



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus Experimental de São João da Boa Vista

LUIS HENRIQUE JÚS

RELAÇÕES DIFERENCIAIS ENTRE TENSÕES E CORRENTES DE CIRCUITOS π
COM RESISTÊNCIA DE AMORTECIMENTO

São João da Boa Vista - SP
2017

LUIS HENRIQUE JÚS

**RELAÇÕES DIFERENCIAIS ENTRE TENSÕES E CORRENTES DE CIRCUITOS π
COM RESISTÊNCIA DE AMORTECIMENTO**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia de Telecomunicações do Campus Experimental de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia de Telecomunicações.

Orientador: Prof. Dr. Afonso José do Prado

São João da Boa Vista - SP
2017

Jús, Luis Henrique

Relações diferenciais entre tensões e correntes de circuitos π com resistência de amortecimento /
Luis Henrique Jús. -- São João da Boa Vista, 2018.
42 p. :il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso – Câmpus Experimental de São João da Boa Vista – Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Orientador: Prof. Dr. Afonso José do Prado

Bibliografia

1. Circuitos elétricos 2. Equações de estado 3. Linhas de Transmissão 4. Oscilações 5.
Telecomunicações

CDD 23. ed. – 621.382

Ficha catalográfica elaborada pela [Biblioteca-BJB](#)

Bibliotecário responsável: João Pedro Alves Cardoso – CRB-8/9717

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CÂMPUS EXPERIMENTAL DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
BACHARELADO EM ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

RELAÇÕES DIFERENCIAIS ENTRE TENSÕES E CORRENTES DE CIRCUITOS π
COM RESISTÊNCIA DE AMORTECIMENTO

Aluno: Luis Henrique Jús

Orientador: Prof. Dr. Afonso José do Prado

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. AFONSO JOSÉ DO PRADO
- Prof. Dr. ANDRÉ ALVES FERREIRA
- Prof. Dr. ELMER MATEUS GENNARO

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Expediente nº 04/2018)

São João da Boa Vista, 24 de janeiro de 2018

DADOS CURRICULARES

LUIS HENRIQUE JÚS

NASCIMENTO 18.09.1994 – São João da Boa Vista / SP

FILIAÇÃO Rodrigo Jús
Patricia Cristina Elídio Jús

2013/2017 Curso de Graduação – Engenharia de Telecomunicações
Campus Experimental de São João da Boa Vista –
Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"

Dedico este trabalho a todos aqueles que tornaram possível este momento, em especial aos meus pais Rodrigo e Patricia, que me auxiliaram nesta trajetória desde o seu início e ao meu orientador e professor Afonso, que me incentivou em diversas questões acadêmicas.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais Rodrigo e Patricia que sempre incentivaram e apoiaram meus estudos. Agradeço pela vida que me proporcionam, pela minha inteligência, pela minha família e por meus amigos que me acompanham nessa jornada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Afonso José do Prado que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e suporte não seria possível colher frutos tão bons dentro do ambiente acadêmico.

Aos outros professores e funcionários do Campus de São João da Boa Vista pela dedicação e presteza em ajudar.

Por fim, aos meus colegas de graduação, os quais trilharam o mesmo caminho e sempre estiveram dispostos a ajudar.

“Nearly all men can stand adversity, but if you want to test a man's character, give him power.”

A. Lincoln

RESUMO

Neste trabalho é estudada a modelagem matemática monofásica de uma linha de transmissão baseada em circuitos elétricos descritos por parâmetros concentrados e independentes da frequência. Essa representação monofásica de linhas de transmissão é aproximada por meio de uma cascata de circuitos π com resistências de amortecimento em todas as unidades de circuitos, a fim de suavizar as oscilações numéricas presentes nos resultados das simulações de energização desse modelo. É discutida a utilização em conjunto de um método alternativo para construção das matrizes de modelagem, também com a intenção de suavizar as oscilações de Gibbs e ainda aumentar o alcance de resultados numericamente estáveis. Durante o trabalho, é desenvolvida a representação matemática dessa cascata por meio de equações de estado. O desenvolvimento das equações de estado é o principal objetivo neste trabalho e resultará em relações diferenciais entre as correntes e tensões para cada circuito π dessa cascata. Durante esse desenvolvimento, serão observadas diferenças entre circuitos específicos, o que resultará em três diferentes equacionamentos, que dependem da posição desses circuitos na cascata. Por fim, são feitas algumas considerações e são sugeridas as etapas para trabalhos futuros, que envolvem o desenvolvimento do método numérico e da rotina numérica, tendo o objetivo de melhorar os resultados das simulações que utilizam esse tipo de estrutura, diminuindo a influência de oscilações numéricas que são geradas pelo método numérico de solução do modelo matemático.

PALAVRAS-CHAVE: Linhas de transmissão. Modelagem numérica. Circuitos π . Equações de estado. Relações diferenciais. Oscilações de Gibbs.

ABSTRACT

This paper describes the mathematical modeling of a single phase transmission line based on electrical circuits described by concentrated and frequency independent parameters. This single-phase representation of a transmission line is approximated by means of a π circuit cascade with damping resistors in all circuit units in order to smooth the numerical oscillations present in the simulation results when energizing this model. Along, it is discussed the use of an alternative method to construct the modeling matrices, also with the intention of smoothing Gibbs oscillations and increase the range of results that are numerically stable. During the paper, the mathematical representation of this cascade is discussed through state equations. The development of the state equations is the main objective in this paper and will result in differential relations between the currents and voltages for each π circuit of the cascade. During this development, differences will be observed between specific circuits, which will result in three different equations depending on the position of these circuits in the cascade. Finally, there are some final considerations and it is suggested the stages for future works, which involve the development of the numerical method and the numerical routine, which aims to improve the results of simulations using this type of structure, reducing the influence of undesirable numerical oscillations that are generated by the numerical solution method of the mathematical model.

KEYWORDS: Transmission lines. Numerical modeling. Π circuits. State equations. Differential relations. Gibbs oscillations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Integração numérica pela forma trapezoidal (método de Heun)	18
Figura 2 – Unidade de circuito π	19
Figura 3 – Onda de tensão para cascata de circuitos π clássicos	21
Figura 4 – Unidade de circuito π com resistência de amortecimento	21
Figura 5 – Onda de tensão para cascata de circuitos π com resistência de amortecimento ...	22
Figura 6 – Onda de tensão para cascata de circuitos π clássicos com matriz de modelagem reduzida.....	23
Figura 7 – Cascata de circuitos π com resistência de amortecimento: (a) primeiro circuito, (b) circuitos intermediários e (c) último circuito	24
Figura 8 – Primeira unidade de circuito π da cascata.....	25
Figura 9 – Unidade intermediária de circuito π da cascata	30
Figura 10 – Última unidade de circuito π da cascata.....	35

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz da cascata de circuitos
B	Matriz de valores de fontes independentes
C	Capacitância
$\frac{di}{dt}$	Derivada da corrente em relação ao tempo
$\frac{dv}{dt}$	Derivada da tensão em relação ao tempo
$f(x)$	Função genérica
G	Condutância
G_D	Condutância de amortecimento
i_1	Corrente na primeira unidade de circuito
i_2	Corrente na segunda unidade de circuito
i_3	Corrente na terceira unidade de circuito
i_j	Corrente na unidade de circuito atual
i_{j-1}	Corrente na unidade de circuito anterior
i_{j+1}	Corrente na unidade de circuito posterior
i_n	Corrente na última unidade de circuito
i_{n-1}	Corrente na penúltima unidade de circuito
i_C	Corrente no capacitor
i_G	Corrente no condutor
i_{D1}	Corrente na resistência de amortecimento da primeira unidade de circuito
i_{D2}	Corrente na resistência de amortecimento da segunda unidade de circuito
$i(k)$	Corrente no instante atual de tempo
$i(k+1)$	Corrente no próximo instante de tempo
k_D	Constante de proporcionalidade
L	Indutância
R	Resistência
R_D	Resistência de amortecimento
u	Tensão da fonte de alimentação
v_1	Tensão na primeira unidade de circuito
v_2	Tensão na segunda unidade de circuito

v_3	Tensão na terceira unidade de circuito
v_j	Tensão na unidade de circuito atual
v_{j-1}	Tensão na unidade de circuito anterior
v_{j+1}	Tensão na unidade de circuito posterior
v_n	Tensão na última unidade de circuito
v_{n-1}	Tensão na penúltima unidade de circuito
v_R	Tensão no resistor
v_L	Tensão no indutor
$v(k)$	Tensão no instante atual de tempo
$v(k+1)$	Tensão no próximo instante de tempo
x_k	Ponto genérico no eixo x
x_{k+1}	Próximo ponto genérico no eixo x
y_k	Ponto genérico no eixo y
y_{k+1}	Próximo ponto genérico no eixo y
Δt	Variação do tempo
Δx	Variação no eixo x

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	MOTIVAÇÃO	15
1.2	OBJETIVO	17
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	17
1.4	MÉTODO DE HEUN	18
1.5	MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO	19
1.6	CIRCUITO II COM RESISTÊNCIA DE AMORTECIMENTO	21
1.7	MATRIZ DE MODELAGEM DA CASCATA	22
2	DESENVOLVIMENTO	24
2.1	DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO DO PRIMEIRO CIRCUITO II DA CASCATA	25
2.2	DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO DOS CIRCUITOS II INTERMEDIÁRIOS DA CASCATA	30
2.3	DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO DO ÚLTIMO CIRCUITO II DA CASCATA	35
3	CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	39
	REFERÊNCIAS	40

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta a modelagem matemática monofásica de uma linha de transmissão aproximada por meio de uma cascata de circuitos π com resistências de amortecimento em todas as unidades de circuitos, que é utilizada no estudo de fenômenos transitórios eletromagnéticos. Essa estrutura tem o objetivo de suavizar as oscilações numéricas presentes nos resultados das simulações de energização da linha.

