

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

**CONSTRUÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DE UM PÊNDULO
MAGNÉTICO VIA FOTOGRAFIA ESTROBOSCÓPICA DIGITAL EM CONJUNTO
COM MÉTODOS NUMÉRICOS**

Gabriel Branco Vitorino

Prof. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro (SP)

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

GABRIEL BRANCO VITORINO

CONSTRUÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DE UM
PÊNDULO MAGNÉTICO VIA FOTOGRAFIA
ESTROBOSCÓPICA DIGITAL EM CONJUNTO COM
MÉTODOS NUMÉRICOS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Campus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, parte dos requisitos
para obtenção do grau de Bacharel em
Física.

Rio Claro - SP

2022

V845c Vitorino, Gabriel
Construção e caracterização dinâmica de um pêndulo magnético via fotografia estroboscópica digital em conjunto com métodos numéricos / Gabriel Vitorino. -- Rio Claro, 2022
52 f. : il., tabs., fotos

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e
Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Física. 2. Sistemas não lineares. 3. Teoria do caos. 4. Pêndulo. I.
Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

GABRIEL BRANCO VITORINO

CONSTRUÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DE UM
PÊNULO MAGNÉTICO VIA FOTOGRAFIA
ESTROBOSCÓPICA DIGITAL EM CONJUNTO COM
MÉTODOS NUMÉRICOS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Campus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, parte dos requisitos
para obtenção do grau de Bacharel em
Física.

Comissão Examinadora

Luiz Antonio Barreiro

Alexandre Mesquita

Edson Denis Leonel

Rio Claro, 11 de novembro de 2022.

Assinatura do(a) aluno(a)

assinatura do(a) orientador(a)

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu pai, e à minha mãe por me proporcionarem esta oportunidade.

Ao professor Luiz Antonio Barreiro por me orientar na execução deste projeto.

E aos senhores Engomado, Mago, Pelúcia e Titan pela ajuda ao longo do caminho.

RESUMO

Na seguinte monografia realiza-se o estudo do sistema dinâmico não-linear conhecido como Pêndulo Magnético através da construção e caracterização dinâmica do mesmo utilizando a técnica da Fotografia Estroboscópica Digital em conjunto com métodos numéricos. Visando a aproximação da dinâmica não-linear com a experimentação prática, o projeto une física teórica e experimental de maneira que, foi realizada a montagem do aparato para a coleta de dados experimentais, os quais, através do uso de simulações programadas a partir de modelagens matemáticas do problema, foram utilizados então para a obtenção de resultados, como a determinação de trajetórias, bacias de atração e análise do coeficiente de Lyapunov, os quais visam a caracterização dinâmica do movimento. Posteriormente foi realizada a comparação qualitativa dos mesmos com resultados obtidos pelos métodos numéricos de maneira a inferir a qualidade do processo de coleta e tratamento de dados.

PALAVRAS-CHAVE: não-linear; Pêndulo Magnético; construção; caracterização; Fotografia Estroboscópica Digital; experimental; simulações; comparação qualitativa.

ABSTRACT

In the following monograph the study of the nonlinear dynamic system known as the Magnetic Pendulum has been realized through its construction and dynamic characterization using the technique of Digital Stroboscopic Photography along with numerical methods. In order to bring together nonlinear dynamics and practical experimentation, the project unifies theoretical and experimental Physics in a way that, it was realized the construction of the apparatus used in the acquisition of experimental data, which, has then, by the use of simulations programmed upon mathematical models of the problem, been used to get the results, such as the determination of trajectories and basins of attraction and the analysis of the Lyapunov coefficient, that characterize the dynamics of the motion. Later on the results were qualitatively compared with the ones obtained by numerical methods so that we can infer the quality of the process of acquisition and treatment of experimental data.

KEY-WORDS: nonlinear; Magnetic Pendulum; construction; characterization; Digital Stroboscopic Photography; experimental; simulations; qualitatively compared.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA AO PROBLEMA E AO TRABALHO.	07
2 FUNDAMENTÇÃO TEÓRICA.	12
3 MONTAGEM E PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL.	27
4 ANÁLISE DE DADOS E REULTADOS.	36
5. CONCLUSÃO	48
REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA AO PROBLEMA E AO TRABALHO

No trabalho apresentado a seguir foi realizado o estudo do sistema dinâmico não-linear conhecido como pêndulo magnético, através da construção e caracterização dinâmica do mesmo utilizando a técnica da Fotografia Estroboscópica Digital associada ao uso de métodos numéricos e simulações. Com isso temos que o projeto une a física teórica e experimental de maneira que os resultados obtidos a partir da construção do experimento serão tratados e comparados qualitativamente com dados obtidos através de modelos teóricos e simulações, tendo como uma de suas motivações aproximar a dinâmica não-linear, de uma realidade mais palpável, tratando-a alternativamente ao uso apenas de simulações.

Como foi dito acima o sistema a ser estudado pode ser caracterizado como um sistema dinâmico não-linear. De maneira geral os sistemas dinâmicos são divididos em dois grupos, sistemas determinísticos e não determinísticos, no primeiro tipo tem-se que conhecendo as variáveis de estado em um dado momento, o comportamento do sistema é determinado univocamente em qualquer instante posterior, já em sistemas não determinísticos (também conhecidos como sistemas estocásticos), a modelagem no geral é dada em termos de relações probabilísticas de ocorrência de eventos. ^[1]

Entretanto, alguns sistemas determinísticos, como o pêndulo magnético, apresentam um comportamento dinâmico irregular relacionado à grande sensibilidade que estes possuem em relação às condições iniciais. Esta constatação, do fato de que sistemas determinísticos não implicam obrigatoriamente em comportamento regular, foi feita ao longo das décadas por diversos cientistas. Podemos citar Henri Poincaré com seu estudo acerca do problema de três corpos realizado durante o século XIX, ou Edward Lorenz que notou esse comportamento ao estudar fenômenos atmosféricos e perceber que soluções que aparentemente partiam das mesmas condições iniciais levavam a divergências. ^[1]

Estes estudos deram então origem à uma das mais recentes áreas de estudo da Física e da Matemática, a Teoria do Caos. O interesse por esses sistemas com comportamento dinâmico não-linear (caótico) é significativo, levando em conta que estes são observados em diversas situações na natureza. Esse entusiasmo cresceu bastante com o desenvolvimento de métodos numéricos de análise de dados os quais são implementados com o auxílio de computadores com cada vez mais capacidade de processamento.

Falando agora um pouco mais a fundo sobre a Teoria do Caos temos que esta recente área do conhecimento tem ao longo dos anos juntamente com a geometria fractal adentrado o

interesse não só do meio acadêmico como do público em geral, ressignificando conceitos matemáticos que anteriormente pareceriam maçantes e antiquados. Um exemplo disso é o fato de que a exposição “*Frontiers of Chaos: Images of Complex Dynamical Systems*” de 1985 se tornou uma das maiores séries de exposições mundiais apadrinhada pelo “*Goethe-Institute*”.^[1]

Além disso a teoria (juntamente com a Teoria Quântica) mudou a visão que tínhamos do mundo ao nosso redor. Desde o Renascimento Científico do século XVI e XVII o grande sucesso de diversos cientistas no ramo das ciências naturais criou a ilusão de uma realidade completamente determinística, na qual conhecendo-se as leis que a governam, todos os seus resultados, a princípio, poderiam ser precisamente previstos.

É interessante pensar que muito antes disso, para as pessoas que viviam nos primórdios da civilização humana, os fenômenos naturais provavelmente aparentavam ser completamente caóticos e não determinísticos. Com o passar de milhares de anos e o desenvolvimento das ciências da natureza, as áreas onde o caos reinava e os humanos não conseguiam fazer previsões se tornavam cada vez menores e criou-se então essa ilusão de que era apenas uma questão de tempo para que o caos fosse completamente extinguido.^[1]

Entretanto, o desenvolvimento tecnológico e científico nestas áreas indica que esse determinismo absoluto talvez seja inalcançável, mesmo com o uso de computadores cada vez mais modernos e potentes, embora em teoria esta previsibilidade poderia ser alcançada. Uma conclusão que podemos tirar é que o determinismo absoluto e o desenvolvimento aparentemente acidental dos fenômenos na dinâmica não-linear não são mutuamente exclusivos, mas, na verdade sua coexistência parece predominante na natureza.^[1]

Um aparente paradoxo surge então do fato de que o caos é determinístico, à princípio o futuro de um sistema pode ser completamente determinado pelo passado, mas na prática pequenas incertezas, como minúsculos erros de medida, são amplificados. Assim, embora o comportamento do sistema seja previsível à curto prazo ele se torna imprevisível à longo prazo e é a descoberta desse fato um dos mais importantes feitos da Teoria do Caos.^[1]

Com isso, foram criadas então metodologias que avaliam com precisão científica a presença do comportamento caótico em sistemas físicos. Utilizando-as então é possível a princípio estimar um limite de previsibilidade à um sistema a partir do qual nunca seremos capazes de prever seu desenvolvimento com precisão, por exemplo, na previsão do tempo meteorológico este limite se encontra em torno de duas a três semanas, a partir das quais nunca seremos capazes de fazer previsões corretas.^[1]

Estudando os métodos numéricos utilizados na previsão do tempo, Ed. Lorenz descobriu o que ele cunhou “efeito borboleta”, descrevendo o caos determinístico da seguinte maneira: o caos ocorre quando a propagação de erros, vista como um sinal ao longo do tempo, cresce a ponto de se tornar do mesmo tamanho ou escala que o sinal original. ^[1] Lorenz nos mostra que determinismo e previsibilidade não são equivalentes (embora o sistema seja determinístico, as previsões que podem ser feitas sobre ele são limitadas). ^[1]

Além disso, o caos e o princípio da causalidade podem se justapor em um mesmo sistema. Pode haver em um mesmo sistema físico uma progressão linear de erros que caracteriza o sistema como determinístico sendo dominado pelo princípio da causalidade, enquanto ao mesmo tempo, também pode haver uma progressão exponencial de erros, caracterizada pelo efeito borboleta, indicando a quebra do princípio da causalidade. ^[1]

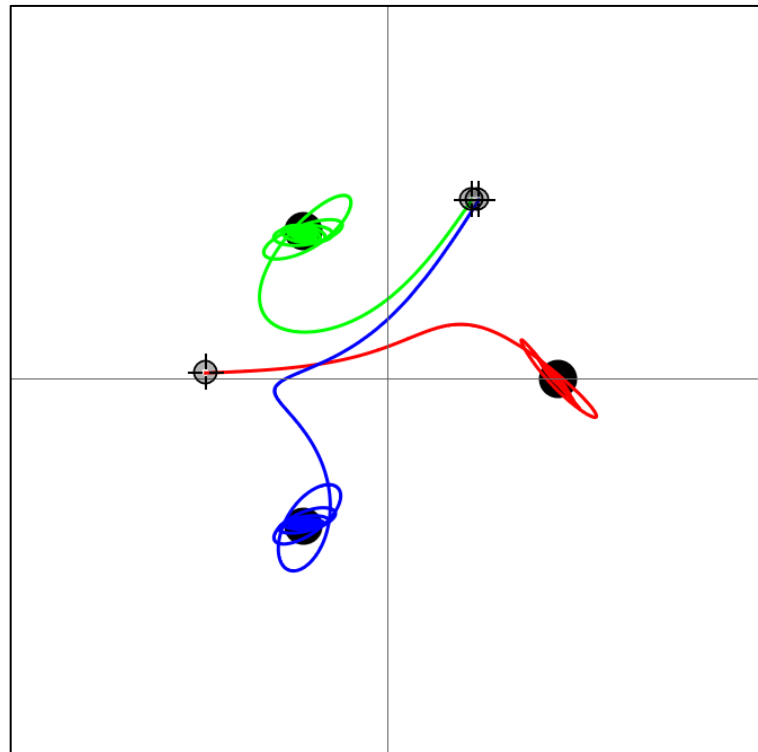


Figura 1 – Imagem retirada da simulação *Chaotic Dynamics of a Magnetic Pendulum* do *WOLFRAM™ DEMONSTRATIONS PROJECT*. Nela podemos ver as trajetórias percorridas (indicada pelas linhas coloridas) por três pêndulos magnéticos (pontos em cinza claro com um indicativo em cruz) em um sistema com três atratores (pontos em preto). ^[2]

Em suma, grande parte da Teoria do Caos está ligada com a noção de haver uma grande sensibilidade por parte do sistema determinístico com as condições iniciais. Costumam-se chamar de caóticos movimentos complexos e aperiódicos, mas não randômicos, que exibem um rápido crescimento de erros os quais independentemente do determinismo perfeito do

sistema inibem qualquer possibilidade de fazer previsões futuras à longo prazo, havendo um ponto de transição entre um movimento não caótico e o caos. ^[1]

Na figura 1 vemos uma perfeita demonstração do que significa de fato a grande sensibilidade às condições iniciais, e da natureza do movimento caótico. Nela vemos no canto superior direito o indicativo de duas posições iniciais bastante próximas a partir das quais a dinâmica do sistema se desenvolve em resultados completamente distintos, o pêndulo indicado pela cor azul acaba por estagnar seu movimento sobre o ímã que se encontra no terceiro quadrante da figura, enquanto o pêndulo indicado pela cor verde para sobre o ímã no segundo quadrante.

Neste panorama trataremos na presente monografia especificamente do pêndulo magnético com três atratores (ímãs), em sua essência o experimento modelado consiste em um ímã (ou material ferromagnético) preso em suspensão na ponta de uma corda, à uma certa distância, não muito grande, do plano logo abaixo sobre o qual são dispostos três ímãs que afetarão então a dinâmica do pêndulo oscilando acima deles.

Desta maneira para cada posição inicial o pêndulo eventualmente se estabiliza sobre alguns dos ímãs da base, entretanto como vimos na figura 1, o sistema é caótico e possui alta sensibilidade com as condições iniciais, possuindo então bacias de atração para os diferentes ímãs, as quais são separadas por fronteiras fractais. Mais detalhes acerca da modelagem feita e das equações que governam a mesma serão apresentados na seção dois. ^[3]

Realizamos então a montagem experimental de um pêndulo magnético construído a partir das especificações do modelo, com essa montagem a parte de coleta de dados experimentais foi realizada através da utilização da técnica de fotografia estroboscópica em conjunto com um *software* de análise de vídeo (*Tracker* ^[5]), o qual nos forneceu dados de posição em função do tempo.

A técnica utilizada (fotografia estroboscópica via *software*), consiste basicamente na filmagem do processo dinâmico, vale lembrar que, o vídeo digital é constituído por diversos fotogramas retirados em uma frequência bastante alta, geralmente de 60 a 30 fotogramas por segundo, dependendo da câmera digital utilizada. ^[4] Após então a gravação, o vídeo é transferido à um computador, no qual com um *software* de acompanhamento, esses fotogramas são utilizados para obtermos coordenadas de vários pontos do movimento em intervalos de tempo fixos de 1/30 ou 1/60 segundos determinando explicitamente o espaço de configurações

do movimento. Uma descrição completa do processo de montagem e aquisição de dados se encontra na seção número três. ^[4]

Após a abordagem destes dois tópicos acima, será feita então na seção quatro uma comparação qualitativa entre os dois processos de obtenção de dados, apresentando alguns resultados utilizando o modelo teórico de simulações e alguns via modelo experimental, visando no geral o estudo do movimento do pêndulo magnético. Será feita então a caracterização da trajetória de cada movimento, seguida por uma breve análise da possibilidade da determinação das seções de Poincaré, isso dentro de uma perspectiva de resultados que podemos obter diretamente do *Tracker* ^[5], realiza-se então a obtenção dos coeficientes de Lyapunov para alguns movimentos e por fim é feita uma análise das bacias de atração, de maneira que a dinâmica do pêndulo é completamente caracterizada tanto por resultados experimentais quanto teóricos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção número dois será tratado o aparato teórico do trabalho, ou seja, a modelagem do pêndulo magnético será descrita através de suas equações matemáticas juntamente com os aspectos do movimento que foram ajustados para sua confecção. Além disso, trata-se também nesta seção da simulação disponibilizada pelo *WOLFRAM™ DEMONSTRATIONS PROJECT* [2], acerca da dinâmica caótica do pêndulo magnético, assim como outras bibliotecas de códigos, os quais serão utilizados posteriormente na seção número quatro, de comparação e análise de dados a fim de caracterizar o movimento do pêndulo magnético e validar a qualidade dos dados coletados e dos resultados obtidos.

