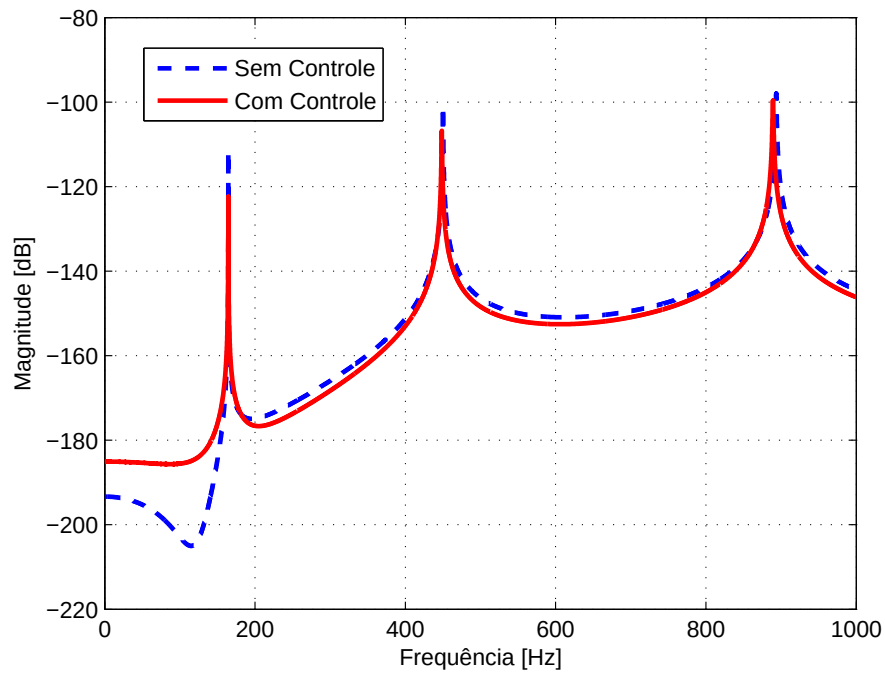
Embora neste capítulo tenham sido discutidas duas abordagens de projeto de controladores de vibrações para modelagem espectral, não são apresentadas discussões comparativas entre os resultados obtidos. Para clareza de entendimento, destaca-se que os ganhos do controlador PID foram definidos de forma arbitrária, principalmente por neste caso ser um exemplo numérico apresentado para ilustrar o procedimento matemático da implementação do controlador na modelagem espectral. No entanto, para o projeto em uma aplicação prática de engenharia, o analista precisa avaliar o nível de força requerida pelo sistema para dimensionar o atuador. Especialmente no contexto de atuadores piezelétricos, é importante avaliar previamente o nível máximo de tensão elétrica que o transdutor suporta sem ter prejudicada sua polarização e, portanto, sem degradar sua capacidade de atuação.

Figure 30 - FRF relacionando θ_b e N^p da viga Engastada-Engastada com e sem controle.



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 31 - FRF relacionando θ_p e N^p da viga Engastada-Engastada com e sem controle.



Fonte: dados do próprio autor.

Similarmente, as matrizes do controlador LQR foram definidas de forma arbitrária visto que, prioritariamente, a ideia principal neste trabalho é introduzir a modelagem matemática

que permite o uso de técnicas modernas de controle (i.e., no espaço de estados) para projetos envolvendo modelos espectrais da estrutura base. Assim, viabiliza-se também o uso de técnicas de controle robusto - apresentadas por exemplo por (SILVA, 2005), (BUENO, 2007), entre outros - que, igualmente, requerem uma representação no espaço de estados para se obter o ganho de realimentação do controlador.

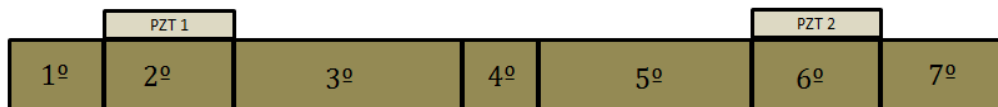
6 MONITORAMENTO DA INTEGRIDADE ESTRUTURAL

Visando discutir o projeto simultâneo de um sistema de controle ativo de vibrações e um sistema SHM, i.e., de monitoramento estrutural, neste capítulo são apresentadas discussões envolvendo a estrutura previamente considerada nas análises de controle (capítulo 5). Neste caso, o modelo foi considerado com 7 elementos, como na figura (32). Esta configuração foi escolhida para permitir a variação do módulo de elasticidade de um elemento de interesse possibilitando, assim, simular um dano estrutural conforme previamente discutido por (LEE, 2009). A representação do dano no módulo de elasticidade foi dada por

$$\bar{E} = E(1 - D) \quad (184)$$

sendo E o módulo de elasticidade para o modelo intacto e $\bar{E}$ o módulo de elasticidade para o modelo com dano. A severidade do dano, D , é assumida em todo o elemento, logo, $D = 0$ significa que o elemento está intacto, enquanto $D = 1$ implica uma completa ruptura do material devido ao dano.

Figure 32 - Configuração da viga multicamadas com 7 elementos para avaliação de danos estruturais.

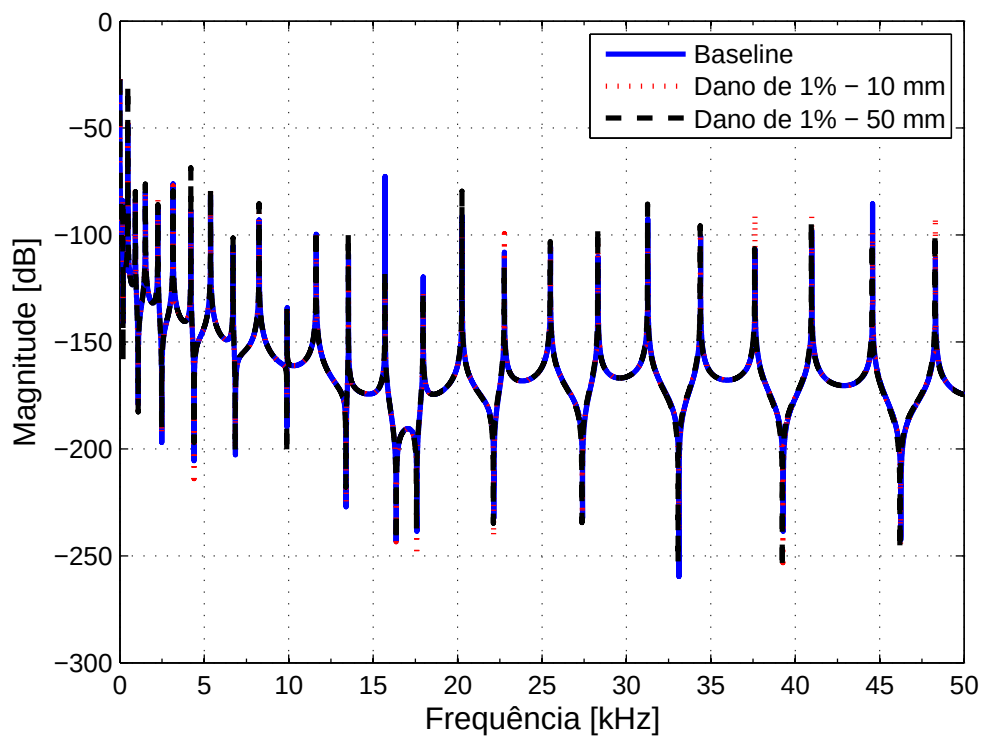


Fonte: dados do próprio autor.

Além da proposta de (LEE, 2009) para representação do dano (Eq. 184), alguns autores utilizam outras estratégias como, por exemplo, alteração do momento de inércia (ou área de seção transversal), conforme discutido por (MARQUI, 2007), (BAPTISTA, 2010), (FRANCO, 2009), entre outros. Em particular, a abordagem adotada neste trabalho busca representar um dano tipo trinca que resulte em alteração geométrica desprezível.

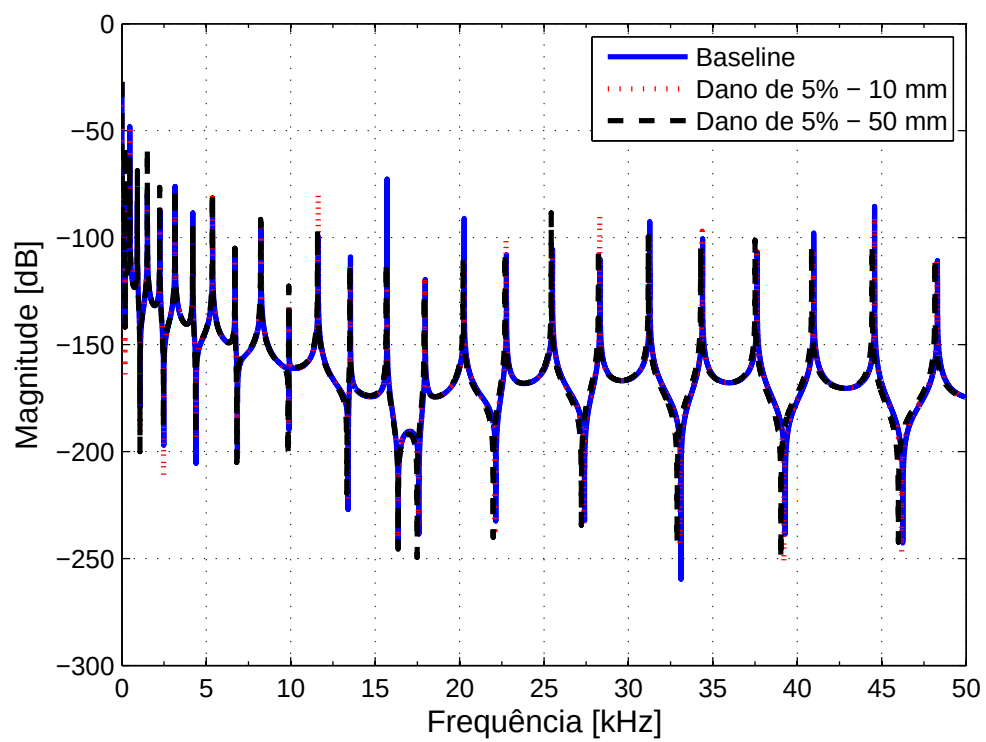
Nas figuras (33) à (44) tem-se a resposta em frequência calculada para saída no PZT 2 para diversas alterações nas propriedades físicas e geométricas do 4º elemento mostrado na figura (32). O comprimento desse elemento foi calculado com dois valores, i.e., 10 mm e 50, mm definidos de forma arbitrária. O módulo de elasticidade também foi alterado e as variações do dano D foram de 1%, 5%, 10%, 20%, 50% e 80%. Para se obter os resultados das figuras (33) à (38) foi utilizado o modelo de Euler-Bernoulli e, para as figuras (39) à (44) foi utilizado o modelo de Timoshenko.

Figure 33 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 1% usando o modelo de Euler-Bernoulli



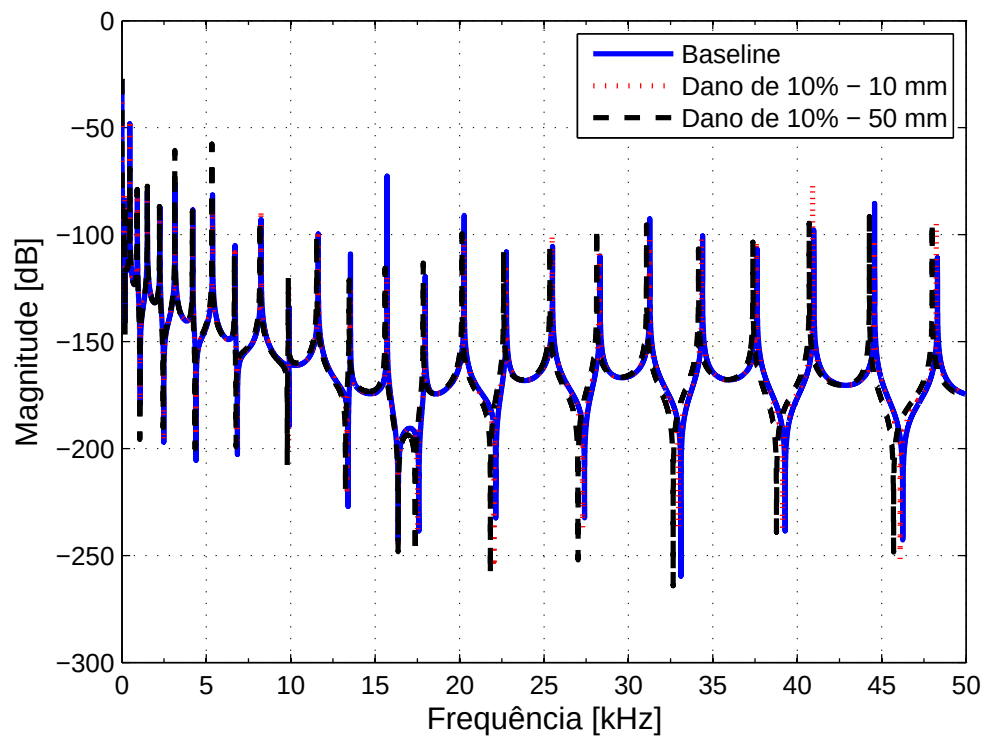
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 34 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 5% usando o modelo de Euler-Bernoulli



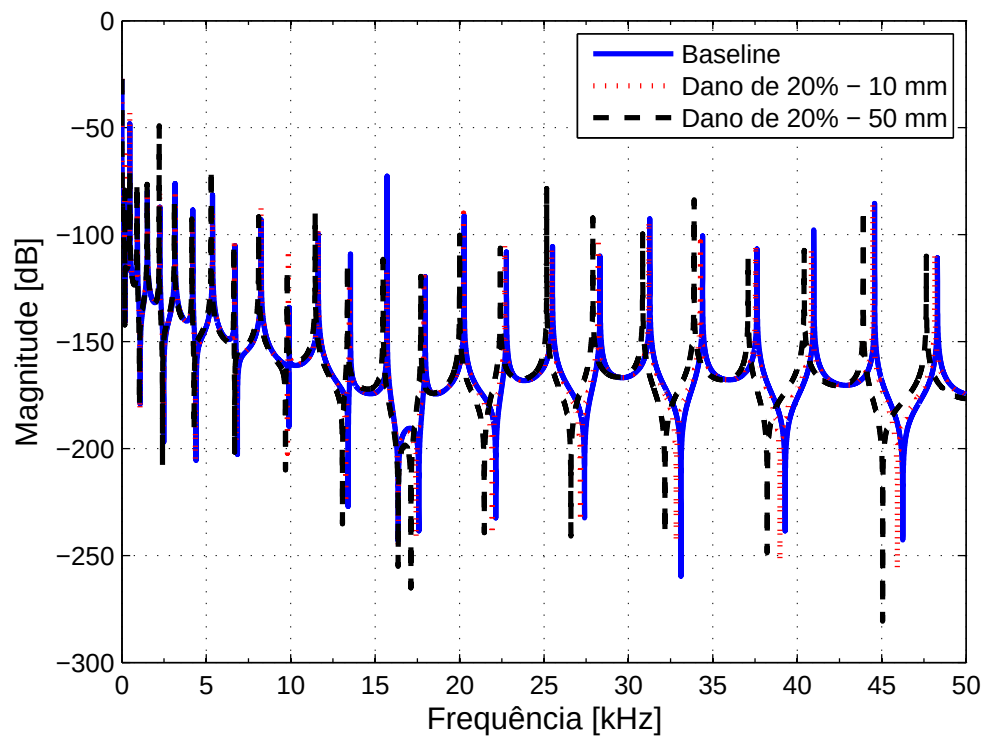
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 35 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 10% usando o modelo de Euler-Bernoulli



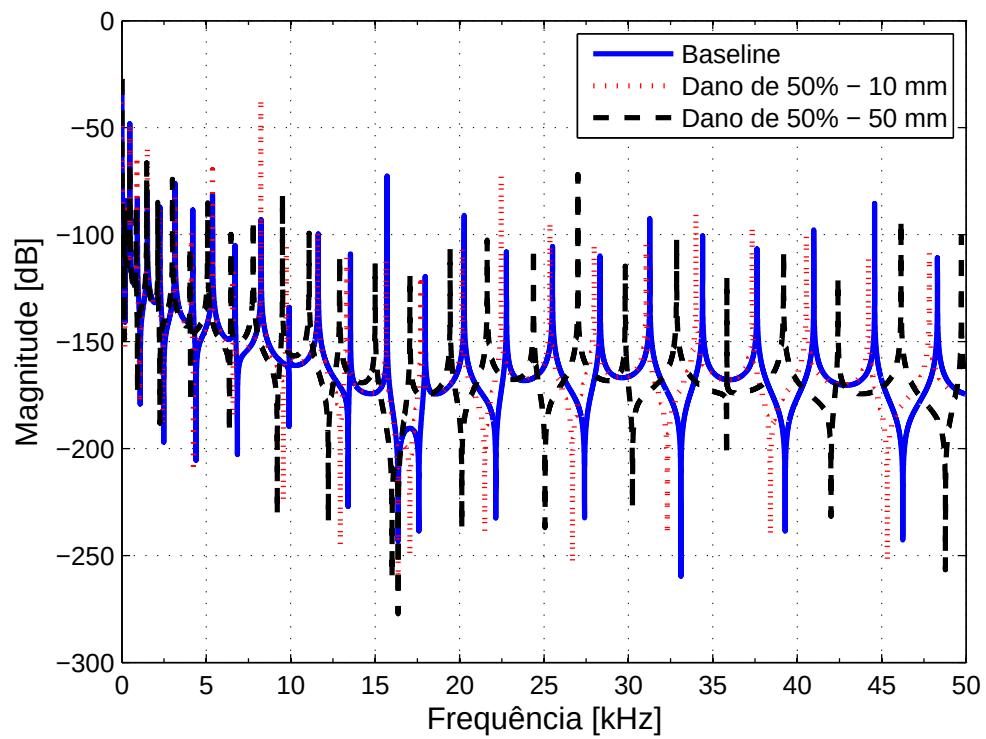
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 36 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 20% usando o modelo de Euler-Bernoulli



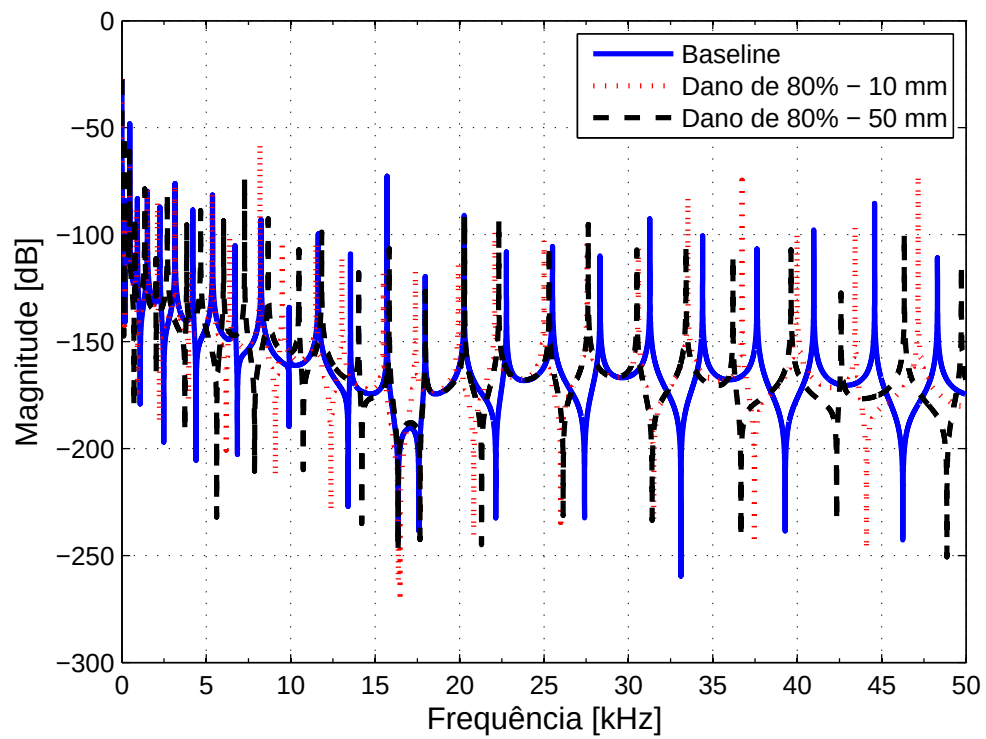
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 37 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 50% usando o modelo de Euler-Bernoulli