Durante o trabalho, é discutida a representação matemática dessa cascata por meio de equações de estado. O desenvolvimento dessas equações de estado é o principal objetivo deste trabalho e resultará em relações diferenciais entre as correntes e tensões para cada unidade de circuito π da cascata. Ao final, são apresentadas algumas considerações e são discutidas sugestões para trabalhos futuros, como: desenvolver o método numérico e a rotina numérica, para testar o modelo e verificar se os resultados das simulações apresentam redução da influência de oscilações numéricas indesejáveis, que são geradas pelo método numérico de solução do modelo matemático e, também, se a estabilidade numérica do modelo quanto a quantidade de circuitos na cascata foi aumentada.

1.1 MOTIVAÇÃO

Linhas de transmissão são sistemas usados para transmitir energia eletromagnética entre localidades distantes. Essas linhas podem transmitir apenas energia elétrica, que apresenta baixa frequência, mas alta potência, ou servirem como canal de comunicação, onde podem trafegar dados, em alta frequência e baixa potência. De forma simplificada, podemos dizer que esta transmissão não é irradiada, mas sim, guiada de uma fonte geradora para uma carga consumidora através de fios trançados ou paralelos, cabos coaxiais ou um guia de onda. As linhas de transmissão não necessariamente são modeladas numericamente. É comum a construção de modelos físicos que podem variar desde simples circuitos elétricos a miniaturizações de linhas reais. Os modelos físicos e numéricos que são representados por meio de circuitos elétricos convertem os parâmetros distribuídos da linha em parâmetros concentrados de elementos. Entre os circuitos mais simples para modelagem de linhas de transmissão, há os circuitos π e T. Neste trabalho, todo o desenvolvimento é baseado na

modelagem monofásica utilizando uma cascata de circuitos π .

Em estudos simplificados de linhas de transmissão, não são consideradas perdas e o sistema é considerado em regime permanente, obtendo as equações telegráficas. Entretanto, levando em conta perdas e fenômenos transitórios, que fazem com que haja variações bruscas de frequência e amplitude em instantes aleatórios de tempo, não é possível considerar tais equações. Ou seja, para o estudo desses efeitos transitórios são necessários modelos digitais baseados em variáveis de estado (NELMS, 1989). Esses modelos digitais são necessários, pois é inviável realizar simulações em linhas de transmissão reais e em operação por limitações físicas e de segurança.

Por esse motivo, a análise numérica do problema é aprofundada, utilizando equações de estado para modelar numericamente a linha de transmissão (MACÍAS, 2005). Há necessidade de uma atenção especial com problemas numéricos que podem ser majorados em decorrência de aproximações envolvendo os parâmetros concentrados.

Para simular transitórios eletromagnéticos em redes elétricas, há os programas EMTP (*Electromagnetic Transient Programs*), os quais dois se destacam: um de licença livre chamado ATP (ATPDRAW, 1996) e outro comercial chamado *Microtran* (MICROTRAN, 1992). Eles são utilizados para que seja possível visualizar a propagação de ondas de tensão ao longo da linha de transmissão. Para isso, deve-se mostrar, em um dado instante de tempo, o valor da tensão em cada ponto da linha, sendo que, para que se tenha uma boa visualização do fenômeno, é necessária a utilização de uma grande quantidade de circuitos π . No entanto programas do tipo EMTP têm limitações em relação quantidade de circuitos π que podem ser inseridos, sendo que, para o caso de linhas longas, nem sempre é possível mostrar, com boa resolução a distribuição da tensão ao longo da linha de transmissão (MAMIS, 2003). Isso é devido ao fato de que programas do tipo EMTP têm uma quantidade limite de nós e de elementos que podem ser inseridos em um circuito a ser simulado.

Deste modo, dependendo do comprimento da linha a ser representada, a qualidade dos resultados obtidos a partir das simulações podem ficar comprometidos, por isso, uma alternativa é descrever as correntes e tensões na cascata de circuitos π por meio de variáveis de estado (MAMIS, 2003). As equações de estado são, então, transformadas em equações de diferenças e podem ser resolvidas utilizando qualquer linguagem computacional. Então, as equações de estado, que são as tensões e correntes ao longo da linha, poderão ser analisadas numericamente no ambiente *Matlab*, pois o software permite estender os limites impostos pelos programas do tipo EMTP.

Inicialmente, foi estudada a modelagem matemática monofásica de uma linha de transmissão baseada em circuitos π , que descrevem parâmetros longitudinais considerados constantes e independentes da frequência (DOMMEL, 1969). Considerando essa representação aproximada por meio de uma cascata de circuitos π , são observados erros durante as reflexões da onda de tensão que simula a energização da linha. Essas oscilações numéricas, também conhecidas como oscilações de Gibbs ocorrem por causa da aproximação do método de Heun empregado na integração numérica das equações de estado da cascata.

A fim de suavizar essas oscilações serão agrupados uma estrutura e um método numérico. Na estrutura clássica da cascata de circuitos π são adicionadas resistências de amortecimento em todos os circuitos (PAPADOPOULOS, 2015, PRADO, 2017). Para modelar esse circuito, é apresentado um método alternativo para construção das matrizes de modelagem, que atua principalmente reduzindo a ordem dessas matrizes, servindo para caracterizar separadamente cada circuito da cascata (PRADO, 2014).

1.2 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é desenvolver o equacionamento matemático das equações de estado para cada circuito da estrutura da cascata de circuitos π com resistências de amortecimento em todos os circuitos até o ponto em que seja possível empregá-las na construção da matriz de modelagem dessa estrutura, a fim de alcançar uma maior suavização das oscilações de Gibbs e aumentar o limite de estabilidade numérica do modelo quanto à quantidade de circuitos na cascata.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho é apresentado em três capítulos. O primeiro capítulo introduz os problemas enfrentados no estudo de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão, citando a impossibilidade de analisar uma linha real e a necessidade de desenvolver modelos físicos ou numéricos para realização de testes sistêmicos. São mostrados aspectos básicos das modelagens mais adotadas e são discutidas as vantagens em desenvolver um modelo a partir

das suas equações de estado. Este capítulo ainda apresenta a motivação para este trabalho, além do objetivo a ser alcançado.

O segundo capítulo apresenta o desenvolvimento das equações de estado da estrutura de cascata escolhida. São discutidos os diversos passos que são necessários para alcançar uma versão final mais reduzida das relações das grandezas elétricas de cada circuito da cascata. Nesse capítulo, é verificado que há diferenças entre as equações dos circuitos e que, por isso, podem ser divididos em três conjuntos de acordo com a posição deles ao longo da cascata.

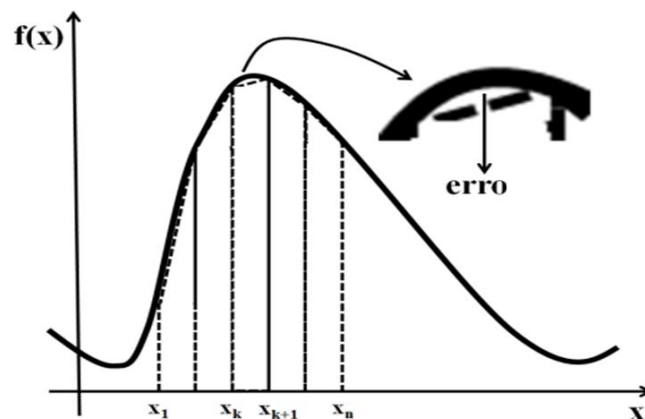
No terceiro e último capítulo apresentam-se algumas considerações finais, que sintetizam todo o conteúdo deste trabalho. São ainda feitas sugestões para trabalhos futuros, que consistem em desenvolver a rotina numérica do modelo discutido para a utilização no estudo de transitórios eletromagnéticos.

1.4 MÉTODO DE HEUN

O método de Heun ou integração trapezoidal é um método numérico que transforma equações diferenciais em equações algébricas equivalentes. O valor da integral nesse método é baseado na área definida pela curva $f(x)$ no intervalo de x_k a x_{k+1} , que é aproximado pela área de uma função trapezoidal, como ilustra a figura 1. Aplicando a regra trapezoidal, é obtido:

$$\int_{x^{(k)}}^{x^{(k+1)}} f(x) dx = \frac{\Delta x}{2} [f(x_{k+1}) + f(x_k)] \quad (1)$$

Figura 1 – Integração numérica pela forma trapezoidal (método de Heun)



Fonte: Autor.

