



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.003/03

Cálculos de Integrais de Feynman em Teorias de Campos

Esdras Santana dos Santos

Orientador

Prof. Dr. Alfredo Takashi Suzuki

Abril de 2003

Agradecimentos

Ao Deus eterno, presente entre as ausências, e por quem vivo me movimento e existo.

Às quatro mulheres da minha vida: minha mãe Margarida, minha sogra Marineusa, minha eterna namorada e esposa Maise e minha linda Roama.

Ao meu pai Isac, que voltou a *saborear* a vida.

Ao Prof. Alfredo Suzuki pelo aprendizado e compreensão nestes anos de Doutorado.

Ao Alexandre Schmidt pela amizade e discussões via e-mail.

Aos Professores Bruto Pimentel e Ademir Santana, amigos e mestres.

Aos amigos que pude fazer nas salas e corredores do IFT: Lúcio, Letícia, Elisângela, André, Gauchito (vulgarmente conhecido como Sandro), André, Marcos Calçada, Emerson, Randall, Sandro Costa, Gadelha, Hebe, Iraida, Alejandro, Cassius, Rodrigo, Fábio, Carlos, Gian, Wanderson, Vagner, Casana e aos componentes da banda Rocha 99: Biluquinha (as vezes chamado de Paulo), o Visitador (também conhecido como Wiliam) e Passarinho (que também atende por Eduardo).

Aos funcionários do IFT que muito contribuem para o bom funcionamento desta instituição.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao heróico povo brasileiro: aos milhões de anônimos, sem teto, sem terra, sem comida, sem roupa e sem acesso à educação. Aos humilhados, aos explorados, aos empobrecidos, aos esquecidos e excluídos, aos injustiçados e discriminados. Especialmente àqueles irmãos brasileiros que, mesmo tendo todos os motivos para entregarem-se ao desespero, reagem e insistem em cultivar uma *esperança festiva, erótica e rebelde*.

Ainda que eu falasse as línguas dos homens e dos anjos, e não tivesse amor, seria como o metal que soa ou como o címbalo que retine.

E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria.

E ainda que distribuisse todos os meus bens para o sustento dos pobres, e ainda que entregasse o meu corpo para ser queimado, e não tivesse amor, nada disso me aproveitaria.

O amor é sofredor, é beníquo; o amor não é invejoso; o amor não se vangloria, não se ensoberbece, não se porta inconvenientemente, não busca seus próprios interesses, não se irrita, não suspeita mal; não se regozija com a injustiça, mas se regozija com a verdade; tudo sofre, tudo crê, tudo espera, tudo suporta.

O amor jamais acaba; mas havendo profecias, serão aniquiladas; havendo línguas, cessarão; havendo ciência, desaparecerá; porque, em parte conhecemos, e em parte profetizamos; mas, quando vier o que é perfeito, então o que é em parte será aniquilado.

Quando eu era menino, falava como menino, sentia como menino, pensava como menino; mas, logo que cheguei a ser homem, acabei com as coisas de menino. Porque agora vemos como por espelho, em enigma, mas então veremos face a face; agora conheço em parte, mas então conhecerei plenamente, como também sou plenamente conhecido.

Agora, pois, permanecem a fé, a esperança, o amor, estes três; mas o maior destes é o amor.

Bíblia: Parte da Carta do Apóstolo Paulo aos cristãos da cidade de Corinto.

Resumo

Usando a técnica conhecida como método de integração em dimensão negativa (NDIM), calculamos as funções de 2 e 3-pontos em 1-loop e analisamos seus casos particulares de maior interesse físico. Generalizamos esta aplicação do método para o caso de n -pontos em 1-loop, obtendo uma fórmula geral dada em termos de uma função hipergeométrica generalizada. Mostramos também que esta fórmula geral pode ser obtida pela parametrização de Feynman o que aponta para uma equivalência entre estas duas abordagens bem como com o análogo via representação de Mellin-Barnes. A integral escalar associada ao diagrama “2-loop master” foi calculada usando a decomposição de integração por partes seguida do NDIM. A Integral escalar não massiva em 2-loop com n -inserções de auto-energia também foi calculada.

Palavras Chaves: Teoria Quântica de Campos; Integrais de Feynman; Métodos de Integração.

Áreas do conhecimento: 1.05.03.01-3: Teoria Geral de Partículas e Campos.

Abstract

Employing the technique known as Negative Dimensional Integration Method (NDIM), we calculate the two- and three-point functions at one loop level and analyse their particular cases of greatest physical interest. We generalize this to the case of n -point functions at one loop, obtaining a general formula given in terms of a generalized hypergeometric function. We also show that this general formula can be obtained via Feynman parametrization showing that there is an equivalence between the two approaches as well as with the analogous method via Mellin-Barnes representation. The scalar integral associated with the two-loop master diagram is calculated using partial integration followed by NDIM, and massless scalar integral at two loops with n self-energy insertions is also calculated using NDIM.

Índice

1	Introdução	vii
2	Alguns Métodos Usados em Cálculos Perturbativos	1
2.1	A Parametrização de Feynman	2
2.1.1	A α -Representação	5
2.2	A Integração por Partes	7
2.3	Os Polinômios de Gegenbauer no x-Espaço	9
2.4	A Representação de Mellin-Barnes	11
2.5	A Integração em Dimensão Negativa	14
3	Integrais escalares em 1-loop	17
3.1	A função de 2-pontos em 1-loop	17
3.2	A função de 3-pontos em 1-loop	24
3.3	A função de n -pontos em 1-loop	29
3.4	A parametrização de Feynman em 1-loop	35
4	Integrais escalares em 2-loops	52
4.1	O “2-loop master”	52
4.2	O caso 2-pontos n -loops	54
4.3	O caso 3-pontos com inserção de auto-energia	56
5	Considerações Finais	58
A	Identities matemáticas usadas neste trabalho	60
A.1	A integral padrão	61
A.2	Os polinômios de Gegenbauer	61
B	Funções Hipergeométricas	63
B.1	A função de Gauss	63
B.2	Função de Lauricella generalizada	64

Capítulo 1

Introdução

Muitos fenômenos em física de altas energias, estado sólido e estatística podem ser descritos pelos modelos teóricos em teoria quântica de campos, considerados não somente no espaço-tempo quadri-dimensional como também em três, duas e outras dimensões do espaço-tempo. Em muitos casos, a ferramenta básica usada para os cálculos das quantidades físicas tem sido a teoria de perturbação. O uso deste tipo de ferramenta é justificável quando o termo de interação do Hamiltoniano do sistema é suficientemente fraco, o que ocorre por exemplo na eletrodinâmica quântica onde o acoplamento entre o elétron e o fóton é medido pela constante de estrutura fina $\alpha = 1/137$. Neste cenário é proposta a solução para a equação de movimento para os campos interagentes pela expansão da matriz-S, estabelecidas as regras de Feynman para os processos e escrita a amplitude Feynman em termos de integrais dos propagadores no espaço dos momenta. Tais integrais, a depender das características do campo em estudo, podem ser escalares ou tensoriais (aquelas que possuem estrutura tensorial nos numeradores). Utilizando-se os diversos métodos de redução tensorial existentes na literatura [1, 2, 3], têm-se mostrado que as integrais tensoriais podem sempre ser escritas em termos das escalares. Neste contexto a avaliação das integrais escalares de Feynman adquire ênfase natural.

As integrais escalares, cada vez mais complexas, estão presentes nos cálculos de amplitudes de espalhamento na eletrodinâmica e cromodinâmica quânticas, modelo padrão para interações eletro-fracas, em correções radiativas, estudo do comportamento da função de Green, grupos de renormalização e outros problemas em teoria quântica de campos. A busca pela avaliação destas integrais seja para casos gerais ou particulares tem despertado o interesse pelo desenvolvimento das refinadas técnicas matemáticas presentes na literatura. Uma das primeiras técnicas utilizadas neste sentido foi a parametrização de Feynman [4]. O seu uso transforma as integrais nos propagadores dos campos em integrais paramétricas que poderão ser avaliadas por algum outro procedimento a exemplo da regularização dimensional [5]. Todavia,

a natureza intrincada de certos diagramas de Feynman desencadeou métodos que visam não só a avaliação explícita de suas integrais associadas, mas a sua redução em termos de outras mais simples, isto ocorre com a interessante idéia do método de integração por partes (IPP) proposta em [6] bem como com as identidades de invariância de Lorentz [7], recentemente aplicados nos cálculos em nível de 2-loops [8]. Neste sentido outras metodologias têm sido formuladas fazendo o uso inicial da integração por partes seguida por outra ferramenta que proponha a avaliação das integrais remanescentes. Uma destas técnicas, proposta em [9], é o método das equações diferenciais, utilizado em especial para solucionar integrais complexas do tipo “2-loop master”. Após o uso da IPP este método transforma o resultado numa equação diferencial para parâmetros associados às massas das partículas virtuais e esta equação é solucionada analiticamente via programa computacional (ver aplicações em [10]). Outros métodos também fazem uso da decomposição de integrais complicadas, como por exemplo o pentágono em 1-loop [11, 12]. Integrais não massivas têm sido avaliadas com sucesso através da técnica dos polinômios de Gegenbauer proposta por Chetyrkin et al [13, 14]. Nesta abordagem as integrais escalares de Feynman dos propagadores dos campos são escritas em termos de integrais no espaço das coordenadas de produtos de polinômios de Gegenbauer (ver aplicações em [15]). Expandindo os propagadores escalares dos campos em termos da representação de Mellin-Barnes para integrais de contorno, Davydychev propôs em [16, 17] a avaliação de tais integrais massivas com expoentes arbitrários nos propagadores. Suas soluções gerais são dadas em termos de funções hipergeométricas cujas regiões de convergência definem as regiões cinemáticas de validade dos resultados. Esta abordagem foi aplicada com sucesso em cálculos de 1-loop [18, 19, 20] bem como em nível de 2 e 3-loops em [21, 22]. Outras abordagens podem ser encontradas na literatura [23, 24, 25]. Uma revisão dos recentes progressos em cálculos de loops pode ser encontrada em [26].

Uma técnica que também tem apresentado bons resultados em cálculos de integrais de Feynman é o método de integração em dimensão negativa (NDIM) [27]. Como discutiremos no Capítulo 1, a idéia inicial deste método propõe a avaliação das integrais de Feynman a partir de uma integral padrão que obedece uma condição do tipo $n + D/2 = 0$, que para n inteiro positivo implica $D < 0$. Seguindo esta abordagem, alguns resultados foram obtidos a exemplo do cálculo da função de Green para o oscilador harmônico [28]. Aqui seguiremos outra abordagem [29]. Neste contexto o NDIM apresenta-se como uma técnica onde não é necessário o uso de integrais paramétricas, e as integrais de Feynman são o resultado da comparação entre dois cálculos: um obtido por uma integral gaussiana nos momenta, onde o funcional gerador é dado pela exponencial da combinação linear dos propagadores

dos campos e o outro cálculo é obtido pela integral da expansão em série de Taylor do funcional gerador. Por exemplo, consideremos uma integral escalar associada à um diagrama de Feynman de n -pontos em 1-loop. Neste caso a comparação será dada pela identidade

$$\begin{aligned} & \int d^D k \prod_{i=1}^n \left[\sum_{a_i=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_i)^{a_i}}{a_i!} [(k - l_i)^2 - m_i^2]^{a_i} \right] \\ &= \int d^D k \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \alpha_i [(k - l_i)^2 - m_i^2] \right\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Após a avaliação da integral gaussiana do lado direito da identidade acima, seu resultado é expandido também em séries de Taylor nos parâmetros α_i e seus expoentes comparados com os a_i obtendo assim um sistema de equações de vínculo nos índices das séries, com o número de variáveis maior ou igual ao número de equações. Isto implicará em várias possibilidades de solução deste sistema. Cada uma destas soluções deve ser substituída em (1.1) e a solução final para a integral em k do lado esquerdo de (1.1) será dada pela soma das séries com mesma dependência nos momenta l_i . As outras possibilidades de soluções representam possíveis continuações analíticas para outras regiões cinemáticas. Todavia, ao final, estes resultados deverão ser continuados analiticamente para valores negativos dos expoentes dos propagadores, a_i . Os resultados são dados em termos de séries hipergeométricas nos índices remanescentes na solução do sistema. Desta forma o NDIM avalia as integrais escalares de Feynman com massas e expoentes arbitrários para os propagadores e transfere as dificuldades na avaliação destas integrais para a solução de um sistema linear de equações de vínculo. A arbitrariedade dos expoentes dos propagadores e da dimensão D do espaço-tempo possibilita o uso de conhecidos esquemas de regularização: dimensional ou analítica [30].

O NDIM tem-se mostrado uma potente ferramenta matemática quando aplicado por Suzuki e Schmidt [31]-[34] e também por Bentín [35] na avaliação de integrais associadas a diversos diagramas de Feynman em calibres covariantes e não-covariantes. Através do NDIM calculamos também o espectro de soluções possíveis para função de 2 e 3-pontos massiva (massas internas nulas, iguais e genéricas [36, 37, 38]).

As páginas deste trabalho se organizam da forma a seguir. No primeiro Capítulo apresentamos um resumo de alguns dos métodos usados na avaliação de integrais de Feynman. A função de 2 e 3-pontos em 1-loop são analisadas, via NDIM, no Capítulo 2 mostrando seus casos particulares de maior importância física bem como a generalização para o caso de n -pontos e seus casos particulares imediatos. Também neste Capítulo mostramos que o resultado obtido para o caso de n -pontos em 1-loop via parametrização de Feynman coincide com o obtido via NDIM e por sua vez com

o análogo via representação de Mellin-Barnes. O “2-loop master” é decomposto via integração por parte e suas integrais avaliadas via o NDIM no Capítulo 3. Aqui também avaliamos a integral não massiva com n inserções de auto-energia bem como a função de 3-pontos com uma inserção de auto-energia. Ao final conclusões e perspectivas são apresentadas.

Capítulo 2

Alguns Métodos Usados em Cálculos Perturbativos

As integrais de Feynman estão presentes nos cálculos realísticos de amplitudes de espalhamento e correções radiativas na eletrodinâmica quântica (EDQ), cromodinâmica quântica (CDQ), teorias escalares, no modelo padrão para interações eletro-fracas, como por exemplo no decaimento $Z \rightarrow \bar{b}b$ [39], bem como no estudo de grupos de renormalização, e outras propriedades da teoria de campos perturbativa. Tais integrais podem ser escalares ou tensoriais a depender das características do campo ou propagadores envolvidos: escalar, vetorial ou espinorial. Buscando simplificar a complexidade das integrais com estruturas tensoriais nos numeradores, algoritmos têm sido desenvolvidos de forma a permitir a redução destas às escalares, apenas com os denominadores dos propagadores [1]. Uma fórmula geral explícita que reduz integrais tensoriais de Feynman em 1-loop para integrais escalares foi obtida por Davydychev em [2] enquanto a redução de integrais tensoriais multi-loop foi desenvolvida por Tarasov [3]. Na construção de Davydychev, uma integral tensorial (D -dimensional) de ordem r a 1-loop e com n denominadores massivos, representada por

$$J_{\mu_1 \dots \mu_r}^{(n)}(D, \{a_i\}) = \int d^D k \frac{\prod_{i=1}^r k_{\mu_i}}{\prod_{i=1}^n [(k - l_i)^2 - m_i^2]^{a_i}}, \quad (2.1)$$

pode ser obtida a partir da integral escalar

$$J^{(n)}(D, \{a_i\}) = \int \frac{d^D k}{\prod_{i=1}^n [(k - l_i)^2 - m_i^2]^{a_i}}, \quad (2.2)$$

utilizando-se para isto a derivação em relação aos momenta externos l_i . Para melhor exemplificar este procedimento, consideremos o caso $r = 1$. Neste caso, derivando a integral escalar (2.2) em relação a $l_{j\mu}$ tem-se,

$$J_{\mu}^{(n)}(D, \{a_i\}) = -l_{j\mu} J^{(n)}(D, \{a_i\}) - \frac{1}{2(a_j - 1)} \frac{\partial}{\partial l_{j\mu}} J^{(n)}(D, \{a_i - \delta_{ij}\}). \quad (2.3)$$

Como pode ser visto, a estrutura tensorial fica representada pela combinação linear dos momenta externos e em casos para $r > 1$ também em termos da métrica do espaço-tempo, $g_{\mu\nu}$. Com esta abordagem, a avaliação das integrais tensoriais passa a ser feita por meio de integrais escalares. Neste contexto, as integrais escalares têm despertado o interesse de pesquisadores no sentido de proposição de ferramentas matemáticas que possibilitem sua avaliação com o maior grau de generalidade possível. Os propagadores escalares, associados aos denominadores, são portanto tomados com massas, expoentes e dimensão arbitrários. A arbitrariedade destes parâmetros permitirá alargar a aplicação do resultado das integrais para casos de processos onde as partículas internas sejam massivas, não massivas ou possuam iguais massas bem como possibilitará também o uso dos métodos de regularização das divergências: (regularização analítica ou dimensional [30]), tendo em vista a sua fácil implementação para os resultados expressos em termos de séries hipergeométricas.

A complexidade crescente das referidas integrais escalares tem promovido o refinamento e a diversificação das técnicas matemáticas usadas para a sua avaliação. A parametrização de Feynman [4], muitas vezes conjugadas a outras técnicas como a regularização dimensional [5], α -representação, integração por partes [6], polinômio de Gegenbauer no X-espaço [13, 14], cálculo de integrais massivas via representação de Mellin-Barnes [16, 17] e a integração em dimensão negativa (NDIM) [31], são algumas das técnicas utilizadas correntemente. Neste Capítulo iremos fazer uma breve exposição destes métodos.

2.1 A Parametrização de Feynman

O método de avaliação de integrais chamado parametrização de Feynman [4], foi um dos primeiros a ser usados nos cálculos em teoria perturbativa. Esta técnica consiste em reescrever os denominadores dos propagadores dos campos em termos de outras integrais cujas variáveis de integração são os chamados parâmetros de Feynman. Inicialmente, usa-se a identidade

$$\frac{1}{P_1 P_2} = \frac{1}{P_2 - P_1} \int_{P_1}^{P_2} \frac{dx}{x^2}. \quad (2.4)$$

Definimos o parâmetro $x = P_1(z_0 - z_1) + P_2(z_1 - z_2)$ e a função $F(P_1, P_2; z_0, z_2)$ da forma

$$F(P_1, P_2; z_0, z_2) = \int_0^{z_0} \frac{dz_1}{[P_1(z_0 - z_1) + P_2(z_1 - z_2)]^2}, \quad (2.5)$$

e por meio de algumas manipulações algébricas, podemos mostrar que

$$F(P_1, P_2; 1, 0) = \frac{1}{P_1 P_2}. \quad (2.6)$$

A extensão desta identidade para o caso de n denominadores pode ser obtida de

$$\begin{aligned} F(P_1, \dots, P_n; z_0, z_n) &= \Gamma(n+1) \int_0^{z_0} dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \dots \int_0^{z_{n-2}} dz_{n-1} \\ &\quad \times \frac{1}{[\sum_{i=1}^n P_i (z_{i-1} - z_i)]^n}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A extensão de $F(P_1, P_2; 1, 0)$ para $F(P_1, \dots, P_n; 1, 0)$ pode ser feita por indução (por ser bastante simples, não será exposta aqui). Se agora derivarmos a igualdade acima a_i vezes em relação a P_i , $i = 1, 2, \dots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} F^{(n)}(P_i; a_i; z_0, z_n) &= \frac{\Gamma(a_1 + \dots + a_n)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_n)} \prod_{i=1}^{n-1} \left[\int_0^{z_{i-1}} dz_i (z_{i-1} - z_i)^{a_i-1} \right] (z_{n-1} - z_n)^{a_n-1} \\ &\quad \times \frac{1}{[\sum_{i=1}^n P_i (z_{i-1} - z_i)]^{\sum_{i=1}^n a_i}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Esta expressão, quando $z_0 = 1$ e $z_n = 0$, e os P_i iguais aos denominadores dos propagadores em teoria quântica de campos, representa a parametrização de Feynman para n denominadores com expoentes e massas arbitrários, ou seja

$$F^{(n)}(P_i; a_i; 1, 0) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n P_i^{a_i}}. \quad (2.9)$$

Definamos na equação anterior, $P_i = (k - l_i)^2 - m_i^2$, ou seja, passemos a aplicar a parametrização de Feynman para um diagrama de n pontos em nível de 1-loop com os momenta externos dados em termos dos l_i . Usando tal definição, o denominador da função F em (2.7) pode ser reescrito da forma $[k^2 + \Delta]^{\sum_{i=1}^n a_i}$, onde Δ é obtido pela combinação dos monômios em $z_{i-1} - z_i$. Neste sentido, a integral

$$\int d^D k F^{(n)}((k - l_i)^2 - m_i^2; a_i; z_0, z_n), \quad (2.10)$$

pode ser solucionada através da integral D-dimensional (ver Apêndice A)

$$\int d^D k \frac{k^{2\alpha}}{[k^2 + \Delta]^\beta} = \pi^{D/2} (\Delta)^{\alpha-\beta+D/2} \frac{\Gamma(\beta - \alpha - D/2) \Gamma(\alpha + D/2)}{\Gamma(\beta) \Gamma(D/2)}, \quad (2.11)$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} \int d^D k F^{(n)} &= \pi^{D/2} \frac{\Gamma(a_1 + \dots + a_n - D/2) (z_0 - z_n)^{-D/2}}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_n)} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n-1} \left[\int_0^{z_{i-1}} dz_i (z_{i-1} - z_i)^{a_i-1} \right] (z_{n-1} - z_n)^{a_n-1} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{i=1}^n (l_i^2 - m_i^2) (z_{i-1} - z_i) - \frac{1}{z_0 - z_n} \left[\sum_{i=1}^n l_i (z_{i-1} - z_i) \right]^2 \right\}^{D/2 - \sum_i a_i} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Neste contexto a função de n -pontos em 1-loop, $J^{(n)} = J^{(n)}(l_i; m_i; a_i)$, será expressa por

$$\begin{aligned} J^{(n)}(l_i; m_i; a_i) &= \int \frac{d^D k}{\prod_{i=1}^n [(k - l_i)^2 - m_i^2]^{a_i}} \\ &= \int d^D k F((k - l_i)^2 - m_i^2; a_i; z_0, z_n) \Big|_{z_0=1, z_n=0}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

isto é, representada através da expressão (2.10) em termos das integrais nos parâmetros z_i . Estas integrais paramétricas podem ser resolvidas mais facilmente se o integrando puder ser expandido em séries. Estas expansões serão baseadas nos intervalos numéricos aos quais pertencem os parâmetros z_i ou nos valores dos expoentes a_i dos propagadores e da dimensão D do espaço. Como um exemplo, consideremos o cálculo realístico da função de 2-pontos em 1-loop, aplicável a diagramas do tipo auto-energia do elétron ou polarização do vácuo (Fig.-1.1) na eletrodinâmica quântica. Reescrevendo-se o denominador da equação (2.12) da forma

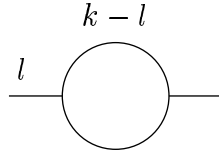


Fig.-1.1: Diagrama do tipo auto-energia

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 (l_i^2 - m_i^2) (z_{i-1} - z_i) - \left[\sum_{i=1}^2 l_i (z_{i-1} - z_i) \right]^2 \\ &= -l^2 (1 - z)^2 + (l^2 + m_2^2 - m_1^2) (1 - z) - m_2^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde $z = 1 - z_1$, $l = l_1 - l_2$ e $n = 2$, $a_1 = a_2 = 1$ e $z_0 = 1$, $z_2 = 0$, pode-se calcular agora a integral escalar associada a este diagrama usando (2.13), resultando em

$$\begin{aligned} J^{(2)}(l; m_1, m_2; 1, 1) &= \pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \\ &\times \int_0^1 dz \{(z - z_-)(z - z_+)\}^{D/2-2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde z_- e z_+ são as raízes da função quadrática em z_1 , mostrada em (2.14), e são expressos por

$$z_{\mp} = \frac{A \mp \sqrt{A^2 - 4m_1^2 l^2}}{2l^2}, \quad (2.16)$$

onde

$$A = l^2 + m_1^2 - m_2^2. \quad (2.17)$$

Considerando os pólos para $D \rightarrow 4$ em (2.15), podemos efetuar a expansão nesta vizinhança usando as expansões clássicas

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (2.18)$$

$$\Delta^{-\epsilon} = 1 - \epsilon \ln \Delta + O(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (2.19)$$

onde γ_E é a constante de Euler. Portanto, usando a expansão acima e integrando em k , a função de 2-pontos será dada por

$$\begin{aligned} J^{(2)}(l; m_1, m_2; 1, 1) &= \pi^{D/2} \left\{ \frac{2}{4-D} + 2 - \gamma_E - \ln \pi - \ln[(1-z_-)(1-z_+)] \right. \\ &\quad \left. + z_- \ln\left(1 - \frac{1}{z_-}\right) + z_+ \ln\left(1 - \frac{1}{z_+}\right) \right. \\ &\quad \left. + O(2-D/2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Este resultado foi obtido primeiramente por 't Hooft e Veltman em [5]. Nesta forma de calcular a função de 2-pontos empregou-se, para efetuar a expansão do argumento da integral nos parâmetros de Feynman, a conhecida técnica de regularização dimensional. Tal procedimento mostrou-se bastante facilitador para a avaliação da integral acima pois a mesma apresenta um pólo simples para $D = 4$. Entretanto, no caso de integrais não divergentes, este tipo de expansão não poderá ser utilizado. Neste contexto as dificuldades de cálculo permanecem, tornando necessário o uso de outras formas de expansão ou outros métodos de integração dos quais alguns serão expostos nas seções seguintes. No Capítulo seguinte mostraremos que a parametrização de Feynman pode ser implementada de tal forma que a regularização das integrais seja efetuada somente no final dos cálculos e independente da integração.

2.1.1 A α -Representação

Nesta seção nos limitaremos a mostrar a idéia básica da técnica de avaliação de integrais de Feynman conhecida como α -Representação e a apresentar um exemplo para ser comparado com o obtido via parametrização de Feynman. A idéia básica da α -Representação tem origem na conhecida integral

$$\int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha x} = \frac{1}{x}. \quad (2.21)$$

Neste contexto, a conhecida função de 1-ponto em 1-loop [5], pode ser representada por (utilizando a integral gaussiana (A.1))

$$J^{(1)}(m; D) = \int \frac{d^D k}{k^2 - m^2} = \pi^{D/2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{D/2}} e^{\alpha m^2}.$$

Entretanto, empregando a definição da função gamma dada em (ver (A.2)), resulta

$$J^{(1)}(m; D) = \pi^{D/2} (-m^2)^{D/2-1} \Gamma(1 - D/2). \quad (2.22)$$

Agora consideremos novamente a função de 2-pontos em 1-loop associada ao diagrama da Fig.-1.1. Sua integral escalar correspondente é dada por

$$\begin{aligned} J^{(2)}(l; m_1, m_2; D) &= \int \frac{d^D k}{[k^2 - m_1^2] [(k-l)^2 - m_2^2]} \\ &= \pi^{D/2} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{D/2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} l^2 + \alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_2^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

que usando a transformação de variável

$$\alpha_1 = \alpha_2 \frac{1-x}{x} \quad (2.24)$$

obtém-se

$$J^{(2)} = \pi^{D/2} \int_0^1 dx x^{D/2-2} \int_0^\infty d\alpha_2 \alpha_2^{1-D/2} \exp \left\{ -\alpha_2 \left((1-x)l^2 - \frac{1-x}{x} m_1^2 - m_2^2 \right) \right\},$$

com a definição de $\Gamma(z)$, obtém-se

$$J^{(2)} = \pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)l^2 - (1-x)(m_1^2 - m_2^2) - m_2^2]^{2-D/2}} \quad (2.25)$$

Esta expressão é idêntica a (2.15). Entretanto, aqui solucionaremos a integral de outra forma. Ou seja, considerando que o intervalo de integração é $0 \leq x \leq 1$, tem-se que o valor máximo da função quadrática $x(1-x)l^2 - x(m_2^2 - m_1^2)$ é $(l^2 - m_2^2 + m_1^2)/4$. Logo podemos expandir em série de Taylor o denominador da integral acima, na região cinemática $(l^2 - m_2^2 + m_1^2)/4m_2^2 < 1$, $m_2 \neq 0$, isto é,

$$\begin{aligned} J^{(2)} &= \pi^{D/2} (-m_2^2)^{D/2-2} \Gamma(2 - D/2) \\ &\times \sum_{i,j=0}^\infty (2 - D/2)_{i+j} \frac{(l^2/m_2^2)^i}{i!} \frac{\left(1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\right)^j}{j!} \int_0^1 dx x^i (1-x)^{i+j}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

que, usando (A.3), resulta

$$\begin{aligned} J^{(2)} &= \pi^{D/2} (-m_2^2)^{D/2-2} \Gamma(2 - D/2) \\ &\times \sum_{i,j=0}^\infty \frac{(2 - D/2)_{i+j} (1)_{i+j} (1)_i}{(2)_{2i+j}} \frac{(l^2/m_2^2)^i}{i!} \frac{\left(1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\right)^j}{j!}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Esta expressão pode ser representada pela função hipergeométrica (B.12), a saber

$$J^{(2)} = \pi^{D/2} (-m_2^2)^{D/2-2} \Gamma(2 - D/2) \times F_{1:0:0}^{2:1:0} \left[\begin{matrix} (2 - D/2 : 1 : 1); (1 : 1 : 1); (1 : 1) \\ (2 : 2 : 1) \end{matrix} \middle| \frac{l^2}{m_2^2}; 1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \right]. \quad (2.28)$$

Este resultado pode ser aplicado tanto para o caso $m_1 = m_2$, auto-energia do elétron como para o caso $m_1 = 0$ e $m_2 \neq 0$, polarização do vácuo. Ainda pode ser percebido no resultado acima a simetria de troca de m_1 por m_2 . Do exposto, conclui-se que a técnica α -representação, para a função de 2-pontos em 1-loop, mostra-se similar a parametrização de Feynman; porém isto é válido somente para as integrais escalares cujos denominadores possuem expoentes unitários.

