

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE MODAL BASEADA APENAS NA RESPOSTA
- DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA -

ADAILTON SILVA BORGES

Ilha Solteira, Abril de 2006.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**ANÁLISE MODAL BASEADA APENAS NA RESPOSTA
- DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA -**

ADAILTON SILVA BORGES

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Orientador: Prof. Dr. João Antonio Pereira

Ilha Solteira, Abril de 2006.

Dedico este trabalho

Ao meu irmão, Adriano Silva Borges, que sempre esteve presente em todas as etapas da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por iluminar meus caminhos, meus pensamentos e pela proteção recebida ao longo de minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Antonio Pereira pela excelente orientação, discussões enriquecedoras, consideração, paciência e pela amizade construída durante a realização deste trabalho.

Aos amigos Odair Antonio Nunes Jr, Ricardo Carvalhal, Ricardo Lopes Ferreira e Fernando Augusto Alves Mendes alunos da pós-graduação em engenharia Mecânica do Campus de Ilha Solteira pela amizade e pelas valiosas discussões e sugestões.

Em especial, ao meu irmão Adriano Silva Borges, que em todos os momentos esteve presente com incentivo, apoio, confiança e carinho.

Aos meus grandes amigos, José Ferreira dos Reis e Irene Ribeiro dos Reis que sempre estiveram ao meu lado com carinho, alegria, paciência e incentivo, e com certeza contribuíram muito para a realização deste trabalho.

A Maria Gabriella, pelos momentos felizes que passamos juntos, que ficarão gravados em minha memória.

Aos meus amigos e companheiros de república João Paulo e Francisco, pelos momentos de descontração.

À FAPESP, instituição patrocinadora, que concedeu bolsa durante todo o tempo necessário para o desenvolvimento do trabalho e conclusão do curso de Mestrado.

SUMÁRIO

Resumo.....	vii
Abstract.....	viii
Índice de Figuras.....	ix
Índice de Tabelas.....	xi
Lista Símbolos	xii
1. Introdução	1
2. Levantamento Bibliográfico	6
2.1 Métodos de Identificação dos Parâmetros Modais no Domínio do Tempo	7
2.2 Métodos de Identificação dos Parâmetros Modais do Domínio da Freqüência	9
3. Fundamentos Teóricos	12
3.1 Análise Modal	12
3.1.1 Análise Modal Teórica por Elementos Finitos.....	13
3.1.2 Análise Modal Experimental.....	18
4. Análise Modal Utilizando Apenas a Resposta	25
4.1 Excitações Randômicas	25
4.2 Resposta para Uma Entrada Arbitrária.....	29
4.3 Decomposição no Domínio da Freqüência	34
4.3.1 Decomposição em Valores Singulares	36
4.3.2 Identificação dos Modos de Vibration e Amortecimento	39
5. Simulação	42
5.1 Identificação de Um Sistema de Dois Graus de Liberdade.....	42

5.2 Identificação de uma Estrutura Tipo “Frame”	46
6. Testes Experimentais	52
6.1 Estrutura do Tipo “Frame”	53
6.1.1 Testes Preliminares.....	54
6.1.2 Discretização da Estrutura e Fixação dos Sensores.....	56
6.1.3 Modelo Analítico.....	57
6.1.4 Modelo Experimental	59
6.1.5 Testes Experimentais.....	61
6.1.6 Análise Modal Utilizando Apenas a Resposta da Estrutura.....	63
6.2 Estrutura do Projeto Mini-Baja	67
6.2.1 Estrutura	68
6.2.2 Modelo Analítico por Elementos Finitos	70
6.2.3 Testes Preliminares.....	72
6.2.4 Discretização da Estrutura e Fixação dos Sensores.....	75
6.2.5 Modelo Experimental	76
6.2.6 Testes Experimentais.....	78
6.2.7 Análise Modal Utilizando Somente a Resposta.	81
7. Conclusão	87
Referências	90
Publicações	94
Apêndice	95
A.1 Modelos de Espaço de Estado	96
A.1.1 Modelo de Espaço de Estado Discreto	103

RESUMO

BORGES, A. S. **Análise Modal baseada apenas na Resposta** – Decomposição no Domínio da Frequência. Ilha Solteira, 2006. 104 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

O presente trabalho propõe o estudo e implementação de uma metodologia para a estimação dos parâmetros modais de estruturas utilizando uma técnica de identificação baseada apenas na resposta do modelo, denominada Decomposição no Domínio da Frequência (DDF). Para tal são abordados os conceitos básicos envolvidos na análise modal, análise modal baseada apenas na resposta e métodos de identificação. A formulação do algoritmo é baseada na decomposição da matriz densidade espectral de potência utilizando a técnica da decomposição em valores singulares (SVD). A decomposição da matriz densidade espectral nas linhas de frequências correspondentes aos picos de amplitude, permite a estimativa dos modos de vibrar do sistema. Tem-se ainda que, o primeiro vetor singular obtido com a decomposição da matriz densidade espectral, para cada linha de frequência, na região em torno do modo, contém as respectivas informações daquele modo e o correspondente valor singular leva a uma estimativa da função densidade espectral de um sistema de um grau de liberdade (1GL) equivalente. Neste caso, a matriz densidade espectral de saída é decomposta em um conjunto de sistemas de 1 grau de liberdade. Posteriormente, esses dados são transformados para o domínio do tempo, utilizando a transformada inversa de Fourier, e as razões de amortecimento são estimadas utilizando o conceito de decremento logarítmico. A metodologia é avaliada, numa primeira etapa, utilizando dados simulados e posteriormente utilizando dados experimentais.

Palavras-chave: Análise Modal Baseado na Resposta, Decomposição no Domínio da Frequência (DDF), Decomposição em Valores Singulares (SVD).

ABSTRACT

BORGES, A. S. **Only-output Modal Analysis** – Frequency Domain Decomposition. Ilha Solteira, 2006. 104 p. Thesis (Master in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

The present work proposes the study and implementation of a methodology for the estimating of the modal parameters of structures by using the output-only data. The technique called Frequency Domain Decomposition (DDF) identifies the modal parameters without knowing the input. For that, it is discussed the basic concepts involved in identification, modal analysis and output-only modal analysis. The formulation of the algorithm is based on the decomposition of the power spectral density matrix by using the singular values decomposition technique (SVD). The decomposition of the spectral density matrix for the lines of frequency corresponding to the amplitude peaks, allows the estimating of the modes shape of the system. Additionally, the first singular vector obtained with the decomposition of the spectral density matrix, for each line of frequency, in the area around of the peak, contains the respective information of that mode. The corresponding singular value leads to an estimating of the spectral density function of an equivalent system of one degree of freedom. Therefore, the output spectral density matrix is decomposed in a set of one degree of freedom system. Later on, those data are transformed for the time domain by using the inverse Fourier transform and the damping ratios estimated from the crossing times and the logarithm decrement of the corresponding single degree of freedom system correlation function. The methodology is evaluated using simulated and experimental data.

Key-words: Only-output Modal Analysis, Frequency Domain Decomposition (FDD), Singular Value Decomposition (SVD).

Índice de Figuras

Figura 4.1 – Exemplo de uma amostra de um sinal randômico no domínio do tempo.....	26
Figura 4.2 – Exemplo de uma função de autocorrelação (Maia,1997).	27
Figura 4.3 – Função de densidade espectral (Maia,1997).....	27
Figura 4.4 – Definição de uma força impulsiva unitária.....	29
Figura 4.5 – Função de força arbitrária e não periódica.....	30
Figura 5.1 – Sistema de dois graus de Liberdade.....	43
Figura 5.2 – Resposta do sistema de dois graus de liberdade.	43
Figura 5.3 – Função de densidade espectral de saída da estrutura.	44
Figura 5.4 – Decomposição em valores singulares da densidade espectral (1º modo).	44
Figura 5.5 – Transformada inversa de Fourier da função de valores singulares (1º modo)....	46
Figura 5.6 – Estrutura do tipo “frame”.....	47
Figura 5.7 – Densidade espectral de saída da estrutura.....	48
Figura 5.8 – Decomposição em valores singulares da matriz densidade espectral.....	48
Figura 5.9 – Modos de Vibrar da estrutura.	49
Figura 5.10 – Transformada inversa de Fourier da função de valores singulares.....	50
Figura 6.1 – Bancada experimental.....	53
Figura 6.2 – Acoplamento flexível <i>Shaker</i> – estrutura.	56
Figura 6.3 – Esqueleto da estrutura analisada, o símbolo “ $\oplus$ ” representa os pontos em que serão colocados os acelerômetros.....	57
Figura 6.4 – Estrutura modelada com elementos de viga.....	58
Figura 6.5 – Áreas da estrutura do tipo frame.	59
Figura 6.6 – Esquema da instrumentação utilizada no ensaio experimental.....	60
Figura 6.7 – “ <i>Set up</i> ” experimental	60
Figura 6.8 – FRF(s) coletadas na estrutura de testes.....	61
Figura 6.9 – Compração dos modos de vibrar.....	62
Figura 6.10 – Função de densidade espectral experimental.....	64
Figura 6.11 – Interface gráfica – Decomposição no Domínio da Frequência.....	64
Figura 6.12 – Densidade espectral do sistema de 1GL e respectiva transformada.	65
Figura 6.13 – Comparação dos modos de vibrar.....	66

