

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

**EFEITOS DE CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO
EM UM SISTEMA DISSIPATIVO PULSANTE**

Bruno Castaldi

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (orientador)

Rio Claro (SP)

2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

BRUNO CASTALDI

EFEITOS DE CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO EM
UM SISTEMA DISSIPATIVO PULSANTE

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, para obtenção do grau de
Bacharel em Física.

Rio Claro – SP

2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

BRUNO CASTALDI

EFEITOS DE CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO EM UM
SISTEMA DISSIPATIVO PULSANTE

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, para obtenção do grau de
Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Dr. Ricardo Egydio de Carvalho, UNESP (orientador)

Dra. Ana Paula Mijolaro, FHO-UNIARARAS

Dr. Roberto Eugenio Lagos Monaco, UNESP

Rio Claro, SP _____ de _____ de _____

RESUMO

A ideia central deste trabalho é entender e analisar os aspectos dinâmicos do movimento de uma partícula movendo-se sobre o bilhar anular, que corresponde a dois círculos de raios R e r ($r < R$). Os círculos podem ser concêntricos ou excêntricos. Descrevemos o sistema pela introdução de fronteiras pulsantes que transferem momento para a partícula. E assim, as colisões com os círculos são estudadas nos casos conservativo (elástico) e dissipativo (inelástico). Quando introduzimos campos elétrico e magnético, a partícula é submetida à Força de Lorentz. Também podendo sofrer sucessivas colisões com os círculos pulsantes, ganhando ou perdendo energia. Para o caso elástico dependente do tempo, já foi anteriormente observado que a partícula pode ganhar energia ilimitadamente. A proposta deste trabalho é estudar os efeitos de ambos os campos externos na energia média do sistema, para o caso de dependência temporal com e sem dissipação. Os resultados conduzem a crer que o campo elétrico pode contribuir para o aumento da energia média, enquanto o campo magnético aplicado na direção perpendicular em relação ao plano do bilhar (o que garante que a partícula não viaje para fora deste plano) em geral conduz a partícula para as *whispering gallery orbits* e não contribui para a aceleração de Fermi de fato. No entanto, em presença de campo elétrico para os mesmos valores, a junção da ação do campo magnético pode otimizar o referido processo, obtendo-se valores de energia maiores para um mesmo número de iterações. Esses resultados são válidos para o caso concêntrico, que em outra oportunidade já se reportou como um improvável sistema para ganho de energia quando considerado o movimento da partícula livre.

Palavras-chave: Bilhares. Caos. Aceleração de Fermi.

ABSTRACT

The main idea of this work is to understand and analyze the dynamical aspects of the motion of a particle moving in the annular billiard, which corresponds to two circles of radius R and r ($r < R$). The circles can be concentric or eccentric. We describe the system by introducing breathing boundaries that transfer momentum to the particle. Likewise, the collisions with the circles are studied in the conservative (elastic) and dissipative (non-elastic) cases. When we introduce magnetic and electric fields, the particle is submitted to the Lorentz force. It also can suffer successive collisions with the breathing circles, winning or losing energy. For the elastic time-dependent case, we have already observed that a particle can gain unlimited energy. The purpose of this work is to study the effects of both external fields in the mean energy of the system, for the time-dependent case with and without dissipation. Our initial results conduct us to believe that electrical field can contribute to the increasing of mean energy, and a magnetic field applied to the vertical axis of coordinate (what guarantees the particle do not travel away the billiard's plane) uses to arrest the particle to the whispering gallery orbits and do not contribute to the Fermi acceleration indeed. However, in presence of the electric field, to same values, the magnetic one together can improve this referred process, obtaining greater energy values to the same number of iterations. These results are applied to the concentric case, that was reported did not haven any significant energy gain on the free particle motion.

Keywords: Billiard. Chaos. Fermi Acceleration.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	O BILHAR ANULAR ESTÁTICO	7
2.1	<i>Caso Conservativo.....</i>	7
2.2	<i>Caso Dissipativo</i>	12
3	BILHAR ELETROMAGNÉTICO – MOVIMENTO SOB AÇÃO DE CAMPOS	14
3.1	<i>Caso Conservativo.....</i>	14
3.2	<i>Caso Dissipativo</i>	23
4	O BILHAR ANULAR PULSANTE – MAPA.....	28
4.1	<i>Caso Conservativo.....</i>	28
4.2	<i>Caso Dissipativo</i>	34
5	O BILHAR ANULAR ELETROMAGNÉTICO PULSANTE	36
5.1	<i>Discussão.....</i>	45
6	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS.....	477

1 INTRODUÇÃO

A busca por dispositivos criadores de energia há muito tempo entretém os cientistas dos mais diversos meios. O modelo do acelerador de Fermi é uma das ferramentas teóricas mais utilizadas para a modelagem e estudos de tais mecanismos.

A Dinâmica não-linear e a busca pela ordem dentro do caos instigam a quem possa tomar conhecimento da existência de fenômenos que outrora jamais passariam da percepção alheia de quem assiste como espectador a uma preciosidade da natureza escondida nas minúcias de um movimento universal.

O estudo de bilhares tem sido gradativamente reportado em maior intensidade na literatura. Os primeiros estudos com o bilhar anular [1] levaram à percepção da possibilidade de se adicionar caos ao sistema apenas com um parâmetro geométrico. Em seguida [2-5], novas ideias e possibilidades tecnológicas levaram à sofisticação do modelo e à adição de propriedades físicas ainda não analisadas.

A proposta deste trabalho é estudar a dinâmica do bilhar anular, desde uma revisão sobre seus aspectos fundamentais até os efeitos e ações de novos objetos acrescidos ao estudo do sistema, e a consequente visualização de toda a riqueza proporcionada em relação aos resultados nem sempre triviais.

2 O BILHAR ANULAR ESTÁTICO

2.1 Caso Conservativo

O bilhar anular consiste em um círculo externo de raio R (que será considerado igual à unidade de comprimento nas aplicações numéricas) e um círculo interno de raio r ($< R$). Uma partícula pontual de massa m move-se dentro da região limitada pelos dois círculos e sofre colisões sucessivas com as fronteiras. A geometria de cada bilhar pode ser caracterizada pelo conjunto de dois parâmetros fundamentais: $\{r, \delta\}$, onde δ é a excentricidade, isto é, a distância entre os dois círculos [1].

Sendo assim, observam-se algumas famílias de bilhar anular:

- a) $r = 0$: círculo interno inexistente. Neste caso, o bilhar anular equivale ao bilhar circular.
- b) $r \neq 0, \delta = 0$: bilhar anular concêntrico, o círculo interno está centrado no mesmo ponto que o círculo externo.
- c) $r \neq 0, \delta \neq 0$: bilhar anular excêntrico, o círculo interno está centrado a uma distância δ do centro do círculo externo.

Consideramos o centro do círculo externo localizado na origem do plano cartesiano $(x, y) = (0, 0)$. No caso **c)**, chamamos um círculo de raio $(r + \delta)$ centrado em $(0, 0)$ de **cáustica**. As trajetórias que passarem pela região delimitada pelo círculo interno e a cáustica são fortes candidatas a trajetórias caóticas. Por outro lado, naquelas localizadas entre a cáustica e o círculo externo encontram-se as chamadas *Whispering Gallery Orbits (WGO's)*, ou “órbitas da galeria do susurro”, onde o movimento da partícula apresenta comportamento regular e ela não colide com o círculo interno.

Escolhemos o sistema de coordenadas cilíndricas circulares (ρ, θ, z) para localização da partícula e representação do sistema. No caso, $z \equiv 0$, uma vez que o movimento se dá no plano bidimensional (ρ, θ) , descrito pelas respectivas coordenadas polares circulares. Dividimos os movimentos possíveis em:

Tipo A) Duas colisões sucessivas com a fronteira externa. A partícula parte de uma condição $(\rho_0 = 1, \theta_0)$ com ângulo de saída α_0 em relação à reta normal do

círculo externo, passando pela origem e colide com o círculo externo em $(\rho_1 = 1, \theta_1)$, com ângulo de saída (ou reflexão) α_1 (Figura 1.1).

Tipo B) A partícula colide com círculo interno antes de colidir novamente com o externo. Inicialmente tem-se $(\rho_0 = 1, \theta_0)$ e α_0 , na colisão com a fronteira interna em $(\rho_0' \neq 1, \theta_0')$ verifica-se um ângulo de entrada (ou incidência) β_0 , em relação à reta normal ao ponto de colisão com a circunferência da fronteira interna e um ângulo de reflexão β_1 . A próxima colisão ocorre com a fronteira externa e verifica-se um ângulo de saída α_1 , em relação à reta normal ao ponto de colisão passando pelo centro do círculo externo (Figura 1.2).

O sistema possui dois graus de liberdade, e portanto um espaço de fase de quatro dimensões. No entanto, a energia é uma constante do movimento, logo, coloquemos uma seção de Poincaré de duas dimensões, caracterizando o sistema em variáveis de ângulo e ação: (L, S) , onde $L = \frac{\theta}{2\pi}$ e $S = \sin(\alpha)$. Logo, dado um número j de condições iniciais (L_0, S_0) , fazemos n iterações, com j e n arbitrários, obtendo (L, S) para cada colisão com a fronteira externa e observamos a configuração do então espaço de fase.

Figura 1 – Geometria do Bilhar Anular

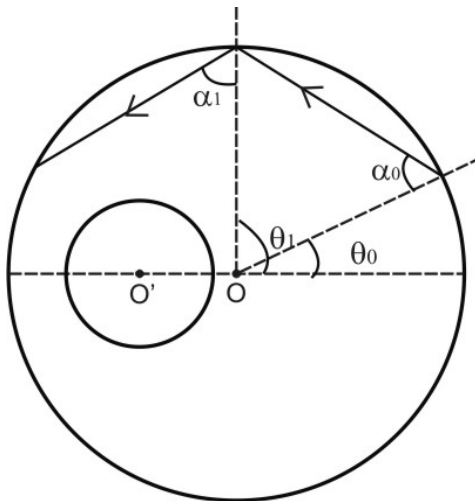


Fig. 1.1 – Movimento do Tipo A

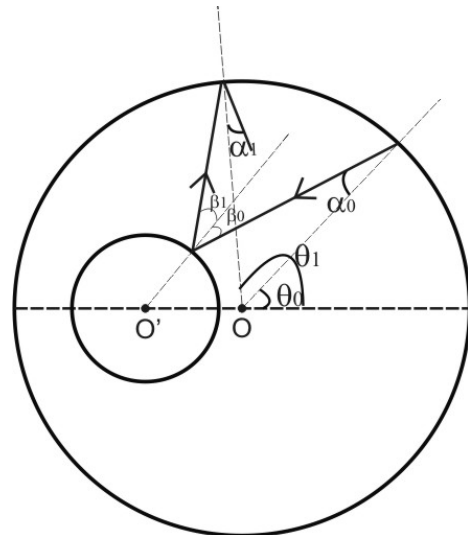


Fig. 1.1 – Movimento do Tipo B

Fonte: elaboração nossa

No Bilhar Anular Estático as fronteiras encontram-se imóveis e a partícula livre se desloca sem atrito na região delimitada por elas, sofrendo colisões perfeitamente elásticas no caso conservativo. A geometria de tais colisões pode ser analisada da

mesma forma que reflexões sucessivas de um raio de luz sobre uma superfície (linear na vizinhança infinitesimalmente próxima ao ponto de colisão), com ângulo de entrada (incidência) congruente ao de saída (reflexão).

A condição de tangência $T = |\sin\alpha - \delta \sin(\theta - \alpha)|$ especifica como a partícula está localizada em relação ao círculo interno após colidir com a fronteira externa [1]. Numericamente, dada uma condição inicial (L_0, S_0) , obtemos (θ_0, α_0) e iteramos os Mapas, sendo r o raio do círculo interno:

A) Para $r < T$ (colisão com a fronteira externa – *Movimento do Tipo A*):

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n \\ \theta_{n+1} &= \pi + \theta_n - 2\alpha_n\end{aligned}\tag{1}$$

B) Para $r \geq T$ (colisão com a fronteira interna antes de colidir novamente com a fronteira externa – *Movimento do Tipo B*):

$$\begin{aligned}\beta &= \arcsin \frac{1}{r} [\sin\alpha_n - \delta \sin(\theta_n - \alpha_n)] \\ w &= 2\beta + \theta_n - \alpha_n \\ \alpha_{n+1} &= \arcsin(r \sin\beta - \delta \sin w) \\ \theta_{n+1} &= 2\beta + \theta_n - \alpha_n - \alpha_{n+1}\end{aligned}\tag{2}$$

Para um conjunto de condições iniciais e certo número de iterações (mensuráveis pelas sucessivas colisões com a fronteira externa), fazemos $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e analisamos graficamente o sistema. As Figuras 2-6 mostram os Gráficos das Seções de Poincaré (GSP) em $S \times L$ para diferentes valores de δ , mantendo a relação $(r + \delta)$ constante e igual a 0,75.

O valor δ é um parâmetro de controle pelo qual podemos introduzir caos no sistema. As curvas invariantes observadas no caso concêntrico são conhecidas como toros KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) [1], e demonstram que o sistema é integrável sobre elas, não ocorrendo caos neste caso. Para o pequeno valor de δ na Fig. 4, vemos que o sistema torna-se caótico em algumas regiões da seção, destruindo parte das curvas invariantes. E posteriormente, para valores de δ na Fig. 6, o sistema mostra-se completamente caótico, podendo-se observar a formação do mar de caos e de ilhas de ressonância.

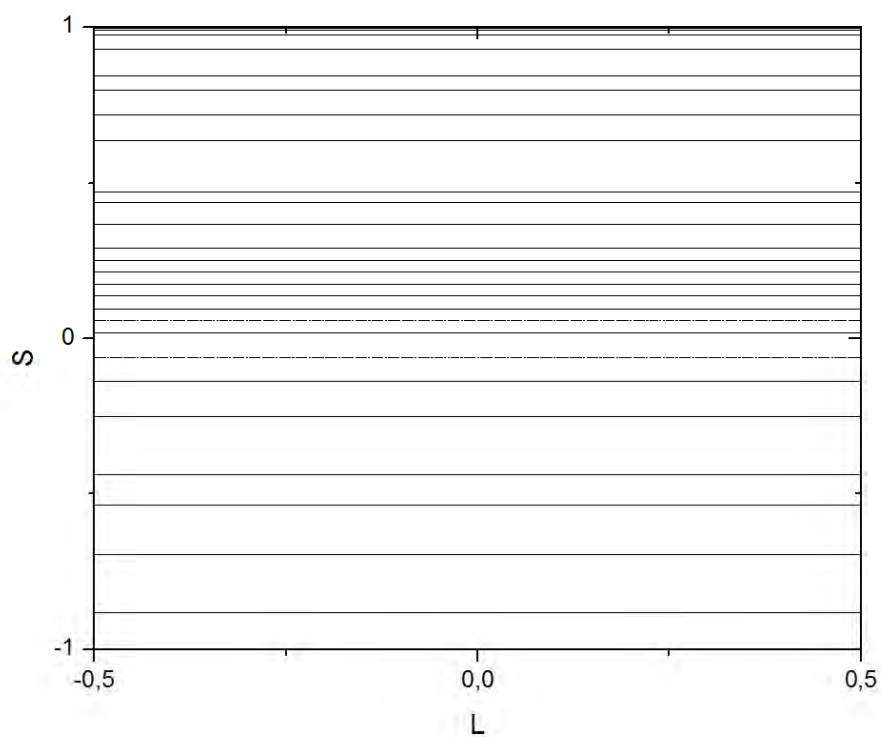
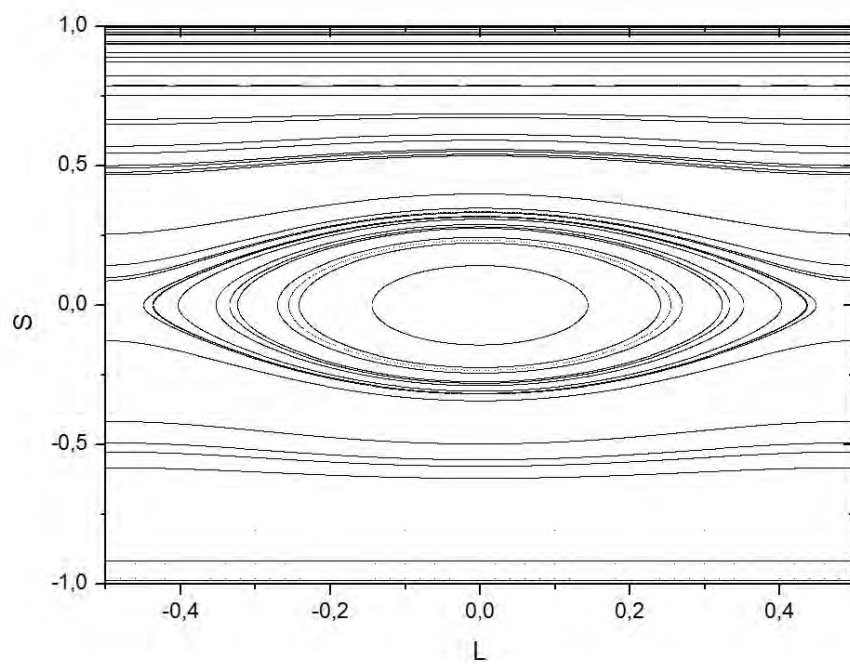
Figura 2 – GSP, $\delta=0$ (caso concêntrico)**Figura 3 – GSP, $\delta=0,01$** 