2.2 A Integração por Partes

O método de Integração por Partes (IPP), introduzido por Tkachov [6], avalia as integrais escalares associadas à digramas de Feynman complexos através de integrais associadas à diagramas mais simples. Neste sentido, o método IPP não apresenta a solução das integrais porém as reescreve em termos de outras integrais mais simples. Isto se dá de forma mais clara quando o IPP é aplicado aos casos realísticos, aplicáveis na EQD ou CDQ, onde os expoentes dos denominadores dos propagadores são alterados e a integral procurada pode ser expressa por meio de outras integrais associadas à diagramas com menor número de pernas ou de loops ou ainda mantendo o número de loops porém com estrutura de mais fácil avaliação. Um exemplo da implementação deste método pode ser obtido da avaliação da integral em 2-loops associada ao diagrama da Fig.-1.2 (onde a linha pontilhada representa o propagador de um campo não massivo)

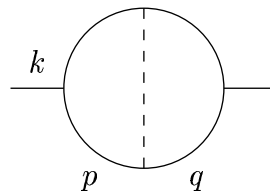


Fig.-1.2: o “2-loop master”

Sua correspondente integral escalar é escrita da forma

$$I(k, m) = \int \frac{d^D q d^D p}{[p^2 - m^2] [(p - k)^2 - m^2] [(p - q)^2] [(q - k)^2 - m^2] [q^2 - m^2]}. \quad (2.29)$$

Para a implementação do IPP no cálculo desta integral, usa-se a identidade

$$0 = \int d^D q d^D p \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left\{ \frac{(p-q)_\mu}{[p^2 - m^2] [(p-k)^2 - m^2] [(p-q)^2] [(q-k)^2 - m^2] [q^2 - m^2]} \right\}. \quad (2.30)$$

Esta identidade é facilmente assimilada pela possibilidade de se anular os termos de superfície nos casos de integrais regularizadas. Desenvolvendo o integrando da expressão acima e usando identidades do tipo $2p \cdot (p-q) = p^2 + (p-q)^2 - q^2$, obtém-se a relação

$$I(k, m) = -\frac{1}{D-4} [I_1(2, 1, 1, 1; k; m) + I_2(1, 2, 1, 1; k; m) - I_3(2, 1, 1, 1; k; m) - I_3(1, 2, 1, 1; k; m)] \quad (2.31)$$

onde

$$I_1(a_1, a_2, a_3, a_4; k; m) = \int \frac{d^D q d^D p}{[p^2 - m^2]^{a_1} [(p-k)^2 - m^2]^{a_2} [(p-q)^2]^{a_3} [(q-k)^2 - m^2]^{a_4}}, \quad (2.32)$$

$$I_2(a_1, a_2, a_3, a_4; k; m) = \int \frac{d^D q d^D p}{[p^2 - m^2]^{a_1} [(p-k)^2 - m^2]^{a_2} [(p-q)^2]^{a_3} [q^2 - m^2]^{a_4}}, \quad (2.33)$$

$$I_3(b_1, b_2, b_3, b_4; k; m) = \int \frac{d^D q d^D p}{[p^2 - m^2]^{b_1} [(p-k)^2 - m^2]^{b_2} [(q-k)^2 - m^2]^{b_3} [q^2 - m^2]^{b_4}}. \quad (2.34)$$

Observando-se as simetrias de translação das integrais acima, pode-se reescrever a expressão de $I(k, m)$ da forma

$$I(k, m) = -\frac{2}{D-4} [I_1(1, 2, 1, 1; k; m) - I_3(1, 2, 1, 1; k; m)], \quad (2.35)$$

e sua equação diagramática equivalente pode ser escrita da forma abaixo onde o

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = -\frac{2}{D-4} \{ \text{---} \bigcirc \text{---} - \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} \}. \quad (2.36)$$

ponto em negrito representa um denominador com potência quadrática. Usando-se o mesmo procedimento, mostra-se que o primeiro termo do lado direito da equação (2.35) pode ser reescrito da forma

$$I_1(1, 2, 1, 1; k; m) = -\frac{1}{D-3} [I_2(0, 2, 1, 1; k; m) - I_2(1, 2, 0, 1; k; m)], \quad (2.37)$$

$$\text{Diagrama} = -\frac{1}{D-3} \{ \text{Diagrama 1} - \text{Diagrama 2} \}. \quad (2.38)$$

cuja equação diagramática é dada por (2.38).

Substituindo a identidade (2.37) na (2.35), o que é equivalente a substituição da equação diagramática (2.38) na (2.36), obtém-se

$$\begin{aligned}
 I(k, m) = & \frac{1}{(D-4)(D-3)} [I_2(0, 2, 1, 2; k; m) - I_2(1, 2, 0, 1; k; m) \\
 & + (D-3)I_3(1, 2, 1, 1; k; m)]. \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

Neste contexto, através da implementação do IPP, integrais escalares associadas a diagramas de Feynman complexos podem ser avaliadas por meio de integrais mais simples cujos resultados são conhecidos ou podem ser mais facilmente calculados. Entretanto, após a simplificação das integrais, faz-se necessário o uso de algum outro método para a avaliação das integrais remanescentes. Neste sentido, o IPP apresenta boa utilidade quando conjugado à outros métodos de integração que permitam o cálculo de integrais com expoentes arbitrários como por exemplo a representação de Mellin-Barnes e a integração em dimensão negativa, os quais serão discutidos mais adiante, quando tornar-se-á oportuna a avaliação das integrais obtidas no resultado acima.

2.3 Os Polinômios de Gegenbauer no x-Espaço

Os polinômios de Gegenbauer (ver por exemplo [42]) são definidos pelos coeficientes $C_n^a(z)$, para valores inteiros de n , da expansão de $(1 - 2hz + h^2)^{-a}$ em termos de potências de h (ver Apêndice A):

$$(1 - 2hz + h^2)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^a(z) h^n. \quad (2.40)$$

Considerando um espaço Euclidiano D -dimensional, onde os vetores são dados por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_D)$, pode-se também obter os polinômios de Gegenbauer através da expansão

$$\frac{1}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^{2a}} = \frac{1}{x_1^{2a}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^a(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n, \quad (2.41)$$

onde $x_1 \geq x_2$. Estes polinômios $C_n^a(x)$ obedecem a relação de ortogonalidade (A.19).

No espaço de coordenadas, sabe-se que o propagador não massivo de um campo escalar dimensionalmente regularizado é proporcional a $\frac{1}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^{2a}}$ onde $a = D/2 - 1$. Desta simetria e usando (2.41) e (A.18), Chetyrkin et al [13, 14] propuseram escrever as integrais escalares de Feynman dos propagadores dos campos em termos de integrais no x -espaço de produtos de polinômios de Gegenbauer. O procedimento para o uso desta técnica é mostrado pelos passos abaixo:

a) A integral escalar de Feynman nos momenta é escrita no x -espaço de coordenadas, D -dimensional, usando-se (A.18).

b) Cada propagador é expandido em termos dos polinômios de Gegenbauer usando (2.41).

c) Usa-se então a expansão

$$\exp(ipx) = \Gamma(a) \sum_{n=0}^{\infty} (2i)^n (n+a) C_n^a(x) (p^2 x^2)^{n/2} j_{a+n}(p^2 x^2), \quad (2.42)$$

onde $j_\alpha(z) = z^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{z})$, e J_α é a função de Bessel [42].

d) Avalia-se a integral angular remanescente usando (A.19).

e) Considera-se o parâmetro D complexo e avalia-se a integral radial no seu domínio de convergência.

Consideremos como exemplo o diagrama da Fig-1.2 com $m = 0$ [13]. Sua integral escalar correspondente é dada por (2.29), tomando-se $m = 0$, a saber

$$\frac{I(k; 0)}{(2\pi)^{2D}} = \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int \frac{d^D q d^D p}{p^2 (p-k)^2 (p-q)^2 (q-k)^2 q^2}. \quad (2.43)$$

Usando agora (A.17) obtém-se

$$\frac{I(k; 0)}{(2\pi)^{2D}} \sim \int \frac{d^D x_1 d^D x_2 d^D x_3 \exp(ik \cdot x_3)}{x_1^{2a} x_2^{2a} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^{2a} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)^{2a} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)^{2a}}. \quad (2.44)$$

Expandindo o integrando da expressão anterior através de (2.41) e (2.42) segue então

$$\frac{I(k; 0)}{(2\pi)^{2D}} = \int d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 d\hat{x}_3 C_n^a(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) C_m^a(\hat{\mathbf{x}}_2 \cdot \hat{\mathbf{x}}_3) C_m^a(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_3) C_m^a(\hat{\mathbf{x}}_3 \cdot \hat{\mathbf{k}}). \quad (2.45)$$

Esta integral pode ser avaliada, pelo uso da equação (A.16), obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{I(k; 0)}{(2\pi)^{2D}} &= (4\pi)^{-2-2a} (k^2)^{2a-3} \frac{2\Gamma^3(a)\Gamma(3-2a)}{\Gamma(2a)\Gamma(3a-2)} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2a)}{n!(n+a)^2} \left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2-a)} \right. \\ &\left. + \frac{1}{(n+1)(n+2a-1)} + \frac{1}{(n+2a-1)(n+3a-2)} \right\}, \quad (2.46) \end{aligned}$$

onde $a = D/2 - 1$. Outros casos mais gerais de integrais do tipo acima foram tratados com sucesso pela mesma técnica, a exemplo do caso onde dois denominadores são tomados com expoentes arbitrários [13]. Como pode ser visto, esta técnica mostra-se com boa utilidade para o cálculo de integrais de Feynman não massivas e dimensionalmente regularizáveis. A sua extensão para cálculos de integrais associadas aos diagramas de Feynman massivos não parece ser trivial.

2.4 A Representação de Mellin-Barnes

Nas seções anteriores foram mostradas algumas técnicas de avaliação de integrais escalares como a parametrização de Feynman e os polinômios de Gegenbauer no x -espaço. A parametrização de Feynman destaca-se por apresentar a possibilidade de cálculo de integrais massivas. Entretanto as aparentes dificuldades nos cálculos das integrais paramétricas, dificulta a proposição de soluções gerais (entretanto como mostraremos nos Capítulos seguintes, esta dificuldade pode ser contornada por outro caminho que não foi tratado aqui). Buscando solucionar estas aparentes dificuldades Davydychev e Boos propuseram o método de cálculo de integrais escalares massivas [18, 16, 17], usando para isto a representação de Mellin-Barnes [43]. O método em questão parte da idéia de que um denominador massivo presente numa integral de Feynman do tipo

$$\int \frac{d^D k}{[k^2 - m^2]^a}, \quad (2.47)$$

onde k é o momentum correspondente a uma linha interna em um diagrama de Feynman, não pode ser expandido somente numa série de Taylor do tipo

$$\frac{1}{[k^2 - m^2]^a} = \frac{1}{(k^2)^a} \sum_{j=0}^{\infty} (a)_j \frac{\left(\frac{m^2}{k^2}\right)^j}{j!}, \quad m^2 < k^2, \quad (2.48)$$

ou

$$\frac{1}{[k^2 - m^2]^a} = \frac{1}{(m^2)^a} \sum_{j=0}^{\infty} (a)_j \frac{\left(\frac{k^2}{m^2}\right)^j}{j!}, \quad k^2 < m^2. \quad (2.49)$$

Isto pode ser entendido observando as regiões de validade das expansões acima. Em (2.48) tem-se $m^2 < k^2$ e em (2.49) $m^2 < k^2$, enquanto a integração é avaliada sobre todos os valores de k . Conclui-se portanto que a expansão correta seria dada pela combinação das duas expansões, (2.48) e (2.49), com suas correspondentes funções Θ . Entretanto, a presença da função Θ dificultaria bastante as integrais não massivas remanescentes. Uma maneira de resolver tal situação foi proposta por Davydychev

em [16, 17] onde os termos incorretos obtidos na expansão são compensados por contratermos escolhidos apropriadamente.

A representação de Mellin-Barnes é expressa pela integral de contorno [43]

$$\frac{1}{[1-z]^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds (-z)^s \Gamma(-s) \Gamma(a+s). \quad (2.50)$$

As funções gamma presentes no integrando possuem polos dados por

$$s = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.51)$$

$$s = -a - n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.52)$$

A integral no plano complexo s separa a série de polos da direita, (2.51), da série de polos da esquerda, (2.52). A integração portanto, é feita usando o teorema dos resíduos contornando os pólos pela direita, para $z < 1$, ou pela esquerda, para $z > 1$, obtendo assim uma soma infinita sobre os pólos de $\Gamma(-s)$ ou $\Gamma(a+s)$ respectivamente. Assim deverá ser usado o resíduo da função $\Gamma(-s)$ dado por $(-1)^{n-1}/n!$, no pólo $s = n$.

O método para cálculo de integrais massivas usa a representação de Mellin-Barnes acima para a expansão do propagador escalar (2.47), isto é

$$\frac{1}{[k^2 - m^2]^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{1}{(k^2)^a} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \left(-\frac{m^2}{k^2}\right)^s \Gamma(-s) \Gamma(s+a). \quad (2.53)$$

Uma vantagem deste método é que a fórmula acima contém ambas as expansões (2.48) e (2.49), bastando para obtê-las, escolher um dos contornos possíveis, pela direita, $k^2 < m^2$, ou pela esquerda, $m^2 < k^2$. De outra forma, pode-se afirmar que a integral de contorno efetua uma espécie de *compensação* pela escolha da região cinemática de integração. Após o uso da representação de Mellin-Barnes, deve ser avaliada a integral no momentum k , agora reduzida a uma integral de Feynman não massiva com o denominador elevado à potência $a+s$. Neste contexto a integral D -dimensional de um propagador escalar do tipo (2.47), função de 1-ponto em nível de 1-loop com expoente arbitrário, pode ser calculada, obtendo-se

$$\begin{aligned} J^{(1)}(m, a) &= \int \frac{d^D k}{[k^2 - m^2]^a} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds (-m^2)^s \Gamma(-s) \Gamma(s+a) \int \frac{d^D k}{(k^2)^{a+s}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Usando (A.8) para avaliar a integral em k , segue que

$$\begin{aligned} J^{(1)}(m, a) &= \pi^{D/2} \frac{\Gamma(1-D/2)(-1)^{D/2}}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds (-m^2)^s \\ &\quad \times \frac{\Gamma(-s) \Gamma(s+a)}{\Gamma(1-s-a+D/2) \Gamma(1+s+a-D/2)}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Avaliando a integral de contorno pela direita, temos

$$\begin{aligned} J^{(1)}(m, a) &= -\pi^{D/2} \frac{\Gamma(1 - D/2)(-1)^{D/2}}{\Gamma(a)} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + a)}{\Gamma(1 - n - a + D/2)\Gamma(1 + n + a - D/2)} \frac{(m^2)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Desta série, pode-se concluir que o único termo não nulo será dado para $n = -a + D/2$. Logo, obtém-se finalmente

$$J^{(1)}(m, a) = \pi^{D/2} (-m^2)^{D/2-a} \frac{\Gamma(a - D/2)}{\Gamma(a)}. \quad (2.57)$$

Agora vamos calcular a função de 2-pontos em 1-loop com massas arbitrárias m_1 e m_2 e denominadores com expoentes arbitrários [18],

$$J^{(2)}(l; m_1, m_2; a_1, a_2) = \int \frac{d^D k}{[k^2 - m_1^2]^{a_1} [(k - l)^2 - m_2^2]^{a_2}}. \quad (2.58)$$

Usando o mesmo procedimento acima, isto é aplicando duas vezes (2.50), obtém-se

$$\begin{aligned} J^{(2)}(l; m_1, m_2; a_1, a_2) &= \frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds dt (-m_1^2)^s (-m_2^2)^t \\ &\times \Gamma(-s)\Gamma(-t)\Gamma(s + a_1)\Gamma(t + a_2) J^{(2)}(l; 0, 0; a_1 + s, a_2 + t), \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde $J^{(2)}(l; 0, 0; a_1 + s, a_2 + t)$ é a integral não massiva correspondente cujo resultado é conhecido:

$$\begin{aligned} J^{(2)}(l; 0, 0; a_1 + s, a_2 + t) &= \pi^{D/2} (l^2)^{D/2-a_1-a_2-s-t} \Gamma(D/2 - a_1 - s) \\ &\times \frac{\Gamma(D/2 - a_2 - t)\Gamma(a_1 + a_2 - D/2 + s + t)}{\Gamma(a_1 + s)\Gamma(a_2 + t)\Gamma(D - a_1 - a_2 - s - t)}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Substituindo este resultado em (2.59), obtém-se

$$\begin{aligned} J^{(2)}(l; m_1, m_2; a_1, a_2) &= \pi^{D/2} (l^2)^{D/2-a_1-a_2} \frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \\ &\times \int_{-i\infty}^{i\infty} ds dt \left(-\frac{m_1^2}{l^2}\right)^s \left(-\frac{m_2^2}{l^2}\right)^t \Gamma(-s)\Gamma(-t) \\ &\times \frac{\Gamma(D/2 - a_1 - s)\Gamma(D/2 - a_2 - t)\Gamma(a_1 + a_2 - D/2 + s + t)}{\Gamma(D - a_1 - a_2 - s - t)}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

A solução para esta integral pode ser obtida se os polos forem contornados pela esquerda, a saber

$$\begin{aligned}
 J^{(2)}(l; m_1, m_2; a_1, a_2) = & \pi^{D/2} (-m_2^2)^{D/2-a_1-a_2} \left\{ \frac{\Gamma(D/2-a_1)\Gamma(a_1+a_2-D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(a_2)} \right. \\
 & F_4 \left[a_1, a_1+a_2-D/2; D/2, a_1-D/2+1 \left| \frac{l^2}{m_2^2}, \frac{m_1^2}{m_2^2} \right. \right] \\
 & + \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right)^{D/2-a_1} \frac{\Gamma(a_1-D/2)}{\Gamma(a_1)} \\
 & \left. F_4 \left[a_2, D/2; D/2, D/2-a_1+1 \left| \frac{l^2}{m_2^2}, \frac{m_1^2}{m_2^2} \right. \right] \right\}, \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

onde F_4 é uma das funções de Appel [42], mostrada em (B.14). Outros casos em 1-loop foram tratados com sucesso, a exemplo do cálculo da função de 1, 2, 3 e N-pontos em 1-loop com expoentes arbitrários e massas nulas, iguais ou arbitrárias, em [18, 16, 17, 20]. Podemos então resumir este método na seguinte sequência:

a) Os denominadores da integral escalar de Feynman são escritos em termos da representação de Mellin-Barnes (integrais de contorno).

b) Avalia-se, através de outra técnica, as integrais remanescentes não massivas, nos momenta internos.

c) Escolhe-se o contorno de integração de interesse e avalia-se as integrais de contorno via teorema dos resíduos, obtendo a solução final em termos de séries hipergeométricas cujas variáveis são os momenta externos e as massas internas. Os demais contornos serão continuações analíticas do contorno escolhido.

Como pode ser visto, o uso da representação de Mellin-Barnes elimina as dificuldades na expansão do propagador. Também este método permite qualquer dos dois esquemas básicos de regularização, analítica ou dimensional.

2.5 A Integração em Dimensão Negativa

Uma outra técnica que tem sido usada para a avaliação de integrais de Feynman massivas e com denominadores com expoentes arbitrários é a da integração em dimensão negativa (NDIM) [27]. A técnica parte da integral padrão (2.11) que reescrevemos da forma

$$\int d^D k \frac{k^{2\alpha}}{[k^2+1]^\beta} = \pi^{D/2} \frac{\Gamma(\beta-\alpha-D/2)\Gamma(\alpha+D/2)}{\Gamma(\beta)\Gamma(D/2)}. \quad (2.63)$$

Aplicando-se a identidade (B.3), tem-se

$$\int d^D k \frac{k^{2\alpha}}{[k^2+1]^\beta} = \pi^{D/2} (-1)^{D/2} \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-D/2)}{\Gamma(1-\beta+\alpha+D/2)\Gamma(1-\alpha-D/2)}. \quad (2.64)$$

Usando-se agora o limite $\beta = 0$, segue

$$\int d^D k \, k^{2\alpha} = \pi^{D/2} (-1)^{D/2} \frac{\Gamma(1 - D/2)}{\Gamma(1 + \alpha + D/2) \Gamma(1 - \alpha - D/2)}. \quad (2.65)$$

Esta integral anula-se para α inteiro e $\alpha \geq 0$ [41]. Considerando D par e α inteiro, o resultado acima admite um valor não nulo que pode ser representado pela condição $\alpha + D/2 = 0$. Neste contexto, podemos propor duas interpretações: a) $\alpha > 0$ e $D < 0$ ou b) $\alpha < 0$ e $D > 0$ (vale ressaltar que esta segunda interpretação não foi usada na versão original [27]). Considerando a primeira interpretação, pode-se concluir que a expressão acima aponta para uma integração num espaço de dimensão $D < 0$ [27]. Com esta interpretação foram obtidos alguns resultados a exemplo do cálculo da função de Green para o oscilador harmônico [28]. Se considerarmos a segunda interpretação, $\alpha < 0$ e $D > 0$, podemos concluir que a expressão (2.65) representa a continuação analítica de (2.63) para $\alpha < 0$ com $\beta = 0$, onde a integral é realizada no espaço de dimensão positiva usual. O que nos indica que a identidade (B.3) representa uma continuação analítica.

Deste ponto em diante mostraremos a versão usual da técnica denominada de integração em dimensão negativa [29]. O NDIM tem-se mostrado uma potente ferramenta matemática quando aplicado por Suzuki e Schmidt [31]-[34] e também por Bentín [35] na avaliação de integrais associadas a diversos diagramas de Feynman em calibres covariantes e não-covariantes. Esta técnica transfere as dificuldades na avaliação das integrais para a resolução de sistemas lineares de equações de vínculo nas quais as variáveis são os expoentes dos propagadores, os índices das séries obtidas nas expansões e a dimensão D do espaço-tempo. O NDIM também permite a implementação das técnicas usuais de regularização das integrais. Os detalhes sobre a aplicação do NDIM serão mostrados no exemplo abaixo.

Consideremos o caso da função de 1-ponto $J^{(1)}$ já calculada na seção anterior. Seguindo o procedimento usual, o NDIM parte da integral do funcional gerador

$$\int d^D k \exp \left\{ -\alpha [k^2 - m^2] \right\} = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{D/2} \exp \left\{ \alpha m^2 \right\}, \quad (2.66)$$

onde usou-se (A.1). Ao expandir-se, em série de Taylor, ambos os lados da identidade acima, tem-se

$$\sum_{a=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^a}{a!} \int d^D k [k^2 - m^2]^a = \pi^{D/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^{j-D/2}}{j!} (m^2)^j. \quad (2.67)$$

Comparando-se os expoentes do parâmetro α obtemos $j = a + D/2$, do que resulta

$$\int d^D k [k^2 - m^2]^a = \pi^{D/2} (-1)^a \frac{\Gamma(1 + a)}{\Gamma(1 + a + D/2)} (m^2)^{D/2+a}. \quad (2.68)$$

Este resultado ainda não é o procurado pois até aqui $a \geq 0$. Faz-se necessário agora a continuação analítica deste resultado para $a \leq 0$. Para isto usamos a expressão (B.3) (ver Apêndice B), obtendo finalmente

$$J^{(1)}(m; -a) = \pi^{D/2} (-m^2)^{D/2+a} \frac{\Gamma(-a - D/2)}{\Gamma(-a)}. \quad (2.69)$$

Este resultado concorda com (2.57), sendo que aqui $a \leq 0$. Do exposto podemos agora resumir esta técnica na seqüência abaixo:

a) Inicialmente escreve-se a integral gaussiana convergente D -dimensional do gerador funcional, do tipo (2.66) onde o argumento da exponencial é dado pela combinação linear dos propagadores.

b) Escreve-se esta integral nas duas formas de séries de potências nos parâmetros α , do tipo (2.67).

c) Compara-se os expoentes dos parâmetros α nas duas formas de expansão e determina-se equações de vínculo nos índices das séries.

d) No exemplo acima o sistema de equações de vínculo foi reduzido a uma única equação, porém, em casos de 2-pontos deve-se solucionar este sistema escolhendo-se um conjunto de variáveis, e cada solução deve ser substituída na integral procurada, do tipo (2.67), obtendo-se um espectro de séries que serão usadas para compor as soluções de acordo com a região cinemática de interesse.

e) Efetua-se a continuação analítica das séries para valores negativos dos expoentes dos propagadores.

f) Agrupa-se as soluções parciais (dadas em termos de séries hipergeométricas) em conjuntos que possuem a mesma região cinemática de convergência ou dependência nos momenta e massas (será mostrado no Capítulo seguinte que este critério deverá ser modificado nos cálculos de funções de 3-pontos em diante).

g) As soluções finais serão dadas pelas somas das séries presentes em cada conjunto de mesma região cinemática.

Capítulo 3

Integrais escalares em 1-loop

Como já discutido no Capítulo anterior, as reduções tensoriais possibilitam que todas as integrais de Feynman, nos diversos processos em teoria de campos perturbativa, sejam reduzidas à integrais escalares cujos integrandos são escritos como o produto dos denominadores dos propagadores dos campos. Neste cenário tais denominadores das integrais escalares remanescentes podem possuir expoentes não necessariamente unitários, o que torna importante o desenvolvimento de técnicas de cálculo de integrais escalares com expoentes e massas arbitrários. No presente Capítulo, apresentaremos na primeira e segunda seções os cálculos de integrais escalares associadas a função de 2 e 3-pontos em 1-loop respectivamente, analisando seus casos particulares de maior interesse físico, bem como o critério para a escolha das séries que irão compor as soluções. Tendo em vista a similaridade dos resultados obtidos em cálculos perturbativos via NDIM e representação de Mellin-Barnes (MB), surge naturalmente a pergunta: são estes dois métodos equivalentes? Esta pergunta será parcialmente respondida na seção 3 onde mostramos, via NDIM, uma fórmula geral para o caso de n -pontos em 1-loop que concorda com os resultados via MB [17]. Parcialmente porque a equivalência para as outras regiões cinemáticas só poderá ser mostrada caso a caso, como na situação $n = 2$, discutida na seção 2. Finalmente mostramos, na seção 4, o caso de n -pontos via parametrização de Feynman que também concorda com os anteriores.