Se o ponto y_k no eixo vertical corresponde a $f(x_k)$ e y_{k+1} corresponde a $f(x_{k+1})$, a regra trapezoidal resulta em:

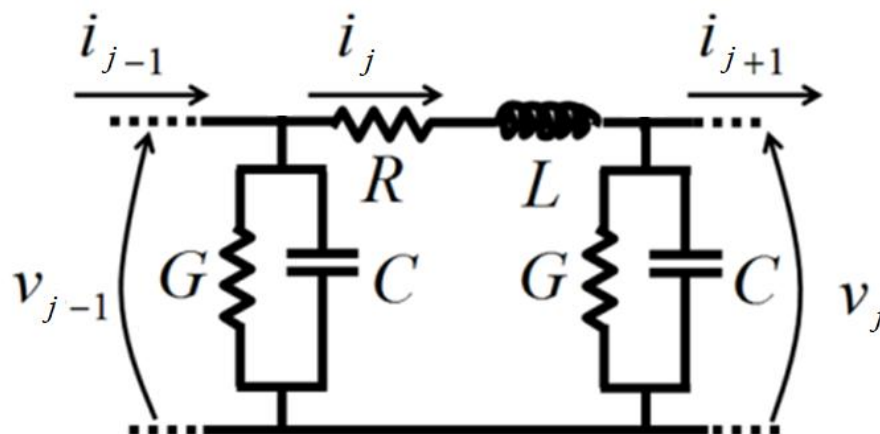
$$y_{k+1} = y_k + \int_{x(k)}^{x(k+1)} f(x)dx = y_k + \frac{\Delta x}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \quad (2)$$

Sendo, $\Delta x = x_{k+1} - x_k$

1.5 MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO

Uma das aplicações de equações diferenciais é relacionada a linhas de transmissão. Elas podem ser resolvidas por métodos numéricos, se o processo analítico não for possível. Analisando a propagação de ondas através de uma linha de transmissão, este sistema pode ser decomposto em partes infinitesimais representadas por circuitos π . Isto torna possível o monitoramento de como as grandezas elétricas (corrente e tensão) variam no tempo e no espaço. Na figura 2, a j -ésima unidade é representada:

Figura 2 – Unidade de circuito π



Fonte: Autor.

Com base na figura 2, as relações para o circuito são:

$$\frac{di_j}{dt} = \frac{1}{L} (v_{j-1} - R \cdot i_j - v_j) \quad \frac{dv_j}{dt} = \frac{1}{C} (i_j - G \cdot v_j - i_{j+1}) \quad (3)$$

De acordo com (3), as variáveis elétricas da unidade j depende da tensão do circuito π anterior e da corrente do próximo circuito π . Para uma linha de transmissão, é obtido o seguinte sistema linear, composto por $2n$ variáveis de estado, onde n é o número de circuitos π :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad x_{2n} = [i_1 \quad v_1 \quad i_2 v_2 \quad \cdots \quad i_n \quad v_n]^T \quad (4)$$

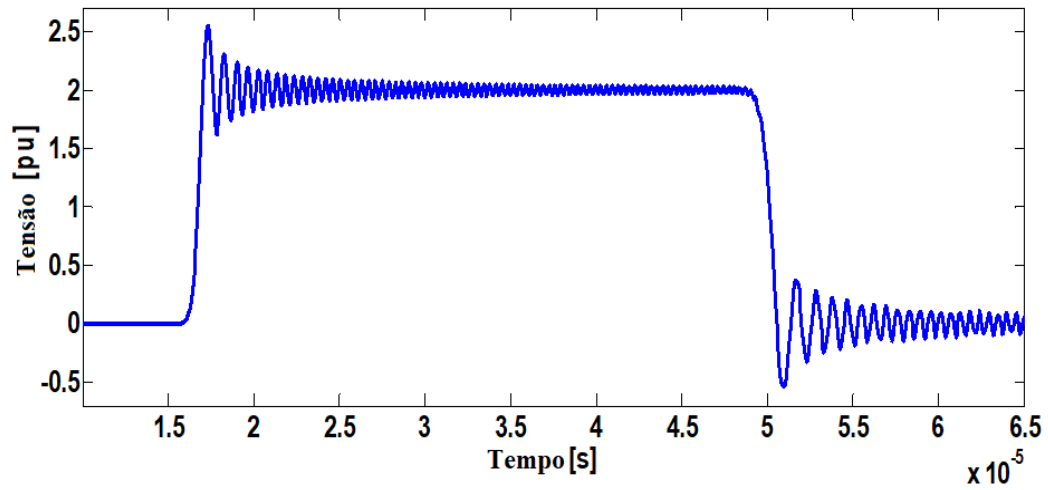
Em (4), x é o vetor de variáveis de estado, u é vetor de entrada de fontes independentes de corrente e de tensão, A e B são matrizes do sistema. A solução de (4) pode ser obtida usando a metodologia de Heun ou conhecida também como regra trapezoidal. É um procedimento numérico amplamente aplicado na resolução de equações e sistemas diferenciais.

Descrita como regra trapezoidal de integração para parâmetros discretos, essa metodologia consiste em uma forma aperfeiçoada do método da tangente ou mais conhecido como método de Euler e é geralmente aplicado às equações diferenciais de difícil resolução analítica.

Quando uma cascata é construída apenas com circuitos semelhantes ao mostrado pela figura 2, os resultados para a simulação da energização do modelo apresentam oscilações numéricas com erro aproximado de 25%. Aumentar a quantidade de circuitos da cascata não resulta em alterações significativas para reduzir esse erro, principalmente, por causa da saturação da matriz de modelagem que depende da variável n .

Na figura 3, é apresentado o gráfico da onda de tensão gerada pela energização do modelo medida no final de uma cascata de 200 circuitos π . Idealmente, o pulso mostrado, que representa a reflexão da onda de tensão no final da linha, é quadrado e com amplitude de 2 [pu]. Mas são observadas as oscilações de Gibbs com erro de 25%, pois atingem amplitudes de até 2.5 [pu] e ocorrem logo após as discontinuidades das transições de estado. Ao longo da reflexão, as oscilações são amortecidas pelo método numérico. Entretanto, conforme o tempo de simulação aumenta, os erros alcançam valores cada vez mais degradantes, caracterizando uma instabilidade numérica. Porém, para os fins deste trabalho e do estudo de transitórios eletromagnéticos a região de interesse compreende apenas a primeira reflexão da onda de tensão.

Figura 3 – Onda de tensão para cascata de circuitos π clássicos

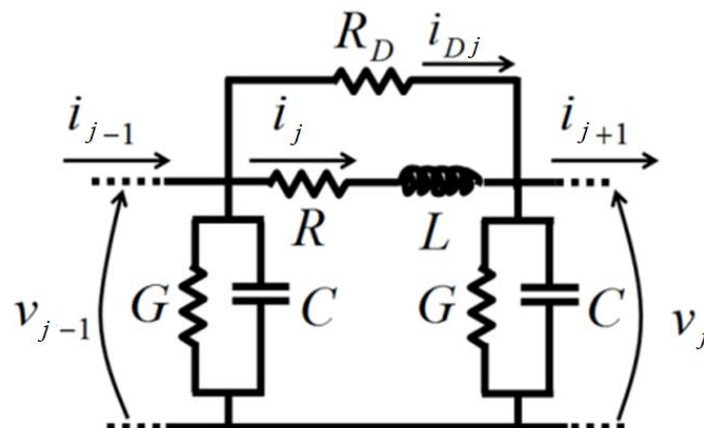


Fonte: Autor.

1.6 CIRCUITO π COM RESISTÊNCIA DE AMORTECIMENTO

A resistência de amortecimento R_D é introduzida no circuito π clássico em paralelo com a resistência R e a indutância L como mostrado na figura 4 (PAPADOPOULOS, 2015, PRADO, 2017).

Figura 4 – Unidade de circuito π com resistência de amortecimento



Fonte: Autor.

O valor dessa resistência é proporcional à indutância do circuito π e inversamente proporcional ao passo de tempo do método numérico de integração. Nesse caso, k_D é um valor

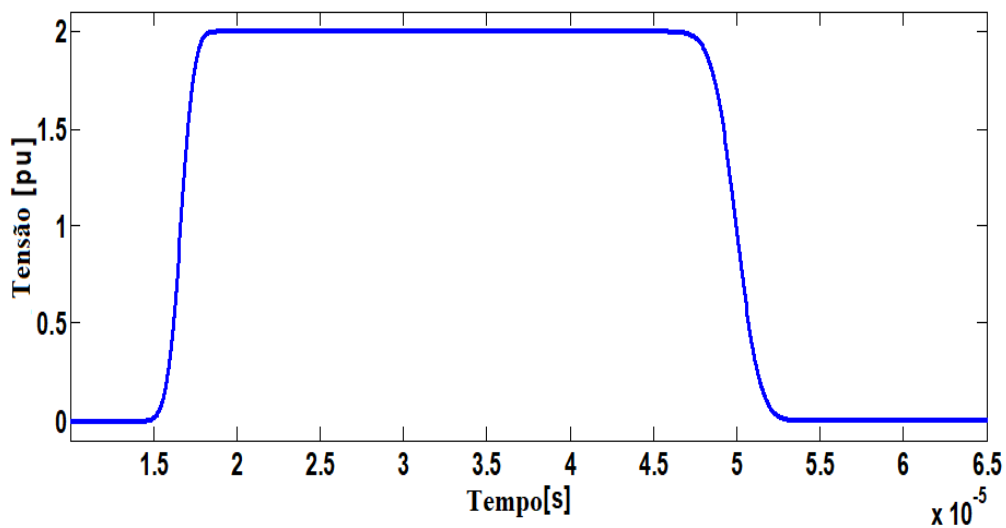
inteiro:

$$R_D = k_D \frac{2L}{\Delta t} \quad \leftrightarrow \quad G_D = \frac{1}{R_D} \quad (5)$$

Utilizando o circuito ilustrado pela figura 4 para construir uma cascata que modele uma linha de transmissão, é possível obter resultados muito satisfatórios quanto à redução das oscilações de Gibbs.