Começaremos então esta seção com uma caracterização descritiva do pêndulo magnético, sem nos ater diretamente à montagem experimental realizada. Um pêndulo magnético pode ser descrito como uma bola de metal amarrada à um fio de barbante preso ao teto ou à algum tipo de suporte qualquer, de maneira que este pêndulo possa oscilar em todas as direções. Com isso é importante que o comprimento do fio seja do tamanho adequado para que o pêndulo possua um plano de oscilação próximo à alguma superfície (o chão por exemplo), na qual serão colocados imãs (no nosso caso três imãs com a mesma orientação) dispostos não muito longe do ponto de equilíbrio gravitacional e que afetarão o movimento de oscilação do mesmo. [1]

É importante verificar que ao segurar o objeto ferromagnético próximo a cada um dos imãs sente-se a força de atração magnética e que ao soltar o pêndulo nestas posições ele permanecerá parado nelas. [1] Dessa maneira, ao liberarmos o imã em diferentes posições iniciais, ele oscilará, sendo influenciado pelas forças de atração magnética. Este movimento oscilatório no geral será bastante imprevisível, mas eventualmente a bola termina seu movimento sobre algum dos imãs devido às forças dissipativas presentes no movimento (podemos citar a resistência do ar e forças de atrito entre corda e os pontos de contato dentre outras fontes). A figura 2 a seguir apresenta um diagrama de um pêndulo magnético (mais especificamente da montagem visada para este trabalho). [1]

Como foi dito acima, soltando o pêndulo de diferentes posições iniciais logo percebe-se que seu movimento é bastante difícil de ser previsto (quase impossível na verdade), fica evidente a forte dependência do movimento para com as condições iniciais, e nesta simples experiência evidencia-se a natureza caótica do movimento. Além disso este movimento apresenta algo conhecido como *final-state sensitivity*. [1] Este fenômeno ocorre na presença de

diferentes atratores, sendo que o movimento para uma dada posição inicial tipicamente converge para um destes atratores, logicamente então existem fronteiras entre essas bacias de atração, fronteiras essa que frequentemente são fractais. ^[1]

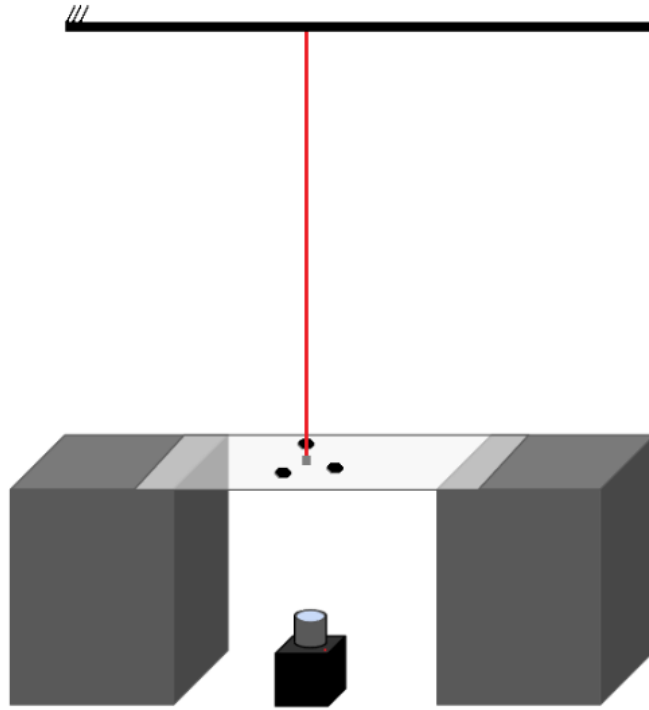


Figura 2 – Diagrama esquemático da montagem de um pêndulo magnético, na figura vemos mais acima um anteparo no qual o fio do pêndulo (linha em vermelho) será pendurado, na extremidade inferior do fio vemos o material ferromagnético que preso ao fio oscilará acima do plano dos ímãs, objetos circulares em preto sobre a chapa de acrílico apoiada em dois pontos por anteparos, na imagem vemos ainda uma câmera a qual no nosso experimento foi utilizada para a análise estroboscópica, mas não necessariamente se refere a montagem de um pêndulo magnético.

Entretanto, uma posição inicial pode ser especificada apenas com um certo nível limitado de precisão, caso todas as trajetórias dentro deste intervalo de precisão converjam para o mesmo atrator, não há problemas em prever o estado final do movimento, mas, digamos que neste intervalo de precisão ao redor da posição inicial existam algumas orbitas que irão convergir para um atrator e outras orbitas as quais irão convergir a outro atrator distinto, neste caso surge então um problema. ^[1]

Ou seja, não é mais possível prever corretamente o estado final do movimento de acordo com sua posição inicial. Fica evidente que o problema se torna ainda mais complexo caso a dimensão destas fronteiras fractais se torne maior, barreiras fractais de grande dimensão

significam um aumento na imprevisibilidade de sistemas não-lineares com vários atratores, apesar destes aspectos (fractais) não serem tratados experimentalmente neste trabalho eles estão presentes no cerne do modelo e foram, portanto, abordados.

Passaremos então para a apresentação da primeira simulação utilizada, nela (e em basicamente todos os outros algoritmos utilizados) um modelo matemático para o movimento do pêndulo magnético é montado, as equações do movimento deste modelo são então resolvidas através de métodos numéricos de maneira que possamos estudar seu espaço de configurações. Com o intuito então de modelar o movimento serão estabelecidas algumas condições de contorno tratadas a seguir.

A primeira já foi citada anteriormente e se refere ao tamanho do fio que compõe o pêndulo, é importante que este seja longo o suficiente quando comparado ao espaçamento entre os ímãs para que o movimento do pêndulo se dê aproximadamente em um plano (duas dimensões) paralelamente acima do plano no qual os ímãs estão dispostos ao invés de oscilar numa esfera tridimensional com um raio grande.

Outra condição para a modelagem matemática do movimento é o fato de que os ímãs estão devidamente orientados como pontos atratores e posicionados, a uma pequena distância abaixo do plano de oscilação definido anteriormente, nos vértices de um triângulo equilátero. Esta condição garante que os ímãs possuam a capacidade de atrair a ponta do pêndulo e de mantê-lo fixo em um dos atratores ao final do movimento. ^[1]

Por fim, a última condição de contorno se refere à força magnética, nesta modelagem a força aplicada ao pêndulo por um ímã em específico é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre os dois, mais a frente veremos exatamente a importância desta condição e o que isto significará efetivamente para equação que modela o movimento. ^[1]

A partir destas premissas monta-se então uma equação diferencial de segunda ordem em duas variáveis (posição em relação ao eixo x e posição em relação ao eixo y) a qual quando resolvida nos fornecerá a posição (x,y) do pêndulo ao longo do tempo a partir da qual podem ser extraídas outras informações. O modelo depende então de alguns parâmetros, que foram programados na simulação, na qual estes parâmetros podem ser facilmente alterados e ajustados da maneira que bem entendermos, diferentemente de um experimento real no qual o ajuste destes parâmetros se torna bastante inviável.

Neste modelo, os parâmetros acima são agrupados em duas constantes, uma relacionada as forças dissipativas de fricção às quais o pêndulo está submetido e outra relacionada a força que puxa o pêndulo à sua posição de repouso gravitacional. A variação dos parâmetros de fricção gera órbitas diferentes para a exata mesma posição inicial como podemos ver na figura 3, um alto coeficiente de atrito gera um movimento mais curto de maneira que o pêndulo oscila pouco antes de parar sobre um dos ímãs, enquanto valores baixos do coeficiente relacionado ao atrito geram orbitas longas nas quais o pêndulo percorre um longo caminho antes de passar a oscilar sobre um dos ímãs e finalmente encerrar seu movimento.

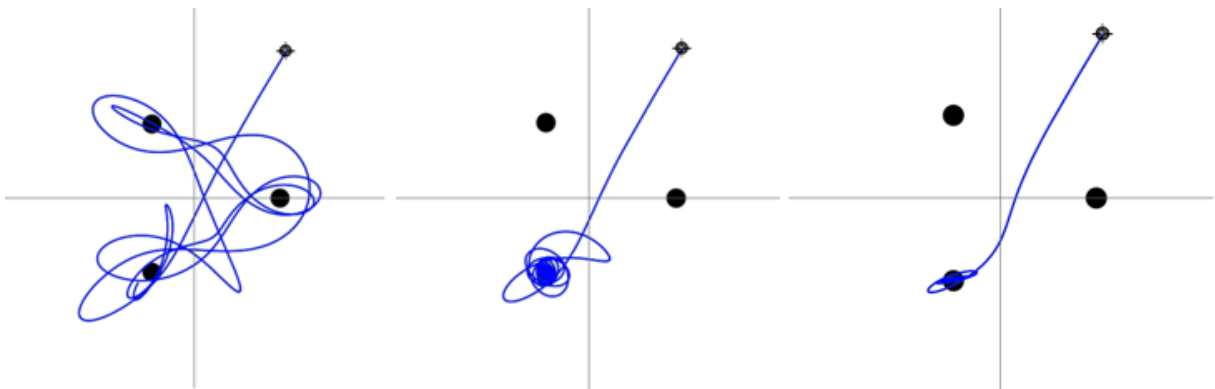


Figura 3 – As imagens acima foram retiradas da simulação *Chaotic Dynamics of a Magnetic Pendulum* disponibilizada pelo *WOLFRAM™ DEMONSTRATIONS PROJECT* [2], da esquerda para a direita podemos ver trajetórias do pêndulo magnético para uma mesma posição inicial mas com um coeficiente de atrito crescente, como podemos ver na imagem mais à esquerda, com um baixo coeficiente de atrito o movimento do pêndulo é mais “espalhado” e sua trajetória oscila mais entre os ímãs antes de parar sobre um deles já para as outras trajetórias com um coeficiente menor o que observa-se é que o pêndulo rapidamente passa a oscilar sobre um dos ímãs até que pare completamente seu movimento. [1] [2]

Com isso em mente podemos passar ao processo de montagem da equação diferencial que governa o movimento do pêndulo sobre os três ímãs, como foi dito anteriormente, o pêndulo será uma massa puntiforme que se move aproximadamente em um plano xy acima do plano no qual os ímãs foram posicionados. Chamando a distância entre os planos de distância d , temos que quando o pêndulo se encontra da distância $(x,y,0)$ e um dos ímãs na posição $(x_1,y_1,-d)$ de acordo com a segunda lei de Coulomb assumimos neste modelo que a força que o ímã exerce sobre o pêndulo é proporcional ao quadrado da distância entre os dois objetos (como dito anteriormente), a situação descrita pode ser visualizada na figura número 4. [1]

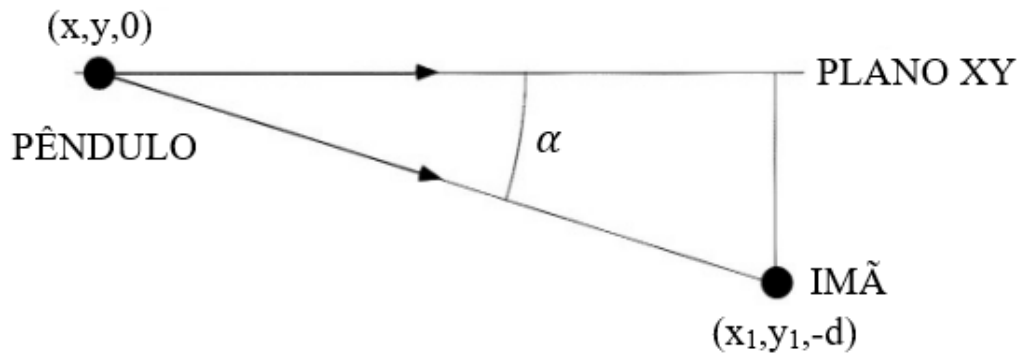
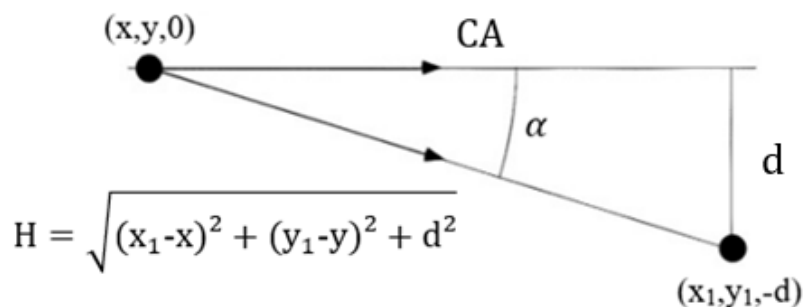


Figura 4 – A imagem acima busca ilustrar uma secção lateral do plano de oscilação do pêndulo mostrando a posição relativa entre ele e um dos ímãs no plano paralelo logo abaixo a uma determinada distância d do plano xy . Na extremidade esquerda vemos o pêndulo magnético na posição $(x, y, 0)$; mais a direita vemos a indicação do ímã na posição $(x_1, y_1, -d)$, ainda indicado na figura estão o plano xy no qual o pêndulo oscila e o ângulo α entre o plano de oscilação e o vetor que determina a distância, $\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2}$, entre o ímã e o pêndulo. ^[1]

Ou seja, a força magnética será proporcional a $\frac{1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2}$, entretanto, temos que o movimento do pêndulo se dá apenas no plano xy e, portanto, devemos multiplicar a força magnética pelo cosseno do ângulo α indicado acima no esquema da figura 4. Enunciaremos agora a expressão do $\cos(\alpha)$ de maneira que possamos multiplicar a expressão do inverso do quadrado da distância por ela. Como podemos ver na figura 5 a seguir ^[1], a fim de calcularmos o cosseno de alfa devemos primeiramente achar o valor CA do cateto adjacente ao ângulo alfa de maneira que poderemos posteriormente dividir este valor pela hipotenusa H equivalente a $\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2}$ e obter então a expressão que queríamos encontrar.



$$\cos(\alpha) = \frac{CA}{H}$$

Figura 5 – A imagem acima busca ilustrar os passos e constantes necessários para encontrar a expressão de $\cos(\alpha)$, na imagem estão indicados o cateto adjacente ao ângulo alfa (CA), a

hipotenusa do triângulo retângulo formado (H) e a distância d entre os dois planos, de maneira que fica evidente a aplicação do teorema de Pitágoras. [1]

Desenvolvendo então os cálculos a partir da equação (3.1) definida como podemos ver a seguir:

$$\cos(\alpha) = \frac{CA}{H} \quad (3.1)$$

na qual, como foi dito anteriormente, CA é o valor do cateto adjacente e pode ser obtido facilmente pelo teorema de Pitágoras e H é o valor da hipotenusa e equivale à distância entre os dois pontos, enuncia-se agora o valor de CA:

$$\begin{aligned} CA^2 &= H^2 - d^2 \\ CA^2 &= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2}^2 - d^2 \\ CA^2 &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2 - d^2 \\ CA &= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

de maneira que, juntando as expressões (3.1) e (3.2) juntamente com o valor já conhecido de H obtemos a expressão para o cosseno de alfa como:

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2}} \quad (3.3)$$

por fim, basta multiplicar o inverso do quadrado da distância pela equação (3.3) para obtermos a proporcionalidade da força magnética no plano xy.

Temos, portanto, que a força magnética será proporcional à:

$$\frac{1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2} \cdot \frac{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2}} \quad (3.4)$$

e desenvolvendo a expressão (3.4) chega-se em,

$$\frac{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}{(\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + d^2})^3} \quad (3.5)$$

podemos ainda transformar a expressão (3.5) em um vetor contido no plano xy separando a expressão em duas componentes ficamos com:

$$\frac{1}{((x_1-x)^2+(y_1-y)^2+d^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

desta maneira fica evidente que no eixo x a força magnética é proporcional à

$$\frac{\sqrt{(x_1-x)^2}}{((x_1-x)^2+(y_1-y)^2+d^2)^{3/2}} = \frac{(x_1-x)}{((x_1-x)^2+(y_1-y)^2+d^2)^{3/2}}$$

já no eixo y a força será proporcional à

$$\frac{\sqrt{(y_1-y)^2}}{((x_1-x)^2+(y_1-y)^2+d^2)^{3/2}} = \frac{(y_1-y)}{((x_1-x)^2+(y_1-y)^2+d^2)^{3/2}}$$

obviamente esta é a força de um dos três imãs que atuam sobre o pêndulo, portanto o valor final da força magnética será um somatório destas três forças aplicadas por cada um dos três imãs, a expressão geral pode ser descrita como:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(x_i-x)}{((x_i-x)^2+(y_i-y)^2+d^2)^{3/2}}$$

para o eixo x, e como:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(y_i-y)}{((x_i-x)^2+(y_i-y)^2+d^2)^{3/2}}$$

para o eixo y, desta maneira terminamos essa parte do desenvolvimento da expressão que modela o movimento do pêndulo magnético, passaremos agora para a parte da expressão que é referente à força gravitacional e finalmente à força de atrito. ^[1]

Como foi dito acima temos ainda que tratar da modelagem de outras duas forças que atuam sobre este movimento, a força que puxa o pêndulo de volta ao centro do plano xy (posição de repouso gravitacional), ou seja, a força gravitacional e a força de atrito responsável pela dissipação de energia. Tratando primeiramente da força que puxa o pêndulo para a posição de repouso gravitacional, temos que esta será escrita como proporcional à posição x e y do pêndulo em relação ao centro do eixo de coordenadas como vemos na equação (3.7):

$$-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

vale ressaltar que a força magnética por ser uma força de caráter conservativo possui um sinal positivo, as demais forças aqui tratadas têm caráter dissipativo e, portanto, possuem um sinal negativo. ^[1]

Por fim, a força de atrito age logicamente em oposição ao movimento e é proporcional à velocidade do pêndulo,

$$-\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

sendo que x' e y' representam a primeira derivada da posição em relação ao tempo, ou seja, a velocidade do sistema em cada eixo de coordenadas. ^[1]

Por fim podemos então igualar o somatório das forças acima à força resultante que age sobre o sistema, a qual de acordo com a segunda lei de Newton será $F_{Rx} = mx''$ para o eixo x e $F_{Ry} = my''$ para o eixo de coordenadas y. Desta maneira chegamos então na equação (3.9) e (3.10) que representam respectivamente a equação do movimento do pêndulo magnético para o eixo x e para o eixo y:

$$F_{Rx} = m \cdot x'' = m \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{(x_i - x)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2)^{3/2}} - R \cdot m \cdot x' - C \cdot m \cdot x$$

$$x'' + Rx' - \sum_{i=1}^3 \frac{(x_i - x)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2)^{3/2}} + Cx = 0 \quad (3.9)$$

de maneira análoga,

$$y'' + Ry' - \sum_{i=1}^3 \frac{(y_i - y)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2)^{3/2}} + Cy = 0, \quad (3.10)$$

sendo que R representa um coeficiente de proporcionalidade relacionado à força de atrito, por isso ele acompanha a componente da velocidade, e C o coeficiente de proporcionalidade relacionado à força gravitacional ou *string force* (relacionada a frequência de oscilação), além disso vale lembrar que o somatório aparece no intuito de levar em conta a força gerada pelos três ímãs alocados em (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) . ^[1]

Como vemos acima o resultado obtido é um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem cuja solução está relacionada à parâmetros correspondentes a especificação da posição inicial de (x, y) e velocidade inicial (x', y') do pêndulo. Este problema de valor inicial pode ser facilmente resolvido utilizando métodos numéricos e é justamente as

equações (3.9) e (3.10) que foram programadas na simulação disponibilizada pelo *WOLFRAM™ DEMONSTRATION PROJECT* ^[2] a qual foi utilizada neste trabalho e será tratada a seguir.