3.1 A função de 2-pontos em 1-loop

Consideremos agora o caso da função $J^{(2)}$ dada em (2.58). A integral F do funcional gerador deverá ser dada por

$$\mathfrak{S} = \int d^D k \exp \left\{ -\alpha_1 [k^2 - m_1^2] - \alpha_2 [(k-l)^2 - m_2^2] \right\}. \quad (3.1)$$

Após a integração em k , obtém-se

$$\mathfrak{S} = \frac{\pi^{D/2}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{D/2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} l^2 + \alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_2^2 \right\}, \quad (3.2)$$

que, expandindo em séries de Taylor, resulta

$$\mathfrak{S} = \pi^{D/2} \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{j_1+j_2} \alpha_2^{j_1+j_3}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{j_1+D/2}} \frac{(-l^2)^{j_1}}{j_1!} \frac{(m_1^2)^{j_2}}{j_2!} \frac{(m_2^2)^{j_3}}{j_3!}. \quad (3.3)$$

Se ainda usarmos a série multinomial

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^{-j_1-D/2} = \sum_{j_4, j_5=0}^{\infty} \Gamma(1 - j_1 - D/2) \frac{\alpha_1^{j_4} \alpha_2^{j_5}}{j_4! j_5!}, \quad (3.4)$$

onde deve-se impor o vínculo

$$D/2 = -j_1 - j_4 - j_5, \quad (3.5)$$

obtemos

$$\mathfrak{S} = \pi^{D/2} \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^{\infty} \Gamma(1 - j_1 - D/2) \frac{\alpha_1^{j_1+j_2+j_4} \alpha_2^{j_1+j_3+j_5}}{j_4! j_5!} \frac{(-l^2)^{j_1}}{j_1!} \frac{(m_1^2)^{j_2}}{j_2!} \frac{(m_2^2)^{j_3}}{j_3!}. \quad (3.6)$$

Comparando este resultado com a expansão de (3.1), expressa por

$$\mathfrak{S} = \sum_{a_1, a_2=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_1)^{a_1}}{a_1!} \frac{(-\alpha_2)^{a_2}}{a_2!} J^{(2)}(l; m_1, m_2; -a_1, -a_2), \quad (3.7)$$

podemos comparar os expoentes dos parâmetros α_1 e α_2 , obtendo

$$J^{(2)}(l; m_1, m_2; -a_1, -a_2) = \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - j_1 - D/2)}{j_4! j_5!} \frac{(-l^2)^{j_1}}{j_1!} \frac{(m_1^2)^{j_2}}{j_2!} \frac{(m_2^2)^{j_3}}{j_3!}, \quad (3.8)$$

que além do vínculo (3.5) possui ainda mais duas equações de vínculo, a saber

$$a_1 = j_1 + j_2 + j_4, \quad (3.9)$$

$$a_2 = j_1 + j_3 + j_5. \quad (3.10)$$

Vale ressaltar que o resultado (3.8) ainda é parcial pois não contém as soluções das equações de vínculo (3.5), (3.9) e (3.10). Nestas três equações existem cinco variáveis, os índices $j_1, \dots, j_5$ das cinco séries. Neste contexto, o número de soluções deste sistema será dado pelo número de combinações de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja

$$C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10. \quad (3.11)$$

Estas 10 soluções para as equações de vínculo estão mostradas na tabela 3.1 abaixo

Tabela-3.1

Solução	Forma explícita
S_1	$j_1 = -D/2 - j_4 - j_5$ $j_2 = a_1 + D/2$ $j_3 = a_2 + D/2$
S_2	$j_1 = a_2 - j_3 - j_5$ $j_2 = a_1 + D/2 + j_5$ $j_4 = -a_2 - D/2 + j_3$
S_3	$j_1 + j_5 = -D/2 - j_4$ $j_1 + j_2 = -a_1 - j_4$ $j_1 + j_5 = a_2 - j_3$
S_4	$j_1 + j_4 = -D/2 - j_5$ $j_1 + j_3 = a_2 - j_5$ $j_1 + j_4 = a_1 - j_2$
S_5	$j_1 = a_1 - j_2 - j_4$ $j_3 = a_2 + D/2 + j_4$ $j_5 = -a_1 - D/2 + j_2$
S_6	$j_1 = a_1 + a_2 + D/2$ $j_4 = -a_2 - D/2 + j_3$ $j_5 = -a_1 - D/2 + j_2$
S_7	$j_2 = a_1 + D/2 + j_5$ $j_3 = a_2 - j_1 - j_5$ $j_4 = -D/2 - j_1 - j_5$
S_8	$j_2 = a_1 - j_1 - j_4$ $j_3 = a_2 + D/2 + j_4$ $j_5 = -D/2 - j_1 - j_4$
S_9	$j_2 = a_1 + a_2 + D/2 - j_1 - j_3$ $j_4 = -a_2 - D/2 + j_3$ $j_5 = a_2 - j_1 - j_3$
S_{10}	$j_3 = a_1 + a_2 + D/2 - j_1 - j_2$ $j_4 = a_1 - j_1 - j_2$ $j_5 = -a_1 - D/2 + j_2.$

Estas soluções quando substituídas na expressão (3.8) resultam em três soluções independentes para a função $J^{(2)}$ dadas por

$$\begin{aligned}
J_1^{(2)}(l; m_1, m_2; -a_1, -a_2) &= J_{S_7}^{(2)} + J_{S_{10}}^{(2)}, \\
J_2^{(2)}(l; m_1, m_2; -a_1, -a_2) &= J_{S_8}^{(2)} + J_{S_9}^{(2)},
\end{aligned}$$

$$J_3^{(2)}(l; m_1, m_2; -a_1, -a_2) = J_{S_2}^{(2)} + J_{S_5}^{(2)} + J_{S_6}^{(2)}, \quad (3.12)$$

sendo $J_{S_1}^{(2)} = 0$ e $J_{S_3}^{(2)}$ e $J_{S_4}^{(2)}$ impossíveis. As três expressões de $J_1^{(2)}$, $J_2^{(2)}$ e $J_3^{(2)}$ representam três soluções analiticamente continuadas para a integral $J^{(2)}$ em regiões cinemáticas distintas. A solução $J_1^{(2)}$, após a continuação analítica para $a_1, a_2 \leq 0$, é idêntica a obtida em (2.62), e $J_2^{(2)}$ é a sua simétrica pela troca $(a_1, m_1) \leftrightarrow (a_2, m_2)$ quando $m_2 < m_1$, dada por

$$\begin{aligned} J_2^{(2)} = & \pi^{D/2} (-m_1^2)^{\sigma_2} \left\{ \frac{\Gamma(D/2 + a_2)\Gamma(-\sigma_2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(-a_1)} \right. \\ & F_4 \left[-a_2, -\sigma_2; D/2, -a_2 - D/2 + 1 \mid \frac{l^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2} \right] \\ & + \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right)^{D/2+a_2} \frac{\Gamma(-a_2 - D/2)}{\Gamma(-a_2)} \\ & \left. F_4 \left[-a_1, D/2; D/2, D/2 + a_2 + 1 \mid \frac{l^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A solução $J_2^{(3)}$ é, ainda sem a continuação analítica, expressa por

$$\begin{aligned} J_3^{(2)} = & \pi^{D/2} (l^2)^{a_2} (-m_1^2)^{a_1+D/2} \frac{(-1)^{D/2}\Gamma(1+a_1)}{\Gamma(1+a_1+D/2)} \\ & \times F_4 \left[1 - a_2 - D/2, -a_2; 1 + a_1 + D/2, 1 - a_2 - D/2 \mid \frac{m_1^2}{l^2}, \frac{m_2^2}{l^2} \right] \\ & + \pi^{D/2} (l^2)^{a_1} (-m_2^2)^{a_2+D/2} \frac{(-1)^{D/2}\Gamma(1+a_2)}{\Gamma(1+a_2+D/2)} \\ & \times F_4 \left[1 - a_1 - D/2, -a_1; 1 + a_2 + D/2, 1 - a_1 - D/2 \mid \frac{m_1^2}{l^2}, \frac{m_2^2}{l^2} \right] \\ & + \pi^{D/2} (l^2)^{\sigma_2} \frac{(-1)^{D/2}\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\Gamma(1-a_1-a_2-D)}{\Gamma(1-a_1-D/2)\Gamma(1-a_2-D/2)\Gamma(1+a_1+a_2+D/2)} \\ & \times F_4 \left[1 - \sigma_2 - D/2, -\sigma_2; 1 - a_1 - D/2, 1 - a_2 - D/2 \mid \frac{m_1^2}{l^2}, \frac{m_2^2}{l^2} \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $\sigma_2 = a_1 + a_2 + D/2$ (a solução acima foi expressa apenas para que o leitor tenha uma maior clareza sobre o processo de continuação analítica usado neste método).

Após a continuação analítica, obtém-se

$$\begin{aligned} J_3^{(2)}{}_{AC} = & \pi^{D/2} (l^2)^{a_2} (-m_1^2)^{a_1+D/2} (-a_1)_{-D/2} \\ & \times F_4 \left[1 - a_2 - D/2, -a_2; 1 + a_1 + D/2, 1 - a_2 - D/2 \mid \frac{m_1^2}{l^2}, \frac{m_2^2}{l^2} \right] \\ & + \pi^{D/2} (l^2)^{a_1} (-m_2^2)^{a_2+D/2} (-a_2)_{-D/2} \\ & \times F_4 \left[1 - a_1 - D/2, -a_1; 1 + a_2 + D/2, 1 - a_1 - D/2 \mid \frac{m_1^2}{l^2}, \frac{m_2^2}{l^2} \right] \\ & + \pi^{D/2} (l^2)^{\sigma_2} (-a_1)_{-a_2-D/2} (-a_2)_{2a_2+D/2} (\sigma_2 + D/2)_{-a_2-D/2} \\ & \times F_4 \left[1 - \sigma_2 - D/2, -\sigma_2; 1 - a_1 - D/2, 1 - a_2 - D/2 \mid \frac{m_1^2}{l^2}, \frac{m_2^2}{l^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Estes resultados foram obtidos inicialmente, usando a representação de Mellin-Barnes, em [18] e recentemente, via NDIM, por nós em [36].

Alguns resultados especiais são interessantes de serem explicitados. Por exemplo, quando $m_1 = m \neq 0$ e $m_2 = 0$, a expressão (3.13) pode representar a integral associada a auto-energia de férmions. Neste caso a solução (3.13) é reescrita da forma

$$J^{(2)}(l; 0, m; a_1, a_2) = \pi^{D/2} (-m^2)^{\sigma_2} (-a_2)_{-a_1-D/2} (D/2)_{a_1} \times {}_2F_1 \left[-a_1, -\sigma_2; D/2 : \left| \frac{l^2}{m^2} \right| \right], \quad (3.16)$$

onde ${}_2F_1$ é a função de Gauss (ver Apêndice B, equação (B.1)). Note que esta solução é obtida para a região cinemática $l^2 < m^2$, não havendo portanto divergência ultravioleta na série ${}_2F_1$, porém no seu coeficiente quando $D \rightarrow 4$ e, a esperada divergência na região infravermelho não aparece aqui. Se implementarmos a regularização dimensional, $a_1 = a_2 = -1$, $D = 4 - 2\epsilon$ com $\epsilon \rightarrow 0$, temos

$$J^{(2)}(l; 0, m; -1, -1) = \Delta - \pi^2 \left[\ln(-m^2) + \ln \left(1 - \frac{l^2}{m^2} \right) + \frac{m^2}{l^2} \ln \left(1 - \frac{l^2}{m^2} \right) - 1 \right], \quad (3.17)$$

onde $\Delta = \pi^2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \ln \pi \right)$. Deve ser observado também que obteremos o mesmo resultado se implementarmos a continuação analítica, $a_1 = a_2 = 1 + \epsilon/2$ com $\epsilon \rightarrow 0$. Este resultado, a menos de um fator constante, concorda com (2.20).

A continuação analítica da solução (3.16) para a região cinemática $l^2 > m^2$ pode ser feita usando-se a fórmula (B.5) ou tomando-se $m_1 = m$ e $m_2 = 0$ em (3.15). Explicitando este resultado, temos

$$\begin{aligned} J^{(2)}(l; m, 0; -a_1, -a_2) &= \pi^{D/2} (l^2)^{a_2} (-m^2)^{a_1+D/2} (-a_1)_{-D/2} \\ &\times {}_2F_1 \left[1 - a_2 - D/2, -a_2; 1 + a_1 + D/2 : \left| \frac{m^2}{l^2} \right| \right] \\ &+ \pi^{D/2} (l^2)^{\sigma_2} (-a_1)_{-a_2-D/2} (-a_2)_{2a_2+D/2} (\sigma_2 + D/2)_{-a_2-D/2} \\ &\times {}_2F_1 \left[1 - \sigma_2 - D/2, -\sigma_2; 1 - a_1 - D/2 : \left| \frac{m^2}{l^2} \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Se ainda tomarmos o limite associado a férmions não massivos, $m = 0$, obtemos

$$J^{(2)}(l; 0, 0; -a_1, -a_2) = \pi^{D/2} (l^2)^{\sigma_2} (-a_1)_{-a_2-D/2} (-a_2)_{2a_2+D/2} (\sigma_2 + D/2)_{-a_2-D/2}. \quad (3.19)$$

Outro caso especial de relevância física se apresenta quando $m_1 = m_2 = m$. Este caso está associado com o diagrama de polarização do vácuo da Fig.-1.1. A

solução da integral pode ser obtida do resultado (3.13) utilizando também a fórmula da soma (B.4), a saber

$$J_2^{(2)}(l; m, -a_1, -a_2) = \pi^{D/2} (-m^2)^{\sigma_2} \frac{\Gamma(-a_1 - a_2 - D/2)}{\Gamma(-a_1 - a_2)} \times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -a_1, -a_2, -a_1 - a_2 - D/2 \\ -\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{1-a_1-a_2}{2} \end{matrix} \middle| \frac{l^2}{4m^2} \right]. \quad (3.20)$$

Este resultado concorda com [18]. Esta solução apresentará divergência quando D for inteiro par e a_1, a_2 inteiros $a_1, a_2 \leq 0$, podendo esta ser regularizada por algum dos métodos convencionais já mencionados. Todavia se D for ímpar, a expressão (3.20) será finita, não necessitando ser regularizada. Assim, se $D = 3$ e $a_1 = a_2 = -1$, e usando (A.6) e (B.9) temos

$$J_2^{(2)}(l; m, m, 1, 1)_{D=3} = 2\pi^2 \frac{1}{l} \arctan \left(i \frac{l}{2m} \right). \quad (3.21)$$

A continuação analítica de (3.20) para $l^2 > 4m^2$ pode ser obtida tomando $m_1 = m_2 = m$ em (3.15) e usando (B.15), obtendo

$$\begin{aligned} & J_2^{(2)}(l; m, -a_1, -a_2) \\ &= \pi^{D/2} (-m^2)^{\sigma_2} \left\{ \frac{\Gamma(a_1 + D/2) \Gamma(a_2 + D/2) \Gamma(a_1 + a_2 - D/2)}{\Gamma(-a_1) \Gamma(-a_2) \Gamma(a_1 + a_2 + D)} \right. \\ &\times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -\sigma_2, \frac{1-\sigma_2-D/2}{2}, \sigma_2/2 \\ 1-a_1-D/2, 1-a_2-D/2 \end{matrix} \middle| \frac{4m^2}{l^2} \right] \\ &+ \left(-\frac{m^2}{l^2} \right)^{a_1+D/2} \frac{\Gamma(-a_1 - D/2)}{\Gamma(-a_1)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -a_2, \frac{1+a_1-a_2}{2}, \frac{2+a_1-a_2}{2} \\ 1+a_1+D/2, 1+a_1-a_2 \end{matrix} \middle| \frac{4m^2}{l^2} \right] \\ &+ \left. \left(-\frac{m^2}{l^2} \right)^{a_2+D/2} \frac{\Gamma(-a_2 - D/2)}{\Gamma(-a_2)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -a_1, \frac{1-a_1+a_2}{2}, \frac{2-a_1+a_2}{2} \\ 1+a_2+D/2, 1-a_1+a_2 \end{matrix} \middle| \frac{4m^2}{l^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ainda podemos escrever este resultado para $a_1 = a_2 = -1$ e $D = 4 - 2\epsilon$, usando (B.10) e (B.11) obtendo

$$\begin{aligned} J_2^{(2)}(l; m, 1, 1) &= \pi^{D/2} (-m^2)^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \left\{ {}_2F_1 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \middle| \frac{4m^2}{l^2} \right] \right. \\ &+ \frac{m^2}{l^2} {}_2F_1 \left[1, \frac{1}{2}; 2 \middle| \frac{4m^2}{l^2} \right] + \frac{m^2}{l^2} {}_2F_1 \left[1, \frac{1}{2}; 2 \middle| \frac{4m^2}{l^2} \right] \Big\} \\ &= \pi^{D/2} (-m^2)^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \\ &\times \left\{ \cos \left[\arcsin \left(\frac{2m}{l} \right) \right] + \frac{4 \frac{m^2}{l^2}}{\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{l^2}} \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Cada resultado particular acima para $J^{(2)}$ pode ser também obtido pela implementação do método em estudo sem tomar os casos gerais.

Como pode ser visto na abordagem acima, a idéia da integração em dimensão negativa toma um lugar mais a sombra tendo em vista que a integração é avaliada da forma usual porém com os propagadores possuindo expoentes positivos. Entretanto, a ênfase passa a ser dada na continuação analítica dos expoentes dos propagadores para valores não positivos. Esta continuação é feita nos coeficientes que multiplicam as séries hipergeométricas obtidas na solução.

Uma outra forma de solução para a função de 2-pontos pode ser obtida se reescrevemos as expressões (3.1) e (3.2) da forma

$$\begin{aligned} & \sum_{a_1, a_2=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_1)^{a_1}}{a_1!} \frac{(-\alpha_2)^{a_2}}{a_2!} J^{(2)}(l; m_1, m_2; -a_1, -a_2) \\ &= \sum_{j_0=0}^{\infty} \frac{\pi^{D/2} (m_2^2)^{j_0}}{j_0! (\alpha_1 + \alpha_2)^{D/2-j_0}} \left\{ 1 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \frac{l^2}{m_2^2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \right) \right\}^{j_0} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Note que a expansão do termo com expoente j_0 pode ser feita de maneira única pois $\frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} < 1$ e $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} < 1$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{a_1, a_2=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_1)^{a_1}}{a_1!} \frac{(-\alpha_2)^{a_2}}{a_2!} J^{(2)}(l; m_1, m_2; -a_1, -a_2) \\ &= \sum_{j_0, j_1, j_2=0}^{\infty} \frac{\pi^{D/2} (m_2^2)^{j_0} \alpha_1^{j_1+j_2} \alpha_2^{j_1}}{\Gamma(1+j_0) \Gamma(-j_0) (\alpha_1 + \alpha_2)^{D/2-j_0+2j_1+j_2}} \frac{\left(\frac{l^2}{m_2^2}\right)^{j_1}}{j_1!} \frac{\left(1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\right)^{j_2}}{j_2!}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Expandindo também a soma $(\alpha_1 + \alpha_2)^{D/2-j_0+2j_1+j_2}$ de forma similar a (3.4) e comparando os expoentes dos parâmetros α_1 e α_2 , temos

$$\begin{aligned} & J^{(2)}(l; m_1, m_2; -a_1, -a_2) \\ &= \pi^{D/2} (-1)^{a_1+a_2} \Gamma(1+a_1) \Gamma(1+a_2) \\ &\times \sum_{j_0, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-D/2+j_0-2j_1-j_2) (m_2^2)^{j_0}}{\Gamma(1+j_0) \Gamma(-j_0) \Gamma(1+j_3) \Gamma(1+j_4)} \frac{\left(\frac{l^2}{m_2^2}\right)^{j_1}}{j_1!} \frac{\left(1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\right)^{j_2}}{j_2!}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

com os vínculos

$$a_1 = j_1 + j_2 + j_3, \quad (3.27)$$

$$a_2 = j_1 + j_4, \quad (3.28)$$

$$D/2 = j_0 - 2j_1 - j_2 - j_3 - j_4, \quad (3.29)$$

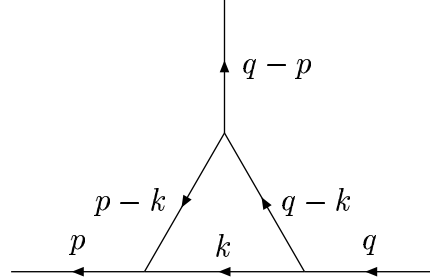


Fig.-2.1: Diagrama de correção de vértice

que pode ser solucionada da forma

$$j_0 = a_1 + a_2 + D/2 = \sigma_2, \quad (3.30)$$

$$j_3 = a_1 - j_j - j_2, \quad (3.31)$$

$$j_4 = a_2 - j_1, \quad (3.32)$$

que após a substituição em (3.26) e a continuação analítica para $a_1, a_2 \leq 0$, obtém-se finalmente

$$\begin{aligned} J^{(2)}(l; m_1, m_2; -a_1, -a_2) &= \pi^{D/2} (-m_2^2)^{\sigma_2} \frac{\Gamma(-\sigma_2)}{\Gamma(-a_1 - a_2)} \\ &\times F_{1;0;0}^{2;1;0} \left[\begin{matrix} (-\sigma_2 : 1 : 1); (-a_1 : 1 : 1); (-a_2 : 1) \\ (-a_1 - a_2 : 2 : 1) \end{matrix} \middle| \frac{l^2}{m_2^2}; 1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

A partir deste resultado pode-se, usando as continuações analíticas para a função de Gauss dadas em (B.7) e (B.8), obter as outras formas de solução para a função de 2-pontos calculadas anteriormente.

3.2 A função de 3-pontos em 1-loop

Apresentamos aqui os resultados para a integral escalar de Feynman associada à função de 3-pontos presente em correções de vértice do tipo mostrada na Fig.-2.1.

A forma mais geral para a integral escalar associada ao diagrama acima é

$$J^{(3)}(a, b, c, p, q, m_1, m_2, m_3) = \int \frac{d^D k}{[k^2 - m_1^2]^a [(k - p)^2 - m_2^2]^b [(k - q)^2 - m_3^2]^c}. \quad (3.34)$$

onde $a, b, c > 0$.

No contexto do NDIM, tomamos a correspondente integral

$$\begin{aligned} & \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_1)^a}{a!} \frac{(-\alpha_2)^b}{b!} \frac{(-\alpha_3)^c}{c!} J^{(3)}(-a, -b, -c, p, q, m_1, m_2, m_3) \\ &= \int d^D k \exp \left\{ -\alpha_1[k^2 - m_1^2] - \alpha_2[(k-p)^2 - m_2^2] - \alpha_3[(k-q)^2 - m_3^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde α_1, α_2 e α_3 são parâmetros arbitrários. A integral gaussiana do lado direito da equação anterior pode ser avaliada facilmente com o uso de (A.1). Logo, a expressão acima é imediatamente escrita da forma

$$\begin{aligned} & \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_1)^a}{a!} \frac{(-\alpha_2)^b}{b!} \frac{(-\alpha_3)^c}{c!} J^{(3)}(-a, -b, -c, p, q, m_1, m_2, m_3) \\ &= \left[\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right]^{D/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha_2 \alpha_3 r^2 + \alpha_1 \alpha_2 p^2 + \alpha_1 \alpha_3 q^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} + \alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_2^2 + \alpha_3 m_3^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $r = p - q$. Após a expansão em séries de potências de α_1, α_2 e α_3 , e comparando os expoentes destes parâmetros nos dois lados da identidade acima, temos

$$\begin{aligned} & J^{(3)}(-a, -b, -c, p, q, m_1, m_2, m_3) \\ &= \pi^{D/2} (-1)^{-a-b-c} \Gamma(1+a) \Gamma(1+b) \Gamma(1+c) \\ &\times \sum_{j_1, \dots, j_6=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-j_1-j_2-j_3-D/2)}{j_7! j_8! j_9!} \frac{(-p^2)^{j_1}}{j_1!} \frac{(-q^2)^{j_2}}{j_2!} \frac{(-r^2)^{j_3}}{j_3!} \frac{(m_1^2)^{j_4}}{j_4!} \frac{(m_2^2)^{j_5}}{j_5!} \frac{(m_3^2)^{j_6}}{j_6!}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

que satisfazem as relações de vínculo

$$a = j_1 + j_2 + j_4 + j_7, \quad (3.38)$$

$$b = j_1 + j_3 + j_5 + j_8, \quad (3.39)$$

$$c = j_2 + j_3 + j_6 + j_9, \quad (3.40)$$

$$\frac{D}{2} = -j_1 - j_2 - j_3 - j_7 - j_8 - j_9, \quad (3.41)$$

onde a última relação resulta da expansão multinomial de $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{-D/2-j_1-j_2-j_3}$. Nas relações de vínculo acima, temos um sistema linear de quatro equações com nove variáveis, os índices das $j_1, \dots, j_9$. Portanto, suas soluções poderão ser obtidas escrevendo-se quatro destas variáveis em termos das outras cinco consideradas livres. Neste contexto, existem $C_{9,4} = 9!/4!5! = 126$ maneiras diferentes de se construir as soluções para o sistema acima, das quais 45 são triviais (o determinante do sistema é nulo), e 12 são nulas identicamente pois possuem coeficientes do tipo $\frac{1}{\Gamma(0)}$.

Restam finalmente 69 soluções não triviais para este sistema. Estas 69 soluções do sistema acima quando substituídas na expressão (3.37) resultam em 69 séries hipergeométricas e do tipo hipergeométricas de 5 variáveis (dadas em termos dos momenta externos p, q, r e massas internas m_1, m_2, m_3), mostradas nas Tabelas-1 e 2 no final deste Capítulo. A expressão para cada série $J_n^{(3)}$, $n = 1, 2, \dots, 69$, é dada por $J_n = A_n \Psi_l$, $l = 1, 2, 3, 4$, sendo A_n os coeficientes que multiplicam as séries mostrados na Tabela-1 e Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 e Ψ_4 , funções hipergeométricas (ver Apêndice B) cujos parâmetros e variáveis (considere $\sigma = a + b + c + D/2$) estão mostrados na Tabela-2 e, as relações entre n e l são dadas na tabela abaixo,

n	1, ..., 27	28, ..., 51	52, ..., 63	64, ..., 69
l	1	2	3	4

A análise dos casos particulares da função $J^{(3)}$ foi inicialmente mostrada em [18] e mais recentemente em [37]. Tal análise pode ser feita, através do NDIM, impondo-se as particularizações em todas as soluções presentes nas Tabelas 1 e 2 e expressando a solução final como a soma das soluções independentes remanescentes. Por exemplo, se tomarmos $c = 0$ na equação de vínculo (3.40) e conseqüentemente $j_2 = j_3 = j_6 = j_9 = 0$, restarão 3 equações de vínculo e o problema se reduzirá ao caso da função de 2-pontos $J^{(2)}$, obtida na seção anterior.