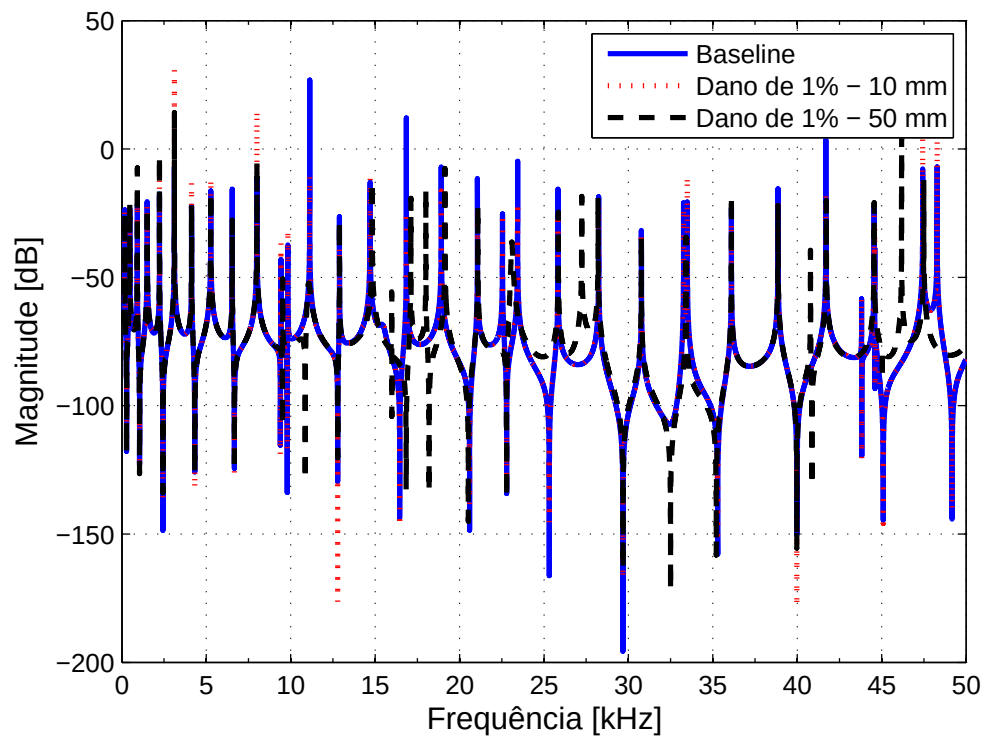
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 38 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 80% usando o modelo de Euler-Bernoulli



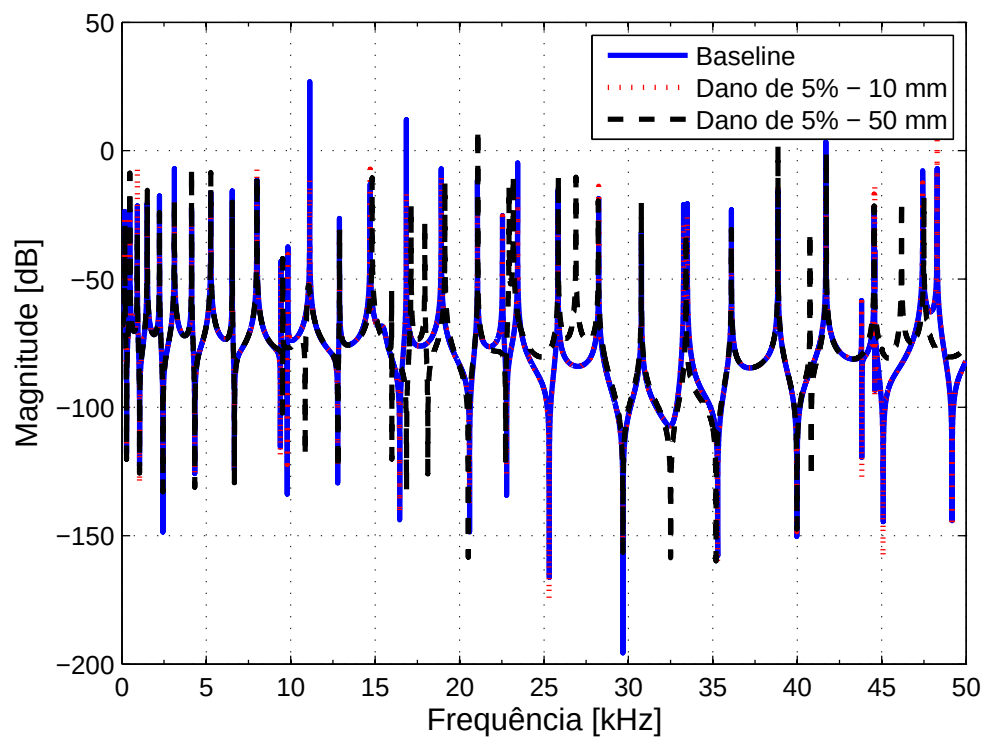
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 39 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 1% usando o modelo de Timoshenko



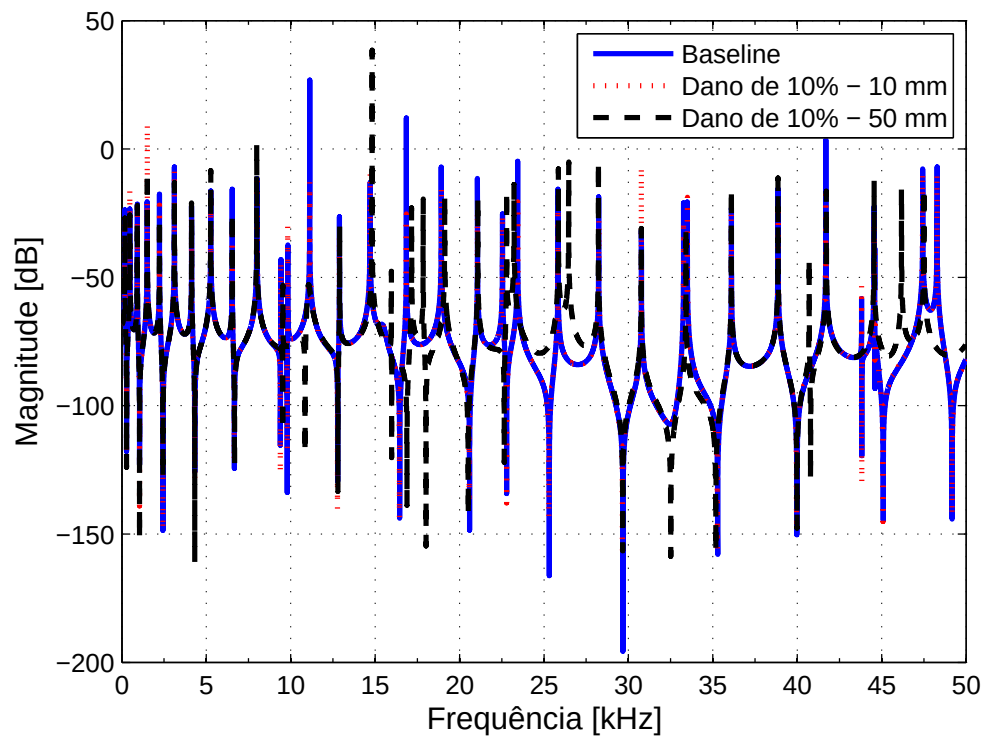
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 40 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 5% usando o modelo de Timoshenko



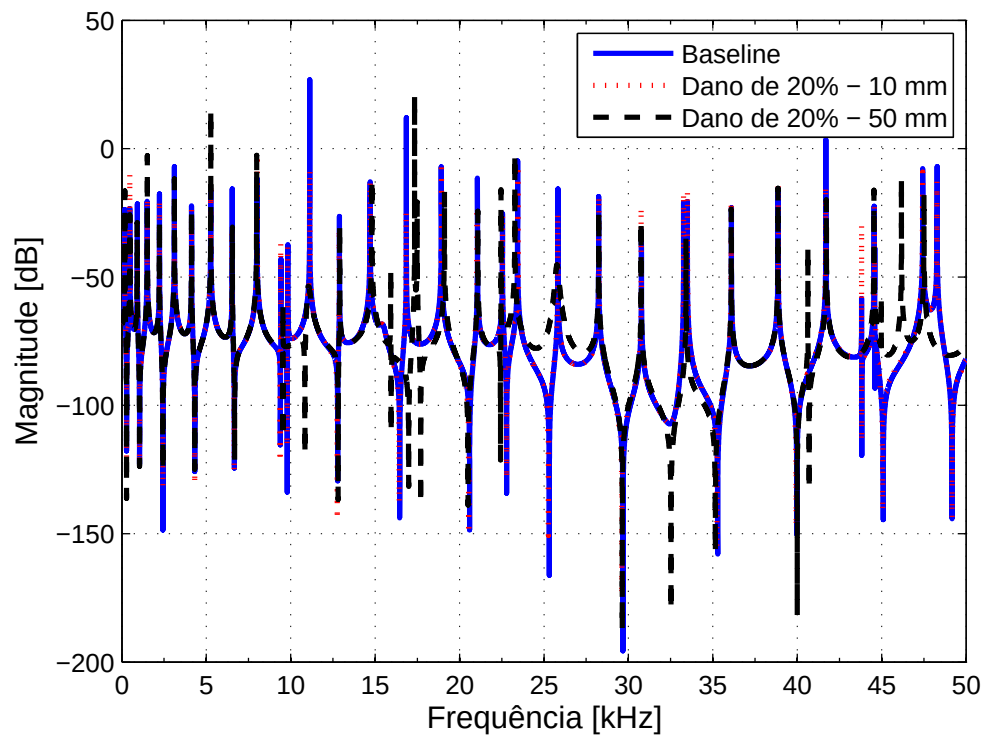
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 41 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 10% usando o modelo de Timoshenko



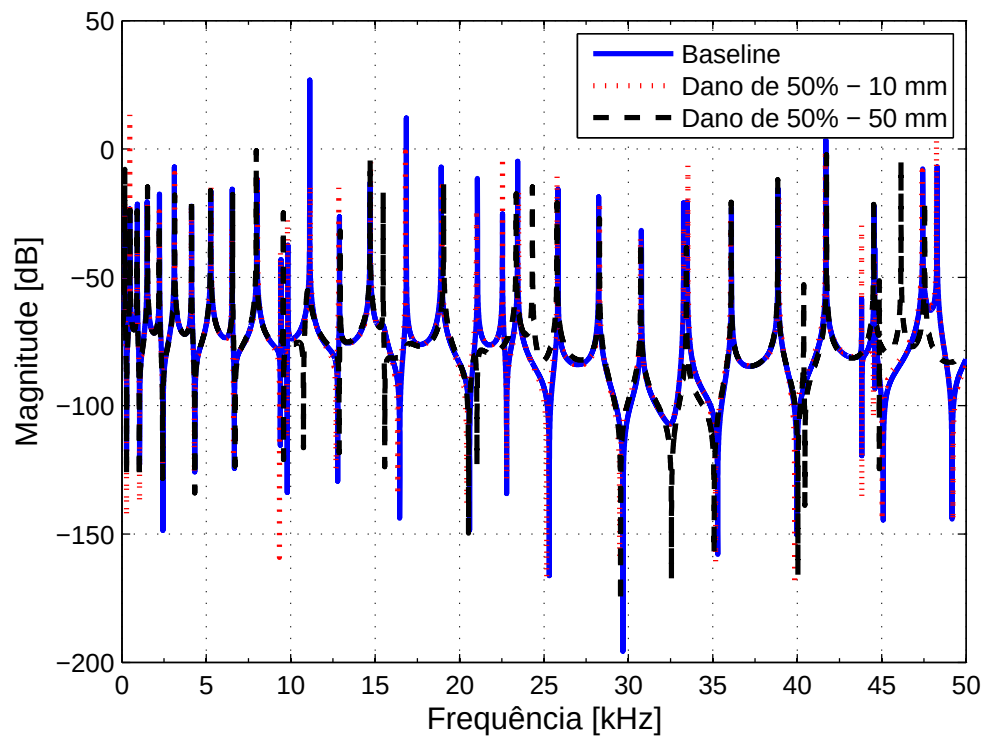
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 42 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 20% usando o modelo de Timoshenko



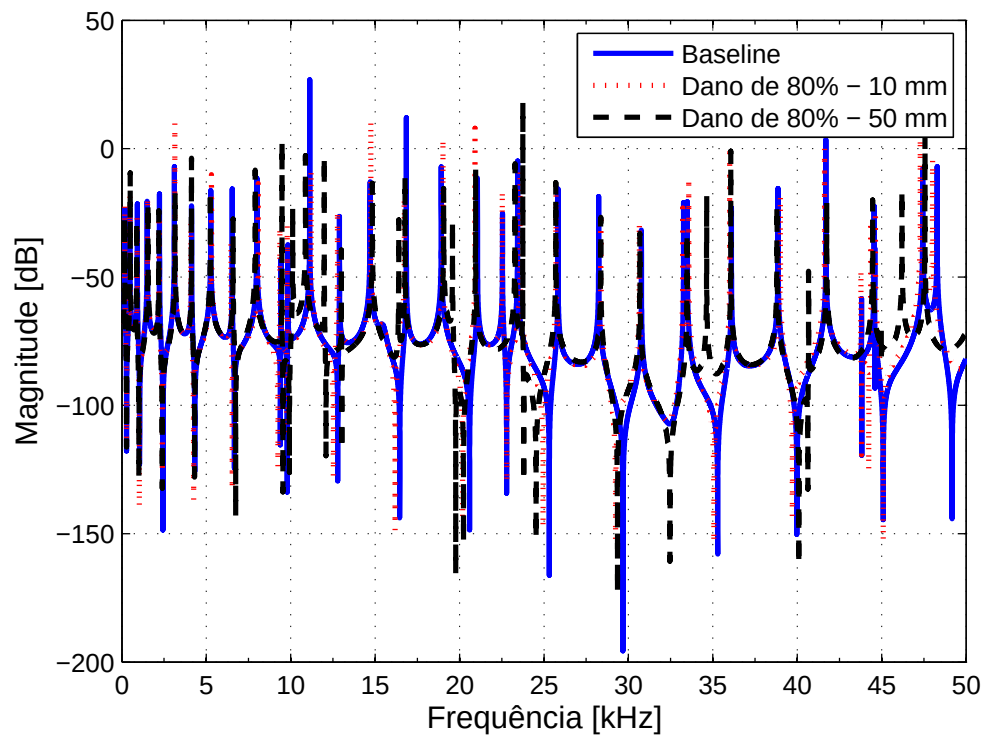
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 43 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 50% usando o modelo de Timoshenko



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 44 - FRF para a estrutura intacta e com dano de 80% usando o modelo de Timoshenko



Fonte: dados do próprio autor.

Os dois modelos apresentaram alterações nas funções de resposta em frequência para variações nas propriedades estruturais. Assim, em princípio, podem ser calculados índices de detecção de danos admitindo que, em situações práticas de engenharia, é possível conhecer as FRFs para ambas condições, ou seja, na condição intacta (sem dano) e condição desconhecida (com ou sem dano). De forma geral, observa-se redução nas frequências naturais do sistema - o que é compatível com a redução do módulo de elasticidade. Ainda, fica evidente a influência do comprimento do elemento com falha o que se propõe associar ao comprimento de uma trinca na viga. Neste sentido, destaca-se que esta estratégia não compreende a simulação da dinâmica de uma trinca, mas sim uma representação linear do sistema em uma situação de dano estrutural.

6.1 DETECÇÃO DE DANOS USANDO ÍNDICES

Diversos trabalhos da literatura de SHM utilizam métricas obtidas a partir de informações da estrutura em monitoramento. Em geral, tais métricas envolvem a comparação das informações da estrutura na condição intacta com uma situação de integridade desconhecida, para qual se deseja concluir se existe o dano. Estas métricas são comumente denominadas *índices de detecção de danos* (MARQUI, 2007; SANTOS et al., 2005; BAPTISTA, 2010; BUENO; MARQUI; LOPES JUNIOR, 2006).

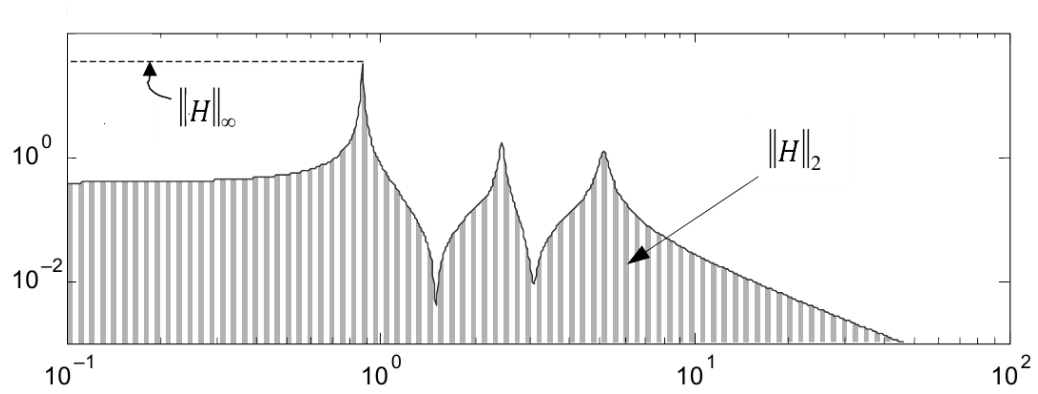
Em particular, para algumas estruturas cuja representação linear é adequada, sabe-se que alterações nas propriedades estruturais podem provocar variações nas FRFs, o que possibilita a utilização de índices de detecção de danos que comparam estas informações. Diversos índices têm sido discutidos em trabalhos da área de SHM. Pode-se citar, com importante destaque, índices baseados nas normas H_2 e H_∞ , além do CCDM, (do inglês, *Coefficient Correlation Deviation Mean*).

As normas H_2 e H_∞ de uma função de transferência $H(\omega)$ são dadas, respectivamente, pelas seguintes equações 185 e 186 e estão representadas na Figura 45. Observe que $tr[H^*(\omega)H(\omega)]$ é a soma das magnitudes quadradas de todos os elementos de $H(\omega)$, isto é, $tr[H^*(\omega)H(\omega)] = \sum_{k,l} |g_{kl}(i\omega)|^2$, sendo tr o traço de uma matriz, que consiste na soma dos elementos da diagonal principal ou na soma dos autovalores. Esta soma pode ser interpretada como um ganho médio do sistema, realizado sobre os elementos da função de transferência e sobre todas as frequências. Já $\sigma_{max}(H(\omega))$ é o maior valor singular de $H(\omega)$. Para um sistema com uma única entrada e uma única saída, SISO, (do inglês, *single-input single-output*), o maior pico da sua função de transferência é a sua norma H_∞ , ou seja, $H_\infty = \max |G(\omega)|$ (GAWRONSKI, 1998).

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} tr(H^*(\omega)H(\omega))d\omega \quad (185)$$

$$\|H\|_{\infty} = \sigma_{\max}(H(\omega)) \quad (186)$$

Figure 45 - Ilustração das normas H_2 e H_{∞} .



Fonte: (GAWRONSKI, 1998)

A seguir apresenta-se uma discussão dos comportamentos de índices de detecção de danos para diferentes severidades, bem como diferentes níveis de amortecimento estrutural. Destaca-se como relevante esta discussão visto que a maioria dos trabalhos da literatura de SHM obtêm os índices a partir de modelos experimentais e, portanto, em geral há uma limitada disponibilidade de informações para uma mesma estrutura.

6.1.1 Avaliação da Detectabilidade baseada em Índices: Faixa de Frequência de 30-50 kHz

Considerando a configuração definida para posições de atuador e sensor com dano equidistante apresenta-se um estudo do comportamento das curvas de resposta em frequência (FRF) obtidas com diferentes severidades de dano e, também, quantidades de amortecimento estrutural diferentes. Neste sentido, nesta seção apresenta-se uma discussão sobre a detectabilidade de um dano a partir de diferentes tipos de índices de detecção amplamente utilizados na literatura. Em particular, a figura 46 apresenta as FRF, para os diversos danos, considerando amortecimento nulo. Os dados desta seção compreende a faixa de 30 a 50 kHz, enquanto na seção 6.1.2 apresenta-se considerações para a faixa de 50 a 100 kHz. Note que estas faixas foram definidas arbitrariamente, porém estão compreendidas em limites amplamente discutidos na literatura (GIURGIUTIU, 2008; BAPTISTA, 2010; GONZALEZ, 2012). Assim, as faixas avaliadas separadamente permitem uma breve discussão das diferenças na detectabilidade em função das frequências consideradas nos cálculos dos índices de detecção de danos. Em particular, sabendo-se que o dano foi simulado a partir da redução do módulo de elasticidade da viga (através do parâmetro D), na figura 46 nota-se claramente a redução da frequência de determinado modo a medida que o dano tem severidade maior.