A figura 5, de forma semelhante à figura 3, mostra o gráfico da onda de tensão da energização de uma cascata de 200 circuitos π , agora com resistências de amortecimento em todos os circuitos. É observável a drástica redução do erro causado pelas oscilações numéricas para praticamente zero. Essa redução pode ser explicada pela visível suavização das transições de estado. Entretanto, o caso apresentado é para uma situação extrema, em que o fator $k_D=1$, o menor possível e que mais distorce o formato da onda.

Figura 5 – Onda de tensão para cascata de circuitos π com resistência de amortecimento



Fonte: Autor.

1.7 MATRIZ DE MODELAGEM DA CASCATA

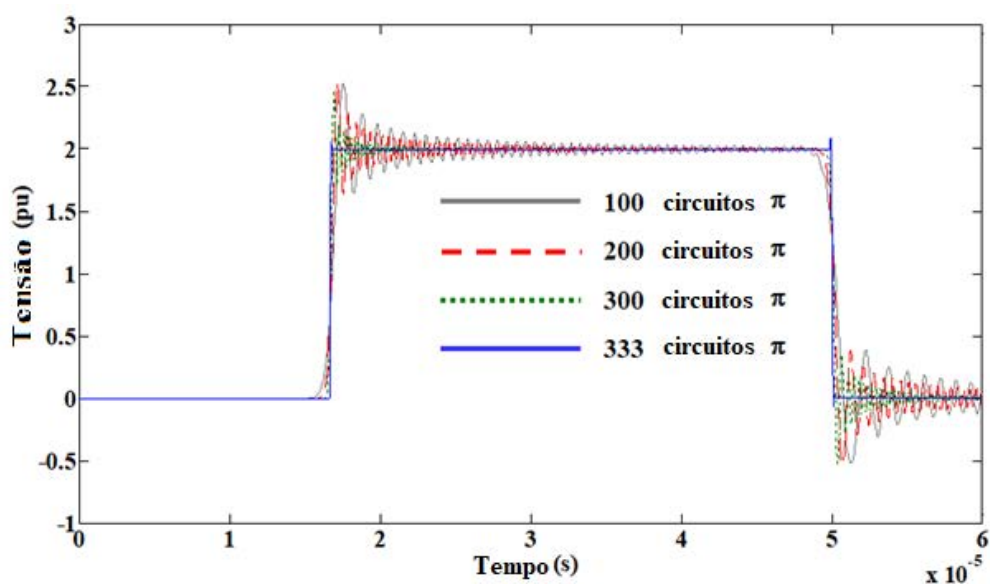
A matriz de modelagem é quadrada, representa os circuitos da cascata e é composta por termos que estão relacionados diretamente com as grandezas elétricas desses circuitos.

Normalmente, essa matriz é construída para representar toda a cascata de uma única vez, por esse motivo, possui ordem equivalente ao dobro da quantidade de circuitos ($2n$). A utilização dessa matriz na construção do modelo numérico que é usado no estudo de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão atinge a saturação também com a quantidade de circuitos (n), impossibilitando a representação de linhas maiores e limitando os testes para redução das oscilações numéricas.

Uma solução encontrada é reduzir a ordem da matriz de modelagem para 2, empregando n matrizes reduzidas para representar cada circuito da cascata separadamente (PRADO, 2014). Para que isso seja possível, é necessário desenvolver as equações de estado do modelo para cada circuito e empregar métodos numéricos capazes de eliminar quaisquer dependências das grandezas elétricas do circuito em análise em relação aos circuitos anteriores e posteriores.

Na figura 6, é ilustrado o gráfico da onda de tensão para quatro quantidades de circuitos π sem resistência de amortecimento na cascata. É observável que para 333 circuitos π , há a redução do erro das oscilações numéricas de 25% para, aproximadamente, 2.5%. Essa redução é possível graças ao emprego de matrizes de modelagem reduzidas. Entretanto, esta quantidade de circuitos representa o limite de estabilidade numérica desse modelo quando são utilizados os valores específicos da linha de transmissão estudada.

Figura 6 – Onda de tensão para cascata de circuitos π clássicos com matriz de modelagem reduzida



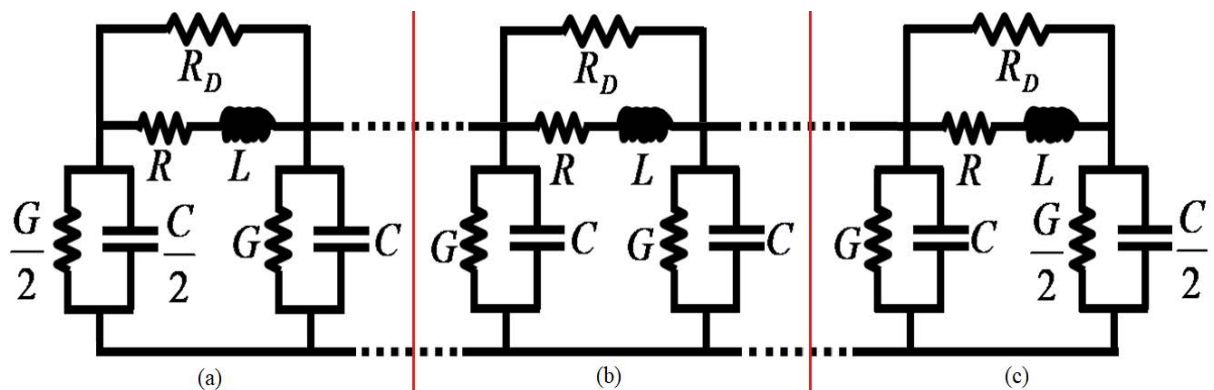
Fonte: PRADO, 2014.

2 DESENVOLVIMENTO

A estrutura que apresenta maior suavização das oscilações de Gibbs é aquela em que há resistências de amortecimento em todas as unidades de circuitos π da cascata (JUS, 2017, SANTOS, 2017). Por esse motivo, foi considerado o desenvolvimento de uma nova rotina numérica para este modelo, que inclui substituir a utilização das matrizes de ordem $2n$ por n matrizes de ordem 2, pois esse tipo de alteração também mostrou ser capaz de reduzir as oscilações numéricas, quando foi empregada no modelo em que não havia resistências de amortecimento (PRADO, 2014).

A combinação desses dois métodos deverá possibilitar a aquisição de resultados com oscilações numéricas insignificantes enquanto mantém a estabilidade numérica para quantidades maiores de circuitos na cascata. Para que essa combinação seja possível, é necessário desenvolver as equações de estado do modelo. São utilizadas as leis de Kirchhoff da tensão e da corrente para adquirir as equações diferenciais que relacionam essas duas grandezas para cada unidade de circuito π com resistência de amortecimento. Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi verificado que há dois casos particulares entre os circuitos, em que as equações se diferenciam da maioria por causa do posicionamento desses circuitos ao longo da cascata. Por esse motivo, os circuitos podem ser separados em três conjuntos como mostra a figura 7, que foram denominados como: o primeiro, que recebe a energização, os intermediários, por onde trafegam as ondas viajantes e o último circuito, que finaliza a cascata e serve como terminal para as medições.

Figura 7 – Cascata de circuitos π com resistência de amortecimento: (a) primeiro circuito, (b) circuitos intermediários e (c) último circuito

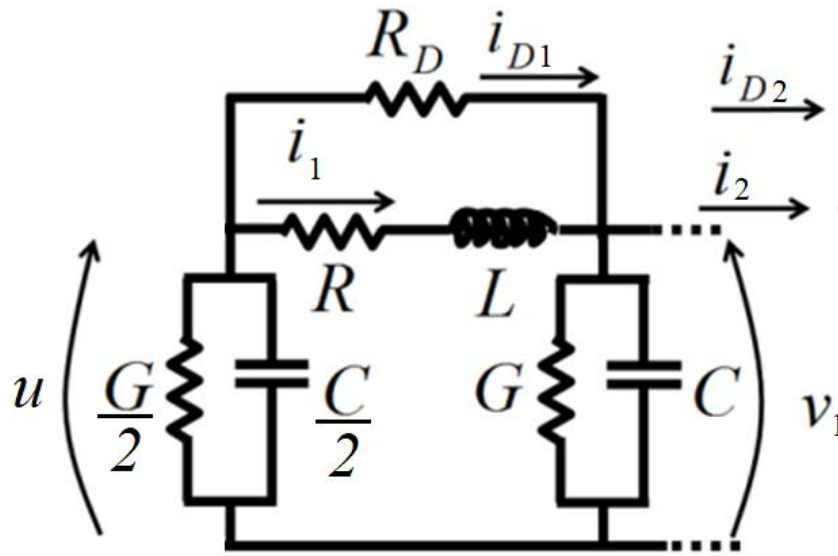


Fonte: Autor.

2.1 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO DO PRIMEIRO CIRCUITO II DA CASCATA

O primeiro circuito π da cascata é ilustrado na figura 8 com as correspondentes variáveis que foram consideradas para o desenvolvimento das equações de estado.

Figura 8 – Primeira unidade de circuito π da cascata



Fonte: Autor.