Figura 6.14 – Modos de vibrar identificados.	67
Figura 6.15 – Estrutura em condições reais e em laboratório.	69
Figura 6.16 – Dimensões da estrutura de testes.	69
Figura 6.17 – Modelo Analítico	70
Figura 6.18 – Estrutura suspensa, condição livre-livre.	73
Figura 6.19 – Excitação da estrutura de testes.	74
Figura 6.20 – Acoplamento Shaker- Estrutura.	75
Figura 6.21 – Modelo discretizado.....	75
Figura 6.22 – “Set up” experimental.	76
Figura 6.23 – “Drive Point” FRF x Coerência	77
Figura 6.24 – “Drive point” FRF x Imaginário.	77
Figura 6.25 – Função de Resposta em Frequência.	79
Figura 6.26 – Comparação dos modos de vibrar.....	80
Figura 6.27 – Interface para visualização dos modos de vibrar.	80
Figura 6.28 – Densidade espectral de potência, ponto de referência.	82
Figura 6.29 – Pico selecionado.....	83
Figura 6.30 – Comparação dos modos de vibrar do sistema.....	84
Figura 6.31 – Modos estimados pelo método FDD.....	85
Figura 6.32 – Densidade espectral equivalente e sua respectiva transformada inversa de Fourier.	85

Índice de Tabelas

Tabela 5.1 – Comparação entre os parâmetros estimados e os de referência.	45
Tabela 5.2 – Fatores de amortecimento exatos e estimados.	46
Tabela 5.3 – Comparação entre os parâmetros estimados e de referência.	49
Tabela 5.4 – Fatores de amortecimento simulados e estimados.	50
Tabela 6.1 – Materiais e instrumentos utilizados no experimento	55
Tabela 6.2 – Propriedades do material.	56
Tabela 6.3 – Comparação dos métodos de identificação Analítico e Experimental.	62
Tabela 6.4 – Correlação entre os modos obtidos pelo modelo analítico e experimental.	66
Tabela 6.5 – Propriedades do material.	70
Tabela 6.8 – Comparação dos métodos experimentais.	84
Tabela 6.9 – Frequências naturais e razões de amortecimento identificados utilizando DDF.	86

Lista de símbolos

$[A_c]$	matriz dinâmica contínua
$[A_d]$	matriz dinâmica discreta
$[A_k]$	matriz de resíduo do k-ésimo modo
$[B_c]$	matriz de influencia de entrada contínua
$[B_d]$	matriz de influencia de entrada discreta
$[C]$	matriz de amortecimento
$[C_c]$	matriz de influência de saída continua
C_{cr}	amortecimento critico
$[C_d]$	matriz de influencia de saída discreta
$[D_c]$	matriz de transmissão direta contínuo
$[D_d]$	matriz de transmissão direta discreto
$\{f(t)\}$	vetor de força
f_i	força de inércia
f_d	força dissipativa
f_e	força elástica

$\{F\}$	vetor de constante complexas da força de excitação
$[G_{xx}]$	densidade espectral de potência de saída do sistema
$[G_{ff}]$	densidade espectral de potência de entrada do sistema
$[G_{xf}]$	densidade espectral cruzada, entre as variáveis x e f
$[H(s)]$	matriz da função de transferência, variável de Laplace
$[H(i\omega)]$	matriz da função de resposta em frequência
$h(t)$	função de resposta ao impulso
$[I]$	matriz identidade
$[K]$	matriz de rigidez
$[k]$	matriz de rigidez diagonal ou modal
$[M]$	Matriz de massa
$[m]$	Matriz de massa diagonal ou modal
m	n° de entradas
n	graus de liberdade
$[R]_r$	matriz de resíduo

R_{ff}	função de autocorrelação
R_{fx}	função de correlação cruzada
$[S_i]$	matriz de valores singulares
S_{ff}	função de densidade espectral de potência
S_{fx}	função de densidade espectral cruzada
s_i	elemento do valor singular
s	raízes da equação característica
$[U_i]$	matriz de vetores singulares
u_{ij}	elemento do vetor singular
$[V]_r$	matriz de resíduos
$[Z]$	matriz de rigidez dinâmica
$\{x(t)\}$	vetor deslocamento
$\{\dot{x}(t)\}$	vetor de velocidade
$\{\ddot{x}(t)\}$	vetor aceleração
$\{X\}$	vetor de constantes complexas da resposta

ζ	razão de amortecimento
ω	frequência natural
$\bar{\omega}$	frequência natural amortecida
$\{\psi\}$	vetor de deslocamento modal
$[\Psi]$	matriz de deslocamento nodal
λ	pólo
σ	fator de amortecimento
δ	decremento logaritmo
ANPSD	média normalizada de função de densidade espectral
BFD	método básico de decomposição no domínio da frequência
FDD	método de Decomposição no Domínio da Frequência
EFDD	método melhorado de Decomposição no Domínio da Frequência
PP	método de identificação peak picking
MAC	coeficiente de correlação modal
1GL	sistema de um grau de liberdade

CAPÍTULO 1

Introdução

As demandas do mercado atualmente têm exigido máquinas e equipamentos cada vez mais elaborados, com capacidade de produção e de desempenho cada vez maiores e custos mais acessíveis. Neste contexto, o interesse pelo estudo e desenvolvimento de modelos e técnicas de identificação de parâmetros mais eficientes e que possam ser utilizadas para uma análise de desempenho e integridade dos sistemas estruturais vêm aumentando rapidamente. Isso tem exigido das empresas um maior investimento em técnicas de análise, no desenvolvimento, e elaboração de modelos mais refinados utilizados para estudar e prever o comportamento dos sistemas mecânicos, principalmente quando se trata de questões ligadas à segurança e ao meio ambiente. Neste cenário, cada vez mais são utilizadas técnicas de modelagem mais sofisticadas que envolvem a análise de um maior número de detalhes sempre buscando definir modelos capazes de representar adequadamente não só comportamento estático do sistema físico, mas também o seu comportamento dinâmico estrutural.

A Análise Modal é uma dessas técnicas utilizadas para o estudo e análise dinâmica de sistemas estruturais. Esta técnica permite estudar o comportamento dinâmico estrutural do modelo através de uma formulação matricial e o cálculo dos parâmetros de vibração do modelo podem ser obtidos, tanto através da abordagem analítica quanto da experimental. A

modelagem do sistema é fundamentada em três simplificações básicas: a estrutura é linear, invariante no tempo e observável (Formenti, 1977; Snoeys, 1992). Se estas condições são satisfeitas, a estrutura real pode ser representada por um modelo matemático discreto capaz de descrever as principais características dinâmicas da estrutura através de um número reduzido de dados. A formulação leva a um modelo matemático, que permite estabelecer uma relação entre a entrada (*input*) e a resposta (*output*) da estrutura em termos dos parâmetros modais do modelo.

Os vários aspectos da técnica bem como sua aplicação têm sido amplamente pesquisados e atualmente existe uma vasta literatura cobrindo os principais aspectos teóricos, bem como aspectos práticos relacionados com os testes de análise modal (Ewins et al., 1981; Allemang, 1982; Rost, et al., 1985; Leuridan et al., 1990; Snoeys et al., 1992; Ewins, 1984; Heylen et al., 1995; Maia et al., 1997; Allemang, 1999).

Na análise modal experimental a relação *input-output* é calculada a partir da excitação e das respostas capturadas respectivamente nos pontos de excitação e de medição previamente selecionados. Neste caso, obtém-se um conjunto de funções complexas, em que cada função representa a função de transferência $H_{ij}(s)$ entre a força de excitação aplicada no ponto j e a resposta medida no ponto i da estrutura. As funções de transferências podem também ser avaliadas no domínio da frequência, levando à definição das chamadas Funções de Resposta em Frequência (FRF(s)) ou suas equivalentes no domínio do tempo, as chamadas Funções de Resposta ao Impulso (FRI(s)). Os parâmetros modais do sistema são estimados tanto a partir das FRF(s) medidas (Goyder, 1980; Lembrechts, 1988) como a partir da sua forma equivalente no domínio do tempo (Juang e Pappa, 1985).

Devido à necessidade de se conhecer a entrada e a saída do sistema para a construção das respectivas FRF(s), esses testes geralmente são realizados em laboratório, em condições de ensaio bem controladas e a excitação da estrutura é feita artificialmente, utilizando um

martelo instrumentado ou um excitador eletromagnético (*shaker*). Entretanto, o comportamento vibro-acústico de uma estrutura em condições de operação, por exemplo, um carro em uma pista, pode apresentar um comportamento diferente da situação de um teste de laboratório, devido a efeitos de pré-tensão, suspensão, condições ambientais e outros. Portanto, o estudo do comportamento da estrutura a partir das próprias condições de operação poderia ser mais representativo do que em testes de laboratório e a identificação dos parâmetros modais do modelo seria mais realística.

As técnicas de análise modal baseadas apenas na resposta são discutidas nesses termos, ou seja, elas permitem a obtenção dos parâmetros modais a partir das condições de operação da estrutura. Neste caso, diferentemente da abordagem clássica, são utilizados apenas os dados das respostas e a excitação não necessitaria ser medida, de forma que a estrutura poderia ser excitada pelas próprias condições de operação. O foco principal deste trabalho é estudar estas técnicas, propor e implementar uma metodologia de identificação modal baseada apenas nas respostas.

As vantagens encontradas na análise modal baseada nas condições de operação é que esta utiliza dados obtidos em condições reais de carregamento, o que difere significativamente das condições de um teste de laboratório, proporcionando uma avaliação do comportamento do sistema sob influência das condições ambientais. Um outro aspecto é o fato de que, em muitos casos, produzir uma excitação forçada com equipamentos padrões é muito difícil ou mesmo impossível. Neste caso, a estrutura poderia ser excitada por uma condição natural, por exemplo, grandes estruturas de engenharia poderiam utilizar excitações causadas pelo vento ou pelo tráfego para a avaliação das suas propriedades dinâmicas.

