



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - MESTRADO EM FÍSICA
APLICADA**

FLAVIO HELENO GRACIANO

**ESTUDO DE DIFUSÃO CAÓTICA EM UM MODELO DE POÇO DE
POTENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA
FILHO

Flávio Heleno Graciano

**ESTUDO DE DIFUSÃO CAÓTICA EM UM MODELO DE POÇO DE
POTENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Edson Denis Leonel

Rio Claro - SP
2018

G731e Graciano, Flávio Heleno
 ESTUDO DE DIFUSÃO CAÓTICA EM UM
 MODELO DE POÇO DE POTENCIAL DEPENDENTE
 DO TEMPO / Flávio Heleno Graciano. -- Rio Claro, 2018
 32 p. : il., tabs.

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
 (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
 Claro
 Orientador: Edson Denis Leonel

 1. Sistemas Dinâmicos. 2. Caos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Flávio Heleno Graciano

**ESTUDO DE DIFUSÃO CAÓTICA EM UM MODELO DE POÇO DE
POTENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel - UNESP - Rio Claro
Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira - UNESP - São João da Boa Vista
Prof. Dr. Renê Orlando Medrado Torricos - UNIFESP

Rio Claro - Julho, 2018

Resultado: Aprovado 08/08/2018

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me dar disposição e coragem de estar cursando esse mestrado e me proteger por tantas viagens. Aproveito para pedir tudo isso em dobro, pois ainda teremos o doutoramento.

Agradeço à minha esposa Rose e a meus filhos Ruan e Laura, por compreenderem minhas ausências durante esse curso.

Aos meus pais Graciano e Belchiolina e meus irmãos, pelas orações e torcidas.

Ao Professor Edson, pela oportunidade e por estar sempre disposto a ajudar no que for preciso.

Ao companheiro Joelson, pelos momentos de estudos e companheirismo.

Aos colegas do nosso grupo de pesquisa, que estão sempre dispostos a colaborar.

Por fim, ao IFSULDEMINAS Campi Pouso Alegre e Inconfidentes, pelas flexibilizações dos meus horários e de aprovações de projetos que foram de extrema importância para meus estudos.

Resumo

Neste trabalho consideramos o modelo do poço de potencial dependente do tempo e construímos de forma detalhada o mapeamento discreto bidimensional nas variáveis energia e fase que descreve a dinâmica do sistema. Mostramos que o espaço de fases é do tipo misto, contendo mares de caos, curvas invariantes e ilhas de estabilidade. Encontramos a matriz Jacobiana para o mapeamento assim como seu determinante, confirmando a propriedade de preservação de área. Estudamos a evolução no tempo da energia quadrática média e discutimos leis de escala para o comportamento dessa evolução. Por fim demos início à resolução da equação da difusão a fim de encontrarmos uma equação analítica para energia quadrática média.

Palavras Chaves: Mapeamento Discreto, Poço de Potencial, Difusão Caótica.

Abstract

In this work we consider the model of the time-dependent potential well and we construct in detail the two-dimensional discrete mapping in the energy and phase variables that describes the dynamics of the system. We show that the phase space is of the mixed type, containing chaotic seas, invariant curves and stability islands. We obtain the Jacobian matrix for the mapping as well as its determinant, confirming the area preservation property. We study the evolution in time of the average squared energy and discuss scaling laws for the behavior of this evolution. Finally we started the resolution of the diffusion equation in order to find an analytical equation for mean quadratic energy.

Key Words: Discrete Map, Potencial Well, Chaotic Diffusion.

Lista de Figuras

2.1	Esquema do poço de potencial dependente do tempo.	11
2.2	Espaço de fases do poço de potencial oscilante. Os parâmetros de controle usados foram $r = 1$, $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$	14
3.1	Gráfico do comportamento de e_{RMS} vs. n para cinco valores diferentes de N_c , $r = 1$ e $\delta = 0, 5$	18
3.2	Comportamento de e_{sat} em função de N_c para diferentes valores de N_c , $r = 1$ e $\delta = 0, 5$	20
3.3	Sobreposição das curvas validando a lei de escala para o parâmetro N_c com $r = 1$ e $\delta = 0, 5$	20
3.4	Comportamento da energia quadrática média ao longo do tempo para diferentes valores de r , $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$	21
3.5	Comportamento de e_{sat} em função r para $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$	22
3.6	Comportamento de n_x em função r para $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$	22
3.7	Sobreposição das curvas validando as lei de escala para o parâmetro r com $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$	23

SUMÁRIO

1	Introdução	7
2	O modelo do Poço de Potencial Dependente Periodicamente do Tempo e suas Propriedades	11
2.1	O modelo	11
2.2	O espaço de fases para o modelo do poço de potencial oscilante	14
2.3	A matriz jacobiana	15
3	Difusão da Energia	17
3.1	Propriedade de escala da energia quadrática média em função do parâmetro N_c	17
3.2	Propriedade de escala da energia quadrática média em função do parâmetro r	21
4	A Equação da Difusão	24
4.1	Resolução da equação da difusão	24
5	Conclusões e Perspectivas	30
5.1	Conclusões	30
5.2	Perspectivas	30

Capítulo 1

Introdução

Devido ao fato de poder descrever matematicamente sistemas naturais, o estudo em sistemas dinâmicos foi uma área atraente de pesquisa ao longo do desenvolvimento da ciência. Galileu Galilei [1] estudou sobre os pêndulos, planos inclinados, projéteis e a queda livre. Isaac Newton [2], foi um dos primeiros a ser capaz de descrever sistemas físicos através de um conjunto de leis que, por sua vez, tornaram possíveis escrever um conjunto de equações que regessem esses sistemas. Devido ao caráter determinístico, acreditava-se que fenômenos descritos no mundo macroscópico poderiam ser previsíveis, em que, através de uma condição inicial e conhecendo as equações de movimento, poderia-se construir sua trajetória. No entanto, devido a dificuldades no tratamento analítico das equações não lineares que descrevem propriedades caóticas, muitas características dos sistemas dinâmicos ficaram ignoradas até meados do século XX, ainda que estivessem contidas em equações diferenciais conhecidas há três séculos.

Poincaré [3] foi o pioneiro nos estudos sobre o tratamento de dinâmica não linear. Ele foi capaz de mostrar, usando técnicas geométricas e topológicas, que a evolução temporal de um sistema não linear é sensível às condições iniciais. Ele constatou que leves perturbações nas condições podem levar a uma grande mudança em seu estado final, ou seja, duas condições iniciais muito próximas podem levar a estados futuros muito distantes. Nesta mesma linha de estudos, tiveram-se os trabalhos de Birkhoff [4] no século passado, que serviram de motivação aos estudos de bilhares, seguidos de importantes trabalhos como os de Kolmogorov [5] e Smale [6], nos anos 50 e 60, respectivamente. No entanto, do ponto de vista do desenvolvimento do caos determinístico, somente a partir da integração numérica de equações diferenciais não lineares, possibilitadas pela chegada dos computadores, que os resultados começaram a ter destaque. A partir do trabalho de Lorenz [7] nos anos 70 e 80, surgiram na literatura uma série de resultados novos sobre comportamento caótico que fornecem propriedades de dinâmica caótica e sua descrição, e de como a dinâmica se instala em sistemas físicos, como por exemplo os de Feigenbaum [8], Kaplan e Yorke [9], Chirikov [10] e May [11]. Esses estudos descrevem a dinâmica temporal de sistemas físicos, analisando universalidades no comportamento dinâmico desses sistemas

e confirmando que os mesmos apresentam propriedades caóticas.