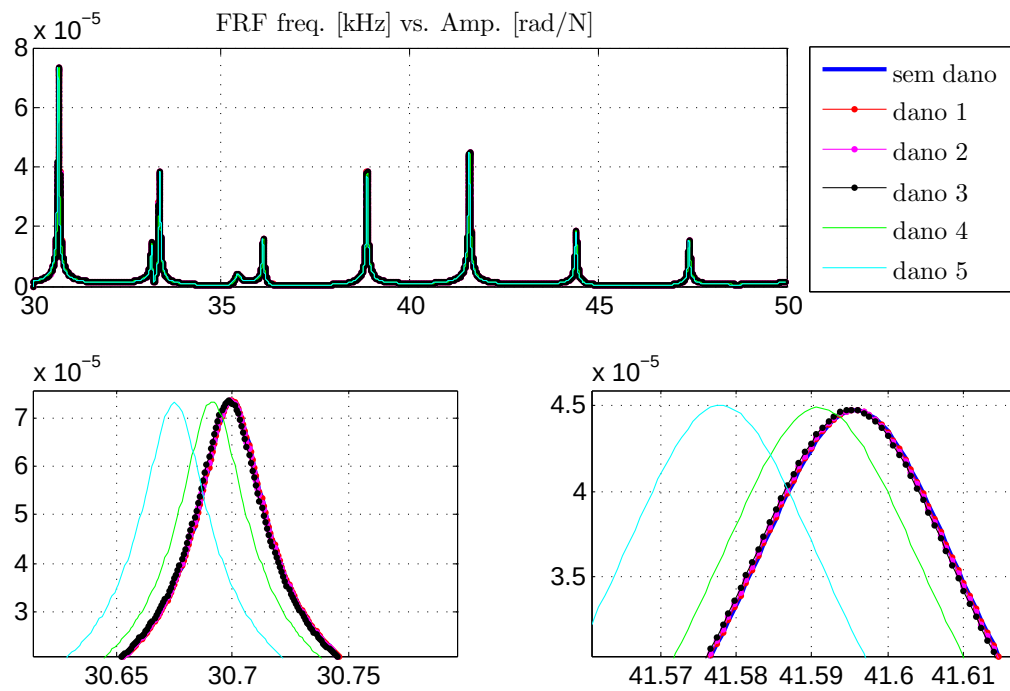
As figuras 47 a 51 apresentam as FRFs para todas as severidades de danos e quantidades de amortecimento indicadas na tabela 7. Os resultados mostram claramente a redução dos picos das FRFs em função do aumento do amortecimento estrutural e, também, as alterações em função dos danos. As quantidades de amortecimento foram incluídas pelo módulo de elasticidade complexo (Eq. 187) da viga através do fator f_E , mostrados na tabela 7, tal que

$$E_{complex} = E(1 + if_E) \quad (187)$$

Table 7 - Severidades de danos e coeficientes do amortecimento estrutural.

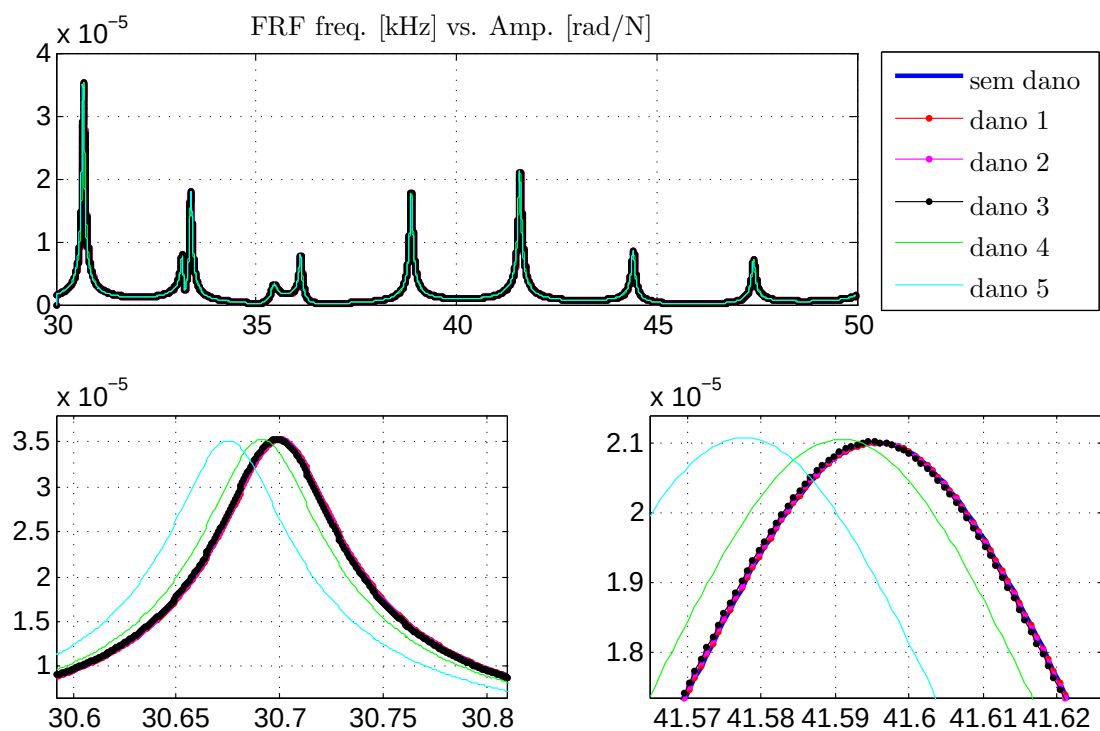
Parâmetro	Valores considerados
D	0,01, 0,05, 0,1, 0,03, 0,05
f_E	0,001, 0,005, 0,01, 0,03, 0,05

Figure 46 - FRF da estrutura sem amortecimento e diferentes severidades de dano.



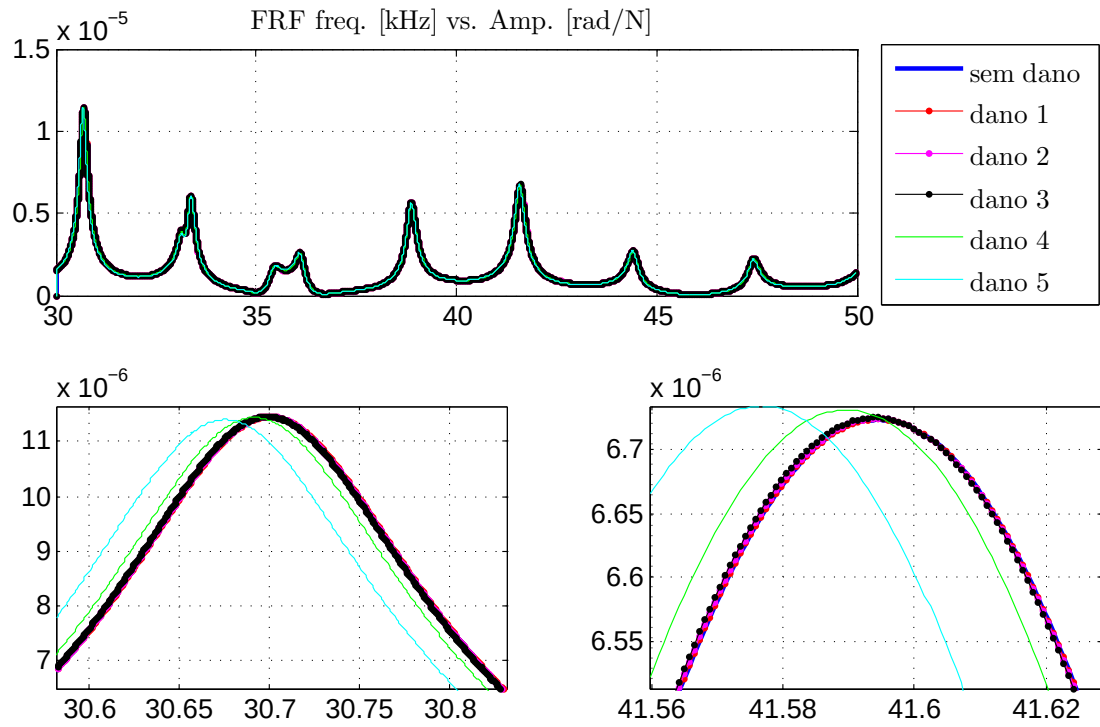
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 47 - FRF da estrutura com amortecimento 1 e diferentes severidades de dano.



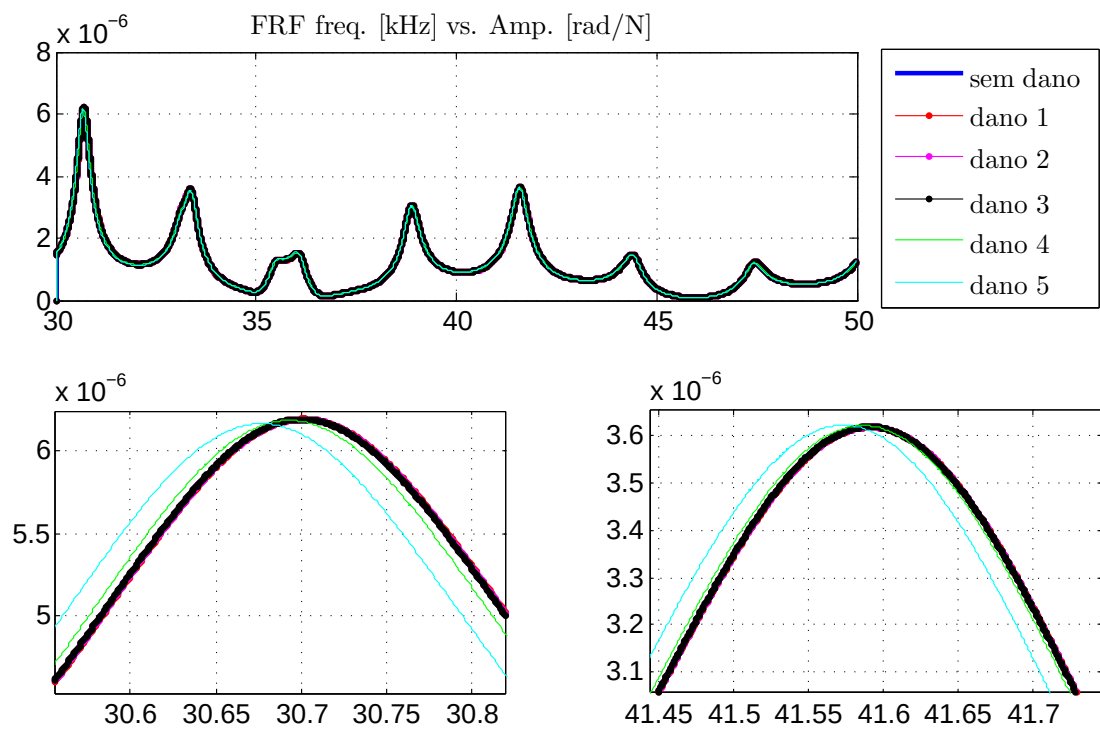
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 48 - FRF da estrutura com amortecimento 2 e diferentes severidades de dano.



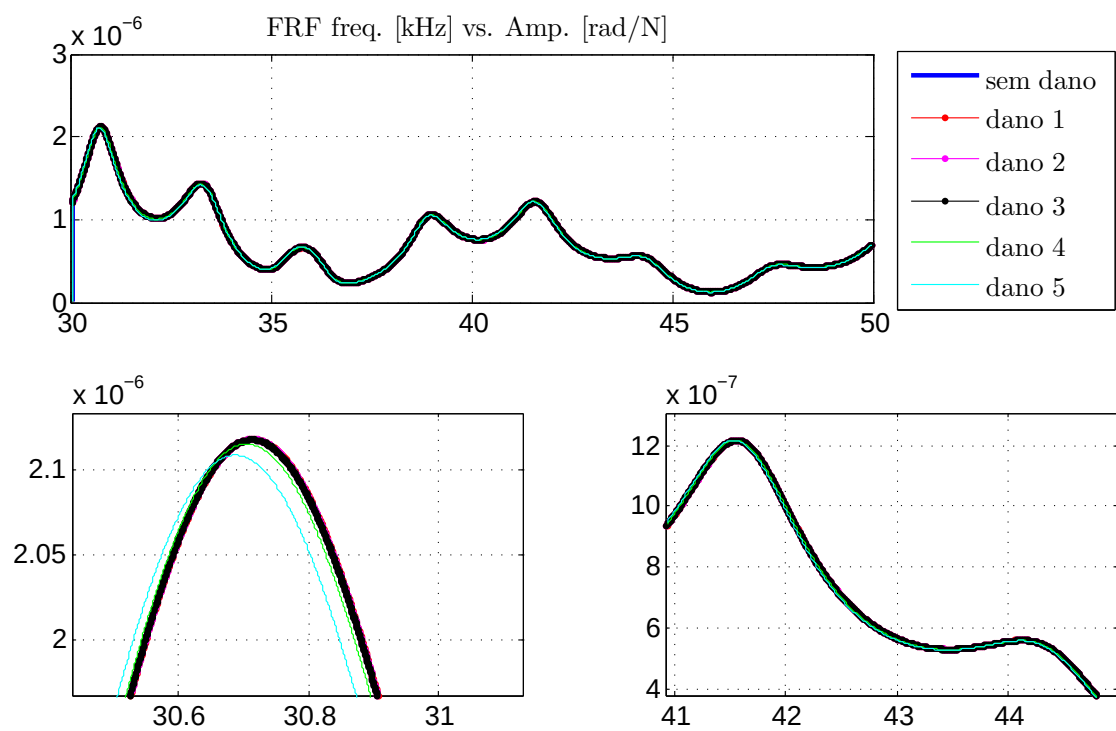
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 49 - FRF da estrutura com amortecimento 3 e diferentes severidades de dano.



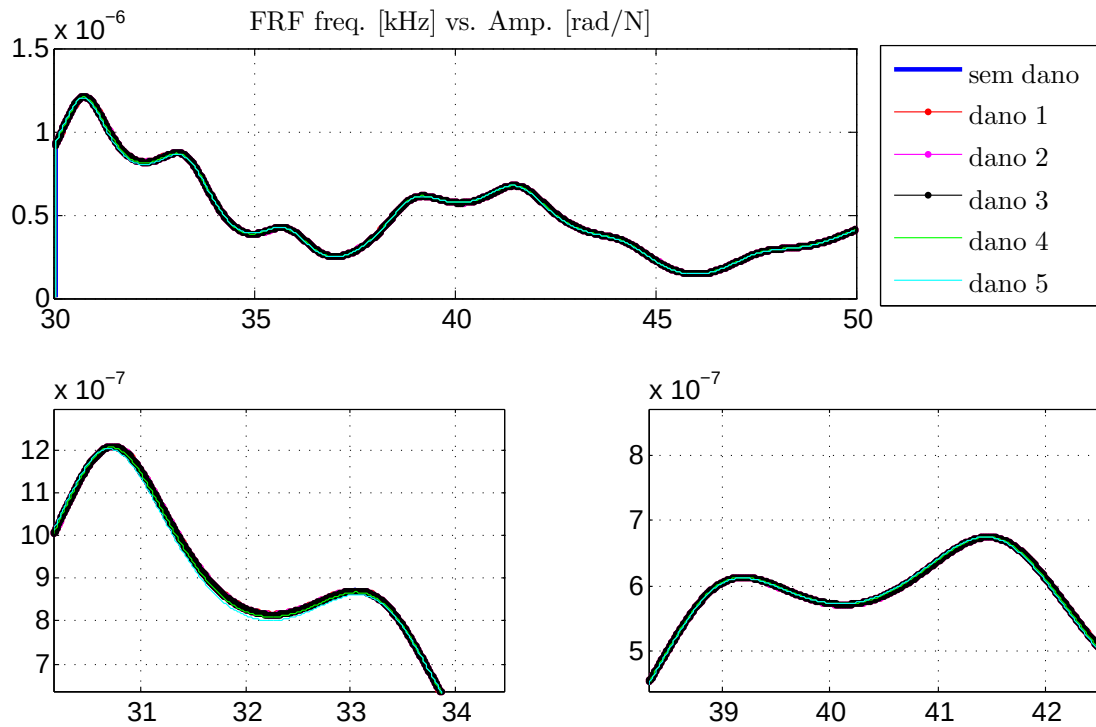
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 50 - FRF da estrutura com amortecimento 4 e diferentes severidades de dano.



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 51 - FRF da estrutura com amortecimento 5 e diferentes severidades de dano.



Fonte: dados do próprio autor.

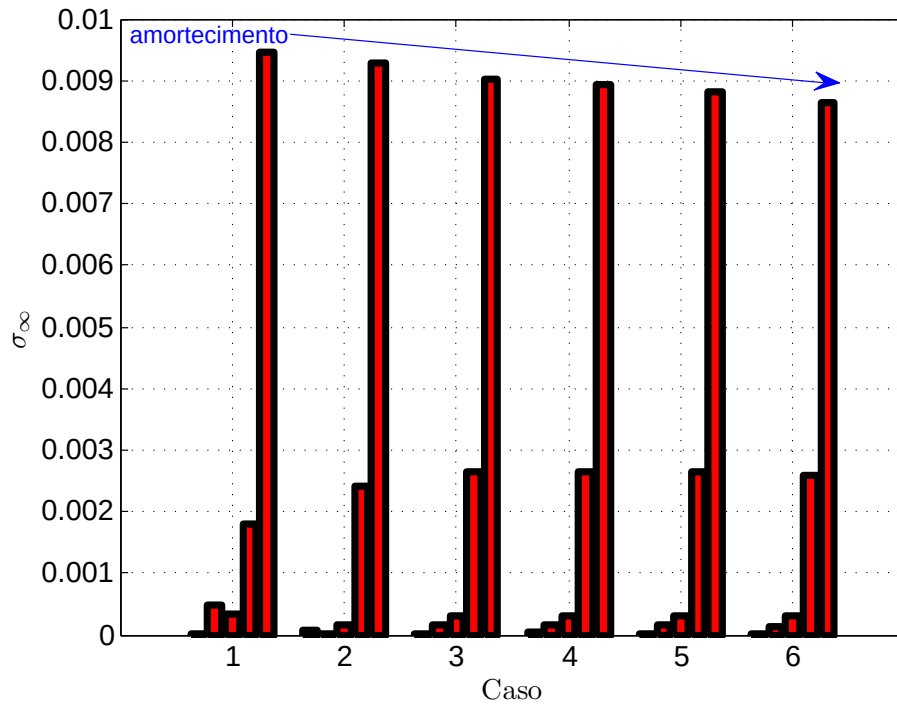
Entre os índices de detecção de danos está o índice σ_∞ calculado em função da norma H_∞ do sistema sem e com dano. Sejam $H_\infty^{(i)}$ e $H_\infty^{(d)}$ as normas de uma estrutura intacta (sem dano) e com dano, respectivamente, o índice σ_∞ pode ser calculado pela equação (188), conforme propõe (BUENO; MARQUI; LOPES JUNIOR, 2006), i.e.,

$$\sigma_\infty = \frac{|(H_\infty^{(i)})^2 - (H_\infty^{(d)})^2|}{(H_\infty^{(i)})^2} \quad (188)$$

A figura 52 apresenta para a estrutura em estudo como o pico da FRF do sistema diminui em função do aumento do amortecimento. Ainda, pode-se notar que σ_∞ pode indicar o aumento da severidade do dano uma vez que seu valor é aumentado a medida que D aumenta, ou seja, que o dano evolui. No entanto, para os casos 1 e 2, que correspondem a amortecimento nulo e amortecimento 1 (ver tabela 7), há uma inversão para a segunda severidade de dano, pois o índice se apresenta respectivamente maior e menor que no terceiro caso. Sendo assim, fica sugerido que este índice pode gerar incorreta indicação de severidade de dano, mas permite a detecção dos danos mesmo para sistemas com os níveis de amortecimento estudados neste trabalho.

Para a faixa de frequência discutida nesta seção nota-se que os picos da FRF - i.e., a norma

Figure 52 - Índice σ_∞ para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.



Fonte: dados do próprio autor.