Considerando o caso particular $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ nas séries das Tabelas -1 e 2, (que é equivalente a resolver o sistema de equações de vínculos acima para $j_4 = j_5 = j_6 = 0$) que permitem este limite (aquelas em que as massas não estão nos denominadores das variáveis das séries), obtemos 3 diferentes soluções, $J_1^{(3)}$, $J_2^{(3)}$ e $J_3^{(3)}$, cada uma escrita como uma soma de quatro funções hipergeométricas de Appel F_4 , listadas abaixo

$$J_1^{(3)}(-a, -b, -c; p, q) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \quad (3.42)$$

$$J_2^{(3)}(-a, -b, -c; p, q) = J_5 + J_6 + J_7 + J_8, \quad (3.43)$$

$$J_3^{(3)}(-a, -b, -c; p, q) = J_9 + J_{10} + J_{11} + J_{12}, \quad (3.44)$$

$$(3.45)$$

onde as expressões para J_n , $n = 1, \dots, 12$, (obtidas das Tabelas-1 e 2) são dados por $J_n = B_n F_4$, os coeficientes B_n mostrados na Tabela-3 e os parâmetros e variáveis das funções F_4 na Tabela-4. Explicitando a solução $J_3^{(3)}$, obtemos

$$J_3^{(3)}(-a, -b, -c, p, q, r) = \pi^{D/2} (p^2)^\sigma \left\{ \left(\frac{r^2}{p^2} \right)^{\sigma-a} \left(\frac{q^2}{p^2} \right)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-c-D/2} (-b)_{-c-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}} \right. \\ \left. \times F_4 \left[\begin{matrix} c+D/2, \sigma+D/2 \\ 1-a+\sigma, 1-b+\sigma \end{matrix} \middle| \frac{r^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{q^2}{p^2} \right)^{\sigma-b} \frac{(-a)_\sigma (-c)_{\sigma-b}}{(b-\sigma)_{2\sigma-b+D/2}} \\
& \times F_4 \left[\begin{matrix} -b, a+D/2 \\ 1+a-\sigma, 1-b+\sigma \end{matrix} \middle| \frac{r^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2} \right] \\
& + \left(\frac{r^2}{p^2} \right)^{\sigma-a} \frac{(-b)_\sigma (-c)_{\sigma-a}}{(a-\sigma)_{2\sigma-a+D/2}} \\
& \times F_4 \left[\begin{matrix} -a, b+D/2 \\ 1-a+\sigma, 1+b-\sigma \end{matrix} \middle| \frac{r^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2} \right] \\
& + \frac{(-a)_\sigma (-b)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}} \\
& \times F_4 \left[\begin{matrix} -c, -\sigma \\ 1+a-\sigma, 1+b-\sigma \end{matrix} \middle| \frac{r^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2} \right] \Bigg\}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Um segundo caso particular da integral $J^{(3)}$ pode ser obtido para $m_1 = m$ e $m_2 = m_3 = 0$, ou seja $j_5 = j_6 = 0$. Seguindo o mesmo procedimento anterior, obtemos 23 soluções para o sistema de vínculos para a integral $J^{(3)}(p, q, r; m, 0, 0)$, mostradas nas Tabelas-5 e 6 onde cada solução $J_n^{(3)}$ do sistema é dada por $J_n^{(3)} = C_n T_l$; $l = 1, \dots, 8$; $n = 1, \dots, 23$; os coeficientes C_n estão mostrados na Tabela-5, as variáveis e parâmetros das hipergeométricas T_l (ver Apêndice B) estão mostrados na Tabela-6 e a relação entre n e l é mostrada na Tabela abaixo.

n	1, 2, 3	4	5, $\dots$, 8	9, $\dots$, 12	13, $\dots$, 16	17, 18	19, $\dots$, 22	23
l	1	2	3	4	5	6	7	8

A solução J_{23} é escrita de forma explícita por

$$\begin{aligned}
J^{(3)} &= J_1^{(3)} + J_2^{(3)} \\
&= \pi^{D/2} (-m^2)^{\sigma_3} (z_3)^{\sigma_3-a} \frac{(-b)_{-\sigma_3} (-c)_{-\sigma_3}}{(a-\sigma_3)_{-2\sigma_3+D/2}} \\
&\times T_1 \left[\begin{matrix} -a, c+D/2, b+D/2 \\ \sigma-a+D/2, 1-a+\sigma \end{matrix} \middle| \frac{p^2}{m^2}, \frac{q^2}{m^2}, -\frac{r^2}{m^2} \right] \\
&+ \pi^{D/2} (-m^2)^{\sigma_3} \frac{(-a)_{\sigma_3}}{(-\sigma_3)_{\sigma_3+D/2}} T_1 \left[\begin{matrix} -\sigma_3, -b, -c \\ D/2, 1+a-\sigma_3 \end{matrix} \middle| \frac{p^2}{m^2}, \frac{q^2}{m^2}, -\frac{r^2}{m^2} \right] \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Para o caso particular em que $m_1 = 0$ e $m_2 = m_3 = m$ ($j_4 = 0$), obtivemos 32 soluções para o sistema de vínculos. As soluções $J_n^{(3)}$ são mostradas nas Tabelas-7 e 8 e são tais que $J_n^{(3)} = D_n R_l$, $n = 1, \dots, 29$, $l = 1, \dots, 9$, $J_{30}^{(3)} = D_{30} T_9$, $J_{31}^{(3)} = D_{31} T_9$ e $J_{32}^{(3)} = D_{32} T_{10}$, onde os coeficientes D_n estão mostrados na Tabela-7 e os parâmetros e variáveis das hipergeométricas $R_1, \dots, R_9, T_9$ e T_{10} (ver Apêndice B) na Tabela-8,

onde $J_n = D_n R_l$, para $n = 1, \dots, 29$ e $l = 1, \dots, 9$, e as relações entre n e l são dadas pela Tabela abaixo.

n	1, ..., 6	7, 8	9, ..., 12	13, ..., 16	17, 18	19, ..., 22	23, ..., 26	27, 28	29
l	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Explicitando uma solução para $J^{(3)}$, temos

$$J^{(3)}(p, q, r; 0, m, m) = J_1^{(3)} = \pi^{D/2} (-m^2)^{\sigma_3} \frac{(D/2)_a}{(-\sigma_3)_{a+D/2}} \times T_{10} \left[\begin{matrix} -\sigma_3, -a, -b, -c, a + D/2 \\ D/2, -b - c \end{matrix} \middle| \frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2} \right] \quad (3.48)$$

Finalmente, para o caso onde $m_1 = m_2 = m_3 = m$, obtivemos 40 soluções para o sistema de vínculos, e as séries $J_n^{(3)}$, $n = 1, \dots, 40$ são dadas por $J_n = E_n \Psi_l$, $n = 1, \dots, 33$, $l = 1, 2, 3, 4$, onde a relação entre n e l é dada pela tabela abaixo,

n	1, ..., 15	16, ..., 21	22, ..., 27	28, ..., 33
l	1	2	3	4

e $J_n = E_n R_{10}$, $n = 34, \dots, 39$ e $J_{40} = E_{40} T_{11}$ onde os coeficientes E_n estão mostrados na Tabela-9 e os parâmetros e variáveis das hipergeométricas $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, R_{10}$ e T_{11} (ver Apêndice B) na Tabela-10. Explicitando uma solução para $J^{(3)}$, temos

$$J^{(3)}(p, q, r; m, m, m) = J_{40} = \pi^{D/2} (-m^2)^{\sigma_3} \frac{1}{(-\sigma_3)_{D/2}} \times T_{11} \left[\begin{matrix} -\sigma_3, -a, -b, -c \\ -\sigma_3 + D/2 \end{matrix} \middle| \frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2} \right]. \quad (3.49)$$

Todas as séries que deverão ser usadas para especificar uma solução geral para a função $J^{(3)}$ (com massas m_1, m_2 e m_3 genéricas) estão presentes nas Tabelas-1 e 2. O critério até aqui usado para a escolha das séries que irão compor uma dada solução foi o da soma das séries que possuem a mesma dependência nos momenta externos e nas massas. Todavia tal critério não parece ser adequado para casos gerais. Esta conclusão é confirmada quando comparamos os resultados obtidos via NDIM com aqueles obtidos via representação de Mellin-Barnes. Aplicando o critério acima, as soluções gerais para a função de 3-pontos deveriam ser escritas em termos de uma das séries presentes na Tabela-2. Entretanto, se reescrevermos a expressão original (3.36) da forma

$$\sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_1)^a}{a!} \frac{(-\alpha_2)^b}{b!} \frac{(-\alpha_3)^c}{c!} J^{(3)}(-a, -b, -c, p, q, m_1, m_2, m_3)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right]^{D/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha_2 \alpha_3 r^2 + \alpha_1 \alpha_2 p^2 + \alpha_1 \alpha_3 q^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right. \\
&\quad \left. - \alpha_1 (m_3^2 - m_1^2) - \alpha_2 (m_3^2 - m_2^2) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) m_3^2 \right\},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

e seguirmos o mesmo procedimento adotado de (3.24) a (3.33), obtemos a solução em termos de apenas uma série, a saber

$$\begin{aligned}
J^{(3)} &= \pi^{D/2} (-m_3^2)^{D/2-a_1-a_2-a_3} \frac{\Gamma(-\sigma_3)}{\Gamma(-a_1-a_2-a_3)} \\
&\times \sum_{j_1,2,3,4,5=0}^{\infty} \frac{(-\sigma_3)_{j_1+\dots+j_5} (-a_1)_{j_1+j_4} (-a_2)_{j_2+j_5} (-a_3)_{j_3}}{(-a_1-a_2-a_3)_{2j_1+2j_2+2j_3+j_4+j_5}} \\
&\times \frac{\left(\frac{p^2}{m_3^2}\right)^{j_1} \left(\frac{q^2}{m_3^2}\right)^{j_2} \left(\frac{r^2}{m_3^2}\right)^{j_3} \left(1 - \frac{m_1^2}{m_3^2}\right)^{j_4} \left(1 - \frac{m_2^2}{m_3^2}\right)^{j_5}}{j_1! j_2! j_3! j_4! j_5!}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Esta solução pode ser continuada analiticamente se usarmos a fórmula (B.8) para as somas nos índices j_4 e j_5 , obtendo

$$\begin{aligned}
J^{(3)} &= J_{48}^{(3)} + J_{59}^{(3)} + J_{63}^{(3)} \\
&= \pi^{D/2} (-m_3^2)^c (-m_1^2)^{\sigma_3-c} (D/2)_b (-a)_{-b-D/2} \\
&\times \Psi_2 \left[\begin{matrix} -c, -b, b+D/2 \\ 1+\sigma_3-c, D/2 \end{matrix} \middle| \frac{q^2}{m_3^2}, \frac{m_1^2}{m_3^2}, -\frac{p^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2}, \frac{r^2}{m_3^2} \right] \\
&+ \pi^{D/2} (-m_2^2)^{b+D/2} (-m_1^2)^a (-m_3^2)^c (-b)_{-D/2} \\
&\times \Psi_3 \left[\begin{matrix} D/2, -a, -c \\ 1+b+D/2, D/2 \end{matrix} \middle| -\frac{m_2^2 q^2}{m_1^2 m_3^2}, \frac{p^2}{m_1^2}, \frac{r^2}{m_3^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_3^2} \right] \\
&+ \pi^{D/2} (-m_3^2)^{\sigma_3} (D/2)_{a+b} (-c)_{-a-b-D/2} \\
&\times \Psi_3 \left[\begin{matrix} -\sigma_3, -a, -b \\ 1-\sigma_3+c, D/2 \end{matrix} \middle| -\frac{p^2}{m_3^2}, \frac{q^2}{m_3^2}, \frac{r^2}{m_3^2}, \frac{m_1^2}{m_3^2}, \frac{m_2^2}{m_3^2} \right].
\end{aligned} \tag{3.52}$$

As demais soluções podem ser obtidas utilizando as simetrias da integral original como por exemplo $J^{(3)} = J_{50} + J_{58} + J_{61}$ e $J^{(3)} = J_{46} + J_{60} + J_{62}$ ou pelas continuações analíticas obtidas via fórmula (B.7).

3.3 A função de n -pontos em 1-loop

Seguindo o mesmo procedimento requerido para a implementação do NDIM, apresentamos agora a generalização dos resultados anteriores para o caso de integrais escalares associadas a diagramas de Feynman com n linhas internas em 1-loop. Este resultado foi inicialmente calculado via representação de Mellin-Barnes em

[17]. Consideraremos que um propagador escalar associado a i -ésima linha interna deste diagrama possua expoente a_i , massa m_i e momentum $k - l_i$, onde l_i é dado em termos dos momenta externos. Neste cenário, a integral funcional utilizada no NDIM será dada por

$$\int d^D k \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \alpha_i [(k - l_i)^2 - m_i^2] \right\}. \quad (3.53)$$

Expandindo em séries de Taylor o argumento da integral anterior e comparando com a expansão do resultado da integral em k , temos

$$\begin{aligned} \sum_{\{a_i\}=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_i)^{a_i}}{a_i!} J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) &= \left(\frac{\pi}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \right)^{D/2} \\ &\times \exp \left\{ - \frac{\sum_{i>j=1}^n \alpha_i \alpha_j l_{ij}^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde temos usado

$$\frac{(\sum_{i=1}^n \alpha_i l_i)^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} - \sum_{i=1}^n \alpha_i l_i^2 = - \frac{\sum_{i>j=1}^n \alpha_i \alpha_j l_{ij}^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad (3.55)$$

$l_{ij} = l_i - l_j$ e $J^{(n)}$ é a função de n -pontos com expoentes arbitrários, expressa por

$$J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) = \int d^D k \prod_{i=1}^n [(k - l_i)^2 - m_i^2]^{a_i}, \quad (3.56)$$

para $a_i \geq 0$. Expandindo o lado direito da expressão (3.54) em séries de potências nos α_i , temos

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^n \left[\sum_{a_i=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_i)^{a_i}}{a_i!} J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \right] \\ &= \pi^{D/2} \sum_{\{b_{ij}\}=0}^{\infty} \frac{(-l_{ij}^2)^{b_{ij}}}{b_{ij}!} \sum_{\{c_l\}=0}^{\infty} \frac{(m_l^2)^{c_l}}{c_l!} \\ &\times \sum_{\{d_r\}=0}^{\infty} \Gamma \left(1 - \sum_{i>j} b_{ij} - \sum_r d_r \right) \prod_{s=1}^n [\alpha_s^{f_s}], \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde temos usado uma expansão multinomial do tipo

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^{-D/2 - \sum_{i>j} b_{ij}} = \prod_{r=1}^n \left[\sum_{d_r}^{\infty} \frac{\alpha_r^{d_r}}{d_r!} \right] \Gamma \left(1 - D/2 - \sum_{i>j} b_{ij} \right) \quad (3.58)$$

com o vínculo

$$D/2 = - \sum_{i>j} b_{ij} - \sum_r^n d_r, \quad (3.59)$$

e os f_s são dados por combinações dos índices b_{ij} , c_l e d_r , a saber

$$f_s = \sum_{j \neq s}^n b_{js} + c_s + d_s, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.60)$$

Comparando agora os expoentes dos α_s nos dois lados da expressão (3.57), isto é $a_s = f_s$, obtemos outras n equações de vínculo dadas por

$$a_s = \sum_{j \neq s}^n b_{js} + c_s + d_s, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.61)$$

e da fórmula geral (3.57) teremos

$$\begin{aligned} J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) &= \pi^{D/2} \prod_{i=1}^n [(-1)^{a_i} \Gamma(1 + a_i)] \\ &\times \sum_{\{b_{ij}\}=0}^{\infty} \sum_{\{c_l\}=0}^{\infty} \sum_{\{d_r\}=0}^{\infty} \frac{(-l_{ij}^2)^{b_{ij}}}{b_{ij}!} \sum_{c_l=0}^{\infty} \frac{(m_l^2)^{c_l}}{c_l!} \\ &\times \Gamma \left(1 - \sum_{i>j} b_{ij} - \sum_r d_r \right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

Neste contexto, temos um sistema de $n + 1$ equações lineares de vínculo dadas por (3.59) e (3.61) com $N + 2n$ variáveis dadas pelos índices b_{ij} , c_l e d_r das séries, onde $N = n(n - 1)/2$. A solução deste sistema deve ser efetuada tomando a cada vez $N + n - 1$ índices livres e os demais $n + 1$ índices escritos em termos daqueles. Cada solução deste sistema deverá ser substituída na fórmula geral (3.62) gerando o espectro de séries hipergeométricas que serão usadas para compor as soluções para $J^{(n)}$. Quando $n = 2$, o critério da soma das séries com mesma dependência nos momenta externos e massas internas pode ser usado com sucesso tendo em vista a natureza das séries obtidas. Entretanto, para os demais casos $n \geq 3$, o critério para selecionar o conjunto de séries cuja combinação linear resultará em uma dada solução para $J^{(n)}$ ainda não está completamente estabelecido tendo em vista o caso $n = 3$ tratado na seção anterior.

A dificuldade na escolha das séries que irão compor a solução $J^{(3)}$, apontada acima, pode ser contornada se reescrevemos, como nos casos $n = 2$ e $n = 3$, a

integral funcional (3.54) da forma

$$\begin{aligned} & \sum_{\{a_i\}=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_i)^{a_i}}{a_i!} J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\ &= \left(\frac{\pi}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \right)^{D/2} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i>j=1}^n \alpha_i \alpha_j l_{ij}^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (m_i^2 - m_n^2) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) m_n^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

que após a expansão da exponencial pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \sum_{\{a_i\}=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_i)^{a_i}}{a_i!} J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\ &= \pi^{D/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(m_n^2)^s (\sum_{i=1}^n \alpha_i)^{s-D/2}}{s!} \left\{ 1 - \frac{\sum_{i>j=1}^n \alpha_i \alpha_j l_{ij}^2}{(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2 m_n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \left(\frac{m_i^2}{m_n^2} - 1 \right) \right\}^s. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Utilizando agora a expansão multinomial, segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{\{a_i\}=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_i)^{a_i}}{a_i!} J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\ &= \pi^{D/2} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\{d_r\}=0}^{\infty} \frac{(m_n^2)^s \Gamma(1 - D/2 + s - 2 \sum_{i>j} b_{ij} - \sum_l c_l)}{\Gamma(1+s) \Gamma(-s) \prod_{r=1}^n [\Gamma(1+d_r)]} \\ &\times \sum_{\{b_{ij}\}=0}^{\infty} \sum_{\{c_l\}=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{l_{ij}^2}{m_n^2} \right)^{b_{ij}}}{b_{ij}!} \frac{\left(1 - \frac{m_i^2}{m_n^2} \right)^{c_l}}{c_l!} \Gamma \left(-s + \sum_{i>j} b_{ij} + \sum_l c_l \right) \prod_{i=1}^n [\alpha_i^{g_i}], \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde

$$g_i = \sum_{i \neq j}^n b_{ij} + c_i + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.66)$$

$$g_n = \sum_{j \neq n}^n b_{nj} + d_n. \quad (3.67)$$

$$(3.68)$$

Comparando-se as potências dos α_i nos dois lados de (3.65), obtemos

$$\begin{aligned} & J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\ &= \pi^{D/2} \prod_{i=1}^n [(-1)^{a_i} \Gamma(1+a_i)] \\ &\times \sum_{s=0}^{\infty} \prod_{r=1}^n \left[\sum_{d_r=0}^{\infty} \right] \frac{(m_n^2)^s \Gamma(1 - D/2 + s - 2 \sum_{i>j} b_{ij} - \sum_l c_l)}{\Gamma(1+s) \Gamma(-s) \prod_{r=1}^n [\Gamma(1+d_r)]} \end{aligned}$$

$$\times \prod_{i>j=1}^n \left[\sum_{b_{ij}=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{l_{ij}^2}{m_n^2}\right)^{b_{ij}}}{b_{ij}!} \right] \prod_{l=1}^{n-1} \left[\sum_{c_l=0}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{m_i^2}{m_n^2}\right)^{c_l}}{c_l!} \right] \Gamma \left(-s + \sum_{i>j} b_{ij} + \sum_l c_l \right), \quad (3.69)$$

com as equações de vínculo

$$a_i = \sum_{i \neq j}^n b_{ij} + c_i + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.70)$$

$$a_n = \sum_{j \neq n}^n b_{nj} + d_n, \quad (3.71)$$

$$(3.72)$$

e ainda o vínculo da expansão multinomial $(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^{s-D/2-2\sum_{i>j} b_{ij}-\sum_l c_l}$, dado por

$$D/2 = s - 2 \sum_{i>j}^n b_{ij} - \sum_l^{n-1} c_l - \sum_{r=1}^n d_r. \quad (3.73)$$

Se resolvemos este sistema separando as variáveis $s, d_1, \dots, d_n$, temos

$$s = \sum_{i=1}^n a_i + D/2 = \sigma_n, \quad (3.74)$$

$$d_i = a_i - \sum_{i \neq j}^n b_{ij} - c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.75)$$

$$d_n = a_n - \sum_{j \neq n}^n b_{nj}. \quad (3.76)$$

Substituindo agora estes resultados em (3.69), teremos

$$\begin{aligned} & J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\ &= \pi^{D/2} (m_n^2)^{\sigma_n} \prod_{i=1}^n [(-1)^{a_i} \Gamma(1 + a_i)] \frac{1}{\Gamma(1 + \sigma_n) \Gamma(-\sigma_n)} \\ &\times \prod_{i>j=1}^n \left[\sum_{b_{ij}=0}^{\infty} \right] \prod_{l=1}^{n-1} \left[\sum_{c_l=0}^{\infty} \right] \Gamma \left(-\sigma_n + \sum_{i>j} b_{ij} + \sum_l c_l \right) \Gamma \left(1 - D/2 + \sigma_n - 2 \sum_{i>j} b_{ij} - \sum_l c_l \right) \\ &\times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} [\Gamma(1 + a_i - \sum_{i \neq j}^n b_{ij} - c_i)] \Gamma(1 + a_n - \sum_{j \neq n}^n b_{nj})} \\ &\times \frac{\left(\frac{l_{ij}^2}{m_n^2}\right)^{b_{ij}} \left(1 - \frac{m_i^2}{m_n^2}\right)^{c_l}}{b_{ij}! c_l!}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Usando (B.3), segue que

$$\begin{aligned}
& J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\
&= \pi^{D/2} (-m_n^2)^{\sigma_n} \frac{\Gamma(-\sigma_n)}{\Gamma(-\sigma_n + D/2)} \sum_{\{b_{ij}\}=0}^{\infty} \sum_{\{c_l\}=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{l_{ij}^2}{m_n^2}\right)^{b_{ij}} \left(1 - \frac{m_i^2}{m_n^2}\right)^{c_l}}{b_{ij}! c_l!} \\
&\times \frac{(-\sigma_n)_{\sum_{i>j} b_{ij} + \sum_l c_l} \prod_{i=1}^{n-1} \left[(-a_i)_{\sum_{i \neq j} b_{ij} + c_i}\right] (-a_n)_{\sum_{j \neq n} b_{nj}}}{(D/2 - \sigma_n)_{2 \sum_{i>j} b_{ij} + \sum_l c_l}}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Esta expressão pode ser representada pelas funções hipergeométricas generalizadas de Lauricella (B.12), a saber

$$\begin{aligned}
& J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\
&= \pi^{D/2} (-m_n^2)^{\sigma_n} \frac{\Gamma(-\sigma_n)}{\Gamma(-\sigma_n + D/2)} \\
&\times F_{1:0;\dots;0}^{n1:0;\dots;0} \left[\begin{matrix} (-\sigma_n : A), (-a_1 : B_1), \dots, (-a_{n-1} : B_{n-1}), (-a_n : C) \\ (D/2 - \sigma_n : E) \end{matrix} \middle| \left\{ \frac{l_{ij}^2}{m_n^2} \right\}, \left\{ 1 - \frac{m_i^2}{m_n^2} \right\} \right],
\end{aligned} \tag{3.79}$$

onde $a_i \leq 0$ e, definindo a sequência $Q = Q(Q_{ij} : Q_l) = (Q_{12} : Q_{13} : \dots : Q_{n,n-1} : Q_1, \dots, Q_{n-1})$ temos que $A = (Q_{ij} = 1 : Q_l = 1)$, $B_i = Q(Q_{ij} = 1 - \delta_{ij} : Q_j = \delta_{ij})$, $C = Q(Q_{nj} = 1 - \delta_{nj} : Q_l = 0)$ e $E = Q(Q_{ij} = 2 : Q_l = 1)$. Este resultado, para $n = 2$ e $a_1 = a_2 = 1$, concorda com (2.27).

Como podemos concluir no procedimento usado acima, a função de n -pontos via NDIM, apresenta uma simetria pela troca de quaisquer duas das massas m_i , $i = 1, \dots, n$ e sua contrapartida nos índices dos somatórios. Esta função tem um bom comportamento quando as massas são não nulas ou quando apenas uma, daquelas presentes no numerador das variáveis das séries, é nula. Para o caso de mais de uma massa nula, deve-se usar a fórmula de continuação analítica dada em (B.8). Um caso particular desta série, calculada via representação de Mellin-Barnes em [16], pode ser obtido quando $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$. Neste caso, as séries, cujas variáveis são $(1 - m_i^2/m_n^2)$, serão iguais a 1 e podemos (com o uso de (A.4)) escrever o símbolo de Pochhammer $(D/2 - \sigma_n)_{2 \sum_{i>j} b_{ij}} = 4^{\sum b_{ij}} (D/2 - \sigma_n)_{\sum_{i>j} b_{ij}} (D/2 - \sigma_n + 1/2)_{\sum_{i>j} b_{ij}}$, obtendo

$$\begin{aligned}
& J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) = \pi^{D/2} (-m^2)^{\sigma_n} \frac{\Gamma(-\sigma_n)}{\Gamma(-\sigma_n + D/2)} \\
&\times \sum_{\{b_{ij}\}=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{l_{ij}^2}{4m^2}\right)^{b_{ij}}}{b_{ij}!} \frac{(-\sigma_n)_{\sum_{i>j} b_{ij}} \prod_{i=1}^n \left[(-a_i)_{\sum_{i \neq j} b_{ij}}\right]}{(D/2 - \sigma_n)_{\sum_{i>j} b_{ij}} (D/2 - \sigma_n + 1/2)_{\sum_{i>j} b_{ij}}},
\end{aligned}$$

$$(3.80)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\ &= \pi^{D/2} (-m^2)^{\sigma_n} \frac{\Gamma(-\sigma_n)}{\Gamma(-\sigma_n + D/2)} \\ &\times F_{1:0;\dots;0}^{n+1:0;\dots;0} \left[\begin{matrix} (-\sigma_n : A), (-a_1 : B_1), \dots, (-a_{n-1} : B_{n-1}), (-a_n : C) \\ (D/2 - \sigma_n : E), (D/2 - \sigma_n + 1/2 : E) \end{matrix} \middle| \left\{ \frac{l_{ij}^2}{4m^2} \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.81)$$

com $A = (Q_{ij} = 1 : Q_l = 0)$, $B_i = Q(Q_{ij} = 1 - \delta_{ij} : Q_l = 0)$, $C = Q(Q_{nj} = 1 - \delta_{nj} : Q_l = 0)$ e $E = Q(Q_{ij} = 1 : Q_l = 0)$. Esta expressão, para $n = 2$ concorda com (3.20), e para o caso $n = 3$ concorda com a solução J_{40} presente nas Tabelas-9 e 10. Ainda das expressões (3.78) e (3.79) podemos obter o caso particular onde todos os momenta externos são iguais, $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$ e por consequência $l_{ij} = 0$. Desta maneira todas as séries associadas aos índices b_{ij} serão iguais a 1 e podemos escrever

$$\begin{aligned} & J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\ &= \pi^{D/2} (-m_n^2)^{\sigma_n} \frac{\Gamma(-\sigma_n)}{\Gamma(-\sigma_n + D/2)} \sum_{\{c_l\}=0}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{m_i^2}{m_n^2}\right)^{c_l}}{c_l!} \frac{(-\sigma_n)_{\sum_l c_l} \prod_{i=1}^{n-1} [(-a_i)_{c_i}]}{(D/2 - \sigma_n)_{\sum_l c_l}}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

ou ainda em termos das funções hipergeométricas de $n - 1$ variáveis

$$\begin{aligned} & J^{(n)}(\{l_j\}; \{m_j\}; \{a_j\}) \\ &= \pi^{D/2} (-m_n^2)^{\sigma_n} \frac{\Gamma(-\sigma_n)}{\Gamma(-\sigma_n + D/2)} F_D^{n-1} \left[\begin{matrix} -\sigma_n, -a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1} \\ (D/2 - \sigma_n) \end{matrix} \middle| \left\{ 1 - \frac{m_i^2}{m_n^2} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.83)$$

3.4 A parametrização de Feynman em 1-loop

Inicialmente mostraremos que a função de n -pontos obtida em (3.78) e (3.79) pode também ser obtida usando-se a parametrização de Feynman. Para isto consideremos a expressão (2.12):

$$\int d^D k F^{(n)} = \pi^{D/2} \frac{\Gamma(a_1 + \dots + a_n - D/2) (z_0 - z_n)^{-D/2}}{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_n)}$$

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{i=1}^{n-1} \left[\int_0^{z_{i-1}} dz_i (z_{i-1} - z_i)^{a_i-1} \right] (z_{n-1} - z_n)^{a_n-1} \\
& \times \left\{ \sum_{i=1}^n (l_i^2 - m_i^2) (z_{i-1} - z_i) - \frac{1}{z_0 - z_n} \left[\sum_{i=1}^n l_i (z_{i-1} - z_i) \right]^2 \right\}^{D/2 - \sum_i a_i} \quad (3.84)
\end{aligned}$$

Usando a relação

$$z_0 - z_n = (z_0 - z_1) + (z_1 - z_2) + \dots + (z_{n-1} - z_n), \quad (3.85)$$

podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n (l_i^2 - m_i^2) (z_{i-1} - z_i) - \frac{1}{z_0 - z_n} \left[\sum_{i=1}^n l_i (z_{i-1} - z_i) \right]^2 \\
& = \frac{1}{z_0 - z_n} \left\{ \sum_{i>j=1}^n (z_{i-1} - z_i) (z_{j-1} - z_j) l_{ij}^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i-1} - z_i) (m_n^2 - m_i^2) - (z_0 - z_n) m_n^2 \right\}. \quad (3.86)
\end{aligned}$$

Logo, para $z_0 = 1$ e $z_n = 0$, podemos efetuar a expansão

$$\begin{aligned}
& (-m_n^2)^{D/2 - \sum_i a_i} \left\{ 1 - \sum_{i>j=1}^n (z_{i-1} - z_i) (z_{j-1} - z_j) \frac{l_{ij}^2}{m_n^2} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i-1} - z_i) \left(1 - \frac{m_i^2}{m_n^2} \right) \right\}^{D/2 - \sum_i a_i} \\
& = (-m_n^2)^{D/2 - \sum_i a_i} \sum_{\{b_{ij}\}} \sum_{\{c_l\}} \frac{\Gamma(\sum_i a_i - D/2 + \sum_{i>j}^n b_{ij})}{\Gamma(\sum_i a_i - D/2)} \\
& \times (1 - z_1)^{\sum_{j \neq 1} b_{1j} + c_1} (z_1 - z_2)^{\sum_{j \neq 2} b_{2j} + c_2} \dots (z_{n-2} - z_{n-1})^{\sum_{j \neq n-1} b_{j,n-1} + c_{n-1}} z_{n-1}^{\sum_{j \neq n} b_{jn}} \\
& \times \frac{\left(\frac{l_{ij}^2}{m_n^2} \right)^{b_{ij}} \left(1 - \frac{m_i^2}{m_n^2} \right)^{c_l}}{b_{ij}! c_l!}. \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (3.81), para $z_0 = 1$ e $z_n = 0$, temos

$$\begin{aligned}
J^{(n)}(l_i; m_i; a_i) & = \pi^{D/2} (-m_n^2)^{D/2 - \sum_i a_i} \frac{1}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_n)} \\
& \times \sum_{\{b_{ij}\}} \sum_{\{c_l\}} \frac{\left(\frac{l_{ij}^2}{m_n^2} \right)^{b_{ij}} \left(1 - \frac{m_i^2}{m_n^2} \right)^{c_l}}{b_{ij}! c_l!} \Gamma \left(\sum_i a_i - D/2 + \sum_{i>j}^n b_{ij} + \sum_l c_l \right) \\
& \times \int_0^1 dz_1 (1 - z_1)^{a_1 + \sum_{j \neq 1} b_{1j} + c_1 - 1} \\
& \times \prod_{i=2}^{n-2} \left[\int_0^{z_{i-1}} dz_i (z_{i-1} - z_i)^{a_i + \sum_{j \neq i} b_{ij} + c_i - 1} \right] z_{n-1}^{a_n + \sum_{j \neq n} b_{jn} - 1}. \quad (3.88)
\end{aligned}$$

Estas integrais nos parâmetros z_i são facilmente avaliadas usando a função beta generalizada dada em (A.3), obtendo

$$\begin{aligned}
 J^{(n)}(l_i; m_i; a_i) &= \pi^{D/2} (-m_n^2)^{D/2 - \sum_i a_i} \frac{\Gamma(\sum_i a_i - D/2)}{\Gamma(\sum_i a_i)} \\
 &\times \sum_{\{b_{ij}\}=0}^{\infty} \sum_{\{c_l\}=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{l_{ij}^2}{m_n^2}\right)^{b_{ij}}}{b_{ij}!} \frac{\left(1 - \frac{m_i^2}{m_n^2}\right)^{c_l}}{c_l!} \\
 &\times \frac{(\sum_i a_i - D/2)_{\sum_{i>j} b_{ij} + \sum_l c_l} \prod_{i=1}^{n-1} \left[(a_i)_{\sum_{i \neq j}^n b_{ij} + c_i} \right] (a_n)_{\sum_{j \neq n}^n b_{nj}}}{(\sum_i a_i)_{2 \sum_{i>j} b_{ij} + \sum_l c_l}},
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

onde deve-se lembrar que aqui $a_i \geq 0$. Percebe-se claramente que a expressão acima e a (3.78), válida para $a_i \leq 0$, e aquela obtida em [17] são completamente idênticas. Comparando estes resultados, o NDIM, a parametrização de Feynman, e a representação de Mellin-Barnes parecem ser equivalentes.