Atualmente, os estudos em sistemas dinâmicos têm sido continuamente desenvolvidos, na maioria das vezes por métodos de comparação numérica, mas também por método analítico. Podemos encontrar a teoria do caos expandida em diversas áreas de conhecimento, como Biologia, Astronomia, Engenharia, Química e Medicina [12, 13].

Um sistema físico pode ter sua descrição dinâmica feita de forma Hamiltoniana, que muitas das vezes nos leva ao estudo de mapas [14] (sistema dinâmico que evolui de forma discreta) bidimensionais não lineares e que preservam a área do espaço de fases [15]. Dá-se o nome de espaço de fases ao conjunto de todos os estados acessíveis de um sistema. Ao evoluirmos um sistema a partir de uma condição inicial, o sistema passa por pontos do espaço de fases, formando uma órbita. Ao conjunto de todas as órbitas possíveis dá-se o nome de espaço de fases. A estrutura do espaço de fases caracteriza os comportamentos dinâmicos possíveis do sistema, que pode ter comportamento periódico, quase periódico ou caótico [14].

Muitas das vezes pesquisadores em sistemas dinâmicos discretos estudam como algumas variáveis evoluem ao longo do tempo. Para entenderem essas evoluções procuram modelos matemáticos que possam descrever o crescimento ou decréscimo dessas medidas com a variação de algum parâmetro de controle ou uma condição inicial [16]. Em [17], foi feito o estudo da rugosidade ω em função do número de iterações n , para diferentes valores de um parâmetro de controle. No contexto deste trabalho a rugosidade é definida como sendo a variância da energia média de um sistema descrito por três parâmetros de controle através do formalismo de um mapa que apresenta preservação de área. Neste caso, ω é uma medida que cresce seguindo uma lei de potência para tempos curtos, que após passar por um valor de *crossover*, satura e se mantém constante. Os valores de saturação e do *crossover* variam na medida em que o parâmetro varia. Em [18], foi feito o estudo da convergência assintótica para o estado estacionário do mapa *logistic like* em várias bifurcações. Na bifurcação, uma dada condição inicial conduz a dinâmica a um platô para valores pequenos de n , passa por um *crossover* n_x e depois decai assintoticamente para um ponto fixo, obedecendo uma lei de potência. Podemos observar que o valor de n_x varia de acordo com a condição inicial. Para estudarmos o comportamento de medidas do tipo desses dois casos, podemos fazer o uso de funções homegêneas generalizadas, que têm a forma

$$f(x, y) = lf(l^a x, l^b y), \quad (1.1)$$

onde l é um fator de escala e, a e b são expoentes característicos. A partir dessa função e de hipóteses de escala pode-se obter uma relação analítica entre os expoentes críticos que é denominada lei de escala.

Recentemente, muitos pesquisadores estudam a difusão de uma condição inicial dada

no mar de caos para mapas bidimensionais. Na verdade, encontramos o estudo da difusão em diversas situações por diversos motivos, por exemplo, o estudo de como uma pequena gota de tinta colorida se difunde ao cair em uma jarra com água [19], como uma droga se difunde na corrente sanguínea até chegar a um órgão do corpo [20] e vários outros casos. Vamos considerar um conjunto de partículas se movendo contínua, porém aleatoriamente de um lado para o outro. Uma vez que as partículas não são criadas nem destruídas, podemos considerar que temos uma grandeza preservada localmente que chamaremos de densidade de partículas e denotaremos por ρ . Da equação da continuidade [21], que é utilizada para descrever o transporte de alguma grandeza física que a quantidade que é preservada, temos que

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x}, \quad (1.2)$$

onde $J(x, t)$ é a corrente de partículas que cruza um determinado ponto ao longo de um eixo horizontal x .

A corrente J pode ser descrita pela densidade utilizando a lei de Fick na ausência de campos externos como

$$J = -D \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (1.3)$$

onde D é chamado de coeficiente da difusão. Combinando as equações (1.2) e (1.3), teremos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (1.4)$$

A equação encontrada é chamada de equação da difusão, que é uma equação diferencial parcial e pode ser utilizada para descrever variações de densidade de um sistema que está passando por processo de difusão. Ao resolver essa equação, devemos considerar que no instante $t = 0$ as partículas estão concentradas numa posição x_0 , de modo que

$$\rho(x, 0) = \rho_0 \delta(x - x_0), \quad (1.5)$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac e ρ_0 é a densidade inicial. A solução para a equação da difusão é dada por

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}. \quad (1.6)$$

Conhecer a densidade $\rho(x, t)$ é extremamente importante dentro da mecânica estatística, uma vez que a partir dela podemos obter várias observações interessantes. Um exemplo muito importante para este trabalho seria o deslocamento quadrático médio, que é dado por

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x, t) dx, \\ \overline{x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx, \\ \overline{x^2} &= 2\rho_0 Dt.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Os processos difusivos através de suas equações matemáticas são importantes para nosso trabalho, uma vez que podemos analisar a difusão no espaço de fases da dinâmica de um sistema de interesse. Temos que ressaltar que nesses casos, a difusão acontece em um espaço matemático definido por um conjunto de estados matemáticos possíveis do sistema, e não num espaço físico.

A organização deste trabalho será da seguinte forma: No Capítulo 2 apresentaremos o modelo poço de potencial dependente do tempo, construiremos o mapeamento para o modelo, encontraremos e discutiremos o espaço de fases que é do tipo misto, encontraremos o determinante da matriz Jacobiana para o sistema [22]. No Capítulo 3 estudaremos o comportamento da energia quadrática média ao longo do tempo e encontraremos leis de escala para esse o comportamento. No Capítulo 4 encontraremos a expressão genérica da probabilidade de observar uma partícula com uma energia e em um instante n .

Capítulo 2

O modelo do Poço de Potencial Dependente Periodicamente do Tempo e suas Propriedades

Neste Capítulo será apresentado o modelo do poço de potencial dependente periodicamente do tempo, bem como a construção detalhada do mapeamento. Construiremos e discutiremos o espaço de fases para o modelo e também calcularemos o determinante da matriz jacobiana para o mapeamento.

2.1 O modelo

O modelo do poço de potencial dependente periodicamente é dado por uma caixa com potencial infinito nas bordas e com um poço que possui o fundo oscilante [23, 24], como mostra a figura 2.1

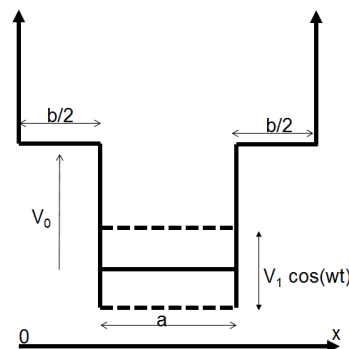


Figura 2.1: Esquema do poço de potencial dependente do tempo.