Utilizando a lei de Kirchhoff das tensões para a malha principal do primeiro circuito (figura 8) tem-se:

$$u - v_R - v_L - v_1 = 0$$

$$u - R \cdot i_1 - L \cdot \frac{di_1}{dt} - v_1 = 0$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L} \cdot u - \frac{R}{L} \cdot i_1 - \frac{1}{L} \cdot v_1 \quad (6)$$

Agora, utilizando a lei de Kirchhoff para o nó que interliga as duas primeiras unidades de circuito, é obtido:

$$i_1 + i_{D1} - i_G - i_C - i_2 - i_{D2} = 0$$

$$i_1 + G_D \cdot R \cdot i_1 + G_D \cdot L \cdot \frac{di_1}{dt} - G \cdot v_1 - C \cdot \frac{dv_1}{dt} - i_2 - G_D \cdot R \cdot i_2 - G_D \cdot L \cdot \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (7)$$

Substituindo (6) em (7) para a primeira e a segunda unidade:

$$i_1 + G_D \cdot R \cdot i_1 + G_D \cdot L \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot u - \frac{R}{L} \cdot i_1 - \frac{1}{L} \cdot v_1 \right] - G \cdot v_1 - C \cdot \frac{dv_1}{dt} - i_2 + \\ - G_D \cdot R \cdot i_2 - G_D \cdot L \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot v_1 - \frac{R}{L} \cdot i_2 - \frac{1}{L} \cdot v_2 \right] = 0$$

$$i_1 + G_D \cdot R \cdot i_1 + G_D \cdot [u - R \cdot i_1 - v_1] - G \cdot v_1 - C \cdot \frac{dv_1}{dt} - i_2 + \\ - G_D \cdot R \cdot i_2 - G_D \cdot [v_1 - R \cdot i_2 - v_2] = 0$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_1 + \frac{G_D}{C} \cdot u - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_1 - \frac{1}{C} \cdot i_2 + \frac{G_D}{C} \cdot v_2 \quad (8)$$

O próximo passo implica em utilizar um método de integração numérica. Como descrito anteriormente, a integração trapezoidal para a corrente pode ser aproximada por:

$$i_1(k+1) = i_1(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{di_1(k+1)}{dt} + \frac{di_1(k)}{dt} \right] \quad (9)$$

Substituindo (6) em (9):

$$i_1(k+1) = i_1(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{L} \cdot u(k+1) - \frac{R}{L} \cdot i_1(k+1) + \right. \\ \left. - \frac{1}{L} \cdot v_1(k+1) + \frac{1}{L} \cdot u(k) - \frac{R}{L} \cdot i_1(k) - \frac{1}{L} \cdot v_1(k) \right]$$

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{R \cdot \Delta t}{2 \cdot L}\right] \cdot i_1(k+1) = & \left[1 - \frac{R \cdot \Delta t}{2 \cdot L}\right] \cdot i_1(k) - \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_1(k+1) + \\ & - \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_1(k) + \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot u(k+1) + \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot u(k) \end{aligned} \quad (10)$$

O mesmo processo de integração numérica pode ser adaptado para a tensão, resultando em:

$$v_1(k+1) = v_1(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{dv_1(k+1)}{dt} + \frac{dv_1(k)}{dt} \right] \quad (11)$$

Substituindo (8) em (11):

$$\begin{aligned} v_1(k+1) = v_1(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{C} \cdot i_1(k+1) + \frac{G_D}{C} \cdot u(k+1) + \right. \\ \left. - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_1(k+1) - \frac{1}{C} \cdot i_2(k+1) + \frac{G_D}{C} \cdot v_2(k+1) + \frac{1}{C} \cdot i_1(k) + \right. \\ \left. + \frac{G_D}{C} \cdot u(k) - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_1(k) - \frac{1}{C} \cdot i_2(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_2(k) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

É observado um termo desconhecido $i_2(k+1)$, uma vez que ele se refere à corrente do segundo circuito da cascata durante o próximo passo de simulação e ele não existirá até o momento da atualização de valores no próximo instante de tempo. Por esse motivo, é necessário substituí-lo por termos que existem no instante de tempo em análise. Para isso, foi utilizada uma aproximação do método de Euler de integração, que iguala um termo discreto com outro contínuo resultando em:

$$i_2(k+1) = i_2(k) + \Delta t \cdot \frac{di_2(k)}{dt} \quad (13)$$

Substituindo (6) em (13):

$$i_2(k+1) = i_2(k) + \Delta t \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot v_1(k) - \frac{R}{L} \cdot i_2(k) - \frac{1}{L} \cdot v_2(k) \right]$$

$$i_2(k+1) = \left[1 - \frac{R \cdot \Delta t}{L}\right] \cdot i_2(k) + \frac{\Delta t}{L} \cdot v_1(k) - \frac{\Delta t}{L} \cdot v_2(k) \quad (14)$$

Substituindo (14) em (12):

$$\begin{aligned} v_1(k+1) = & v_1(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{C} \cdot i_1(k+1) + \frac{G_D}{C} \cdot u(k+1) + \right. \\ & - \frac{(G+2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_1(k+1) - \frac{1}{C} \cdot \left[1 - \frac{R \cdot \Delta t}{L}\right] \cdot i_2(k) - \frac{\Delta t}{C \cdot L} \cdot v_1(k) + \\ & + \frac{\Delta t}{C \cdot L} \cdot v_2(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_2(k+1) + \frac{1}{C} \cdot i_1(k) + \frac{G_D}{C} \cdot u(k) + \\ & \left. - \frac{(G+2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_1(k) - \frac{1}{C} \cdot i_2(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_2(k) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Observa-se um termo desconhecido $v_2(k+1)$ que, semelhante ao descrito anteriormente, faz referência ao valor de tensão do segundo circuito da cascata no próximo instante de tempo. Para substituí-lo foi utilizada a mesma aproximação do método de Euler, mas agora para tensões:

$$v_2(k+1) = v_2(k) + \Delta t \cdot \frac{dv_2(k)}{dt} \quad (16)$$

Substituindo (8) em (16):

$$\begin{aligned} v_2(k+1) = & v_2(k) + \\ & + \Delta t \cdot \left[\frac{1}{C} \cdot i_2(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_1(k) - \frac{(G+2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_2(k) - \frac{1}{C} \cdot i_3(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_3(k) \right] \\ v_2(k+1) = & \left[1 - \frac{(G+2 \cdot G_D) \cdot \Delta t}{C} \right] \cdot v_2(k) + \\ & + \frac{\Delta t}{C} \cdot i_2(k) + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} \cdot v_1(k) - \frac{\Delta t}{C} \cdot i_3(k) + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} \cdot v_3(k) \end{aligned} \quad (17)$$

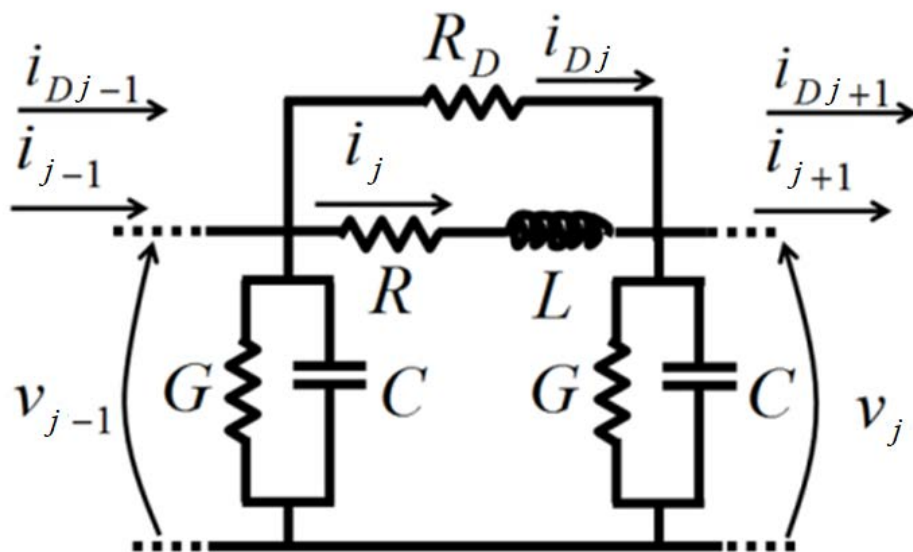
Substituindo (17) em (15) é encontrada a expressão que poderá ser empregada na construção da matriz de modelagem do primeiro circuito π da cascata em conjunto com a igualdade (10):

$$\begin{aligned}
v_1(k+1) &= v_1(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{C} \cdot i_1(k+1) + \frac{G_D}{C} \cdot u(k+1) + \right. \\
&\quad - \frac{(G+2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_1(k+1) - \frac{1}{C} \cdot \left[1 - \frac{R \cdot \Delta t}{L} \right] \cdot i_2(k) - \frac{\Delta t}{C \cdot L} \cdot v_1(k) + \\
&\quad \left. + \frac{\Delta t}{C \cdot L} \cdot v_2(k) + \frac{G_D}{C} \cdot \left[1 - \frac{(G+2 \cdot G_D) \cdot \Delta t}{C} \right] \cdot v_2(k) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C^2} \cdot i_2(k) + \frac{G_D^2 \cdot \Delta t}{C^2} \cdot v_1(k) - \frac{G_D \cdot \Delta t}{C^2} \cdot i_3(k) + \frac{G_D^2 \cdot \Delta t}{C^2} \cdot v_3(k) + \frac{1}{C} \cdot i_1(k) \right. \\
&\quad \left. + \frac{G_D}{C} \cdot u(k) - \frac{(G+2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_1(k) - \frac{1}{C} \cdot i_2(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_2(k) \right] \\
\left[1 + \frac{G \cdot \Delta t}{2 \cdot C} + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} \right] \cdot v_1(k+1) &= \\
&= \left[1 - \frac{\Delta t^2}{2 \cdot L \cdot C} + \frac{G_D^2 \cdot \Delta t^2}{2 \cdot C^2} - \frac{G \cdot \Delta t}{2 \cdot C} - \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} \right] \cdot v_1(k) + \\
+ \frac{\Delta t}{2 \cdot C} \cdot i_1(k+1) + \frac{\Delta t}{2 \cdot C} \cdot i_1(k) + \frac{G_D \cdot \Delta t}{2 \cdot C} \cdot u(k+1) + \frac{G_D \cdot \Delta t}{2 \cdot C} \cdot u(k) + & \\
+ \frac{\Delta t}{2 \cdot C} \left(G_D \cdot \left[2 - \frac{(G+2 \cdot G_D) \cdot \Delta t}{C} \right] + \frac{\Delta t}{L} \right) \cdot v_2(k) + & \\
+ \frac{\Delta t}{2 \cdot C} \left[\frac{R \cdot \Delta t}{L} + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} - 2 \right] \cdot i_2(k) + \frac{G_D^2 \cdot \Delta t^2}{2 \cdot C^2} \cdot v_3(k) - \frac{G_D \cdot \Delta t^2}{2 \cdot C^2} \cdot i_3(k) &
\end{aligned} \tag{18}$$