Neste contexto, o NDIM, mostra-se com bom desempenho para o cálculo de integrais escalares associadas a diagramas de Feynman massivos e não massivos. Entretanto a sua extensão para casos de n -pontos ou n -loops parece ser prática apenas para alguns casos, como por exemplo o de n -pontos em 1-loop (3.78) e o de n inserções e um diagrama de 2-loops não massivos [32]. Esta dificuldade provém da necessidade de se conhecer todas as soluções das equações de vínculo para cada valor de n pois somente assim pode se dar a escolha das séries que somadas resultarão na solução final. Por outro lado, estas generalizações parecem ser exequíveis quando se utilizam métodos como a representação de Mellin-Barnes (MB).

Tabela-3.2

n	A_n
1	$\pi^{D/2}(r^2)^{-a-D/2}(p^2)^{\sigma-c}(q^2)^{\sigma-b}(-a)_{2a+D/2}(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}$
2	$\pi^{D/2}(q^2)^{-b-D/2}(p^2)^{\sigma-c}(r^2)^{\sigma-a}(-b)_{2b+D/2}(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}$
3	$\pi^{D/2}(p^2)^{-c-D/2}(q^2)^{\sigma-b}(r^2)^{\sigma-a}(-c)_{2c+D/2}(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}$
4	$\pi^{D/2}(p^2)^{a-c}(q^2)^c(-m_2^2)^{\sigma-a}(-a)_c(-b)_{-c-D/2}$
5	$\pi^{D/2}(q^2)^{a-b}(p^2)^b(-m_3^2)^{\sigma-a}(-a)_b(-c)_{-b-D/2}$
6	$\pi^{D/2}(p^2)^{b-c}(r^2)^c(-m_1^2)^{\sigma-b}(-b)_c(-a)_{-c-D/2}$
7	$\pi^{D/2}(r^2)^{b-a}(p^2)^a(-m_3^2)^{\sigma-b}(-b)_a(-c)_{-a-D/2}$
8	$\pi^{D/2}(q^2)^{c-b}(r^2)^b(-m_1^2)^{\sigma-c}(-a)_{-b-D/2}(-c)_b$
9	$\pi^{D/2}(r^2)^{c-a}(q^2)^a(-m_2^2)^{\sigma-c}(-b)_{-a-D/2}(-c)_a$
10	$\pi^{D/2}(p^2)^{-c-D/2}(-m_1^2)^{\sigma-b}(-m_2^2)^{\sigma-a}(-c)_{2c+D/2}(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}$
11	$\pi^{D/2}(q^2)^{-b-D/2}(-m_1^2)^{\sigma-c}(-m_3^2)^{\sigma-a}(-b)_{2b+D/2}(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}$
12	$\pi^{D/2}(r^2)^{-a-D/2}(-m_2^2)^{\sigma-c}(-m_3^2)^{\sigma-b}(-a)_{2a+D/2}(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}$
13	$\pi^{D/2}(p^2)^b(-m_1^2)^{a-b}(-m_3^2)^{\sigma-a}(-a)_b(-c)_{-b-D/2}$
14	$\pi^{D/2}(p^2)^a(-m_2^2)^{b-a}(-m_3^2)^{\sigma-b}(-b)_a(-c)_{-a-D/2}$
15	$\pi^{D/2}(q^2)^c(-m_1^2)^{a-c}(-m_2^2)^{\sigma-a}(-a)_c(-b)_{-c-D/2}$
16	$\pi^{D/2}(q^2)^a(-m_2^2)^{\sigma-c}(-m_3^2)^{c-a}(-b)_{-a-D/2}(-c)_a$
17	$\pi^{D/2}(r^2)^c(-m_1^2)^{\sigma-b}(-m_2^2)^{b-c}(-a)_{-c-D/2}(-b)_c$
18	$\pi^{D/2}(r^2)^b(-m_1^2)^{\sigma-c}(-m_3^2)^{c-b}(-a)_{-b-D/2}(-c)_b$
19	$\pi^{D/2}(p^2)^{\sigma-c}(-m_3^2)^c \frac{(-b)_{2b+D/2}(-a)_{-b-D/2}}{(a+D/2)_{b+D/2}}$
20	$\pi^{D/2}(q^2)^{\sigma-b}(-m_2^2)^b \frac{(-c)_{2c+D/2}(-a)_{-c-D/2}}{(a+D/2)_{c+D/2}}$
21	$\pi^{D/2}(r^2)^{\sigma-a}(-m_1^2)^a \frac{(-c)_{2c+D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(b+D/2)_{c+D/2}}$
22	$\pi^{D/2}(p^2)^b(-m_3^2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{2a+D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(b-a)_{a+D/2}}$
23	$\pi^{D/2}(p^2)^a(-m_3^2)^{\sigma-a} \frac{(-b)_{2b+D/2}(-c)_{-b-D/2}}{(a-b)_{b+D/2}}$
24	$\pi^{D/2}(q^2)^c(-m_2^2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{2a+D/2}(-b)_{-a-D/2}}{(-a+c)_{a+D/2}}$
25	$\pi^{D/2}(q^2)^a(-m_2^2)^{\sigma-a} \frac{(-c)_{2c+D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(a-c)_{c+D/2}}$
26	$\pi^{D/2}(r^2)^c(-m_1^2)^{\sigma-c} \frac{(-b)_{2b+D/2}(-a)_{-b-D/2}}{(c-b)_{b+D/2}}$
27	$\pi^{D/2}(r^2)^b(-m_1^2)^{\sigma-b} \frac{(-c)_{2c+D/2}(-a)_{-c-D/2}}{(b-c)_{c+D/2}}$
28	$\pi^{D/2}(q^2)^c(p^2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{-b-D/2}(-b)_{2b+c+D/2}}{(a+D/2)_{b+c+D/2}}$
29	$\pi^{D/2}(p^2)^b(q^2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-c-D/2}(-c)_{b+2c+D/2}}{(a+D/2)_{b+c+D/2}}$
30	$\pi^{D/2}(r^2)^c(p^2)^{\sigma-c} \frac{(-b)_{-a-D/2}(-a)_{2a+c+D/2}}{(b+D/2)_{a+c+D/2}}$
31	$\pi^{D/2}(p^2)^a(r^2)^{\sigma-a} \frac{(-b)_{-c-D/2}(-c)_{a+2c+D/2}}{(b+D/2)_{a+c+D/2}}$
32	$\pi^{D/2}(q^2)^{\sigma-b}(r^2)^b \frac{(-c)_{-a-D/2}(-a)_{2a+b+D/2}}{(c+D/2)_{a+b+D/2}}$
33	$\pi^{D/2}(q^2)^a(r^2)^{\sigma-a} \frac{(-c)_{-b-D/2}(-b)_{a+2b+D/2}}{(c+D/2)_{a+b+D/2}}$

Tabela-3.2 (continuação)

n	A_n
34	$\pi^{D/2}(p^2)^b(-m_1^2)^{a+D/2}(-m_3^2)^c(-a)_{-D/2}$
35	$\pi^{D/2}(p^2)^a(-m_2^2)^{b+D/2}(-m_3^2)^c(-b)_{-D/2}$
36	$\pi^{D/2}(q^2)^c(-m_1^2)^{a+D/2}(-m_2^2)^b(-a)_{-D/2}$
37	$\pi^{D/2}(q^2)^a(-m_3^2)^{c+D/2}(-m_2^2)^b(-c)_{-D/2}$
38	$\pi^{D/2}(r^2)^c(-m_2^2)^{b+D/2}(-m_1^2)^a(-b)_{-D/2}$
39	$\pi^{D/2}(r^2)^b(-m_3^2)^{c+D/2}(-m_1^2)^a(-c)_{-D/2}$
40	$\pi^{D/2}(p^2)^b(-m_1^2)^{\sigma-b}(b+D/2)_c(-a)_{-c-D/2}$
41	$\pi^{D/2}(p^2)^a(-m_2^2)^{\sigma-a}(a+D/2)_c(-b)_{-c-D/2}$
42	$\pi^{D/2}(q^2)^c(-m_1^2)^{\sigma-c}(c+D/2)_b(-a)_{-b-D/2}$
43	$\pi^{D/2}(q^2)^a(-m_3^2)^{\sigma-a}(a+D/2)_b(-c)_{-b-D/2}$
44	$\pi^{D/2}(r^2)^c(-m_2^2)^{\sigma-c}(c+D/2)_a(-b)_{-a-D/2}$
45	$\pi^{D/2}(r^2)^b(-m_3^2)^{\sigma-b}(b+D/2)_a(-c)_{-a-D/2}$
46	$\pi^{D/2}(-m_2^2)^b(-m_1^2)^{\sigma-b}(D/2)_c(-a)_{-c-D/2}$
47	$\pi^{D/2}(-m_1^2)^a(-m_2^2)^{\sigma-a}(D/2)_c(-b)_{-c-D/2}$
48	$\pi^{D/2}(-m_3^2)^c(-m_1^2)^{\sigma-c}(D/2)_b(-a)_{-b-D/2}$
49	$\pi^{D/2}(-m_1^2)^a(-m_3^2)^{\sigma-a}(D/2)_b(-c)_{-b-D/2}$
50	$\pi^{D/2}(-m_3^2)^c(-m_2^2)^{\sigma-c}(D/2)_a(-b)_{-a-D/2}$
51	$\pi^{D/2}(-m_2^2)^b(-m_3^2)^{\sigma-b}(D/2)_a(-c)_{-a-D/2}$
52	$\pi^{D/2}(p^2)^b(q^2)^c(-m_1^2)^{a+D/2}(-a)_{-D/2}$
53	$\pi^{D/2}(p^2)^a(r^2)^c(-m_2^2)^{b+D/2}(-b)_{-D/2}$
54	$\pi^{D/2}(q^2)^a(r^2)^b(-m_3^2)^{c+D/2}(-c)_{-D/2}$
55	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma \frac{(-b)_{2b+c+D/2}(-a)_{-b-c-D/2}}{(a+c+D/2)_{b+D/2}}$
56	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma \frac{(-c)_{b+2c+D/2}(-a)_{-b-c-D/2}}{(a+b+D/2)_{c+D/2}}$
57	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma \frac{(-c)_{a+2c+D/2}(-b)_{-a-c-D/2}}{(a+b+D/2)_{c+D/2}}$
58	$\pi^{D/2}(-m_1^2)^{a+D/2}(-m_2^2)^b(-m_3^2)^c(-a)_{-D/2}$
59	$\pi^{D/2}(-m_2^2)^{b+D/2}(-m_1^2)^a(-m_3^2)^c(-b)_{-D/2}$
60	$\pi^{D/2}(-m_3^2)^{c+D/2}(-m_1^2)^a(-m_2^2)^b(-c)_{-D/2}$
61	$\pi^{D/2}(-m_1^2)^\sigma (D/2)_{b+c}(-a)_{-b-c-D/2}$
62	$\pi^{D/2}(-m_2^2)^\sigma (D/2)_{a+c}(-b)_{-a-c-D/2}$
63	$\pi^{D/2}(-m_3^2)^\sigma (D/2)_{a+b}(-c)_{-a-b-D/2}$

Tabela-3.2 (continuação)

n	A_n
64	$\pi^{D/2}(q^2)^{\sigma-b}(p^2)^{-c-D/2}(-m_2^2)^{\sigma-a}(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}(-c)_{2c+D/2}$
65	$\pi^{D/2}(p^2)^{\sigma-c}(q^2)^{-b-D/2}(-m_3^2)^{\sigma-a}(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}(-b)_{2b+D/2}$
66	$\pi^{D/2}(r^2)^{\sigma-a}(p^2)^{-c-D/2}(-m_1^2)^{\sigma-b}(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}(-c)_{2c+D/2}$
67	$\pi^{D/2}(p^2)^{\sigma-c}(r^2)^{-a-D/2}(-m_3^2)^{\sigma-b}(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}(-a)_{2a+D/2}$
68	$\pi^{D/2}(r^2)^{\sigma-a}(q^2)^{-b-D/2}(-m_1^2)^{\sigma-c}(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}(-b)_{2b+D/2}$
69	$\pi^{D/2}(q^2)^{\sigma-b}(r^2)^{-a-D/2}(-m_2^2)^{\sigma-c}(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}(-a)_{2a+D/2}$

Tabela-3.3

n	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5	z_1, z_2, z_3, z_4, z_5
1	$1-\sigma-D/2, -\sigma+c, -\sigma+b; 1-a-D/2, 1-\sigma-D/2$	$-\frac{m_1^2 r^2}{p^2 q^2}; \frac{m_2^2}{p^2}, \frac{m_3^2}{q^2}, -\frac{p^2}{r^2}, -\frac{q^2}{r^2}$
2	$1-\sigma-D/2, -\sigma+c, -\sigma+a; 1-b-D/2, 1-\sigma-D/2$	$-\frac{m_2^2 q^2}{p^2 r^2}; \frac{m_1^2}{p^2}, \frac{m_3^2}{r^2}, -\frac{p^2}{q^2}, -\frac{r^2}{q^2}$
3	$1-\sigma-D/2, -\sigma+b, -\sigma+a; 1-c-D/2, 1-\sigma-D/2$	$-\frac{m_3^2 p^2}{q^2 r^2}; \frac{m_1^2}{q^2}, \frac{m_2^2}{r^2}, -\frac{q^2}{p^2}, -\frac{r^2}{p^2}$
4	$-c, -\sigma+a, a+D/2; a+D/2, 1+a-c$	$-\frac{p^2 r^2}{m_2^2 q^2}; \frac{m_3^2 p^2}{m_2^2 q^2}, \frac{p^2}{q^2}, -\frac{m_1^2}{p^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}$
5	$-b, -\sigma+a, a+D/2; a+D/2, 1+a-b$	$-\frac{q^2 r^2}{m_3^2 p^2}; \frac{m_2^2 q^2}{m_3^2 p^2}, \frac{q^2}{p^2}, -\frac{m_1^2}{q^2}, -\frac{m_3^2}{q^2}$
6	$-c, -\sigma+b, b+D/2; b+D/2, 1-c+b$	$-\frac{p^2 q^2}{m_1^2 r^2}; \frac{m_3^2 p^2}{m_1^2 r^2}, \frac{p^2}{r^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}, -\frac{m_3^2}{p^2}$
7	$-a, -\sigma+b, b+D/2; b+D/2, 1-a+b$	$-\frac{q^2 r^2}{m_3^2 p^2}; \frac{m_2^2 r^2}{m_3^2 p^2}, \frac{r^2}{p^2}, -\frac{m_1^2}{r^2}, -\frac{m_2^2}{r^2}$
8	$-b, -\sigma+c, c+D/2; c+D/2, 1-b+c$	$-\frac{p^2 q^2}{m_2^2 r^2}; \frac{m_3^2 q^2}{m_2^2 r^2}, \frac{q^2}{r^2}, -\frac{m_1^2}{q^2}, -\frac{m_3^2}{q^2}$
9	$-a, -\sigma+c, c+D/2; c+D/2, 1-a+c$	$-\frac{p^2 r^2}{m_2^2 q^2}; \frac{m_1^2 r^2}{m_2^2 q^2}, \frac{r^2}{q^2}, -\frac{m_3^2}{r^2}, -\frac{m_2^2}{r^2}$
10	$-c, -\sigma+b, -\sigma+a; 1-c-D/2, -c$	$-\frac{m_3^2 p^2}{m_1^2 m_2^2}; \frac{q^2}{m_1^2}, \frac{r^2}{m_2^2}, -\frac{m_1^2}{p^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}$
11	$-b, -\sigma+c, -\sigma+a; 1-b-D/2, -b$	$-\frac{m_2^2 q^2}{m_1^2 m_3^2}; \frac{p^2}{m_1^2}, \frac{r^2}{m_3^2}, -\frac{m_1^2}{q^2}, -\frac{m_3^2}{q^2}$
12	$-a, -\sigma+c, -\sigma+b; 1-a-D/2, -a$	$-\frac{m_1^2 r^2}{m_2^2 m_3^2}; \frac{p^2}{m_2^2}, \frac{q^2}{m_3^2}, -\frac{m_2^2}{r^2}, -\frac{m_3^2}{r^2}$
13	$-b, 1-b-D/2, -\sigma+a; 1-b-D/2, 1-b+a$	$-\frac{m_1^2 m_2^2}{m_3^2 p^2}; \frac{m_1^2}{p^2}, \frac{m_2^2 r^2}{m_3^2 p^2}, -\frac{q^2}{m_1^2}, -\frac{m_3^2}{m_1^2}$
14	$-a, 1-a-D/2, -\sigma+b; 1-a-D/2, 1-a+b$	$-\frac{m_1^2 m_2^2}{m_3^2 p^2}; \frac{m_2^2}{p^2}, \frac{m_3^2 q^2}{m_3^2 p^2}, -\frac{r^2}{m_2^2}, -\frac{m_3^2}{m_2^2}$
15	$-c, 1-c-D/2, -\sigma+a; 1-c-D/2, 1-c+a$	$-\frac{m_1^2 m_3^2}{m_2^2 q^2}; \frac{m_1^2}{q^2}, \frac{m_2^2 r^2}{m_2^2 q^2}, -\frac{p^2}{m_1^2}, -\frac{m_2^2}{m_1^2}$
16	$-a, 1-a-D/2, -\sigma+c; 1-a-D/2, 1-a+c$	$-\frac{m_1^2 m_2^2}{m_3^2 q^2}; \frac{m_3^2}{q^2}, \frac{m_2^2 p^2}{m_3^2 q^2}, -\frac{r^2}{m_3^2}, -\frac{m_2^2}{m_3^2}$
17	$-c, 1-c-D/2, -\sigma+b; 1-c-D/2, 1+b-c$	$-\frac{m_2^2 m_3^2}{m_1^2 r^2}; \frac{m_2^2}{r^2}, \frac{m_3^2 r^2}{m_1^2 r^2}, -\frac{p^2}{m_2^2}, -\frac{m_1^2}{m_2^2}$
18	$-b, 1-b-D/2, -\sigma+c; 1-b-D/2, 1-b+c$	$-\frac{m_2^2 m_3^2}{m_1^2 r^2}; \frac{m_3^2}{r^2}, \frac{m_2^2 p^2}{m_1^2 r^2}, -\frac{q^2}{m_3^2}, -\frac{m_1^2}{m_3^2}$
19	$-c, b+D/2, a+D/2; 1+\sigma-c, a+b+D$	$-\frac{p^2}{m_3^2}; \frac{q^2}{m_3^2}, \frac{r^2}{m_3^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}, -\frac{m_1^2}{p^2}$
20	$-b, c+D/2, a+D/2; 1+\sigma-b, a+c+D$	$-\frac{q^2}{m_2^2}; \frac{p^2}{m_2^2}, \frac{r^2}{m_2^2}, -\frac{m_3^2}{q^2}, -\frac{m_1^2}{q^2}$
21	$-a, c+D/2, b+D/2; 1+\sigma-a, b+c+D$	$-\frac{r^2}{m_1^2}; \frac{p^2}{m_1^2}, \frac{q^2}{m_1^2}, -\frac{m_3^2}{r^2}, -\frac{m_2^2}{r^2}$

Tabela-3.3 (Continuação)

n	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5	z_1, z_2, z_3, z_4, z_5
22	$-b, 1 - b - D/2, a + D/2; 1 + \sigma - b, 1 - b + a$	$-\frac{m_3^2}{p^2}, \frac{m_2^2}{p^2}, \frac{r^2}{p^2}, -\frac{q^2}{m_3^2}, -\frac{m_1^2}{m_3^2}$
23	$-a, 1 - a - D/2, b + D/2; 1 + \sigma - a, 1 - a + b$	$-\frac{m_3^2}{p^2}, \frac{m_1^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2}, -\frac{r^2}{m_3^2}, -\frac{m_2^2}{m_3^2}$
24	$-c, 1 - c - D/2, a + D/2; 1 + \sigma - c, 1 - c + a$	$-\frac{m_2^2}{q^2}, \frac{m_3^2}{q^2}, \frac{r^2}{q^2}, -\frac{p^2}{m_2^2}, -\frac{m_1^2}{m_2^2}$
25	$-a, 1 - a - D/2, c + D/2; 1 + \sigma - a, 1 - a + c$	$-\frac{m_2^2}{q^2}, \frac{m_1^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2}, -\frac{r^2}{m_2^2}, -\frac{m_3^2}{m_2^2}$
26	$-c, 1 - c - D/2, b + D/2; 1 + \sigma - c, 1 + b - c$	$-\frac{m_1^2}{r^2}, \frac{m_3^2}{r^2}, \frac{q^2}{r^2}, -\frac{p^2}{m_1^2}, -\frac{m_2^2}{m_1^2}$
27	$-b, 1 - b - D/2, c + D/2; 1 + \sigma - b, 1 - b + c$	$-\frac{m_2^2}{r^2}, \frac{m_1^2}{r^2}, \frac{p^2}{r^2}, -\frac{q^2}{m_2^2}, -\frac{m_3^2}{m_2^2}$
28	$1 - \sigma - D/2, -c, -\sigma + c; 1 - a - D/2, 1 - \sigma + a$	$\frac{m_2^2}{p^2}, \frac{m_1^2}{p^2}, -\frac{r^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2}, \frac{m_3^2}{q^2}$
29	$1 - \sigma - D/2, -b, -\sigma + b; 1 - a - D/2, 1 - \sigma + a$	$\frac{m_3^2}{q^2}, \frac{m_1^2}{q^2}, -\frac{r^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2}, \frac{m_2^2}{p^2}$
30	$1 - \sigma - D/2, -c, -\sigma + c; 1 - b - D/2, 1 - \sigma + b$	$\frac{m_1^2}{p^2}, \frac{m_2^2}{p^2}, -\frac{q^2}{r^2}, \frac{p^2}{r^2}, \frac{m_3^2}{r^2}$
31	$1 - \sigma - D/2, -a, -\sigma + a; 1 - b - D/2, 1 - \sigma + b$	$\frac{m_3^2}{r^2}, \frac{m_2^2}{r^2}, -\frac{q^2}{p^2}, \frac{r^2}{p^2}, \frac{m_1^2}{p^2}$
32	$1 - \sigma - D/2, -b, -\sigma + b; 1 - c - D/2, 1 - \sigma + c$	$\frac{m_1^2}{q^2}, \frac{m_3^2}{q^2}, -\frac{p^2}{r^2}, \frac{q^2}{r^2}, \frac{m_2^2}{r^2}$
33	$1 - \sigma - D/2, -a, -\sigma + a; 1 - c - D/2, 1 - \sigma + c$	$\frac{m_2^2}{r^2}, \frac{m_3^2}{r^2}, -\frac{p^2}{q^2}, \frac{r^2}{q^2}, \frac{m_1^2}{q^2}$
34	$-c, -b, b + D/2; b + D/2, 1 + a + D/2$	$\frac{m_1^2}{m_3^2}, \frac{q^2}{m_3^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}, \frac{m_2^2}{p^2}, \frac{m_3^2 r^2}{m_3^2 p^2}$
35	$-c, -a, a + D/2; a + D/2, 1 + b + D/2$	$\frac{m_2^2}{m_3^2}, \frac{r^2}{m_3^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}, \frac{m_1^2}{p^2}, \frac{m_2^2 q^2}{m_3^2 p^2}$
36	$-b, -c, c + D/2; c + D/2, 1 + a + D/2$	$\frac{m_1^2}{m_3^2}, \frac{p^2}{m_3^2}, -\frac{m_1^2}{q^2}, \frac{m_3^2}{q^2}, \frac{m_1^2 r^2}{m_3^2 q^2}$
37	$-b, -a, a + D/2; a + D/2, 1 + c + D/2$	$\frac{m_3^2}{m_2^2}, \frac{r^2}{m_2^2}, -\frac{m_3^2}{q^2}, \frac{m_1^2}{q^2}, \frac{m_3^2 p^2}{m_2^2 q^2}$
38	$-a, -c, c + D/2; c + D/2, 1 + b + D/2$	$\frac{m_2^2}{m_1^2}, \frac{p^2}{m_1^2}, -\frac{m_2^2}{r^2}, \frac{m_3^2}{r^2}, \frac{m_2^2 q^2}{m_1^2 r^2}$
39	$-a, -b, b + D/2; b + D/2, 1 + c + D/2$	$\frac{m_3^2}{m_1^2}, \frac{q^2}{m_1^2}, -\frac{m_3^2}{r^2}, \frac{m_2^2}{r^2}, \frac{m_3^2 p^2}{m_1^2 r^2}$
40	$-c, -b, -\sigma + b; b + D/2, 1 - \sigma + a$	$\frac{m_3^2}{m_1^2}, \frac{q^2}{m_1^2}, -\frac{m_2^2}{p^2}, \frac{m_1^2}{p^2}, \frac{r^2}{p^2}$
41	$-c, -a, -\sigma + a; a + D/2, 1 - \sigma + b$	$\frac{m_3^2}{m_2^2}, \frac{r^2}{m_2^2}, -\frac{m_1^2}{p^2}, \frac{m_2^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2}$
42	$-b, -c, -\sigma + c; c + D/2, 1 - \sigma + a$	$\frac{m_2^2}{m_1^2}, \frac{p^2}{m_1^2}, -\frac{m_3^2}{q^2}, \frac{m_1^2}{q^2}, \frac{r^2}{q^2}$
43	$-b, -a, -\sigma + a; a + D/2, 1 - \sigma + c$	$\frac{m_2^2}{m_3^2}, \frac{r^2}{m_3^2}, -\frac{m_1^2}{q^2}, \frac{m_3^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2}$
44	$-a, -c, -\sigma + c; c + D/2, 1 - \sigma + b$	$\frac{m_1^2}{m_2^2}, \frac{p^2}{m_2^2}, -\frac{m_3^2}{r^2}, \frac{m_2^2}{r^2}, \frac{q^2}{r^2}$
45	$-a, -b, -\sigma + b; b + D/2, 1 - \sigma + c$	$\frac{m_1^2}{m_3^2}, \frac{q^2}{m_3^2}, -\frac{m_2^2}{r^2}, \frac{m_3^2}{r^2}, \frac{p^2}{r^2}$
46	$-b, -c, c + D/2; 1 + \sigma - b, D/2$	$\frac{p^2}{m_2^2}, \frac{m_1^2}{m_2^2}, -\frac{q^2}{m_1^2}, \frac{m_3^2}{m_1^2}, \frac{r^2}{m_2^2}$
47	$-a, -c, c + D/2; 1 + \sigma - a, D/2$	$\frac{p^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2}, -\frac{r^2}{m_2^2}, \frac{m_3^2}{m_2^2}, \frac{q^2}{m_1^2}$
48	$-c, -b, b + D/2; 1 + \sigma - c, D/2$	$\frac{q^2}{m_3^2}, \frac{m_1^2}{m_3^2}, -\frac{p^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2}, \frac{r^2}{m_3^2}$
49	$-a, -b, b + D/2; 1 + \sigma - a, D/2$	$\frac{q^2}{m_2^2}, \frac{m_3^2}{m_2^2}, -\frac{r^2}{m_3^2}, \frac{m_2^2}{m_3^2}, \frac{p^2}{m_2^2}$
50	$-c, -a, a + D/2; 1 + \sigma - c, D/2$	$\frac{r^2}{m_3^2}, \frac{m_2^2}{m_3^2}, -\frac{p^2}{m_2^2}, \frac{m_1^2}{m_2^2}, \frac{q^2}{m_3^2}$
51	$-b, -a, a + D/2; 1 + \sigma - b, D/2$	$\frac{r^2}{m_2^2}, \frac{m_3^2}{m_2^2}, -\frac{q^2}{m_3^2}, \frac{m_1^2}{m_3^2}, \frac{p^2}{m_2^2}$