Para esse modelo, a energia potencial $V(x, t)$ é dada por

$$V(x, t) = \begin{cases} \infty & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq (a + b) \\ V_0 & \text{se } 0 < x \leq \frac{b}{2} \text{ ou } (a + \frac{b}{2}) \leq x < (a + b) \\ V_1 \cos(wt) & \text{se } \frac{b}{2} < x < (a + \frac{b}{2}) \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde a , b , V_0 , V_1 e w são constantes, sendo w a frequência de oscilação do fundo que se move periodicamente no tempo.

Podemos observar que uma partícula de massa m confinada ao interior da caixa da figura 2.1, pode estar submetida a diferentes potenciais, dependendo da posição onde se encontra. Isso implica em ganhos ou perdas de energia cinética.

Para encontrarmos um mapeamento para o sistema, vamos considerar que em um instante $t = t_n$, a partícula está na eminência de entrar no poço com uma energia $E = E_n$, na posição $x = \frac{b}{2}$, onde

$$E_n = V_0 + K_n, \quad (2.2)$$

sendo $K_n = \frac{mv_n^2}{2}$ a energia cinética.

Ao entrar no poço, a partícula sofre uma mudança brusca na velocidade devido à variação da energia cinética, logo

$$K'_n = E_n - V_1 \cos(wt_n) = \frac{mv_n'^2}{2}, \quad (2.3)$$

onde

$$|v'_n| = \sqrt{\frac{2K'_n}{m}}, \quad (2.4)$$

sendo $|v'_n|$ constante, pois não existem forças de quaisquer natureza atuando na partícula. Apenas teremos variações na velocidade nos pontos $x = \frac{b}{2}$ e $x = a + \frac{b}{2}$, devido às variações bruscas de energia potencial nestes pontos. Ao chegar em $x = a + \frac{b}{2}$, a energia do sistema será dada por

$$E'_n = K'_n + V_1 \cos(w(t_n + \Delta t'_n)), \quad (2.5)$$

onde $\Delta t'_n = \frac{a}{|v'_n|}$. Caso a energia E'_n seja maior que V_0 , a partícula escapa do poço de potencial, caso contrário, será refletida de volta até que a condição $E_n \geq V_0$, seja satisfeita e a partícula tenha condições de escapar do poço. Quando a partícula escapa do poço, teremos que

$$E'_n > K'_n + V_1 \cos[w(t_n + i\Delta t'_n)], \quad (2.6)$$

onde i é o menor inteiro que satisfaz $E_n \geq V_0$.

Combinando as equações (2.3) e (2.6) temos que, ao sair do poço

$$E'_n > E_n + V_1 \cos[w(t_n + i\Delta t'_n)] - V_1 \cos(wt_n). \quad (2.7)$$

Devido à mudança de potencial ao sair do poço, a partícula sofrerá uma nova mudança brusca na energia cinética K'' e conseqüentemente terá uma nova velocidade v''_n .

Uma vez que a partícula escapou do poço, ela se dirige a uma das bordas do potencial infinito e é refletida de volta. O tempo gasto para isso é dado por

$$\Delta t''_n = \frac{b}{|v''_n|}, \quad (2.8)$$

onde

$$|v''_n| = \sqrt{\frac{2K''_n}{m}}, \quad (2.9)$$

e

$$K''_n = E_{n+1} - V_0, \quad (2.10)$$

onde E_{n+1} é a energia da partícula imediatamente após a saída do poço que se conserva até imediatamente antes de entrar no poço novamente.

Com as equações encontradas, podemos escrever o mapeamento do modelo da seguinte forma

$$T_x : \begin{cases} E_{n+1} = E_n + V_1 \cos[w(t_n + i\Delta t'_n)] - V_1 \cos(wt_n) \\ t_{n+1} = t_n + i\Delta t'_n + \Delta t''_n \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde i é o menor inteiro tal que

$$E_n + V_1 \cos[w(t_n + i\Delta t'_n)] - V_1 \cos(wt_n) > V_0.$$

Do modo como esse mapeamento está escrito, temos uma quantidade elevada de parâmetros de controle que podem ser eliminados sem afetar a dinâmica do sistema. Com o objetivo de diminuir essa quantidade de parâmetros, vamos dividir a equação (2.11) por V_0 e redefinir os parâmetros da seguinte forma: $\delta = \frac{V_1}{V_0}$, $r = \frac{a}{b}$, $e_n = \frac{E_n}{V_0}$, $N_c = \frac{w}{(2\pi)(a/\sqrt{2V_0/m})}$ e finalmente a medida do tempo em função do número de oscilações da poço, $\phi = wt$. O valor de N_c fornece o número de oscilações completadas pelo poço em um tempo $t = \frac{a}{\sqrt{2V_0/m}}$, que é o tempo que uma partícula com energia igual a V_0 levaria para percorrer a distância a , caso o poço fosse estático.

Assim, podemos reescrever o mapeamento como:

$$T : \begin{cases} e_{n+1} = e_n + \delta [\cos(\phi_n + i\Delta\phi_a) - \cos\phi_n] \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + i\Delta\phi_a + \Delta\phi_b] \quad \text{mod } 2\pi \end{cases}, \quad (2.12)$$

onde i o menor inteiro tal que

$$e_{n+1} = e_n + \delta[\cos(\phi_n + i\Delta\phi_a) - \cos\phi_n] > 1,$$

e $\Delta\phi_a + \Delta\phi_b$ são dados por

$$\Delta\phi_a = \frac{2\pi N_c}{\sqrt{e_n - \delta \cos(\phi_n)}}, \quad (2.13)$$

e

$$\Delta\phi_b = \frac{2\pi N_c r}{\sqrt{e_{n+1} - 1}}, \quad (2.14)$$

onde r , N_c e δ são parâmetros de controle.

2.2 O espaço de fases para o modelo do poço de potencial oscilante

A figura 2.2 mostra o espaço de fases para o mapeamento em questão. Encontramos um espaço de fases do tipo misto, onde se observa a presença de caos, comportamentos periódicos e regiões com comportamento quase-periódicos. Uma partícula no mar de caos pode se difundir na região $e \in (1, e_{fisc})$, onde e_{fisc} corresponde à energia da primeira curva invariante.

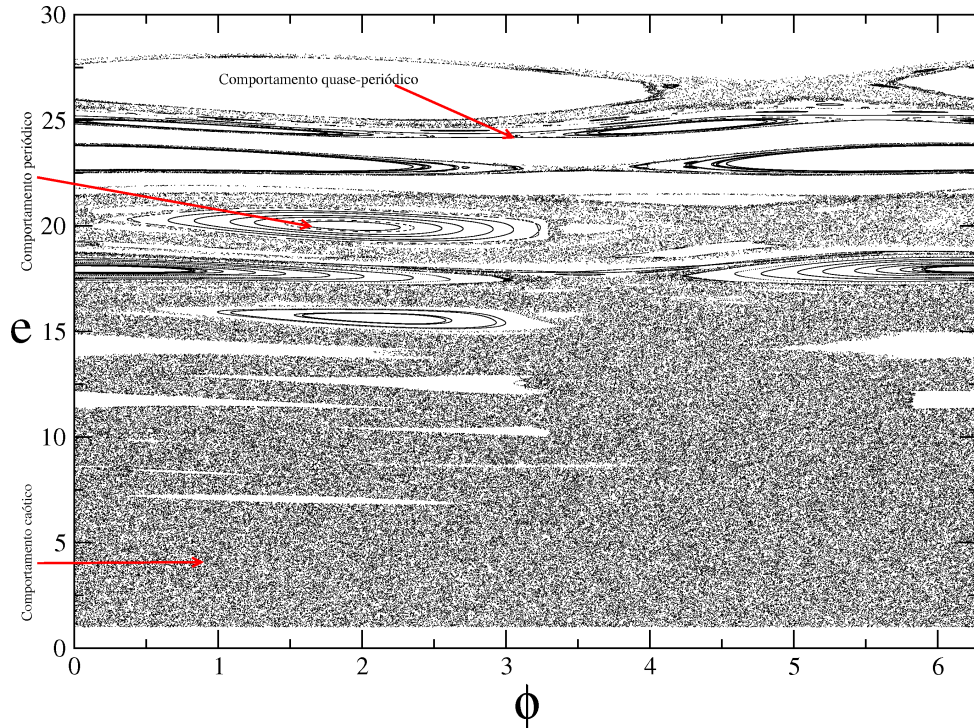


Figura 2.2: Espaço de fases do poço de potencial oscilante. Os parâmetros de controle usados foram $r = 1$, $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$.