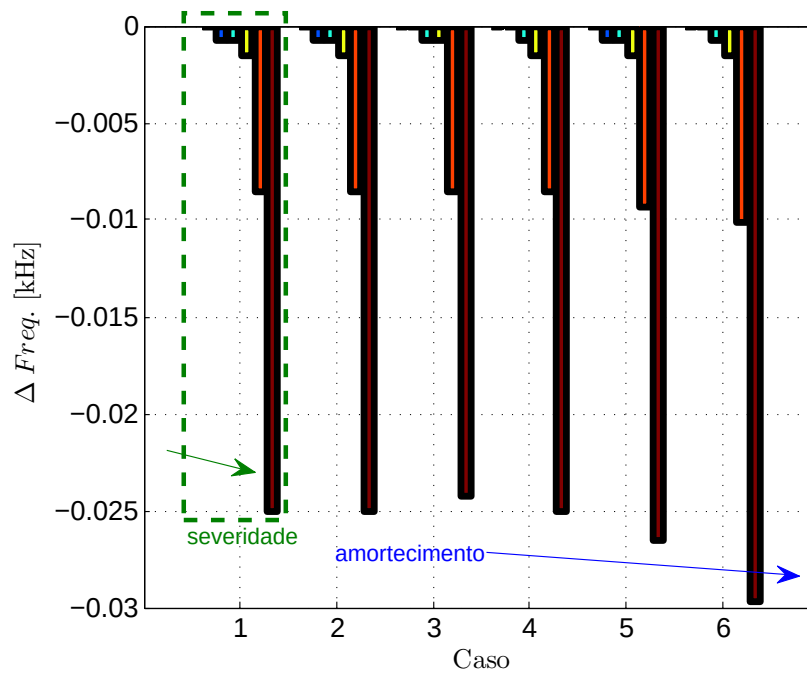
H_∞ , ocorrem com apenas pequenas diferenças de frequências. A figura 53 apresenta que a frequência diminui em relação a frequência do pico da estrutura intacta. Estes resultados foram obtidos considerando a seguinte expressão:

$$\Delta Freq = f[H_\infty^{(d)}] - f[H_\infty^{(i)}] \quad (189)$$

sendo $f[H_\infty^{(.)}]$ a frequência em que ocorre o pico da FRF para a estrutura intacta e com dano.

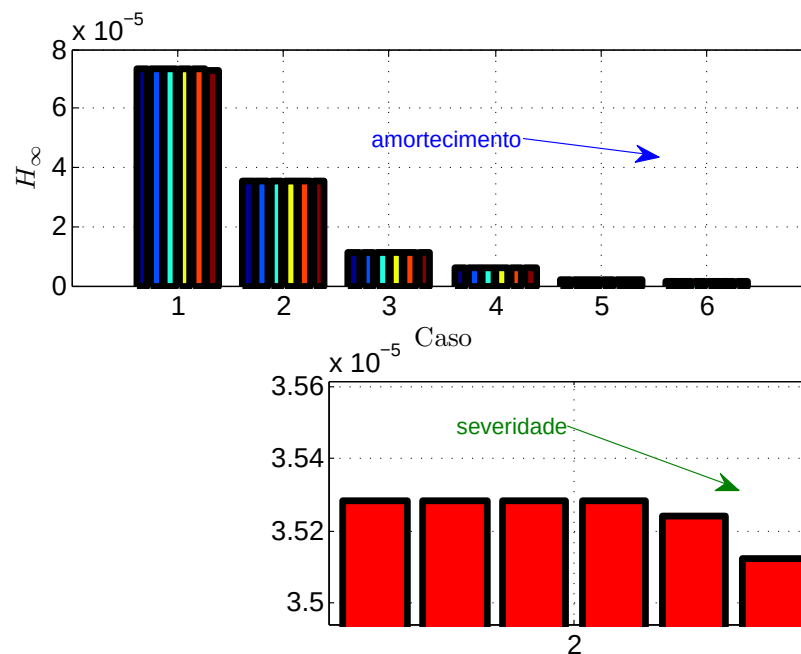
De acordo com a figura 52, os índices σ_∞ podem detectar os danos através de valores de até aproximadamente 0,01. Valores nesta ordem de grandeza podem ser obtidos visto que o índice utiliza uma normalização da diferença quadrática das normas pelo quadrado na norma do sistema na condição intacta. A motivação para tal normalização fica evidente ao se verificar a ordem de grandeza da norma H_∞ para cada uma das condições na figura 54, (para uma melhor visualização, apresenta-se com destaque o caso 2).

Figure 53 - Variação das frequências para as normas H_∞ de diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 54 - Norma H_∞ para diferentes níveis de amortecimento.



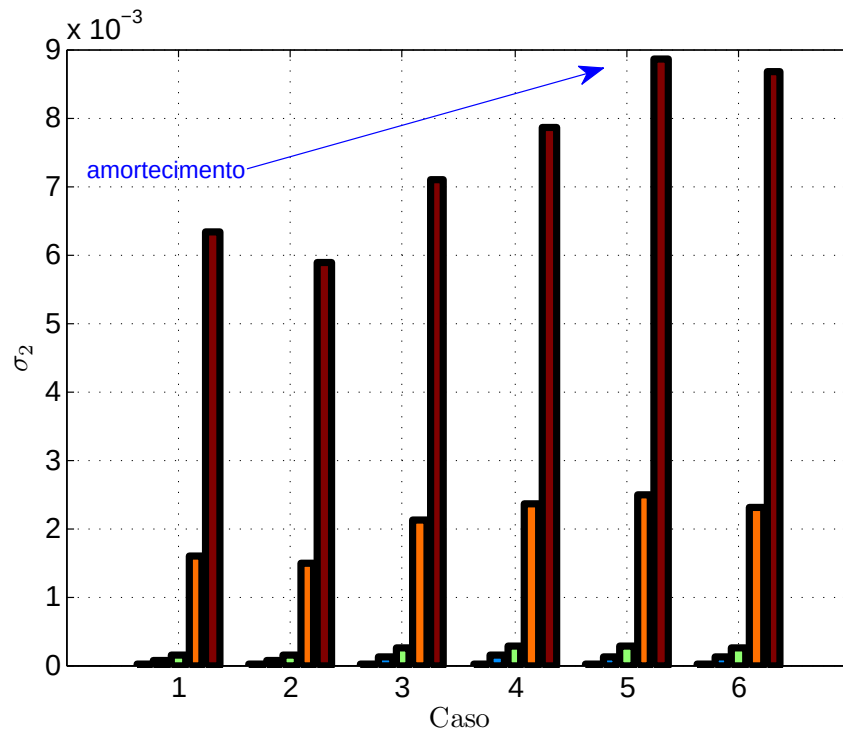
Fonte: dados do próprio autor.

Conforme apresentado anteriormente, a norma H_2 tem sido também utilizada na detecção de danos (GAWRONSKI; SAWICKI, 2000). Para detecção utiliza-se o índice σ_2 mostrado na

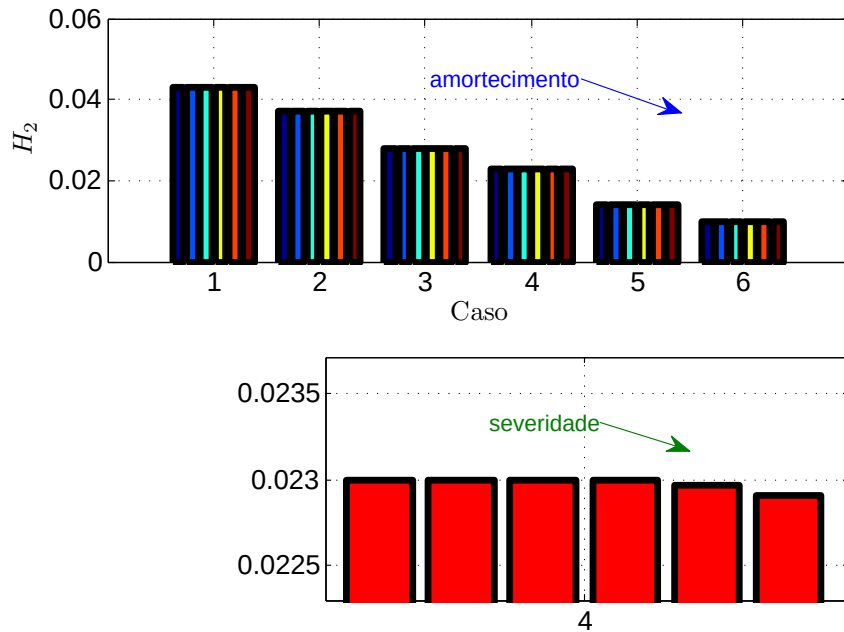
equação (190). De acordo com a figura 55, na faixa de frequência considerada nesta seção o índice de detecção de danos baseado nesta norma é adequado para perceber a evolução da severidade do dano. Ainda, nota-se nesta faixa de frequência que o aumento do amortecimento não gera significativo comprometimento da capacidade de detecção do dano, pois a ordem de grandeza dos valores permanece a mesma. Também, a figura 56 mostra a ordem de grandeza da norma H_2 para as diferentes condições em análise, i.e., severidade de dano e nível de amortecimento (com destaque para o caso 4 para uma melhor visualização).

$$\sigma_2 = \frac{|(H_2^{(i)})^2 - (H_2^{(d)})^2|}{(H_2^{(i)})^2} \quad (190)$$

Figure 55 - Índice σ_2 para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.



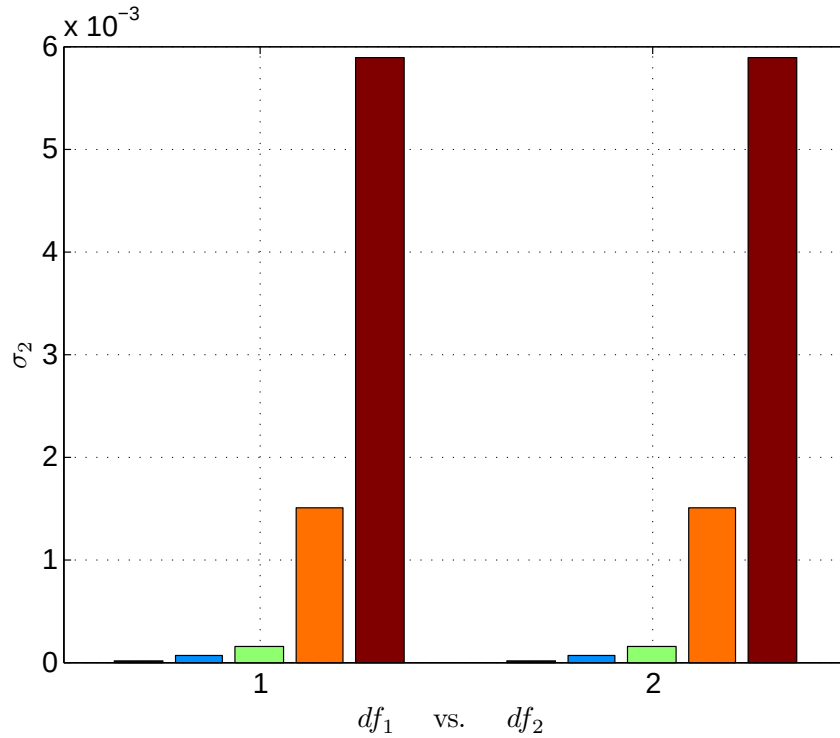
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 56 - Norma H_2 para diferentes níveis de amortecimento.

Fonte: dados do próprio autor.

Visto que o cálculo do índice de detecção de dano baseado na norma H_2 envolve uma integração numérica ao longo da frequência (nos casos da FRF conhecida), a escolha do método de integração e a discretização em frequência - i.e., o df adotado - podem influenciar o cálculo do índice. Neste sentido, em particular para o método trapezoidal utilizado neste trabalho, o df deve ser convenientemente escolhido para assegurar a qualidade do cálculo da norma. Para clareza de entendimento, a figura 57 apresenta, para cada uma das cinco severidades de danos, os valores do índice σ_2 calculados por $df = 0,78125$ e, também, $df = 0,52083$ Hertz. Nota-se que a discretização adotada neste trabalho assegura convergência entre os índices obtidos em ambos os casos e, portanto, a qualidade da detecção não é comprometida pela operação de integração numérica. Esta análise deve ser considerada por projetistas de sistemas de SHM que envolvem a norma H_2 para cálculo de índice de detecção.

Figure 57 - Índice σ_2 obtidos com diferentes discretizações na frequência.



Fonte: dados do próprio autor.

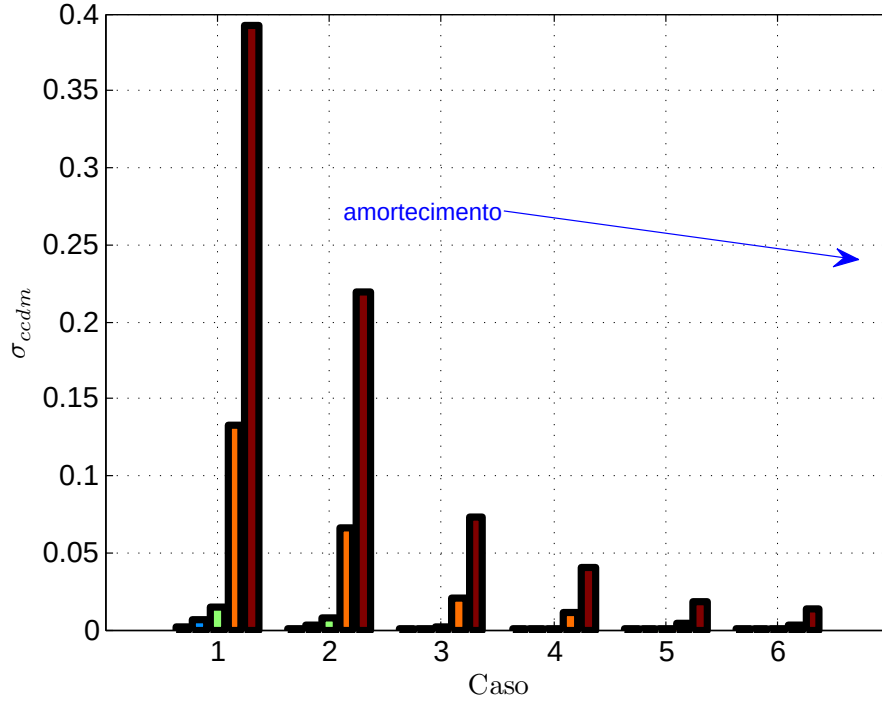
Índices de correlação entre sinal da estrutura intacta com a estrutura danificada têm sido também utilizados na detecção de dano. Como exemplo tem-se o índice CCDM (do inglês, *Correlation Coefficient Deviation Metric*), com diversas aplicações disponíveis na literatura (MARQUI et al., 2008; OLIVEIRA, 2013; CORTEZ; VIEIRA FILHO ; BAPTISTA, 2012). A equação 191 apresenta um índice de correlação e os resultados podem ser observados na figura 58. Nota-se claramente o aumento do índice em função da severidade do dano, no entanto, seus valores reduzem significativamente a medida que a estrutura possui mais amortecimento. Similarmente as normas H_∞ e H_2 , estes valores reduzidos podem comprometer a detectabilidade visto que, em situações reais de engenharia, os sinais de FRF da estrutura intacta e da situação de integridade desconhecida (na condição de monitoramento em que não se sabe a priori se há dano ou não) possuem ruídos e, portanto, se o índice de detecção for numericamente da ordem de grandeza destes ruídos pode-se facilmente obter falsos diagnósticos (os falsos positivos ou falsos negativos¹)

$$\sigma_{ccdm} = \left| 1 - \frac{\sum_{n=1}^{N_p} \left(H(\omega_n)^{(i)} - \bar{H}^{(i)} \right) \left(H(\omega_n)^{(d)} - \bar{H}^{(d)} \right)}{\sqrt{\left(H(\omega_n)^{(i)} - \bar{H}^{(i)} \right)^2} \sqrt{\left(H(\omega_n)^{(d)} - \bar{H}^{(d)} \right)^2}} \right| \quad (191)$$

¹O falso positivo ocorre quando um índice sugere a existência de um dano que não existe, enquanto no falso negativo a estrutura está com dano, embora o índice de detecção não indique.

sendo $H(\omega_n)^{(i)}$ a FRF da estrutura intacta para a n -ésima frequência, similarmente, $H(\omega_n)^{(d)}$ para a estrutura com dano (ou condição a ser monitorada) e $\bar{H}$ a média de cada FRF.

Figure 58 - Índice σ_{ccdm} para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.

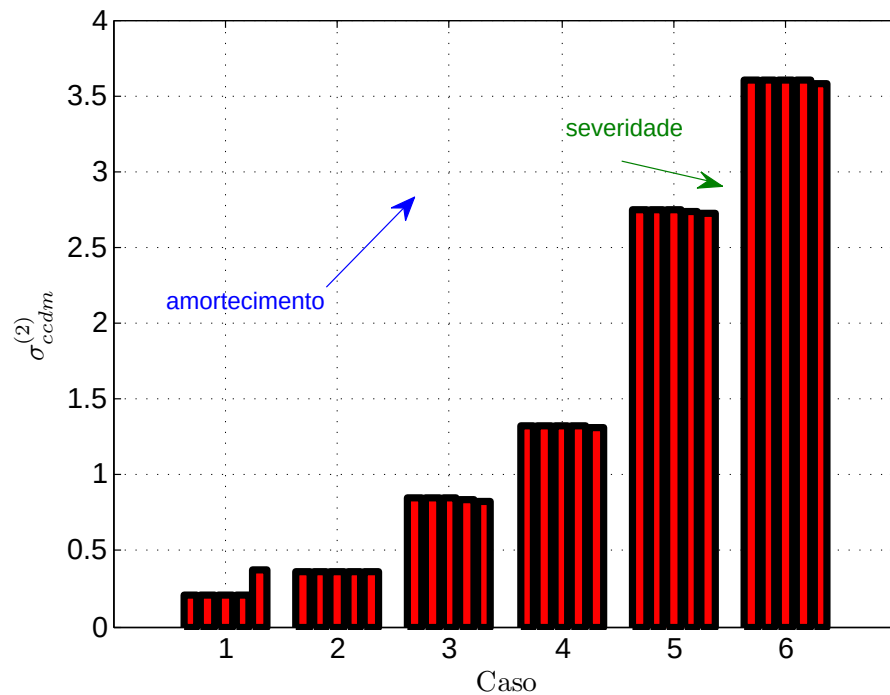


Fonte: dados do próprio autor.

Para contornar a dificuldade resultante dos baixos valores de σ_{ccdm} para alto amortecimento estrutural, neste trabalho propõe-se o cálculo da correlação considerando o módulo da FRF em cada frequência, ou seja, dado $H(\omega)^{(\cdot)}$ (tanto para estrutura intacta quanto com dano), utiliza-se $\|H^{(\cdot)}(\omega)\|$ (módulo do número complexo) para os termos do denominador da expressão. Com isto, a equação (191) é reescrita para definir uma variação do índice apresentado anteriormente, i.e., $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ tal como definido abaixo. Assim, pode-se obter os resultados apresentados na figura 59 que claramente indica valores maiores quanto maior for o amortecimento estrutural. No entanto, o índice proposto apresenta pequena variação em função da severidade do dano. Pode-se, então, utilizar ambos índices de forma combinada para detectar danos em estruturas significativamente amortecidas.

$$\sigma_{ccdm}^{(2)} = \left| 1 - \frac{\sum_{n=1}^{N_p} \left(H(\omega_n)^{(i)} - \bar{H}^{(i)} \right) \left(H(\omega_n)^{(d)} - \bar{H}^{(d)} \right)}{\sqrt{\left(\|H(\omega_n)^{(i)}\| - \|\bar{H}^{(i)}\| \right)^2} \sqrt{\left(\|H(\omega_n)^{(d)}\| - \|\bar{H}^{(d)}\| \right)^2}} \right| \quad (192)$$

Figure 59 - Índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.