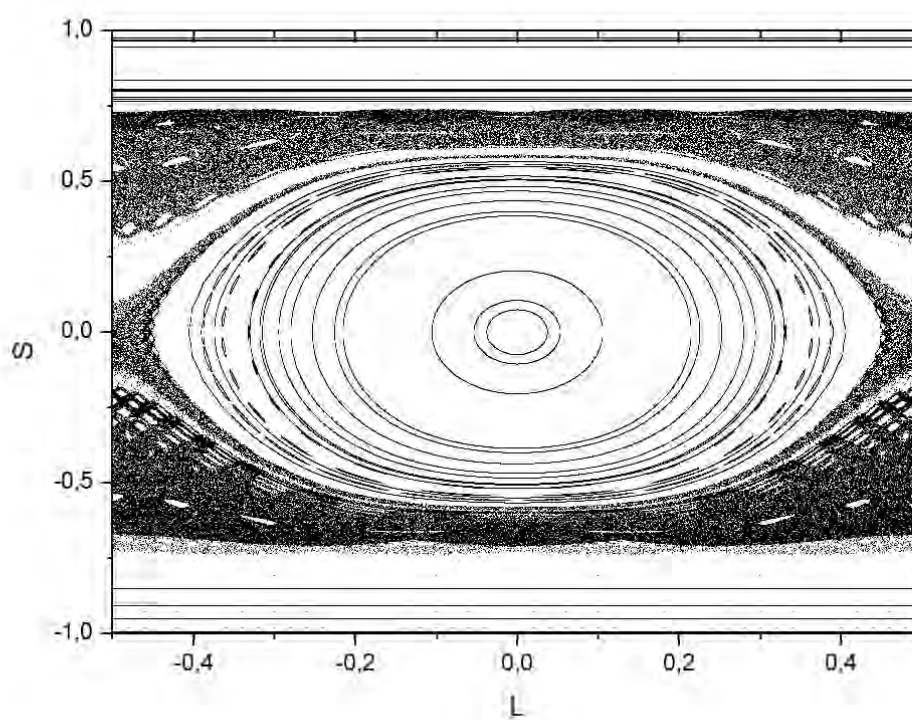
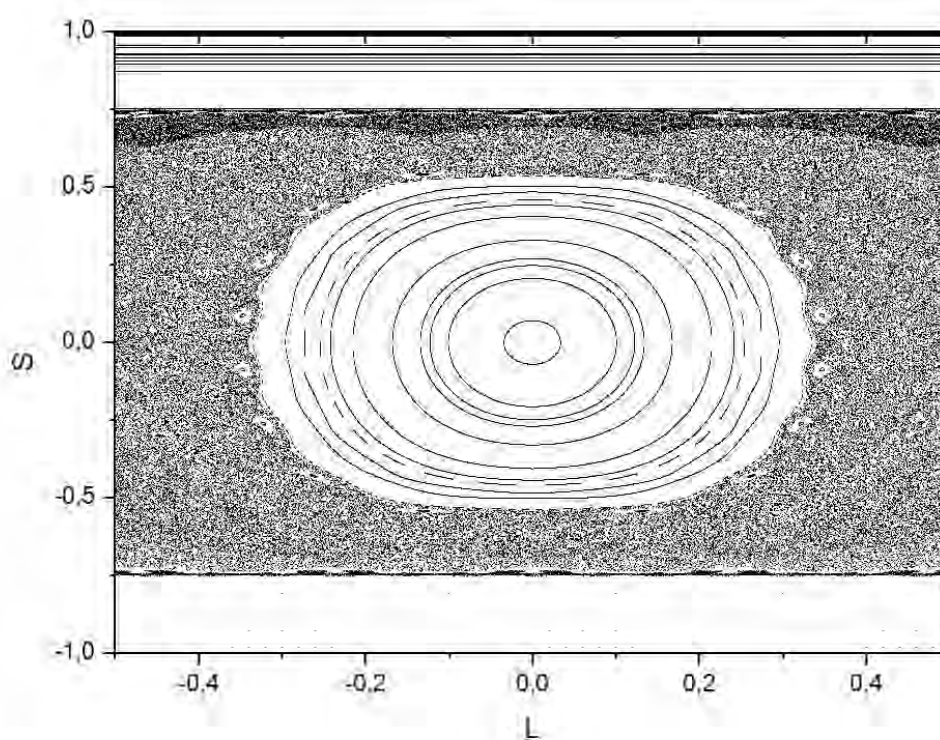
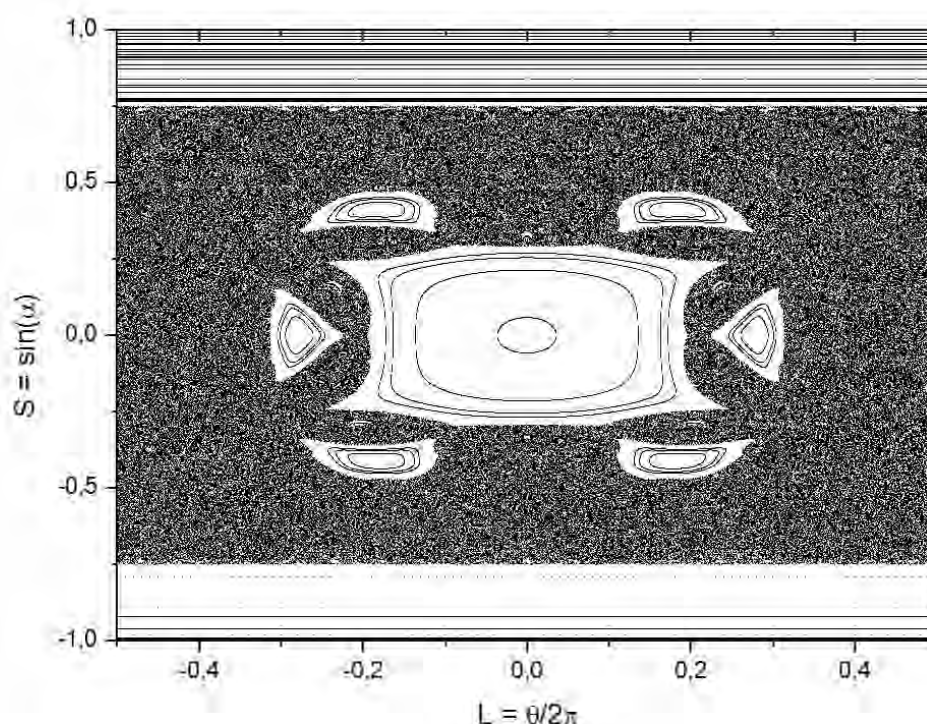
Figura 4 – GSP, $\delta=0,065$ **Figura 5 – GSP, $\delta=0,10$** 

Figura 6 – GSP, $\delta=0,25$



Fonte: elaboração nossa (Fig. 2-6)

2.2 Caso Dissipativo

Introduzimos uma dissipação na colisão com as fronteiras, interna, externa ou ambas, de forma a torná-la parcialmente inelástica. A partícula se move, então, sem atrito na região delimitada entre as fronteiras dos círculos interno e externo, e após colidir com uma das barreiras tem a componente radial da velocidade (em relação ao centro do círculo em questão) alterada, multiplicada por um coeficiente de restituição γ , $0 < \gamma < 1$. Uma vez que consideramos o movimento de uma partícula teoricamente perfeita, rígida e pontual, devemos considerar a dissipação apenas na direção radial – já que se trata de um problema de força central –, desprezando-se a dissipação na direção tangencial, o que denotaria a deformação sofrida pela partícula durante a colisão. A partícula perde energia e os ângulos de saída α_{n+1} , em relação à normal, são cada vez maiores que os α_n das iterações anteriores, fazendo com que as trajetórias se abram em direção à fronteira externa, confinando-se então nas WGO.

Numericamente, iteramos as equações geométricas dada pelos Mapas A e B no item 2, e fazemos as correções [2,3]:

- **Mapa A:**

$$\begin{aligned}
 v_{\tau n} &= v_n \sin \alpha_n & v_{r n} &= v_n \cos \alpha_n \\
 v_{\tau n+1} &= v_{\tau n} & v_{r n+1} &= \gamma v_{\rho n} \\
 v_{n+1} &= \sqrt{(v_{\tau n+1})^2 + (v_{r n+1})^2} & \alpha_{n+1} &= \arctan \left(-\frac{v_{\tau n+1}}{v_{r n+1}} \right)
 \end{aligned} \tag{3}$$

onde v_{τ} é a velocidade tangencial e v_r a velocidade radial, em relação ao ponto de colisão e ao centro do *círculo externo*. v_n é o módulo da velocidade na iteração. α_n e α_{n+1} são respectivamente o ângulo de entrada (incidência) e de saída no ponto de colisão.

- **Mapa B:**

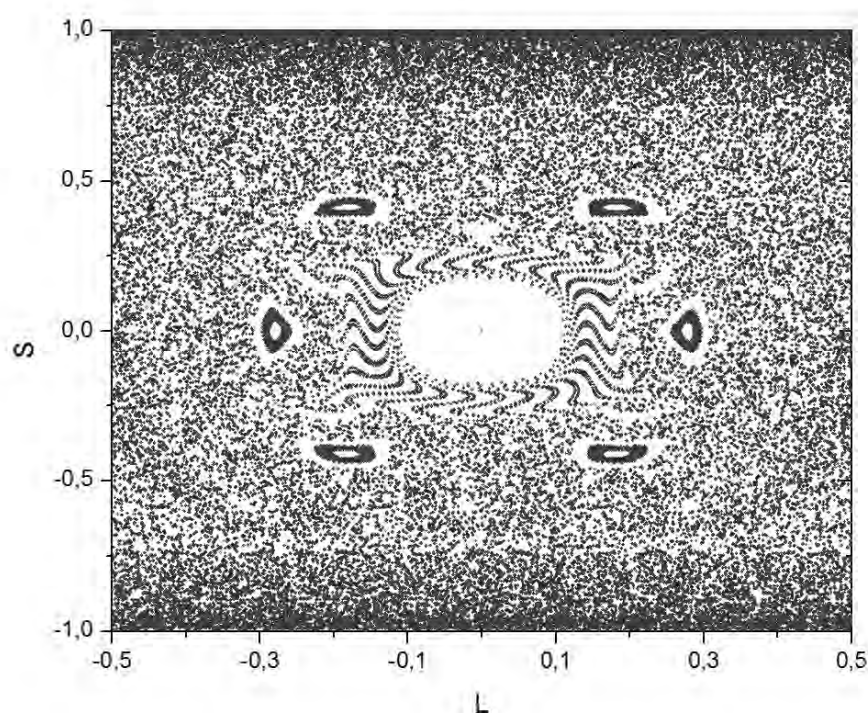
$$\begin{aligned}
 v_{\tau n} &= v_n \sin \beta & v_{r n} &= v_n \cos \beta \\
 v_{\tau n}' &= v_{\tau n} & v_{r n}' &= \gamma v_{r n} \\
 v_n' &= \sqrt{(v_{\tau n}')^2 + (v_{r n}')^2} & \beta' &= \arctan \left(-\frac{v_{\tau n}'}{v_{r n}'} \right) \\
 w &= 2\beta' + \theta_n - \alpha_n \\
 \alpha_n' &= \arcsin(r \sin \beta' - \delta \sin w) \\
 \theta_{n+1} &= 2\beta' + \theta_n - \alpha_n - \alpha_n'
 \end{aligned} \tag{4}$$

e volta-se então às correções do Mapa A. v_{τ} é a velocidade tangencial e v_r a velocidade radial, em relação ao ponto de colisão e ao centro do círculo interno. v_n é o módulo da velocidade na iteração. Os ângulos β e β' são respectivamente o ângulo de entrada (incidência) e de saída no ponto de colisão com o círculo interno. α_n' é o ângulo de entrada na colisão subsequente com o círculo externo.

Então a partir de uma velocidade inicial v_0 , iteram-se as equações do mapa e obtem-se a seção de Poincaré. Um gráfico típico para o sistema dissipativo, independente da excentricidade do bilhar, mesmo para o caso quase-elástico com $\gamma = 0,99999 \approx 1$, que é mostrado na Figura 7, observa-se grande densidade de pontos próximos às regiões de atração nas regiões de órbitas regulares do espaço de fase, nas ilhas e em especial em $S = 1$ e $S = -1$, isto é, com $\alpha \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$, que correspondem a grandes ângulos de incidência e reflexão das colisões, confinando rapidamente a partícula nas *WGO*. Em resumo, os ângulos α são sucessivamente

diminuídos no decorrer das iterações, juntamente à energia do sistema e ao módulo da velocidade da partícula que ficam menores a cada colisão.

Figura 7 – GSP para o bilhar estático dissipativo, $\delta=0,25$



Fonte: elaboração nossa

3 BILHAR ELETROMAGNÉTICO – MOVIMENTO SOB AÇÃO DE CAMPOS

3.1 Caso Conservativo

Consideremos agora o movimento de uma partícula pontual de massa m carregada com carga elétrica q movendo-se sobre a superfície do bilhar anular sob a ação de campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$. A este sistema denotaremos Bilhar Anular Eletromagnético Estático, nos casos conservativo (sistema Hamiltoniano) e dissipativo. Descrevemos o sistema via formulação Hamiltoniana e integramos numericamente as equações de movimento.

Assim, a função Hamiltoniana para uma partícula eletricamente carregada movendo-se em uma região sob presença de campos é dada por [5,6]:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + q\varphi(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

onde $\mathbf{p}$ é o *momentum*, q a carga, m a massa da partícula, $\mathbf{A}$ o potencial vetor magnético, φ o potencial elétrico e c a velocidade da luz.

A fim de assegurar que a partícula não desenvolva nenhum movimento para fora do plano do bilhar, escolhemos um campo magnético na direção perpendicular do mesmo, isto é, em coordenadas cilíndricas circulares $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$:

$$\mathbf{B} = B\hat{z} \quad (6)$$

E, uma vez que:

$$\mathbf{B} = B\hat{z} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \hat{z} \quad (7)$$

obtemos a expressão vetorial de $\mathbf{A}$ escolhendo um *gauge* anti-simétrico:

$$\mathbf{A} = A_\theta \hat{\theta} = \left(\frac{1}{2} B \rho \right) \hat{\theta} \quad (8)$$

A Hamiltoniana do sistema, que corresponde à Energia total, é então:

$$\mathcal{E} = H(p_\rho, p_\theta, \rho, \theta, B, \varphi) = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \left(p_\theta - \frac{qB\rho}{2c} \right)^2 \right] + q\varphi(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

As equações de movimento (Hamilton) são dadas por [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{m} \left(p_\theta - \frac{qB\rho}{2c} \right) \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \\ \dot{p}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{1}{m} \left[\left(p_\theta - \frac{qB\rho}{2c} \right) \frac{qB}{2c} \right] - q \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (10)$$

O potencial elétrico φ depende da direção em que o campo elétrico está sendo aplicado. Tal que:

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

de forma que consideramos $\varphi(\mathbf{r}_s) \equiv 0$, onde $\mathbf{r}_s$ é um ponto arbitrário do espaço tal que seja verdadeiro que $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$.