À partícula não é permitido, entretanto, o cruzamento da curva invariante. Logo, a difusão da partícula é limitada sendo esse o comportamento que queremos investigar neste

trabalho. As ilhas de estabilidade correspondem a regiões quase-periódicas do espaço de fases circundando pontos fixos elípticos [14]. Por fim, as regiões quase periódicas correspondem às curvas invariantes, sejam elas nas ilhas ou atravessando o espaço de fases, as quais são chamadas de curvas invariantes *spanning*. Uma partícula no mar de caos não pode cruzar as curvas invariantes *spanning* e tampouco adentrar às ilhas de estabilidade [21].

2.3 A matriz jacobiana

Uma vez obtido o mapeamento para o modelo, através das equações (2.12), (2.13) e (2.14), podemos então encontrar o determinante na matriz jacobiana para o modelo e verificarmos se o sistema preserva ou não a área do espaço de fases.

A matriz jacobiana é dada por

$$J_n = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

onde

$$j_{11} = \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n}, \quad j_{12} = \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n}, \quad j_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} \quad \text{e} \quad j_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}.$$

Calculando os elementos da matriz jacobiana teremos

$$\frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} = 1 - \delta \sin(\phi_n + i\Delta\phi_a) i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} = \delta \left\{ -\sin(\phi_n + i\Delta\phi_a) \left[1 + i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} \right] + \sin \phi_n \right\}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} = i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} + \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial e_n}, \quad (2.18)$$

e

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial \phi_n}. \quad (2.19)$$

Das equações (2.13) e (2.14) temos que

$$\frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} = -\frac{\pi N_c}{\sqrt[3]{(e_n - \delta \cos \phi_n)^2}}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} = -\frac{\pi N_c \delta \sin \phi_n}{\sqrt[3]{(e_n - \delta \cos \phi_n)^2}}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial e_n} = -\frac{\pi N_c r}{\sqrt[3]{(e_{n+1} - 1)^2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial \phi_n} = - \frac{\pi N_c r}{\sqrt[3]{(e_{n+1} - 1)^2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n}. \quad (2.23)$$

Encontrados os elementos da matriz jacobiana, podemos agora obter o determinante da mesma dado por $\det[J_n] = j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}$, ou seja

$$\det[J_n] = \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n}. \quad (2.24)$$

Combinando as equações, (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) e (2.23), encontramos o determinante da equação (2.24), dado por

$$\det[J_n] = 1. \quad (2.25)$$

Pelo teorema de Liouville [21], isso significa que área do espaço de fase é preservada.

Capítulo 3

Difusão da Energia

Neste Capítulo, estudaremos as propriedades de escala para a difusão caótica para o modelo em estudo em função de dois parâmetros de controle N_c e r .

3.1 Propriedade de escala da energia quadrática média em função do parâmetro N_c

Nesta seção, apresentaremos as propriedades de escala da energia quadrática média e sua evolução temporal $e_{RMS}(n)$ em função do parâmetro N_c . Para isso, iteramos computacionalmente um ensemble de condições iniciais dadas no mar de caos usando a expressão

$$\overline{e^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{i,j}^2, \quad (3.1)$$

onde denotaremos $e_{RMS} = \sqrt{\overline{e^2}_n}$ por energia quadrática média, M é o ensemble de condições iniciais e n é o número de iterações. Realizamos a média ao longo do ensemble de condições iniciais, ou seja, uma média das condições para um valor fixo de energia dentro do mar de caos e o valor de $\phi \in [0, 2\pi]$ e uma média ao longo da órbita.

A figura 3.1 mostra o comportamento e_{RMS} vs. n . Podemos ver que para tempos curtos, e_{RMS} é crescente, caracterizada por uma lei de potência e que, após um regime de *crossover*, as curvas convergem para um platô de saturação para tempos longos.

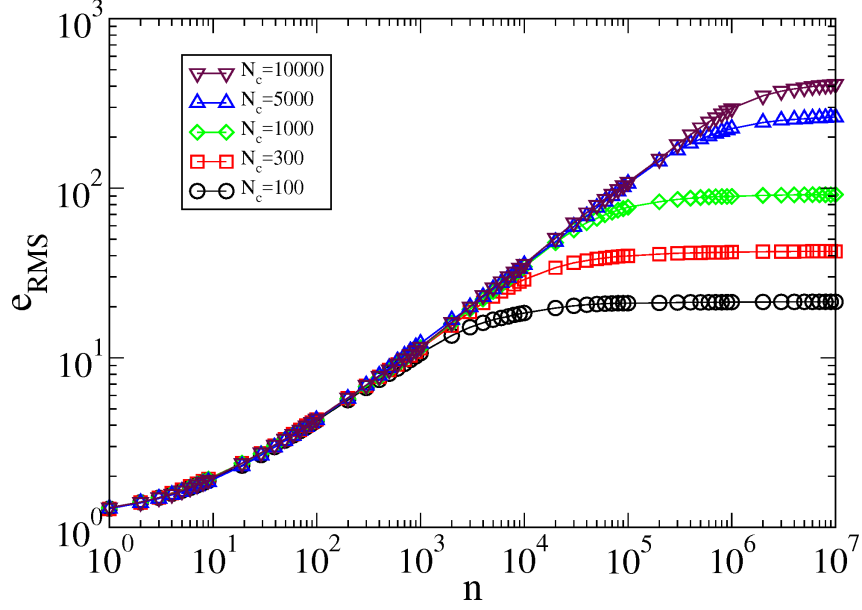


Figura 3.1: Gráfico do comportamento de e_{RMS} vs. n para cinco valores diferentes de N_c , $r = 1$ e $\delta = 0,5$.

O resultado mostrado na figura 3.1 nos permitiu usar três hipóteses de escala [17,21]. Considerando n_x o ponto de mudança da fase de crescimento para a fase de saturação (*crossover*):

1. Para $n \ll n_x$, onde as curvas de crescimento são descritas por

$$e_{RMS} \sim [n\delta^2]^\beta, \quad (3.2)$$

e β é chamado de expoente de aceleração;

2. Para $n \gg n_x$, onde

$$e_{sat} \sim N_c^\alpha, \quad (3.3)$$

e α é chamado de expoente de saturação;

3. Para $n = n_x$, onde

$$n_x \sim N_c^z, \quad (3.4)$$

e z é chamado de expoente de *crossover*.