A maior dificuldade da análise modal baseada apenas na resposta é que a entrada do sistema não é medida e, portanto, as FRF(s) não são obtidas diretamente como no teste clássico, conseqüentemente os parâmetros modais do modelo não podem ser estimados a

partir das FRF(s). Neste caso, a identificação dos parâmetros modais é feita de uma forma diferente, resultando em um modelo mais complexo, pois:

- A entrada não é medida;
- Não é possível estabelecer uma relação direta entre a entrada e saída do sistema;
- Os sinais de resposta geralmente não são determinísticos, o que implica no uso de ferramentas estatísticas para manipulação destes.

Na formulação da análise modal baseada na resposta a entrada do sistema (excitação) não é medida, entretanto, é assumido que as forças que atuam no sistema sejam do tipo banda larga. Este fato leva a uma rediscussão do problema que não é mais determinístico. Portanto os dados passam a ser tratados estatisticamente, em termos de médias, variâncias, desvio padrão e etc. Ferramentas estatísticas ganham importância nesta análise, e as funções de correlação são fundamentais para análise de sistemas utilizando somente a resposta.

De forma análoga aos métodos clássicos de identificação dos parâmetros modais, as técnicas baseadas apenas nas respostas do modelo também podem ser separadas no que se refere ao domínio no qual são numericamente tratados os dados, tempo e frequência.

Dentre os vários métodos de identificação no domínio do tempo, pode-se citar: o modelo autoregressivo de médias móveis (ARMA), algumas variações do modelo de espaço de estado denominado de identificação estocástica de subespaço (SSI) e seguindo outra filosofia a técnica de excitação natural (NExT).

Neste contexto, podem-se citar alguns métodos de identificação no domínio da frequência como: o método básico no domínio da frequência (BFD) ou Peak Picking (PP), o método de decomposição no domínio da frequência (FDD), incluindo-se neste caso, o método melhorado de decomposição no domínio da frequência (EFDD). Este último é a proposta

deste trabalho e será detalhada mais amplamente ao longo do texto, cuja organização, é apresentada nos próximos parágrafos.

O capítulo 2 apresenta uma breve visão histórica do desenvolvimento da área de análise modal experimental e revisão bibliográfica. É feita uma discussão dos principais métodos de identificação, utilizando apenas a resposta da estrutura com especial atenção para os métodos no domínio da frequência.

No capítulo 3 é apresentada uma discussão sobre conceitos e princípios da análise modal, buscando fornecer subsídios necessários para entendimento dos conceitos e fundamentos da análise modal baseada apenas a resposta do sistema.

No capítulo 4 são discutidos, inicialmente, os conceitos probabilísticos de tratamento de sinais randômicos, correlação de sinais e funções de densidade espectral, os quais são fundamentais para o desenvolvimento e a implementação do método de identificação proposto e, finalmente, é apresentado os conceitos básicos e os fundamentos do método de identificação implementado, método da Decomposição no Domínio da Frequência.

No capítulo 5 é discutida a avaliação da metodologia utilizando dados simulados de um modelo envolvendo parâmetros concentrado e uma estrutura contínua do tipo frame. O capítulo 6 apresenta os resultados de dois testes experimentais. No primeiro caso, é avaliada uma estrutura simples do tipo “frame” e no segundo uma estrutura um pouco mais complexa, gaiola do carro utilizado em competições universitárias – Projeto Mini-Baja.

E, finalmente, o capítulo 7 apresenta as discussões e conclusões do trabalho.

CAPÍTULO 2

Levantamento Bibliográfico

A literatura mostra que nas últimas décadas, a análise modal apresentou uma grande evolução e tem se consolidado como uma importante ferramenta para o estudo dos problemas de dinâmica estrutural. Embora ainda exista muita pesquisa focalizando esta área, ela praticamente atingiu um status de maturidade tanto em relação aos testes experimentais quanto em relação à modelagem analítica. Existem vários textos que fornecem uma completa descrição dos métodos de estimação dos parâmetros modais utilizando a relação *input-output*, tanto no domínio da frequência como no tempo (Ewins et al., 1981; Allemang, 1982; Rost, et al., 1985; Leuridan et al., 1990; Snoeys et al., 1992; Ewins, 1984; Heylen et al., 1995; Maia et al., 1997; Allemang, 1999).

Os métodos utilizando apenas as respostas, de forma geral, são mais recentes e apesar da existência de vários artigos (Brincker, 2000; Brincker, 2001; Peeters and Roeck, 2001; Schwars and Richardson, 2001) sobre o assunto, ainda não estão completamente consolidados. O crescente interesse da comunidade científica na obtenção de uma base sólida para a identificação dos parâmetros modais utilizando somente a resposta do sistema é

confirmado pelo próprio número de publicações mais recentemente nesta área. Uma vasta gama de aplicações tem sido mostrada, dentre elas cita-se: a utilização da técnica para estimar os parâmetros modais em torres a partir de excitações provocadas pelo vento (Yoshida, A. et al, 2004), a análise operacional de dutos de refrigeração de reator nuclear (Pekka al, 2004), estimavas dos parâmetros modais do sistema de transmissão de um automóvel em funcionamento, (Moller and Gade 2004) e outros.

No Brasil, nota-se que a análise modal baseada apenas na resposta ainda é incipiente, por exemplo, no último congresso brasileiro de engenharia mecânica este assunto praticamente não foi abordado. Acredita-se que esta é uma área de grande interesse para o país, apresentando um potencial de aplicação muito vasto, tanto em estruturas mecânicas, como em estruturas de engenharia civil (pontes, viadutos, etc.).

A seguir será feita uma breve discussão dos métodos de identificação utilizando somente as repostas do sistema tanto no domínio do tempo como no da frequência.

2.1 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Dentre os vários métodos de identificação no domínio do tempo, destaca-se o algoritmo de predição linear baseado no modelo autoregressivo de médias moveis (ARMA) como sendo a mais clássica das técnicas de identificação estocástica. Este método é fundamentado na teoria de séries temporais e foi inicialmente aplicado a problemas de engenharia elétrica e automação, sendo posteriormente transferindo com sucesso a análise modal experimental.

Os parâmetros do modelo estrutural ARMA guardam informações relativas à dinâmica do sistema, uma vez que estes estão relacionados com a covariância equivalente do sistema e ao processo de excitação. Infelizmente os parâmetros MA causam problemas de não-

linearidade. Este método tem problemas de convergência, alta sensibilidade às condições iniciais e excessiva carga computacional (Peeters et al., 1999).

Como alternativa ao modelo ARMA, há a classe de métodos de identificação estocástica baseados em modelos em espaço de estado, denominada identificação estocástica de subespaço (SSI). Baseados na identificação de subespaço, tais métodos executam primeiramente uma redução no conjunto de estados do sistema e só então o modelo em espaço de estado é identificado a partir do subconjunto encontrado. A terminologia subespaço surgiu na teoria de controle e define o grupo de métodos que compõe a classe de problema denominada estocástica. Esta estritamente relacionada com a realização determinística que retrocede ao algoritmo de Ho-Kalman e aplica a decomposição SVD para o tratamento de sinais contaminados por ruído (Kung, 1978).

Seguindo outra filosofia a da técnica de excitação natural (NExT) permite a extração dos parâmetros modais de estruturas sob a ação de excitação natural utilizando para tanto as técnicas clássicas de identificação determinística. Segundo James (1995) a teoria de identificação NExT reside no fato que um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), excitado por forças aleatórias, produz funções de autocorrelação e correlação-cruzada que são somas de “senos amortecido”. Além disso cada seno apresenta uma frequência natural amortecida e um fator de amortecimento idêntico aos correspondentes parâmetros dos modos estruturais. Consequentemente, se as funções de correlação da resposta são equivalentes à função resposta ao impulso, elas podem ser utilizadas nos métodos conhecidos e extensamente testados de identificação, tais como PRCE, ITD ou ERA, para extrair os parâmetros modais e o modelo da estrutura.

Uma das desvantagens dos métodos no domínio do tempo é que embora estruturas reais tenham infinitas frequências e infinitos modos de vibrar, o limite dinâmico real faz com que o número de coordenadas independentes do modelo seja reduzido drasticamente,

restringindo a análise a uma faixa de frequência previamente estabelecida. Assim é fundamental na identificação no domínio do tempo, a determinação correta do número de modos de vibrar contido nos sinais observados, evitando modos computacionais. Portanto a falta de um critério de estimação da ordem do modelo é uma das principais desvantagens das técnicas no domínio do tempo.

2.2 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS DO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Os métodos de identificação dos parâmetros modais utilizando apenas a resposta no domínio da frequência podem ser agrupados basicamente em duas classes: o método básico no domínio da frequência (BFD) ou Peak Picking (PP) e o método de Decomposição no Domínio da Frequência (FDD), incluindo-se neste caso, o método melhorado de decomposição no domínio da frequência (EFDD).

É possível traçar um cronograma temporal da evolução dos métodos de identificação utilizando somente as repostas do sistema no domínio da frequência. Para isto, pode-se começar pela formulação sistemática e pela implementação do método Peak Picking atribuída a Felber (1993), embora a idéia fundamental já tivesse sido formulada antes. Dando prosseguimento, Andersen (1997) apresenta os conceitos básicos do método FDD. Alguns anos mais tarde, Brincker (2000) discute de uma forma mais completa a aplicação do método para análise modal utilizando somente a resposta em estruturas reais. Já em Brincker (2001) é proposta uma extensão da técnica de decomposição no domínio da frequência, resultando no método melhorado de decomposição no domínio da frequência (EFDD).