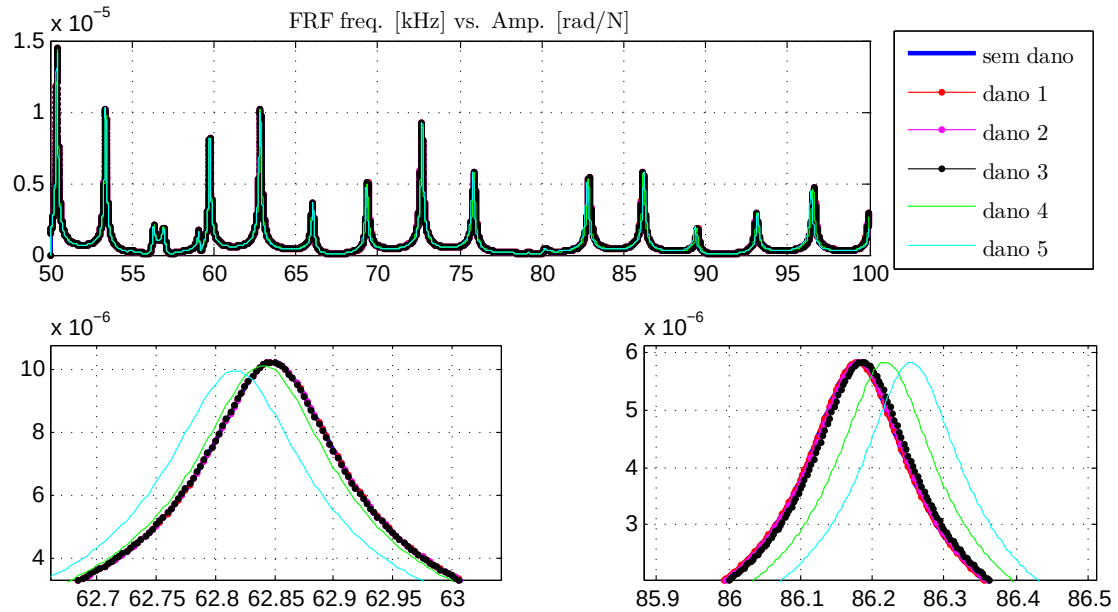
Fonte: dados do próprio autor.

6.1.2 Avaliação da Detectabilidade baseada em Índices: Faixa de Frequência de 50-100 kHz

Nesta seção são apresentadas discussões equivalentes às previamente introduzidas na seção 6.1.1. A ideia principal é destacar que algumas observações podem se manter ao se alterar a faixa de frequência e, por outro lado, alguns comportamentos podem se alterar. Este tópico é discutido na literatura de SHM no contexto da *seleção da faixa de frequência*, no entanto, os autores em geral utilizam dados experimentais que por sua vez são restritos à algumas características físico geométricas particulares de um dado sistema (MOURA Jr; STEFFEN JR, 2006; BAPTISTA, 2010).

As figuras 60 a 64 apresentam as FRF para a faixa de frequência de 50 a 100 kHz avaliada nesta seção. Observa-se em geral o comportamento similar a análise anterior, i.e., a redução das frequências naturais em função da severidade do dano. No entanto, para esta faixa de frequência nota-se significativa influência dos níveis de amortecimento estrutural considerados, especialmente para os casos 4 e 5 (Fig. 63 e 64).

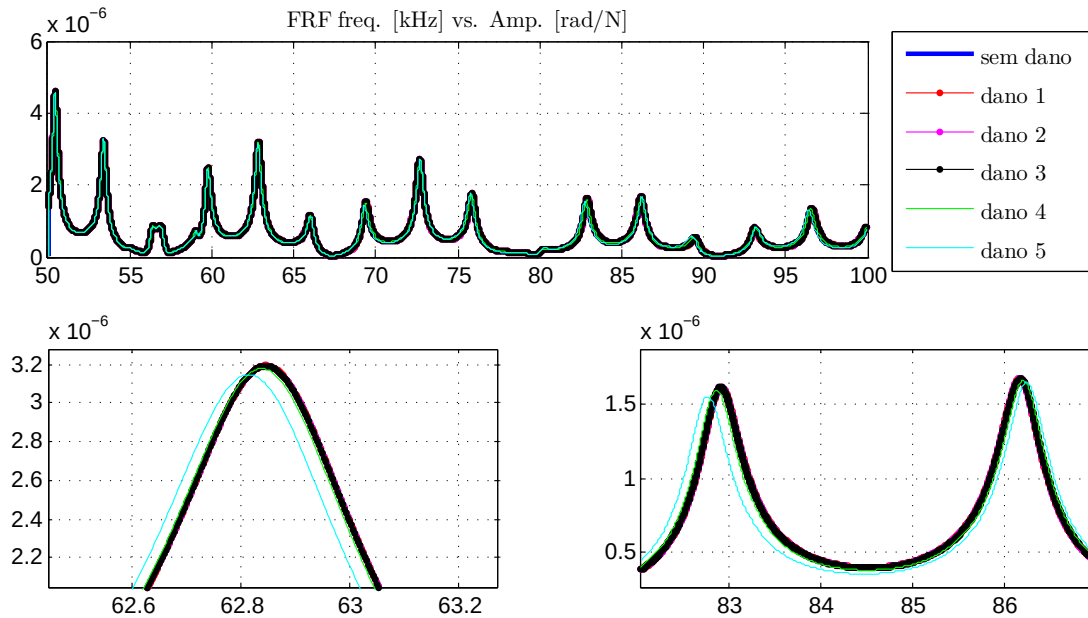
Figure 60 - FRF da estrutura com amortecimento 1 e diferentes severidades de dano.



Fonte: dados do próprio autor.

De forma equivalente ao resultado apresentado para a faixa de frequência anterior (Fig. 52), a figura 65 indica que o índice baseado na norma H_∞ pode detectar o dano e, inclusive, maiores variações a medida que existem mais amortecimento estrutural (note os valores de até 0.08). Ainda, de forma equivalente, a figura 66 apresenta pequena variação das frequência que ocorrem o maior pico da FRF e, também, a figura 66 apresenta a ordem de grandeza da norma para esta faixa de frequência.

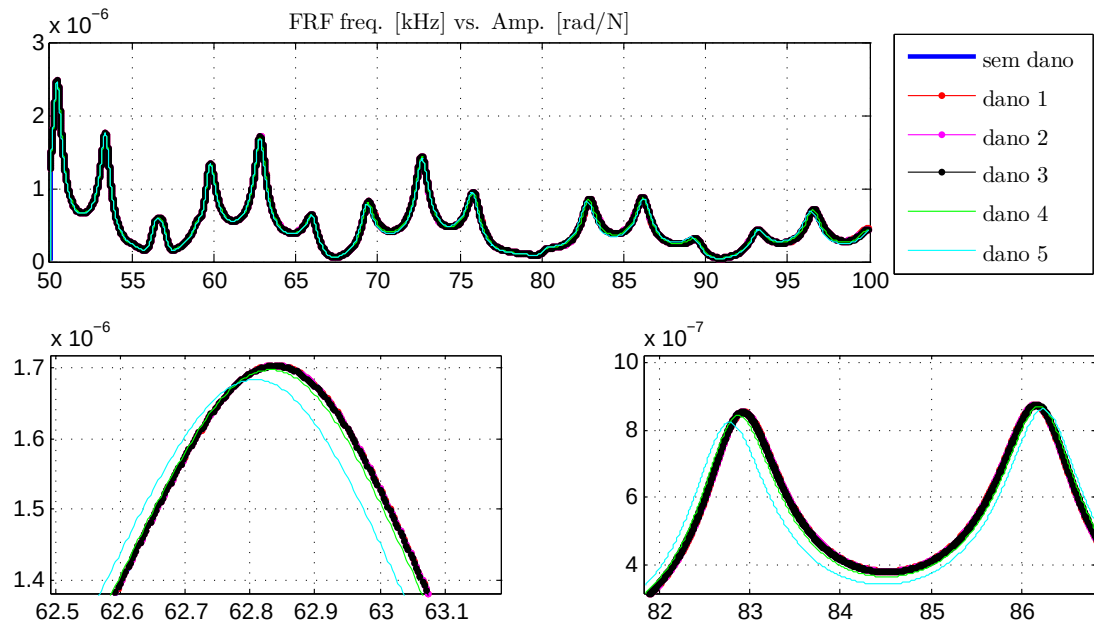
Figure 61 - FRF da estrutura com amortecimento 2 e diferentes severidades de dano.



Fonte: dados do próprio autor.

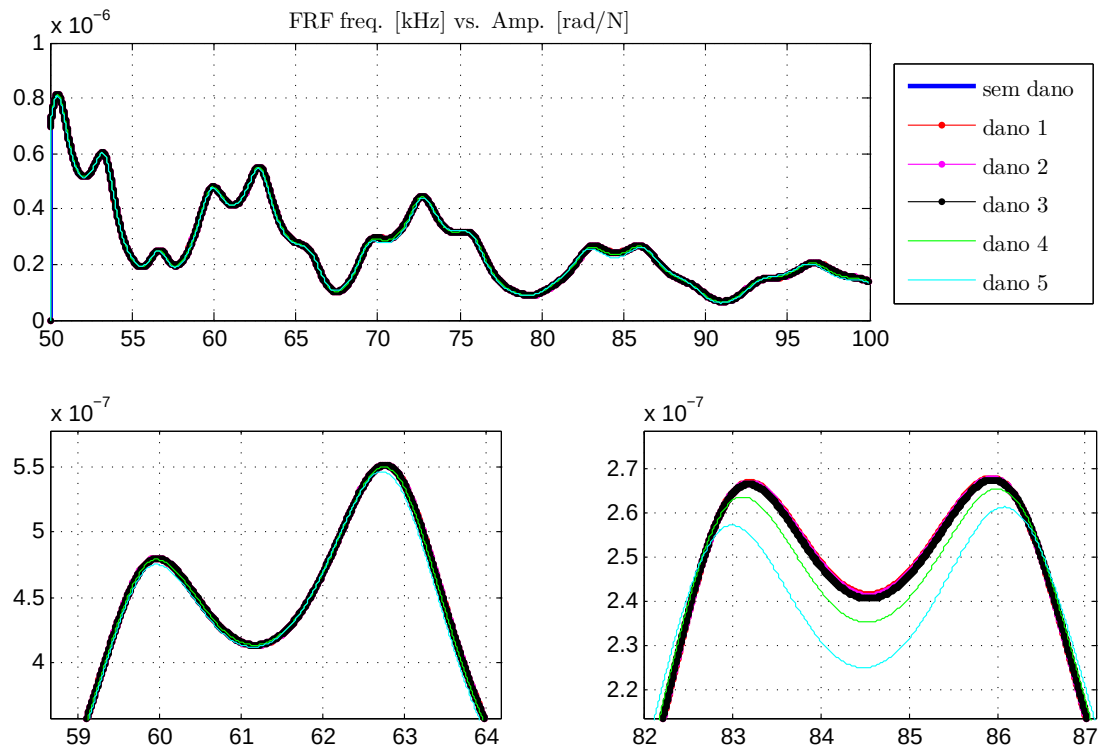
As figuras 68 e 69 apresentam respectivamente o índice baseado na norma H_2 e os valores da norma para a faixa de frequência de 50 a 100 kHz. Podem ser observados comportamentos equivalentes a faixa de frequência de 30 a 50 kHz. Também de forma equivalente apresenta-se o índice CCDM mostrado na figura 70, cuja ordem de grandeza indica valores inferiores a 0,4 para maior severidade de dano e menor nível de amortecimento. Para as demais combinações severidade e nível de amortecimento os valores são ainda menores. Por outro lado, conforme indica a figura 71, o índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ gera valores da ordem da unidade para a estrutura a partir do terceiro nível de amortecimento, gerando para os primeiros dois níveis valores da ordem de grandeza do CCDM clássico.

Figure 62 - FRF da estrutura com amortecimento 3 e diferentes severidades de dano.



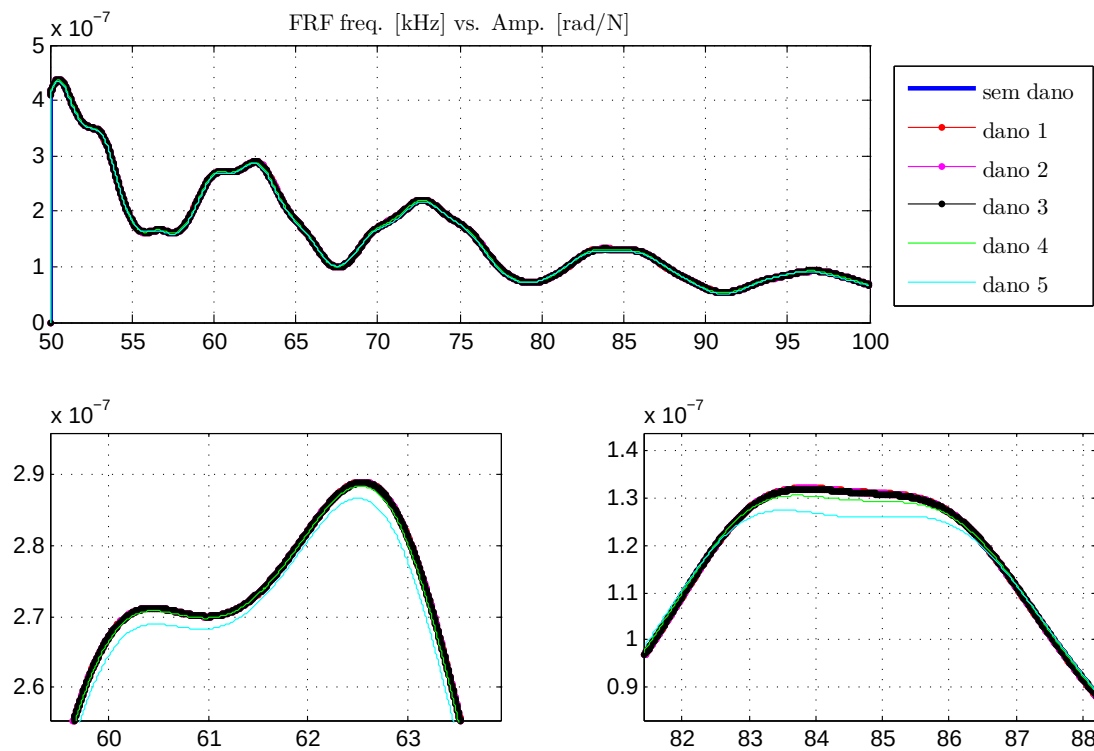
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 63 - FRF da estrutura com amortecimento 4 e diferentes severidades de dano.



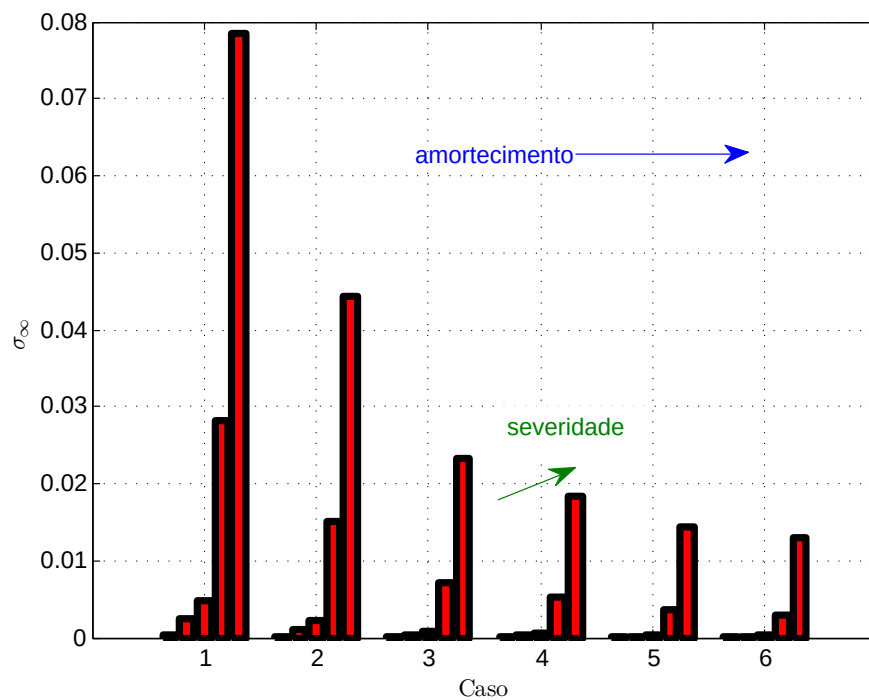
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 64 - FRF da estrutura com amortecimento 5 e diferentes severidades de dano.



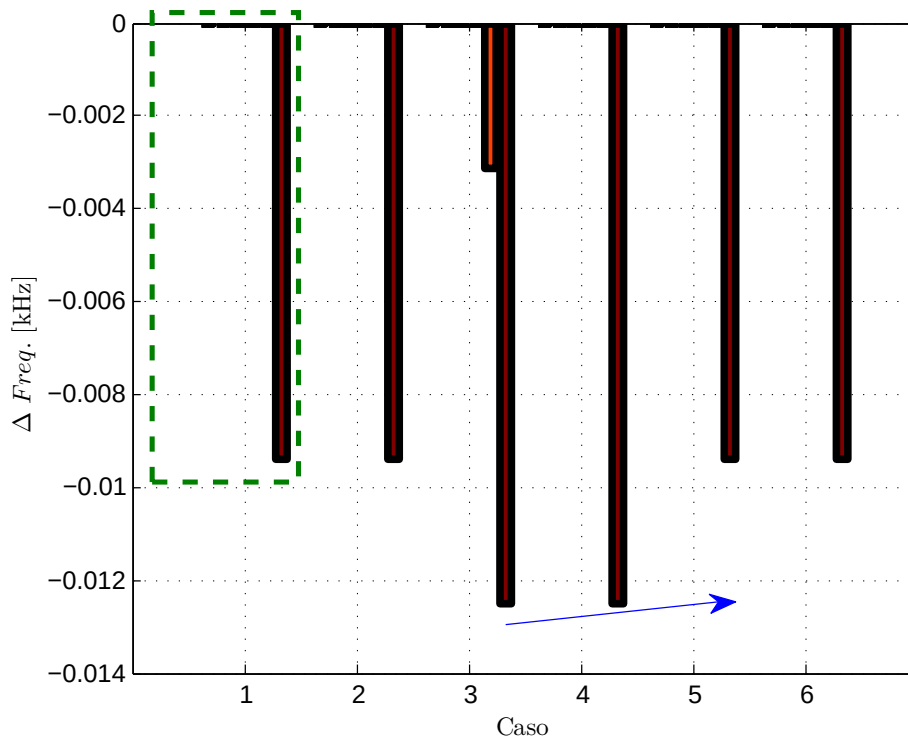
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 65 - Índice σ_∞ para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.



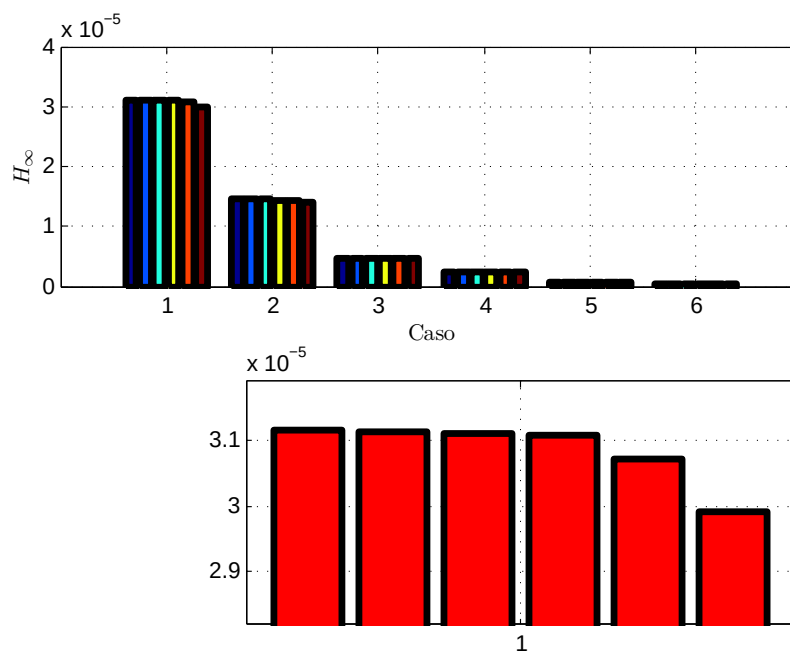
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 66 - Variação das frequências para as normas H_∞ de diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.