2.2 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO DOS CIRCUITOS π INTERMEDIÁRIOS DA CASCATA

Os circuitos π intermediários da cascata são ilustrados na figura 9 com as correspondentes variáveis generalizadas que foram consideradas para o desenvolvimento das equações de estado.

Figura 9 – Unidade intermediária de circuito π da cascata



Fonte: Autor.

Aplicar a lei de Kirchhoff das tensões para a malha principal em um circuito intermediário da cascata (figura 9) resulta em:

$$v_{j-1} - R \cdot i_j - L \cdot \frac{di_j}{dt} - v_j = 0$$

$$\frac{di_j}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_{j-1} - \frac{R}{L} \cdot i_j - \frac{1}{L} \cdot v_j \quad (19)$$

Utilizando a lei de Kirchhoff para o nó que interliga esta unidade j de circuito com a próxima ($j+1$), é obtido:

$$\begin{aligned}
i_j + i_{Dj} - i_G - i_C - i_{j+1} - i_{Dj+1} &= 0 \\
i_j + G_D \cdot R \cdot i_j + G_D \cdot L \cdot \frac{di_j}{dt} - G \cdot v_j - C \cdot \frac{dv_j}{dt} - i_{j+1} + \\
-G_D \cdot R \cdot i_{j+1} - G_D \cdot L \cdot \frac{di_{j+1}}{dt} &= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Substituindo (19) em (20) para a unidade atual e a próxima:

$$\begin{aligned}
i_j + G_D \cdot R \cdot i_j + G_D \cdot L \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot v_{j-1} - \frac{R}{L} \cdot i_j - \frac{1}{L} \cdot v_j \right] - G \cdot v_j - C \cdot \frac{dv_j}{dt} - i_{j+1} + \\
-G_D \cdot R \cdot i_{j+1} - G_D \cdot L \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot v_j - \frac{R}{L} \cdot i_{j+1} - \frac{1}{L} \cdot v_{j+1} \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_j + G_D \cdot R \cdot i_j + G_D \cdot [v_{j-1} - R \cdot i_j - v_j] - G \cdot v_j - C \cdot \frac{dv_j}{dt} - i_{j+1} + \\
-G_D \cdot R \cdot i_{j+1} - G_D \cdot [v_j - R \cdot i_{j+1} - v_{j+1}] = 0
\end{aligned}$$

$$i_j + G_D \cdot [v_{j-1} - v_j] - G \cdot v_j - C \cdot \frac{dv_j}{dt} - i_{j+1} - G_D \cdot [v_j - v_{j+1}] = 0$$

$$\frac{dv_j}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_j + \frac{G_D}{C} \cdot (v_{j-1} + v_{j+1}) - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_j - \frac{1}{C} \cdot i_{j+1} \tag{21}$$

No próximo passo, é aplicado o método de integração numérica baseado na aproximação do método de Heun. Substituindo (9) em (19):

$$\begin{aligned}
i_j(k+1) = i_j(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{L} \cdot v_{j-1}(k+1) - \frac{R}{L} \cdot i_j(k+1) + \right. \\
\left. - \frac{1}{L} \cdot v_j(k+1) + \frac{1}{L} \cdot v_{j-1}(k) - \frac{R}{L} \cdot i_j(k) - \frac{1}{L} \cdot v_j(k) \right]
\end{aligned} \tag{22}$$

Observa-se um termo desconhecido $v_{j-1}(k)$, pois se trata de um valor de tensão de um circuito anterior ($j-1$) no atual instante de tempo e esse valor já não é mais conhecido. Para eliminar esse termo, foi necessário aproximar (19) de forma semelhante à aproximação de Euler discutida anteriormente, igualando um termo discreto com outro contínuo, resultando:

$$\Delta i_j(k) = \frac{\Delta t}{L} \cdot v_{j-1}(k) - \frac{R \cdot \Delta t}{L} \cdot i_j(k) - \frac{\Delta t}{L} \cdot v_j(k)$$

$$v_{j-1}(k) = R \cdot i_j(k) + v_j(k) + \frac{L}{\Delta t} \cdot \Delta i_j(k) \quad (23)$$

Sabe-se que Δt é positivo, portanto a variação de corrente pode ser reescrita por:

$$\Delta i_j(k) = i_j(k+1) - i_j(k) \quad (24)$$

Substituindo (24) em (23), é obtida uma relação válida para o termo desconhecido, já que o iguala a termos que são conhecidos para o atual instante de tempo:

$$v_{j-1}(k) = R \cdot i_j(k) + v_j(k) + \frac{L}{\Delta t} \cdot i_j(k+1) - \frac{L}{\Delta t} \cdot i_j(k) \quad (25)$$

Substituindo (25) em (22) e simplificando:

$$\begin{aligned} i_j(k+1) &= i_j(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{L} \cdot v_{j-1}(k+1) - \frac{R}{L} \cdot i_j(k+1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{L} \cdot \left[R \cdot i_j(k) + v_j(k) + \frac{L}{\Delta t} \cdot i_j(k+1) - \frac{L}{\Delta t} \cdot i_j(k) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{L} \cdot v_j(k+1) - \frac{R}{L} \cdot i_j(k) - \frac{1}{L} \cdot v_j(k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_j(k+1) &= i_j(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{L} \cdot v_{j-1}(k+1) - \frac{R}{L} \cdot i_j(k+1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta t} \cdot i_j(k+1) - \frac{1}{\Delta t} \cdot i_j(k) - \frac{1}{L} \cdot v_j(k+1) \right] \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{R \cdot \Delta t}{2 \cdot L} \right] \cdot i_j(k+1) = \frac{1}{2} \cdot i_j(k) + \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_{j-1}(k+1) - \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_j(k+1) \quad (26)$$

Utilizando o método aproximado de integração trapezoidal para as tensões e aplicando (11) em (21) é obtido:

$$\begin{aligned} v_j(k+1) = & v_j(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{C} \cdot i_j(k+1) + \frac{G_D}{C} \cdot v_{j-1}(k+1) + \right. \\ & + \frac{G_D}{C} \cdot v_{j+1}(k+1) - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_j(k+1) - \frac{1}{C} \cdot i_{j+1}(k+1) + \\ & \left. + \frac{1}{C} \cdot i_j(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_{j-1}(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_{j+1}(k) - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_j(k) - \frac{1}{C} \cdot i_{j+1}(k) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Nessa última equação são observados ao todo três elementos desconhecidos: $v_{j+1}(k+1)$, $i_{j+1}(k+1)$ e $v_{j-1}(k)$. A tensão da próxima unidade de circuito ($j+1$) pode ser aproximada por:

$$v_{j+1}(k+1) = v_{j+1}(k) + \Delta v_{j+1}(k) \quad (28)$$

E assumindo:

$$\Delta v_{j+1}(k) = \frac{dv_{j+1}(k)}{dt} \cdot \Delta t \quad (29)$$

Substituindo (21) em (29):

$$\Delta v_{j+1}(k) = \frac{\Delta t}{C} \cdot i_{j+1} + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} \cdot (v_j + v_{j+2}) - \frac{(G + 2 \cdot G_D) \cdot \Delta t}{C} \cdot v_{j+1} - \frac{\Delta t}{C} \cdot i_{j+2} \quad (30)$$

E, substituindo (30) em (28), é encontrada a expressão que substituirá esse termo:

$$\begin{aligned}
v_{j+1}(k+1) = & v_{j+1}(k) + \frac{\Delta t}{C} \cdot i_{j+1} + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} \cdot (v_j + v_{j+2}) + \\
& - \frac{(G + 2 \cdot G_D) \cdot \Delta t}{C} \cdot v_{j+1} - \frac{\Delta t}{C} \cdot i_{j+2}
\end{aligned} \tag{31}$$