Já nas figuras número um e número três podemos ver imagens da interface da simulação com dados gerados pela mesma, a interface completa da simulação pode ser vista na figura 6, e conta com controles para o ajuste de diversos parâmetros como número de ímãs (como foi dito anteriormente neste trabalho foram utilizados apenas 3) e o raio da circunferência sobre a qual eles estão posicionados, o parâmetro de atrito e o intervalo de tempo que deseja ser observado do movimento.

Além da interface é fornecido também acesso ao código programado para rodar a simulação, a seguir analisaremos também este indicando as linhas de código e suas diferentes funções, e compararemos a equação do movimento que foi programada com a obtida na demonstração acima verificando que as duas são equivalentes. Podemos também modificar livremente as linhas de código fornecidas pelo projeto de maneira a ajustar outros diversos parâmetros da mesma, os quais não estão presentes na interface da figura seis, de acordo com as nossas necessidades.

Antes de começarmos a apresentação do código da simulação, vale a pena neste ponto lembrar a maneira que utilizaremos os métodos numéricos na análise de dados, como foi dito anteriormente na simulação (e nas outras bibliotecas) um algoritmo é aplicado para resolver as equações do movimento a partir de um conjunto de condições iniciais, entretanto na nossa prática experimental, utilizando o método de fotografia estroboscópica, esses dados de posição (x,y) para um dado instante são obtidos sem a necessidade de resolvermos as equações diferenciais.

A ideia então é coletar esses dados e fornecê-los à simulação e a diferentes bibliotecas de maneira que as mesmas nos fornecerão então resultados com os quais podemos realizar comparações qualitativas (com outros resultados obtidos da simulação) a fim de averiguar a validade da utilização do método para o estudo do pêndulo magnético com três atratores. Não somente isso como também serão apresentados resultados obtidos diretamente das simulações a fim de caracterizarmos a dinâmica do movimento.

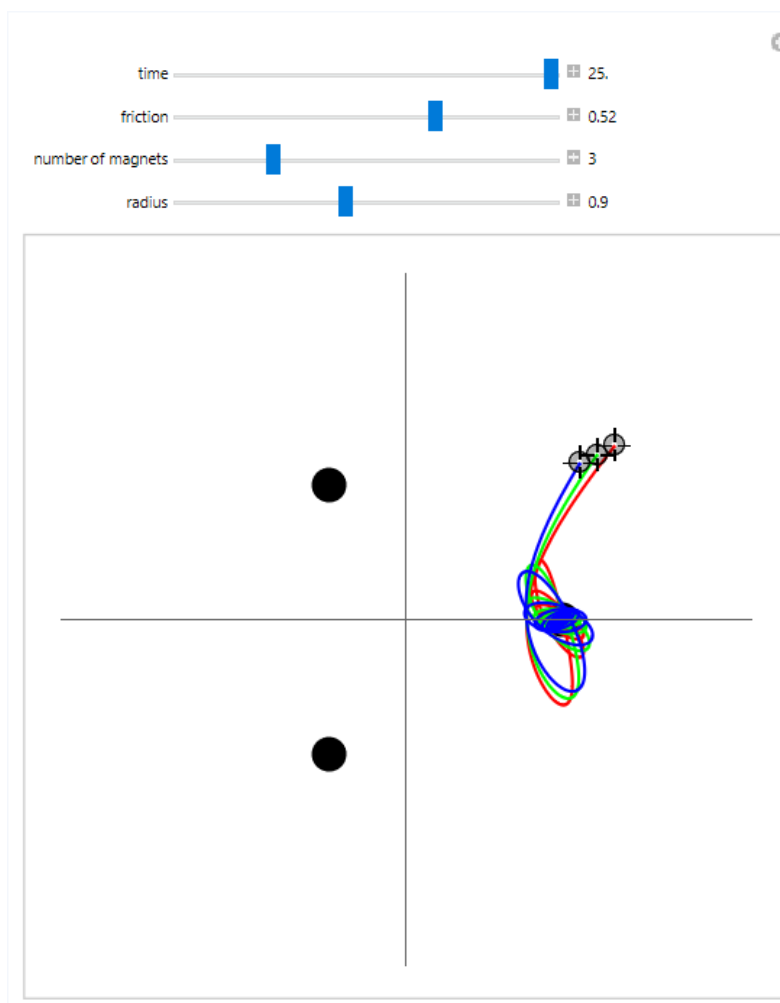


Figura 6 – Imagem da interface da simulação *Chaotic Dynamics of a Magnetic Pendulum* do *WOLFRAM™ DEMONSTRATIONS PROJECT* [2], na interface vemos um quadrado que mostra a trajetória percorrida pelo imã para diferentes posições iniciais, e na parte mais superior da figura vemos os controles disponibilizados para o ajuste diferentes parâmetros, de cima para baixo temos o tempo, parâmetro de atrito, número de imãs e raio da circunferência sobre a qual os imãs são posicionados.

Passaremos então para a análise do código da simulação utilizada, na figura sete vemos ele por completo da maneira como nos é apresentado no *software WOLFRAM™ Mathematica* responsável por rodar a simulação. Com o intuito de melhorar a visualização do código programado, apresentaremos a frente duas outras imagens que representam um zoom na seção

superior e inferior das linhas do programa e estas serão apresentadas e analisadas separadamente.

```

Manipulate[
Module[{xMag, yMag, system},
xMag = Table[A Cos[i *  $\frac{2 \pi}{NMag}$ ], {i, 1, NMag}];
yMag = Table[A Sin[i *  $\frac{2 \pi}{NMag}$ ], {i, 1, NMag}];
system = {x''[t] + R x'[t] - Sum[ $\frac{xMag[[i]] - x[t]}{(\sqrt{(xMag[[i]] - x[t])^2 + (yMag[[i]] - y[t])^2 + d^2})^3}$ , {i, 1, NMag}] + C1 x[t] == 0,
y''[t] + R y'[t] - Sum[ $\frac{yMag[[i]] - y[t]}{(\sqrt{(xMag[[i]] - x[t])^2 + (yMag[[i]] - y[t])^2 + d^2})^3}$ , {i, 1, NMag}] + C1 y[t] == 0};
Show[Graphics[Table[Disk[{xMag[[i]], yMag[[i]]}, 0.1], {i, 1, NMag}], PlotRange -> 2, Axes -> True, Ticks -> False],
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. threesolutions[pt, system], {t, 0, T}], PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}],
{{T, 24.00, "time"}, 0.001, 25, 0.05, Appearance -> "Labeled"},
{{R, 0.05, "friction"}, 0.01, 0.75, 0.01, Appearance -> "Labeled"},
{{NMag, 3, "number of magnets"}, 2, 6, 1, Appearance -> "Labeled"},
{{A, 0.90, "radius"}, 0.01, 2.00, 0.1, Appearance -> "Labeled"},
{{pt, {{1.2, 1}, {1.1, 0.95}, {1.0, 0.90}}, {-2, -2}, {2, 2}, Locator},
Initialization -> (
d = 0.25;
C1 = 0.15;
solvesystem[{xinit_, yinit_}, localsystem_] := NDSolve[Join[localsystem, {x[0] == xinit, y[0] == yinit, y'[0] == 0, x'[0] == 0}], {x, y}, {t, 0, 25}];
threesolutions[initialpositions_, localsystem_] := Map[solvesystem[#, localsystem] &, initialpositions]
)]

```

Figura 7 – Código da simulação *Chaotic Dynamics of a Magnetic Pendulum* apresentado na íntegra e retirado diretamente da interface do *Mathematica*, a imagem foi retirada diretamente da referência de número [2].

Como foi dito posteriormente, a seguir apresentaremos a parte superior das linhas de código com o intuito de propiciar uma melhor visualização da mesma, logo em seguida iniciamos a análise de seus componentes.

```

Manipulate[
Module[{xMag, yMag, system},
xMag = Table[A Cos[i *  $\frac{2 \pi}{NMag}$ ], {i, 1, NMag}];
yMag = Table[A Sin[i *  $\frac{2 \pi}{NMag}$ ], {i, 1, NMag}];
system = {x''[t] + R x'[t] - Sum[ $\frac{xMag[[i]] - x[t]}{(\sqrt{(xMag[[i]] - x[t])^2 + (yMag[[i]] - y[t])^2 + d^2})^3}$ , {i, 1, NMag}] + C1 x[t] == 0,
y''[t] + R y'[t] - Sum[ $\frac{yMag[[i]] - y[t]}{(\sqrt{(xMag[[i]] - x[t])^2 + (yMag[[i]] - y[t])^2 + d^2})^3}$ , {i, 1, NMag}] + C1 y[t] == 0};
Show[Graphics[Table[Disk[{xMag[[i]], yMag[[i]]}, 0.1], {i, 1, NMag}], PlotRange -> 2, Axes -> True, Ticks -> False],

```

Figura 8 – A figura mostra o código de programação apresentado na figura 7 com um zoom aplicado as sete primeiras linhas, a imagem foi retirada diretamente da referência de número [2].

Pode-se dizer que estas primeiras linhas estabelecem a equação do movimento que deve ser resolvida e prestando atenção na equação que foi programada vemos que esta equivale exatamente à equação do movimento que deduzimos anteriormente, até mesmo com os mesmos

índices e parâmetros. Logo nas primeiras linhas vemos a expressão responsável por estabelecer a posição dos ímãs sobre a circunferência de raio A, utilizando um parâmetro i que varia de acordo com o número de ímãs e expressões de senos e cossenos moduladas pelo raio definido acima.

Logo em seguida na quinta linha vemos a parte da equação do movimento referente ao eixo x, ela inicia-se, assim como na equação (3.9), por um termo referente à aceleração do sistema, seguido pelo termo proporcional à velocidade, referente ao atrito, partimos então para o somatório referente à força magnética gerada por todos os ímãs e finalmente para a força gravitacional dependente da posição em relação a origem dos eixos de coordenada. De maneira análoga a mesma coisa é feita para o eixo y exatamente como consta na equação (3.10).

```

ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. threesolutions[pt, system], {t, 0, T}],
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}],
{{T, 24.00, "time"}, 0.001, 25, 0.05, Appearance -> "Labeled"},
{{R, 0.05, "friction"}, 0.01, 0.75, 0.01, Appearance -> "Labeled"},
{{NMag, 3, "number of magnets"}, 2, 6, 1, Appearance -> "Labeled"},
{{A, 0.90, "radius"}, 0.01, 2.00, 0.1, Appearance -> "Labeled"},
{{pt, {{1.2, 1}, {1.1, 0.95}, {1.0, 0.90}}}, {-2, -2}, {2, 2}, Locator},
Initialization -> (
  d = 0.25;
  C1 = 0.15;
  solvesystem[{xinit_, yinit_}, localsystem_] := NDSolve[Join[localsystem,
{x[0] == xinit, y[0] == yinit, y'[0] == 0, x'[0] == 0}], {x, y}, {t, 0, 25}];
  threesolutions[initialpositions_, localsystem_] := Map[solvesystem[#, localsystem] &, initialpositions]
)

```

Figura 9 - A figura mostra o código de programação apresentado na figura 7 com um zoom aplicado as quatorze últimas linhas, a imagem foi retirada diretamente da referência de número [2].

Partindo então para as linhas finais de código temos que estas se referem ao estabelecimento dos valores dos diversos parâmetros e constantes do problema, à construção da aparência estética da simulação e finalmente à resolução do sistema a partir do mapeamento (leitura) das posições iniciais do pêndulo. Na quarta linha da figura nove vemos a definição do parâmetro R relacionado ao atrito (neste caso ele está programado para o valor de 0,05), temos em seguida o número de ímãs (definido como 3), o tamanho do raio da circunferência sobre a qual os ímãs são posicionados, mais abaixo nas linhas nove e dez temos a leitura dos valores da distância d entre os planos de oscilação e dos ímãs, e por fim temos as linhas referentes a solução das equações diferenciais pelo algoritmo.

Outro ponto abordado neste trabalho se refere as bacias de atração do pêndulo magnético, estas são amplamente documentadas na literatura e possuem algumas particularidades interessantes que serão expostas a seguir.

Através da simulação (biblioteca *Basin.nb*) as bacias de atração do pêndulo podem ser plotadas, produzindo um diagrama a partir das coordenadas iniciais de todos os pontos que levaram a cada uma das posições de repouso sobre um dos atratores (esse conjunto é chamado de bacias de atração) e no caso do pêndulo magnético suas barreiras são conhecidamente fractais possuindo uma estrutura bastante complicada, além disso temos que os parâmetros utilizados na modelagem do pêndulo, principalmente o coeficiente de dissipação influencia na estrutura fractal destas barreiras.

Tentou-se então reproduzir experimentalmente resultados referentes às bacias de atração, obviamente não há resolução suficiente para investigar a natureza fractal das mesmas, mas tentando modelar o processo realizado por uma biblioteca referente ao cálculo das bacias de atração obtiveram-se resultados experimentais comparativos aos simulados.

O processo foi o seguinte, analisou-se a biblioteca do *WOLFRAM™ Mathematica* chamada *Basin.nb* ^[3], esta biblioteca é utilizada para produzir gráficos de bacias, ela primeiramente permite que o usuário estabeleça constantes e a coordenada dos ímãs e então resolve o sistema de equações do pêndulo magnético (apresentado acima) para uma certa grade de pontos no plano, no final do processo para cada ponto inicial é determinado um ponto de repouso que mais próximo de um dos ímãs e o programa marca então o ponto inicial com uma certa cor referente a aquele ímã.

A tabela de valores de cor é então transformada em um gráfico de *RasterArray* (atualmente *Raster* nas versões mais recentes) do *Mathematica*, que será então um gráfico de nossas bacias de atração. Novamente então coletamos os dados experimentais para esta grade de coordenadas iniciais e alimentamos elas à biblioteca de códigos de maneira que ao invés de resolver o sistema de equações ela utilizou nossos dados experimentais para construir as bacias de atração, obviamente aqui surge uma limitação da natureza experimental da coleta de dados. Para isso precisamos apenas fornecer também as coordenadas dos ímãs, não se faz necessário a análise das outras constates tendo em vista que o algoritmo não será usado para resolver as equações do movimento.

Na biblioteca define-se um número n de divisões da grade para o cálculo do movimento do pêndulo, sendo que para um número n grande os cálculos são demorados mas são mais

precisos e para um número n pequeno os cálculos são rápidos mas menos precisos, de qualquer maneira o número de soluções realizadas pelo *software* é no geral muito maior que o número de medições que uma pessoa poderia fazer em laboratório e portanto nossos resultados são obtidos a partir de um número pequeno de condições iniciais.