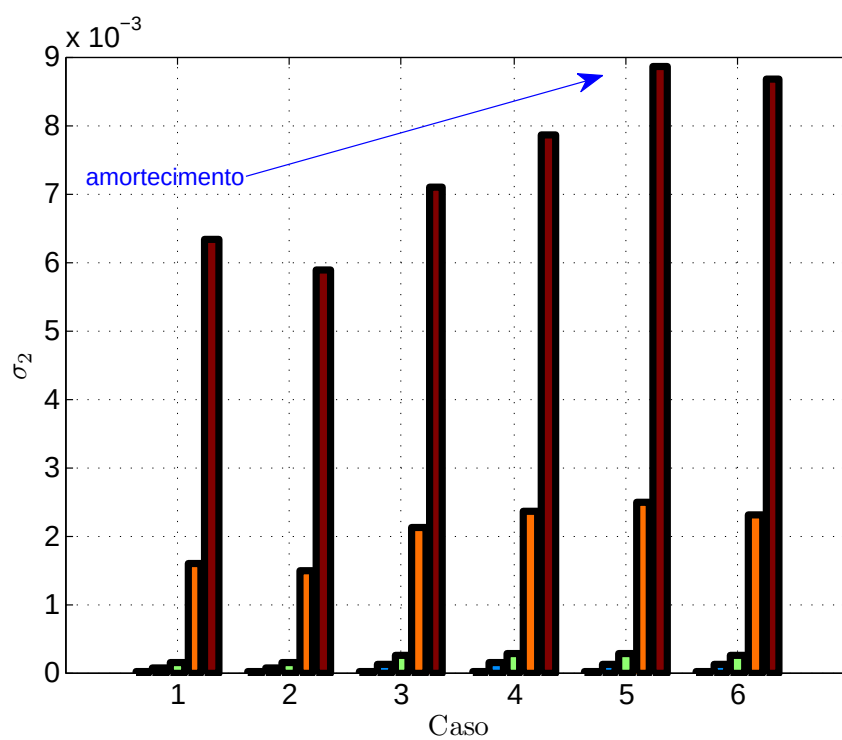
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 67 - Norma H_∞ para diferentes níveis de amortecimento.



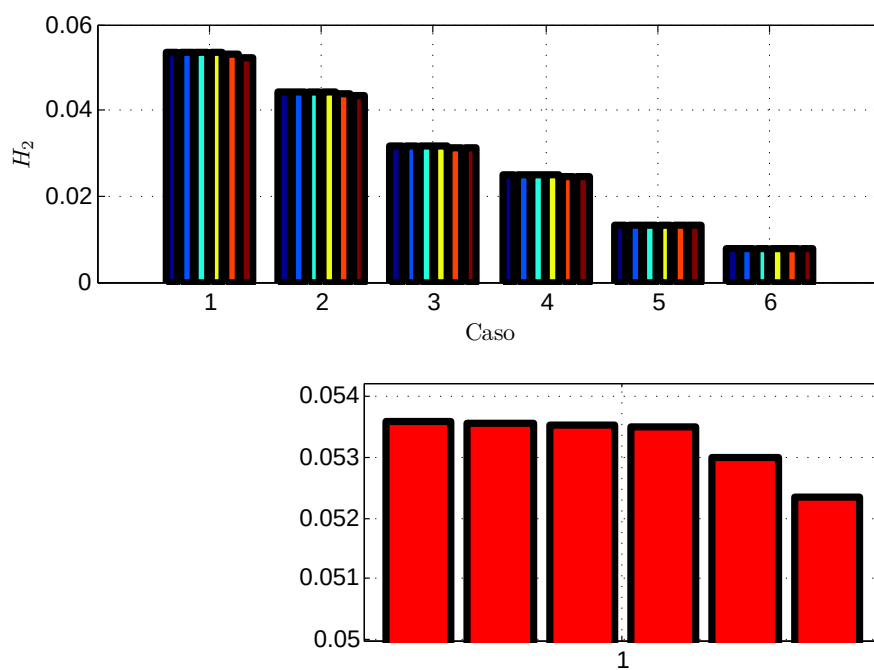
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 68 - Índice σ_2 para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.



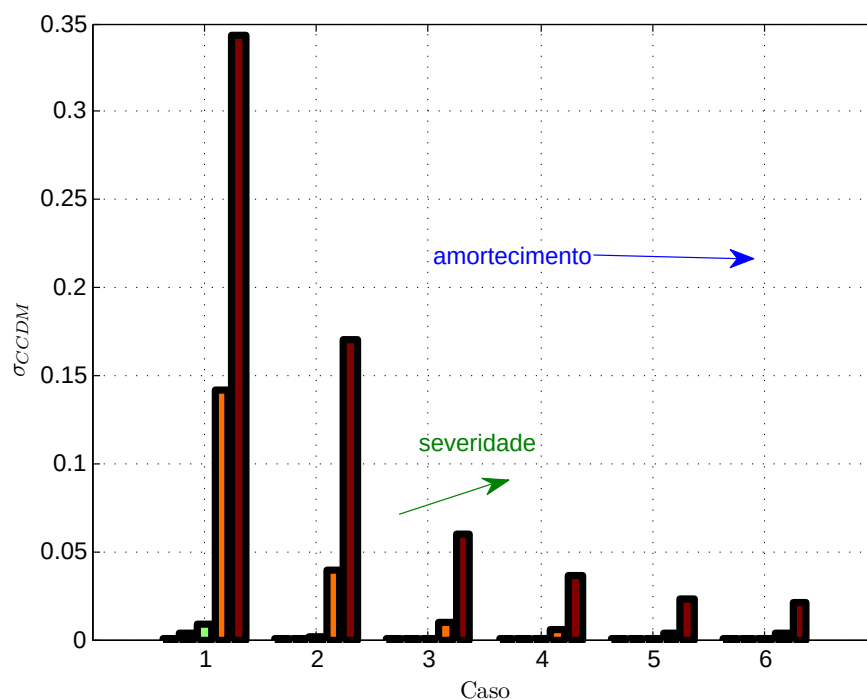
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 69 - Norma H_2 para diferentes níveis de amortecimento.



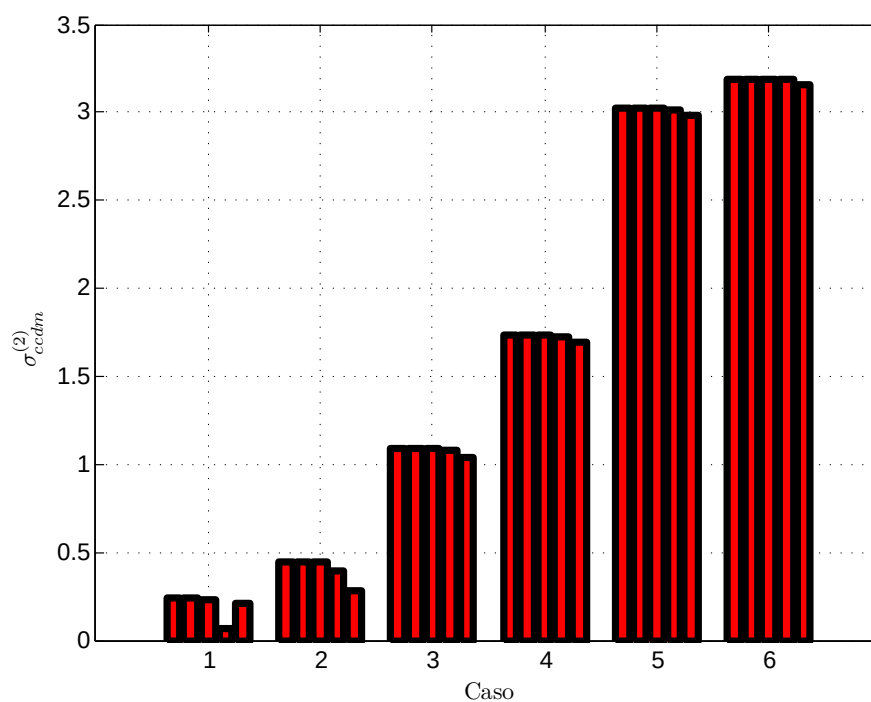
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 70 - Índice σ_{ccdm} para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 71 - Índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ para diferentes severidades de dano e níveis de amortecimento.



Fonte: dados do próprio autor.

6.2 FAIXA DE VALORES DE ÍNDICES

Embora diversos índices de detecção de danos sejam utilizados na literatura de SHM experimental, i.e., nos trabalhos baseados em dados de ensaios, ainda é limitado o número de trabalhos que discutem seus valores limites, também referidos como *threshold*. O ponto central desta discussão é saber se um determinado valor não nulo obtido pelo cálculo de um índice de detecção é de fato um dano. Sabe-se que em termos práticos todo sinal experimental contém ruídos e, portanto, é razoável que ao se comparar dois sinais (da estrutura intacta com uma condição desconhecida) um índice de detecção apresente um valor não nulo. Assim, simulações através de um modelo matemático podem auxiliar o entendimento dos valores numéricos, bem como gerar informações importantes para o projetista de um sistema de monitoramento.

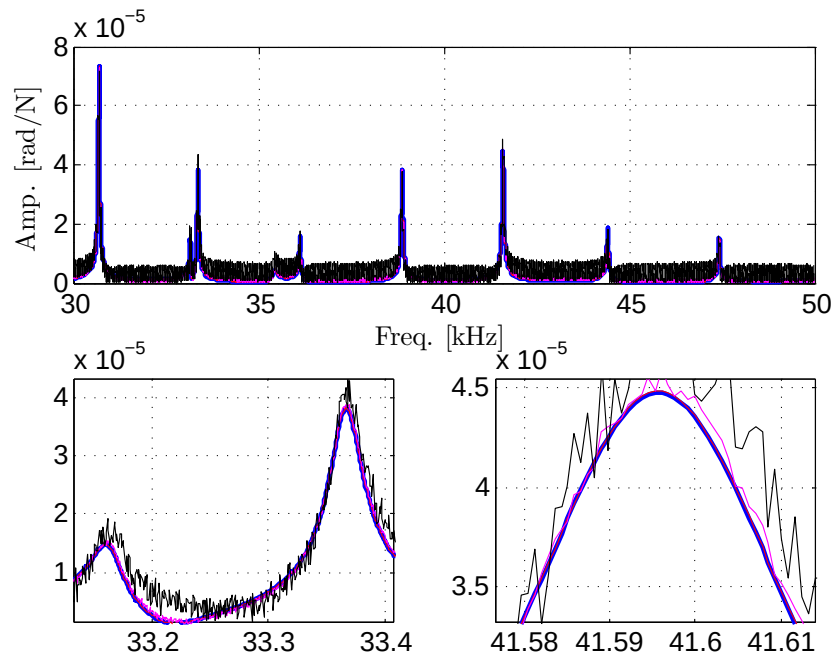
Neste contexto, nesta seção se apresenta uma breve discussão sobre os valores dos índices de detecção de danos discutidos nas seções anteriores para diferentes níveis de ruídos na FRF do sistema intacto. Os sinais apresentados na figura 72 mostram a FRF do sistema intacto para faixa de 30 a 50 kHz e, também, esta FRF com três níveis de ruídos incluídos artificialmente. Cada FRF com ruído $H(\omega)^r$ foi obtida a partir da FRF original somada a uma parcela com valores aleatórios ponderados por um percentual da energia do sinal, conforme mostrado na equação 193.

$$H(\omega)^r = H(\omega) + E_e p_e [n_a(\omega) + im_a(\omega)] \quad (193)$$

sendo $H(\omega)$ a FRF da estrutura intacta (obtida pelo modelo SEM), p_e um escalar positivo para representar o percentual de energia do ruído em relação a energia do sinal original, e $n_a(\omega)$ e $m_a(\omega)$ valores aleatórios para respectivamente representarem as partes real e imaginária do ruído para cada frequência ω . A energia E_e do sinal foi calculada pela integral no domínio da frequência (Eq. 194). Os limites de integração, no domínio da frequência, foram adequadas para cada uma das faixas em estudo, i.e., 30 a 50 e 50 a 100 kHz.

$$E_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (194)$$

Figure 72 - FRF do sistema intacto com ruídos.



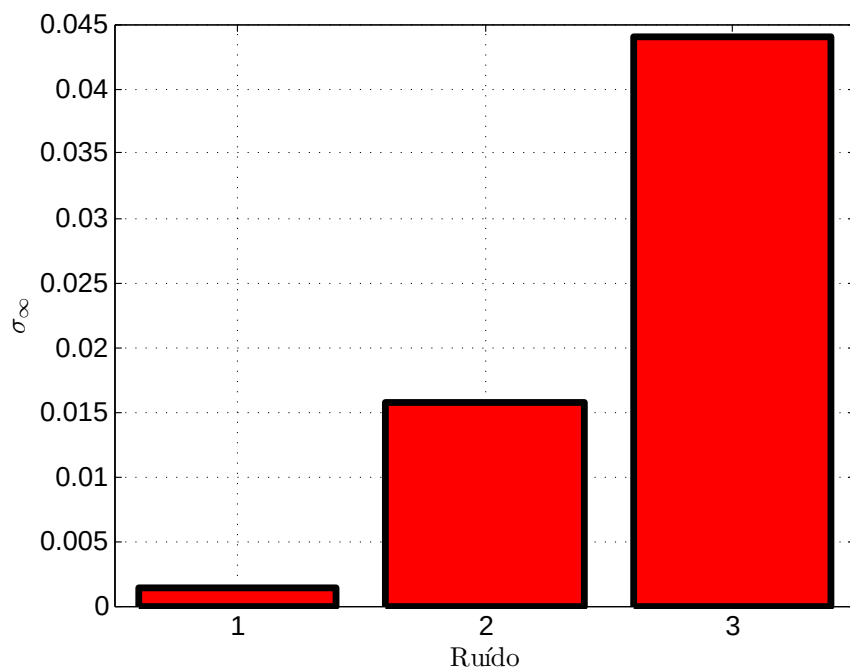
Fonte: dados do próprio autor.

As figuras 73 a 76 apresentam valores dos índices calculados para a estrutura intacta sem ruído com relação a estrutura intacta com ruído. Embora os níveis de ruído tenham sido definidos de forma arbitrária, e portanto, a priori, sem garantia de representatividade de uma situação típica de ensaio, nota-se claramente que níveis de ruído podem resultar em valores de índices na ordem de grandeza daqueles obtidos devido danos estruturais de pequena severidade. Em particular, o índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ proposto neste trabalho se mostra menos sensível ao ruído, principalmente para estruturas com maior nível de amortecimento, uma vez que apresenta valores de aproximadamente 0,05 e 0,25, enquanto para a quantidade de amortecimento 3 (ver figura 49, seção 6.1.1 e tabela 7) seu valor é da ordem de 0,80.

Table 8 - Valores utilizados na definição do níveis de ruído.

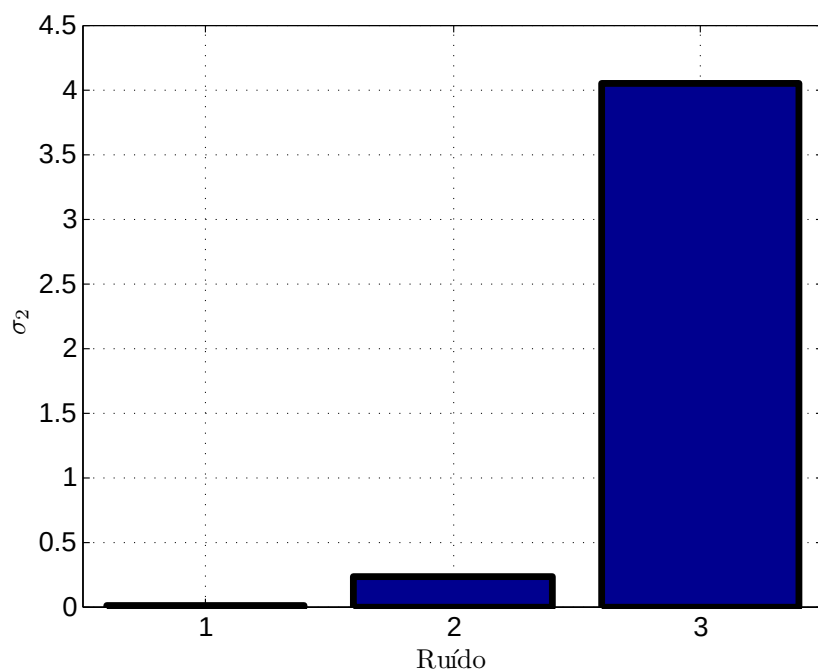
Caso de Ruído	Freq. kHz	Valor de p_e
1	30 a 50	10^{-5}
2	30 a 50	10^{-4}
3	30 a 50	5×10^{-4}
1	50 a 100	0,1
2	50 a 100	1
3	50 a 100	5

Figure 73 - Índice σ_{∞} para diferentes níveis de ruído (30 a 50 kHz).



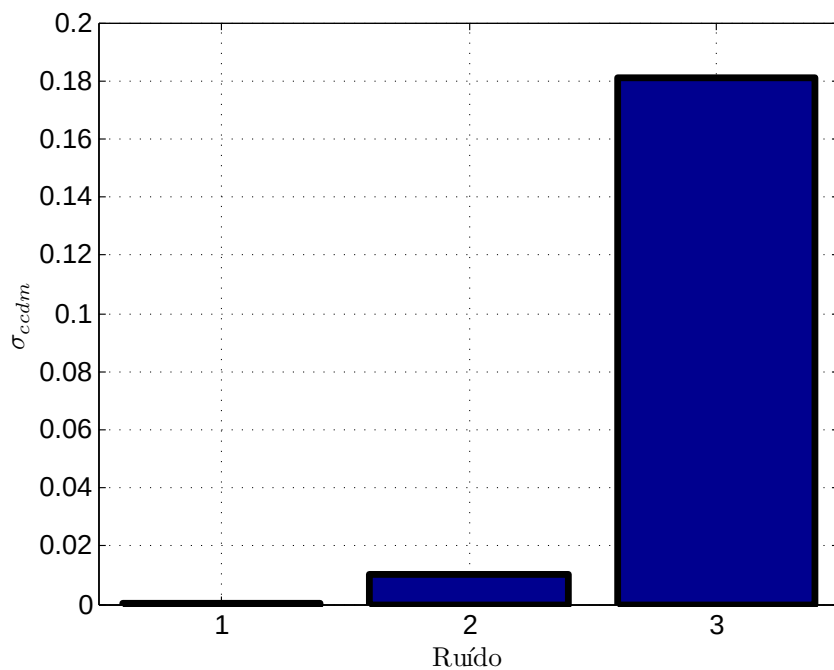
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 74 - Índice σ_2 para diferentes níveis de ruído (30 a 50 kHz).



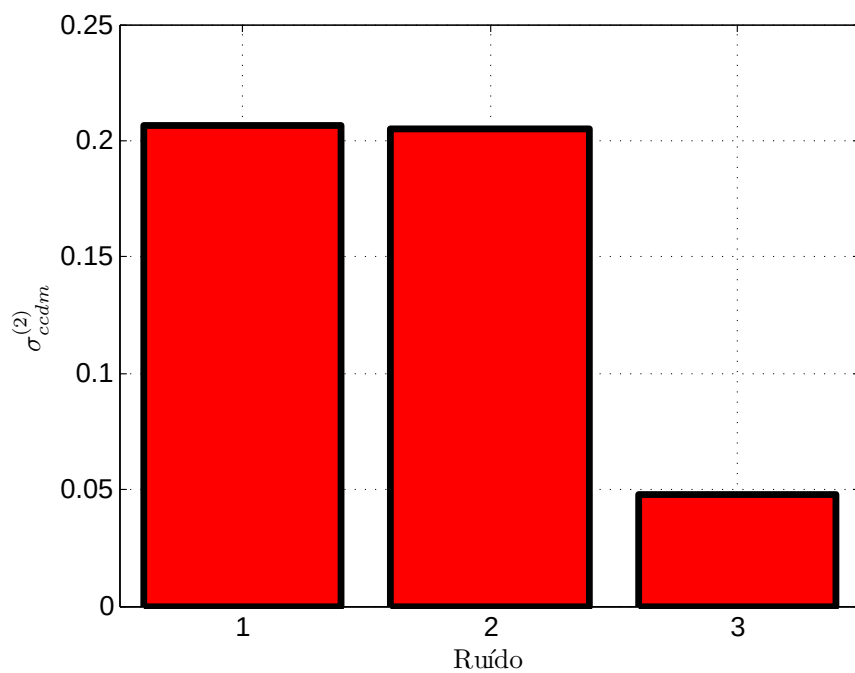
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 75 - Índice σ_{ccdm} para diferentes níveis de ruído (30 a 50 kHz).



Fonte: dados do próprio autor.