Para o termo desconhecido da corrente na próxima unidade de circuito ($j+1$), foi adotado:

$$i_{j+1}(k+1) = i_{j+1}(k) + \frac{di_{j+1}(k)}{dt} \cdot \Delta t \tag{32}$$

Substituindo (19) em (32):

$$\begin{aligned}
i_{j+1}(k+1) = & i_{j+1}(k) + \frac{\Delta t}{L} \cdot v_j(k) - \frac{R \cdot \Delta t}{L} \cdot i_{j+1}(k) - \frac{\Delta t}{L} \cdot v_{j+1}(k) \\
i_{j+1}(k+1) = & \left[1 - \frac{R \cdot \Delta t}{L} \right] \cdot i_{j+1}(k) + \frac{\Delta t}{L} \cdot v_j(k) - \frac{\Delta t}{L} \cdot v_{j+1}(k)
\end{aligned} \tag{33}$$

A igualdade para o termo da tensão na unidade anterior ($j-1$) já foi obtida em (25). Então, substituindo (25), (31) e (33) em (27) é encontrado:

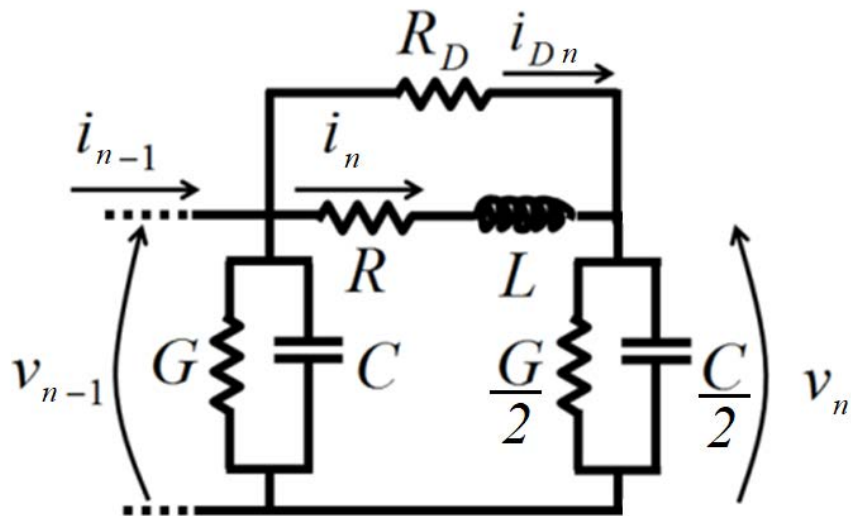
$$\begin{aligned}
v_j(k+1) = & v_j(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{C} \cdot i_j(k+1) + \frac{G_D}{C} \cdot v_{j-1}(k+1) + \right. \\
& + \frac{G_D}{C} \cdot v_{j+1}(k) + \frac{\Delta t \cdot G_D}{C^2} \cdot i_{j+1} + \frac{G_D^2 \cdot \Delta t}{C^2} \cdot (v_j + v_{j+2}) + \\
& - \frac{(G + 2 \cdot G_D) \cdot \Delta t \cdot G_D}{C^2} \cdot v_{j+1} - \frac{\Delta t \cdot G_D}{C^2} \cdot i_{j+2} - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_j(k+1) + \\
& - \frac{1}{C} \cdot \left[1 - \frac{R \cdot \Delta t}{L} \right] \cdot i_{j+1}(k) - \frac{\Delta t}{L \cdot C} \cdot v_j(k) + \frac{\Delta t}{L \cdot C} \cdot v_{j+1}(k) + \\
& + \frac{1}{C} \cdot i_j(k) + \frac{R \cdot G_D}{C} \cdot i_j(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_j(k) + \frac{L \cdot G_D}{\Delta t \cdot C} \cdot i_j(k+1) + \\
& \left. - \frac{L \cdot G_D}{\Delta t \cdot C} \cdot i_j(k) + \frac{G_D}{C} \cdot v_{j+1}(k) - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_j(k) - \frac{1}{C} \cdot i_{j+1}(k) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \frac{G \cdot \Delta t}{2 \cdot C} + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} \right] \cdot v_j(k+1) = \\
& = \left[1 + \frac{G_D^2 \cdot \Delta t^2}{2 \cdot C^2} - \frac{\Delta t^2}{2 \cdot L \cdot C} - \frac{G \cdot \Delta t}{2 \cdot C} - \frac{G_D \cdot \Delta t}{2 \cdot C} \right] \cdot v_j(k) + \\
& + \left[\frac{\Delta t}{2 \cdot C} + \frac{G_D \cdot L}{2 \cdot C} \right] \cdot i_j(k+1) + \frac{\Delta t}{2 \cdot C} \left\{ 1 + G_D \cdot \left[R - \frac{L}{\Delta t} \right] \right\} \cdot i_j(k) + \\
& + \frac{G_D \cdot \Delta t}{2 \cdot C} \cdot v_{j-1}(k+1) + \frac{\Delta t}{2 \cdot C} \left\{ G_D \cdot \left[2 - \frac{(G + 2 \cdot G_D) \cdot \Delta t}{C} \right] + \frac{\Delta t}{L} \right\} \cdot v_{j+1}(k) + \\
& + \frac{\Delta t}{2 \cdot C} \left[\frac{R \cdot \Delta t}{L} + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} - 2 \right] \cdot i_{j+1}(k) + \frac{G_D^2 \cdot \Delta t^2}{2 \cdot C^2} \cdot v_{j+2}(k) - \frac{G_D \cdot \Delta t^2}{2 \cdot C^2} \cdot i_{j+2}(k)
\end{aligned} \tag{34}$$

2.3 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO DO ÚLTIMO CIRCUITO II DA CASCATA

A última unidade de circuito π da cascata é ilustrada na figura 10 com as correspondentes variáveis que foram consideradas para o desenvolvimento das equações de estado.

Figura 10 – Última unidade de circuito π da cascata



Fonte: Autor.

Utilizando a lei de Kirchhoff das tensões para a malha principal do último circuito (figura 10) tem-se:

$$v_{n-1} - R \cdot i_n - L \cdot \frac{di_n}{dt} - v_n = 0$$

$$\frac{di_n}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_{n-1} - \frac{R}{L} \cdot i_n - \frac{1}{L} \cdot v_n \quad (35)$$

Quando é aplicada a lei de Kirchhoff para o último nó do circuito, é obtido:

$$i_n + i_{Dn} - i_G - i_C = 0$$

$$i_n + G_D \cdot R \cdot i_n + G_D \cdot L \cdot \frac{di_n}{dt} - \frac{G}{2} \cdot v_n - \frac{C}{2} \cdot \frac{dv_n}{dt} = 0 \quad (36)$$

Substituindo (35) em (36) para o último circuito:

$$i_n + G_D \cdot R \cdot i_n + G_D \cdot L \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot v_{n-1} - \frac{R}{L} \cdot i_n - \frac{1}{L} \cdot v_n \right] - \frac{G}{2} \cdot v_n - \frac{C}{2} \cdot \frac{dv_n}{dt} = 0$$

$$i_n + G_D \cdot v_{n-1} - G_D \cdot v_n - \frac{G}{2} \cdot v_n - \frac{C}{2} \cdot \frac{dv_n}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{2}{C} \cdot i_n + \frac{2 \cdot G_D}{C} \cdot v_{n-1} - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_n \quad (37)$$

O próximo passo implica em utilizar o método de integração numérica. Como descrito anteriormente, a integração trapezoidal para a corrente pode ser aproximada por (9) e aplicada em (35):

$$\begin{aligned}
i_n(k+1) = i_n(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{L} \cdot v_{n-1}(k+1) - \frac{R}{L} \cdot i_n(k+1) + \right. \\
\left. - \frac{1}{L} \cdot v_n(k+1) + \frac{1}{L} \cdot v_{n-1}(k) - \frac{R}{L} \cdot i_n(k) - \frac{1}{L} \cdot v_n(k) \right] \quad (38)
\end{aligned}$$

É observado que há um elemento desconhecido $v_{n-1}(k)$, que representa a tensão no penúltimo circuito da cascata. Adaptando a solução (25) e substituindo em (38) encontra-se:

$$\begin{aligned}
i_n(k+1) = i_n(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{L} \cdot v_{n-1}(k+1) - \frac{R}{L} \cdot i_n(k+1) + \right. \\
\left. + \frac{1}{L} \cdot \left[R \cdot i_n(k) + v_n(k) + \frac{L}{\Delta t} \cdot i_n(k+1) - \frac{L}{\Delta t} \cdot i_n(k) \right] + \right. \\
\left. - \frac{1}{L} \cdot v_n(k+1) - \frac{R}{L} \cdot i_n(k) - \frac{1}{L} \cdot v_n(k) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_n(k+1) = i_n(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{L} \cdot v_{n-1}(k+1) - \frac{R}{L} \cdot i_n(k+1) + \right. \\
\left. + \frac{1}{\Delta t} \cdot i_n(k+1) - \frac{1}{\Delta t} \cdot i_n(k) - \frac{1}{L} \cdot v_n(k+1) \right]
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{R \cdot \Delta t}{2 \cdot L} \right] \cdot i_n(k+1) = \frac{1}{2} \cdot i_n(k) + \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_{n-1}(k+1) - \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot v_n(k+1) \quad (39)$$

Utilizando a aproximação da integração trapezoidal para tensões descrita em (11) e aplicando em (37) obtém-se:

$$\begin{aligned}
v_n(k+1) = v_n(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{2}{C} \cdot i_n(k+1) + \frac{2 \cdot G_D}{C} \cdot v_{n-1}(k+1) + \right. \\
\left. - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_n(k+1) + \frac{2}{C} \cdot i_n(k) + \frac{2 \cdot G_D}{C} \cdot v_{n-1}(k) - \frac{(G + 2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_n(k) \right] \quad (40)
\end{aligned}$$