O código programado para a biblioteca *Basin.nb* é apresentado a seguir na figura de número dez, juntamente com exemplos retirados da referência [3] de resultados obtidos através desta simulação para as bacias de atração com diferentes números de ímãs a fim de exemplificar os tipos de resultados que queremos obter e o tipo de bacias que se formam para o pêndulo magnético a partir do programa. ^[3]

```
n = 250; d = 0.2; R = 0.15; g = 0.2; mags = {{Sqrt[3], 1}, {-Sqrt[3], 1}, {0, -2}};
f[mag_] := (d^2 + (mag[[1]] - x[t])^2 + (mag[[2]] - y[t])^2)^1.5;
solution =
  NDSolve[{x''[t] == Plus @@ Map[(#[[1]] - x[t])/f[#] &, mags] - g x[t] - R x'[t],
    y''[t] == Plus @@ Map[(#[[2]] - y[t])/f[#] &, mags] - g y[t] - R y'[t],
    x[0] == x1, x'[0] == 0, y[0] == y1, y'[0] == 0}, {x, y}, {t, 0, 100},
    MaxSteps -> 200000];
Show[Graphics[
  RasterArray[
    Table[final = {x[100], y[100]} /. solution[[1]];
      radii = Map[(final - #).(final - #) &, mags]; r = Min[radii];
      Hue[Position[radii, r][[1, 1]]/3], {y1, -5.0, 5.0, 10.0/n},
      {x1, -5.0, 5.0, 10.0/n}]], AspectRatio -> 1];
```

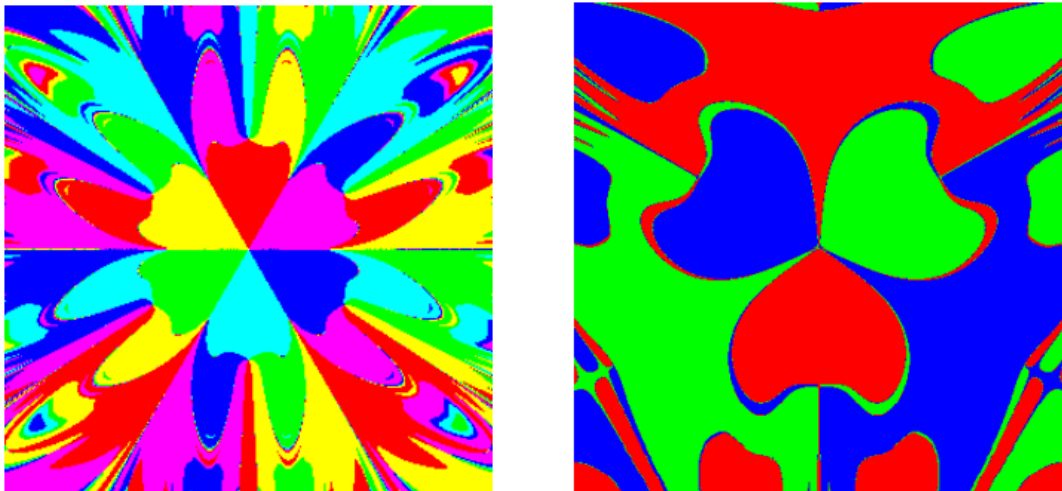


Figura 10 – Mais acima na figura podemos ver o código da biblioteca *Basin.nb* setada para realizar cálculos para uma grade de 63001 coordenadas iniciais ($n=250$) e três ímãs finalmente na oitava linha de código inicia-se a configuração dos resultados em imagens gráficas que indicam as bacias de atração. Abaixo à esquerda temos as bacias para seis ímãs e à direita para três ímãs (atratores). ^[3]

O funcionamento do algoritmo acima ocorre da seguinte forma, como vemos na primeira linha de código são setadas algumas constantes referentes à equação do movimento, o posicionamento do pêndulo e um valor n utilizado para determinar o tamanho da grade de valores iniciais utilizados, em seguida o *software* resolve as equações do movimento e forma uma tabela com os valores de posição inicial e final, os valores de posição final são utilizados para verificar a proximidade com um dos pêndulos e os valores de posição inicial indicam qual ponto da grade será pintado com a cor referente ao ímã sobre o qual a trajetória parou, assim formam-se os gráficos de bacias de atração mostrados acima.

Com isso chegamos ao fim desta seção na qual buscávamos estabelecer as bases matemáticas e teóricas da equação de movimento que governa o pêndulo magnético e conseqüentemente faz parte das simulações utilizadas neste trabalho as quais também foram apresentadas acima. Em seguida falaremos sobre a modelagem experimental realizada, a partir da qual foi feita a coleta de dados.

3 MONTAGEM E PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Trataremos agora finalmente do processo de montagem experimental e coleta de dados. Anteriormente neste trabalho foi mostrada uma figura esquemática da montagem experimental que pretendíamos confeccionar para a utilização no processo de coleta de dados, o esquema pode ser visto na figura onze a seguir, a montagem real realizada em laboratório é bastante diferente em aparência do esquema, entretanto, sua finalidade é indicar e ilustrar os componentes essenciais para a montagem de maneira que as partes podem variar em tamanho e formato.

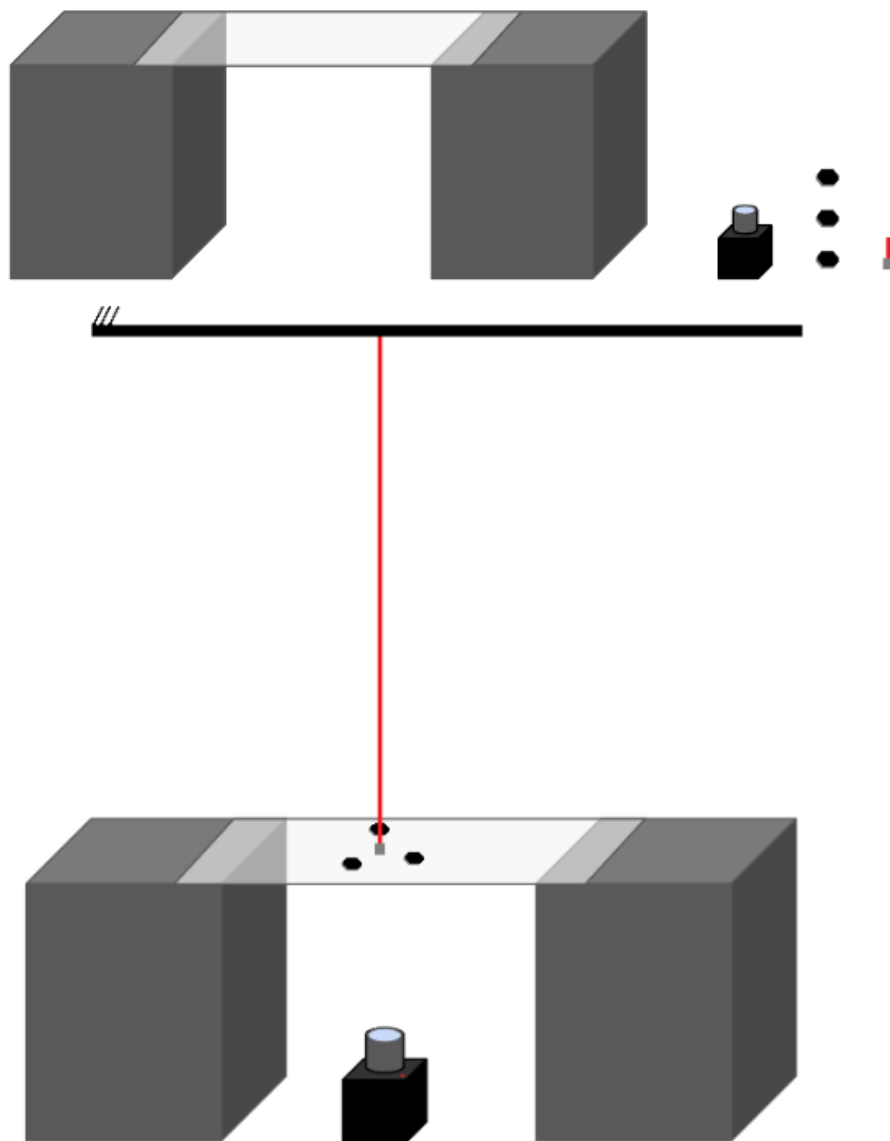


Figura 11 – A imagem acima é um esquema da montagem experimental que foi realizada para este experimento, indicando as partes essenciais da montagem, sendo que estas podem variar de tamanho ou forma na montagem real. Na parte mais acima da figura vemos da esquerda para

a direita, o anteparo e a chapa de acrílico transparente sobre os quais os imãs são posicionados, aqui o anteparo foi representado por dois blocos cinzas mas estes podem ser uma gama de diferentes objetos desde que haja espaço para posicionar a filmadora sob a placa, logo a direita temos a câmera que filmará o experimento, em seguida os três imãs e por fim o pêndulo magnético e a corda que o acopla a um anteparo (teto da sala, tripé, suporte preso na parede, etc.).

Como dito acima, a montagem realizada em laboratório difere em aparência, mas não em essência do esquema, nela, como anteparo para a placa de acrílico transparente, foi utilizado um suporte com quatro pés e apenas duas barras metálicas ligando-os dois a dois, desta maneira garantimos que a visão da câmera posicionada sob a placa não foi obstruída. O pêndulo em si é um parafuso ao qual foram acopladas duas arruelas a fim de aumentar seu peso e um imã a fim de aumentar a interação magnética entre os imãs e o pêndulo.

Além disso ele (o pêndulo) não estava preso ao teto, ao invés disso uma corda de barbante foi utilizada para prendê-lo a um tripé, esta decisão foi muito acertada tendo em vista que a capacidade de alterar a distância entre o plano de oscilação e o plano dos imãs foi muito importante na hora de realizar ajustes à montagem para que o movimento ocorresse da maneira desejada e de acordo com as condições de contorno modeladas. A figura 12 mostra alguns detalhes da montagem mais de perto, ressaltando a placa de acrílico e o pêndulo, em seguida, na figura de número treze, podemos ver a montagem experimental por completo. ^[1]

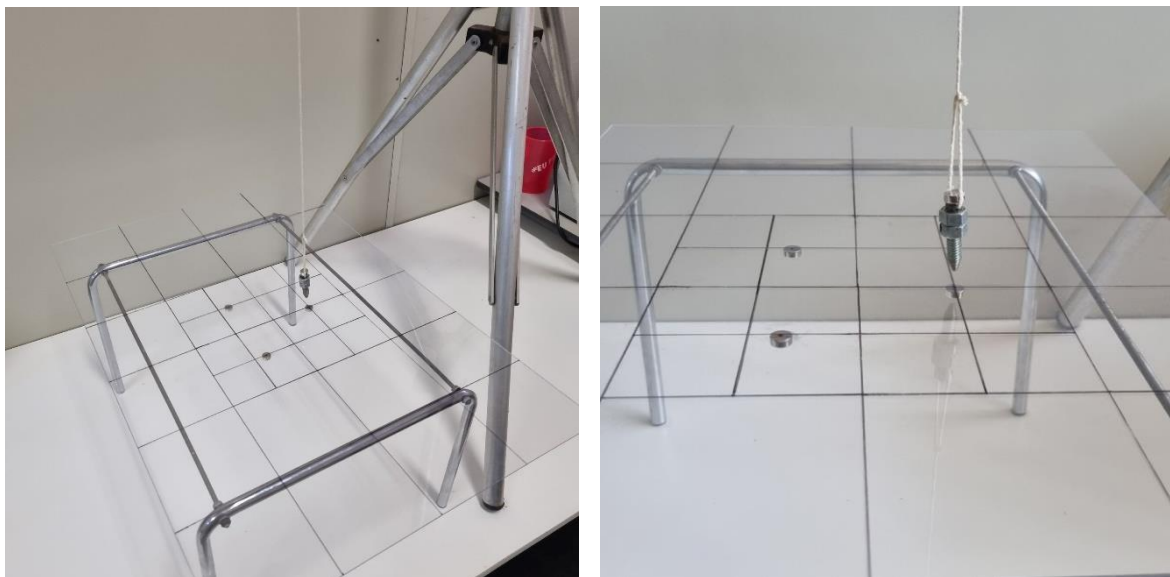


Figura 12 – A fotografia tirada no departamento de física exhibe em detalhes a placa de acrílico utilizada para posicionar os imãs com os três devidamente posicionados sobre os vértices de um triângulo retângulo. Além disso podemos ver o suporte de alumínio descrito anteriormente

e o pêndulo com suas partes, na extremidade superior do mesmo vemos o ímã juntamente com as duas arruelas.



Figura 13 – Foto enquadrando completamente a montagem experimental e todos seus componentes, nesta foto é possível ver por completo o tripé ao qual o pêndulo foi acoplado de maneira que ajustando sua altura era possível ajustar a distância entre o plano de oscilação e o plano dos ímãs.

Como podemos ver claramente na figura 12 foi feita uma grade sobre a placa de acrílico a fim de possibilitar o posicionamento dos ímãs sobre a mesma e facilitar se enquadramento na hora das filmagens, entretanto esta grade se mostrou útil apenas neste momento tendo em vista que a mesma atrapalhava o funcionamento do *software* de coleta de dados e teve que ser retirada e substituída apenas por uma marcação que indicava o comprimento de 5cm a fim de calibrar o

Tracker e coletarmos os dados. O processo de construção da grade e do posicionamento dos ímãs é mostrado a seguir na figura 14.

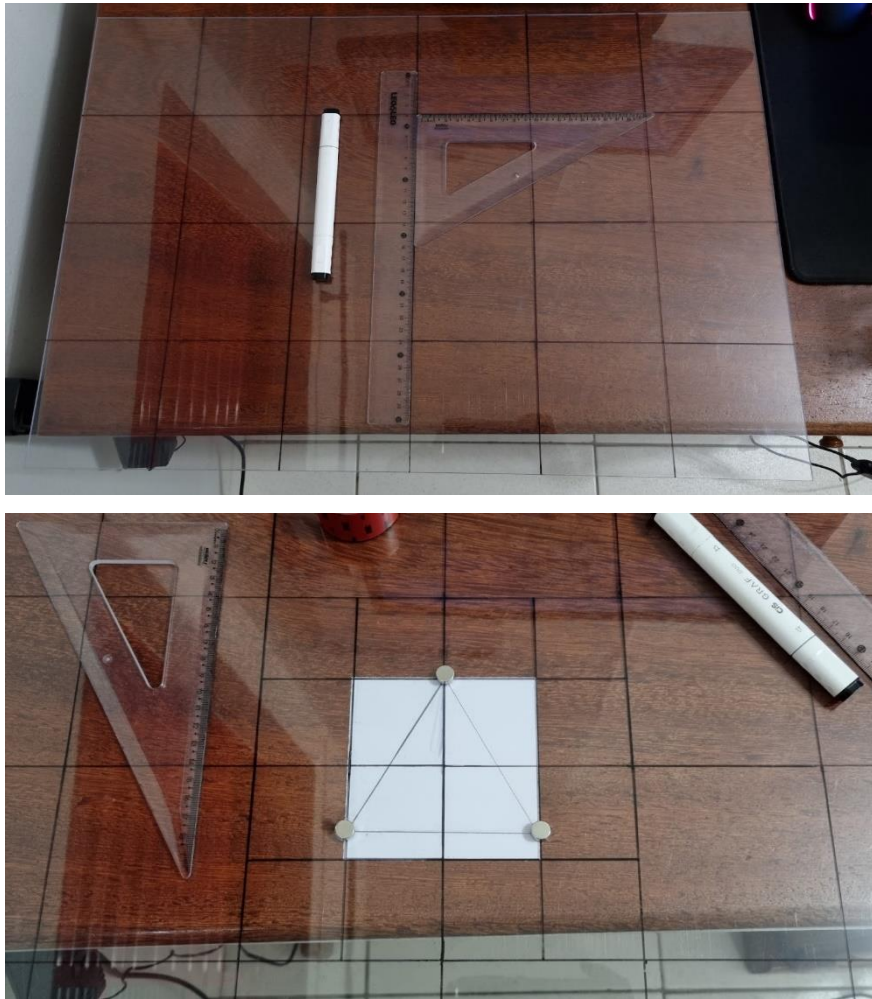


Figura 14 – Processo de montagem da grade e posicionamento dos ímãs. Mais acima vemos a construção das linhas de grade na placa de acrílico com o auxílio de uma régua e um esquadro, cada quadrado maior possui arestas de 10 cm, já à direita vemos o posicionamento dos ímãs sobre os vértices de um triângulo equilátero utilizando um molde construído com régua e compasso.

Com a base do experimento montada podemos então começar o processo de coleta de dados, na prática este foi um tanto quanto conturbado e precisou de alguns ajustes a fim de finalmente dar certo. Na montagem final como veremos mais adiante, foi acoplado ao pêndulo um pedaço redondo de cartolina vermelha a fim de facilitar a detecção do movimento pelo *software*, além disso foram feitos ajustes à distância entre o pêndulo e placa de acrílico, e à distância entre a câmera e a placa de maneira que o movimento fosse completamente enquadrado, além disso como já foi dito anteriormente a grade utilizada para posicionar os ímãs foi retirada pois a mesma atrapalhava o *software* de coleta de dados.