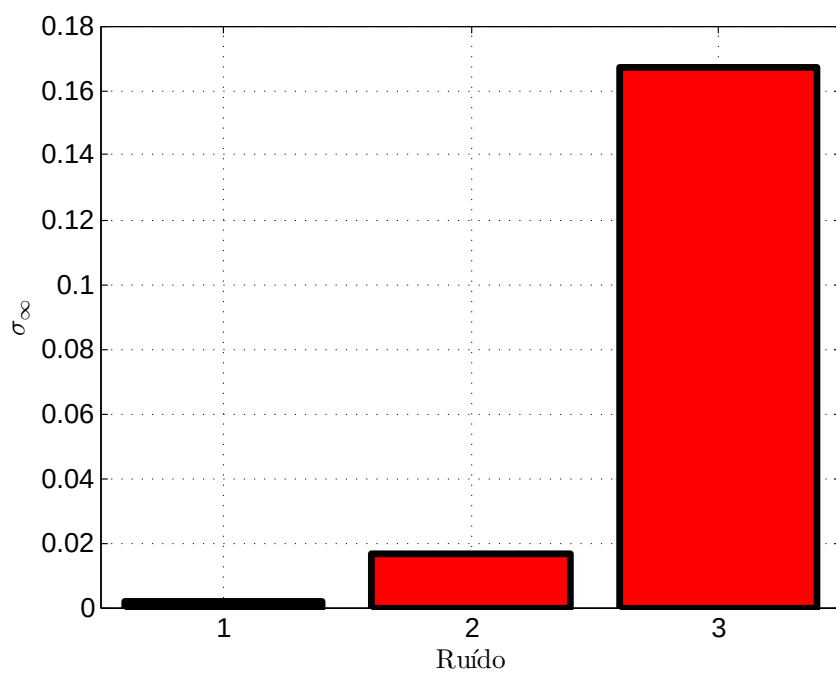
Figure 76 - Índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ para diferentes níveis de ruído (30 a 50 kHz).



Fonte: dados do próprio autor.

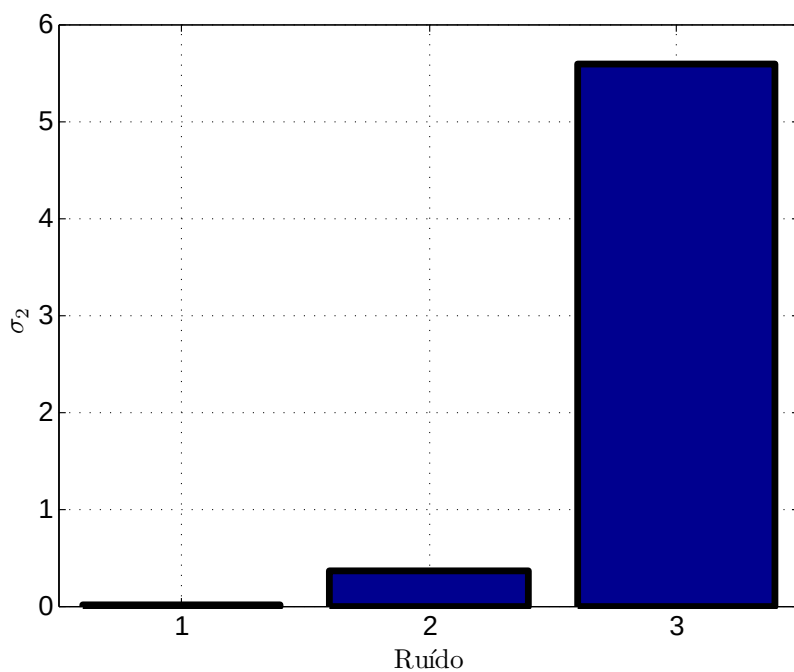
As figuras 77 a 80 apresentam valores de índices para a faixa de frequência de 50 a 100 kHz.

Figure 77 - Índice σ_{∞} para diferentes níveis de ruído (50 a 100 kHz).



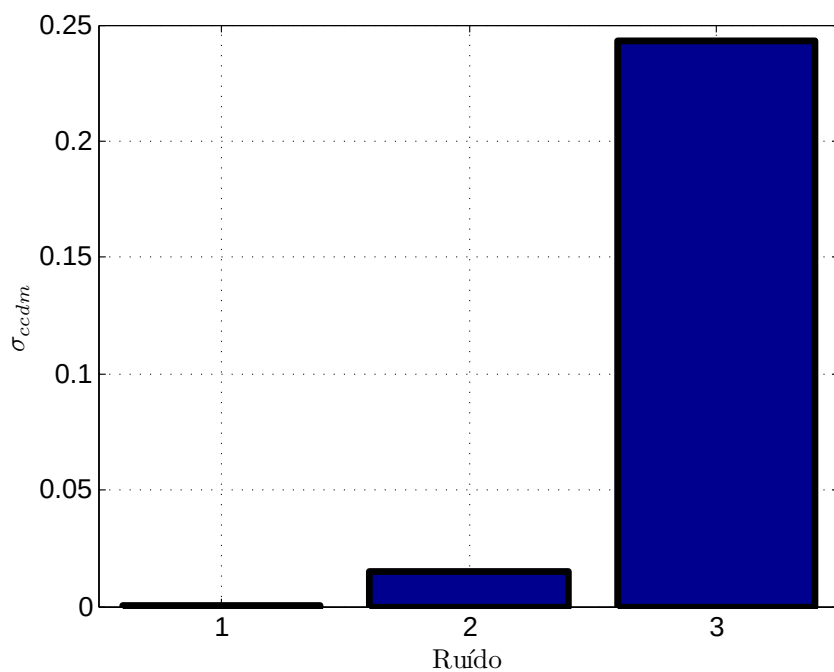
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 78 - Índice σ_2 para diferentes níveis de ruído (50 a 100 kHz).



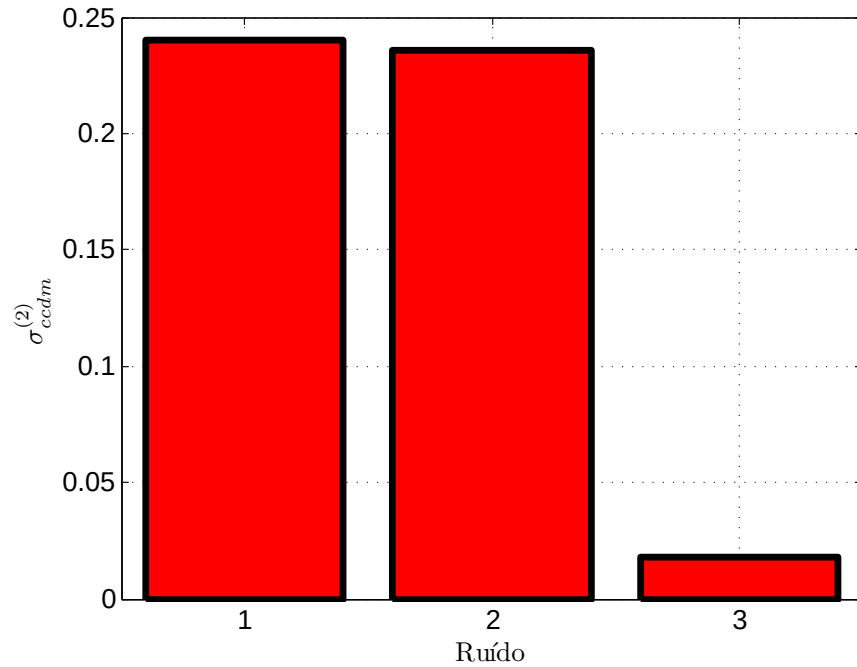
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 79 - Índice σ_{ccdm} para diferentes níveis de ruído (50 a 100 kHz).



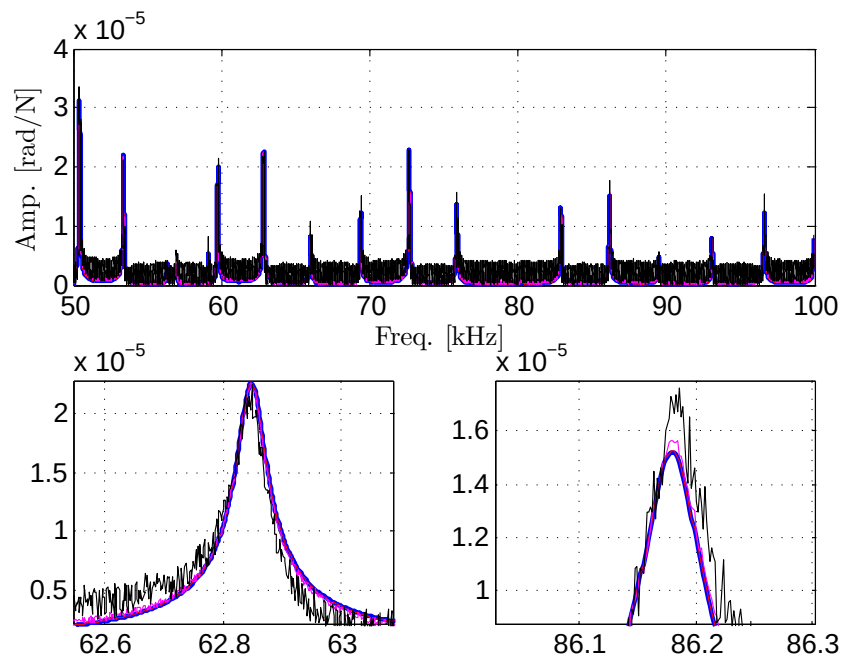
Fonte: dados do próprio autor.

Figure 80 - Índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ para diferentes níveis de ruído (50 a 100 kHz).



Fonte: dados do próprio autor.

Figure 81 - FRF do sistema intacto com ruídos (50 a 100 kHz).



Fonte: dados do próprio autor.

Os casos de ruídos apresentados foram obtidos a partir dos valores apresentados na tabela 8. As figuras 73 a 76 apresentam os resultados para a faixa de 30 a 50 *kHz*, enquanto as figuras 77 a 80 apresentam os resultados para a faixa de 50 a 100 *kHz*. Nesta segunda faixa de frequência o índice $\sigma_{ccdm}^{(2)}$ também se apresenta mais adequado que as demais avaliações neste trabalho, principalmente para estruturas com certo nível de amortecimento estrutural. Finalmente, a figura 81 apresenta as FRFs da estrutura intacta, com e sem os ruídos, para a segunda faixa de frequência analisada.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diversos trabalhos têm abordado os projetos de sistemas de controle de vibrações e monitoramento da integridade estrutural de forma independente. Em geral, controladores de vibrações são projetados para baixas frequências, para as quais estão associadas as maiores amplitudes de vibrações. Por outro lado, o desenvolvimento de sistemas de monitoramento da integridade baseado na técnica da impedância elétrica exige análises em altas frequências, para as quais estão associados pequenos comprimentos de onda, uma vez que busca-se detectar danos incipientes para, conseqüentemente, reduzir custos de manutenção e, principalmente, garantir segurança de pessoas. Neste contexto, tem se observado uma tendência natural do uso de formulações analíticas (nos domínios do tempo ou frequência) ou, ainda, baseadas no método dos Elementos Finitos para projeto de sistemas de controle e, especificamente para monitoramento estrutural, modelos não paramétricos obtidos por dados experimentais, em geral no domínio da frequência, para projeto de sistemas de SHM.

Embora na literatura os projetos de sistemas de controle e monitoramento tenham sido fortemente considerados desacoplados, para algumas aplicações, equipamentos de aquisição de dados de transdutores, sensores e atuadores podem ser comunizados e, conseqüentemente, promover alívio de custos com investimentos e, também, simplificar processos de análises de engenheiros e projetistas. Neste sentido, uma vez que em geral o projeto de controladores requer a obtenção de um modelo matemático computacional para se calcular a força de controle que deve ser aplicada por um atuador em cada instante de tempo, projetar ambos os sistemas – de controle e monitoramento – baseados em um mesmo modelo dinâmico pode gerar um ganho adicional aos processos. Assim, visto sua potencialidade também para análises em altas frequências, o método dos Elementos Espectrais apresenta características adequadas para a abordagem simultânea das aplicações discutidas neste trabalho de tese.

Em particular para o projeto de controladores de vibrações, neste trabalho apresentou-se preliminarmente uma discussão da técnica clássica de controle PID. Trata-se de uma abordagem, no domínio da frequência, amplamente utilizada em aplicações acadêmicas e industriais visto sua simplicidade matemática, facilidade de interpretação dos efeitos de cada parâmetro de ganho (proporcional, integral ou derivativo), bem como pela possibilidade de ajuste dos ganhos envolvendo baixa demanda computacional. No entanto, nem sempre o analista consegue facil-

mente definir um ganho ótimo que maximize ou minimize alguma função objetivo de interesse como, por exemplo, a energia de controle com relação a energia da vibração, as normas H_∞ ou H_2 do sistema, entre outras. Nestes termos, considera-se bastante conveniente o uso de técnicas modernas de controle que, em geral, utilizam a representação da planta a ser controlada por uma realização no espaço de estados. Desta forma, neste trabalho apresentou-se uma proposta de processo e modelagem matemática para se considerar um ganho de realimentação de estados na formulação por elementos espectrais. A abordagem consiste no cálculo da função de transferência do controlador a partir da relação que envolve o sistema com e sem a realimentação de controle. O procedimento apresentado considerou o método ERA, para identificação do modelo no espaço de estados, e a técnica de controle LQR, embora a formulação seja geral suficiente para se considerar outros métodos de identificação, além de diferentes técnicas de controle consagradas na literatura.

No presente trabalho apresentou-se também uma discussão sobre sistemas de monitoramento da integridade estrutural baseados em índices de detecção de danos. Conforme mencionado, índices calculados a partir de sinais no domínio da frequência têm sido amplamente utilizados em aplicações, principalmente acadêmicas, de SHM. Em geral, tais índices são obtidos a partir de dados experimentais sem, comumente, os danos representados de forma artificial como inclusão de pequenas quantidades de massa ou, também, por pequenos cortes feitos com serra mecânica. Como consequência, nestes trabalhos experimentais, há um número limitado de sinais para representar efeitos como a evolução da severidade de um dano, bem como alterações físico geométricas. Neste sentido, pode-se sugerir que o entendimento do comportamento de índices de detecção de danos para determinada estrutura fica limitado a cada caso particular estudado. Assim, o uso de um modelo espectral para representar a estrutura em análise permite previamente que o engenheiro analista conheça a alteração de um índice para diferentes condições em curto período de tempo, além de reduzido custo ao se comparar com um caso hipotético onde diversos corpos de prova, réplicas da estrutural real, estejam disponíveis. Por outro lado, é importante destacar que existem desafios a serem superados para se obter um modelo matemático computacional representativo real e, também, que ainda existem oportunidades de desenvolvimento de modelos espectrais para estruturas complexas. No contexto exposto, no capítulo 6 apresentou-se uma análise dos índices baseados nas normas H_2 , H_∞ e CCDDM. Foi possível verificar que as amplitudes dos índices são menores a medida que a estrutura tem mais amortecimento. Assim, destaca-se que uma análise semelhante, via modelo SEM, é recomendada previamente a escolha do índice a ser utilizado em um processo de monitoramento, pois sinais experimentais (logo, com ruído) podem gerar falsos diagnósticos de danos uma vez que eventuais pequenas diferenças devido ruídos podem gerar valores de índices na mesma ordem de grandeza que aqueles de fato obtidos devido à presença de danos. Neste sentido, neste trabalho também é proposto o cálculo de um índice de correlação modificado tal que é possível obter valores maiores para estruturas com maior amortecimento. Contudo, entende-se que o

uso combinado de diferentes índices pode favorecer a tomada de decisão e reduzir o número de falsos alarmes.

Finalmente, destaca-se que as aplicações de controle de vibrações e monitoramento estrutural em vigas podem ser avaliadas de forma ampla ao se utilizar a modelagem espectral. Em particular, nesta tese empregou-se o modelo de viga de Timoshenko com PZTs acoplados e, visto que o número de graus de liberdade do elemento piezelétrico é maior que o elemento convencional de viga de Timoshenko, no modelo da estrutura base se considerou também o elemento de barra (com grau de liberdade longitudinal) para assegurar consistência na modelagem. Verificou-se que a não inclusão deste grau de liberdade no modelo é equivalente a negligenciar o grau de liberdade longitudinal do modelo de PZTs e, conseqüentemente, não é possível se obter um modelo de acoplamento representativo. Em particular nesta tese não foram considerados termos de acoplamento entre as equações de Timoshenko (da viga base) com a equação da barra e, portanto, futuros trabalhos podem ser desenvolvidos explorando este tópico. Ainda neste aspecto, destaca-se também que o modelo de PZT considerado apresenta também graus de liberdade adicionais que, evidentemente, devem ser considerados de forma consistente na montagem das matrizes globais de massa e rigidez do sistema espectral resultante na união entre elementos. Para clareza de entendimento, destaca-se que o esquema de montagem das matrizes globais são equivalentes – na prática idêntico – ao procedimento empregado para análises via método dos Elementos Finitos. Portanto, nesta tese não são apresentados detalhes do processo.

Destaca-se como principais contribuições desta tese os seguintes tópicos:

- a utilização do método de Elementos Espectrais para aplicações de controle e monitoramento estrutural simultaneamente. Isto é possível pois o projeto de controle utiliza forças em baixas frequências, enquanto a técnica de SHM baseada em impedância eletromecânica utiliza forças em altas faixas de frequências. Portanto, a força total a ser aplicada na estrutura pode conter estas duas componentes. O termo de alta frequência não interfere no controle e o termo de baixa frequência não interfere no SHM.
- estruturas multi camadas utilizando a formulação de Timoshenko foi apresentada e discutida, mostrando detalhes não encontrados na literatura.
- o desenvolvimento de uma metodologia de inclusão de ganhos de controle por realimentação na formulação espectral;
- a discussão de alguns dos índices de detecção de danos mais comuns em termos de severidade de dano e nível de amortecimento estrutural, ficando sugerido um processo de análise similar preliminarmente as aplicações reais de engenharia baseadas evidentemente em dados de experimentos.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir são apresentadas algumas sugestões de trabalhos futuros que podem ampliar o entendimento dos tópicos contidos neste trabalho de tese.

- utilizar o SEM para modelar estruturas flexíveis mais complexas como placas e treliças.
- criar pacotes (bibliotecas) que facilitem a disseminação do SEM.
- avaliar diferentes técnicas de controle por realimentação bem como discutir níveis de forma requeridos;
- avaliar outros índices de detecção de danos e diferentes posições de dano relativa ao sensor e atuador;
- discutir influências de tamanho de transdutores.
- comprovar a técnica experimentalmente, isto é, utilizar simultaneamente os mesmos atuadores e sensores para o controle e o monitoramento estrutural.

REFERÊNCIAS

- BAPTISTA, F. G. **Uma Contribuição aos Sistemas de Monitoramento de Integridade Estrutural Baseados na Impedância Eletromecânica**. 2010. 91 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2010.
- BEER F. P.; JHONSTON JUNIOR., E. R. **Resistência dos Materiais**. 2. ed. São Paulo: McGraw Hill, 1989.
- BUENO, D. D. **Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos**. 2007. 230 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2007.
- BUENO D. D. ; MARQUI C. R. ; LOPES JUNIOR, V. Damage location in flexible structures using h2 and h-infinity norm approaches. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Recife, v. 3, p. 393–415, 2006.
- CORTEZ N. ; VIEIRA FILHO, J. ; BAPTISTA, F. G. Um novo método para monitoramento da integridade estrutural usando microcontrolador. In: ANAIS DO XIX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA., 19, 2012. **Anais...** Campina Grande: [s.n.], 2012. p.929-935.
- CRAWLEY E. F; ANDERSON, E. H. Detailed models of piezoceramic actuation of beams. **Journal of Intelligent Materials Systems and Structures**, Lancaster, v. 1, p.4-25, 1990.
- DORF R. C; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- DOYLE, J. F. **Wave Propagation in Structures: a spectral analysis approach**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1997.
- FRANCO, V. R. **Monitoramento da Integridade em Estruturas Aeronáuticas**. 2009. 202 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira., 2009.
- FRANÇA, A. A. **Deteção e localização de danos em materiais compósitos aplicado em aeronaves utilizando redes neurais**. 2014. 109 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2014.
- GATTI G. ; BRENNAN M. J. ; GARDONIO, P. Active damping of a beam using a physically collocated accelerometer and piezoelectric patch actuator. **Journal of Sound and Vibration**, Amsterdam, v. 303, p. 798–813, 2007.

GAWRONSKI, W. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. New York: Springer, 1998.

GAWRONSKI W.; SAWICKI, J. T. Structural damage detection using modal norms. **Journal of Sound and Vibration**, Amsterdam, v. 229, p. 194–198, 2000.

GIURGIUTIU, V. **Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors**. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2008.