Nos três métodos apresentados acima a identificação dos parâmetros modais é feita a partir das funções de densidade espectral da resposta do sistema. Estas funções são utilizadas na construção de uma matriz de densidade espectral, a qual é formada pelas funções de

densidade espectral de potência na diagonal principal, e as funções de densidade espectral cruzada nas demais posições. Uma vez encontrada a matriz de densidade espectral, o procedimento para extração dos parâmetros modais do sistema é ligeiramente diferente em cada um dos métodos.

Segundo Felber (1993) no método peak picking é feita a normalização e a média das funções de densidades espectral a fim de se obter a média normalizada da densidade espectral de potência (ANPSD), que em um primeiro momento, mostra todos os picos de ressonâncias correspondentes aos modos de vibrar do sistema. A identificação das frequências desses picos fornece uma primeira idéia das frequências dos modos de vibrar do sistema.

Embora as forças de entrada não sejam medidas neste método, esta dificuldade é freqüentemente superada pela adoção de uma técnica derivada da identificação dos parâmetros modais convencional, onde um sensor de referência é colocado em um determinado grau de liberdade, e posteriormente, usado como a “entrada” do sistema. As estimativas das funções de transmissibilidade e coerência são obtidas a partir da relação do sinal de referência e do sinal dos pontos de medida do sistema. Esta relação serve, não somente para ajudar na identificação das ressonâncias, mas também para estimar os modos operacionais de deflexão. De fato estes modos não são os modos de vibrar do sistema, mas de qualquer forma, a diferença entre eles torna-se insignificante para sistemas com modos bem separados e levemente amortecidos.

Segundo Brincker et al. (2000) no método de decomposição no domínio da frequência (FDD), para cada frequência discreta a matriz de densidade espectral é decomposta em valores e vetores singulares utilizando a decomposição em valores singulares (SVD). A matriz de densidade espectral é decomposta para a contribuição dos diferentes modos da estrutura, em que cada pico de frequência contribui para a resposta do sistema. Neste caso, o primeiro vetor singular para o pico de frequência do k-ésimo modo é a própria estimativa deste modo, e

a partir da análise dos valores singulares é possível identificar a função de densidade espectral relacionada com um dado grau de liberdade correspondente ao k -ésimo modo de vibrar do sistema.

Uma das principais vantagens das técnicas baseadas no domínio da frequência é a sua facilidade de interação (amigável) com o usuário. As técnicas são rápidas, sua utilização é simples e dá ao usuário um “sentimento” físico dos dados usados. Entretanto, as técnicas no domínio da frequência, tal como a *Peak Picking*, que são baseadas no simples processamento do sinal utilizando a Transformada Discreta de Fourier, fornecem uma estimativa razoável da frequência natural e dos modos de vibrar, apenas se os modos forem bem separados. Para modos próximos elas podem apresentar alguma dificuldade na identificação, mesmo que os modos possam ser identificados, a estimativa fica contaminada. Um outro aspecto é a limitação na estimativa da frequência devido aos problemas relacionados com a resolução do espectro de potência, assim como a incerteza na estimativa do amortecimento.

Conforme discutido em Brincker et al. (2000), a utilização da técnica de Decomposição no Domínio da Frequência reduz esses inconvenientes associados com as técnicas clássicas, ainda mantendo a características de ser “amigável” com o usuário.

O método melhorado de decomposição no domínio da frequência (EFDD), conforme discutido anteriormente, é uma extensão do domínio da frequência e é também chamado por alguns autores de decomposição no domínio da frequência (FDD). Neste trabalho será adotada esta mesma denominação. Este método é uma extensão do método de decomposição na frequência, acrescido do uso dos coeficientes Mac-valores para identificação da função de densidade espectral relacionada com um grau de liberdade correspondente ao k -ésimo modo de vibrar. Este fato permite a identificação dos coeficientes de amortecimento do sistema com uma maior precisão e eficácia. As propriedades deste método serão mais detalhadas nos próximos capítulos, este será o objetivo principal deste trabalho.

CAPÍTULO 3

Fundamentos Teóricos

Na análise e no desenvolvimento de sistemas mecânicos o comportamento dinâmico estrutural do modelo pode ser descrito por seus parâmetros modais, ou seja, suas frequências naturais, constante modal e razões de amortecimento. A análise modal é um procedimento bastante eficaz para determinar esses parâmetros e a literatura mostra que essa técnica vem conquistando uma ampla gama de aplicação, tanto sob o ponto de vista da análise modal teórica quanto da análise modal experimental. Nesta seção serão apresentados os conceitos básicos da análise modal teórica e experimental. Estes conceitos serão utilizados como base teórica para introdução à análise modal utilizando somente a resposta.

3.1 ANÁLISE MODAL

A análise modal empregada para investigar o comportamento dinâmico de uma estrutura é sustentada em três hipóteses básicas:

- *Linearidade do comportamento dinâmico*: a resposta da estrutura para uma

combinação de forças aplicadas simultaneamente é equivalente à soma das respostas de cada força atuando individualmente;

- *Invariável no tempo*: os parâmetros físicos da estrutura são constantes;
- *Observável*: a relação entrada/saída medida contém informações suficientes para determinar o comportamento dinâmico do modelo.

Estruturas lineares contínuas geralmente atendem a estes requisitos e podem ser representadas por modelos matemáticos lineares obtidos a partir da discretização da estrutura em elementos conectados rigidamente por nós. A interação entre as forças dos vários elementos que constituem a estrutura é representada por forças resultantes dos esforços de flexão, torção e tração atuando nesses nós (Przemieniecki, 1968). Cada equação de equilíbrio associada a cada força descreve o movimento de um grau de liberdade da estrutura discretizada e o resultado é um conjunto de equações acopladas. Se uma estrutura pode ser idealizada dessa forma, ela pode ser excitada com uma dada força, e a tanto a resposta quanto à própria força são obtidas simultaneamente. Então os parâmetros modais podem ser estimados a partir das relações entrada-saída, ou seja, as respectivas funções de transferência.

3.1.1 Análise Modal Teórica por Elementos Finitos

Com o advento da computação, a modelagem por elementos finitos tem sido amplamente utilizada. Este método surgiu no campo da análise estrutural e tem sido expandida em diversas aplicações, desde a engenharia aeroespacial, arquitetura naval, mecânica dos fluidos, transferência de calor e até na medicina.

Na formulação de elementos finitos o corpo elástico contínuo é representado por um sistema discreto, formado por um conjunto de elementos estruturais unidos entre si através de

um número finito de pontos denominados nós do modelo. Um elemento estrutural é definido como uma parte do corpo elástico e o seu comportamento é determinado a partir do conhecimento dos deslocamentos ou forças nodais deste elemento. O conhecimento do comportamento dos elementos individuais permite representar o comportamento do sistema como um todo de acordo com a teoria de elementos finitos (Bathe & Wilson, 1976; Dhett et al., 1984). As matrizes de massa e rigidez da estrutura denominadas de matrizes globais são montadas a partir das matrizes elementares de massa e rigidez estimadas individualmente para cada elemento. As matrizes globais representam n equações diferenciais, sendo n o número de graus de liberdade do modelo discreto.

A equação diferencial algébrica que expressa o equilíbrio das forças de um sistema de vários graus de liberdade será utilizada para a representação de uma estrutura por elementos finitos. Essa abordagem leva a um modelo discreto da estrutura, representando por um sistema linear de n equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Na forma matricial tem-se:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

Na qual:

$\{\ddot{x}(t)\}, \{\dot{x}(t)\}$ e $\{x(t)\}$ - vetor aceleração, velocidade e deslocamento respectivamente;

$\{f(t)\}$ - força aplicada no sistema;

$[M]$, $[K]$ e $[C]$ – de ordem $n \times n$ - são as matrizes de massa, rigidez e amortecimento respectivamente;

n - número de graus de liberdade.

Desconsiderando o efeito do amortecimento, a equação (1) torna-se:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2)$$

Assumindo uma força de excitação do tipo $\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$ e uma solução da forma

$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$, a equação do movimento pode ser expressa por:

$$\left(-\omega^2 [M] + [K] \right) \{X\} e^{i\omega t} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (3)$$

Na qual:

ω - frequência de oscilação da força;

$\{F\}$ - vetor de constantes complexas da força de excitação;

$\{X\}$ - vetor de constantes complexas da resposta.

De qualquer forma, a solução numérica da equação (2) não é simples devido às dificuldades computacionais, particularmente para sistemas de alta ordem. Para certos casos especiais, uma maneira apropriada de resolver o sistema é utilizar a análise modal. Este processo requer a solução do problema de autovalor do sistema e a resposta da estrutura é expressa como uma combinação linear dos autovetores (Meirovitch, 1980).

Problema de Autovalor

Para uma estrutura não amortecida, a equação homogênea associada com a equação do movimento pode ser escrita assumindo que as forças de excitação são nulas. A resposta do sistema neste caso pode ser obtida considerando a solução homogênea a partir de um problema de autovalor (Meirovitch, 1980; Bathe e Wilson, 1976), equação (4).

$$\left(-\omega^2 [M] + [K] \right) \{X\} = 0 \quad (4)$$

A solução não trivial da equação (4) conforme discutida em Meirovitch, é dada por uma matriz diagonal $[\lambda_r]$, para $r = 1, \dots, n$, chamada de matriz dos autovalores, e está associada a uma outra matriz $[\Psi]$, de ordem $n \times n$, chamada de matriz de autovetores. Particularmente, cada $\lambda_r = \omega_r^2$ está relacionado a um vetor deslocamento $\{\psi\}_r$, (Meirovitch, 1975). Na dinâmica estrutural, os autovalores e os autovetores são interpretados como as

freqüências naturais e os modos próprios de vibrar, respectivamente, portanto, o problema de autovalor pode ser expresso por:

$$[K]\{\psi\}_r = \lambda_r [M]\{\psi\}_r \quad (5)$$

A solução computacional do problema de autovalor é bem conhecida e existem vários métodos de resolução bastante utilizados (Bathe & Wilson, 1976). Vale ressaltar que neste tipo de problema, quando a matriz $[M]$ é simétrica e positiva definida e a matriz $[K]$ é simétrica e semi-definida positiva, os autovalores são reais e não negativos. Para o caso de uma estrutura na condição livre-livre, a solução admite autovalores nulos associados aos autovetores representando os modos de corpo rígido, ou seja, o corpo livre pode movimentar-se numa freqüência nula sem se deformar, (Friswell & Mottershead, 1995).