Abaixo estão algumas possíveis expressões para o potencial, que equivalem aos respectivos vetores de campo elétrico:

- $\varphi = -E_y y = -E_y \rho \sin \theta \Leftrightarrow \mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}}$
- $\varphi = -E_x x = -E_x \rho \cos \theta \Leftrightarrow \mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}}$
- $\varphi = -E_y y - E_x x = -E_y \rho \sin \theta - E_x \rho \cos \theta \Leftrightarrow \mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}} + E_x \hat{\mathbf{x}}$ (11)
- $\varphi = -\frac{E_\rho \rho^2}{2} \Leftrightarrow \mathbf{E} = E_\rho \rho \hat{\boldsymbol{\rho}}$
- $\varphi = -E_\theta \theta \Leftrightarrow \mathbf{E} = \frac{E_\theta}{\rho} \hat{\boldsymbol{\theta}}$

Numericamente, dadas as condições iniciais para a Energia, módulos do campo elétrico e magnético e δ (mantendo $r+\delta = 0,75$), basta integrar, no tempo, as equações de movimento, a fim de se obter valores instantâneos das componentes dos vetores posição e *momentum* para determinado tempo t , que é o tempo final de integração das equações de Hamilton para cada condição inicial dada. No entanto, o controle sobre o movimento da partícula dentro do bilhar é realizado sobre sua posição. Embora as equações de movimento apresentem uma dependência temporal, elas devem ser integradas até que a partícula venha a se colidir com uma das fronteiras delimitadas pela geometria do bilhar. Para os primeiros cálculos optamos por utilizar como método de integração numérica o *Runge-Kutta* de passo fixo de sexta ordem (RK-6).

Dada uma precisão ξ , a partícula atinge o círculo externo quando $(1 - |\boldsymbol{\rho}|) \leq \xi$, e o interno (r) quando $|\sqrt{(x + \delta)^2 + y^2} - r| \leq \xi$, onde $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$ são as coordenadas cartesianas de posição da partícula.

Após a colisão com a fronteira externa, os novos *momenta* p_θ e p_ρ , o ângulo de saída α e a relação das variáveis dinâmicas do problema com o espaço de fase (L , S) são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 p_\theta &= \sqrt{\frac{(\varepsilon - q\varphi)}{2m}} \sin \alpha + \frac{qB\rho}{2c} \\
 p_\rho &= -\sqrt{\frac{(\varepsilon - q\varphi)}{2m}} \cos \alpha \\
 \alpha &= \arctan \left(\rho \frac{\dot{\theta}}{\dot{\rho}} \right) \\
 L &= \frac{\theta}{2\pi}, S = \sin(\alpha)
 \end{aligned} \tag{12}$$

onde $v = \sqrt{\frac{(\varepsilon - q\varphi)}{2m}}$ é o módulo da velocidade da partícula naquele instante.

Na colisão com a fronteira interna, o ângulo de colisão e os *momenta* após a mesma são:

$$\begin{aligned}\beta &= \arctan\left(\rho \frac{\dot{\theta}}{\dot{\rho}}\right) \\ w &= \arctan\left(\frac{2\rho\delta\sin(\pi - \theta)}{\rho^2 + r^2 - \delta^2}\right)\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}p_\theta &= \sqrt{\frac{(\varepsilon - q\varphi)}{2m}} \sin(2w + \beta) + \frac{qB\rho}{2c} \\ p_\rho &= -\sqrt{\frac{(\varepsilon - q\varphi)}{2m}} \cos(2w + \beta)\end{aligned}\tag{14}$$

onde w é um ângulo auxiliar que corrige a variável de posição em relação ao ângulo de colisão β e à excentricidade δ .

A seguir, mostramos alguns gráficos das seções de Poincaré para diversos valores e direções dos campos elétrico e magnético, e diferentes excentricidades, mantendo constante a energia ($\varepsilon = 1000$) e outras condições iniciais do sistema, e a cáustica ($r + \delta = 0,75$) para todos os casos.

Figura 8 – GSP, $\delta = 0$, $E = 20\hat{x}$, $B = 0$

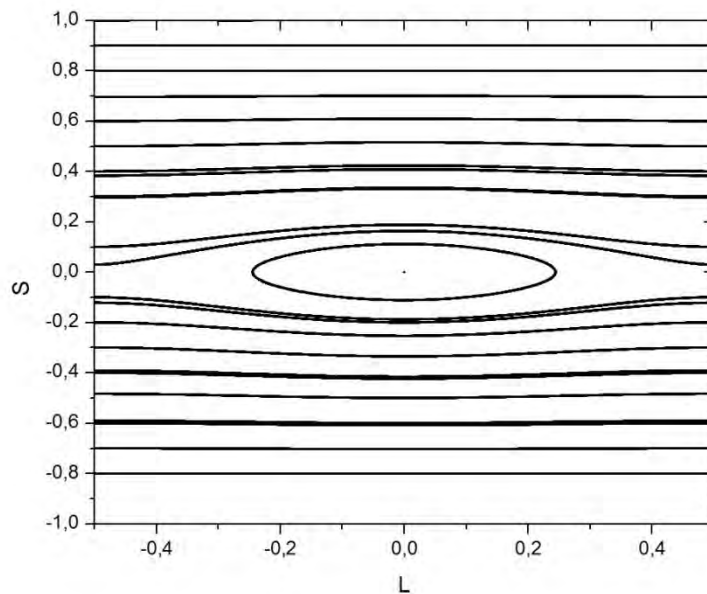
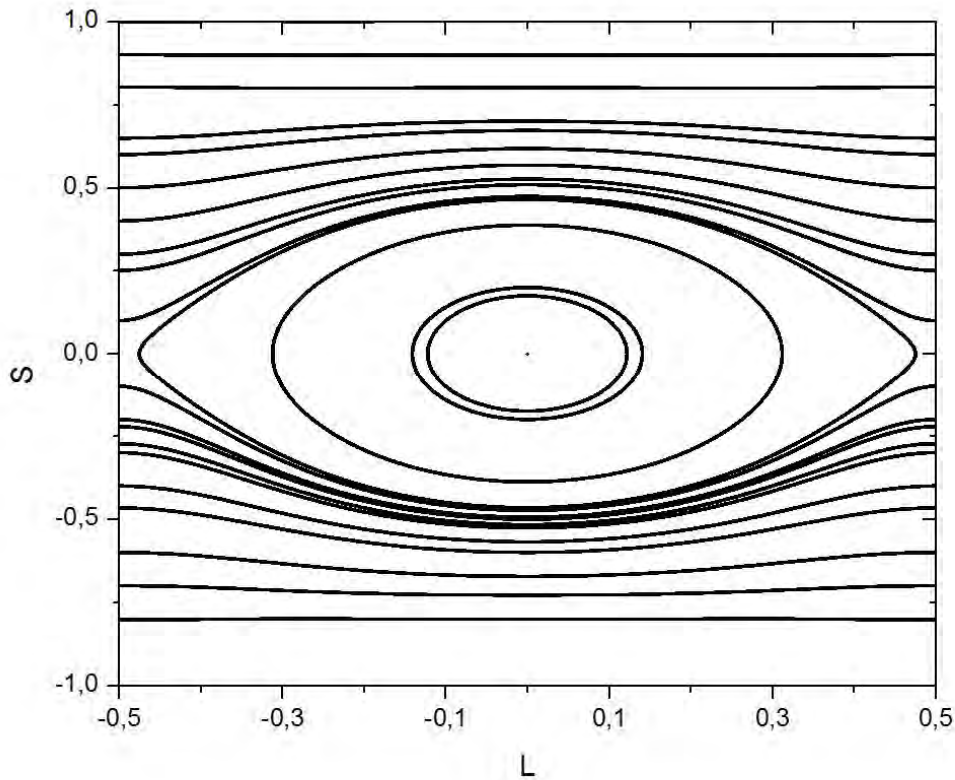


Figura 9 – GSP, $\delta = 0$, $E = 200\hat{x}$, $B = 0$



Fonte: elaboração nossa (Fig. 8-9)

Observamos que para o bilhar anular concêntrico, mesmo com um forte campo elétrico aplicado, o sistema é integrável, e as seções de Poincaré são gráficos de curvas invariantes, com a partícula desenvolvendo órbitas periódicas.

Para diferentes geometrias em que o bilhar já apresenta movimentos caóticos, a aplicação de campo magnético na direção perpendicular faz diminuir a área correspondente ao mar de caos e aumentar ou produzir curvas invariantes para altos valores de S , contribuindo para formação de órbitas periódicas e aprisionamento da partícula nas WGO . Uma vez que o raio de curvatura de trajetória da partícula é inversamente proporcional ao módulo do campo magnético ($\mathcal{R} = \frac{mv}{qB}$), logo, para grandes valores de B , maior é o tempo que a partícula gasta colidindo sucessivas vezes com a fronteira externa sem se chocar com a interna. Geometrias em que o sistema é integrável, não se observam alterações no espaço de fase com a aplicação de campo magnético.

Tais resultados são mostrados nas Figuras 10-11, e podem ser comparados com as Figuras 2 e 6, mostradas na seção 2.1 para diferentes valores de δ .

Figura 10 – GSP, $\delta = 0$, $E = 0$, $B = 200\hat{z}$

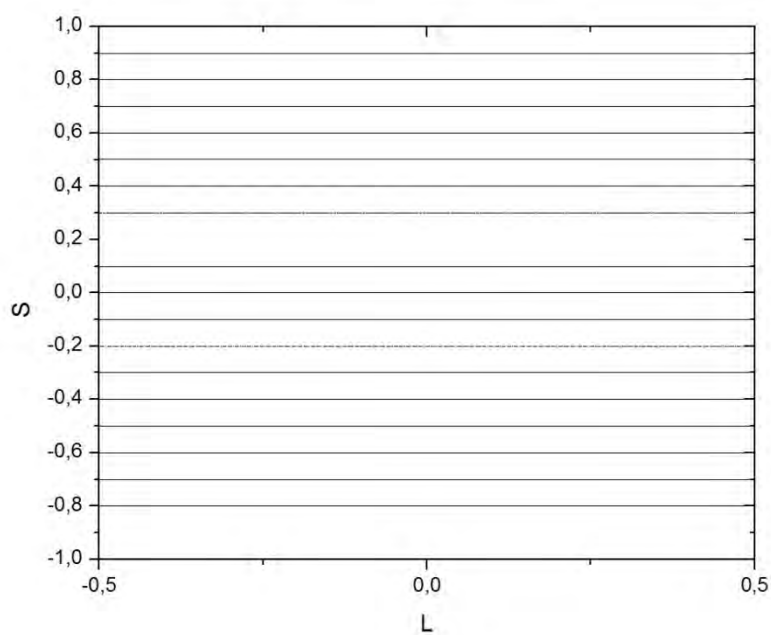
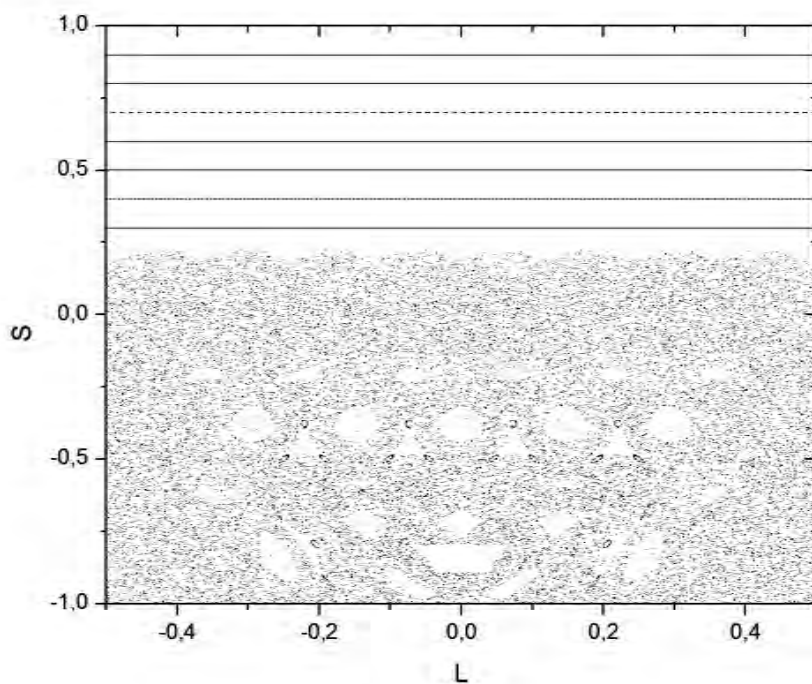


Figura 11 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = 0$, $B = 100\hat{z}$



Novamente para o caso concêntrico, a aplicação de ambos os campos concomitantemente pode gerar uma pequena região de caos no espaço de fase, mas ainda insuficiente para destruir todas as curvas invariantes, podendo-se observar ilhas de ressonância e regiões de periodicidade. Isso é ilustrado nas Figuras 12-13.

Figura 12 – GSP, $\delta = 0$, $E = 500\hat{x}$, $B = 50\hat{z}$

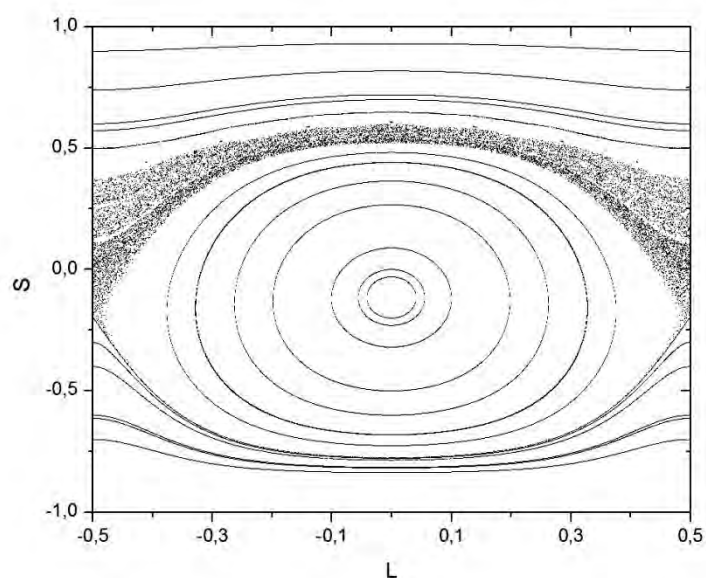
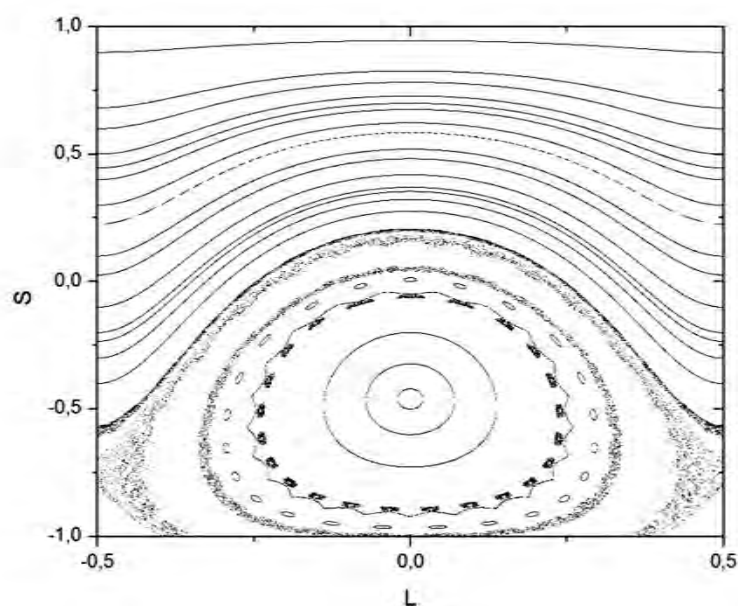


Figura 13 – GSP, $\delta = 0$, $E = 500\hat{x}$, $B = 200\hat{z}$



Mostraremos a seguir, nas Figuras 14-18 em comparação com a Figura 6, que a área de órbitas caóticas no espaço de fase pode ser ampliada quando houver a presença de campo elétrico, enquanto o campo magnético impõe curvas *spannings* em órbitas regulares para altos valores de S .