Essas três hipóteses nos permitem descrever o comportamento da e_{RMS} como uma função homegênea generalizada, descrita por

$$e_{RMS}(n\delta^2, N_c) = l e_{RMS}(l^p n\delta^2, l^q N_c), \quad (3.5)$$

onde l é um fator de escala, p e q são expoentes característicos. Nessa equação podemos escolher $l^p n \delta^2 = 1$, onde encontraremos

$$l = (n \delta^2)^{-\frac{1}{p}}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.5) teremos

$$e_{RMS}(n \delta^2, N_c) = (n \delta^2)^{-\frac{1}{p}} e_{RMS}(1, (n \delta^2)^{-\frac{q}{p}} N_c) \quad (3.7)$$

admitindo agora que a função $e_{RMS}(1, (n \delta^2)^{-\frac{q}{p}} N_c)$ é constante para $n \ll n_x$ e comparando a equação (3.7) com a primeira hipótese de escala temos que

$$\beta = -\frac{1}{p}. \quad (3.8)$$

Escolhendo agora $l^q N_c = 1$ teremos que

$$l = N_c^{-\frac{1}{q}}. \quad (3.9)$$

Substituindo a equação (3.9) na (3.5) teremos

$$e_{RMS}(n \delta^2, N_c) = N_c^{-\frac{1}{q}} e_{RMS}(N_c^{-\frac{p}{q}} n \delta^2, 1). \quad (3.10)$$

Agora, podemos admitir que a energia e_{RMS} é constante para $n \gg n_x$, e comparando a equação (3.10) com a segunda hipótese de escala teremos

$$\alpha = -\frac{1}{q}. \quad (3.11)$$

Comparando as expressões de l encontradas nas equações (3.6) e (3.9), teremos

$$n \delta^2 = N_c^{\frac{p}{q}}. \quad (3.12)$$

Comparando agora a equação acima com a terceira hipótese de escala, teremos que

$$z = \frac{p}{q}. \quad (3.13)$$

Usando as equações (3.8) e (3.11), podemos reescrever a equação (3.13) como

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) nos fornece uma lei de escala que relaciona os expoentes das três hipóteses de escala. Desse modo, conhecendo dois desses expoentes, podemos encontrar o terceiro.

Através de um ajuste de uma lei de potência feito computacionalmente nas curvas de crescimento da e_{RMS} encontramos que $\beta \cong \frac{1}{2}$.

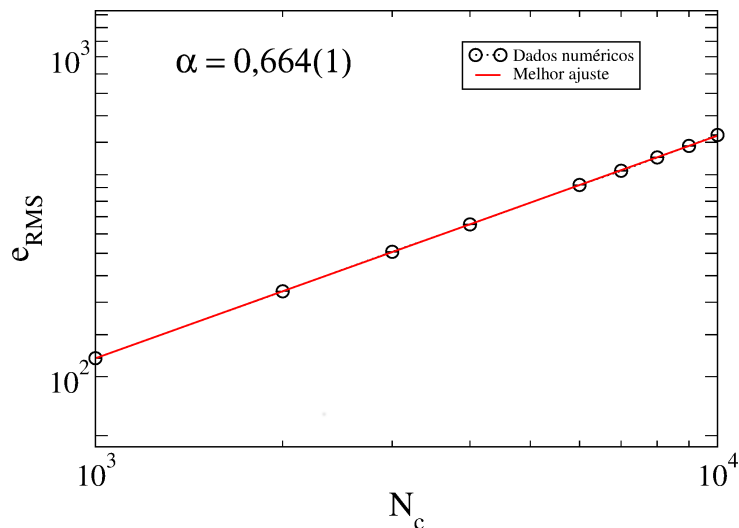


Figura 3.2: Comportamento de e_{sat} em função de N_c para diferentes valores de N_c , $r = 1$ e $\delta = 0,5$.

Usando o processo de extrapolação, encontramos um conjunto de pontos (N_c, e_{sat}) (figura 3.2) através dos quais podemos obter também $\alpha \cong \frac{2}{3}$. Pela lei de escala que encontramos, onde $z = \frac{\alpha}{\beta}$, temos conseqüentemente que $z \cong \frac{4}{3}$. Como podemos ver na figura 3.3, as curvas da e_{RMS} são invariantantes de escala. A sobreposição das curvas acontece devido à reescala dos eixos n e e , onde fazemos $n \rightarrow \frac{n}{N_c^z}$ e $e \rightarrow \frac{e}{N_c^\alpha}$.

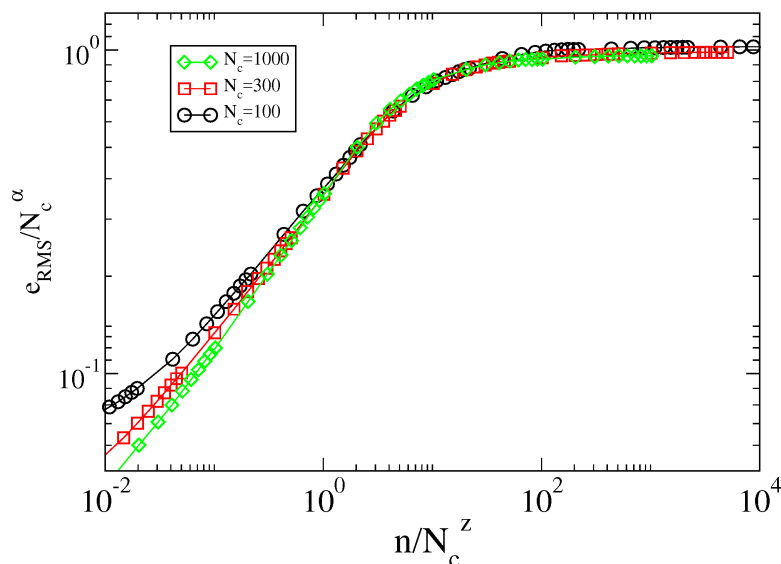


Figura 3.3: Sobreposição das curvas validando a lei de escala para o parâmetro N_c com $r = 1$ e $\delta = 0,5$.

3.2 Propriedade de escala da energia quadrática média em função do parâmetro r

Nesta seção vamos apresentar o estudo feito das propriedades de escala da energia quadrática média em função do parâmetro de controle r . Novamente fizemos interações computacionais para um conjunto de condições iniciais dadas no mar de caos fazendo o uso da equação (3.1) de forma completamente análoga à da seção anterior, a novidade é que agora estudaremos comportamento de e_{RMS} para um outro parâmetro.

A figura 3.4 mostra o comportamento de e_{RMS} para alguns valores de r . Podemos observar novamente que para tempos curtos a energia quadrática média é crescente, e esse crescimento caracteriza uma lei de potência. Após o crescimento, passa por um *crossover* (n_x) onde ocorre uma mudança de comportamento convergindo para um platô de saturação.