Uma das propriedades mais importantes dos modos próprios é a ortogonalidade em relação as matrizes de massa e rigidez, sua dedução pode ser verificada detalhadamente em Meirovitch (1975). A propriedade de ortogonalidade é de grande utilidade e convenientemente aplicada na solução de problemas de autovalor em elementos finitos, além de ser freqüentemente utilizada para desacoplar as equações de movimento do sistema, transformando as matrizes de massa e rigidez da estrutura em matrizes de massa e rigidez modal:

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = [m.] \quad (6)$$

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = [k.] \quad (7)$$

Nas quais:

- $[\Psi]$ - matriz modal contendo os vetores modais;
- $[m.]$ - matriz de massa diagonal ou modal;
- $[k.]$ - matriz de rigidez diagonal ou modal.

Quando os modos são normalizados em relação à massa modal, as propriedades de ortogonalidade são chamadas de ortonormais e passam a satisfazer as seguintes relações:

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I] \quad (8)$$

$$[\phi]^T [K] [\phi] = [\lambda] \quad (9)$$

Nas quais:

$[\phi] = \frac{\{\psi\}_r}{[m_r]}$ - matriz modal normalizada em relação à massa;

$[I]$ - matriz identidade;

$[\lambda]$ - matriz dos autovalores.

Um outro aspecto de interesse das propriedades de ortogonalidade dos autovetores é a sua utilização na transformação das coordenadas físicas do modelo em coordenadas modais, que permite o desacoplamento das equações diferenciais do movimento. Isto possibilita resolver as equações do movimento como se fosse um sistema de um grau de liberdade para cada equação e depois retornar ao sistema físico.

A representação do modelo em coordenadas modais pode ser obtida pré-multiplicando a equação (3) pela matriz modal transposta $[\Psi]^T$ e pós-multiplicando pela identidade $[I] = [\Psi][\Psi]^{-1}$. O sistema de equações do movimento é então desacoplado, equação (10).

$$-\omega^2 [m] [\Psi]^{-1} \{X\} + [k] [\Psi]^{-1} \{X\} = \{\mathfrak{F}\} \quad (10)$$

A equação (10) permite representar o sistema como n -sistemas de um grau de liberdade, onde $\{\mathfrak{F}\} = [\Psi]^T \{F\}$ é o vetor força em coordenadas modais. Neste caso, o vetor deslocamento $\{q\}$ em coordenadas modais é dado pela expressão (11).

$$\{q\} = [\Psi]^{-1} \{X\} \quad (11)$$

Pré-multiplicando a equação (11) pela matriz modal obtém-se novamente o vetor deslocamento em coordenadas espaciais $\{X\}$, equação (12).

$$\{X\} = [\psi] \{q\} \quad (12)$$

A equação (12) mostra que os deslocamentos físicos do modelo podem ser escritos como uma combinação das colunas da matriz modal escalonados pelo vetor modal. Este fato é essencial na formulação da análise modal experimental (Heylen, 1995).

3.1.2 Análise Modal Experimental

Na análise modal experimental clássica, as características dinâmicas do modelo são obtidas a partir da função transferência, que define uma relação direta entre entrada e saída do sistema. A relação entrada/saída para uma dada estrutura é obtida medindo a excitação e a resposta do modelo. A seguir a formulação teórica de análise modal experimental será melhor detalhada visando fornecer subsídios para um melhor entendimento da formulação da análise modal baseada apenas na resposta.

Sistema de vários graus de liberdade

Para uma melhor compreensão das relações entrada/saída na formulação da análise modal experimental, considere a representação da equação do movimento, em termos da variável de Laplace s , equação (13).

$$(s^2[M] + s[C] + [K])\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (13)$$

Em uma forma compacta,

$$[Z(s)]\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (14)$$

Em que:

$$[Z(s)] = s^2[M] + s[C] + [K].$$

A equação (14) pode agora ser redefinida para expressar a saída em termos da entrada do sistema, equação (15)

$$\{X(s)\} = [H(s)]\{F(s)\} \quad (15)$$

Em que:

$$[H(s)] = [Z^{-1}(s)] - \text{matriz de transferência.}$$

Utilizando a definição de matriz inversa, a matriz de transferência pode ser redefinida como:

$$[H(s)] = [Z^{-1}(s)] = \frac{adj[Z(s)]}{|Z(s)|} \quad (16)$$

Na qual:

$adj[Z(s)]$ é a matriz adjunta de $Z(s)$;

$|Z(s)|$ é o determinante de $Z(s)$.

O denominador da equação (16), $|Z(s)|$, leva a chamada equação característica do sistema. As raízes desta equação são os pólos do polinômio característico que irão definir as frequências de ressonâncias do sistema. Estas raízes podem ser encontradas através da solução do problema de autovalores. Alternativamente a equação de movimento pode ser redefinida

em termos da formulação de estado (Meirovitch, 1980). Neste caso, a equação (13) pode ainda ser transformada em um problema geral de autovalores, utilizando a identidade da equação (17).

$$s[M] - s[M] = 0 \quad (17)$$

As equações (13) e (17) podem ser convenientemente arranjadas na forma de uma única expressão, equação (18).

$$(s[A] + [B])\{Y\} = \{F'\} \quad (18)$$

Em que:

$$A = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}, \{Y\} = \begin{Bmatrix} s\{X\} \\ \{X\} \end{Bmatrix} \text{ e } \{F'\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}$$

Para o caso da força de excitação ser igual à zero, a equação (18) torna-se um problema geral de autovalor, equação (19).

$$(s[A] + [B])\{Y\} = 0 \quad (19)$$

A solução não trivial da equação (19) é dada por uma matriz diagonal $[\lambda]$ denominada matriz de autovalores associada a uma outra matriz $[\Psi]$ chamada de autovetores (Ward Heylen, et al, 1994). Para sistemas físicos as matrizes $[M]$ e $[K]$ são reais e simétricas e a matriz de autovalores é formada por pares de autovetores complexo e complexo conjugado, sendo que cada autovetor $[\lambda_r]$ está relacionado com um dado vetor deslocamento $\{\psi\}_r$. Portanto a matriz de autovalores resulta em uma matriz de ordem $2n \times 2n$, equação (20).

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ 0 & & \bar{\lambda}_1 & \ddots \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 + j\bar{\omega}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_n + j\bar{\omega}_n & \\ 0 & & \sigma_1 - j\bar{\omega}_1 & \ddots \\ & & & \sigma_n + j\bar{\omega}_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

tal que:

$$\sigma_n = -\zeta_n \omega_n \quad \text{e} \quad \lambda_n = \sqrt{1 - \zeta_n^2} \omega_n \quad (21)$$

Para sistemas com múltiplos graus de liberdade, os autovetores $\{\psi\}_r$ introduzem o conceito de modos de vibrar ou deslocamento modal. Os autovetores, assim como os autovalores, aparecem em pares complexos conjugados, equação (22).

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\Psi\}_1 & \dots & \lambda_N \{\Psi\}_n & \bar{\lambda}_1 \{\bar{\Psi}\}_1 & \dots & \bar{\lambda}_N \{\bar{\Psi}\}_n \\ \{\Psi\}_1 & \dots & \{\Psi\}_n & \{\bar{\Psi}\}_1 & \dots & \{\bar{\Psi}\}_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

Uma observação mais atenta mostra que a solução do problema de autovalores da equação (19) é a mesma da equação característica do sistema, ($|Z(s)| = 0$). Portanto, substituindo o autovalor λ_r , e seu corresponde autovetor $\{\psi\}_r$, na equação (13) e igualando as forças à zero, tem-se:

$$(\lambda_r^2 [M] + \lambda_r [C] + [K]) \{\psi\}_r = \{0\} \quad (23)$$

Ou

$$[Z(\lambda_r)] \{\psi\}_r = \{0\} \quad (24)$$

Sabendo que $\lambda_r, \bar{\lambda}_r$ para $r = 1 \dots n$ são raízes da equação característica do sistema $|Z(s)|$, agora a equação (16) pode ser expressa como um produto de suas raízes $\lambda_r(s)$, equação (25).

$$[H(s)] = \frac{adj[Z(s)]}{\prod_{r=1}^n E(s - \lambda_r)(s - \bar{\lambda}_r)} \quad (25)$$

Em que: E é igual a uma constante.