Figura 14 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = 500\hat{x}$, $B = 0$

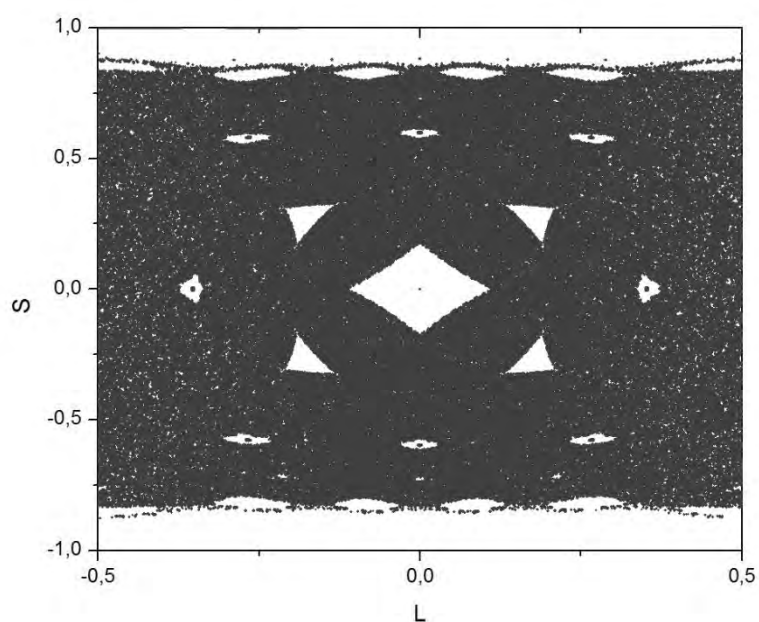


Figura 15– GSP, $\delta = 0,25$, $E = 500\hat{x}$, $B = 50\hat{z}$

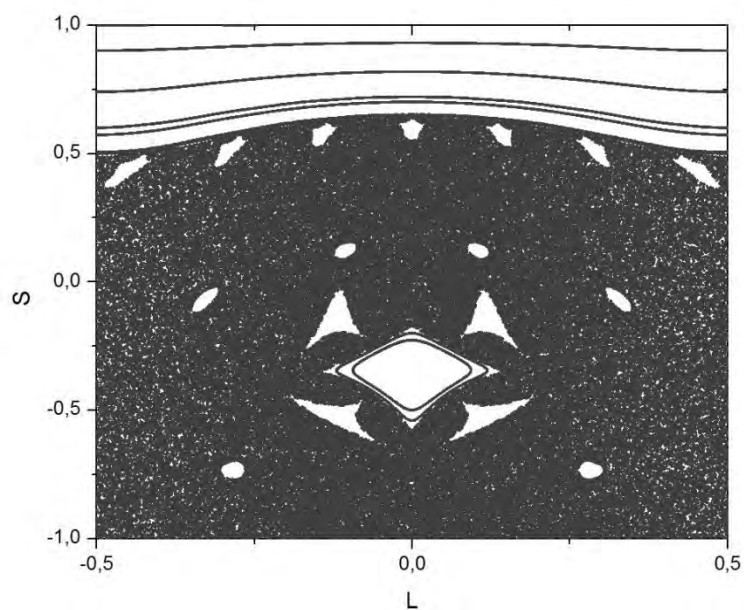


Figura 16 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = 500(\hat{x} + \hat{y})$, $B = 0$

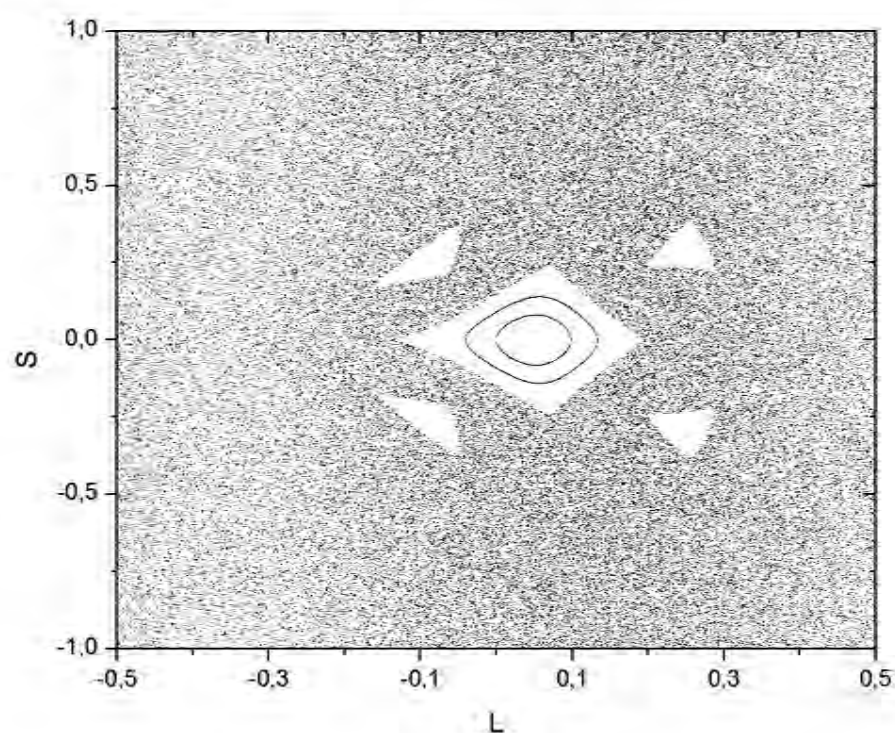


Figura 17 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = 500(\hat{x} + \hat{y})$, $B = 50\hat{z}$

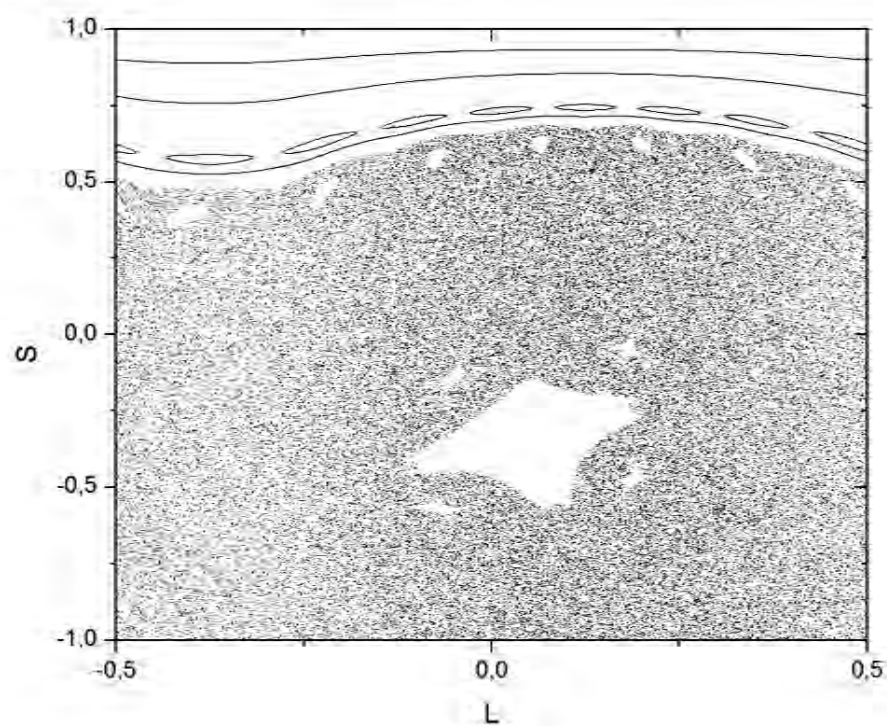
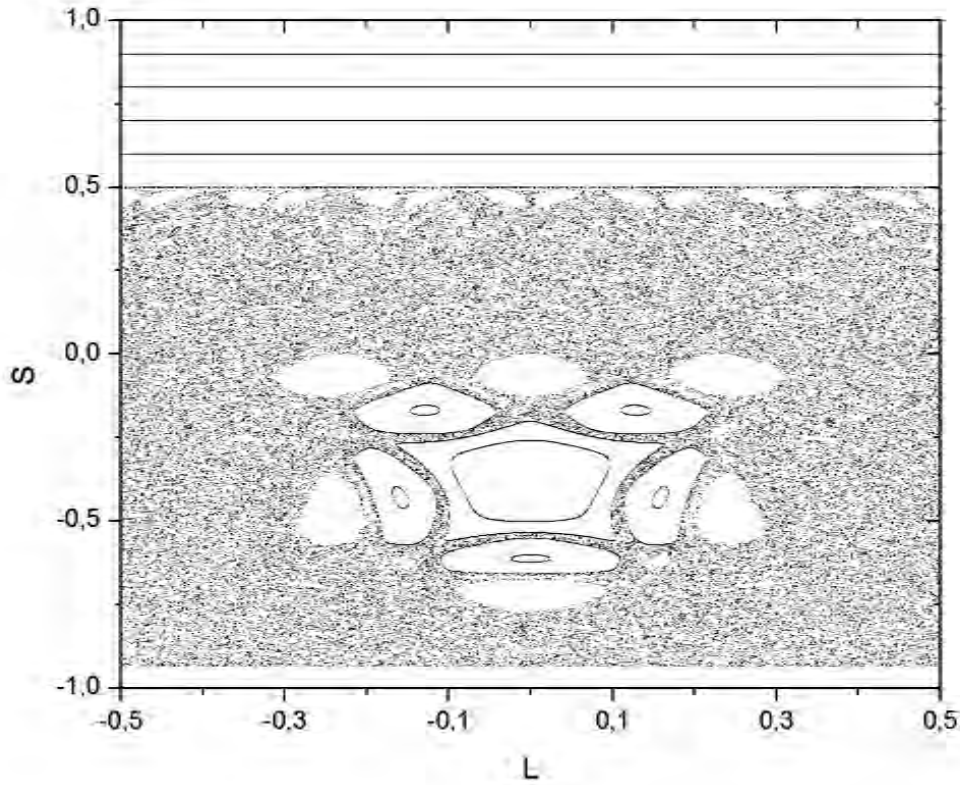


Figura 18 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = 500\hat{\rho}$, $B = 50\hat{z}$



Fonte: elaboração nossa (Fig. 10-18)

3.2 Caso Dissipativo

Analogamente ao que fizemos na Seção 2.2, vamos agora adicionar uma dissipação de coeficiente γ , $0 < \gamma \leq 1$, na componente radial da velocidade da partícula no momento da colisão com uma das fronteiras. Dessa forma, as Equações 12-14 devem ser ajustadas obtendo-se os novos valores de *momenta* e ângulo de colisão que são assumidos após a colisão, bem como o novo valor da energia do sistema. Assim, temos, para a colisão com a fronteira externa:

$$\begin{aligned}
 p_{\theta}' &= p_{\theta} \\
 p_{\rho}' &= \gamma p_{\rho} \\
 \alpha' &= \arctan\left(\rho \frac{\dot{\theta}'}{\dot{\rho}'}\right) \\
 L &= \frac{\theta}{2\pi}, S = \sin(\alpha')
 \end{aligned} \tag{15}$$

onde p_{θ}' , p_{ρ}' e α' são os valores das respectivas variáveis obtidas em função dos valores encontrados pelas Equações 12, e que correspondem ao estado da partícula imediatamente após a colisão com a correção da dissipação γ . E $\dot{\theta}'$ e $\dot{\rho}'$ são:

$$\dot{\rho}' = \frac{p_{\rho}'}{m} \quad (16)$$

$$\dot{\theta}' = \frac{1}{m} \left(p_{\theta}' - \frac{qB\rho}{2c} \right) = \dot{\theta}$$

E a nova energia da partícula, e o módulo da velocidade após a colisão são:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= H(p_{\rho}', p_{\theta}', \rho, \theta, B, \varphi) \\ v' &= \sqrt{\frac{(\mathcal{E}' - q\varphi)}{2m}} \end{aligned} \quad (17)$$

Para a colisão com o círculo interno, Calculamos as componentes radial e tangencial da velocidade **relativas ao referencial do círculo interno**, isto é, relativo ao **centro do círculo interno**, dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} v_r^{ri} &= v \cos(\beta) \\ v_t^{ri} &= v \sin(\beta) \end{aligned} \quad (18)$$

Fazemos a correção da componente radial:

$$v_r^{ri'} = -\gamma v_r^{ri} \quad (19)$$

O módulo da velocidade corrigida é dado por:

$$v' = \sqrt{(v_t^{ri})^2 + (v_r^{ri'})^2} \quad (20)$$

Calculamos novamente os ângulos relativos à colisão:

$$\begin{aligned} \beta' &= \arcsin \left(\frac{v_t^{ri}}{v'} \right) \\ w &= \arctan \left(\frac{2\rho\delta \sin(\pi - \theta)}{\rho^2 + r_i^2 - \delta^2} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

E obtemos, então os novos *momenta* com referencial do círculo externo, e a energia total do sistema dados por:

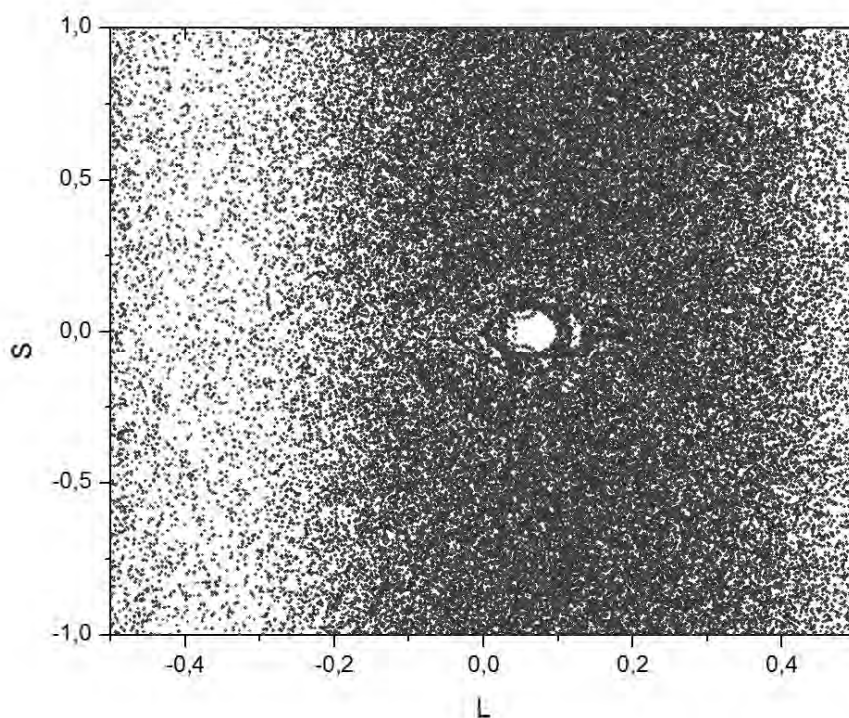
$$\begin{aligned} p_{\theta}' &= m \left(\frac{v'}{\rho} \sin(2w + \beta') + \frac{qB\rho}{2c} \right) \\ p_{\rho}' &= -m v' \cdot \cos(2w + \beta') \\ \mathcal{E}' &= H(p_{\rho}', p_{\theta}', \rho, \theta, B, \varphi) \end{aligned} \quad (22)$$

E as equações de movimento voltam a ser integradas numericamente até que outra colisão ocorra.

A ideia de adicionarmos uma dissipação no bilhar eletromagnético estático era observar se poderia haver algum tipo de competição entre a dissipação (e a consequente perda de energia) e a aceleração experimentada pela partícula, devida aos campos elétrico e magnético e à Força de Lorentz resultante.

No entanto, os resultados mostraram que a dissipação no bilhar estático com a presença de campos apenas altera a posição dos atratores na seção de Poincaré. Tais bacias de atração podem ser vistas nas Figuras 19-20 a seguir, podendo-se comparar com o gráfico obtido na Figura 16.

Figura 19 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = 500(\hat{x} + \hat{y})$, $B = 0\hat{z}$, $\gamma = 0,9998$



Em comparação com a Figura 19 e 16, observamos também que a presença de campo magnético costuma levar as órbitas aos atratores mais rapidamente, além de criar outras regiões de atração onde originalmente estariam as curvas invariantes do caso conservativo como vemos na Figura 21, uma vez que para todos os gráficos fazemos consideramos as mesmas condições iniciais e o mesmo número (3×10^3) de colisões com a fronteira externa.