A filmagem do experimento foi então realizada utilizando a câmera de um celular gravando a 30 frames por segundo, foram gravados diversos movimentos para diversas posições iniciais, sendo que muitos destes foram utilizados apenas como testes. Por fim selecionaram-se alguns movimentos de interesse que foram para a análise final utilizando o *Tracker*.^[5]

Falaremos agora finalmente sobre o *software* utilizado para a obtenção dos dados de posição x e y , o *Tracker*^[5], este é uma ferramenta gratuita de análise de vídeo e modelagem construída na *Open Source Physics Java*TM, a interface do programa pode ser vista na figura 15 e consta com algumas ferramentas, uma delas nos permite estabelecer o valor das dimensões reais dos objetos na tela utilizando uma “barra métrica”, esta é a finalidade da marcação de 5cm citada anteriormente e pela qual a grade foi substituída no experimento final, podemos também estabelecer os eixos de coordenadas e seu ponto de origem dentre outras possibilidades de ajustes de qualidade de imagem.^[5]

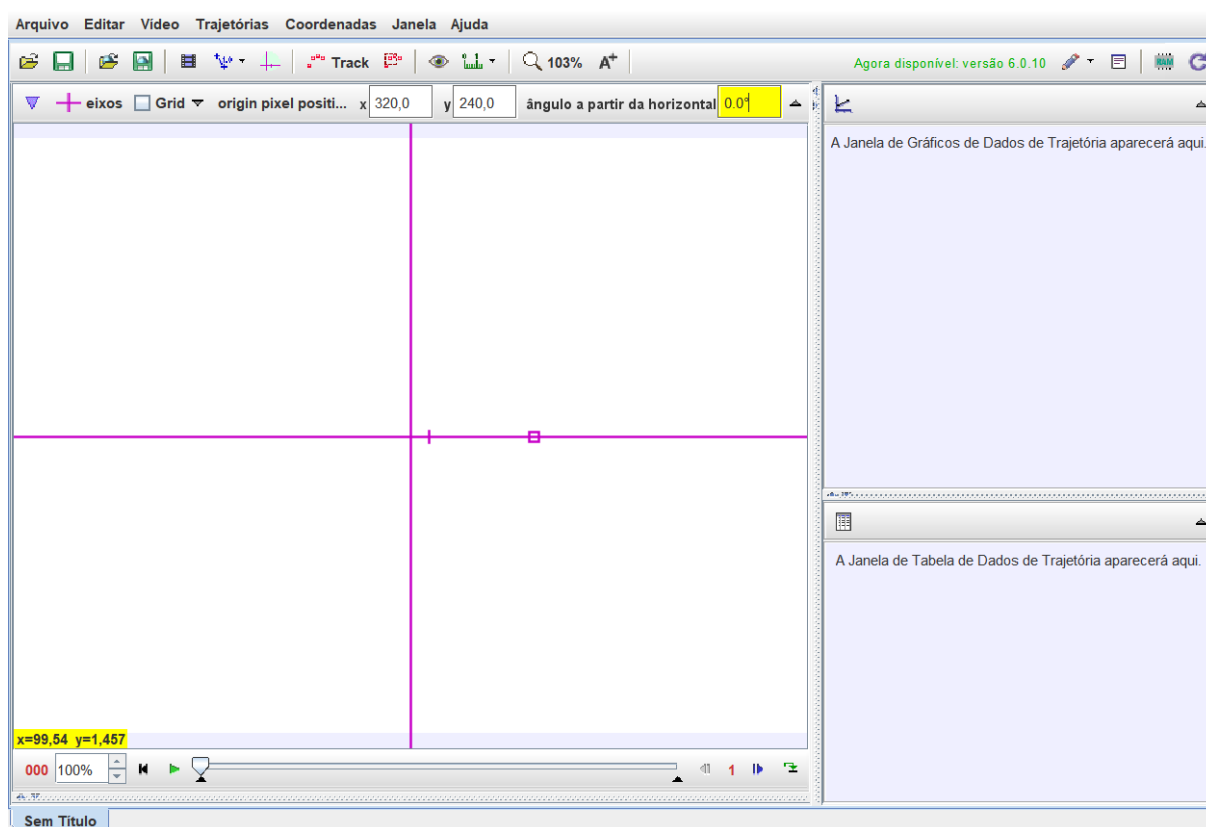


Figura 15 – Imagem exemplificando a interface do *Tracker*, na barra de ferramentas acima podemos ver as opções de estabelecer uma barra de medição, os eixos de coordenadas (que aparecem na tela) e logo em seguida as duas opções de coleta de dados.^[5]

Com a calibração descrita acima pronta podemos então começar a coleta de dados, esta pode ser feita de duas maneiras, uma delas é marcando os pontos da trajetória à mão, trabalho que embora parece extremamente árduo na prática acaba não sendo para um número reduzido

de vídeos, o *software* facilita bastante nosso trabalho passando os frames automaticamente de maneira que marcar em torno de 360 pontos demora apenas de 10 a 12 minutos. Entretanto temos uma alternativa ao trabalho manual, o *Tracker* também oferece uma opção de marcar a trajetória automaticamente.

O funcionamento desta ferramenta se dá da seguinte forma, no primeiro frame da filmagem se estabelece um ponto de massa, o mesmo feito no processo de medição anterior, entretanto agora estabelecemos também uma região no vídeo à qual queremos acompanhar, uma máscara, na qual foi selecionada apenas o nosso objeto de interesse, para esse ponto é interessante que o objeto seja bastante contrastante com o plano de fundo da filmagem, por isso foi utilizado o pedaço de cartolina vermelho colocado sob a ponta do pêndulo, é selecionada também um área dentro da qual o *software* realizará a procura do objeto de interesse no próximo frame da filmagem. ^[5]

Essa procura é feita através da compatibilidade entre as cores RGB do objeto nos dois frames. Já é de se imaginar que o uso desta ferramenta é bastante complicado devido às dificuldades de manter uma imagem contrastante em todos os frames e sem obstruções (os imãs muitas vezes se encontram na frente do pêndulo durante o movimento), mas, daí surge a maneira que se mostrou mais eficiente para coletar os dados, utilizar o modo de Trajetória Automática e juntamente marcar alguns pontos a mão. ^[5]

Como foi dito anteriormente definimos um objeto a ser procurado pelo *software* e uma região dentro da qual ele deve ser procurado nos próximos frames (essa região se move para a nova posição em que ele foi encontrado frame a frame) entretanto, caso o objeto não seja encontrado o processo é interrompido e a interferência do usuário é solicitada, o *software* da então as opções de prosseguir com a coleta de dados ignorando o ponto problemático ou marcar o ponto a mão e então dar prosseguimento a coleta de dados, imagens do funcionamento da função de Trajetória Automática podem ser vistas na figura 16. ^[5]

Serão mostrados também a seguir alguns exemplos dos valores e resultados obtidos diretamente na interface do programa, logo após finalizarmos a marcação dos pontos seja de maneira automática ou manual, o *Tracker* nos fornece gráficos de posição x e y em função do tempo, assim como um gráfico da coordenada y em função da coordenada x de maneira que podemos então observar a trajetória do pêndulo ao longo do movimento de maneira similar às trajetórias fornecidas pela simulação do *WOLFRAM™ DEMONSTRATION PROJECT* ^[2], são fornecidas também tabelas da posição x e posição y, dentre outras grandezas como posição em

relação ao centro do eixo de coordenadas, velocidade no eixo x, velocidade no eixo y, velocidade em relação ao centro do eixo de coordenadas, aceleração e velocidade angular.

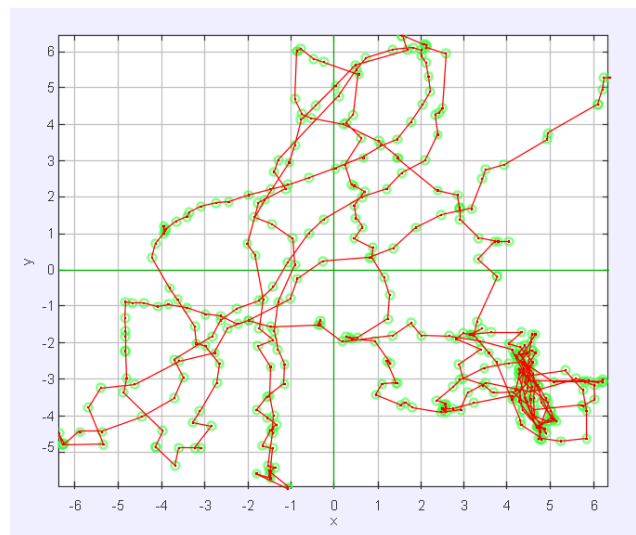
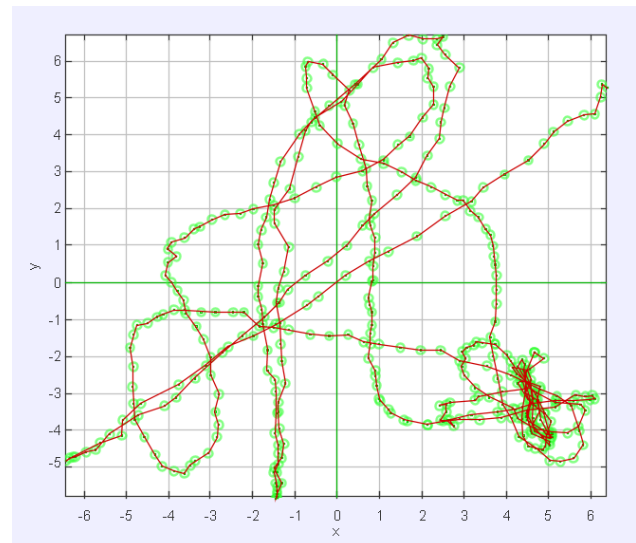
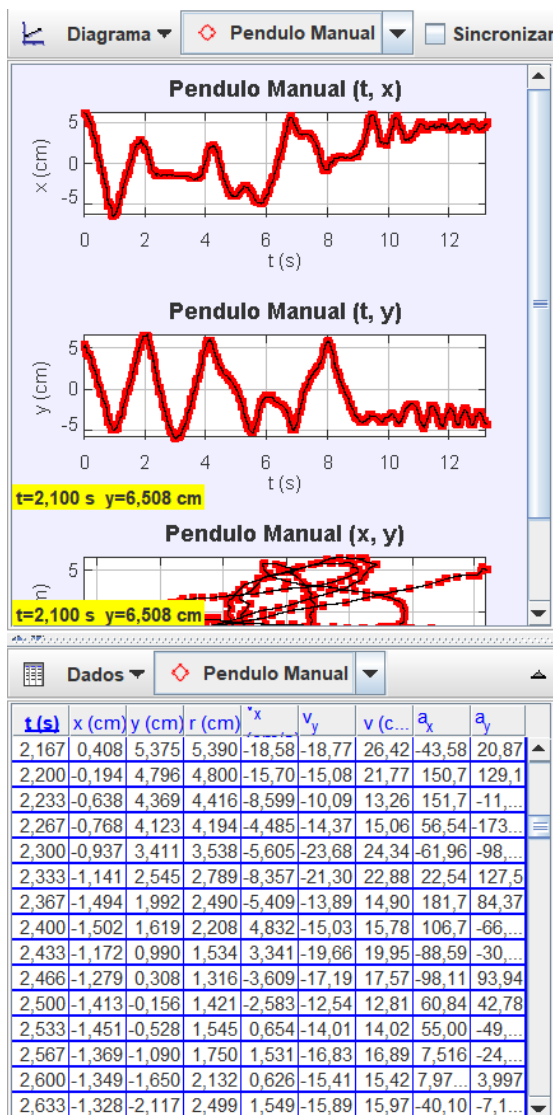


Figura 16 – Mostrando alguns exemplos testes de resultados possíveis de serem obtidos através do *Tracker*, a esquerda podemos ver exemplos de tabelas e gráficos fornecidos pelo *software* logo após a marcação dos pontos, nas tabelas vemos coordenadas de tempo, posição x, posição y, velocidade x, velocidade y, velocidade total, aceleração em x e aceleração em y. No canto superior direito temos um exemplo de trajetória teste feita manualmente e na direita abaixo temos um exemplo feito utilizando apenas a Trajetória Automática. [5]

Ainda nesta seção vale a pena mostrar exemplos do tipo de imagens que foram obtidos e analisados na versão final do experimento (versão na qual a grade foi removida e substituída apenas por uma linha que indicava o comprimento de 5cm e com a cartolina vermelha presa a

ponta do pêndulo a fim de aumentar o contraste entre este e o plano de fundo), estes exemplos estão presentes na figura 17.

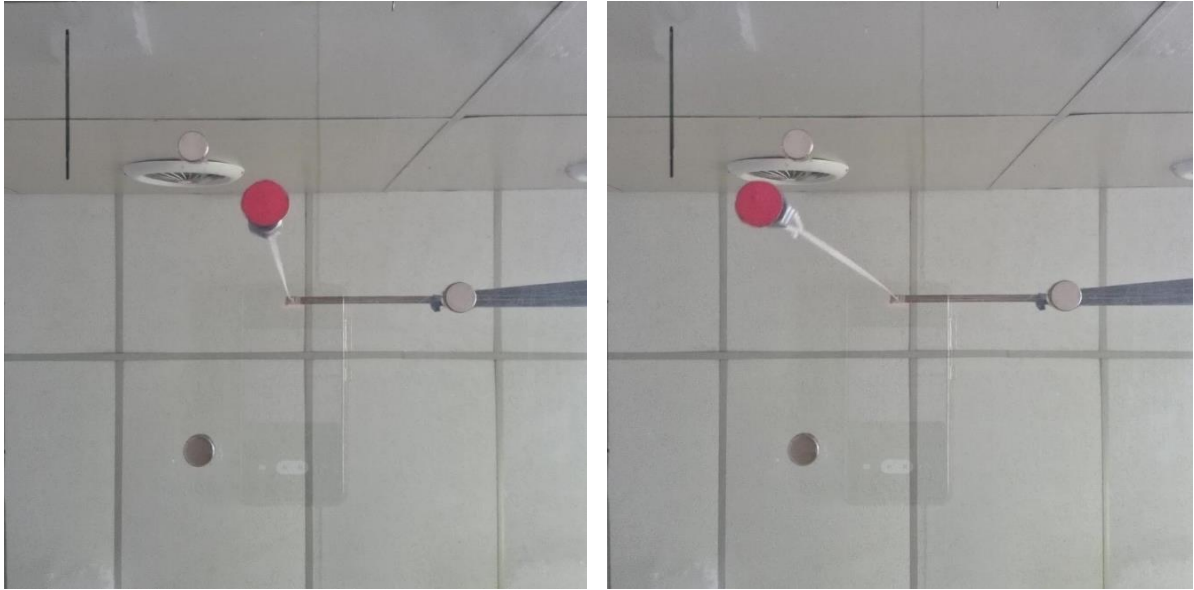


Figura 17 – Exemplos de frames de filmagens teste fornecidas ao *Tracker* para a obtenção de dados experimentais, nela podemos ver a barra de medição que equivale a 5cm no canto superior esquerdo, e grande ponto vermelho é a cartolina que proporciona uma melhor visualização do pêndulo em relação ao plano de fundo.

Quanto à análise das bacias de atração, a parte de coleta de dados se deu da seguinte maneira, estabeleceu-se uma grade de nove blocos, de maneira que existiam dezesseis pontos de coordenadas iniciais cujo movimento foi filmado, resultando em dezesseis vídeos que analisados no *Tracker* nos forneceram dezesseis tabelas de coordenadas, que como dito anteriormente foram transportadas para a biblioteca *Basin.nb* para a construção dos gráficos das bacias de atração, claramente o número de interações é baixo devido à dificuldade de se realizarem medidas, mas como veremos na seção de resultados a seguir, obtém-se um esboço das bacias que desejamos observar.

O tipo de grade de posições iniciais utilizado nesta coleta de dados experimentais pode ser visto na figura 18 a seguir, a grade foi montada utilizando um *software* gráfico sobre imagens na perspectiva da figura dezessete apenas para caráter ilustrativo. As medidas foram realizadas colocando o pêndulo em cada um dos vértices da grade e filmando seu movimento de maneira a emular o processo realizado pela biblioteca *Basin.nb* do *Mathematica*.^[3]

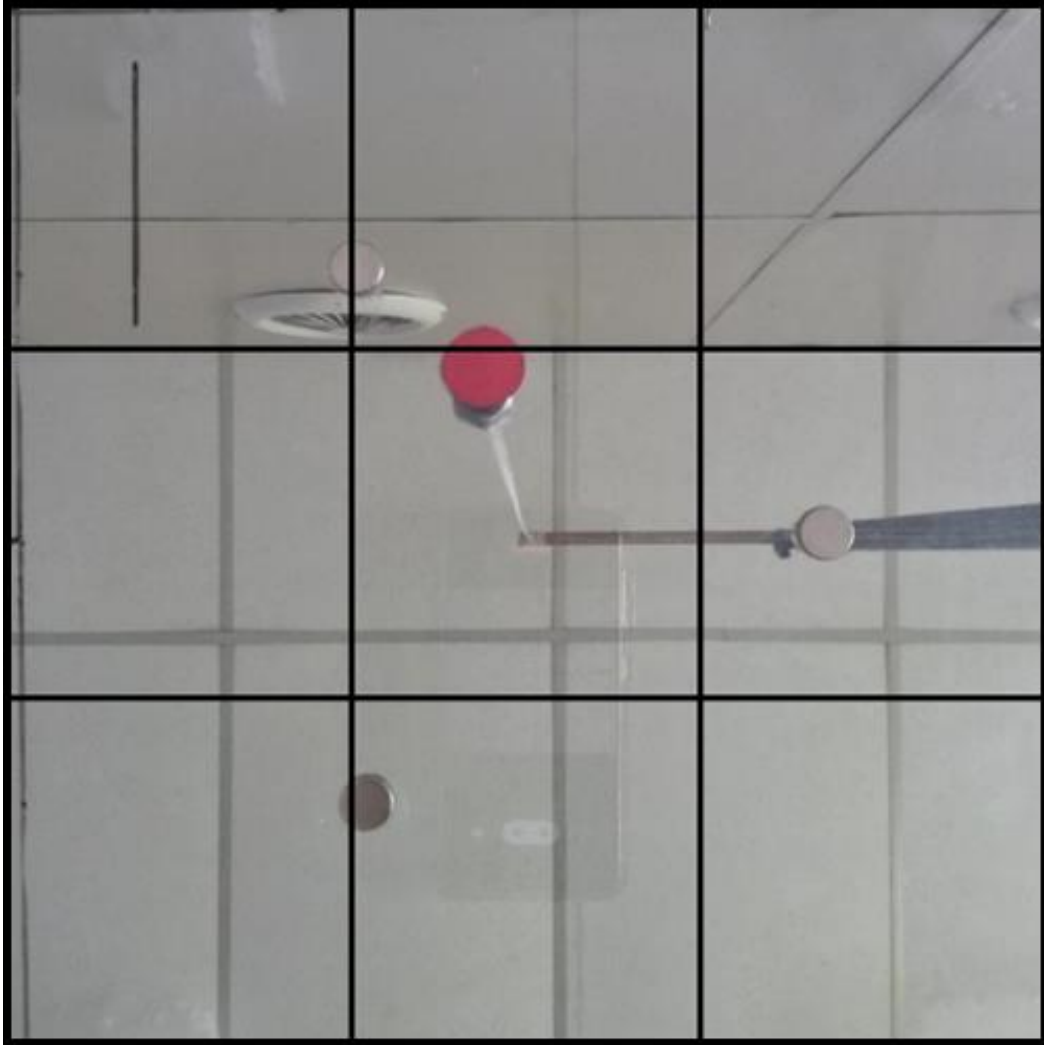


Figura 18 – Ilustração da grade de posições iniciais para a montagem das bacias de atração, os vértices dos quadrados indicam posições iniciais para as quais o movimento foi gravado de maneira a obtermos a posição final do pêndulo e fornecer os dados à biblioteca que realiza a determinação das bacias.