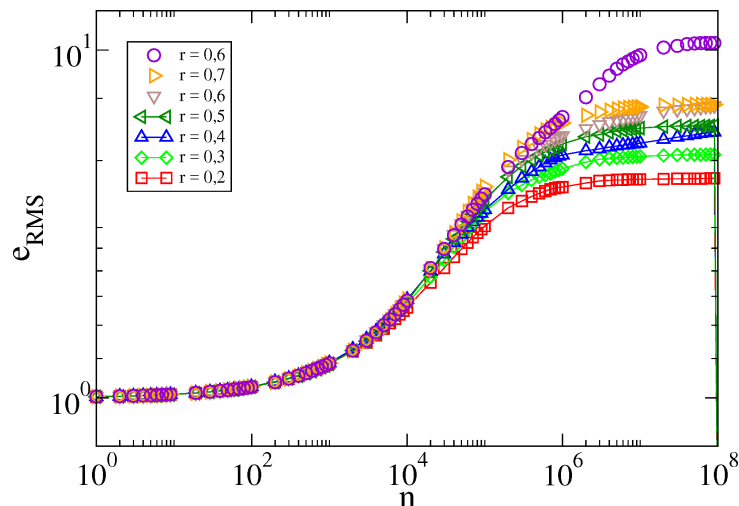


Figura 3.4: Comportamento da energia quadrática média ao longo do tempo para diferentes valores de r , $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$.

O procedimento discutido na seção anterior se aplica também aqui com relação ao comportamento de escala.

Usando o processo de extrapolação, encontramos um conjunto de pontos (r, e_{sat}) (figura 3.5), através dos quais pudemos fazer computacionalmente um ajuste em lei de potência e estimar o valor de α , onde encontramos que $\alpha = 0,30(2)$.

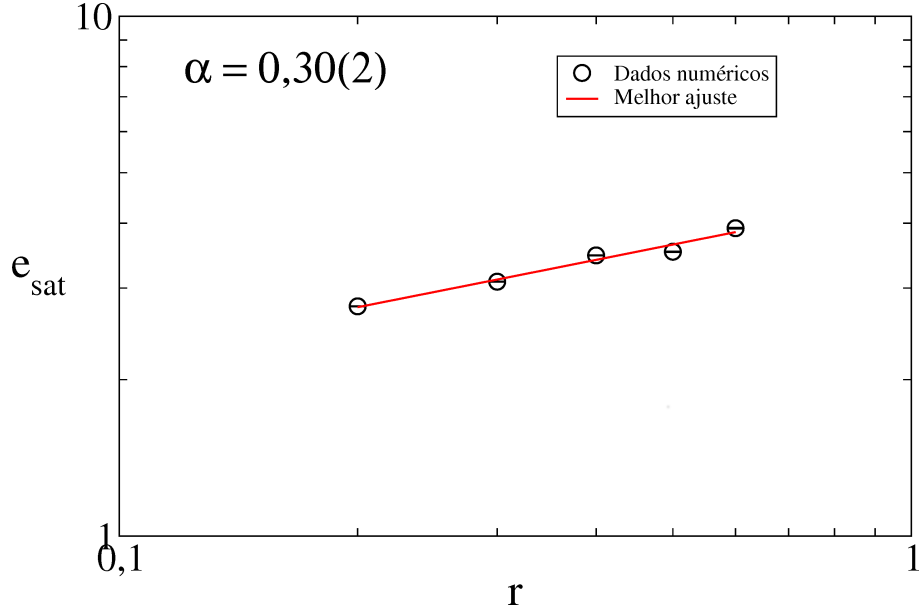


Figura 3.5: Comportamento de e_{sat} em função r para $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$.

Para estimarmos o valor de β , fizemos um ajuste em lei de potência nas curvas de crescimento de e_{RMS} , onde encontramos que $\beta = 0,196(9)$. Para obtermos n_x , encontramos o cruzamento da linha do ajuste em lei de potência de β com as linhas horizontais correspondentes a cada um dos valores de e_{sat} . Assim, encontramos um conjunto de pontos (r, n_x) , conforme mostrado na figura 3.6, e fizemos um ajuste em lei de potência nesses pontos encontrando, $z = 1,54(3)$.

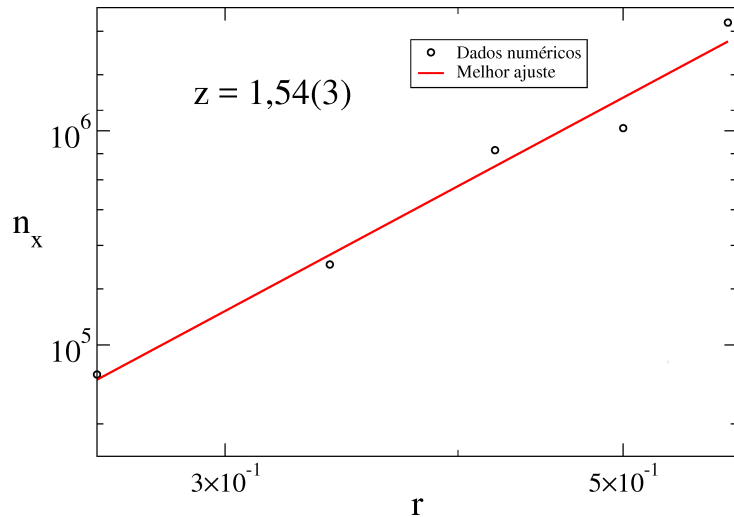


Figura 3.6: Comportamento de n_x em função r para $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$.

Os valores encontrados podem ser comprovados quando substituídos na lei de escala para o problema. Tal lei de escala é validada pela figura 3.7, onde podemos ver que as curvas são invariantes de escala, pois ambas se sobrepõem quando os eixos são reescalados de modo que o eixo e passe a ser $e \rightarrow \frac{e}{r^\alpha}$ e o eixo n , $n \rightarrow \frac{n}{r^z}$.

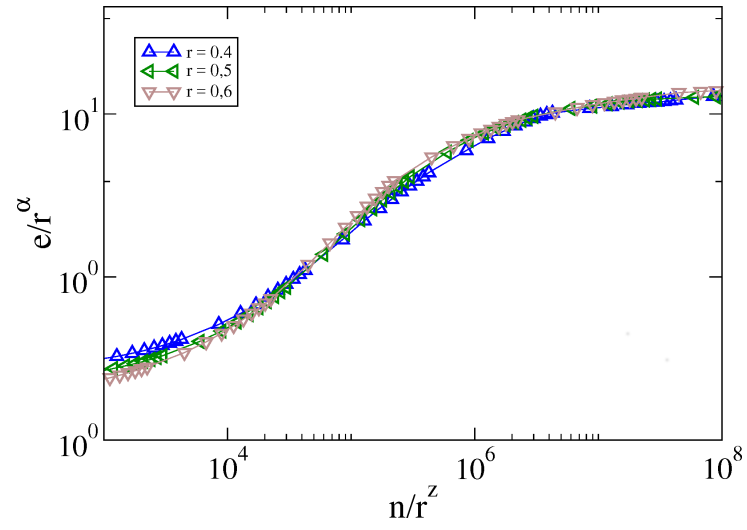


Figura 3.7: Sobreposição das curvas validando as lei de escala para o parâmetro r com $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$.

Capítulo 4

A Equação da Difusão

Neste Capítulo resolveremos a equação da difusão. A resolução é feita utilizando certas condições de contorno do mapeamento do modelo e considerando a técnica de separação de variáveis.

4.1 Resolução da equação da difusão

Consideremos a equação da difusão [21, 25] dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial e^2}, \quad (4.1)$$

onde $\rho = \rho(e, n)$ é a função que fornece a probabilidade de uma partícula ter uma energia e em um certo instante n , e D é o coeficiente de difusão.