Figura 20 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = 500(\hat{x} + \hat{y})$, $B = 0\hat{z}$, $\gamma = 0,9993$

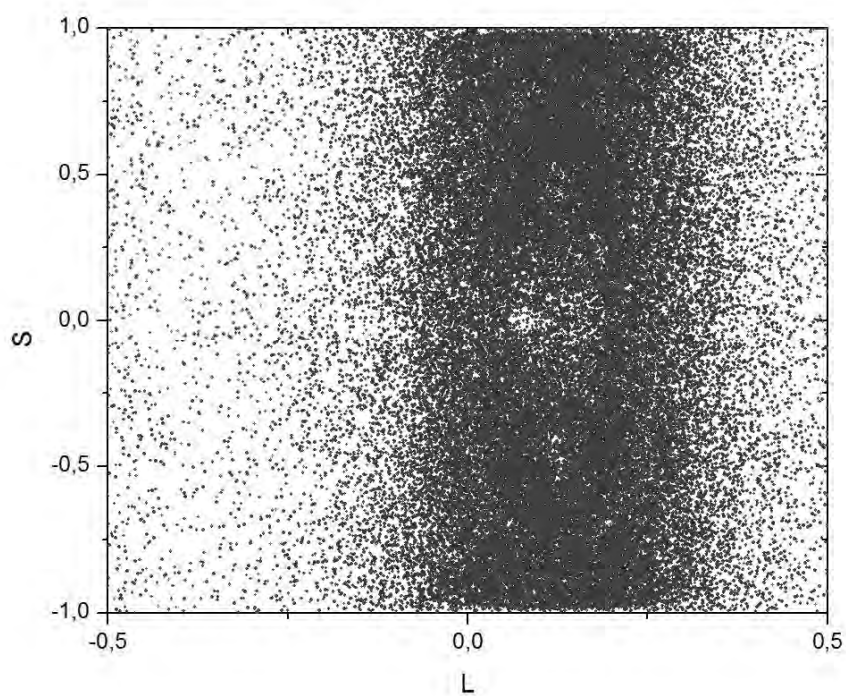
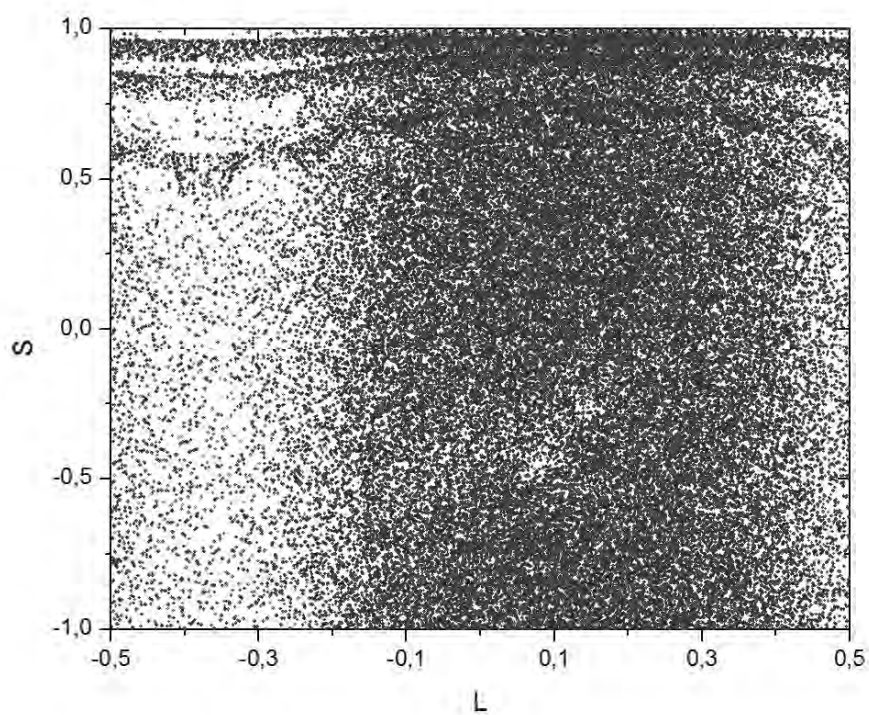


Figura 21 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = 500(\hat{x} + \hat{y})$, $B = 50\hat{z}$, $\gamma = 0,9998$



É possível amortizar pouco da dissipação do sistema tal como mostrado na Figura 7 adicionando-se um forte campo elétrico na direção contrária à dissipação, ou seja, $\mathbf{E} = E(-\hat{\rho})$, de tal modo que a energia potencial elétrica da partícula corresponda à 60% da energia total. O gráfico é mostrado na Figura 22, podendo-se comparar com o obtido para o caso conservativo de mesmos valores de campos na Figura 23.

Figura 22 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = E = -600\hat{\rho}$, $B = 0\hat{z}$, $\gamma = 0,9998$

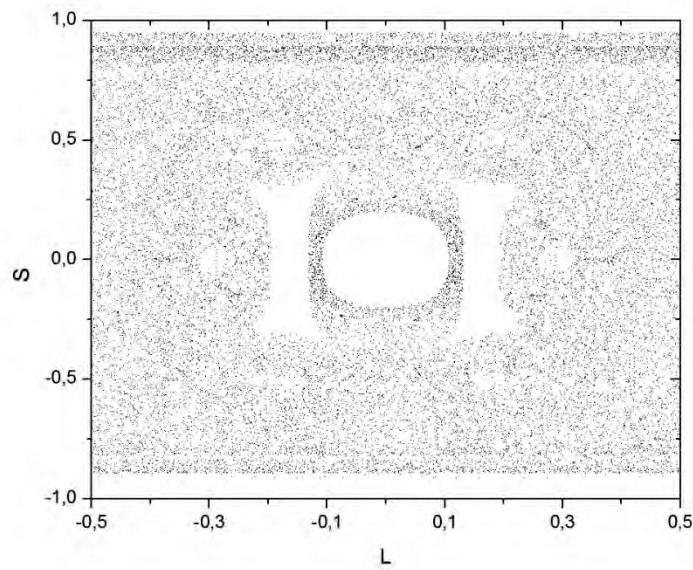
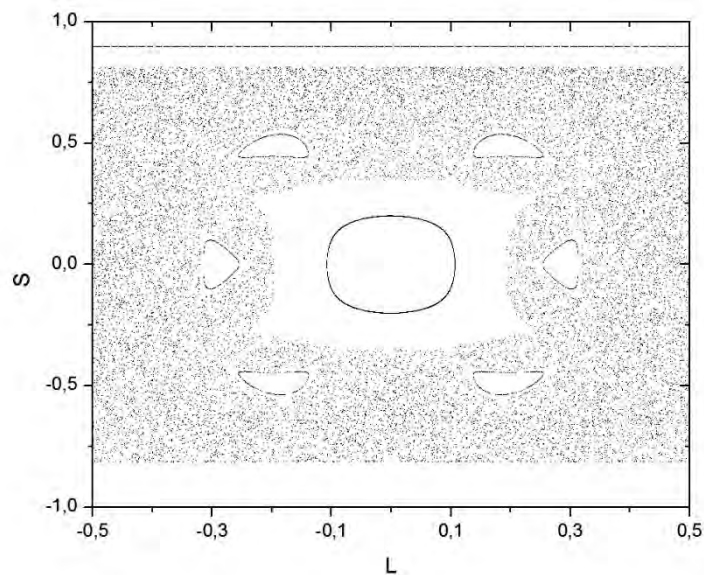


Figura 23 – GSP, $\delta = 0,25$, $E = E = -600\hat{\rho}$, $B = 0\hat{z}$, $\gamma = 1,0$



4 O BILHAR ANULAR PULSANTE – MAPA

4.1 Caso Conservativo

No Bilhar Anular Pulsante, a fronteira externa, interna ou ambas tem o respectivo raio variando numa relação temporal enquanto a partícula se move no espaço. Bilhares cujas fronteiras são móveis pertencem a uma classe de sistemas Hamiltonianos dependentes do tempo, podendo considerá-lo como uma generalização bidimensional do modelo de Fermi-Ulam [2]. Escolhemos uma relação preiódica no tempo do tipo [7]:

$$R(t) = 1 + e_R \cos(t + \phi_{e_0}) \quad (23)$$

para a fronteira externa, onde e_R é a meia largura de oscilação (amplitude), assumindo o raio inicial $R_0=1$ e a frequência angular de oscilação $\omega_R=1$, e do tipo:

$$r(t) = r_0 + e_r \cos(\omega t + \phi_{in_0}) \quad (24)$$

para a fronteira interna. ϕ_{e_0} e ϕ_{in_0} são as fases iniciais de oscilação da fronteira externa e interna, respectivamente.

Sendo assim, as velocidades relativas desenvolvidas pelas fronteiras são:

$$\begin{aligned} v_{Rex}(t) &= \frac{dR(t)}{dt} = -e_R \sin(t + \phi_{e_0}) \\ v_{rit}(t) &= \frac{dr(t)}{dt} = -e_r \omega \sin(\omega t + \phi_{in_0}) \end{aligned} \quad (25)$$

Utilizamos neste trabalho o *Modelo Simplificado* para caracterização do sistema [7]. Neste modelo, as fronteiras não estão se movendo de fato. Consideramos as fronteiras estáticas, com R e r constantes, e, somente no momento da colisão elas se comportam como se estivessem movimentando, transferindo *momentum* à partícula, logo que as fases de oscilação são ajustadas para aquele instante de tempo.

- **Movimento do Tipo A**

Chamamos *tempo de vôo* o intervalo de tempo decorrido entre duas colisões sucessivas, localizadas pelas coordenadas cartesianas (x_n, y_n) e (x_{n+1}, y_{n+1}) :

$$t_v = \frac{\Delta d}{v_n} = \frac{\sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2 + (y_{n+1}-y_n)^2}}{v_n} \quad (26)$$

Conhecendo-se as componentes da velocidade em coordenadas cartesianas, as componentes polares das velocidades, imediatamente antes da colisão são das por:

$$\begin{aligned}v_{r\,n} &= v_{x\,n}\cos\theta_{n+1} + v_{y\,n}\sin\theta_{n+1} \\v_{\tau\,n} &= -v_{x\,n}\sin\theta_{n+1} + v_{y\,n}\cos\theta_{n+1}\end{aligned}\quad (27)$$

$$\theta_{n+1} = \pi + \theta_n - 2\alpha_n$$

Na medida em que se tem uma perturbação no comprimento do raio da fronteira, o *momentum* transferido por ela dar-se-á apenas na direção radial – novamente um problema de força central. A componente da velocidade nesta direção após a batida será alterada segundo a expressão:

$$v_{r\,n+1} = -| -v_{r\,n} + 2v_R(t_v) | \quad (28)$$

com v_R avaliada no tempo de vôo t_v no instante da colisão.

O sinal negativo do módulo impede que a partícula assuma trajetórias fora da região limitada pelo bilhar. Calculamos a nova velocidade da partícula, as novas fases das fronteiras e o novo ângulo de reflexão α_{n+1} :

$$\begin{aligned}v_{\tau\,n+1} &= v_{\tau\,n} \rightarrow v_{n+1} = \sqrt{(v_{r\,n+1})^2 + (v_{\tau\,n+1})^2} \\ \phi_{e\,n+1} &= \phi_{e\,n} + t_v \bmod 2\pi \\ \phi_{in\,n+1} &= \phi_{in\,n} + \omega t_v \bmod 2\pi \\ \alpha_{n+1} &= \arctan\left(-\frac{v_{\tau\,n+1}}{v_{\rho\,n+1}}\right)\end{aligned}\quad (29)$$

- **Movimento do Tipo B**

As coordenadas cartesianas são dadas por:

$$\begin{aligned}x_r &= r\cos\theta_r - \delta \\ y_r &= r\sin\theta_r \\ \theta_r &= \beta + \theta_n - \alpha_n\end{aligned}\quad (30)$$

O tempo de vôo é:

$$t_v = \frac{\Delta d}{v_n} = \frac{\sqrt{(x_r - x_0)^2 + (y_r - y_0)^2}}{v_n} \quad (31)$$

No referencial da fronteira interna, somente a componente normal da velocidade da partícula se altera na colisão. Imediatamente antes da colisão temos:

$$\begin{aligned} v_{rn}^i &= v_{xn} \cos \theta_r + v_{yn} \sin \theta_r \\ v_{\tau n}^i &= -v_{xn} \sin \theta_r + v_{yn} \cos \theta_r \end{aligned} \quad (32)$$

A correção na velocidade é dada por:

$$\begin{aligned} v_{rn}^{i'} &= |-v_{rn}^i + 2v_r(t_v)| \\ v_{\tau n}^{i'} &= v_{\tau n}^i \end{aligned} \quad (33)$$

A partícula agora se desloca em direção ao círculo externo. No momento desta próxima colisão, o módulo do vetor radial da posição da partícula é igual a 1:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= 1 = \sqrt{(x_r + v_x t)^2 + (y_r + v_y t)^2} \\ &= \sqrt{(x_r + y_r)^2 + 2(x_r v_x + y_r v_y)t + (v_x^2 + v_y^2)t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_{rn}^{i'} \cos \theta_r + v_{\tau n}^{i'} \sin \theta_r \\ v_y &= -v_{rn}^{i'} \sin \theta_r + v_{\tau n}^{i'} \cos \theta_r \end{aligned} \quad (34)$$

Substituindo para $\rho(t) = 1$, obtemos a equação do segundo grau:

$$(v_x^2 + v_y^2)t^2 + 2(x_r v_x + y_r v_y)t + (x_r + y_r)^2 - 1 = 0 \quad (35)$$

cujas soluções positivas é o tempo de vôo t_f procurado.

As novas coordenadas cartesianas da partícula são dadas por:

$$x_{n+1} = x_r + v_x t_f$$

$$y_{n+1} = y_r + v_y t_f$$

e

$$\theta_{n+1} = \arctan \frac{y_1}{x_1} \quad (36)$$

As velocidades antes da colisão com o círculo externo serão:

$$v_{rn} = v_x \cos \theta_{n+1} + v_y \sin \theta_{n+1} \quad (37)$$

$$v_{\tau n} = -v_x \sin \theta_{n+1} + v_y \cos \theta_{n+1} \quad (38)$$

Novamente, a correção para as componentes da velocidade da partícula são:

$$\begin{aligned} v_{r n+1} &= -|-v_{r n} + 2v_R(t_v + t_f)| \\ v_{\tau n+1} &= v_{\tau n} \end{aligned} \quad (39)$$

O módulo da nova velocidade é:

$$v_{n+1} = \sqrt{(v_{\rho n+1})^2 + (v_{\tau n+1})^2} \quad (40)$$

As fases de oscilação são corrigidas por:

$$\begin{aligned} \phi_{e n+1} &= \phi_n + t_v + t_f \mod 2\pi \\ \phi_{in n+1} &= \phi_n + \omega(t_v + t_f) \mod 2\pi \end{aligned} \quad (41)$$

Sendo:

$$\alpha_{n+1} = \arctan \left(-\frac{v_{\tau n+1}}{v_{\rho n+1}} \right)$$

É importante ressaltar que o sinal negativo no módulo das velocidades após as colisões impede que a partícula viaje para fora dos limites de fronteira do bilhar, o que seria possível se considerássemos o modelo completo em que os raios realmente oscilam no tempo [7]. Desta forma, o mapeamento do modelo simplificado impede que colisões sucessivas entre a mesma fronteira e a partícula em pontos adjacentes ocorram.

Para este sistema, a Energia não é mais uma constante de movimento. O espaço de fase de quatro dimensões que descreve o sistema pode ser dado por [2-5, 7, 8]: $(L, S, \phi_e, -v_r)$, mas como o objetivo central é estudar a aceleração de Fermi neste modelo, é suficiente a análise em $(\phi_e, -v_r)$. Neste espaço bidimensional, é possível verificar se um conjunto de valores dado para as variáveis do sistema são passíveis de apresentar aumento da energia média, para uma posterior análise estatística.

Alguns gráficos das seções de Poincaré nas variáveis $-v_r \times \phi_e$ do Bilhar Anular Pulsante caracterizado pelo modelo simplificado, sem dissipação, são mostrados nas Figuras 24-27, para diferentes valores de raio interno, excentricidades, amplitude de oscilação e diferença de fase de oscilação.