Neste ponto possuímos então os dados experimentais necessários para a obtenção dos resultados desejados, esses materiais foram então salvos e exportados para a plataforma do *WOLFRAM™ Mathematica* onde os mesmos foram tratados e analisados utilizando a simulação apresentada junto com algumas bibliotecas específicas para a obtenção das trajetórias e bacias como explicado acima, e do coeficiente de Lyapunov que será discutido em mais detalhes na seção quatro a seguir, juntamente com o processo de análise de dados e a comparação dos resultados.

4 ANÁLISE DE DADOS E REULTADOS

Começaremos esta seção falando sobre os resultados obtidos diretamente a partir do *Tracker* e de que maneira estes podem ser utilizados. Como foi dito acima a ferramenta de análise de vídeo nos forneceu uma quantidade bastante vasta de dados, nos dando até mesmo a opção de construir gráficos a partir da interface do próprio. Dentre esses valores que foram obtidos para diferentes trajetórias temos as medidas de posição x e posição y que serão utilizadas logo agora na primeira parte desta seção para a construção e comparação de trajetórias para diferentes movimentos.

O primeiro resultado obtido para as trajetórias é um gráfico construído dentro do próprio *software* de acompanhamento de movimentos. Entretanto, a fim de deixar os gráficos das trajetórias mais apresentáveis, esses dados foram levados ao *software* gráfico *SciDAVis* e a partir deste foram construídos gráficos mais parecidos com os obtidos utilizando a simulação da *WOLFRAM™ DEMONSTRATION PROJECT* [2], além disso nas imagens finais foram então adicionados pontos de referência para o início da trajetória (indicada por um círculo preto) e para o ímã sobre o qual o movimento terminou (indicado pelo círculo preenchido em cinza).

Observando as imagens apresentadas nas páginas seguintes percebe-se um pequeno efeito de paralaxe (ao final do movimento pêndulo aparentemente passa a oscilar um pouco ao lado da região onde o ímã realmente se encontra), o qual já era esperado pela análise prévia das filmagens e que já foi minimizado ao máximo durante a montagem experimental. Esta paralaxe surge nas bordas da filmagem e está relacionada a distância da câmera que filma o movimento até o plano sobre o qual os ímãs estão posicionados. Ela é minimizada aproximando-se a filmadora do plano dos ímãs, entretanto fazendo isso o enquadramento da imagem se torna cada vez menor de maneira que a ponta do pêndulo passa a sair de quadro várias vezes durante a filmagem do movimento, foi necessário portanto um balanço entre enquadrar o movimento e minimizar ao máximo os efeitos de paralaxe.

Finalmente o leitor pode ver na figura 19 uma comparação entre os resultados obtidos utilizando o *software* gráfico (*SciDAVis*) e os resultados obtidos diretamente do *Tracker*, em seguida na figura 20 fez-se uma comparação qualitativa com trajetórias que foram obtidas através da simulação programada no *Mathematica*.

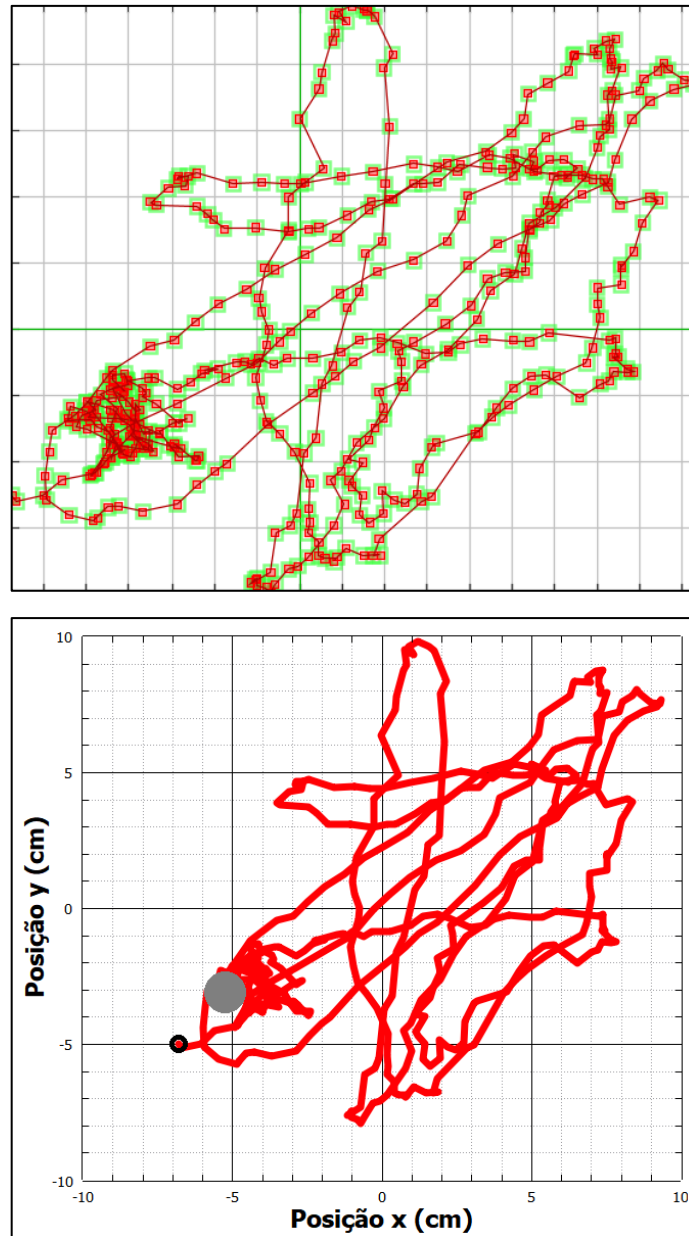


Figura 19 – Comparação entre os resultados que podem ser obtidos diretamente após o rastreamento da trajetória dentro do próprio *Tracker* e os resultados após a transferência e tratamento dos dados no SciDAVis. A primeira imagem foi montada pelo próprio *Tracker* e é basicamente um gráfico de posição y versus posição x, já a segunda imagem foi realizada utilizando o *software* gráfico e possui indicações de onde a trajetória começa (círculo em preto) e da posição aproximada do ímã sobre o qual a trajetória parou (círculo preenchido em cinza).

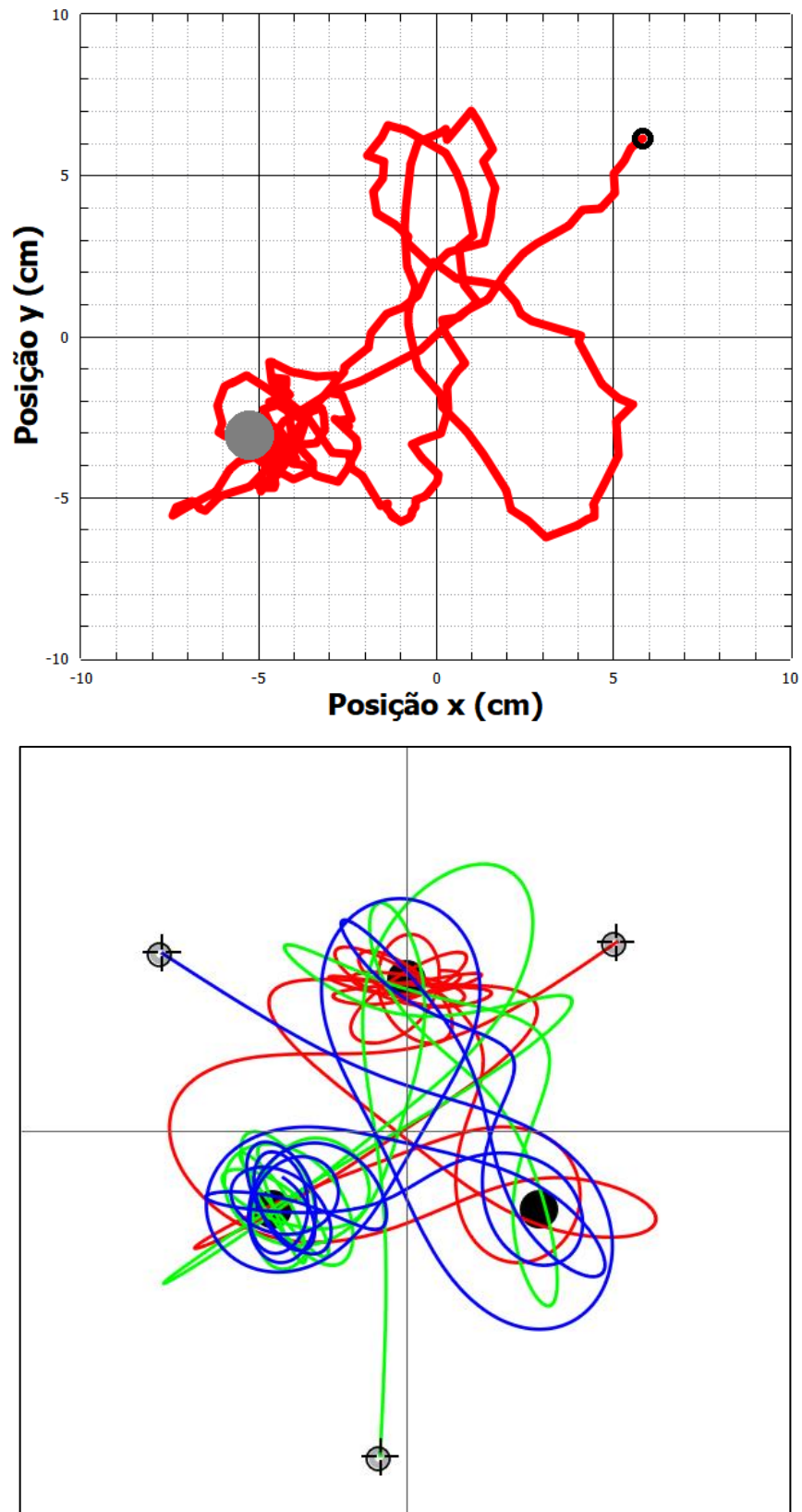


Figura 20 – Comparação entre trajetórias obtidas pela simulação *Chaotic Dynamics of a Magnetic Pendulum* disponibilizada pelo *WOLFRAM™ DEMONSTRATIONS PROJECT* ^[2] e trajetórias obtidas experimentalmente pelo método de fotografia estroboscópica.

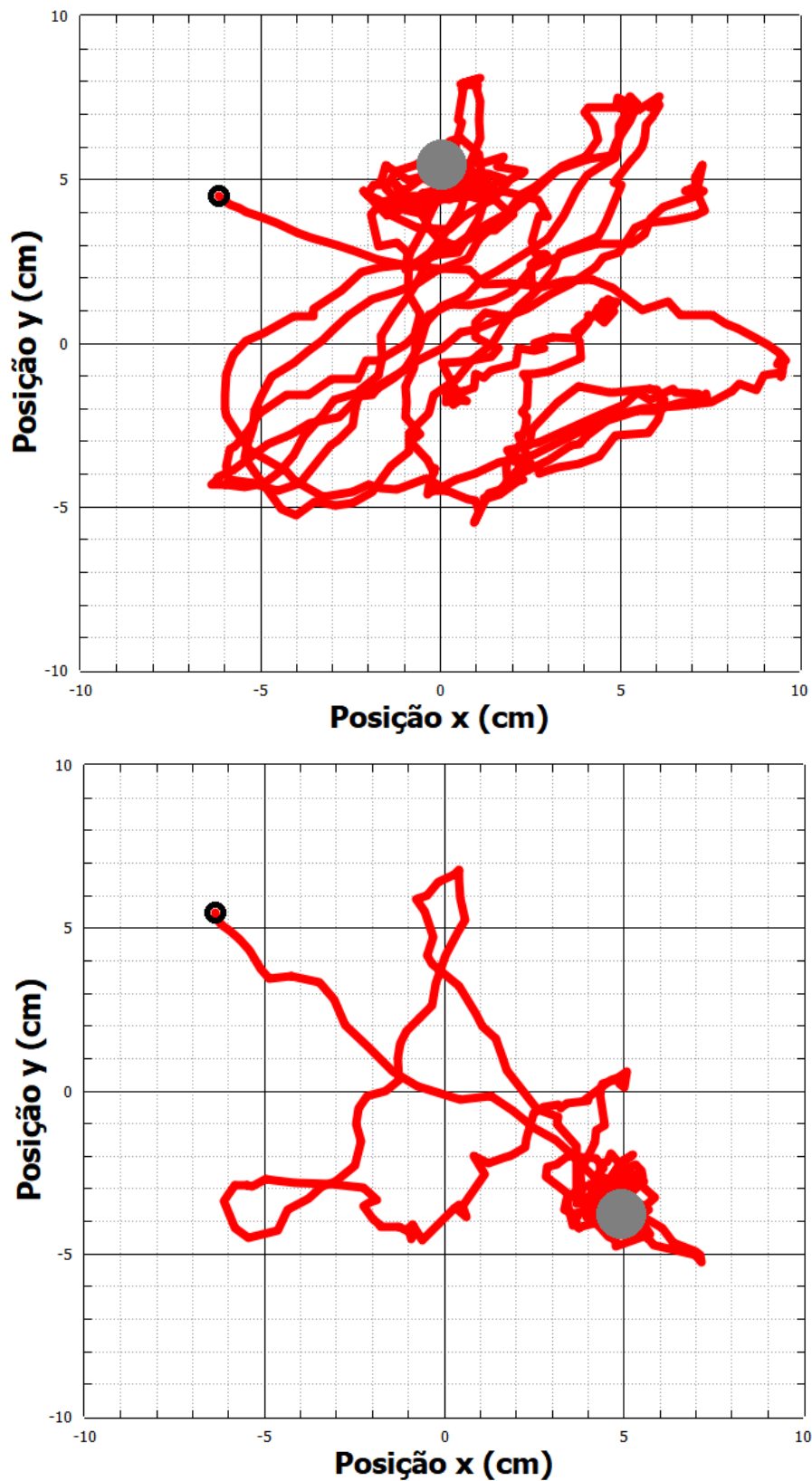


Figura 21 – A imagem acima traz mais exemplos de trajetórias obtidas experimentalmente pelo método de fotografia estroboscópica. A trajetória mais acima foi montada utilizando 614 pontos e a mais abaixo foi montada utilizando 274, essa quantidade está associada também ao tempo

de oscilação que foi de 20,5 segundos para a trajetória de cima e 9,0 segundos para a restante (ou seja $614 \cong 30 \times 20,5$ e $274 \cong 30 \times 9$, sendo 30 a quantidade de frames por segundo que a câmera filma o movimento, 30fps).

Por fim, o exemplo dado na seção introdutória acerca da sensibilidade às condições iniciais foi reproduzido na figura 22 utilizando o método experimental de coleta de dados, isso foi feito sobrepondo as trajetórias de dois movimentos que iniciam em posições bastante próximas, mas acabam parando sobre ímãs distintos ao final de sua orbita.