GONÇALVES, P. J. P. **Controle ativo de vibrações estrutural utilizando materiais inteligentes e desigualdades matriciais lineares**. 2003. 128 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2003.

GONZALEZ, C. G. **Metodologias para reconhecimento de padrões em sistemas SHM utilizando a técnica da Impedância Eletromecânica (E/M)**. 2012. 116 p. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2012.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Rio de Janeiro, Pearson, 2010.

IEEE. **IEEE standards on piezoelectricity**. New York: IEEE, 1987.

INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001.

JUANG, J.-N. **Applied system identification**. 1. ed. Upper Sadler River: Prentice-Hall, 1994.

JUANG J.-N.; PAPPA, R. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Reston, v. 8, n. 5, p. 620–627, set./out. 1985.

LALANNE M. ; BERTHIER, P. . H. J. **Mechanical Vibrations for Engineers**. 1. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1983.

LEE, U. **Spectral Element Method in Structural Dynamics**. 1. ed. Singapore: Wiley, 2009.

LEO, D. J. **Engineering Analysis of Smart Material Systems**. 1. ed. New York: John Wiley and Sons, 2007.

MARQUI, C. R. **Modelagem de estruturas piezelétricas para aplicação em localização de falhas**. 2007. 237 p. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2007.

MARQUI, C. R. et al. External disturbance effect in damage detection using electrical impedance. In :INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 26, 2008.Orlando. **Proceedings...** Orlando, 2008. (Artigo, 26)

MEIROVITCH, L. **Methods of Analytical Dynamics**. Mineola: Dover, 2003.

MESQUITA NETO, C. **Proposta de Construção de um Amortecedor de Vibração Ajustável, TVA, Utilizando Fluido Magnetoreológico**. 2008. 101 p. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita

Filho", Ilha Solteira, 2008.

MOREIRA, F. J. O. **Um controlador Hoo de banda limitada para o controle ativo de vibração estrutural**. 1998. 247 p. Tese (Doutorado), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

MOURA JR, J. R. V.; STEFFEN JR, V. Impedance-based health monitoring for aeronautic structures using statistical meta-modeling. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Lancaster, v. 17, p. 1023–1036, 2006.

OBINATA G.; ANDERSON, B. D. O. **Model reduction for control system design**. London: Springer, 2001.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 4. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2003.

OLIVEIRA, M. A. **Monitoramento de integridade estrutural baseada em sensores piezelétricos e análise de sinais no domínio do tempo**. 2013. 129 p. Tese (Doutorado), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira., 2013.

OVERSCHEE P.; DE MOOR, B. V. N4sid: Subspace identification for linear system: Theory implementation and application. **Automatica Special Issue on Statistical Processing and Control**, [S. l.], 1994.

PEAIRS, D. M. **High Frequency Modeling and Experimental Analysis for Implementation of Impedance-based Structural Health Monitoring**. 2006. 156 p. Tese (Doutorado), Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 2006.

PEAIRS, D. M.; INMAN, D. J.; PARK, G. Circuit analysis of impedance-based health monitoring of beams using spectral elements. **Structural Health Monitoring**, New York, v. 6, p. 81–94, 2007.

PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of Matrix Structural Analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1968.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

SANTOS, J. V. A. et al. Structural damage identification in laminated structures using frf data. **Composiste Structures**, [S. l.], v. 67, p. 239–249, 2005.

SANTOS, R. B. **Controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs)**. 2008. 135 p. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2008.

SHIKI, S. B. **Aplicação de séries de Volterra na identificação de sistemas mecânicos não-lineares e em problemas de detecção e quantificação de danos**. 2016. 114 p. Tese (Doutorado), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2016.

SILVA, C. W. D. **Vibration: Fundamentals and practice**. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 1999.

SILVA, S. **Projeto de controladores robusto para aplicações em estruturas inteligentes utilizando desigualdades matriciais lineares**. 2005. 128 p. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2005.

SILVA, S. **Detecção de Danos Estruturais usando Análise de Séries Temporais e Atuadores e Sensores Piezelétricos**. 2008. Tese (Doutorado), Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

SKOGESTAD S.; POSTLEWAITE, I. **Multivariable feedback control: Analysis and design**. 2. ed. Chichester: John Wiley and Sons, 2005.

TEBALDI, A. **Modelagem de Estruturas Inteligentes**. 2004. 113 p. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2004.

THOMSON W. T.; DAHLEH, M. D. **Theory of Vibration with Applications**. 5. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1998.

VENUGOPAL V. P.; WANG, G. Modeling and analysis of lamb wave propagation in a beam under lead zirconate titanate actuation and sensing. **Journal of Intelligent Materials Systems and Structures**, Lancaster, v. 26, p. 1679–1698, 2014.

WANG, G. Analysis of bimorph piezoelectric beam energy harvesters using timoshenko and euler-bernoulli beam theory. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Lancaster, v. 24, p. 226–239, 2013.

APÊNDICE A - MATRIZES UTILIZADAS NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção apresenta-se as matrizes do sistema para o método dos Elementos Finitos.

A.1 MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS

As matrizes de rigidez e massa para os modelos calculados via o Método dos Elementos Finitos estão listadas abaixo. A matriz de amortecimento é calculada como uma combinação das matrizes de massa e rigidez.

Matrizes de rigidez e massa para uma barra

$$\mathbf{K}_B = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (195)$$

$$\mathbf{M}_B = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (196)$$

Viga de Euler-Bernoulli

$$\mathbf{K}_{EB} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (197)$$

$$\mathbf{M}_{EB} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L^2 \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (198)$$

Viga de Timoshenko

$$\mathbf{K}_T = \frac{EI}{L^3(1+\phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 + \phi L^2 & -6L & 2L^2 - \phi L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 - \phi L^2 & -6L & 4L^2 + \phi L^2 \end{bmatrix} \quad (199)$$

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho AL}{(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 + M_T m_7 & m_2 + M_T m_8 & m_3 - M_T m_7 & -m_4 + M_T m_8 \\ m_2 + M_T m_8 & m_5 + M_T m_9 & m_4 - M_T m_8 & -m_6 + M_T m_{10} \\ m_3 - M_T m_7 & m_4 - M_T m_8 & m_1 + M_T m_7 & -m_2 + M_T m_8 \\ -m_4 + M_T m_8 & -m_6 + M_T m_{10} & -m_2 - M_T m_8 & m_5 + M_T m_9 \end{bmatrix} \quad (200)$$

sendo $M_T = (r^2/L^2)$, $\phi = \frac{12EI}{kAGL^2}$ e $r^2 = I/A$. Também,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3} & m_2 &= \frac{11L}{210} + \left(\frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24} \right) L \\ m_3 &= \frac{9}{70} + \frac{3\phi}{10} + \frac{\phi^2}{6} & m_4 &= \frac{13L}{420} + \left(\frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24} \right) L \\ m_5 &= \frac{L^2}{105} + \left(\frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} \right) L & m_6 &= \frac{L^2}{140} + \left(\frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} \right) L \\ m_7 &= \frac{6}{5} & m_8 &= \left(\frac{1}{10} - \frac{\phi^2}{2} \right) L^2 \\ m_9 &= \left(\frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{3} \right) L^2 & m_{10} &= \left(\frac{-1}{30} - \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{6} \right) L^2 \end{aligned} \quad (201)$$

Matrizes de rigidez, massa e amortecimento para uma viga de duas camadas

$$\mathbf{M} = M_{\rho A} - M_{\alpha} + M_{\gamma}$$

$$\mathbf{C} = C_{cA} + C_{c1} - C_{c4} \quad (202)$$

$$\mathbf{K} = K_{EA} + K_{EI} - K_{\beta} + K_F$$

com

$$M_{\rho A} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{bmatrix} \quad M_{\alpha} = \frac{\alpha}{12} \begin{bmatrix} A_4 & A_5 \\ A_5^T & A_6 \end{bmatrix} \quad M_{\gamma} = \frac{\gamma}{30L} \begin{bmatrix} A_7 & A_8 \\ A_8^T & A_9 \end{bmatrix} \quad (203)$$

$$C_{cA} = \frac{cAL}{420} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{bmatrix} \quad C_{c1} = \frac{c_1}{30L} \begin{bmatrix} A_7 & A_8 \\ A_8^T & A_9 \end{bmatrix} \quad C_{c4} = \frac{c_4}{12} \begin{bmatrix} A_4 & A_5 \\ A_5^T & A_6 \end{bmatrix} \quad (204)$$

$$K_{EA} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1^T & C_1 \end{bmatrix} \quad K_{EI} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} A_{10} & A_{11} \\ A_{11}^T & A_{12} \end{bmatrix} \quad (205)$$

$$K_{\beta} = \frac{\beta}{L} \begin{bmatrix} C_2 & -C_2 \\ -C_2^T & C_2 \end{bmatrix} \quad K_F = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} A_{13} & A_{14} \\ A_{14}^T & A_{15} \end{bmatrix} \quad (206)$$

e

$$A_1 = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L \\ 0 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & -13L \\ 0 & 13L & -3L^2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & -22L \\ 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (207)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & L \\ -6 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -L \\ -6 & 0 & 0 \\ -L & 0L & 0 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & L \\ 6 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (208)$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 3L \\ 0 & -3L & -L^2 \end{bmatrix} \quad A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3L \\ 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (209)$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6L \\ 0 & -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L \\ 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (210)$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 3L \\ 0 & -3L & -L^2 \end{bmatrix} \quad A_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3L \\ 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (211)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0L & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (212)$$

APÊNDICE B - CÁLCULO DO NÚMERO DE ONDA ATRAVÉS DAS MATRIZES DE ESTADO

Nesta seção apresenta-se as matrizes apresentadas no capítulo ?? para calcular o número de onda para uma viga de Timoshenko de duas camadas.

B.1 MATRIZES DE ESTADOS

Elementos da matriz A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (213)$$

com

$$\begin{aligned} A_{11} &= E_b A_b + E_p A_p; \\ A_{22} &= G_b A_b + G_p A_p; \\ A_{33} &= E_b I_b + E_p A_p \frac{h_o^2}{4}; \\ A_{44} &= A_p \frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_1} \left(C_{11}^D \frac{\hat{I}_1}{\hat{h}_1} - \frac{h_{31}^2}{\beta_{33}^s} \frac{\hat{h}_1}{h_1} \right); \\ A_{13} &= A_{31} = -E_p A_p \frac{h_o}{2}; \\ A_{14} &= A_{41} = -E_p A_p \frac{\hat{h}_1}{h_1}; \\ A_{34} &= A_{43} = E_p A_p \frac{h_o}{2} \frac{\hat{h}_1}{h_1}; \end{aligned}$$

Elementos da matriz B

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & B_{32} & 0 & 0 \\ 0 & B_{34} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (214)$$

com $B_{23} = -B_{32} = -G_b A_b$; $B_{24} = -B_{42} = -G_p A_p$

Elementos da matriz C

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & C_{14} \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 \\ C_{31} & 0 & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & 0 & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (215)$$

com

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = m_b + m_p; \\ C_{33} &= -\frac{G_b A_b}{\omega^2} + \rho_b I_b + m_p \frac{h_o^2}{4}; \\ C_{44} &= -\left(\frac{G_p A_p}{\omega^2} - m_p \frac{\hat{h}_1}{h_1}\right); \\ C_{13} &= C_{31} = -m_p \frac{h_o}{2}; \\ C_{14} &= C_{41} = -m_p \frac{\hat{h}_1}{h_1}; \\ C_{34} &= C_{43} = m_b \frac{h_o}{2} \frac{\hat{h}_1}{h_1}; \end{aligned}$$

Elementos da matriz P

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Lambda_1^T(1) & \dots & \Lambda_8^T(1) \\ \Lambda_1^T(2) & \dots & \Lambda_8^T(2) \\ \Lambda_1^T(3) & \dots & \Lambda_8^T(3) \\ \Lambda_1^T(4) & \dots & \Lambda_8^T(4) \\ \Lambda_1^T(1) \exp^{k_1 L} & \dots & \Lambda_8^T(1) \exp^{k_8 L} \\ \Lambda_1^T(2) \exp^{k_1 L} & \dots & \Lambda_8^T(2) \exp^{k_8 L} \\ \Lambda_1^T(3) \exp^{k_1 L} & \dots & \Lambda_8^T(3) \exp^{k_8 L} \\ \Lambda_1^T(4) \exp^{k_1 L} & \dots & \Lambda_8^T(4) \exp^{k_8 L} \end{bmatrix} \quad (216)$$

Elementos da matriz Q

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{1i} & \dots \\ Q_{2i} & \dots \\ Q_{3i} & \dots \\ Q_{4i} & \dots \\ Q_{5i} & \dots \\ Q_{6i} & \dots \\ Q_{7i} & \dots \\ Q_{8i} & \dots \end{bmatrix} \quad (217)$$

com

$$\begin{aligned} Q_{1i} &= (E_b A_b + E_p A_p) k_i \Lambda_i^T(1) + \frac{h_{31}^2 A_p}{\beta_{33}^s L} \Lambda_i^T(1) - E_p A_p \frac{h_o}{2} k_i \Lambda_i^T(3) - \frac{h_{31}^2 A_p}{\beta_{33}^s L} \frac{h_o}{2} \Lambda_i^T(3) - E_p A_p \frac{\hat{h}_1}{h_1} k_i \Lambda_i^T(4) - \\ &\quad \frac{h_{31}^2 A_p}{\beta_{33}^s L} \frac{\hat{h}_1}{h_1} \Lambda_i^T(4); \\ Q_{2i} &= (G_b A_b + G_p A_p) k_i \Lambda_i^T(2) - G_b A_b \Lambda_i^T(3) - G_p A_p \Lambda_i^T(4); \\ Q_{3i} &= -E_p A_p \frac{h_o}{2} k_i \Lambda_i^T(1) - \frac{h_{31}^2 A_p}{\beta_{33}^s L} \frac{h_o}{2} \Lambda_i^T(1) + (E_b I_b + E_p A_p \frac{h_o^2}{4}) k_i \Lambda_i^T(3) + \frac{h_{31}^2 A_p}{\beta_{33}^s L} \frac{h_o^2}{4} \Lambda_i^T(3) + E_p A_p \frac{h_o}{2} \frac{\hat{h}_1}{h_1} k_i \Lambda_i^T(4) + \\ &\quad \frac{h_{31}^2 A_p}{\beta_{33}^s L} \frac{h_o}{2} \frac{\hat{h}_1}{h_1} \Lambda_i^T(4); \\ Q_{4i} &= -E_p A_p \frac{\hat{h}_1}{h_1} k_i \Lambda_i^T(1) - \frac{h_{31}^2 A_p}{\beta_{33}^s L} \frac{\hat{h}_1}{h_1} \Lambda_i^T(1) + E_p A_p \frac{h_o}{2} \frac{\hat{h}_1}{h_1} k_i \Lambda_i^T(3) + \frac{h_{31}^2 A_p}{\beta_{33}^s L} \frac{h_o}{2} \frac{\hat{h}_1}{h_1} \Lambda_i^T(3) + A_p \frac{\hat{h}_1}{h_1} (C_{11}^D \frac{\hat{h}_1}{h_1} - \\ &\quad \frac{h_{31}^2}{\beta_{33}^s} \frac{\hat{h}_1}{h_1}) k_i \Lambda_i^T(4) + \frac{h_{31}^2 A_p}{\beta_{33}^s L} \frac{\hat{h}_1^2}{h_1} \Lambda_i^T(4); \end{aligned}$$

$$Q_{5i} = -Q_{1i} \exp^{k_i L}; Q_{6i} = -Q_{2i} \exp^{k_i L}; Q_{7i} = -Q_{3i} \exp^{k_i L}; Q_{8i} = -Q_{4i} \exp^{k_i L}.$$

B.1.1 Matriz Espectral

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \quad (218)$$

APÊNDICE C - GANHO DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Esta seção apresenta as informações básicas da formulação do controlador LQR.

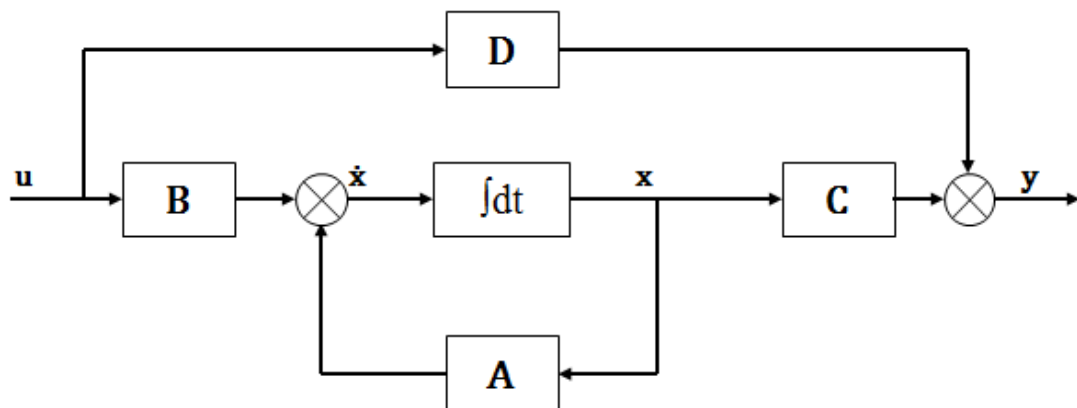
C.1 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Considere um sistema contínuo, linear e invariante no tempo representado pelo diagrama de blocos da figura 82 e descrito pela seguinte equação em espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (219)$$

Na equação (219), $\mathbf{A}$ é a matriz de estados (matriz dinâmica), $\mathbf{B}$ é a matriz de entrada, $\mathbf{C}$ é a matriz de saída, $\mathbf{D}$ é a matriz de transmissão direta, $\mathbf{x}$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}$ é o vetor de entrada e $\mathbf{y}$ é o vetor de saída. Todos os vetores são dependentes do tempo, mas a variável t será omitida por simplicidade.

Figure 82 - Diagrama de blocos de um sistema contínuo.



Fonte: dados do próprio autor.

A relação entre a função de transferência $\mathbf{Y}$ e as matrizes de estado de um dado sistema é

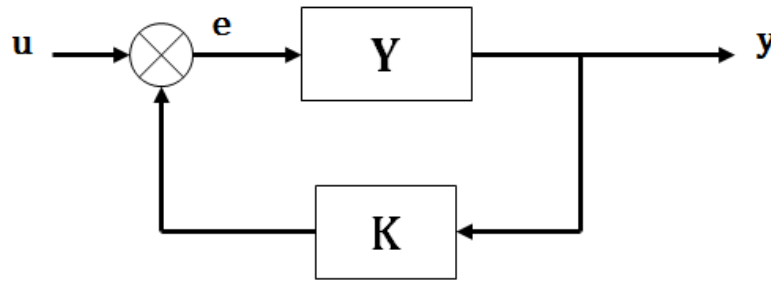
obtida aplicando a transformada de Laplace na equação 219 e é dada por

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (220)$$

sendo s uma variável complexa e $\mathbf{I}$ a matriz identidade de dimensões apropriadas.

A função de transferência de um sistema em malha fechada, figura 83, realimentada por um ganho $\mathbf{K}$ é dada por

Figure 83 - Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.



Fonte: dados do próprio autor.

$$\mathbf{Y}_{\text{control}}(\omega) = \frac{\mathbf{Y}(\omega)}{1 + \mathbf{K}\mathbf{Y}(\omega)} \quad (221)$$

Um problema de controle ótimo consiste em encontrar um sinal de controle $\mathbf{u}$ que, para um dado estado inicial diferente de zero $\mathbf{x}(0)$, leve o sistema para o estado zero, $\mathbf{x} = 0$, de maneira ótima, isto é, minimizando a seguinte função custo

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (222)$$

As matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são matrizes de peso que relacionam a importância de cada estado e a quantidade de energia necessária para o melhor desempenho do controlador, respectivamente, e podem ser obtidas por tentativa e erro. Uma solução ótima, para qualquer estado inicial, é dada por

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (223)$$

sendo $\mathbf{K}$ o ganho do controlador obtido resolvendo a seguinte equação

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (224)$$

e $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$ é a única solução da Equação Algébrica de Riccati (ARE, do inglês *Algebraic Riccati Equation*)

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (225)$$

O controle LQR está intimamente ligado ao modelo em espaço de estados. Modelos em outras representações devem ser convertidos para espaço de estados para serem utilizados com o controle LQR. Maiores detalhes sobre a modelagem em espaço de estados e o controle LQR podem ser encontrados em (OGATA, 2003) ou (DORF ; BISHOP, 2001).