Figura 24 – GSP, $r = 0,4$, $\delta = 0$, $e_R = e_r = 0,01$, $\phi_e - \phi_{in} = 0$

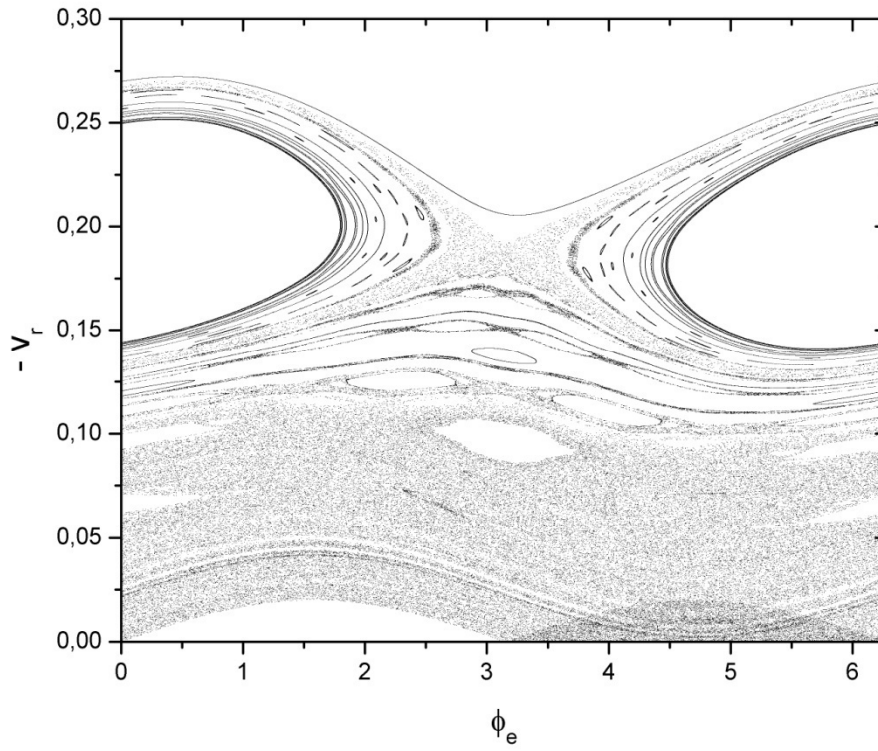


Figura 25 – GSP, $r = 0,4$, $\delta = 0$, $e_R = e_r = 0,01$, $\phi_e - \phi_{in} = \pi$

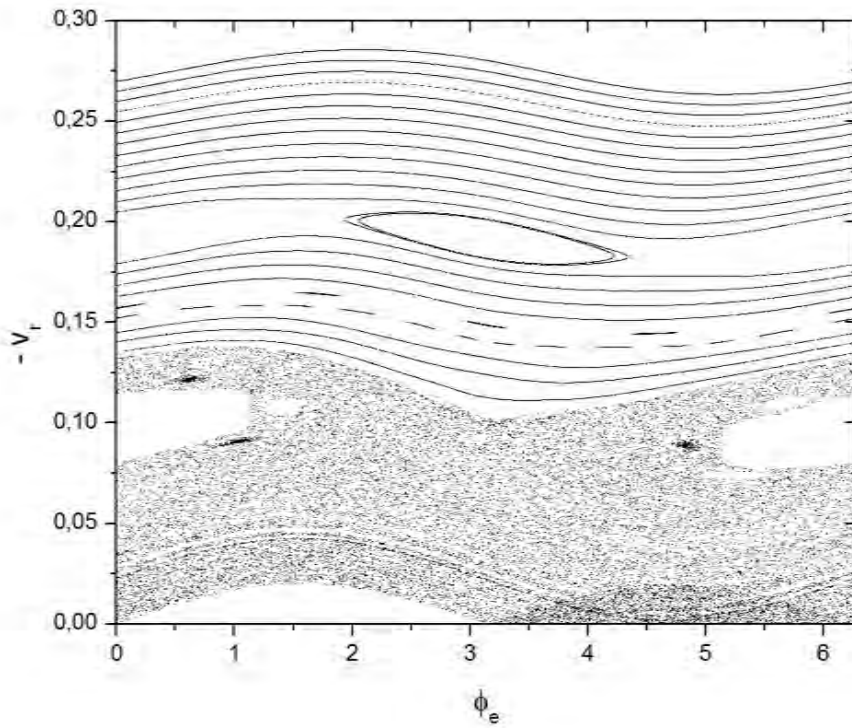


Figura 26 – GSP, $r = 0,75$, $\delta = 0,05$, $e_R = e_r = 0,01$, $\phi_e - \phi_{in} = 0$

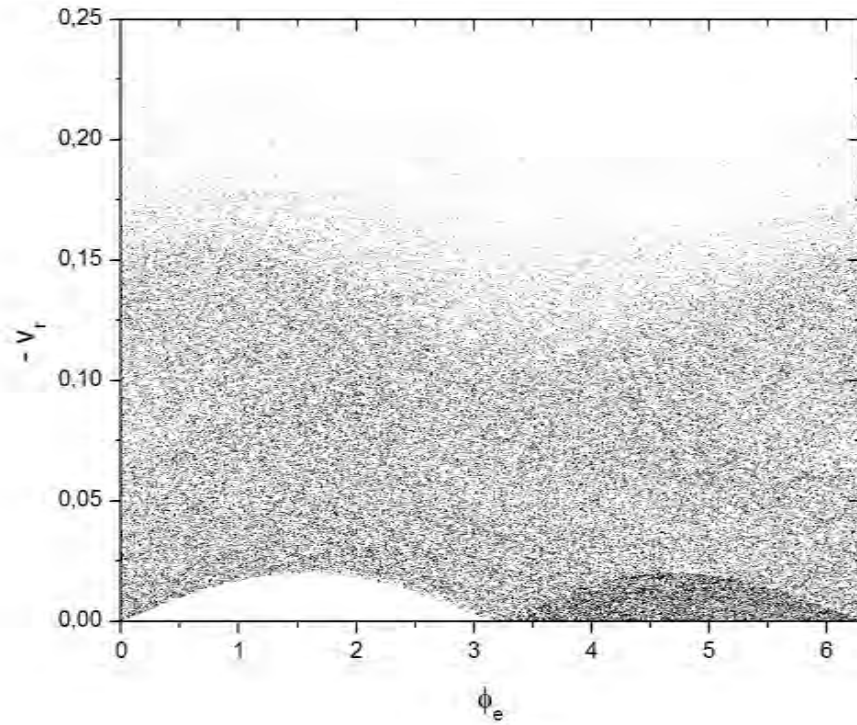
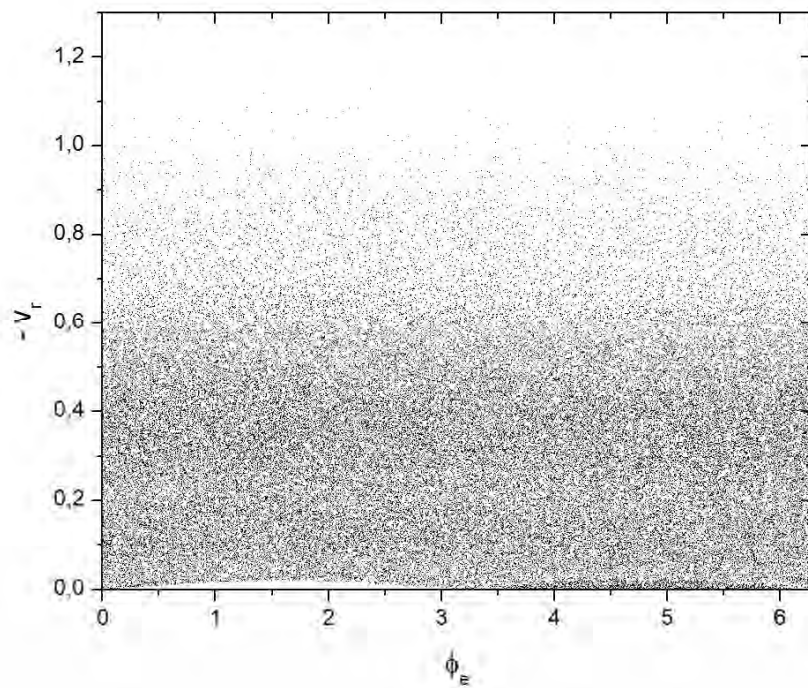


Figura 27 – GSP, $r = 0,15$, $\delta = 0,65$, $e_R = e_r = 0,01$, $\phi_e - \phi_{in} = 0$



Fonte: elaboração nossa (Fig. 24-27)

Já é conhecido na literatura [3,4,7,8] que o bilhar anular pulsante concêntrico não apresenta aceleração de Fermi, pois as curvas invariantes “*spanning*” no espaço de fase $-v_r \times \phi_e$, como mostradas nas Figuras 24-25, limitam o crescimento da energia cinética, além disso, o momento angular é uma constante de movimento. Por outro lado, no caso excêntrico desaparecem as curvas invariantes e as regiões do espaço de fase para altos valores de velocidade podem ser igualmente preenchidos pelo conjunto de condições iniciais fornecido.

4.2 Caso Dissipativo

Ao adicionarmos a dissipação radial na colisão, as Equações 33 e 39 devem ser modificadas. Ao mesmo tempo em que a partícula troca *momentum* com a fronteira, também perde energia na colisão, logo, diferentemente do bilhar estático em que a partícula apenas perdia energia durante o impacto, agora ela também pode ganhar energia no final da interação com a fronteira. As novas correções para as velocidades no instante da batida são:

- **Movimento do Tipo A**

$$\begin{aligned} v_{\rho\ n+1} &= -|-\gamma v_{\rho\ n} + (1 + \gamma)v_R(t_v)| \\ v_{\tau\ n+1} &= v_{\tau\ n} \end{aligned} \tag{42}$$

- **Movimento do Tipo B**

$$\begin{aligned} v_{\rho\ n}^{i'} &= |-\gamma v_{\rho\ n}^i + (1 + \gamma)v_r(t_v)| \\ v_{\tau\ n}^{i'} &= v_{\tau\ n}^i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_{\rho\ n+1} &= -|-\gamma v_{\rho\ n} + (1 + \gamma)v_R(t_v + t_f)| \\ v_{\tau\ n+1} &= v_{\tau\ n} \end{aligned} \tag{43}$$

Nesta configuração de bilhar, é comum o aparecimento de atratores e atratores caóticos no espaço de fase. Estudos realizados mostram possibilidades em ajustar a dissipação como um mecanismo de ganho na energia média do sistema [8]. No entanto, ainda para o bilhar excêntrico, o caso dissipativo tende a suprimir a aceleração de Fermi, sem ganhos ilimitados em velocidade e energia cinética.

As Figuras 28-29 mostram os gráficos da Seção de Poincaré para o caso dissipativo, com diferentes valores de parâmetros do sistema.

Figura 28 – GSP, $r = 0,4$, $\delta = 0$, $e_R = e_r = 0,01$, $\phi_e - \phi_{in} = 0$, $\gamma = 0,945$

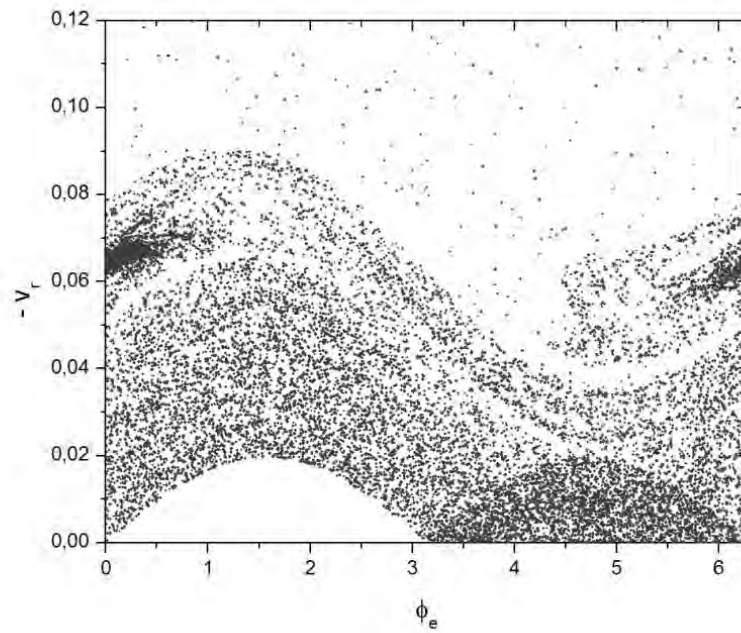
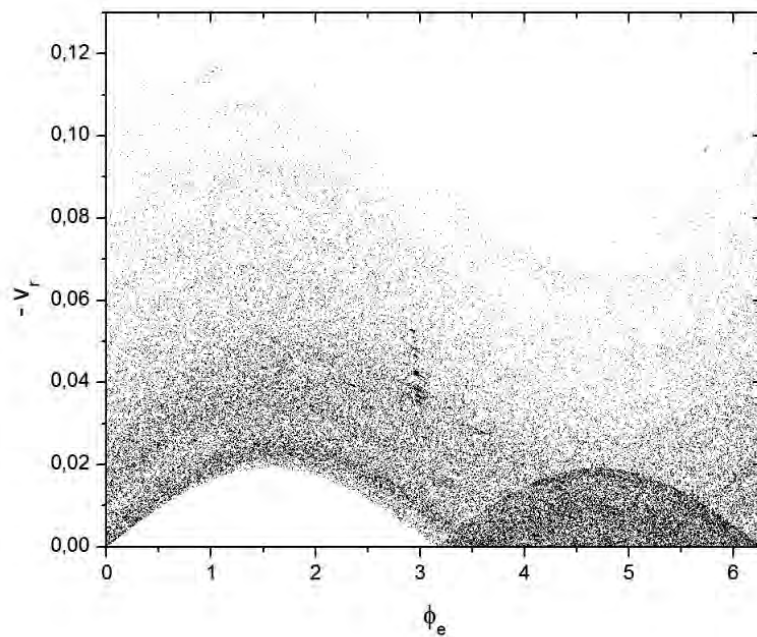


Figura 29 – GSP, $r = 0,15$, $\delta = 0,65$, $e_R = e_r = 0,01$, $\phi_e - \phi_{in} = 0$, $\gamma = 0,923$



Fonte: elaboração nossa (Fig. 28-29)

5 O BILHAR ANULAR ELETROMAGNÉTICO PULSANTE

Consideremos agora o movimento de uma partícula carregada nas fronteiras pulsantes do bilhar anular, considerando o caso geral de colisões elásticas ou inelásticas. As equações de movimento são as Equações 10, que devem ser integradas numericamente no tempo. O objetivo central deste trabalho é buscar mecanismos de incentivo ou supressão da aceleração de Fermi neste sistema, e compará-lo com o bilhar pulsante sem campo.

Os procedimentos numéricos durante a colisão são os mesmos que foram discutidos na Seção 4, no entanto, agora devemos ainda corrigir os momentos cinemáticos da partícula após a batida para que as equações de movimento sejam iteradas corretamente.

Logo, as transformações mencionadas para a colisão com o círculo externo são:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \arctan\left(\rho \frac{\dot{\theta}}{\dot{\rho}}\right) \\
 v_{r_i} &= v_i \cos(\alpha) \\
 p_\theta &= m \left(v_i \cdot \sin(\alpha) + \frac{qB\rho}{2c} \right) \\
 v'_{r_i} &= -| -\gamma v_{r_i} - (1 + \gamma)e_R \sin(\phi_e) | \\
 p_\rho &= m v'_{r_i}
 \end{aligned} \tag{42}$$

onde v'_{r_i} é a velocidade radial corrigida após a colisão e γ o coeficiente de dissipação.

Após as correções, recalculamos o ângulo de colisão, a energia total do sistema e o novo módulo da velocidade:

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= \arctan\left(\rho \frac{\dot{\theta}}{\dot{\rho}}\right) \\
 \mathcal{E} &= H(p_\rho, p_\theta, \rho, \theta, B, \varphi) \\
 v' &= \sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E} - q\varphi)}
 \end{aligned} \tag{43}$$

As fases de oscilação das fronteiras também são atualizadas, segunda a Equação 41. coletamos, então, os pontos do espaço de fases do sistema:

$$L = \frac{\theta}{2\pi}, S = \sin(\alpha'), \phi_e, -v_{r_i}' \quad (44)$$

Quando da colisão com a fronteira interna, as correções são:

$$\beta = \arctan\left(\rho \frac{\dot{\theta}}{\dot{\rho}}\right) \quad (45)$$

Calculamos as componentes radial e tangencial da velocidade relativas ao referencial do círculo interno, conforme Equação 18.

Fazemos a correção desta componente radial:

$$v_r^{ri'} = \left| -\gamma v_r^{ri} - (1 + \gamma) e_{in} \omega \sin(\phi_{in}) \right| \quad (46)$$

O módulo da velocidade corrigida e os ângulos de saída relativos à colisão são dados pelas Equações 20 e 21.

E obtemos, então os novos *momenta* com referencial do círculo externo, e a energia total do sistema pelas Equações 22.

Atentamos para o fato de que ainda que introduzamos dissipação no problema e o sistema deixe de ser Hamiltoniano, a formulação Hamiltoniana ainda é válida para estudá-lo e a função Hamiltoniana representa a energia total do sistema, pois a dissipação ocorre apenas no momento da colisão. O mesmo vale para quando a velocidade da partícula aumenta após a batida, devido a forças impulsivas que transferem *momentum* da fronteira para a partícula. Embora a energia não se conserve durante a colisão, ela é ajustada logo após a mesma e se mantém constante até que ocorra o próximo encontro com um dos círculos do bilhar.

Vamos analisar agora, alguns gráficos das Seções de Poincaré para o bilhar concêntrico. Manteremos constante os seguintes valores: $r = 0.4, \delta = 0, e_R = e_r = 0.01, w = 1, \phi_e - \phi_{in} = 0$, e fazemos variar os módulos de campo magnético, campo elétrico e coeficiente de dissipação.

Primeiramente vamos testar correspondência entre o mapa, utilizado na Seção 4 e a formulação Hamiltoniana. Fazemos, então o gráfico do espaço de fases para os campos elétrico e magnético nulos, a fim de verificar a equivalência da Figura 30 com a Figura 24.

Uma vez verificada a correspondência, analisamos os gráficos das Seções de Poincaré obtidos (Figuras 31-43) e discutimos os resultados.