Aplicando a teoria de frações parciais, a equação (25) pode ser reescrita na forma de pólos e resíduos (Ward Heylen et al., 1994), equação (26).

$$[H(s)] = \sum_{K=1}^n \left(\frac{[V]_r}{s - \lambda_K} + \frac{[\bar{V}]_r}{s - \bar{\lambda}_k} \right) \quad (26)$$

Os termos $[V]_r, [\bar{V}]_r$ são chamados de resíduos e podem ser calculados multiplicando a expressão (24) por $(s - \lambda_r)$ e avaliando o resultado para $s = \lambda_r$, equação (27).

$$V_r = ([H(s)](s - \lambda_r))_{s=\lambda_r} \quad (27)$$

A substituição da equação (25) na equação (27) leva a expressão (28).

$$[V]_r = \frac{adj[Z(\lambda_r)]}{\prod_{s=1, \lambda_s \neq \lambda_r}^n E(\lambda_r - \lambda_s)(\lambda_r - \bar{\lambda}_s)} \quad (28)$$

Ou ainda,

$$[V]_r = P_r adj[Z(\lambda_r)] \quad (29)$$

Desta forma a equação (26) pode ser redefinida em termos das constantes P_r , que são dependentes dos pólos.

$$[H(s)] = \sum_{K=1}^n \left(\frac{P_r adj[Z(\lambda_r)]}{s - \lambda_K} + \frac{\overline{P_r} adj[\overline{Z(\lambda_r)}]}{s - \bar{\lambda}_k} \right) \quad (30)$$

Reescrevendo a equação (16), chega-se a expressão (31) que será utilizada para mostrar a relação entre os resíduos e os modos de vibrar.

$$[Z(s)]adj[Z(s)] = [Z(s)][I] \quad (31)$$

Avaliando a equação para $s = \lambda_r$, sendo λ_r uma raiz da equação característica do sistema, obtém-se a expressão (32).

$$[Z(\lambda_r)]adj[Z(\lambda_r)] = [0] \quad (32)$$

Agora, considerando uma coluna arbitrária, por exemplo coluna i , da $adj([Z(\lambda_r)])$ a expressão (32) leva a expressão (33) que é idêntica à expressão (24).

$$[Z(\lambda_r)]\{adj(Z(\lambda_r))\}_i = [0] \quad (33)$$

As expressões (33) e (24), mostram que a $\{adj(Z(\lambda_r))\}_i$ e $\{\psi\}_r$ são proporcionais e ambos representam o autovetor para o correspondente autovalor λ_r . Isso é válido para qualquer coluna arbitrária da $adj[Z(\lambda_r)]$, uma vez que todas as linhas de $adj[Z(\lambda_r)]$ são proporcionais entre si, a $[adj(Z(\lambda_r))]$ tem posto = 1, o que significa que todas as colunas da $[adj(Z(\lambda_r))]$ também são proporcionais entre si.

Se as matrizes de massa e a rigidez são assumidas simétricas, tanto a matriz dinâmica $[Z(s)]$ do sistema quanto a matriz adjunta também serão simétricas. Então todas as linhas da matriz $[adj(Z(\lambda_r))]$ são proporcionais ao r -ésimo vetor modal, e a matriz adjunta pode ser expressa para o r -ésimo modo, equação (34).

$$adj[Z(\lambda_r)] = Q_r \{\psi\}_r \{\psi\}_r^T \quad (34)$$

Em que:

$Q_r = \text{constante.}$

Substituindo a equação (34) na expressão (30) tem-se:

$$[H(s)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{P_r Q_r \{\psi\}_r \{\psi\}_r^t}{(s - \lambda_r)} + \frac{\bar{P}_r \bar{Q}_r \{\bar{\psi}\}_r \{\bar{\psi}\}_r^t}{(s - \bar{\lambda}_r)} \right) \quad (35)$$

Ou,

$$[H(s)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{Z_r \{\psi\}_r \{\psi\}_r^t}{(s - \lambda_r)} + \frac{\bar{Z}_r \{\bar{\psi}\}_r \{\bar{\psi}\}_r^t}{(s - \bar{\lambda}_r)} \right) \quad (36)$$

Em que: $Z_r = P_r Q_r$.

Agora definido o vetor participação modal γ como sendo o vetor modal transposto multiplicado pela corresponde fator escalar Z_r , chega-se a expressão (37).

$$\gamma_r = Z_r \{\psi\}_r^T \quad (37)$$

Reescrevendo a equação (35), tem-se:

$$[H(s)] = \sum_{r=1}^N \left(\frac{[R]_r}{(s - \lambda_r)} + \frac{[\bar{R}]_r}{(s - \bar{\lambda}_r)} \right) \quad (38)$$

Em que:

$$R_r = \{\psi\}_r \gamma_r.$$

As equações acima serão fundamentais para o desenvolvimento teórico da técnica de decomposição do domínio da frequência descrita no capítulo 4.

CAPÍTULO 4

Análise Modal Utilizando Apenas a Resposta

Nos testes baseados apenas na resposta, a identificação dos parâmetros modais é feita de uma forma diferente da análise modal clássica que estima os parâmetros modais a partir das FRF(s), pois a entrada do sistema não é conhecida, ou melhor, não é medida. A identificação dos parâmetros modais proposta neste trabalho é baseada na decomposição em valores singulares (SVD) da matriz densidade espectral de saída, quando o sistema é excitado por uma entrada de banda larga. A seguir serão discutidos os fundamentos básicos envolvidos na análise de sinais aleatórios, visando fornecer os subsídios necessários para o tratamento de sistemas aleatórios e posterior extração dos parâmetros modais utilizando somente a resposta no domínio da frequência.

4.1 EXCITAÇÕES RANDÔMICAS

Sinais randômicos apresentam algumas peculiaridades e não podem ser tratados do mesmo modo que sinais determinísticos. Por natureza eles não são periódicos, e mesmo que

os sinais randômicos fossem tratados como um sinal periódico de período infinito, tal consideração não seria aceita, pois o sinal não obedece à condição de Dirichlet, equação (39).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (39)$$

Esta condição impede o uso da transformada de Fourier, dadas as suas propriedades inerentes, a análise dos sinais randômicos deve ser feita utilizando o conceito probabilístico (Newland, D, E, 1993). Neste caso o espectro do sinal será calculado a partir da função de autocorrelação do sinal.

A Figura 4.1 mostra um típico sinal randômico de vibrações no domínio do tempo. Assumindo que este sinal é estacionário e ergódico, isto é, as propriedades estatísticas de qualquer amostra (média, desvio padrão e distribuição estatística) de uma população são iguais em toda população. Portanto uma dada amostrada pode ser suficiente para representar toda a população. Neste caso, as características do sinal são estudadas utilizando os conceitos de Função de Correlação e Função de Densidade Espectral.

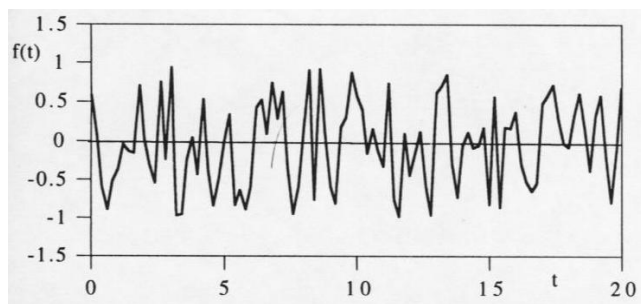


Figura 4.1 – Exemplo de uma amostra de um sinal randômico no domínio do tempo.

A função de Autocorrelação $R_{ff}(\tau)$ de um sinal real ou complexo $f(t)$ é definida como a expectativa E ou média do produto $f(t)f(t+\tau)$ analisado ao longo do eixo do tempo (Newland, 1993), equação (40)

$$R_{ff}(\tau) = E[f(t)\overline{f(t+\tau)}] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\tau} f(t) \overline{f(t+\tau)} dt = \quad (40)$$

A Figura 4.2 ilustra a forma assumida pela função de autocorrelação de um sinal aleatório estacionário. Conforme ilustrado, a função de correlação é finita e, ao contrário do sinal randômico $f(t)$, satisfaz as condições de Dirichlet, isso possibilita obter a transformada de Fourier da função de autocorrelação.

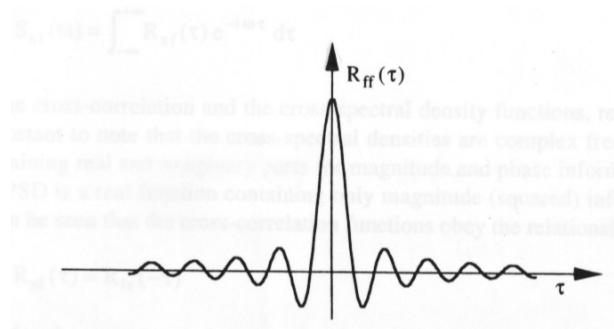


Figura 4.2 – Exemplo de uma função de autocorrelação (Maia,1997).

A transformada de Fourier da função de autocorrelação define uma função de densidade espectral de potência (PSD), equação (41).

$$S_{ff}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (41)$$

A função de densidade espectral de potência é uma função real, e leva a uma completa descrição do conteúdo em frequência do sinal original $f(t)$, Figura 4.3

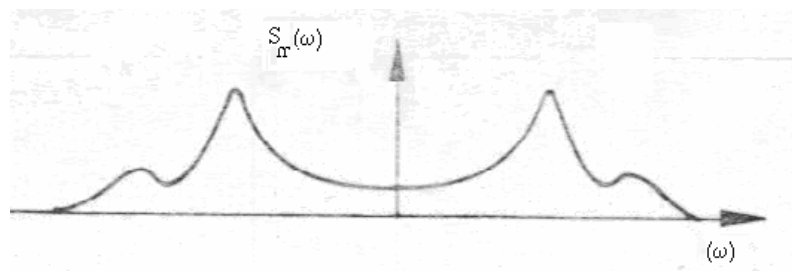


Figura 4.3 – Função de densidade espectral (Maia,1997).