Tabela-3.3 (Continuação)

n	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5	z_1, z_2, z_3, z_4, z_5
52	$1 - \sigma + a, -b, -c; 1 + a + D/2, 1 - \sigma + a$	$-\frac{m_1^2 r^2}{p^2 q^2}, \frac{m_2^2}{p^2}, \frac{m_3^2}{q^2}, \frac{m_1^2}{p^2}, \frac{m_1^2}{q^2}$
53	$1 - \sigma + b, -a, -c; 1 + b + D/2, 1 - \sigma + b$	$-\frac{m_2^2 q^2}{p^2 r^2}, \frac{m_1^2}{p^2}, \frac{m_3^2}{r^2}, \frac{m_2^2}{p^2}, \frac{m_2^2}{r^2}$
54	$1 - \sigma + c, -a, -b; 1 + c + D/2, 1 - \sigma + c$	$-\frac{m_3^2 p^2}{q^2 r^2}, \frac{m_1^2}{q^2}, \frac{m_2^2}{r^2}, \frac{m_3^2}{q^2}, \frac{m_3^2}{r^2}$
55	$-\sigma, 1 - \sigma - D/2, -c; 1 - \sigma + a, 1 - \sigma + b$	$-\frac{m_3^2}{p^2}, \frac{m_1^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2}, \frac{m_2^2}{p^2}, \frac{r^2}{p^2}$
56	$-\sigma, 1 - \sigma - D/2, -b; 1 - \sigma + a, 1 - \sigma + c$	$-\frac{m_2^2}{q^2}, \frac{m_1^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2}, \frac{m_3^2}{q^2}, \frac{r^2}{q^2}$
57	$-\sigma, 1 - \sigma - D/2, -a; 1 - \sigma + b, 1 - \sigma + c$	$-\frac{m_1^2}{r^2}, \frac{m_2^2}{r^2}, \frac{p^2}{r^2}, \frac{m_3^2}{r^2}, \frac{q^2}{r^2}$
58	$D/2, -b, -c; 1 + a + D/2, D/2$	$-\frac{m_1^2 r^2}{m_2^2 m_3^2}, \frac{p^2}{m_2^2}, \frac{q^2}{m_3^2}, \frac{m_1^2}{m_2^2}, \frac{m_1^2}{m_3^2}$
59	$D/2, -a, -c; 1 + b + D/2, D/2$	$-\frac{m_2^2 q^2}{m_1^2 m_3^2}, \frac{p^2}{m_1^2}, \frac{r^2}{m_3^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_3^2}$
60	$D/2, -a, -b; 1 + c + D/2, D/2$	$-\frac{m_3^2 p^2}{m_1^2 m_2^2}, \frac{q^2}{m_1^2}, \frac{r^2}{m_2^2}, \frac{m_3^2}{m_1^2}, \frac{m_3^2}{m_2^2}$
61	$-\sigma, -b, -c; 1 - \sigma + a, D/2$	$-\frac{r^2}{m_1^2}, \frac{p^2}{m_1^2}, \frac{q^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2}{m_1^2}, \frac{m_3^2}{m_1^2}$
62	$-\sigma, -a, -c; 1 - \sigma + b, D/2$	$-\frac{q^2}{m_2^2}, \frac{p^2}{m_2^2}, \frac{r^2}{m_2^2}, \frac{m_1^2}{m_2^2}, \frac{m_3^2}{m_2^2}$
63	$-\sigma, -a, -b; 1 - \sigma + c, D/2$	$-\frac{p^2}{m_3^2}, \frac{q^2}{m_3^2}, \frac{r^2}{m_3^2}, \frac{m_1^2}{m_3^2}, \frac{m_2^2}{m_3^2}$
64	$-\sigma + a, a + D/2, c + D/2; a + D/2, 1 + \sigma - b$	$\frac{r^2}{m_2^2}, \frac{m_3^2 p^2}{m_2^2 q^2}, \frac{m_2^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2}, -\frac{m_1^2}{q^2}$
65	$-\sigma + a, a + D/2, b + D/2; a + D/2, 1 + \sigma - c$	$\frac{r^2}{m_3^2}, \frac{m_2^2 q^2}{m_3^2 p^2}, \frac{m_3^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2}, -\frac{m_1^2}{p^2}$
66	$-\sigma + b, b + D/2, c + D/2; b + D/2, 1 + \sigma - a$	$\frac{q^2}{m_1^2}, \frac{m_3^2 p^2}{m_1^2 r^2}, \frac{m_1^2}{p^2}, \frac{r^2}{p^2}, -\frac{m_2^2}{r^2}$
67	$-\sigma + b, b + D/2, a + D/2; b + D/2, 1 + \sigma - c$	$\frac{q^2}{m_3^2}, \frac{m_2^2 r^2}{m_3^2 p^2}, \frac{m_3^2}{r^2}, \frac{p^2}{r^2}, -\frac{m_1^2}{p^2}$
68	$-\sigma + c, c + D/2, b + D/2; c + D/2, 1 + \sigma - a$	$\frac{p^2}{m_1^2}, \frac{m_2^2 q^2}{m_1^2 r^2}, \frac{m_1^2}{q^2}, \frac{r^2}{q^2}, -\frac{m_3^2}{r^2}$
69	$-\sigma + c, c + D/2, a + D/2; c + D/2, 1 + \sigma - b$	$\frac{p^2}{m_2^2}, \frac{m_1^2 r^2}{m_2^2 q^2}, \frac{m_2^2}{r^2}, \frac{q^2}{r^2}, -\frac{m_3^2}{q^2}$

Tabela-3.4

n	B_n
1	$\pi^{D/2} (r^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-b} (z_2)^{\sigma-c} \frac{(-b)_{-\sigma-D/2} (-c)_{-\sigma-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
2	$\pi^{D/2} (r^2)^\sigma (z_2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{-\sigma+D/2} (-b)_\sigma}{(c-\sigma)_{-\sigma+2\sigma+D/2}}$
3	$\pi^{D/2} (r^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-\sigma+D/2} (-c)_\sigma}{(b-\sigma)_{-\sigma+2\sigma+D/2}}$
4	$\pi^{D/2} (r^2)^\sigma \frac{(-b)_\sigma (-c)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
5	$\pi^{D/2} (q^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-a} (z_2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{-\sigma-D/2} (-c)_{-\sigma-D/2}}{(b+D/2)_{-2b-D/2}}$
6	$\pi^{D/2} (q^2)^\sigma (z_2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_\sigma (-b)_{-\sigma+D/2}}{(c-\sigma)_{-\sigma+2\sigma+D/2}}$
7	$\pi^{D/2} (q^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-a} \frac{(-b)_{-\sigma+D/2} (-c)_\sigma}{(a-\sigma)_{-\sigma+2\sigma+D/2}}$
8	$\pi^{D/2} (q^2)^\sigma \frac{(-a)_\sigma (-c)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
9	$\pi^{D/2} (p^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-a} (z_2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-\sigma-D/2} (-b)_{-\sigma-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}}$
10	$\pi^{D/2} (p^2)^\sigma (z_2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_\sigma (-c)_{-\sigma+D/2}}{(b-\sigma)_{-\sigma+2\sigma+D/2}}$
11	$\pi^{D/2} (p^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-a} \frac{(-b)_\sigma (-c)_{-\sigma+D/2}}{(a-\sigma)_{-\sigma+2\sigma+D/2}}$
12	$\pi^{D/2} (p^2)^\sigma \frac{(-a)_\sigma (-b)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$

Tabela-3.5

n	x_1, x_2, x_3, x_4	z_1, z_2
1	$a + D/2, \sigma + D/2; 1 - b + \sigma, 1 - c + \sigma$	$\frac{q^2}{r^2}, \frac{p^2}{r^2}$
2	$-c, b + D/2; 1 + b + \sigma, 1 - c + \sigma$	$\frac{q^2}{r^2}, \frac{p^2}{r^2}$
3	$-b, c + D/2; 1 - b + \sigma, 1 + c - \sigma$	$\frac{q^2}{r^2}, \frac{p^2}{r^2}$
4	$-a, -\sigma; 1 + b - \sigma, 1 + c - \sigma$	$\frac{q^2}{r^2}, \frac{p^2}{r^2}$
5	$b + D/2, \sigma + D/2; 1 - a + \sigma, 1 - c + \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2}$
6	$-c, a + D/2; 1 + a - \sigma, 1 - c + \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2}$
7	$-a, c + D/2; 1 - a + \sigma, 1 + c - \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2}$
8	$-b, -\sigma; 1 + a - \sigma, 1 + c - \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2}$
9	$c + D/2, \sigma + D/2; 1 - a + \sigma, 1 - b + \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2}$
10	$-b, a + D/2; 1 + a - \sigma, 1 - b + \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2}$
11	$-a, b + D/2; 1 - a + \sigma, 1 + b - \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2}$
12	$-c, -\sigma; 1 + a - \sigma, 1 + b - \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}, \frac{q^2}{p^2}$

Tabela-3.6

n	C_n
1	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_3)^{\sigma-a} \frac{(-b)_{-a+\sigma}(-c)_{-a+\sigma}}{(a-\sigma)_{-2a+2\sigma+D/2}}$
2	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma \frac{(-a)_\sigma}{(-\sigma)_{\sigma+D/2}}$
3	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_1)^{-b}(-z_2)^{-c} \frac{(-a)_\sigma}{(-a-D/2)_{\sigma+D/2}}$
4	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma(z_1)^{\sigma-b}(z_2)^{\sigma-c} \frac{(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
5	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma(z_1)^{\sigma-a}(z_2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}}{(b+D/2)_{-2b-D/2}}$
6	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma(z_2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_\sigma(-b)_{-c+\sigma}}{(c-\sigma)_{-c+2\sigma+D/2}}$
7	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma(z_1)^{\sigma-a}(z_2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}}$
8	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma(z_2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_\sigma(-c)_{-b+\sigma}}{(b-\sigma)_{-b+2\sigma+D/2}}$
9	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma(z_2)^{-c}(z_3)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-c+\sigma}(-b)_c}{(b-\sigma)_{\sigma+D/2}}$
10	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma(z_2)^{-b}(z_3)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{-b+\sigma}(-c)_b}{(c-\sigma)_{\sigma+D/2}}$
11	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma(z_1)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{-c+\sigma}(-b)_c}{(c-\sigma)_{\sigma+D/2}}$
12	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma(z_1)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-b+\sigma}(-c)_b}{(b-\sigma)_{\sigma+D/2}}$
13	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma(z_1)^{\sigma-a}(-z_2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}}$
14	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma(-z_2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_\sigma}{(b-\sigma)_{\sigma+D/2}}$
15	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma(z_1)^{\sigma-a}(-z_2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}}{(b+D/2)_{-2b-D/2}}$
16	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma(-z_2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_\sigma}{(c-\sigma)_{\sigma+D/2}}$
17	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma(z_2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{-c+\sigma}(-b)_\sigma}{(c-\sigma)_{-c+2\sigma+D/2}}$
18	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma(z_2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-b+\sigma}(-c)_\sigma}{(b-\sigma)_{-b+2\sigma+D/2}}$
19	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma(z_2)^{\sigma-a} \frac{(-b)_\sigma(-c)_{-a+\sigma}}{(a-\sigma)_{-a+2\sigma+D/2}}$
20	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma \frac{(-a)_\sigma(-b)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
21	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma(z_2)^{\sigma-a} \frac{(-b)_{-a+\sigma}(-c)_\sigma}{(a-\sigma)_{-a+2\sigma+D/2}}$
22	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma \frac{(-a)_\sigma(-c)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
23	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma \frac{(-b)_\sigma(-c)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$

Tabela-3.7

n	$x_1, x_2, x_3; x_4, x_5$	z_1, z_2, z_3
1	$-a, c + D/2, b + D/2; \sigma - a + D/2, 1 - a + \sigma$	$\frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; -\frac{r^2}{m^2}$
2	$-\sigma, -b, -c; D/2, 1 + a - \sigma$	$\frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; -\frac{r^2}{m^2}$
3	$1 + a - \sigma, -b, -c; 1 + a + D/2, 1 + a - \sigma$	$\frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{q^2}; -\frac{m^2 r^2}{p^2 q^2}$
4	$a + D/2, \sigma + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - b + \sigma, 1 - c + \sigma$	$\frac{q^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; -\frac{m^2 r^2}{p^2 q^2}$
5	$\sigma + D/2, b + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - c + \sigma, 1 - a + \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{m^2}{p^2}$
6	$a + D/2, -c, 1 - \sigma - D/2; 1 - c + \sigma, 1 + a - \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{m^2}{p^2}$
7	$\sigma + D/2, c + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - b + \sigma, 1 - a + \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{m^2}{q^2}$
8	$a + D/2, -b, 1 - \sigma - D/2; 1 - b + \sigma, 1 + a - \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{m^2}{q^2}$
9	$-c, b + D/2, b - \sigma; b + D/2, 1 + b - c$	$-\frac{p^2 q^2}{m^2 r^2}; \frac{p^2}{r^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
10	$-b, c + D/2, c - \sigma; c + D/2, 1 - b + c$	$-\frac{p^2 q^2}{m^2 r^2}; \frac{q^2}{r^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
11	$-c, b + D/2, 1 - c - D/2; 1 - c + \sigma, 1 + b - c$	$-\frac{m^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; -\frac{p^2}{m^2}$
12	$-b, c + D/2, 1 - b - D/2; 1 - b + \sigma, 1 - b + c$	$-\frac{m^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; -\frac{q^2}{m^2}$
13	$c + D/2, b + D/2, 1 - b - D/2; 1 - b + \sigma, 1 - a + \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{q^2}{m^2}$
14	$-b, -c, 1 - b - D/2; 1 - b + \sigma, 1 + a - \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{q^2}{m^2}$
15	$b + D/2, c + D/2, 1 - c - D/2; 1 - c + \sigma, 1 - a + \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{p^2}{m^2}$
16	$-c, -b, 1 - c - D/2; 1 - c + \sigma, 1 + a - \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{p^2}{m^2}$
17	$-c, b + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - c + \sigma, 1 + b - \sigma$	$\frac{q^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
18	$-b, c + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - b + \sigma, 1 + c - \sigma$	$\frac{p^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
19	$-a, b + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 + b - \sigma, 1 - a + \sigma$	$\frac{q^2}{p^2}; \frac{r^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}$
20	$-\sigma, -c, 1 - \sigma - D/2; 1 + b - \sigma, 1 + a - \sigma$	$\frac{q^2}{p^2}; \frac{r^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}$
21	$-a, c + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 + c - \sigma, 1 - a + \sigma$	$\frac{p^2}{q^2}; \frac{r^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}$
22	$-\sigma, -b, 1 - \sigma - D/2; 1 + c - \sigma, 1 + a - \sigma$	$\frac{p^2}{q^2}; \frac{r^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}$
23	$-a, -\sigma, 1 - \sigma - D/2; 1 + b - \sigma, 1 + c - \sigma$	$\frac{p^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; -\frac{m^2}{r^2}$

Tabela-3.8

n	D_n
1	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma \frac{(-a)_\sigma(-b)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
2	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma \frac{(-a)_\sigma(-c)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
3	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma \frac{(-b)_\sigma(-c)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
4	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma (z_2)^{-c} \frac{(-a)_{-c+\sigma}(-b)_\sigma}{(c-\sigma)_{-c+2\sigma+D/2}}$
5	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma (z_2)^{-b} \frac{(-a)_{-b+\sigma}(-c)_\sigma}{(b-\sigma)_{-b+2\sigma+D/2}}$
6	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma (z_3)^{-c} \frac{(-a)_\sigma(-b)_{-c+\sigma}}{(c-\sigma)_{-c+2\sigma+D/2}}$
7	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma (z_3)^{-b} \frac{(-a)_\sigma(-c)_{-b+\sigma}}{(b-\sigma)_{-b+2\sigma+D/2}}$
8	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma (z_1)^{-a} \frac{(-b)_{-a+\sigma}(-c)_\sigma}{(a-\sigma)_{-a+2\sigma+D/2}}$
9	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma (z_1)^{-a} \frac{(-b)_\sigma(-c)_{-a+\sigma}}{(a-\sigma)_{-a+2\sigma+D/2}}$
10	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-a} (z_2)^{\sigma-b} \frac{(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}}$
11	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-a} (z_2)^{\sigma-c} \frac{(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}}{(b+D/2)_{-2b-D/2}}$
12	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-b} (z_2)^{\sigma-c} \frac{(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
13	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-b} (-z_2)^{\sigma-a} \frac{(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}}$
14	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-c} (-z_2)^{\sigma-a} \frac{(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}}{(b+D/2)_{-2b-D/2}}$
15	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-c} (-z_4)^{\sigma-b} \frac{(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
16	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma (z_1)^{\sigma-b} (-z_4)^{\sigma-c} \frac{(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
17	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (z_3)^{-c} (z_4)^{-a} \frac{(-a)_c}{(a-\sigma)_{c+D/2}}$
18	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (z_3)^{-b} (z_4)^{-a} \frac{(-a)_b}{(a-\sigma)_{b+D/2}}$
19	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (-z_1)^{-b} (z_4)^{-a} \frac{(-b)_a}{(b-\sigma)_{a+D/2}}$
20	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (-z_1)^{-c} (z_4)^{-a} \frac{(-c)_a}{(c-\sigma)_{a+D/2}}$
21	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (-z_3)^{-c} (-z_4)^{-a} \frac{1}{(-b-D/2)_{D/2}}$
22	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (-z_3)^{-b} (-z_4)^{-a} \frac{1}{(-c-D/2)_{D/2}}$
23	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (z_4)^{c-\sigma} \frac{(-a)_{2a+D/2}(-b)_{2b+D/2}}{(c-\sigma)_{-2c+2\sigma+D/2}}$
24	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (z_4)^{b-\sigma} \frac{(-a)_{2a+D/2}(-c)_{2c+D/2}}{(b-\sigma)_{-2b+2\sigma+D/2}}$
25	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (z_2)^{-b} \frac{(-a)_b(-c)_{-b+\sigma}}{(b-\sigma)_{\sigma+D/2}}$
26	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (z_2)^{-c} \frac{(-a)_c(-b)_{-c+\sigma}}{(c-\sigma)_{\sigma+D/2}}$
27	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (-z_1)^{-c} \frac{(-b)_{-a-D/2}}{(-b+\sigma)_{-a}}$
28	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (-z_1)^{-b} \frac{(-c)_{-a-D/2}}{(-c+\sigma)_{-a}}$
29	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (-z_1)^{a+D/2} \frac{(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
30	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (-z_3)^{-a} \frac{(-b)_a}{(a-\sigma)_{a+D/2}}$
31	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma (-z_3)^{-a} \frac{(-c)_a}{(a-\sigma)_{a+D/2}}$
32	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma \frac{(D/2)_a}{(-\sigma)_{a+D/2}}$

Tabela-3.9

n	$x_1, x_2, x_3; x_4, x_5$	$z_1; z_2; z_3; z_4$
1	$-\sigma, -c, 1 - \sigma - D/2; 1 + a - \sigma, 1 + b - \sigma$	$-\frac{m^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{r^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}$
2	$-\sigma, -b, 1 - \sigma - D/2; 1 + a - \sigma, 1 + c - \sigma$	$-\frac{m^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{r^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}$
3	$-\sigma, -a, 1 - \sigma - D/2; 1 + c - \sigma, 1 + b - \sigma$	$\frac{p^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}$
4	$-c, b + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - c + \sigma, 1 + b - \sigma$	$\frac{q^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{p^2}$
5	$-b, c + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - b + \sigma, 1 + c - \sigma$	$\frac{p^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{q^2}$
6	$-c, a + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 + a - \sigma, 1 - c + \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
7	$-b, a + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 + a - \sigma, 1 - b + \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
8	$c + D/2, -a, 1 - \sigma - D/2; 1 - a + \sigma, 1 + c - \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{m^2}{r^2}; -\frac{m^2}{r^2}$
9	$b + D/2, -a, 1 - \sigma - D/2; 1 - a + \sigma, 1 + b - \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{m^2}{r^2}; -\frac{m^2}{r^2}$
10	$\sigma + D/2, c + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - b + \sigma, 1 - a + \sigma$	$\frac{r^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; -\frac{m^2 p^2}{q^2 r^2}; \frac{m^2}{r^2}$
11	$\sigma + D/2, b + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - c + \sigma, 1 - a + \sigma$	$\frac{r^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; -\frac{m^2 q^2}{p^2 r^2}; \frac{m^2}{r^2}$
12	$\sigma + D/2, a + D/2, 1 - \sigma - D/2; 1 - b + \sigma, 1 - c + \sigma$	$\frac{q^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{p^2}$
13	$c + D/2, a + D/2, 1 - a - D/2; 1 - a + \sigma, 1 - b + \sigma$	$\frac{q^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}; -\frac{p^2}{q^2}; \frac{r^2}{m^2}$
14	$b + D/2, a + D/2, 1 - a - D/2; 1 - a + \sigma, 1 - c + \sigma$	$\frac{p^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}; -\frac{q^2}{p^2}; \frac{r^2}{m^2}$
15	$b + D/2, a + D/2, b - \sigma; b + D/2, 1 - c + \sigma$	$\frac{p^2}{r^2}; \frac{q^2}{m^2}; -\frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{r^2}$
16	$c + D/2, a + D/2, c - \sigma; c + D/2, 1 - b + \sigma$	$\frac{q^2}{r^2}; \frac{p^2}{m^2}; -\frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{r^2}$
17	$-c, a - \sigma, a + D/2; a + D/2, 1 + a - c$	$\frac{p^2}{q^2}; -\frac{p^2 r^2}{m^2 q^2}; \frac{p^2}{q^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
18	$-b, a - \sigma, a + D/2; a + D/2, 1 + a - b$	$\frac{q^2}{p^2}; -\frac{q^2 r^2}{m^2 p^2}; \frac{q^2}{p^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
19	$a - b, 1 - b - D/2, -a; 1 - b + \sigma, 1 - b - D/2$	$\frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; -\frac{q^2 r^2}{m^2 p^2}; \frac{r^2}{p^2}$
20	$a - c, 1 - c - D/2, -a; 1 - c + \sigma, 1 - c - D/2$	$\frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; -\frac{p^2 r^2}{m^2 q^2}; \frac{r^2}{q^2}$
21	$1 + b - \sigma, -c, -a; 1 + b + D/2, 1 + b - \sigma$	$-\frac{m^2 q^2}{p^2 r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{p^2}$
22	$1 + c - \sigma, -a, -b; 1 + c + D/2, 1 + c - \sigma$	$-\frac{m^2 p^2}{q^2 r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{q^2}$
23	$-c, b + D/2, a + D/2; 1 - c + \sigma, a + b + D$	$\frac{q^2}{m^2}; -\frac{p^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
24	$-b, c + D/2, a + D/2; 1 - b + \sigma, a + c + D$	$\frac{p^2}{m^2}; -\frac{q^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
25	$-b, 1 - b - D/2, a + D/2; 1 - b + \sigma, 1 + a - b$	$\frac{m^2}{p^2}; -\frac{m^2}{p^2}; \frac{r^2}{p^2}; -\frac{q^2}{m^2}$
26	$-c, 1 - c - D/2, a + D/2; 1 - c + \sigma, 1 + a - c$	$\frac{m^2}{q^2}; -\frac{m^2}{q^2}; \frac{r^2}{q^2}; -\frac{p^2}{m^2}$
27	$-c, 1 - c - D/2, -a; 1 - c + \sigma, 1 + b - \sigma$	$\frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; \frac{p^2}{m^2}$
28	$-b, 1 - b - D/2, -a; 1 - b + \sigma, 1 + c - \sigma$	$\frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; \frac{q^2}{m^2}$
29	$1 + a, a + D/2, -a; 1 - c + \sigma, 1 - b + \sigma$	$\frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}$

Tabela-3.9 (Continuação)

n	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; x_6, x_7$	z_1, z_2, z_3
30	$-c, -a, 1 - a - D/2, 1 - a + b + c, a + D/2; 1 - a + b, 1 - a + \sigma$	$-\frac{r^2}{m^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}$
31	$-b, -a, 1 - a - D/2, 1 - a + b + c, a + D/2; 1 - a + c, 1 - a + \sigma$	$-\frac{r^2}{m^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}$
32	$-\sigma, -a, -b, -c, a + D/2; D/2, -b - c$	$\frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2}$