Figura 30 – GSP, $E = 0$, $B = 0$, $\gamma = 1$

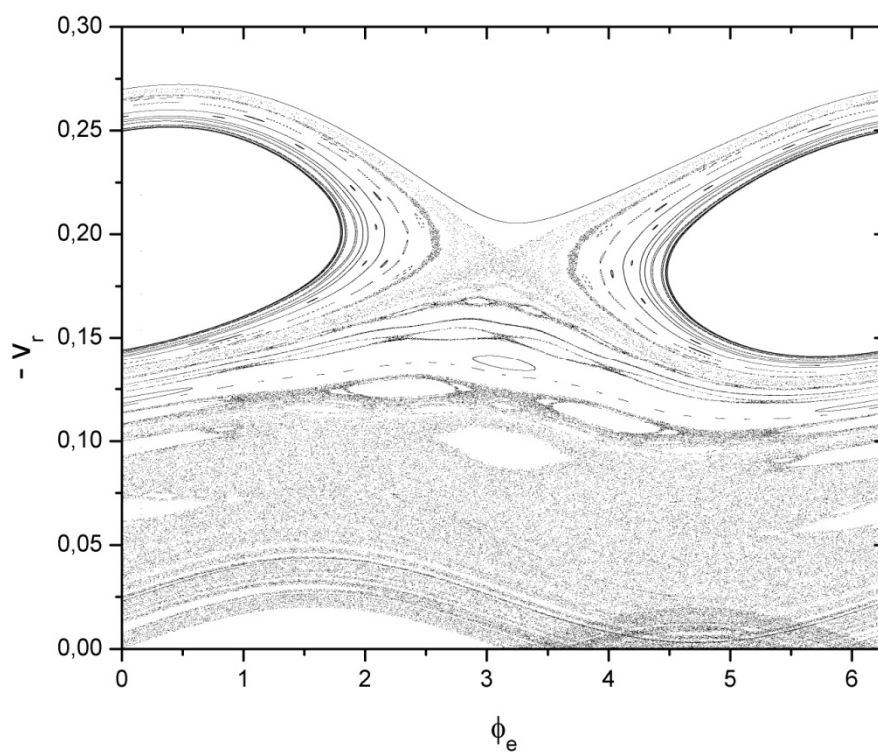


Figura 31 – GSP, $E = 0.0004\hat{x}$, $B = 0$, $\gamma = 1$

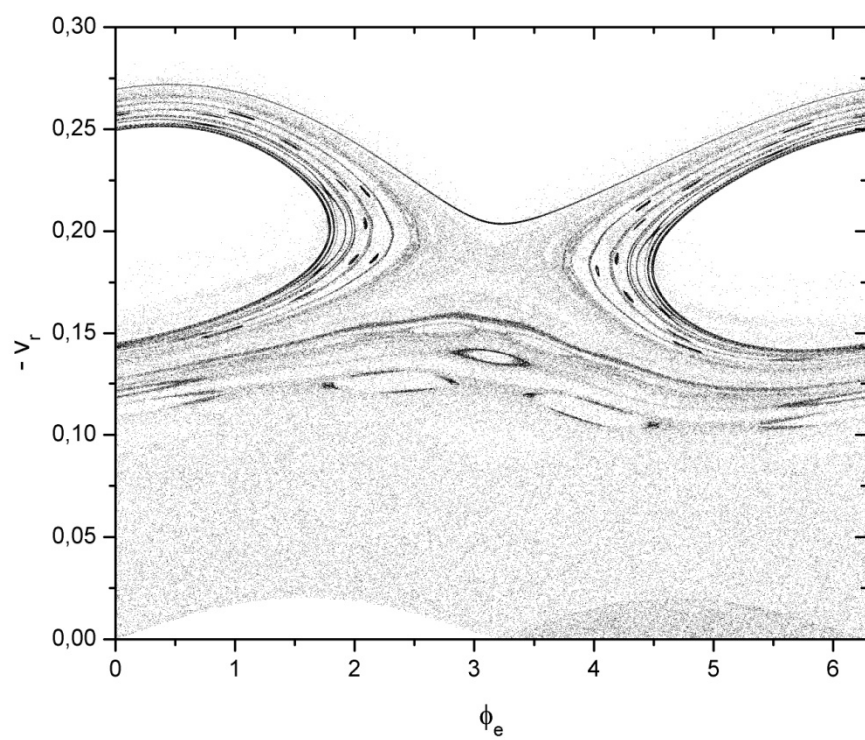


Figura 32 – GSP, $E = 0.0005\hat{x}$, $B = 0$, $\gamma = 1$

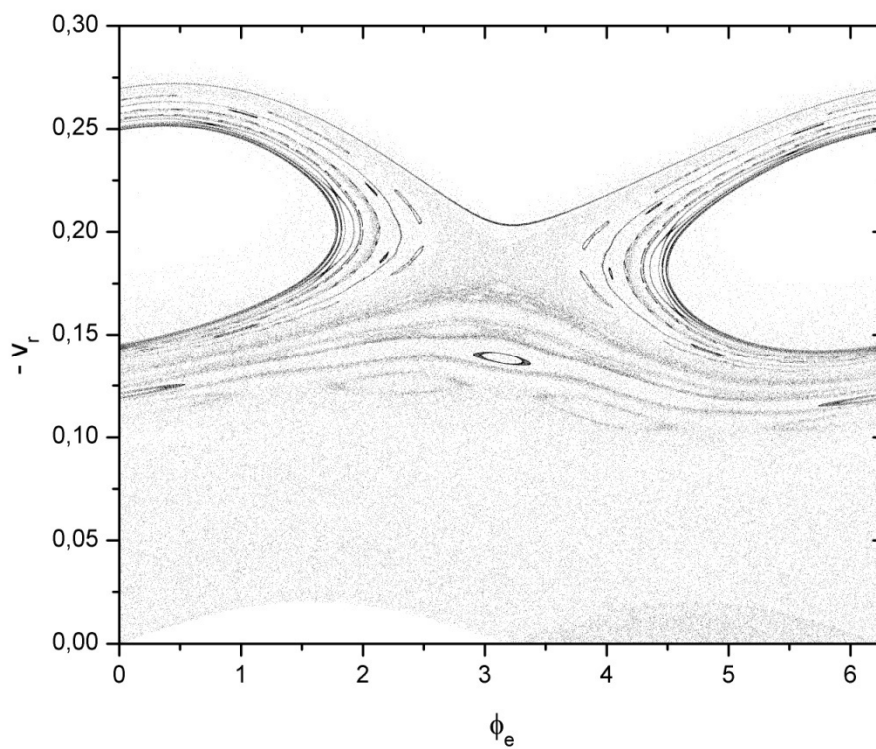


Figura 33 – GSP, $E = 0.0008\hat{x}$, $B = 0$, $\gamma = 1$

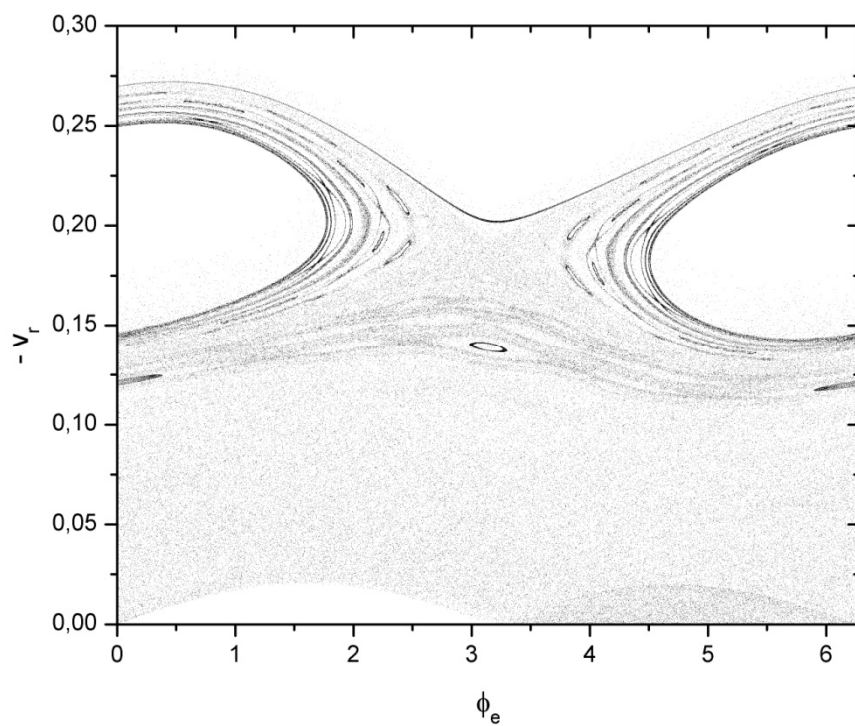


Figura 34 – GSP, $E = 0.0009\hat{x}$, $B = 0$, $\gamma = 1$

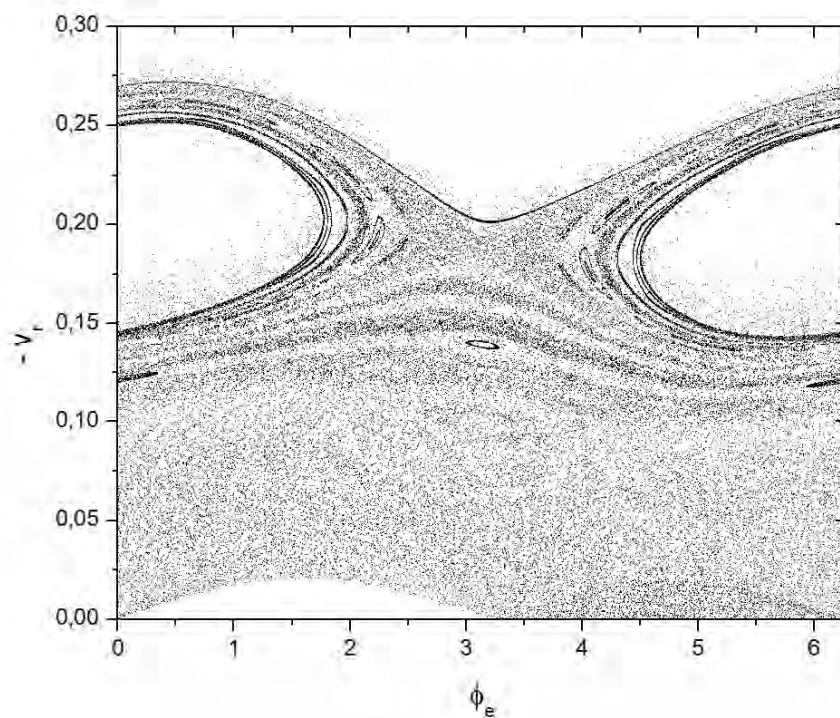


Figura 35 – GSP, $E = 0.001\hat{x}$, $B = 0$, $\gamma = 1$

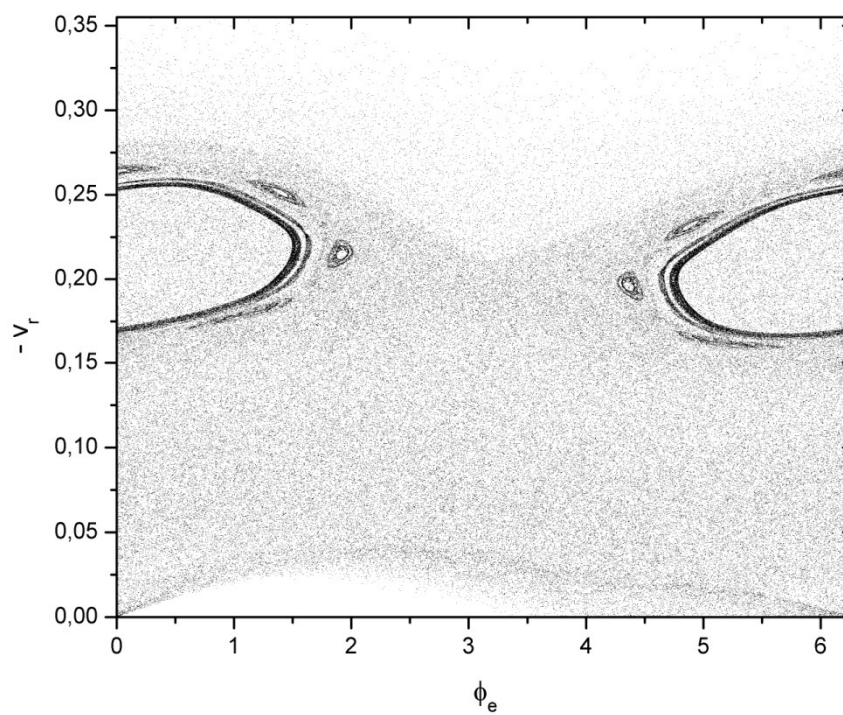


Figura 36 – GSP, $E = 0.03\hat{x}$, $B = 0$, $\gamma = 1$

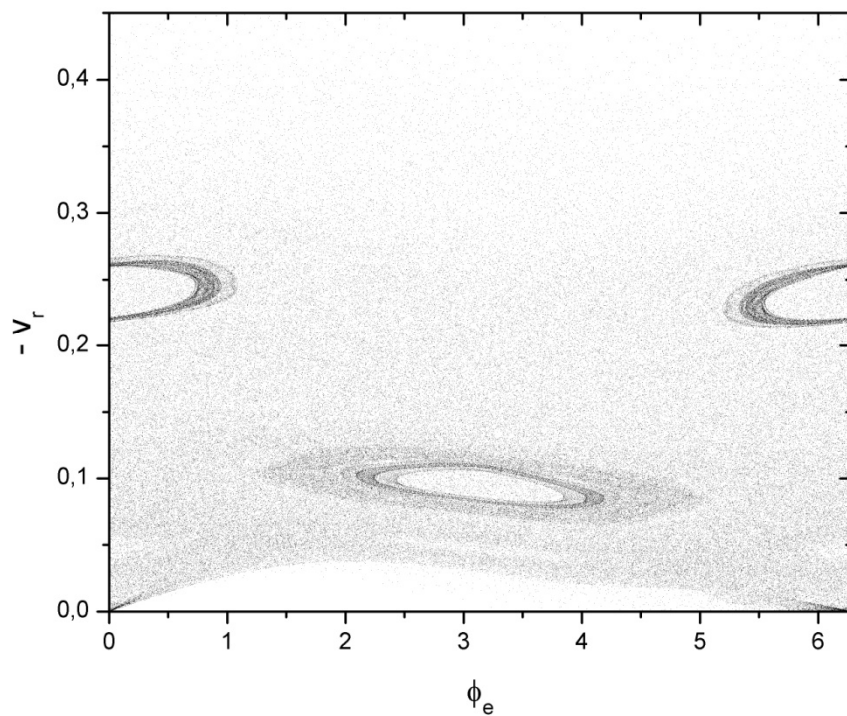


Figura 37 – GSP, $E = 0$, $B = 0.05\hat{z}$, $\gamma = 1$

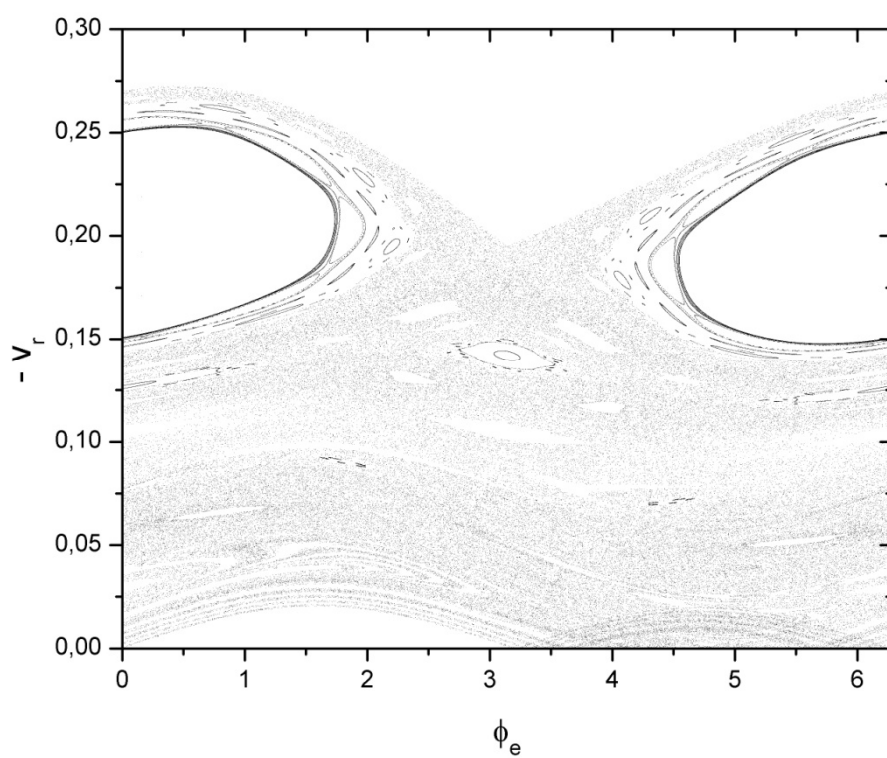


Figura 38– GSP, $E = 0$, $B = 0.5\hat{z}$, $\gamma = 1$

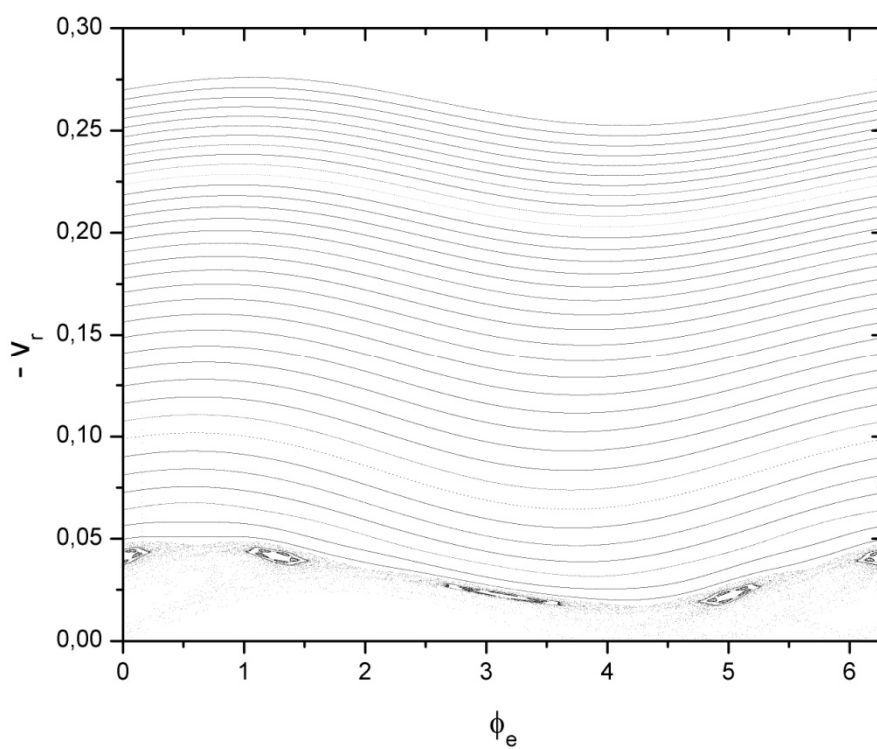


Figura 39 – GSP, $E = 0.08\hat{x}$, $B = 0.05\hat{z}$, $\gamma = 1$

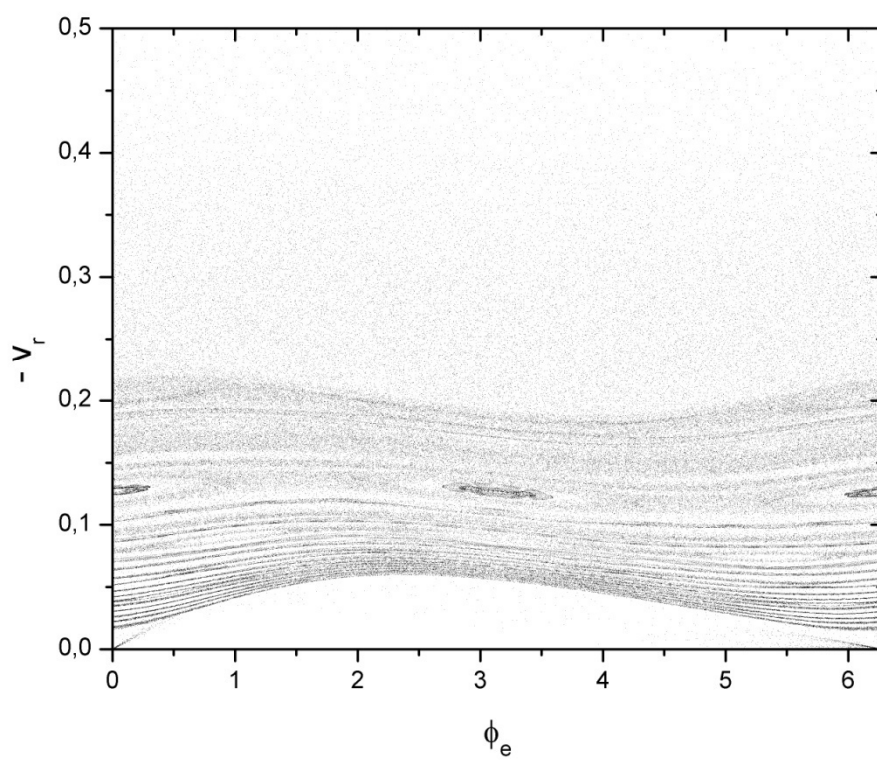
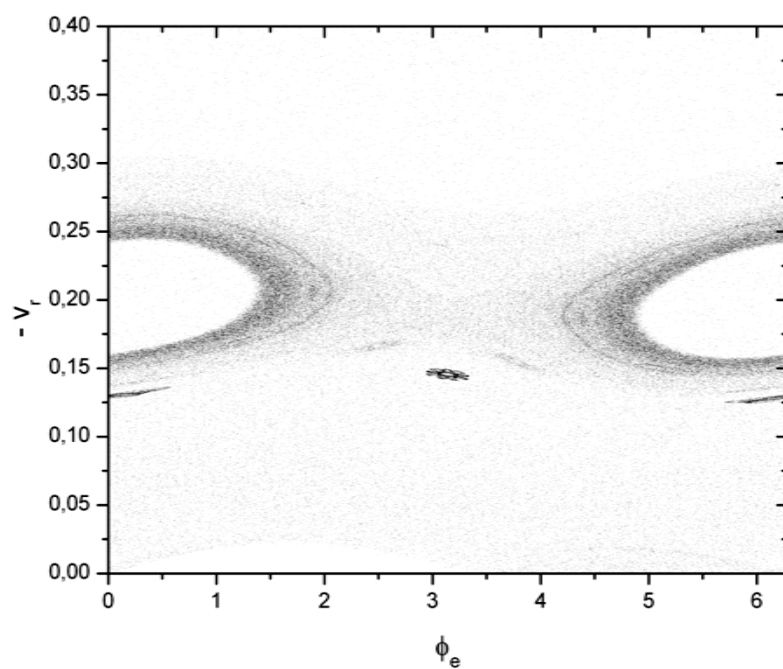
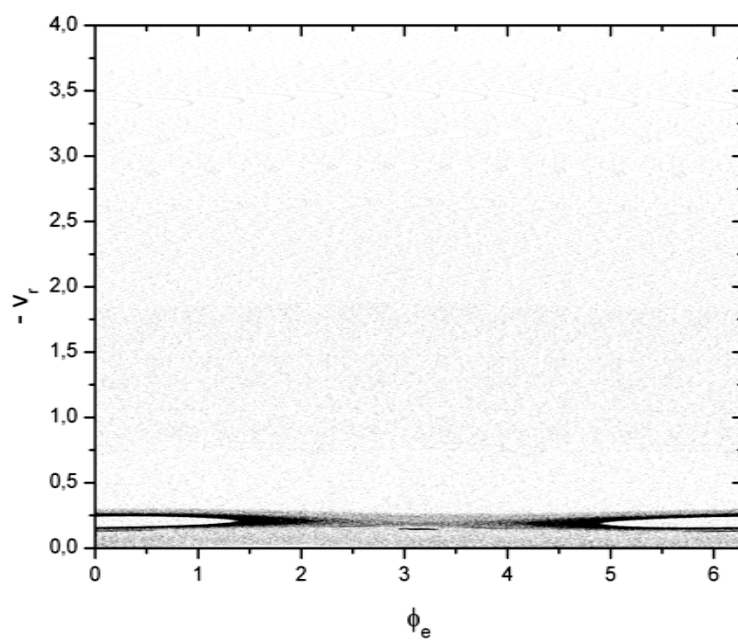


Figura 40 – GSP, $E = 0.004\hat{x}$, $B = 0.005\hat{z}$, $\gamma = 1$



(MOSTRANDO PARA $0 \leq v_r \leq 0.4$)

Figura 41 – GSP, $E = 0.004\hat{x}$, $B = 0.005\hat{z}$, $\gamma = 1$



(MOSTRANDO GRÁFICO TODO)

Figura 42 – GSP, $E = 0.07\hat{x}$, $B = 0.04\hat{z}$, $\gamma = 0,9997$

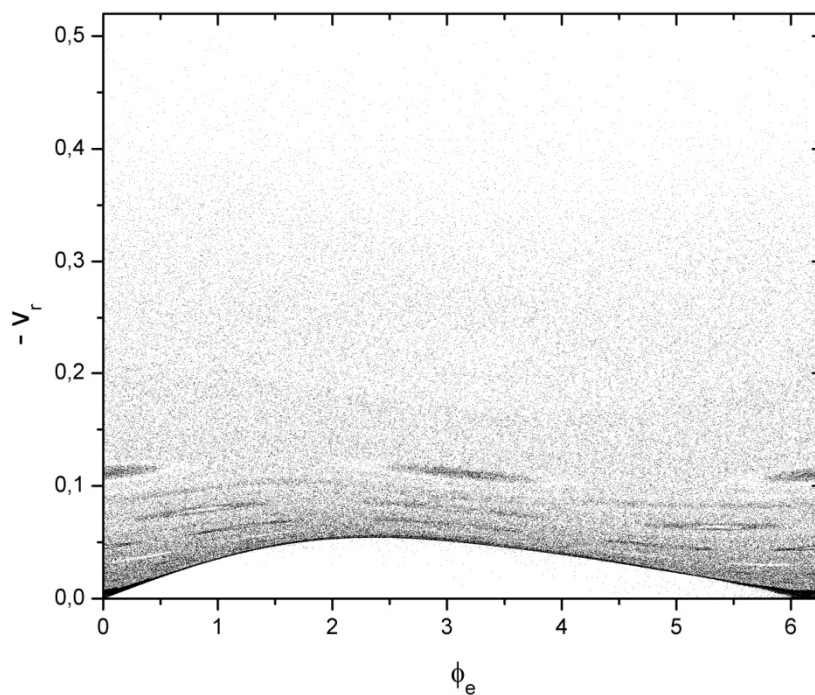
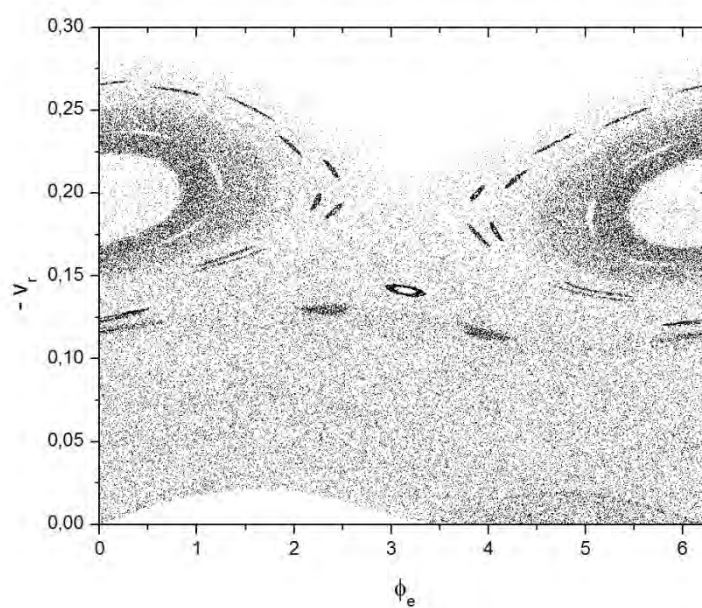


Figura 43 – GSP, $E = 0.002\hat{x}$, $B = 0$, $\gamma = 0,99987$



Fonte: elaboração nossa (Fig. 30-43)

5.1 Discussão

Analisando as Figuras 30-43, percebemos claramente que mesmo no bilhar concêntrico é possível, com a introdução de campos elétrico e magnético, eliminar as curvas invariantes anteriormente formadas em altos valores da velocidade, o que limitava o crescimento de energia cinética e suprimia a aceleração de Fermi.

Pela observação das Figuras 34-36, podemos inferir que o campo elétrico, para essas configurações do bilhar anular, tem a ação de dissolver regiões de órbitas periódicas e curvas invariantes no espaço de fase. Antagonicamente, o campo magnético, tal como visto nas Figuras 37 e 38, costuma aprisionar a partícula, adicionando curvas *spannings* ao espaço de fase.

No entanto, como vemos nas Figuras 39-43, o campo magnético na presença do elétrico parece colaborar com o desaparecimento de regiões de estabilidade.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho mostrou a revisão do bilhar anular estático, em todas as suas formas conhecidas até agora, do bilhar anular pulsante para a partícula livre e iniciou os estudos com o bilhar anular eletromagnético pulsante.

Para o bilhar estático em que se estuda a partícula livre, pode-se obter órbitas caóticas apenas alterando a excentricidade do bilhar – e consequentemente o tamanho da cáustica –, sendo esta um parâmetro de controle do sistema. Percebemos, então, que a própria geometria do bilhar anular intrinsecamente permite a existência de um sistema caótico.