Um conceito similar à função de autocorrelação pode ser aplicado também para estudar as relações de um par de funções randômicas $f(t)$ e $x(t)$. Neste caso define-se a função de correlação cruzada e a sua correspondente função de densidade espectral cruzada, equações (42) e (43).

$$R_{fx}(\tau) = E[f(t)\bar{x}(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)x(t + \tau)dt \quad (42)$$

$$S_{xf}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} R_{fx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (43)$$

A função de densidade espectral cruzada, diferentemente da função densidade espectral de potência, é geralmente uma função complexa contendo parte real e imaginária (ou informações sobre as magnitude e fase), enquanto a função densidade espectral de potência contém somente informações sobre a magnitude. A função de correlação cruzada tem a seguinte propriedade:

$$R_{xf}(\tau) = R_{fx}(-\tau) \quad (44)$$

Conseqüentemente, a função de densidade espectral cruzada de $x(t)$ por $f(t)$ é dada pelo complexo conjugado da função de densidade espectral de $f(t)$ por $x(t)$, equação (45).

$$S_{xf} = \bar{S}_{fx}(\omega) \quad (45)$$

As equações (40)-(41) e (42)-(43) discutidas acima são essenciais para a avaliação e identificação de sinais aleatórios e foram apresentadas apenas como subsídios para o embasamento da identificação proposta no capítulo 4, para maiores detalhes da teoria de análise de sinais randômicos ver Papoulis (1991).

4.2 RESPOSTA PARA UMA ENTRADA ARBITRÁRIA

A resposta de um sistema para uma entrada arbitrária qualquer pode ser definida a partir das respostas do sistema para entradas simples. Uma forma simples de função de força não periódica bastante usada neste caso, é o impulso unitário ou função de Dirac (função δ), equação (46).

$$f(t) = \delta(t - \tau) \quad (46)$$

O impulso unitário é definido como uma função igual à zero para todos os valores, exceto para $t = \tau$, cuja área é unitária, equação (47).

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\tau}^{\tau + \Delta t} f(t) dt = 1 \quad (47)$$

A Figura 4.4 ilustra uma função impulso representada por uma área retangular de largura Δt e altura $1/\Delta t$ tendendo ao infinito, quando Δt tende a zero.

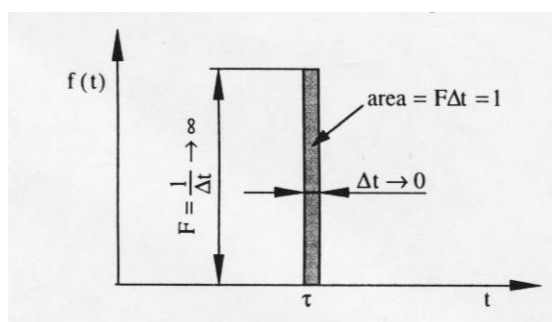


Figura 4.4 – Definição de uma força impulsiva unitária.

Considere um sistema de um grau de liberdade representado pela equação (1) excitado por um impulso unitário. Se o sistema estiver em repouso antes de ser excitado, $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ para $t < \tau$, integrando a equação (1) e substituindo as condições iniciais (Meirovitch, 1980), tem-se:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} F \Delta t = 1 = m \dot{x}_{t=\tau} - m \dot{x}_{t=\tau^-} = m \dot{x}_{t=\tau} \quad (48)$$

Portanto a resposta do sistema excitado para uma força impulsiva é nada mais do que a vibração livre do sistema com velocidade igual a $1/m$, equação (49).

$$x(t) = h(t - \tau) = e^{-\zeta \omega_n (t - \tau)} \frac{1}{m \omega_n} \text{sen}[\omega_d (t - \tau)] \quad \text{para } t > \tau \quad (49)$$

Em que: $h(t - \tau)$ denota a função de resposta ao impulso (FRI).

Para um caso geral, a resposta do sistema para uma entrada arbitraria $f(t)$ pode ser entendida como sendo a superposição (somatória) de respostas ao impulso, $h(t - \tau)$ produzidas por uma série de entradas impulsivas, Figura 4.5.

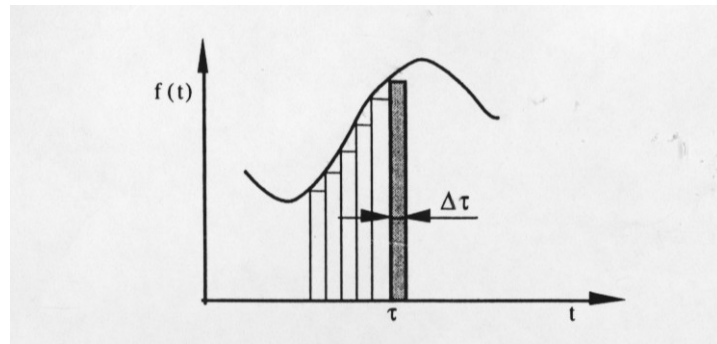


Figura 4.5 – Função de força arbitraria e não periódica.

$$f(t) = \sum_i f(\tau_i) \Delta \tau \delta(t - \tau_i) \quad \text{para } t > \tau \quad (50)$$

Isto se torna verdadeiro se for considerado que o sistema é linear, o que possibilita a aplicação do princípio da superposição (Maia, 1997), e a resposta é dada pela expressão (51).

$$x(t) \approx \sum_{\tau} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad \text{para } t > \tau \quad (51)$$

Para $\Delta t \rightarrow 0$, a somatória pode ser substituída por uma integral ($x(t) = 0$ para todos os valores de t exceto para $t > \tau$), resultando:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{para } t > \tau \quad (52)$$

A integral da equação (52), é chamada de convolução ou integral de Duhamel pode ser utilizada para calcular a resposta do sistema.

Considerando a equação (52) em termos da análise de Fourier, assumindo que sua excitação seja uma função do tipo δ -Dirac, nota-se que a função $h(t-\tau) = 0$ para todos os valores de $t < \tau$, o que permite estender o limite inferior da integral para $-\infty$, equação (53).

$$x(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (53)$$

Pode-se mudar a variável de integração para ϑ usando a seguinte relação,

$$\tau = t - \vartheta \quad (54)$$

E conseqüentemente

$$d\tau = -d\vartheta \quad (55)$$

Substituindo as equações (54) e (55) na equação (53), tem-se:

$$x(t) = - \int_{+\infty}^0 f(t-\vartheta)h(\vartheta)d\vartheta = \int_0^{+\infty} f(t-\vartheta)h(\vartheta)d\vartheta \quad (56)$$

Finalmente, a condição de que $h(t-\tau) = 0$ para todos os valores de $t < \tau$ é equivalente à condição que $h(\vartheta) = 0$, para $\vartheta < 0$, pode-se então estender o limite inferior da integral na equação (56) para $-\infty$, ou seja:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\vartheta)h(\vartheta)d\vartheta \quad (57)$$

A equação (57) é a própria integral de convolução da função de força $f(t)$ com a Função de Resposta ao Impulso $h(t)$, definida como:

$$x(t) = h(t) * f(t) \quad (58)$$

O símbolo $*$ denota a operação de convolução. Aplicando a transformada de Fourier nos dois lados da equação (58), tem-se:

$$\mathfrak{I}[x(t)] = \mathfrak{I}[h(t) * f(t)] \quad (59)$$

Agora, utilizando o fato de que a transformada de Fourier da convolução no tempo é equivalente ao produto em frequência, tem-se:

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (60)$$

Para o caso de um sistema multi-graus de liberdade, a expressão acima é definida em termos do número de pontos de excitação e de medidas de resposta. Considere um sistema, com m entradas $f_i(t)$ para $i = 1...m$ e r saídas $x_j(t)$ para $j=1...r$. Se o sistema é linear e invariante no tempo, a resposta pode ser calculada a partir da função de resposta ao impulso $h(t)$, conforme discutido por Papoulis (1991). A j -ésima resposta para m entrada arbitrária f_i é dada por:

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{j1}(\tau) f_1(t - \tau) d\tau + \dots + \int_{-\infty}^{\infty} h_{jm}(\tau) f_m(t - \tau) d\tau \quad (61)$$

O componente $h_{ji}(t)$ é a resposta no ponto j para uma entrada impulsiva $\delta(t)$ no ponto i , considerando todas as outras entradas iguais à zero. Em uma forma mais compacta, tem-se:

$$\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [H(\tau)] \{F(t - \tau)\} d\tau \quad (62)$$

Tal que:

$$[H(t)] = [h_{ji}(t)] \text{ para } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, r$$

$$\{X(t)\} = [x_j(t)] \quad j=1, \dots, r$$

$$\{F(t)\} = [f_i(t)] \quad i=1, \dots, m$$

Pré-multiplicando o transposto conjugado da equação (62) por $\{F(t_1)\}$, e assumindo $t = t_2$, tem-se:

$$\{F(t_1)\}\{\overline{X^T}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(t_1)\}\{\overline{F^T(t_2 - \tau)}\}[\overline{H^T(\tau)}]d\tau \quad (63)$$

Calculando a esperança dos dois lados da equação (63), tem-se:

$$[R_{fx}(t_1, t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} [R_{ff}(t_1, t_2 - \tau)][\overline{H^T(\tau)}]d\tau \quad (64)$$

Pós multiplicando equação (62) por $\{\overline{X^T}(t_2)\}$, assumindo $t = t_1$ e calculando a esperança, tem-se:

$$[R_{xx}(t_1, t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} [H(\tau)][R_{xy}(t_1 - \tau, t_2)]d\tau \quad (65)$$

A equação (65) expressa a autocorrelação das saídas do sistema a partir de sua correlação cruzada. Neste caso observa-se que a matriz de autocorrelação depende somente da diferença $\alpha = t_1 - t_2$, substituindo nas equações (64) e (65), tem-se:

$$[R_{fx}(\alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} [R_{ff}(\alpha + \tau)][\overline{H^T(\tau)}]d\tau \quad (66)$$

e

$$[R_{xx}(\alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} [H(\tau)][R_{ff}(\alpha - \tau)]d\tau \quad (67)$$

A densidade espectral de potência da função de correlação do vetor força $\{F(t)\}$ é a matriz quadrada $[S_{ff}(\omega)]$, os elementos desta matriz são formados pela transformada de Fourier dos elementos $R_{ij}(\alpha)$ da matriz de autocorrelação $[R_{ff}(\alpha)]$. Aplicando a transformada de Fourier nas expressões (66) e (67), obtêm-se as expressões (68) e (69).

$$[S_{fx}(\omega)] = [S_{ff}] [H^T(\omega)] \quad (68)$$

e

$$[S_{xx}] = [H(\omega)] [S_{fx}(\omega)] \quad (69)$$

$[H(\omega)]$ é matriz de ordem $m \times r$ com elementos $H_{ij}(\omega)$, obtida através da transformada de Fourier dos elementos de $h_{ij}(t)$ da matriz de resposta ao impulso. Rearranjando estas equações, obtém-se uma terceira expressão para a densidade espectral de saída em função da densidade espectral de entrada, equação (70):

$$[S_{xx}] = [H(\omega)] [S_{ff}] [H^T(\omega)] \quad (70)$$

A equação (70) será essencial na identificação e avaliação da técnica de decomposição no domínio da frequência. A partir desta equação será mostrado como é feita a identificação dos parâmetros modais do sistema a partir de sua resposta.