Tabela-3.10

n	E_n
1	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma(-z_4)^{\sigma-c}(-z_5)^{\sigma-b}\frac{(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
2	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma(-z_4)^{\sigma-a}(-z_5)^{\sigma-c}\frac{(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}}{(b+D/2)_{-2b-D/2}}$
3	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma(-z_4)^{\sigma-b}(-z_5)^{\sigma-a}\frac{(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}}$
4	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_3)^{-c}(z_4)^{-a}\frac{(-b)_{-c-D/2}}{(-a+c)_{-c}}$
5	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_3)^{-b}(z_4)^{-a}\frac{(-c)_{-b-D/2}}{(-a+b)_{-b}}$
6	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_3)^{-c}(z_4)^{-b}\frac{(-a)_{-c-D/2}}{(-b+c)_{-c}}$
7	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_3)^{-a}(z_4)^{-b}\frac{(-c)_{-a-D/2}}{(-b+a)_{-a}}$
8	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_3)^{-b}(z_4)^{-c}\frac{(-a)_{-b-D/2}}{(-c+b)_{-b}}$
9	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_3)^{-a}(z_4)^{-c}\frac{(-b)_{-a-D/2}}{(-c+a)_{-a}}$
10	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_5)^{c+D/2}\frac{(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}}$
11	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_5)^{c-\sigma}\frac{(-a)_{2a+D/2}(-b)_{2b+D/2}}{(c-\sigma)_{-2c+2\sigma+D/2}}$
12	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_5)^{b+D/2}\frac{(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}}{(b+D/2)_{-2b-D/2}}$
13	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_5)^{b-\sigma}\frac{(-a)_{2a+D/2}(-c)_{2c+D/2}}{(b-\sigma)_{-2b+2\sigma+D/2}}$
14	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_5)^{a-\sigma}\frac{(-b)_{2b+D/2}(-c)_{2c+D/2}}{(a-\sigma)_{-2a+2\sigma+D/2}}$
15	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_5)^{a+D/2}\frac{(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
16	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma(z_4)^{-c}\frac{(-a)_\sigma(-b)_{-c+\sigma}}{(c-\sigma)_{-c+2\sigma+D/2}}$
17	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma(z_4)^{-b}\frac{(-a)_\sigma(-c)_{-b+\sigma}}{(b-\sigma)_{-b+2\sigma+D/2}}$
18	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma(z_4)^{-c}\frac{(-a)_{-c+\sigma}(-b)_\sigma}{(c-\sigma)_{-c+2\sigma+D/2}}$
19	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma(z_4)^{-a}\frac{(-b)_\sigma(-c)_{-a+\sigma}}{(a-\sigma)_{-a+2\sigma+D/2}}$
20	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma(z_4)^{-b}\frac{(-a)_{-b+\sigma}(-c)_\sigma}{(b-\sigma)_{-b+2\sigma+D/2}}$
21	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma(z_4)^{-a}\frac{(-b)_{-a+\sigma}(-c)_\sigma}{(a-\sigma)_{-a+2\sigma+D/2}}$
22	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_4)^{-b}(-z_5)^{-c}\frac{1}{(-a-D/2)_{D/2}}$
23	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_4)^{-a}(-z_5)^{-c}\frac{1}{(-b-D/2)_{D/2}}$
24	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_4)^{-a}(-z_5)^{-b}\frac{1}{(-c-D/2)_{D/2}}$
25	$\pi^{D/2}(p^2)^\sigma\frac{(-a)_\sigma(-b)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
26	$\pi^{D/2}(q^2)^\sigma\frac{(-a)_\sigma(-c)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
27	$\pi^{D/2}(r^2)^\sigma\frac{(-b)_\sigma(-c)_\sigma}{(-\sigma)_{2\sigma+D/2}}$
28	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_1)^{c+D/2}(-z_3)^{-a}\frac{(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}}$
29	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_1)^{b+D/2}(-z_3)^{-a}\frac{(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}}{(b+D/2)_{-2b-D/2}}$
30	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_4)^{c+D/2}(z_5)^{-b}\frac{(-a)_{-c-D/2}(-b)_{-c-D/2}}{(c+D/2)_{-2c-D/2}}$

Tabela-3.10 (Continuação)

n	E_n
31	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_4)^{a+D/2}(z_5)^{-b}\frac{(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
32	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_4)^{b+D/2}(z_5)^{-c}\frac{(-a)_{-b-D/2}(-c)_{-b-D/2}}{(b+D/2)_{-2b-D/2}}$
33	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(z_4)^{a+D/2}(z_5)^{-c}\frac{(-b)_{-a-D/2}(-c)_{-a-D/2}}{(a+D/2)_{-2a-D/2}}$
34	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_1)^{-b}\frac{(-a)_{-c-D/2}}{(-a+b)_{-c}}$
35	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_1)^{-a}\frac{(-b)_{-c-D/2}}{(a-b)_{-c}}$
36	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_1)^{-c}\frac{(-a)_{-b-D/2}}{(-a+c)_{-b}}$
37	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_1)^{-a}\frac{(-c)_{-b-D/2}}{(a-c)_{-b}}$
38	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_1)^{-c}\frac{(-b)_{-a-D/2}}{(-b+c)_{-a}}$
39	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma(-z_1)^{-b}\frac{(-c)_{-a-D/2}}{(b-c)_{-a}}$
40	$\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma\frac{1}{(-\sigma)_{D/2}}$

Tabela-3.11

n	$x_1, x_2, x_3; x_4, x_5$	$z_1; z_2; z_3; z_4; z_5$
1	$1 - \sigma - D/2, c - \sigma, b - \sigma; 1 - a - D/2, 1 - \sigma - D/2$	$-\frac{m^2 r^2}{p^2 q^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{q^2}; -\frac{p^2}{r^2}; -\frac{q^2}{r^2}$
2	$1 - \sigma - D/2, a - \sigma, c - \sigma; 1 - b - D/2, 1 - \sigma - D/2$	$-\frac{m^2 q^2}{p^2 r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{p^2}; -\frac{r^2}{q^2}; -\frac{p^2}{q^2}$
3	$1 - \sigma - D/2, b - \sigma, a - \sigma; 1 - c - D/2, 1 - \sigma - D/2$	$-\frac{m^2 p^2}{q^2 r^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{r^2}; -\frac{q^2}{p^2}; -\frac{r^2}{p^2}$
4	$-c, a + D/2, a - \sigma; a + D/2, 1 + a - c$	$-\frac{p^2 r^2}{m^2 q^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; -\frac{m^2}{p^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
5	$-b, a + D/2, a - \sigma; a + D/2, 1 + a - b$	$-\frac{q^2 r^2}{m^2 p^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; -\frac{m^2}{q^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
6	$-c, b - \sigma, b + D/2; b + D/2, 1 - c + b$	$-\frac{p^2 q^2}{m^2 r^2}; \frac{p^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; -\frac{m^2}{p^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
7	$-a, b - \sigma, b + D/2; b + D/2, 1 - a + b$	$-\frac{q^2 r^2}{m^2 p^2}; \frac{r^2}{p^2}; \frac{r^2}{p^2}; -\frac{m^2}{r^2}; -\frac{m^2}{r^2}$
8	$-b, c - \sigma, c + D/2; c + D/2, 1 - b + c$	$-\frac{p^2 q^2}{m^2 r^2}; \frac{q^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; -\frac{m^2}{q^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
9	$-a, c - \sigma, c + D/2; c + D/2, 1 - a + c$	$-\frac{p^2 r^2}{m^2 q^2}; \frac{r^2}{q^2}; \frac{r^2}{q^2}; -\frac{m^2}{r^2}; -\frac{m^2}{r^2}$
10	$-c, b - \sigma, a - \sigma; 1 - c - D/2, -c$	$-\frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2}; -\frac{m^2}{p^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
11	$-c, b + D/2, a + D/2, 1 - c + \sigma, a + b + D$	$-\frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2}; -\frac{m^2}{p^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
12	$-b, c - \sigma, a - \sigma; 1 - b - D/2, -b$	$-\frac{q^2}{m^2}; \frac{p^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2}; -\frac{m^2}{q^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
13	$-b, c + D/2, a + D/2; 1 - b + \sigma, a + c + D$	$-\frac{q^2}{m^2}; \frac{p^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2}; -\frac{m^2}{q^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
14	$-a, c + D/2, b + D/2; 1 - a + \sigma, b + c + D$	$-\frac{r^2}{m^2}; \frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; -\frac{m^2}{r^2}; -\frac{m^2}{r^2}$
15	$-a, c - \sigma, b - \sigma; 1 - a - D/2, -a$	$-\frac{r^2}{m^2}; \frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; -\frac{m^2}{r^2}; -\frac{m^2}{r^2}$
16	$1 - \sigma - D/2, a + D/2, -c; 1 - c + \sigma, 1 + a - \sigma$	$\frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}; -\frac{r^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}$
17	$1 - \sigma - D/2, -b, b - \sigma; 1 - a - D/2, 1 + a - \sigma$	$\frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}; -\frac{r^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}$
18	$1 - \sigma - D/2, -c, c - \sigma; 1 - b - D/2, 1 + b - \sigma$	$\frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}; -\frac{q^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}$
19	$1 - \sigma - D/2, -a, a - \sigma; 1 - b - D/2, 1 + b - \sigma$	$\frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; -\frac{q^2}{p^2}; \frac{r^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}$
20	$1 - \sigma - D/2, -b, b - \sigma; 1 - c - D/2, 1 + c - \sigma$	$\frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}; -\frac{p^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}$
21	$1 - \sigma - D/2, -a, a - \sigma, 1 - c - D/2, 1 - \sigma + c$	$\frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; -\frac{p^2}{q^2}; \frac{r^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}$
22	$1 + a - \sigma, -b, -c; 1 + a + D/2, 1 + a - \sigma$	$-\frac{m^2 r^2}{p^2 q^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{q^2}$
23	$1 + b - \sigma, -a, -c; 1 + b + D/2, 1 + b - \sigma$	$-\frac{m^2 q^2}{p^2 r^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{r^2}$
24	$1 + c - \sigma, -a, -b; 1 + c + D/2, 1 + c - \sigma$	$-\frac{m^2 p^2}{q^2 r^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{r^2}$
25	$-\sigma, -c, 1 - \sigma - D/2; 1 + a - \sigma, 1 + b - \sigma$	$-\frac{m^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{r^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}$
26	$-\sigma, -b, 1 - \sigma - D/2; 1 + a - \sigma, 1 + c - \sigma$	$-\frac{m^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{r^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}$
27	$-\sigma, -a, 1 - \sigma - D/2; 1 + b - \sigma, 1 + c - \sigma$	$-\frac{m^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}$
28	$a - \sigma, a + D/2, c + D/2; a + D/2; 1 - b + \sigma$	$\frac{r^2}{m^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; -\frac{p^2}{q^2}$
29	$a - \sigma, a + D/2, b + D/2, a + D/2; 1 - c + \sigma$	$\frac{r^2}{m^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
30	$b - \sigma, b + D/2, c + D/2; b + D/2, 1 - a + \sigma$	$\frac{q^2}{m^2}; \frac{p^2}{r^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{r^2}{p^2}; -\frac{m^2}{r^2}$

Tabela-3.11 (Continuação)

n	$x_1, x_2, x_3; x_4, x_5$	$z_1; z_2; z_3; z_4; z_5$
31	$b - \sigma, b + D/2, a + D/2; b + D/2, 1 - c + \sigma$	$\frac{q^2}{m^2}; \frac{r^2}{p^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; -\frac{m^2}{p^2}$
32	$c - \sigma, c + D/2, b + D/2; c + D/2, 1 - a + \sigma$	$\frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{r^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{r^2}{q^2}; -\frac{m^2}{r^2}$
33	$c - \sigma, c + D/2, a + D/2; c + D/2, 1 - b + \sigma$	$\frac{p^2}{m^2}; \frac{r^2}{q^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; -\frac{m^2}{q^2}$
n	$x_1, x_2, x_3, x_4; x_5, x_6, x_7$	$z_1; z_2; z_3; z_4$
34	$-b, 1-b-D/2, 1+a-b+c, -c; 1+a-b, 1-b-D/2, 1-b+\sigma$	$\frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{r^2}{p^2}; \frac{q^2}{m^2}$
35	$-a, 1-a-D/2, 1-a+b+c, -c; 1-a+b, 1-a-D/2, 1-a+\sigma$	$\frac{m^2}{p^2}; \frac{m^2}{p^2}; \frac{q^2}{p^2}; \frac{r^2}{m^2}$
36	$-c, 1-c-D/2, 1+a+b-c, -b; 1+a-c, 1-c-D/2, 1-c+\sigma$	$\frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{r^2}{q^2}; \frac{p^2}{m^2}$
37	$-a, 1-a-D/2, 1-a+b+c, -b; 1-a+c, 1-a-D/2, 1-a+\sigma$	$\frac{m^2}{q^2}; \frac{m^2}{q^2}; \frac{p^2}{q^2}; \frac{r^2}{m^2}$
38	$-c, 1-c-D/2, 1+a+b-c, -a; 1+b-c, 1-c-D/2, 1-c+\sigma$	$\frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{q^2}{r^2}; \frac{p^2}{m^2}$
39	$-b, 1-b-D/2, 1+a-b+c, -a; 1-b+c, 1-b-D/2, 1-b+\sigma$	$\frac{m^2}{r^2}; \frac{m^2}{r^2}; \frac{p^2}{r^2}; \frac{q^2}{m^2}$
n	$x_1, x_2, x_3, x_4; x_5$	$z_1; z_2; z_3$
40	$-\sigma, -a, -b, -c; -\sigma + D/2$	$\frac{p^2}{m^2}; \frac{q^2}{m^2}; \frac{r^2}{m^2}$

Capítulo 4

Integrais escalares em 2-loops

No Capítulo anterior mostramos que é possível aplicar o NDIM para avaliar a integral escalar, com massas e expoentes arbitrários dos propagadores, associada ao diagrama de Feynman de n -pontos em 1-loop. Todavia, esta extensão ainda não foi estabelecida para os casos em 2-loops uma vez que o critério de soma das séries hipergeométricas para casos gerais com mais de 2 pontos apresenta dificuldades que ainda carecem de um tratamento mais apurado. Os resultados já obtidos via NDIM não apresentam problemas pois foram calculados dentro do contexto onde o critério citado é usado com sucesso. Neste Capítulo usamos o método de integração por partes para decompor em integrais mais simples a integral escalar associada ao diagrama “2-loop master”, tratado no Capítulo 2, e calculamos na seção 1 suas integrais remanescentes via NDIM. Na seção 2 mostramos, via NDIM, o cálculo da integral escalar associada ao diagrama não massivo de 2-pontos com n -inserções de auto-energia. Finalmente usamos a função de 3-pontos não massiva calculada anteriormente para apresentarmos o cálculo da integral escalar não massiva associada ao diagrama de 3-pontos com uma inserção de auto-energia.

4.1 O “2-loop master”

O diagrama conhecido como “2-loop master” já foi discutido no Capítulo 2 desta Tese. Este tipo de diagrama encontra aplicações interessantes como por exemplo no operador de polarização do gluon. Sua estrutura intrincada nos momenta dos propagadores é tal que a avaliação da integral escalar associada, caso mais geral com massas e expoentes arbitrários nos propagadores, ainda permanece em estado de arte. Na primeira abordagem mostrada no Capítulo 2 foi aplicada a técnica de integração por partes obtendo a expressão para $I(k, m)$ dada por (2.39):

$$I(k, m) = \frac{1}{(D-4)(D-3)} [I_2(0, 2, 1, 2; k; m) - I_2(1, 2, 0, 2; k; m)]$$

$$+ (D-3)I_3(1, 2, 1, 1; k; m)]. \quad (4.1)$$

onde I_1, I_2 e I_3 são representadas pelas integrais (2.32), (2.33) e (2.34) respectivamente e que nós iremos avaliar aqui via uso do NDIM. Como já foi discutido, a técnica de integração por partes não avalia a integral $I(k, m)$ porém a reduz a integrais consideradas mais simples onde os propagadores podem apresentar expoentes unitários e quadráticos. As integrais $I_2(1, 2, 1, 1, k; m)$ e $I_3(1, 2, 1, 1; k; m)$ podem ser representadas pelos resultados obtidos no Capítulo 2 pelas expressões (2.69) e (3.20), isto é

$$I_2(1, 2, 0, 2; k; m) = J^{(1)}(m; 2) J^{(2)}(k; m; 1, 2), \quad (4.2)$$

$$I_3(1, 2, 1, 1, k, m) = J^{(2)}(k; m; 1, 2) J^{(2)}(k; m; 1, 1), \quad (4.3)$$

enquanto a integral $I_2(0, 2, 1, 2; k; m)$ avaliamos via NDIM partindo da identidade

$$\sum_{a_1, a_2, a_3=0}^{\infty} \frac{(-\alpha_1)^{a_1}}{a_1!} \frac{(-\alpha_2)^{a_2}}{a_2!} \frac{(-\alpha_3)^{a_3}}{a_3!} J(k, m; a_1, a_2, a_3), \quad (4.4)$$

onde

$$J(k, m; a_1, a_2, a_3) = \int d^D p d^D q [q^2 - m^2]^{a_1} [(p - q)^2]^{a_2} [(p - k)^2 - m^2]^{a_3}. \quad (4.5)$$

Realizando as integrais gaussianas em q e p do lado direito de (4.5), expandindo o resultado em séries de potências nos α_i e comparando estas potências com aquelas do lado esquerdo da mesma igualdade, temos

$$J(k, m; a_1, a_2, a_3) = \pi^D \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} \Gamma(1 - j_1 - D/2) \frac{(-k^2)^{j_1} (m^2)^{j_2+j_3}}{j_1! j_2! j_3! j_4! j_5! j_6!}, \quad (4.6)$$

com os vínculos

$$a_1 = j_1 + j_2 + j_4 + j_5, \quad (4.7)$$

$$a_2 = j_1 + j_4 + j_6, \quad (4.8)$$

$$a_3 = j_1 + j_3 + j_5 + j_6, \quad (4.9)$$

$$D/2 = -j_1 - j_4 - j_5 - j_6. \quad (4.10)$$

Selecionando uma solução deste sistema, a saber $j_3 = a_1 + a_2 + a_3 + D - j_1 - j_2$, $j_4 = a_1 + a_2 + D/2 - j_1 - j_2$, $j_5 = -a_2 - D/2$ e $j_6 = -a_1 - D/2 + j_2$, e substituindo este resultado em (4.6), teremos após algumas manipulações algébricas e a continuação analítica para $a_i \leq 0$

$$J(k, m; a_1, a_2, a_3) = \pi^D (-m^2)^{a_1+a_2+a_3+D}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\Gamma(-a_1 - a_2 - a_3 - D) \Gamma(-a_1 - a_2 - D/2) \Gamma(D/2 + a_2) \Gamma(-a_2 - a_3 - D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(-a_1) \Gamma(-a_3) \Gamma(-a_1 - 2a_2 - a_3 - D)} \\
& \times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -a_1 - a_2 - a_3 - D, -a_1 - a_2 - D/2, -a_2 - a_3 - D/2, -a_2 \\ D/2, -\frac{a_1+2a_2+a_3+D}{2}, -\frac{a_1+2a_2+a_3+D-1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{k^2}{4m^2} \right],
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde ${}_4F_3$ é dada por (B.16). Assim podemos expressar $I_2(0, 2, 1, 2; k; m)$ por

$$\begin{aligned}
I_2(0, 2, 1, 1; k; m) &= J(k, m; 2, 1, 2) \\
&= \pi^D (-m^2)^{-1} \\
&\times \frac{\Gamma(5-D) \Gamma(3-D/2) \Gamma(D/2-1) \Gamma(3-D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(6-D)} \\
&\times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 5-D, 3-D/2, 1 \\ D/2, 7/2-D/2 \end{matrix} \middle| \frac{k^2}{4m^2} \right].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Tomando-se $k^2 = 0$, isto é ${}_4F_3 = 1$, obtemos o conhecido resultado para o diagrama de vácuo em 2-loops. Para $D = 4$, obtemos

$$\begin{aligned}
J(k, m; 2, 1, 2)_{D=4} &= \pi^4 (-m^2)^{-1} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 2, 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{k^2}{4m^2} \right] \\
&= \frac{\pi^4}{m^2} \begin{cases} -\frac{4m^2}{k^2} \arcsin \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}, & k^2 \geq m^2 \\ \frac{4m^2}{k^2} \ln^2 \left(\sqrt{1 - \frac{k^2}{4m^2}} + \sqrt{-\frac{k^2}{4m^2}} \right), & m^2 \geq k^2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Enfim podemos escrever $I(k, m)$ da forma

$$\begin{aligned}
I(k, m) &= \frac{1}{(D-4)(D-3)} \left[J(k, m; 2, 1, 2) - J^{(1)}(m; 2) J^{(2)}(k; m; 1, 2) \right. \\
&\quad \left. + (D-3) J^{(2)}(k; m; 1, 2) J^{(2)}(k; m; 1, 1) \right],
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2 O caso 2-pontos n -loops

Os diagramas de inserção de auto-energia (Fig.-2.2a) são comuns nos cálculos de correções radiativas em teorias perturbativas como por exemplo na polarização do vácuo e auto-energia de férmions. A integral escalar associada à este tipo de diagrama foi discutida no Capítulo 2 onde apresentamos em (3.19), via NDIM, seu resultado não massivo, ou seja

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int d^D q_1 [q_1^2]^{a_1} [(q_1 - l)^2]^{a_2} \\
&= \pi^{D/2} (l^2)^{\sigma_2} \frac{\Gamma(\sigma_1) \Gamma(a_2 + D/2) \Gamma(-\sigma_2)}{\Gamma(-a_1) \Gamma(-a_2) \Gamma(\sigma_2 + D/2)},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $a_1, a_2 \leq 0$ e $\sigma_i = \sum_{j=1}^i a_j + D/2$.

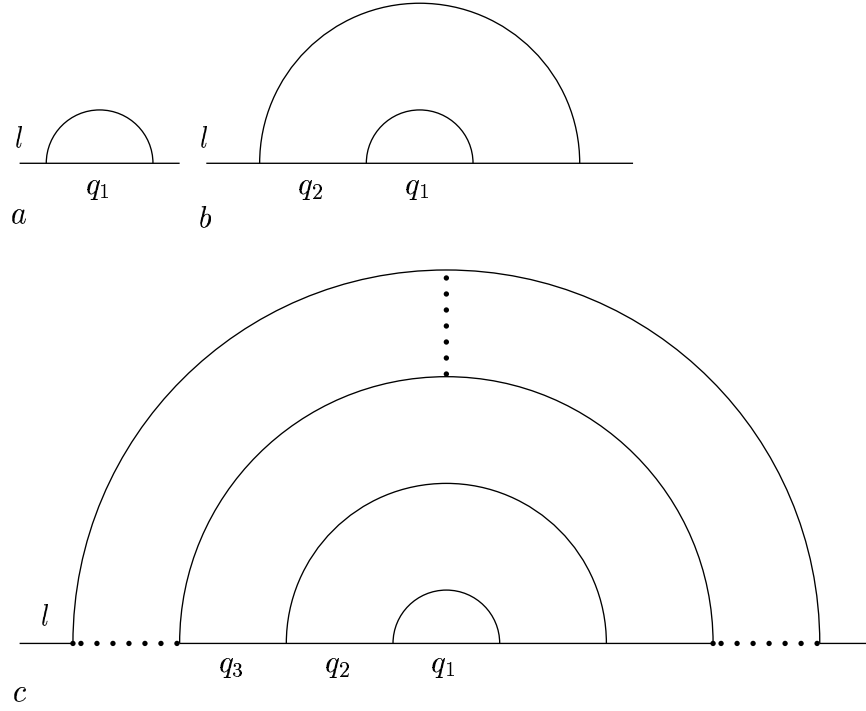


Fig.-2.2: Diagramas com inserções de auto-energia

Tal resultado pode ser estendido inserindo-se outro digrama de auto-energia como mostrado na Fig.-2.2b cuja integral escalar, dada por

$$L_2 = \int d^D q_1 d^D q_2 [q_1^2]^{a_1} [(q_1 - q_2)^2]^{a_2} [q_2^2]^{a_3} [(q_2 - l)^2]^{a_4}, \quad (4.16)$$

pode ser avaliada com a ajuda de (4.15), obtendo

$$\begin{aligned} L_2 &= \pi^D (l^2)^{\sigma_4 + D/2} \frac{\Gamma(\sigma_1) \Gamma(a_2 + D/2) \Gamma(-\sigma_2)}{\Gamma(-a_1) \Gamma(-a_2) \Gamma(\sigma_2 + D/2)} \\ &\times \frac{\Gamma(\sigma_3 + D/2) \Gamma(a_4 + D/2) \Gamma(-\sigma_4 - D/2)}{\Gamma(-a_4) \Gamma(-\sigma_3) \Gamma(\sigma_4 + D)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Este resultado está de acordo com [37]. A extensão para o caso de n inserções de auto-energia, Fig.-2.2c, pode ser feita de maneira simples a partir da integral escalar

$$L_n = \int d^D q_n \prod_{i=1}^{n-1} [d^D q_i (q_i^2)^{a_{2i-1}} [(q_i - q_{i+1})^2]^{a_{2i}}] (q_n^2)^{a_{2n-1}} [(q_n - l)^2]^{a_{2n}}, \quad (4.18)$$

obtendo

$$L_n = \pi^{nD/2} (l^2)^{\sigma_{2n} + (n-1)D/2} \times \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\sigma_{2i-1} + (i-1)D/2) \Gamma(a_{2i} + D/2) \Gamma(-\sigma_{2i} - (i-1)D/2)}{\Gamma(-\sigma_{2i-1} + (2-i)D/2) \Gamma(-a_{2i}) \Gamma(\sigma_{2i} + iD/2)}. \quad (4.19)$$

O resultado acima pode também ser estendido para tratar casos massivos, porém este tratamento torna-se mais simples quando usamos a representação de Mellin-Barnes.

4.3 O caso 3-pontos com inserção de auto-energia

Consideremos agora uma aplicação do resultado para as funções de 2 e 3-pontos não massivas ao diagrama com inserção de auto-energia da Fig.2.3. Sua integral escalar associada é dada por

$$S = \int d^D k d^D q [k^2]^a [(k-l_1)^2]^b [(k-l_2)^2]^c [(k-q)^2]^d [q^2]^e. \quad (4.20)$$

Usando o resultado (3.19), temos

$$S = \pi^{D/2} \frac{\Gamma(D/2 + d) \Gamma(D/2 + e) \Gamma(D/2 - d - e)}{\Gamma(-d) \Gamma(-e) \Gamma(D + d + e)} \times \int d^D k [k^2]^{a+d+e+D/2} [(k-l_1)^2]^b [(k-l_2)^2]^c. \quad (4.21)$$

Esta integral representa uma função de 3-pontos não massiva que foi calculada no Capítulo anterior e uma de suas três soluções expressa pela equação (3.46). Neste contexto, a integral S acima pode ser escrita da forma

$$S = \pi^{D/2} \frac{\Gamma(D/2 + d) \Gamma(D/2 + e) \Gamma(D/2 - d - e)}{\Gamma(-d) \Gamma(-e) \Gamma(D + d + e)} \times J^{(3)}(-a - d - e - D/2, -b, -c, l_1, l_2, l_1 - l_2), \quad (4.22)$$

onde $a, b, c, d, e \leq 0$ e $J^{(3)}$ é a função de 3-pontos não massiva.

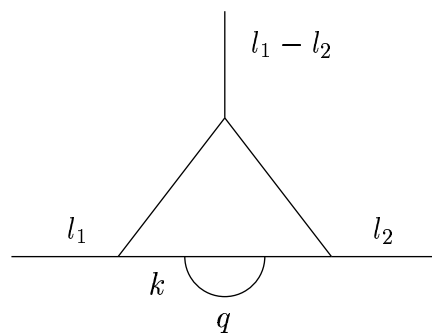


Fig.-2.3: Diagrama de correção de vértice com inserção de auto-energia

Capítulo 5

Considerações Finais

Utilizamos a técnica conhecida como método de integração em dimensão negativa para calcularmos as integrais escalares de Feynman associadas aos diagramas de 2 pontos em 1-loop. Os propagadores escalares foram tomados com massas e expoentes arbitrários. Após a obtenção do caso geral analisamos os casos particulares de importância física como nos casos onde (i) as duas massas são nulas, (ii) apenas uma das massas é nula, e o caso (iii) de massas iguais. Todos os resultados gerais e particulares estão de acordo com os obtidos na literatura via outras abordagens. Também calculamos a função de 3-pontos e analisamos seus casos particulares de interesse físico. Os resultados particulares para massas iguais, uma nula e duas iguais, duas nulas e três massas iguais são apresentados em termos de funções hipergeométricas cujos parâmetros e variáveis são mostrados nas tabelas 3.2 a 3.11 do Capítulo 2.

A generalização para o cálculo da função de n -pontos em 1-loop foi feita no Capítulo 3 e obtida a fórmula geral para esta função dada em termos de funções hipergeométricas generalizadas de Lauricella. Casos particulares como o de massas iguais e o de momenta externos iguais também foram tratados obtendo resultados concordantes com a literatura. Também foi mostrada esta fórmula geral usando o método da parametrização de Feynman. Neste contexto, como esta expressão geral para n -pontos em 1-loop também foi obtida pela representação de Mellin-Barnes, obtemos uma equivalência entre estes métodos. Todavia para outras regiões cinemáticas algumas considerações devem ser feitas. Uma delas é de que esta fórmula não poderá ser usada de forma recorrente para cálculos em mais de um 1-loop tendo em vista as regiões cinemáticas das séries hipergeométricas. Por outro lado, se desejarmos obter outras regiões cinemáticas para as soluções, deverão ser usadas as fórmulas de continuação analítica das funções hipergeométricas. Estas outras regiões cinemáticas para as soluções poderão também ser obtidas resolvendo-se novamente o problema via representação de Mellin-Barnes e escolhendo-se outros contornos de

integração, ou via NDIM escolhendo-se outras soluções pelo sistema de equações de vínculo.

A integral escalar associada ao diagrama “2-loop master” foi calculada usando inicialmente a decomposição da integral em integrais mais simples via método de integração por partes e as integrais remanescentes avaliadas via NDIM. Este resultado é comparado de forma satisfatória com a literatura. O diagrama em 2-loop não massivo e com n -inserções de auto-energia teve sua integral escalar calculada via NDIM.