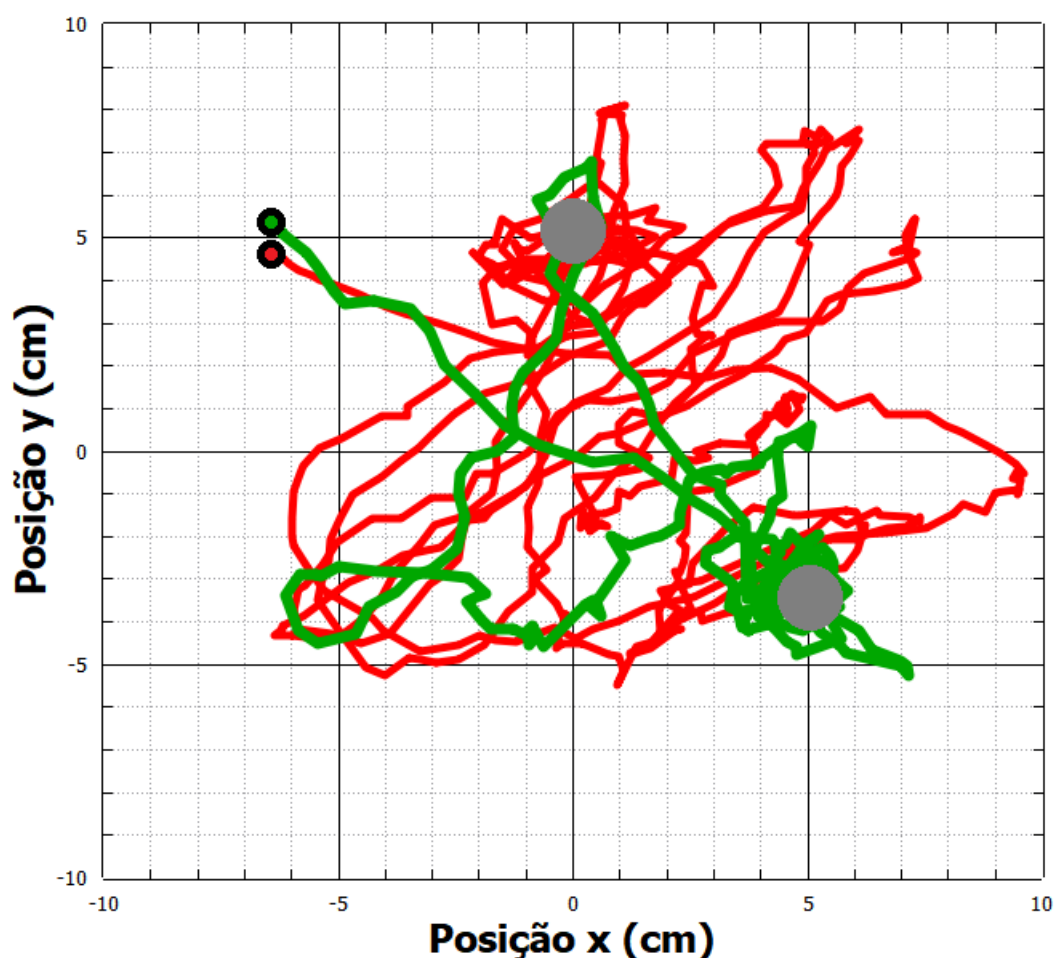


Figura 22 – Na imagem acima podemos ver duas trajetórias, uma em verde e uma em vermelho ambas começando de pontos bastante próximos, $(-6,3; 5,5)$ para a verde e $(-6,2; 4,75)$ para a vermelha, mas com a evolução temporal da dinâmica fica evidente que as trajetórias de ambos os movimentos são bastantes distintas, sendo que a trajetória verde repousa sobre o ímã do quarto quadrante e a vermelha sobre o ímã que se encontra em cima do eixo x.

Além disso como foi visto na figura 20 as trajetórias obtidas experimentalmente não são tão suaves quanto as obtidas pelo método numérico, isso ocorre devido principalmente, à imprecisão do *software* de acompanhamento, percebe-se então alguns desvios súbitos no meio das rotas que não deveriam estar ali derivados de eventuais dificuldades de o *Tracker* identificar

corretamente o objeto que está sendo acompanhado. Outra fonte deste tipo de erro vem da natureza experimental da montagem, obviamente os materiais utilizados não são completamente ideais e o pêndulo pode sofrer alguns desvios devido ao barbante ter eventualmente balançado ou esticado, a mesma coisa pode ocorrer devido ao suporte preso ao tripé ter chacoalhado ou algo do tipo, vale ressaltar que o experimento foi montado de maneira a minimizar qualquer efeito desse tipo.

Além da determinação das trajetórias do pêndulo para diferentes movimentos, os dados obtidos diretamente do *Tracker* também poderiam ser utilizados para construir as chamadas seções de Poincaré citadas eventualmente ao longo do texto, para isto faz-se uso da tabela de velocidades x e y fornecida pelo *Tracker*. Antes de discutir essa questão mais a fundo, falaremos um pouco sobre o que elas são e qual sua utilidade. Henri-Poincaré foi uma das primeiras pessoas a perceber o valor do estudo de estruturas topológicas no espaço de fases de trajetórias dinâmicas, entretanto as seções de Poincaré ou retratos de fase só são uteis em sistemas cuja dinâmica se desenvolva num espaço com dimensão menor ou igual a três (nosso caso).^[6]

A definição das seções de Poincaré passam pela estudo e definição de mapa para sistemas dinâmicos, denomina-se mapa um sistema dinâmico que evolui no tempo de uma forma discreta^[6], para um sistema dinâmico contínuo há um fluxo associado, o qual pode originar um mapa. Caso este fluxo seja liso (r -vezes continuamente diferenciável) ele resultará em um mapa também liso cuja função inversa também é lisa (difeomorfismo), a órbita do mapa é então uma sequência de pontos definida por uma equação genericamente denominada equação de diferenças.^[6]

Uma das maneiras através da qual um fluxo contínuo da origem a um mapa discreto é pela utilização das seções de Poincaré, sendo que estas são uma maneira de reduzir o estudo de um fluxo num espaço de fase que antes continha n dimensões para uma aplicação, mapa de Poincaré, num espaço de fase com $(n-1)$ dimensões (difeomorfismo). No nosso caso o diagrama de fases é tridimensional cada estado é representado por (x, y, t) e, portanto, o mapa de Poincaré é obtido considerando-se a intersecção da trajetória com o plano (x, y) toda vez que t foi igual a um múltiplo de um intervalo T , a mesma análise pode ser feita para outras grandezas.^[6]

Ou seja, utilizando os dados obtidos para o *Tracker* logo após o rastreamento da trajetória é possível montar diferentes tipos de seções de Poincaré para o pêndulo magnético, entretanto para isto seria necessário um algoritmo que selecionasse os pontos de interesse para a confecção do gráfico, identificando os pontos onde a trajetória intersecta os referidos planos,

neste trabalho não desenvolvemos nem utilizamos um algoritmo do tipo, entretanto resultados do tipo podem ser observados na referência [7], apresentamos esta perspectiva apenas para mostrar as possibilidades de utilizar os dados do *Tracker* para diferentes aplicações.

Falaremos também nesta seção sobre os coeficientes de Lyapunov que servem como indicadores da presença de caos nos sistemas dinâmicos, o algoritmo utilizado para tanto basicamente, resolve as equações do movimento para duas coordenadas iniciais diferentes e posteriormente calcula a norma da diferença entre essas duas trajetórias ao longo do tempo, o logaritmo desta diferença é então plotado em função do tempo (usualmente calculado para tempo infinito), caso este gráfico possua uma inclinação positiva significa que estas trajetórias divergem exponencialmente com o tempo e possuem um coeficiente de Lyapunov positivo. [3]

Escolhendo então duas trajetórias com posições iniciais próximas umas das outras é possível provar através da divergência exponencial entre as trajetórias que o sistema possui uma grande dependência em relação as coordenadas iniciais, o que como foi dito anteriormente é uma das características do caos. A seguir então apresentamos nas figuras 23 e 24 alguns exemplos de coeficientes de Lyapunov para diferentes trajetórias, na figura 23 são apresentados resultados teóricos utilizando o algoritmo descrito acima e figura 24 mostra o cálculo do coeficiente para as trajetórias obtidas experimentalmente da figura 22. [3]

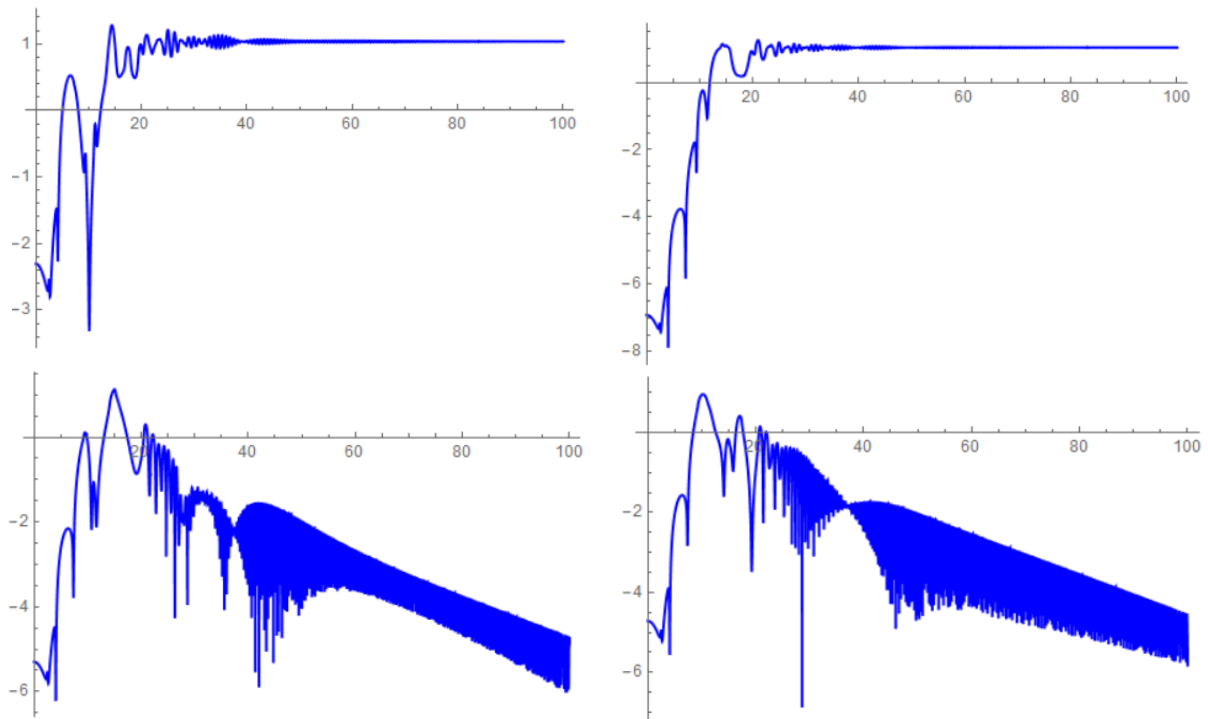


Figura 23 – As duas primeiras imagens mostram o coeficiente de Lyapunov para duas trajetórias que começam muito próximas, mas divergem em trajetória posteriormente, o primeiro gráfico

mais acima e à esquerda se refere a trajetórias iniciadas nas coordenadas $x_2 = 4.1$ e $x_1 = 4.0$, já o gráfico a direita se refere a trajetórias que se iniciam ainda mais próximas em $x_2 = 4.001$ e $x_1 = 4.0$. Já as imagens mais abaixo indicam trajetórias que convergem para o mesmo imã, a trajetória à esquerda possui coordenadas $x_2 = 4.005$ e $x_1 = 4.0$ e à direita $x_2 = 4.009$ e $x_1 = 4.0$. Em todos os gráficos o eixo horizontal se refere ao tempo e o eixo vertical ao $\log(\|x_1 - x_2\|)$.^[3]

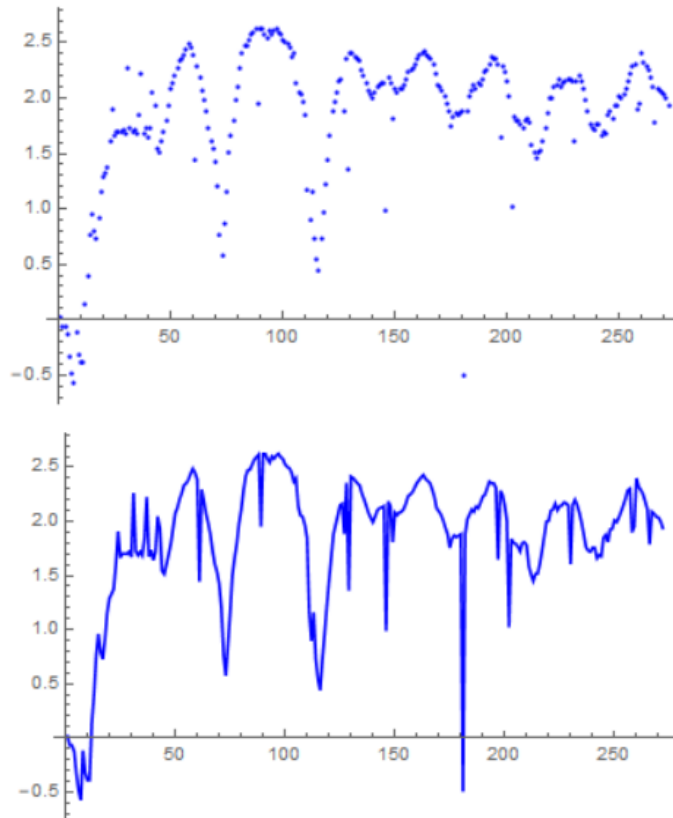


Figura 24 – Coeficiente de Lyapunov para as trajetórias da figura 22 mostrando que ambas divergem exponencialmente com o passar do tempo devido ao coeficiente de Lyapunov positivo, os gráficos acima foram montados fornecendo valores experimentais a simulações numéricas. Nos gráficos acima o eixo horizontal se refere ao tempo e o eixo vertical ao $\log(\|x_1 - x_2\|)$ assim como nos anteriores.

Embora o coeficiente de Lyapunov possa ser calculado propriamente utilizando uma expressão física, para análise feita neste trabalho a estimativa visual do mesmo através dos gráficos já é suficiente, analogamente à referência [3].

Quanto parte do estudo das bacias, primeiramente serão apresentados resultados obtidos diretamente do algoritmo apresentado na seção dois, discutindo o funcionamento do programa e qual a influência do número de coordenadas iniciais no resultado para as bacias de atração,

para isso serão apresentados exemplos para diferentes valores de n . Além disso será apresentado uma bacia obtida experimentalmente para dezesseis posições iniciais através do método de alimentar a simulação com os resultados obtidos pelo *Tracker*. Por fim, será discutida também uma proposta alternativa para a obtenção do gráfico das bacias.

Como foi dito anteriormente o algoritmo *Basin.nb* ^[3] resolve a equação do movimento do pêndulo magnético para uma grade de $(n+1)^2$ posições iniciais e em seguida ele verifica sobre qual imã a posição final da trajetória se encontra mais próxima, cada um dos imãs possui a eles associado uma cor *RGB* de maneira que o *software* então pinta o quadrado referente a cada posição inicial diferente com a cor relacionada ao imã sobre o qual o movimento termina.

Desta maneira formam-se as bacias de atração em torno dos imãs, que podem ser identificadas nas figuras a seguir para diferentes valores de n , podemos ver que para valores pequenos de n as bacias estão apenas começando a se formar enquanto para os valores mais altos elas já estão quase completamente formadas aparecendo ao centro das figuras formando um “trevo” com cada uma das pétalas referente a um dos imãs, atratores. ^[3]

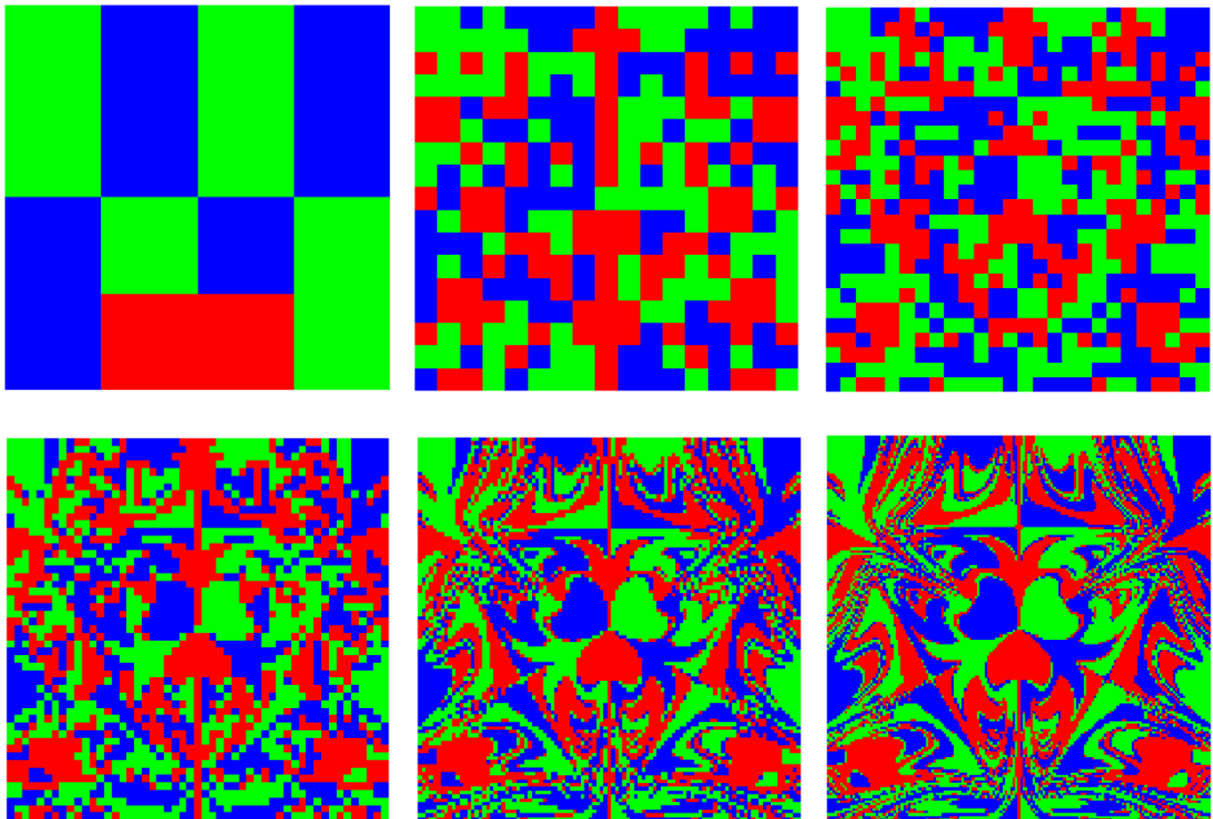


Figura 25 – A figura acima mostra a formação das bacias de atração para o experimento do pêndulo magnético para diferentes valores de n , da esquerda para a direita e de cima para baixo temos $n=3$; $n=16$; $n=25$; $n=50$; $n=100$ e $n=150$. Fica evidente então o aparecimento mais

expressivo das bacias de atração com o aumento do valor de n , sendo que inicialmente elas estão apenas iniciando sua formação e a partir da terceira imagem apresentada é possível ver mais nitidamente seu aparecimento. Todas as imagens acima foram obtidas pelo autor através da biblioteca *Basin.nb* referenciada anteriormente.