Podemos observar que as condições aplicadas na função ρ , são compostas por aquelas que dependem de energia e e por aquelas que dependem do número de iterações n , ou seja dois grupos diferentes. Logo podemos imaginar que ρ seja uma função encontrada pelo produto de uma função que dependa de e por uma outra função que dependa de n . Dessa forma podemos usar a técnica de separação de variáveis [26] para resolvermos e essa equação diferencial. Assim supomos que a solução tenha a forma

$$\rho(e, n) = E(e)N(n). \quad (4.2)$$

Da equação (4.2) temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = E \frac{\partial N}{\partial n}, \quad (4.3)$$

e além disso

$$\frac{\partial \rho}{\partial e} = N \frac{\partial E}{\partial e}, \quad (4.4)$$

logo,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial e^2} = N \frac{\partial^2 E}{\partial e^2}. \quad (4.5)$$

Substituindo as equações (4.3) e (4.5) na equação (4.1), teremos

$$E \frac{\partial N}{\partial n} = DN \frac{\partial^2 E}{\partial e^2}, \quad (4.6)$$

então podemos escrever

$$\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} = \frac{D}{E} \frac{\partial^2 E}{\partial e^2} = -\mu^2, \mu \in \Re. \quad (4.7)$$

Assim temos duas equações diferenciais para serem resolvidas, uma de primeira ordem e outra de segunda ordem. Para resolvermos a equação de primeira teremos

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dn} = -\mu^2, \quad (4.8)$$

separando as variáveis e aplicando as integrais teremos

$$\int_{N_0}^{N(n)} \frac{dN}{N} = - \int_0^n \mu^2 dn. \quad (4.9)$$

Ao finalizarmos a resolução da equação diferencial teremos

$$N(n) = N_0 \exp(-\mu^2 n). \quad (4.10)$$

É importante observarmos que $N(n)$ tende a 0 quando n tende a ∞ .

Agora temos que resolver a segunda equação diferencial, que será uma EDO de segunda ordem dada por

$$\frac{D}{E} \frac{d^2 E}{de^2} = -\mu^2. \quad (4.11)$$

Podemos reescrever essa equação de seguinte forma

$$D\ddot{E} + E\mu^2 = 0, \quad (4.12)$$

onde $\ddot{E} = \frac{\partial^2 E}{\partial e^2}$.

Uma possível solução para essa equação é

$$E = E_0 \exp(\lambda e), \quad (4.13)$$

onde E_0 é uma constante e λ um autovalor. Consequentemente, teremos que

$$\dot{E} = E_0 \lambda \exp(\lambda e), \quad (4.14)$$

e

$$\ddot{E} = E_0 \lambda^2 \exp(\lambda e). \quad (4.15)$$

Substituindo as equações (4.15) e (4.13) na equação (4.12), teremos

$$D[E_0 \lambda^2 \exp(\lambda e) + \mu^2 (E_0 \exp(\lambda e))] = 0. \quad (4.16)$$

Para resolvermos a equação (4.16) usaremos técnicas de resoluções de equações diferenciais de segunda ordem [26], logo essa equação nos leva à seguinte equação característica

$$D\lambda^2 + \mu^2 = 0. \quad (4.17)$$

Resolvendo a equação (4.17) temos

$$\lambda = \pm i \frac{\mu}{\sqrt{D}}. \quad (4.18)$$

Então temos que

$$E(e) = A \exp\left(i \frac{\mu}{\sqrt{D}} e\right) + B \exp\left(-i \frac{\mu}{\sqrt{D}} e\right). \quad (4.19)$$

Pela relação de Euler [27], temos que

$$\exp(\pm i\theta) = \cos \theta \pm i \sin \theta. \quad (4.20)$$

Então podemos reescrever a equação (4.19) da seguinte forma

$$E(e) = A \left[\cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}} e\right) + i \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}} e\right) \right] + B \left[\cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}} e\right) - i \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}} e\right) \right]. \quad (4.21)$$

Simplificando a equação (4.21) teremos

$$E(e) = (A + B) \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}} e\right) + i(A - B) \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}} e\right). \quad (4.22)$$

Como a energia $E(e)$ é um número real, podemos fazer

$$\begin{cases} A = \tilde{a} - i\tilde{b} \\ B = \tilde{a} + i\tilde{b} \end{cases}. \quad (4.23)$$

Resolvendo o sistema da equação (4.23) teremos

$$\begin{cases} A + B = 2\tilde{a} \\ (A - B)i = 2\tilde{b} \end{cases}. \quad (4.24)$$

Logo, a equação (4.22) pode ser escrita da seguinte maneira

$$E(e) = 2\tilde{a} \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e\right) + 2\tilde{b} \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e\right). \quad (4.25)$$

Agora, substituindo as equações (4.10) e (4.25) na equação (4.2)

$$\rho(e, n) = \left[2\tilde{a} \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e\right) + 2\tilde{b} \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e\right) \right] N_0 \exp(-\mu^2 n). \quad (4.26)$$

Para continuarmos a resolução da equação da difusão, precisamos agora considerar duas condições de contorno do problema. Devemos lembrar que estamos estudando a evolução de condições iniciais dadas no mar de caos e que essas condições têm o menor valor de energia $e = 1$ sendo que essa energia pode se evoluir até a primeira curva invariante do tipo *spanning*. Para esses dois valores de energia, o fluxo de partítulas é zero, ou seja, $\frac{\partial \rho}{\partial e} = 0$ para a energia $e_{min} = 1$ ou para a energia $e_{max} = e_{fis}$, onde e_{fis} é a energia na primeira curva invariante *spaning*.

Derivando a equação (4.26) em relação a e , temos

$$\frac{\partial \rho(e, n)}{\partial e} = \left[-2\tilde{a} \frac{\mu}{\sqrt{D}} \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e\right) + 2\tilde{b} \frac{\mu}{\sqrt{D}} \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e\right) \right] N_0 \exp(-\mu^2 n). \quad (4.27)$$

Aplicando a condição de contorno $\frac{\partial \rho}{\partial e} = 0$ para a energia $e_{min} = 1$, teremos

$$-\tilde{a} \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{min}\right) + \tilde{b} \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{min}\right) = 0, \quad (4.28)$$

o que nos leva a

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{min}\right)}{\sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{min}\right)} = \cot\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{min}\right). \quad (4.29)$$

Aplicando agora a condição $\frac{\partial \rho}{\partial e} = 0$ para a energia $e_{max} = e_{fis}$, teremos

$$-\tilde{a} \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{fis}\right) + \tilde{b} \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{fis}\right) = 0, \quad (4.30)$$

o que nos leva a

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{fis}\right)}{\sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{fis}\right)} = \cot\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{fis}\right). \quad (4.31)$$

Comparando as equações (4.29) e (4.31) teremos

$$\cot\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{fis}\right) = \cot\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{min}\right), \quad (4.32)$$

ou seja,

$$\frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{fis} = \frac{\mu}{\sqrt{D}}e_{min} + k\pi, k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, \quad (4.33)$$

isolando μ e lembrando que $e_{min} = 1$ temos

$$\mu = \frac{k\pi\sqrt{D}}{e_{fis} - 1}, k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.34)$$