Usando a função de 3-pontos não massiva obtida anteriormente calculamos o caso em que é inserida uma linha interna de auto-energia. A generalização via NDIM para cálculos de integrais escalares associadas a diagramas massivos em 2-loops com n -linhas internas não nos parece apresentar fórmulas finais que sejam de fácil manipulação. Isto se deve à necessidade de se estabelecer um critério geral para a escolha das séries hipergeométricas obtidas pelas solução das equações de vínculo.

Como possíveis extensões deste trabalho podemos citar: o estudo da possibilidade da renormalizabilidade no calibre não covariante do cone de luz; a aplicação dos resultados e outros possíveis via o NDIM às integrais presentes em teorias de campo não comutativa bem como no formalismo de teoria de campos a temperatura finita. Estes resultados bem como o NDIM também podem encontrar aplicabilidade na teoria 5-dimensional covariante galileana que vem recentemente se estabelecendo [45, 46] e, em seu atual estágio busca desenvolver técnicas perturbativas em teoria de campos não relativísticos [47].

Apêndice A

Identidades matemáticas usadas neste trabalho

Neste Apêndice apresentamos algumas identidades matemáticas já conhecidas em teoria quântica de campos. Algumas demonstrações serão ressaltadas com a finalidade de elucidar resultados obtidos ao longo do trabalho, outras não serão demonstradas por serem já conhecidas na literatura.

Consideremos inicialmente as integrais:

Gaussiana

$$\int d^D k \exp \left\{ - \sum_{i=1}^D k_i^2 \right\} = \pi^{D/2}. \quad (\text{A.1})$$

A função gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx \, x^{z-1} e^{-x}. \quad (\text{A.2})$$

A função beta generalizada

$$\begin{aligned} B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \int_0^1 dx_1 \, (1-x_1)^{\alpha_1-1} \prod_{i=1}^{n-2} \left[\int_0^{x_i} dx_{i+1} \, (x_i - x_{i+1})^{\alpha_{i+1}-1} \right] x_{n-1}^{\alpha_n-1} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i)}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Algumas propriedades da função gamma usadas no corpo desta Tese:

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-1/2} \Gamma(z) \Gamma(z + 1/2), \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{\Gamma(z) \Gamma(-z)} = -\frac{z}{\pi} \sin(\pi z), \quad (\text{A.5})$$

e

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}. \quad (\text{A.6})$$

A.1 A integral padrão

Considere um espaço D-dimensional onde um D-vetor k_μ é dado por $k_\mu = (k_1, k_2, \dots, k_D)$. Neste espaço a integral (A.1) também pode ser reescrita da forma

$$\pi^{D/2} = \frac{1}{2} \int d\Omega \int_0^\infty d(k^2) (k^2)^{D/2-1} e^{-k^2},$$

onde Ω representa o elemento de ângulo sólido no espaço D-dimensional e k o módulo do D-vetor k_μ . Usando (A.2), obtemos

$$\int d\Omega = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}. \quad (\text{A.7})$$

Observe que usando a construção acima, a integral (2.11) será dada por

$$\int d^D k \frac{k^{2\alpha}}{[k^2 + \Delta]^\beta} = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty d(k^2) \frac{(k^2)^{\alpha+D/2-1}}{[k^2 + \Delta]^\beta}. \quad (\text{A.8})$$

Esta integral pode ser avaliada usando-se a mudança de variável $k^2 = \Delta \frac{(1-x)}{x}$ e a definição da função Beta (dada em (A.3) com $n = 2$). Após este cálculo, o resultado da integral padrão (2.11) será dado por

$$\int d^D k \frac{k^{2\alpha}}{[k^2 + \Delta]^\beta} = \pi^{D/2} (\Delta)^{\alpha-\beta+D/2} \frac{\Gamma(\beta - \alpha - D/2) \Gamma(\alpha + D/2)}{\Gamma(\beta) \Gamma(D/2)}. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Os polinômios de Gegenbauer

Os polinômios de Gegenbauer (ver por exemplo [42]) são definidos pelos coeficientes $C_n^a(z)$, para valores inteiros de n , da expansão de $(1 - 2hz + h^2)^{-a}$ em termos de potências de h :

$$(1 - 2hz + h^2)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^a(z) h^n. \quad (\text{A.10})$$

Inicialmente reescrevemos o lado esquerdo da equação acima em termos da expansão

$$\begin{aligned} (1 - 2hz + h^2)^{-a} &= (1 - h)^{-2a} \left[1 + \frac{h(2 - 2z)}{(1 - h)^2} \right]^{-a} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i + a)(2z - 2)^i}{i! \Gamma(a)} \frac{h^i}{(1 - h)^{2i+2a}}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Consideremos agora a expansão

$$\frac{h^i}{(1 - h)^{2i+2a}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j + 2i + 2a)}{j! \Gamma(2i + 2a)} h^{i+j}. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo este resultado em (A.10) segue

$$(1 - 2hz + h^2)^{-a} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i+a)\Gamma(j+2i+2a)(2z-2)^i}{i! j! \Gamma(a) \Gamma(2i+2a)} h^{i+j}. \quad (\text{A.13})$$

Considerando a fórmula de recontagem de uma dupla série infinita

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} h^{i+j} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_{i,n-i} h^n, \quad (\text{A.14})$$

pode-se reescrever (A.13), obtendo-se

$$(1 - 2hz + h^2)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(i+a)\Gamma(i+n+2a)(2z-2)^i}{i! (n-i)! \Gamma(a) \Gamma(2i+2a)} h^n. \quad (\text{A.15})$$

Comparando-se este resultado com (A.10) conclui-se claramente

$$C_n^a(z) = \sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(i+a)\Gamma(i+n+2a)(2z-2)^i}{i! (n-i)! \Gamma(a) \Gamma(2i+2a)}. \quad (\text{A.16})$$

Esta expressão é conhecida como polinômio de Gegenbauer. Os coeficientes $C_n^a(z)$ podem ainda ser reescritos da forma

$$C_n^a(z) = \frac{\Gamma(n+2a)}{\Gamma(2a)\Gamma(1+n)} {}_2F_1 \left[n+2a, -n; a+1/2 \mid \frac{1-z}{2} \right]. \quad (\text{A.17})$$

Considerando um espaço Euclidiano D -dimensional cujos vetores são representados por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_D)$, segue que os polinômios de Gegenbauer, $C_n^a(z)$, são obtidos da expansão

$$\frac{1}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^{2a}} = \frac{1}{x_1^{2a}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^a(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^n, \quad (\text{A.18})$$

onde x_1 representa o módulo do vetor $\mathbf{x}_1$ e $x_1 \geq x_2$. Neste contexto, estes polinômios obedecem à relação de ortogonalidade na esfera unitária em R^D [13]

$$\int C_n^a(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) d\hat{x}_2 C_m^a(\hat{\mathbf{x}}_2 \cdot \hat{\mathbf{x}}_3) = \frac{a}{n+a} \delta_{m,n} C_n^a(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_3), \quad (\text{A.19})$$

onde a normalização angular é tal que $\int d\hat{x} = 1$. Outra identidade que pode ser obtida neste contexto é

$$\frac{1}{k^{2\alpha}} = \frac{\Gamma(a-\alpha+1)}{\pi^{a+1}\Gamma(\alpha)} \int \frac{\exp(2ik \cdot x) d^D x}{(x^2)^{a-\alpha+1}}. \quad (\text{A.20})$$

Apêndice B

Funções Hipergeométricas

Neste Apêndice apresentamos definições e propriedades de algumas das principais funções hipergeométricas utilizadas ao longo desta Tese.

B.1 A função de Gauss

É definida pela série

$${}_2F_1[a, b; c|z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1, \quad (\text{B.1})$$

onde $(a)_b$ é o símbolo de Pochhammer, definido por.

$$(a)_b = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}, \quad (\text{B.2})$$

e que possui dentre outras propriedades

$$(a)_b = \frac{(-1)^b}{(1-a)_{-b}}. \quad (\text{B.3})$$

Esta propriedade pode ser interpretada, quando usada fora de uma série hipergeométrica, como uma continuação analítica para valores negativos de a e b .

A função de Gauss acima é solução da equação diferencial

$$z(1-z) \frac{d^2 Y}{dz^2} + \{c - (1+a+b)z\} \frac{dY}{dz} - abY = 0, \quad (\text{B.4})$$

e sua forma integral é dada por

$${}_2F_1[a, b; c|z] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt \, t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a}, \quad (\text{B.5})$$

onde $\text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0$ e $|\arg(1-z)| < \pi$. Disto decorre a propriedade da soma

$${}_2F_1[a, b; c|1] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (\text{B.6})$$

onde $Re(a + b - c) < 0$ com $c \neq 0, -1, -2, \dots$. A continuação analítica para $z > 1$ é dada por

$$\begin{aligned} {}_2F_1[a, b; c|z] &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}{}_2F_1[a, 1-c+a; 1-b+a|1/z] \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}{}_2F_1[b, 1-c+b; 1-a+b|1/z]. \end{aligned} \quad (B.7)$$

E para efetuarmos a continuação analítica de $1-z$ para z , usa-se

$$\begin{aligned} {}_2F_1[a, b; c|1-z] &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{}_2F_1[a, b; 1+a+b-c|z] \\ &+ z^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}{}_2F_1[c-a, c-b; 1+c-a-b|z]. \end{aligned} \quad (B.8)$$

A função de Gauss para valores específicos dos parâmetros pode assumir o comportamento de funções elementares: para $a = 1$, $b = 1/2$ e $c = 3/2$, tem-se

$${}_2F_1\left[1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \middle| z\right] = \frac{1}{\sqrt{-z}} \arctan \sqrt{-z}; \quad (B.9)$$

também para $a \rightarrow \frac{a}{2}$, $b \rightarrow \frac{-a}{2}$, $c \rightarrow \frac{1}{2}$ e $z \rightarrow (\sin z)^2$, temos

$${}_2F_1\left[\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a; \frac{1}{2} \middle| (\sin z)^2\right] = \cos(az); \quad (B.10)$$

e para a arbitrário, $b = a - \frac{1}{2}$ e $c = 2a$, segue

$${}_2F_1\left[a, a - \frac{1}{2}; 2a \middle| z\right] = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-z)^{1/2}\right]^{1-2a}. \quad (B.11)$$

B.2 Função de Lauricella generalizada

A função de Lauricella generalizada [44] de N variáveis tem a forma

$$\begin{aligned} &F_{C:D^1;\dots;D^N}^{A:B^1;\dots;B^N} \left[\begin{matrix} [a : \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)}]; [b^{(1)} : \beta^{(1)}]; \dots; [b^{(N)} : \beta^{(N)}] \\ [c : \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(N)}]; [d^{(1)} : \delta^{(1)}]; \dots; [d^{(N)} : \delta^{(N)}] \end{matrix} \middle| z_1; \dots; z_N \right] \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_N=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^A (a_i)_{\alpha_i^{(1)}j_1 + \dots + \alpha_i^{(N)}j_N}}{\prod_{i=1}^C (c_i)_{\gamma_i^{(1)}j_1 + \dots + \gamma_i^{(N)}j_N}} \frac{\prod_{i=1}^{B^1} (b_i^1)_{\beta_i^{(1)}j_1} \dots \prod_{i=1}^{B^{(N)}} (b_i^{(N)})_{\beta_i^{(N)}j_N}}{\prod_{i=1}^{D^{(1)}} (d_i^1)_{\delta_i^{(1)}j_1} \dots \prod_{i=1}^{D^{(N)}} (d_i^{(N)})_{\delta_i^{(N)}j_N}} \\ &\times \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \dots \frac{z_N^{j_N}}{j_N!} \end{aligned} \quad (B.12)$$

onde

$$\begin{aligned} [a : \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)}] &= (a_1 : \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_1^{(N)}), \dots, (a_A : \alpha_A^{(1)}, \dots, \alpha_A^{(N)}), \\ [b^{(1)} : \beta^{(k)}] &= (b_1^{(k)} : \beta_1^{(k)}), \dots, (b_{B^{(k)}}^{(k)} : \beta_{B^{(k)}}^{(k)}), \\ [c : \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(N)}] &= (c_1 : \gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_1^{(N)}), \dots, (c_C : \gamma_C^{(1)}, \dots, \gamma_C^{(N)}), \\ [d^{(1)} : \delta^{(k)}] &= (d_1^{(k)} : \delta_1^{(k)}), \dots, (d_{D^{(k)}}^{(k)} : \delta_{D^{(k)}}^{(k)}), \end{aligned} \quad (B.13)$$

com $k = 1, \dots, N$. Os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ podem ser inteiros não negativos nas funções hipergeométricas e também negativos nas funções do tipo hipergeométrica.

A função hipergeométrica de Appel F_4 tem a forma

$$F_4 [a, b; c, d | z_1; z_2] = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a)_{i+j} (b)_{i+j}}{(c)_i (d)_j} \frac{z_1^i}{i!} \frac{z_2^j}{j!}, \quad (\text{B.14})$$

e também pode ser escrita da forma $F_4 = F_{0;1:1}^{2;0:0}$. Esta função, para $z_1 = z_2 = z$ pode ser reescrita da forma

$$F_4 [a, b; c, d | z; z] = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a)_{i+j} (b)_{i+j}}{(c)_i (d)_j} \frac{z^{i+j}}{i! j!},$$

que usando a recontagem de séries (A.14) e também (A.4), temos

$$F_4 [a, b; c, d | z; z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n \left(\frac{c+d-1}{2}\right)_n \left(\frac{c+d}{2}\right)_n (4z)^n}{(c)_n (d)_n (c-d-1)_n n!}. \quad (\text{B.15})$$

A função generalizada de Gauss, ${}_{n+1}F_n = F_n^{n+1}$, é dada por

$${}_{n+1}F_n \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_{n+1})_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_n)_n} \frac{z^n}{n!}. \quad (\text{B.16})$$

Outras funções hipergeométricas utilizadas (que também podem ser dadas em termos das funções de Lauricella (B.12)) são dadas por

$$\Psi_1 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4; z_5 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_2-j_4} (x_3)_{j_1+j_3-j_5}}{(x_4)_{j_1-j_4-j_5} (x_5)_{j_1+j_2+j_3-j_4-j_5}} \times \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!} \frac{z_4^{j_4}}{j_4!} \frac{z_5^{j_5}}{j_5!}, \quad (\text{B.17})$$

$$\Psi_2 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4; z_5 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_5} (x_2)_{j_3+j_4+j_5} (x_3)_{j_1+j_2-j_4}}{(x_4)_{j_2-j_3-j_4} (x_5)_{j_1+j_3+j_5}} \times \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!} \frac{z_4^{j_4}}{j_4!} \frac{z_5^{j_5}}{j_5!}, \quad (\text{B.18})$$

$$\Psi_3 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4; z_5 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5} (x_2)_{j_1+j_2+j_4} (x_3)_{j_1+j_3+j_5}}{(x_4)_{j_1+j_4+j_5} (x_5)_{j_1+j_2+j_3}} \times \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!} \frac{z_4^{j_4}}{j_4!} \frac{z_5^{j_5}}{j_5!}, \quad (\text{B.19})$$

$$\Psi_4 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4; z_5 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2-j_3} (x_2)_{j_1+j_4-j_5} (x_3)_{-j_2+j_3+j_4}}{(x_4)_{j_1-j_3-j_5} (x_5)_{-j_2+j_4-j_5}} \times \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!} \frac{z_4^{j_4}}{j_4!} \frac{z_5^{j_5}}{j_5!}. \quad (\text{B.20})$$

$$T_1 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_3} (x_3)_{j_2+j_3}}{(x_4)_{j_1+j_2+j_3} (x_5)_{j_3}} \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}, \quad (\text{B.21})$$

$$T_2 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2-j_3} (x_2)_{j_1+j_2-j_3} (x_3)_{j_3}}{(x_4)_{j_1-j_3} (x_5)_{j_2-j_3}} \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}, \quad (\text{B.22})$$

$$T_3 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2-j_3} (x_2)_{j_1+j_2} (x_3)_{j_3}}{(x_4)_{j_2-j_3} (x_5)_{j_1}} \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}, \quad (\text{B.23})$$

$$T_4 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2} (x_2)_{j_1+j_2} (x_3)_{j_1-j_3}}{(x_4)_{j_1-j_3} (x_5)_{j_1+j_2-j_3}} \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}, \quad (\text{B.24})$$

$$T_5 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2} (x_2)_{j_1+j_3} (x_3)_{j_2-j_3}}{(x_4)_{j_2-j_3} (x_5)_{j_1}} \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}, \quad (\text{B.25})$$

$$T_6 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2} (x_2)_{j_1+j_2} (x_3)_{j_3}}{(x_4)_{j_2-j_3} (x_5)_{j_1+j_3}} \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}, \quad (\text{B.26})$$

$$T_7 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_2} (x_3)_{j_3}}{(x_4)_{j_1+j_3} (x_5)_{j_2}} \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}, \quad (\text{B.27})$$

$$T_8 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_2+j_3} (x_3)_{j_3}}{(x_4)_{j_2+j_3} (x_5)_{j_1+j_3}} \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}. \quad (\text{B.28})$$

$$T_9 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ x_6, x_7 \end{matrix} \middle| z_1, z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2} (x_2)_{j_2+j_3} (x_3)_{-j_1+j_3} (x_4)_{-2j_1+j_3} (x_5)_{j_1}}{(x_6)_{-j_1+j_2+j_3} (x_7)_{-j_1+j_3}} \times \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}, \quad (\text{B.29})$$

$$T_{10} \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ x_6, x_7 \end{matrix} \middle| z_1, z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_2} (x_3)_{j_1+j_3} (x_4)_{j_2+j_3} (x_5)_{j_3}}{(x_6)_{j_1+j_2+j_3} (x_7)_{j_1+j_2+2j_3}} \times \frac{z_1^{j_1}}{j_1!} \frac{z_2^{j_2}}{j_2!} \frac{z_3^{j_3}}{j_3!}. \quad (\text{B.30})$$

$$T_{11} \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3, x_4 \\ x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3 \right] = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_2} (x_3)_{j_1+j_3} (x_4)_{j_2+j_3}}{(x_5)_{2j_1+2j_2+2j_3}}$$

$$\times \frac{z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3}}{j_1! j_2! j_3!}. \quad (\text{B.31})$$

$$R_1 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_2-j_4} (x_3)_{j_2+j_3} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{(x_4)_{j_2-j_4} (x_5)_{j_1+j_2+j_3-j_4} j_1! j_2! j_3! j_4!}, \quad (\text{B.32})$$

$$R_2 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2-j_3-j_4} (x_2)_{j_1+j_2} (x_3)_{j_3+j_4} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{(x_4)_{j_1-j_3} (x_5)_{j_2-j_4} j_1! j_2! j_3! j_4!}, \quad (\text{B.33})$$

$$R_3 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2-j_3-j_4} (x_2)_{j_1+j_2-j_3} (x_3)_{j_3+j_4} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{(x_4)_{j_2-j_3} (x_5)_{j_1-j_3-j_4} j_1! j_2! j_3! j_4!}, \quad (\text{B.34})$$

$$R_4 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2-j_3} (x_2)_{j_1+j_4} (x_3)_{j_2-j_4} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{(x_4)_{j_2-j_3-j_4} (x_5)_{j_1-j_3} j_1! j_2! j_3! j_4!}, \quad (\text{B.35})$$

$$R_5 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_3} (x_3)_{j_2+j_4} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{(x_4)_{j_1+j_2+j_4} (x_5)_{j_3-j_4} j_1! j_2! j_3! j_4!}, \quad (\text{B.36})$$

$$R_6 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3+j_4} (x_2)_{j_1+j_2+j_3} (x_3)_{j_1+j_4} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{(x_4)_{j_1+j_3+j_4} (x_5)_{j_1+j_2} j_1! j_2! j_3! j_4!}, \quad (\text{B.37})$$

$$R_7 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_2-j_4} (x_3)_{j_3+j_4} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{(x_4)_{j_2-j_4} (x_5)_{j_1+j_3} j_1! j_2! j_3! j_4!}, \quad (\text{B.38})$$

$$R_8 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2-j_3} (x_2)_{j_1+j_2} (x_3)_{j_3+j_4} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{(x_4)_{j_1-j_3-j_4} (x_5)_{j_2+j_4} j_1! j_2! j_3! j_4!}, \quad (\text{B.39})$$

$$R_9 \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_4, x_5 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3+j_4} (x_2)_{j_1+j_2} (x_3)_{j_3+j_4} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{(x_4)_{j_1+j_3} (x_5)_{j_2+j_4} j_1! j_2! j_3! j_4!}, \quad (\text{B.40})$$

$$R_{10} \left[\begin{matrix} x_1, x_2, x_3, x_4 \\ x_5, x_6, x_7 \end{matrix} \middle| z_1; z_2; z_3; z_4 \right] = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} \frac{(x_1)_{j_1+j_2+j_3} (x_2)_{j_1+j_2-j_4} (x_3)_{j_1+j_2-2j_4} (x_4)_{j_3+j_4}}{(x_5)_{j_1+j_2+j_3-j_4} (x_6)_{j_2-j_4} (x_7)_{j_1-j_4}} \times \frac{z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4}}{j_1! j_2! j_3! j_4!}. \quad (\text{B.41})$$

Referências

- [1] G. Passarino and M. Veltman, Nucl. Phys. **B 160**, 151 (1979); Z. Bern, L. Dixon and D. A. Kosower, Nucl. Phys. **B 412**, 751 (1994); J. M. Campbell, E. W. N. Glover and D. J. Miller, Nucl. Phys. **B 498**, 397 (1997); J. Fleischer, F. Jegerlehner and O. V. Tarasov, Phys. Lett. **B 566**, 423 (2000); T. Binoth, J. P. Guilleet and G. Heinrich, Nucl.Phys. **B 572**, 361 (2000).
- [2] A. I. Davydychev, Phys. Lett. **B 263**, 107 (1991).
- [3] O. V. Tarasov, Phys. Rev. **D 54**, 6479 (1996).
- [4] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory* (Wiley, New York, 1984).
- [5] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B 153**, 365 (1979).
- [6] F. V. Tkachov, Phys. Lett. **B 100**, 65 (1981); K. G. Chetyrkin and F. V. Tkachov, Nucl. Phys. **B 192**, 159 (1981).
- [7] T. Gehrmann and E. Remiddi, Nucl. Phys. **B 580**, 485 (2000); [hep-ph/9912329].
- [8] R. Bonciani, P. Mastrolia, E. Remiddi, (hep-ph/0301170).
- [9] A. V. Kotikov, Phys. Lett. **B 524**, 158 (1991); Mod.Phys. Lett. **A 6**, 677 (1991).
- [10] C. Ford, I. Jack and D. R. T. Jones, Nucl. Phys. **B 387**, 373 (1992); J. Fleischer, A. V. Kotikov and O. L. Veretin, Nucl. Phys. **B 547**, 343 (1999).
- [11] Z. Bern, L. J. Dixon, D. A. Kosower, Nucl. Phys. **B 412**, 751 (1994).
- [12] H-T. Sato, M. G. Schmidt, C. Zahltten, Nucl. Phys. **B 579**, 492 (2000); H-T. Sato, M. G. Schmidt, Nucl. Phys. **B 560**, 551 (1999).
- [13] K. T. Chetyrkin, A. L. Kataev and F. V. Tkachov, Nucl. Phys. **B 174**, 345 (1980).

- [14] K. T. Chetyrkin, A. L. Kataev and F. V. Tkachov, Phys. Lett. **B 85**, 277 (1979).
- [15] A. V. Kotikov and L. N. Lipatov, Nucl. Phys. **B 582** 19 (2000); D. J. Broadhurst and A. V. Kotikov, Phys. Lett. **B 441** 345 (1998).
- [16] A. I. Davydychev, J. Math. Phys. **32**, 1052 (1991).
- [17] A. I. Davydychev, J. Math. Phys. **33**, 358 (1992).
- [18] É. É. Boos and A. I. Davydychev, Theor. Math. Phys. **89** 1052 (1991).
- [19] A. I. Davydychev, “Loop calculations in QCD with massive quarks”, <http://wwwthep.physik.uni-mainz.de/~davyd/preprints/vladiv.ps.gz>
- [20] A. I. Davydychev, J. Phys. **A: Math. Gen.** **25**, 5587 (1992).
- [21] J. B. Tausk, Phys. Lett. **B 469**, 225 (1999); C. Anastasiou, J. Tausk and M. E. Tejeda-Yeomans, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89**, 262 (2000).
- [22] V. A. Smirnov, Phys. Lett. **B 547**, 239 (2002).
- [23] V. V. Belokurov, N. I. Usyukina, J. Phys. **A 16**, 2811 (1983); Z. Bern, L. Dixon, L. Schmidt, Phys. Rev. **D 66**, 074018 (2002); Z. Bern, A. De Freitas, L. Dixon, H. L. Wong, Phys. Rev. **D 66**, 085002 (2002).
- [24] T. Binoth, J. P. Guillet, G. Heinrich, C. Schubert, Nucl. Phys. **B 615**, 385 (2001); G. Heinrich, T. Binoth, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89** 246 (2000).
- [25] S. Weinzierl, J. Phys. **G 26**, 654 (2000); S. Weinzierl and D. A. Kosower, Phys. Rev. **D 60**, 054028 (1999); A. I. Davydychev, P. Osland, O. V. Tarasov, Phys. Rev. **D 54**, 4087 (1996); Erratum-ibid **D 59**, 109901 (1999); G. Duplanić and B. Nizić, (hep-ph/0303184).
- [26] Z. Bern, preprint (hep-ph/0212406).
- [27] I. G. Halliday and R. M. Ricotta, Phys. Lett. **B 193**, 241 (1987).
- [28] G. V. Dunne and I. G. Halliday, Phys. Lett. **B 193**, 247 (1987).
- [29] I. G. Halliday, R. M. Ricotta and A. T. Suzuki, *Proceedings of the XVII Brazilian Meeting on Particles and Fields* (Caxambu, 1996).

- [30] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **B 12**, 20 (1972); G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B 44**, 189 (1972); G. Leibbrandt, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 849 (1975).
- [31] A. T. Suzuki and A. G. M. Schmidt, *Phys. Rev.* **D 58**, 47701 (1998).
- [32] A. T. Suzuki and A. G. M. Schmidt, *J. Phys.* **A 33**, 3713 (2000).
- [33] A. T. Suzuki and A. G. M. Schmidt, *Prog. Theor. Phys.* **103**, 1011 (2000).
- [34] A. T. Suzuki and A. G. M. Schmidt, *Eur. Phys. J.* **C 19**, 391 (2001).
- [35] A. T. Suzuki, A. G. M. Schmidt and R. Bentín, *Nucl. Phys.* **B 537**, 549 (1999).
- [36] A. T. Suzuki, E. S. Santos and A. G. M. Schmidt, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 1 (2003)
- [37] A. T. Suzuki, E. S. Santos and A. G. M. Schmidt, *Eur. Phys. J.* **C 26**, 125 (2002).
- [38] A. T. Suzuki and A. G. M. Schmidt, *Eur. Phys. J.* **C 5**, 175 (1998).
- [39] J. Fleischer, O. V. Tarasov and F. Jegerlehner, *Phys. Lett.* **B 319**, 249 (1992).
- [40] K. G. Chetyrkin and F. V. Tkachov, *Phys. Lett* **B 114**, 340 (1982); V. A. Smirnov, *Commun. Math. Phys.* **134**, 109 (1990).
- [41] G. 't Hooft and M. Veltman, *Diagrammar* (CERN, Geneva, 1973).
- [42] A. Erdelyi et al. (eds), *Higher Transcendental Functions* (California Institute of Thechnology H. Bateman M. S. Project), Vol 1, (Mc Graw Hill, New York, 1953).
- [43] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions* (Cambridge, London, 1966).
- [44] A. A. Inayat-Hussain, *J. Phys.* **A 20** 4109 (1987).
- [45] Y. Takahashi, *Fortschr. Phys.* **36**, 63 (1988); *Fortschr. Phys.* **36**, 83 (1988).
- [46] A. E. Santana, F. C. Khanna and Y. Takahashi, *Prog. Theor. Phys.* **99**, 327 (1998).

- [47] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos and J. D. M. Vianna, *Ann. Phys.* **277**, 144 (1999); M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos and J. D. M. Vianna, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, L273 (2000); M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana and E. S. Santos, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 1 (2001); L. M. Abreu, A. E. Santana and A. Ribeiro Filho, *Ann. Phys.* **297**, 396 (2002).