No nosso experimento, foi emulado o resultado para $n=3$, ou seja foram feitas dezesseis filmagens de movimentos do pêndulo para dezesseis posições iniciais dentro da grade, posteriormente estes dados foram tratados no *Tracker* a fim de obterem-se coordenadas de posições iniciais e finais de maneira que esses dados pudessem ser lidos pelo algoritmo computacional que então atribuiu a grade de cores referente a cada diferente imã baseado na análise descrita acima de valores iniciais e finais, a figura resultante é uma grade 4x4 com dezesseis quadrados de posições iniciais pintados de azul verde ou vermelho.

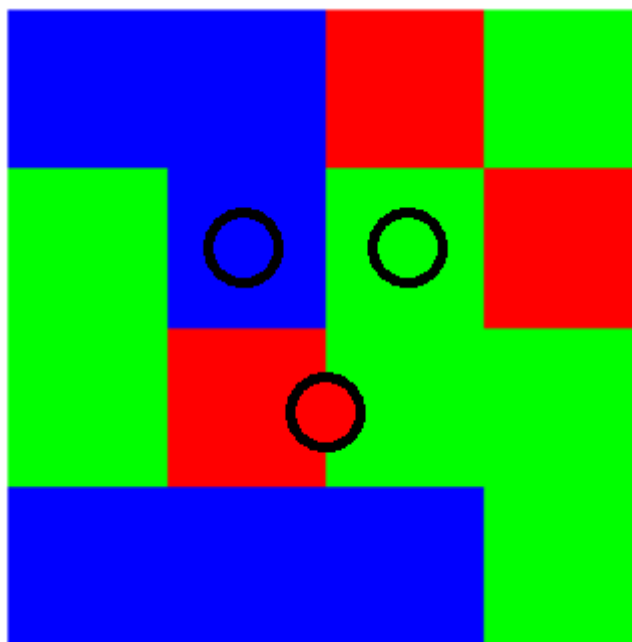


Figura 26 – Bacia obtida a partir dos dados experimentais coletados na montagem do pêndulo magnético, como podemos ver na figura são mostrados dezesseis quadrados um para cada condição inicial, pintados com as cores referentes ao imã sobre o qual o movimento termina, a posição dos imãs sobre a grade é indicada pelos círculos em preto e a cor que os preenche é naturalmente sua cor de referência. Podemos ver ao centro que cada uma das cores aparece na posição sobre a qual os imãs se encontram na montagem experimental.

Devido à dificuldade de se coletar um número muito grande de dados experimentais aqui neste trabalho será apresentado apenas o resultado desta bacia da figura 26, entretanto pelos resultados numéricos apresentados anteriormente na figura 25 é evidente que aumentando

o número de posições iniciais que formam a grade do resultado experimental aumenta-se consequentemente a qualidade das bacias obtidas de maneira que o processo de coleta de dados se mostra efetivo mas trabalhoso para a análise básica das bacias de atratores, acredito que seja viável a coleta de uma grade de até 36 posições iniciais entretanto o processo de aquisição de dados seria extremamente demorado e tedioso.

Entretanto, a ideia principal da introdução de um experimento de laboratório em oposição a simulações e métodos computacionais não é a facilitação do processo de coleta de dados e sim a aproximação dos conceitos teóricos da realidade palpável algo deveras desafiador principalmente na área da dinâmica linear. Nessa linha de pensamento imaginou-se a possibilidade de realizar um processo diferente do que foi feito acima para a obtenção das bacias, a quintessência do que será proposto permanece a mesma, entretanto, não é feito o uso de algoritmos para sua aplicação.

A ideia é produzir as bacias imitando o que o *software* faz, mas utilizando nossas próprias mãos, como o número de coordenadas iniciais é pequeno, basta que nos mesmos construamos uma grade representando-os, seja em uma folha de papel ou em um *software* de design gráfico, e analisando os vídeos obtidos para as 16 posições iniciais pinta-se esta grade com as cores referentes a cada imã, de maneira que obtém-se imagens comparáveis com as mostradas acima feitas completamente a mão sem a necessidade de um *software* de análise de dados (figura 27).

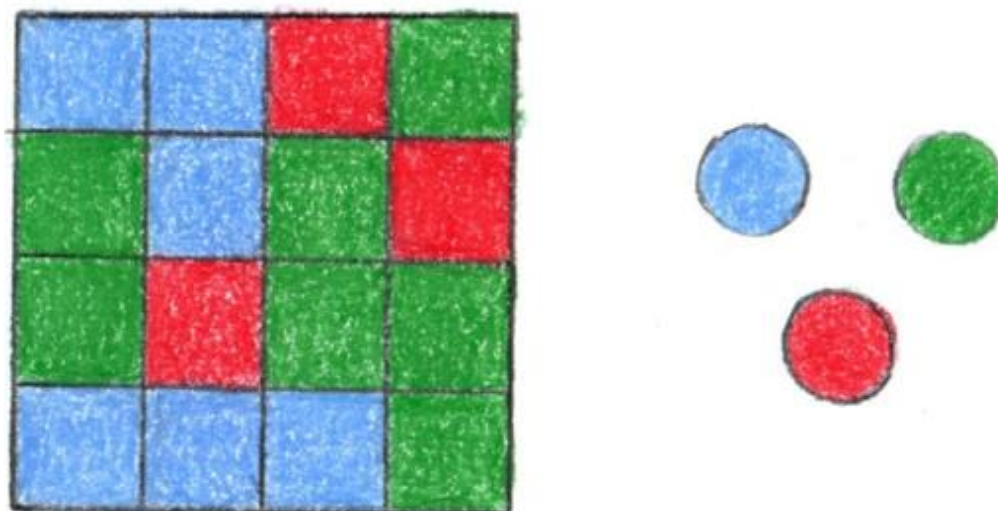


Figura 27 – Gráfico das bacias feito a partir de 16 posições iniciais obtidas apenas analisando os vídeos e atribuindo as cores emulando o funcionamento do algoritmo para as condições iniciais, como podemos ver ele é igual ao gráfico da figura 26 montado a partir do método numérico.

Obviamente para uma análise com maior precisão e de maior utilidade faz-se necessária uma maior quantidade de pontos, logo reiteramos aqui a importância e a praticidade do uso de simulações na análise desses movimentos, entretanto resultados análogos e talvez tão interessantes quanto podem ser obtidos (com um trabalho definitivamente mais árduo, 36 a 64 posições iniciais) experimentalmente por esse método à título de proporcionar uma prática mais interativa com os sistemas da dinâmica não-linear.

Com isso terminamos esta seção referente à apresentação e análise de resultados, partiremos então para a quinta e última parte deste trabalho, a seção de conclusão, na qual retomaremos alguns pontos importantes tratados durante o trabalho e concluiremos a análise acerca do método utilizado para a análise da dinâmica do pêndulo magnético.

5 CONCLUSÃO

Reiteraremos então nesta seção os pontos mais importantes do trabalho relembrando suas motivações e objetivos a fim de concluirmos por completo o estudo apresentado acima acerca do pêndulo magnético. A primeira seção do texto nos introduz ao mundo da dinâmica não-linear, dando a definição do que é uma sistema dinâmico não-linear, caracterizando o surgimento e os interesses por trás do estudo do caos, tudo isso enquanto o problema do pêndulo magnético é introduzido e contextualizado dentro do trabalho que será realizado.

Ainda na introdução é evidenciado que o trabalho tem como intuito principal o estudo do movimento do pêndulo magnético, sendo uma de suas motivações a aproximação da dinâmica não-linear com a prática experimental, neste panorama associou-se a montagem experimental do pêndulo para a coleta de dados com o uso de simulações e métodos numéricos para caracterizarmos de maneira completa o movimento do sistema, definindo suas órbitas, coeficientes de Lyapunov para diferentes trajetórias e bacias de atração.

Com esse contexto o trabalho passa para a caracterização teórica do movimento do pêndulo magnético, descrevendo então a modelagem matemática utilizada para derivar suas equações do movimento. A seção dois é então iniciada com uma descrição geral dos sistemas definidos como Pêndulos Magnéticos para em seguida discutir as condições de contorno do modelo e os componentes das diferentes contribuições que formam a equação do movimento.

Após encontrarmos a equação que governa o movimento a seção passa a abordar os métodos numéricos e as simulações utilizadas como auxílio para a caracterização da dinâmica sendo que algumas delas seriam utilizadas diretamente em conjunto com os dados experimentais para fornecer resultados para a montagem feita e outras seriam usadas para realizarem-se comparações qualitativas.

A seção número três aborda então finalmente a montagem experimental que foi realizada com base na modelagem matemática feita anteriormente para o problema, obedecendo as restrições física impostas pelo modelo. O processo para montar o pêndulo magnético foi descrito passo a passo, assim como foi feita a descrição do método utilizado para a aquisição dos dados experimentais (Fotografia Estroboscópica Digital via *Software*), consta, portanto, uma explicação completa do uso do *Tracker*.

Chegamos então na seção de análise de dados e resultados, na qual foram apresentados os resultados obtidos a partir dos dados experimentais em conjunto com os métodos numéricos,

são apresentados também nesta seção resultados puramente simulados com o intuito de comparar e contextualizar os resultados obtidos, inferindo quais são suas perspectivas e limitações.

Os primeiros resultados apresentados são referentes às trajetórias, como foi dito anteriormente esses gráficos foram obtidos a partir dos dados de posição x e y coletados via *Tracker* e tratados em um *software* gráfico, eles são comparáveis às trajetórias obtidas na simulação *Chaotic Dynamics of a Magnetic Pendulum* disponibilizada pelo *WOLFRAM™ DEMONSTRATIONS PROJECT* para um coeficiente de atrito mais baixo, evidentemente existem erros associados à paralaxe e à imprecisão do *software* de acompanhamento, os quais foram anteriormente discutidos mais a fundo, de maneira que conclui-se a funcionalidade e qualidade do método para a análise das órbitas e trajetórias do pêndulo magnético.

Em seguida discute-se a possibilidade da utilização dos outros dados fornecidos diretamente pelo *Tracker* após o rastreamento da trajetória do pêndulo. Fala-se, portanto, do uso dos valores de velocidade em relação ao eixo x e ao eixo y para a determinação de seções de Poincaré para o movimento. Entretanto para isso faz-se necessário o desenvolvimento de um algoritmo que identificasse os pontos de interesse para o resultado e esse aspecto não foi realizado no presente trabalho, como foi discutido anteriormente.

Estuda-se então nesta seção os coeficientes de Lyapunov, devido à simplicidade do conceito e de sua implementação numérica foi feita a decisão de abordá-lo apenas neste momento juntamente com a apresentação de alguns resultados que mostram a divergência de orbitas inicialmente muito próximas e são um indicativo da sensibilidade em relação às condições iniciais. É em seguida apresentado um resultado interessante utilizando dados experimentais do movimento de duas trajetórias iniciadas de pontos bastante próximos (figura 22), gráfico resultante exibe uma inclinação positiva e indica a divergência exponencial dos movimentos com o passar do tempo como era de se esperar.

Por fim, nesta seção é realizada uma análise das bacias de atração do pêndulo magnético, primeiramente são apresentados resultados teóricos obtidos a partir de métodos numéricos para as bacias, sendo que os gráficos apresentados exibem um número crescente de iterações de maneira que as bacias atratoras se tornam cada vez mais evidentes. Como foi dito anteriormente é inviável a coleta experimental de uma quantidade muito grande de dados (as bacias passam a ser mais identificáveis a partir de um $n=25$, o que seria equivalente a 676 medidas de posição inicial).

Fizemos então a coleta de um número menor de dados (dezesseis para ser mais exato) de maneira que obtivemos experimentalmente um esboço inicial das bacias de atração para a nossa montagem, a qual é análoga ao primeiro resultado apresentado na figura 25 para $n=3$ e podemos então sugerir que com um número maior de dados haverá a formação de bacias análogas às obtidas pelo algoritmo.

Retoma-se então em seguida uma das motivações do trabalho, a aproximação da dinâmica não-linear com os métodos experimentais, através da proposta de uma prática na qual o uso de *softwares* é ainda mais irrelevante, nesta a montagem das bacias é feita manualmente utilizando papel e lápis de cor no intuito de emular o funcionamento do *software* e ainda sim obterem-se resultados comparáveis.

Vale a pena relembrar que para uma análise com maior precisão e de maior utilidade faz-se inevitavelmente necessária uma maior quantidade de pontos e, portanto, é evidente a importância e a praticidade do uso de simulações na análise desses movimentos. Entretanto resultados análogos e talvez tão interessantes quanto podem ser obtidos (com um trabalho definitivamente mais árduo, 36 a 64 posições iniciais) experimentalmente por esse método, à título de proporcionar uma prática mais interativa e palpável com os sistemas da dinâmica não-linear.

Com isso concluímos o estudo proposto acerca do pêndulo magnético, tendo então caracterizado completamente sua dinâmica através da construção experimental e do uso de métodos numéricos com a evidente motivação de compreender melhor o movimento do Pêndulo Magnético em si juntamente com a dinâmica não-linear, visando aproximar o estudo de seus sistemas da prática experimental tornando-a mais tangível.

Em relação às possíveis perspectivas de continuidade ao trabalho podemos citar a construção das bacias de atração utilizando uma grade maior de coordenadas iniciais de maneira que o resultado obtido para essa prática experimental seria ainda mais interessante e proporcionaria uma análise mais útil do resultado. Pode-se também visar a melhoria do processo de coleta de dados para os resultados das trajetórias de maneira que o *Tracker* consiga identificar mais facilmente o objeto de interesse (a ponta do pêndulo) e com isso melhorar a qualidade dos resultados e facilitar o processo de coleta de dados, isso pode ser feito melhorando o contraste entre o plano de fundo e objeto de interesse e até mesmo através da iluminação do local.

Além disso, traz-se aqui uma perspectiva quanto à construção de um kit de trabalho experimental a partir da prática proposta para a montagem da figura 27. Práticas utilizando experimentos relacionados à mecânica são pouco expressivas na área da dinâmica não-linear (no geral encontram-se mais experimentos relacionados à circuitos eletrônicos) e por isso talvez a proposta se torne tão interessante. A sugestão seria um experimento simples na qual é montado um pêndulo magnético e feita a coleta de dados de posição inicial e final para uma grade de posições à mão mesmo e da mesma maneira seria construído um gráfico como na figura 27 que indica as bacias de atração para este experimento montado, emulando o funcionamento do software, como foi descrito anteriormente.

Essa prática deveras didática, pode ser utilizada como introdução para a dinâmica não-linear à estudantes do ensino médio ou talvez como uma prática laboratorial no primeiro ano da graduação com o mesmo intuito de introduzir conceitos relacionados à dinâmica não-linear. De maneira que os alunos teriam contato físico com esses conceitos através da prática laboratorial facilitando o entendimento das ideias. Esse kit experimental conteria então os materiais necessários para a realização da prática, montagem do aparato e construção do gráfico, e talvez uma apostila contendo o aparato teórico do que queremos passar com o experimento.

Recapitulados as principais ideias e resultados de cada seção e apresentadas por fim as perspectivas em aberto do trabalho chega ao fim está última seção textual que visava concatenar as ideias gerais da monografia e dar uma conclusão à mesma, juntamente finaliza-se, portanto, o trabalho aqui apresentado.

REFERÊNCIAS

- [1] PEITGEN, H.; JURGENS, H.; SAUPE, D. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2004, p. 706.
- [2] WOLFRAM™ DEMONSTRATIONS PROJECT. *Chaotic Dynamics of a Magnetic Pendulum*. Disponível em:
<https://demonstrations.wolfram.com/ChaoticDynamicsOfAMagneticPendulum/#:~:text=A%20highly%20sensitive%20dependence%20on,of%20attractive%20magnets%20are%20present.>
Acesso em: 05 jul. 2022.
- [3] IAN, W. **The Chaotic Oscillating Magnetic Pendulum**, Primavera 2006. Trabalho final do curso *Math 164*. Disponível em:
<https://www.math.hmc.edu/~dyong/math164/2006/win/finalreport.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2022.
- [4] SISMANOGLU, B. N.; GERMANO, J. S. E.; AMORIM, J.; CAETANO, R. **A utilização da filmadora digital para o estudo do movimento dos corpos**. São Paulo: Revista Brasileira de Ensino de Física, v.31, n.1, 2009.
- [5] OSP – *Open Source Physics*; comPADRE – *Digital Resources for Physics & Astronomy Education*. **Tracker Video Analysis**. Disponível em:
<https://physlets.org/tracker/>. Acesso em: 13 ago. 2022.
- [6] CINTRA DO PRADO, C. P.; FIEDLER-FERRARA, N. **Caos: Uma Introdução**. 1. ed. Editora BLUCHER, 1994, p. 65.
- [7] György Károlyi and Tamás Tél 2021 J. Phys. Complex. 2 035001.