Ainda no bilhar estático, quando aplicamos um campo elétrico externo uniforme estudando o movimento de uma partícula eletricamente carregada, observamos a adição de regiões caóticas no espaço de fase. Concluímos também que a ação de um campo magnético externo uniforme na direção perpendicular do bilhar tem como resultado a diminuição de regiões caóticas e a adição de curvas invariantes.

Para todo o bilhar estático, quando observamos o movimento da partícula colidindo com as fronteiras de forma inelástica, observamos o aparecimento de atratores que carregam as trajetórias para as *WGO*, e a consequente diminuição

sucessiva da energia total da partícula no decorrer das iterações em cada condição inicial dada.

Estudos que relacionam a energia da partícula e a geometria do bilhar anular são mais interessantes, do ponto de vista de parâmetros físicos, quando analisamos o caso pulsante. Nesta configuração, como já havia sido mostrado na literatura [2,3,7], observa-se a ocorrência de crescimento ilimitado de energia para o caso excêntrico.

Os resultados também mostraram que, para o caso eletromagnético pulsante, há grandes indícios de que possam existir mecanismos de incentivo ao aparecimento da aceleração de Fermi no bilhar anular concêntrico, o que até então não havia sido mostrado. Além disso, os primeiros resultados com colisões dissipativas neste sistema mostraram, segundo as Figuras 40-42, que nem todo o espaço de fase é dinamizado para as bacias de atração, o que sugere uma possível competição entre a dissipação de energia sofrida pelas colisões inelásticas e o ganho de energia devido à aceleração da Força de Lorentz e das transferências de *momenta* da fronteira para a partícula durante a colisão.

Sugere-se que a ação do campo elétrico, que adiciona caos ao espaço de fase, tenha um papel determinante para incentivar a presença de aceleração de Fermi no sistema. Por outro lado, o campo magnético e a dissipação podem agir de maneira antagônica suprimindo o ganho ilimitado de energia.

Trabalhos futuros devem ser realizados no sentido de estudar as análises estatísticas do sistema, constatando ou não os mecanismos relacionados à aceleração de Fermi e da suposta superposição dos efeitos da dissipação e da ação de campos externos.

REFERÊNCIAS

- [1] O. Bohigas, D. Boosé, R. Egydio de Carvalho, V. Marvulle. Nuclear Physics A **560** (1993) 197.
- [2] R. Egydio de Carvalho, F. Caetano Souza, E. D. Leonel. Phys. Rev. E **73** (2006) 066229.
- [3] R. Egydio de Carvalho, F. Caetano Souza, E. D. Leonel. J. Phys. A **39** (2006) 3561.
- [4] R. Egydio de Carvalho, C. Vieira Abud, F. Caetano Souza. Phys. Rev. E **77** (2008) 036204.
- [5] GOLDSTEIN, H., POOLE, C., SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3. Ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2002.
- [6] MIJOLARO, Ana. **Estudo da Distribuição de Espaçamentos de Dubletos utilizando o modelo do Bilhar Anular**. 2004. 67 f. Dissertação de Mestrado – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2004.
- [7] SOUZA, Fabiano C. de. **Aceleração de Fermi no Bilhar Anular**. 2005. 73 f. Dissertação de Mestrado – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2005.
- [8] Vieira Abud, C. ; Egydio de Carvalho, R. Phys. Rev. E **84** (2011) 036204.