Para $k = 0$, implica em $\mu = 0$, logo temos

$$N(n) = N_0 \exp(-0^2 \cdot n), \quad (4.35)$$

o que nos mostra que

$$N(n) = N_0. \quad (4.36)$$

Teremos também que

$$E(e) = 2\tilde{a} \cos\left(\frac{0}{\sqrt{D}}e\right) + 2\tilde{b} \sin\left(\frac{0}{\sqrt{D}}e\right). \quad (4.37)$$

Fazendo $2\tilde{b} = \tilde{c}$, temos que

$$E(e) = \tilde{c}. \quad (4.38)$$

Então, pela equação (4.2) temos

$$\rho(e, n) = \tilde{c}\tilde{N}_0. \quad (4.39)$$

Agora podemos considerar os resultados das equações (4.34) e (4.38) e reescrever a equação (4.26), onde obtemos

$$\rho(e, n) = \tilde{c}\tilde{N}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[2\tilde{a} \cos\left(\frac{k\pi e}{e_{fis} - 1}\right) + 2\tilde{b} \sin\left(\frac{k\pi e}{e_{fis} - 1}\right) \right] N_0 \exp\left(-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fis} - 1)^2}\right). \quad (4.40)$$

Na equação anterior, podemos fazer $\tilde{c}\tilde{N}_0 = a_0$, $2\tilde{a}N_0 = a_k$ e $2\tilde{b}N_0 = b_k$; assim teremos uma série de Fourier [26], dada por

$$\rho(e, n) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi e}{e_{fis} - 1}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi e}{e_{fis} - 1}\right) \right] \exp\left(-\frac{k^2\pi^2 Dn}{(e_{fis} - 1)^2}\right). \quad (4.41)$$

Agora temos como objetivo encontrar os coeficientes a_0 , a_k e b_k . Os próximos passos

do trabalho serão as determinações desses coeficientes e o comportamento de $e_{RMS}(n)$.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

5.1 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos o modelo do poço de potencial dependente do tempo e construímos o mapeamento bidimensional para o modelo. Encontramos um espaço de fases do tipo misto, contendo curvas invariantes, ilhas de periodicidade e mar de caos. Mostramos que o determinante da matriz Jacobiana do modelo é igual a 1, portanto preserva a área do espaço de fases. Estudamos a evolução de um conjunto de condições iniciais dadas no mar de caos para os parâmetros de controle N_c e r . Para N_c , concluímos que a evolução do sistema obedece uma lei de escala onde $\alpha \cong 1/2$, $\beta \cong \frac{2}{3}$ e como $z = \frac{\alpha}{\beta}$, consequentemente $z \cong \frac{4}{3}$. Para r , encontramos a mesma lei de escala com $\alpha = 0,30(2)$, $\beta = 0,196(9)$ e $z \cong 1,54(3)$. Obtendo a expressão da probabilidade de observar uma partícula com energia e no instante n .

5.2 Perspectivas

Pretendemos, em trabalhos futuros, finalizar a resolução da equação da difusão, encontrar de forma analítica a equação da energia quadrática média e comparar os resultados numéricos e analíticos.

Bibliografia

- [1] G. Galilei, *Siderus Nuncius: O mensageiro das estrelas*. 2010.
- [2] I. Newton, *Newton's principia: mathematical principles of natural philosophy*. 1990.
- [3] H. Poincaré and R. Magini, “Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,” *Il Nuovo Cimento (1895-1900)*, vol. 10, no. 1, pp. 128–130, 1899.
- [4] G. D. Birkhoff, “On the periodic motions of dynamical systems,” *Acta Mathematica*, vol. 50, no. 1, pp. 359–379, 1927.
- [5] A. Kolmogorov, “On preservation of conditionally periodic motions under a small change in the hamiltonian function,” in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 98, pp. 527–530, 1954.
- [6] S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 73, no. 6, pp. 747–817, 1967.
- [7] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *Journal of the atmospheric sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.
- [8] M. J. Feigenbaum, “Quantitative universality for a class of nonlinear transformations,” *Journal of statistical physics*, vol. 19, no. 1, pp. 25–52, 1978.
- [9] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, “Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of lorenz,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 67, no. 2, pp. 93–108, 1979.
- [10] B. V. Chirikov, “A universal instability of many-dimensional oscillator systems,” *Physics reports*, vol. 52, no. 5, pp. 263–379, 1979.
- [11] R. M. May, “Simple mathematical models with very complicated dynamics,” *Nature*, vol. 261, no. 5560, p. 459, 1976.
- [12] T. Jackson and A. Radunskaya, *Applications of Dynamical Systems in Biology and Medicine*, vol. 158. Springer, 2015.

- [13] S. Strogatz, M. Friedman, A. J. Mallinckrodt, S. McKay, *et al.*, “Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering,” *Computers in Physics*, vol. 8, no. 5, pp. 532–532, 1994.
- [14] N. Fiedler-Ferrara and C. C. do Prado, *Caos: uma introdução*. Edgar Blucher, 1994.
- [15] E. D. Leonel, P. V. McClintock, and J. K. L. da Silva, “Fermi-ulam accelerator model under scaling analysis,” *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 1, p. 014101, 2004.
- [16] A.-L. Barabási and H. E. Stanley, *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge university press, 1995.
- [17] E. D. Leonel and P. V. McClintock, “Scaling properties for a classical particle in a time-dependent potential well,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 15, no. 3, p. 033701, 2005.
- [18] R. M. Teixeira, D. S. Rando, F. C. Geraldo, R. Costa Filho, J. A. de Oliveira, and E. D. Leonel, “Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation,” *Physics Letters A*, vol. 379, no. 18, pp. 1246–1250, 2015.
- [19] S. Lee, H. Lee, I. Lee, and C. Tseng, “Ink diffusion in water,” *European journal of physics*, vol. 25, no. 2, p. 331, 2004.
- [20] K. Murase, S. Tanada, H. Mogami, M. Kawamura, M. Miyagawa, M. Yamada, H. Higashino, A. Iio, and K. Hamamoto, “Validity of microsphere model in cerebral blood flow measurement using n-isopropyl-p-(i-123) iodoamphetamine,” *Medical physics*, vol. 17, no. 1, pp. 79–83, 1990.
- [21] E. D. Leonel, “Fundamentos da física estatística,” *São Paulo: Edgard Blucher*, 2015.
- [22] A. J. Lichtenberg, “Regular and chaotic dynamics,” *Springer, Berlin*, vol. 143, pp. 170–179, 1992.
- [23] D. R. d. Costa, “Transições de fase nas dinâmicas de uma partícula se movendo em um poço ou barreira de potencial dependentes periodicamente do tempo,” 2011.
- [24] G. Luna-Acosta, G. Orellana-Rivadeneira, A. Mendoza-Galván, and C. Jung, “Chaotic classical scattering and dynamics in oscillating 1-d potential wells,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 12, no. 2, pp. 349–363, 2001.
- [25] R. K. Pathria and P. D. Beale, *Statistical Mechanics, Third Edition*. Academic Press, 2011.
- [26] E. Butkov, “Física matemática, ltc editora,” *Rio de*, vol. 1, p. 156, 1988.
- [27] J. Stewart, “Cálculo, vol. 1,” *Pioneira Thomson Learning*, p. 47, 2001.