O termo desconhecido é a tensão no penúltimo circuito $v_{n-1}(k)$. Adaptando (25) e substituindo em (40):

$$\begin{aligned}
v_n(k+1) &= v_n(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{2}{C} \cdot i_n(k+1) + \frac{2 \cdot G_D}{C} \cdot v_{n-1}(k+1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2 \cdot G_D}{C} \left[R \cdot i_n(k) + v_n(k) + \frac{L}{\Delta t} \cdot i_n(k+1) - \frac{L}{\Delta t} \cdot i_n(k) \right] + \right. \\
&\quad \left. - \frac{(G+2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_n(k+1) + \frac{2}{C} \cdot i_n(k) - \frac{(G+2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_n(k) \right] \\
v_n(k+1) &= v_n(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{2}{C} \cdot i_n(k+1) + \frac{2 \cdot G_D}{C} \cdot v_{n-1}(k+1) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{(G+2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_n(k+1) + \frac{2}{C} \cdot i_n(k) + \frac{2 \cdot G_D \cdot R}{C} \cdot i_n(k) + \frac{2 \cdot G_D}{C} \cdot v_n(k) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2 \cdot G_D \cdot L}{\Delta t \cdot C} \cdot i_n(k+1) - \frac{2 \cdot G_D \cdot L}{\Delta t \cdot C} \cdot i_n(k) - \frac{(G+2 \cdot G_D)}{C} \cdot v_n(k) \right] \\
\left[1 + \frac{G \cdot \Delta t}{2 \cdot C} + \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} \right] \cdot v_n(k+1) &= \left[1 - \frac{G \cdot \Delta t}{2 \cdot C} \right] \cdot v_n(k) + \\
+ \frac{\Delta t}{C} \cdot \left[1 + \frac{G_D \cdot L}{\Delta t} \right] \cdot i_n(k+1) + \frac{\Delta t}{C} \cdot \left[1 + G_D \cdot R - \frac{G_D \cdot L}{\Delta t} \right] \cdot i_n(k) + &\quad (41) \\
+ \frac{G_D \cdot \Delta t}{C} \cdot v_{n-1}(k+1) &
\end{aligned}$$

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A modelagem matemática de uma linha de transmissão monofásica aproximada por meio de uma cascata de circuitos π com resistências de amortecimento em todas as unidades de circuitos é a estrutura que atualmente apresenta a menor influência de oscilações numéricas e, além disso, possui controle sobre o valor da resistência de amortecimento, o que garante maior variedade de resultados numericamente estáveis.

De forma convencional, a maneira de introduzir os circuitos π na modelagem é através de uma única matriz, que representa toda a cascata de circuitos. Não obstante, trabalhos passados demonstraram que é possível reduzir as oscilações de Gibbs realizando alterações na estrutura dessa matriz de modelagem da cascata de circuitos que, no momento, não apresentavam resistências de amortecimento. A alteração proposta pelo trabalho consiste em introduzir cada circuito π individualmente na matriz, calculando as variáveis de estado desses circuitos separadamente das grandezas elétricas relacionadas aos outros circuitos da cascata.

A combinação da estrutura com resistências de amortecimento e do método descrito para construção da matriz de modelagem deverá ser capaz de manter a redução das oscilações numéricas a níveis insignificantes enquanto aumenta o intervalo de estabilidade numérica para maiores quantidades de circuitos na cascata, propiciando um modelo matemático de linha de transmissão para o estudo de efeitos transitórios eletromagnéticos.

Por esse motivo, neste trabalho, foi desenvolvido o equacionamento das variáveis de estado do modelo proposto, a fim de obter as relações diferenciais entre tensões e correntes ao longo da cascata de circuitos. Durante o processo, foram observados dois casos particulares, distinguindo três conjuntos de circuitos, que apresentaram equações finais diferentes, por causa do posicionamento desses circuitos ao longo da cascata. Esses conjuntos são representados por: o primeiro, os intermediários e o último circuito da cascata.

Ao fim da simplificação dessas equações, para cada um dos três conjuntos, são identificadas as expressões que poderão ser empregues na construção do segmento numérico desse modelo, que não pode ser aprofundado neste trabalho. Portanto, as sugestões para trabalhos futuros envolvem: a construção da matriz de modelagem pelo método descrito; o desenvolvimento da rotina numérica para este modelo e, conseqüentemente, verificar a influência de oscilações numéricas e certificar a estabilidade numérica para diversas situações por meio da simulação da energização do modelo.

REFERÊNCIAS

- MOREIRA, A. C.; PEREIRA, T. G.; SANTOS, M. O.; JUS, L. H.; FERREIRA, A. A.; PRADO, A. J. **Physical Model of Transmission Lines With Additional Branches to Introduce the Influence of the Frequency**. XII Latin-American Congress on Electricity Generation and Transmission - CLAGTEE 2017. Mar del Plata, Argentina, November 12-15, 2017.
- ATPDRAW. **ATPDRAW version 3 - User Manual**. TR A4389, EFI, Norway, 1996.
- DOMMEL, H. W. **Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase networks**. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-88, pp. 388-399, April, 1969.
- DOMMEL, H. W.; YAN, A.; ORTIZ DE MARCANO, R. J.; MILIANI, A. B. **Case Studies for Electromagnetic Transients**. University of British Columbia, Vancouver, Canada, May, 1983.
- DOMMEL, H.W. **Electromagnetic Transients Program: Reference Manual (EMTP Theory Book)**. Bonneville Power Administration, Portland, 1986.
- DOMMEL, H. W. **Techniques For Analyzing Electromagnetic Transients**. IEEE Computer Applications on Power, vol. 10, no, 3, pp. 18-21, July, 1997.
- DOMMEL, H. W.; NGUYEN, H. V.; MARTÍ, J. R. **Modelling of single-phase nonuniform transmission lines in electromagnetic transient simulations**. IEEE Transactions on Power Delivery, vol.12, no. 2, pp. 916-921, April, 1997.
- JUS, L. H.; SANTOS, M. O.; PEREIRA, T. G.; MOREIRA, A. C.; PRADO, A. J. **Electromagnetic Transients Effect on Blocks of π Circuits with Damping Resistance**. XII Latin-American Congress on Electricity Generation and Transmission - CLAGTEE 2017. Mar del Plata, Argentina, November 12-15, 2017.

MACÍAS, J. A. R.; EXPÓSITO, A. G.; SOLER, A. B. **A Comparison of Techniques for State space Transient Analysis of Transmission Lines.** IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 20, n° 2, pp. 894-903, April, 2005.

MAMIS, M. S.; NACAROGLU, A. **Transient Voltage and Current Distributions on Transmission Lines.** IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution, vol. 149, N0. 6; pp. 705-712. 2003.

MAMIS, M. S. **Computing of Electromagnetic Transients on Transmission Lines with Nonlinear Components.** IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution, vol. 150, N0. 2; PP. 200-203. 2003.

MARTI, J. R. **Accurate model of frequency-dependent transmission lines in 105 electromagnetic transient simulations.** IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-101, n° 1, pp. 147-155, January, 1982.

MICROTRAN POWER SYSTEM ANALYSIS CORPORATION. **Microtran - Reference Manual - Transients Analysis Program for Power and Power Electronic Circuits.** Vancouver, B.C., Canada, September, 1992.

NELMS, R. M.; SHEBLE, G. B.; NEWTON, S. R.; GRIGSBY, L. L. **Using a personal computer to teach power system transients.** IEEE Transactions on Power Systems, vol. 4, n° 3, 1293-1297, August, 1989.

PAPADOPOULOS, T. A.; CHRYSOCHOS, A. I.; TSOLARIDIS, G. P.; PAPAGIANNIS, G. K. **Damping of oscillations related to lumped-parameter transmission line modeling.** International Conference on Power Systems Transients (IPST2015), 7 pp., Cavtat, Croatia, June 15-18, 2015.

PRADO, A. J.; LESSA, L. S.; MONZANI, R. F.; BOVOLATO, L. F.; PISSOLATO FILHO, J. **Modified routine for decreasing numeric oscillations at associations of lumped elements.** Electric Power Systems Research, vol. 112, no. 1, pp. 56-64, July 2014.

PRADO, A. J.; SANTOS, M. O.; JUS, L. H.; GENNARO, E. M.; PISSOLATO FILHO, J.
Influence of Damping Resistance in Electromagnetic Transients Using Alternate Structures of π Circuits. Progress in Electromagnetics Research Symposium – PIERS 2017, vol. 1, 7 pp., St. Petersburg, Russia, May 22-25, 2017.

SANTOS, M. O.; JUS, L. H.; PEREIRA, T. G.; MOREIRA, A. C.; PRADO, A. J.
Introduction of Damping Resistances in Simulations of Electromagnetic Transients Using Alternate Structures. XII Latin-American Congress on Electricity Generation and Transmission - CLAGTEE 2017. Mar del Plata, Argentina, November 12-15, 2017.

PEREIRA, T. G.; MOREIRA, A. C.; SANTOS, M. O.; JUS, L. H.; FERREIRA, A. A.; PRADO, A. J.
Laboratory Tests with Model based on π Circuits considering the Introduction of Branches composing by RL Parallel Elements. XII Latin-American Congress on Electricity Generation and Transmission - CLAGTEE 2017. Mar del Plata, Argentina, November 12-15, 2017.