4.3 DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A relação entre a entrada (excitação) $F(t)$ de um sistema e a saída $X(t)$ conforme discutido no item anterior, pode ser expressa no domínio da frequência, pela equação (71).

$$[S_{xx}(j\omega)] = [\bar{H}(j\omega)] [S_{ff}(j\omega)] [H^T(j\omega)] \quad (71)$$

$[S_{ff}(j\omega)]$ é a matriz densidade espectral de potência (PSD) de entrada e $[S_{xx}(j\omega)]$ é a matriz de densidade espectral de potência de saída (Bendat e Piersol, 1993; Maia, 1997). Para r entradas, $[S_{ff}]$ é de ordem $r \times r$ e a matriz de saída $[S_{xx}]$ é de ordem $m \times m$, sendo m o número de respostas medidas. $[H(j\omega)]$ é a matriz Função de Resposta em Frequência (FRF) de ordem $m \times r$.

Na análise modal baseada apenas na saída é assumido que a excitação seja um ruído

branco Gaussiano de média zero, consequentemente a matriz de densidade espectral de entrada, $[S_{ff}]$, é igual a uma constante C . Portanto, substituindo a equação (38) na equação (71) e a densidade espectral de entrada pela constante C , têm-se:

$$[S_{xx}(j\omega)] = \sum_i^n \sum_l^n \left[\frac{[R]_k}{j\omega - \lambda_K} + \frac{[\bar{R}]_k}{j\omega - \bar{\lambda}_K} \right] C \left[\frac{[R]_s}{j\omega - \lambda_s} + \frac{[\bar{R}]_s}{j\omega - \bar{\lambda}_s} \right]^H \quad (72)$$

O sobrescrito H denota o complexo conjugado. Multiplicando as duas frações parciais por um fator e fazendo uso do teorema das frações parciais, a densidade espectral de saída pode ser reduzida na forma de pólos e resíduos, expressão (73).

$$[S_{xx}(j\omega)] = \sum_{k=1}^n \frac{[A]_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{[\bar{A}]_k}{j\omega - \bar{\lambda}_k} + \frac{[B]_k}{-j\omega - \lambda_k} + \frac{[\bar{B}]_k}{-j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (73)$$

A_k é a k -ésima matriz, de resíduo da densidade espectral de saída. Assim como a matriz de densidade espectral, a matriz de resíduo é de ordem $m \times m$ e é dada pela equação (74).

$$[A_k] = R_K C \left(\sum_{s=1}^n \frac{[R]_k^T}{-\lambda_K - \bar{\lambda}_s} + \frac{[R]_s^T}{-\lambda_K - \lambda_s} \right) \quad (74)$$

A contribuição do resíduo do k -ésimo modo é dada por:

$$[A_k] = \frac{[R]_k C [\bar{R}]_K^T}{2\alpha_K} \quad (75)$$

α_K é o negativo da parte real de $\lambda_K = -\alpha_K + j\omega_K$. No caso de um sistema pouco amortecido o termo $[R]_k C [\bar{R}]_K^T$ torna-se dominante e, portanto, o resíduo passa a ser proporcional ao modo de vibrar do sistema.

$$[A_k] \propto [R]_K C [\bar{R}]_K \quad (76)$$

Substituindo a equação (38) em (76), o resíduo pode ser escrito em termos do k -ésimo modo para uma dada frequência ω , pois apenas um número limitado de modos contribuirá significativamente para o resíduo, tipicamente um ou dois modos.

$$[A_K] = \{\psi\}_K \gamma_K^T C \gamma_K \{\psi\}^T \quad (77)$$

Isso permite fixar o número de modos de interesse e a densidade espectral de saída no caso de sistemas levemente amortecidos, pode ser definida em termos desse conjunto de modos, denotado por $Sub(\varphi)$.

$$[S_{xx}(j\omega)] = \sum_{k=p}^q \frac{d_k \psi_k \psi_k^T}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{d}_k \bar{\psi}_k \bar{\psi}_k^T}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (78)$$

A decomposição modal da matriz espectral é dada em termos dos modos desse Subespaço, os quais formam o conjunto de modos dominantes. A equação (78) leva a resultados similares aos obtidos diretamente pela Equação (71).

4.3.1 Decomposição em Valores Singulares

A técnica de decomposição matricial é utilizada para reduzir uma matriz a uma forma mais simplificada ou canônica. Esta técnica tem apresentado grande importância na engenharia, principalmente na análise computacional de matrizes. Uma das mais importantes técnicas de decomposição de matrizes é a decomposição em valores singulares, que é à base da formulação do algoritmo de identificação usado neste trabalho.

O posto de uma matriz

O conceito de posto de uma matriz está diretamente relacionado com a dependência linear das linhas ou colunas da matriz. Por exemplo, se uma matriz de ordem $n \times n$, possui

linhas linearmente independentes tem-se *posto* n . Se uma linha é combinação linear das outras, tem-se *posto* $n-1$. Em outras palavras, o *posto* de uma matriz é igual ao número de linhas (ou colunas) linearmente independentes. Uma matriz $m \times n$ com $m > n$ possui *posto completo* se possui *posto* n , ou *posto* deficientemente se possui *posto* $< n$. Para uma matriz quadrada, *posto* deficiente implica necessariamente que a matriz é singular, isto é, determinante igual à zero.

Uma forma de se calcular o *posto* de uma matriz é através da eliminação de Gauss. Dada uma matriz $n \times n$ com *posto* $r < n$, tem-se $n-r$ linhas de zeros depois de efetuada a eliminação de Gauss. Supondo que as linhas de uma matriz sejam vetores, afirmar que duas linhas são linearmente dependentes é o mesmo que dizer que os vetores são paralelos. Então, duas linhas são totalmente independentes quando os vetores são perpendiculares ou em um caso mais geral, ortogonais.

Na prática pode-se encontrar algo intermediário entre estes dois extremos, ou seja, os dois vetores comparados podem não ser exatamente paralelos, então as duas linhas da matriz são bem próximas de serem linearmente dependentes, resultando em linhas que não são exatamente zeros após a aplicação da eliminação de Gauss, mas possuem elementos com valores muito pequenos. Estas linhas de números pequenos devem ser comparadas com as outras linhas da matriz a fim de avaliar corretamente o *posto* da matriz. A comparação das linhas da matriz ou vetores não é uma tarefa muito fácil, especialmente para matrizes grandes. O problema se torna mais complicado se os elementos das matrizes forem complexos. É preferível ter um meio para comparar estes vetores na forma escalar. A decomposição de valores singulares permite essa comparação.

Decomposição em valores singulares

Se $[A]$ é real de ordem $m \times n$, a decomposição em valores singulares é dada por:

$$[A] = [U][S][V]^T \quad (79)$$

Onde a matriz $[U]$ é de ordem $m \times m$ e a $[V]$ é de ordem $n \times n$, e ambas as matrizes são ortogonais, de modo que:

$$[U]^T [U] = [U][U]^T = [V]^T [V] = [V][V]^T = [I] \quad (80)$$

$[S]$ é uma matriz diagonal de ordem $n \times n$ (Maia, 1991). Os elementos σ_i desta matriz são chamados de valores singulares da matriz $[A]$, dados por:

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

A relação entre esta decomposição e o *posto* da matriz $[A]$ é dada pelo número de valores singulares que não são iguais à zero. Por exemplo, uma matriz de ordem 3×3 , com uma linha linearmente depende, teria necessariamente algum valor singular igual à zero. A vantagem de se usar SVD para o cálculo do *posto* é que se as linhas da matriz não são totalmente dependentes obtêm-se valores reais de σ_n bem próximos de zero, o que facilita compara-los com os outros valores singulares encontrados na matriz e assim estabelecer um critério para considerar se este valor é linearmente dependente ou não. Se a matriz $[A]$ é complexa, a equação (79) torna-se:

$$[A] = [U][S]\overline{[V]}^T \quad (82)$$

Onde $[U]$ e $[S]$ são matrizes unitárias, ou seja, a designação “unitária” substitui o termo “ortogonal” quando as matrizes são complexas, isto é:

$$[U]^H [U] = [U][U]^H = [V]^H [V] = [V][V]^H = [I] \quad (83)$$

E ainda,

$$[U]^H = [U]^{-1} \text{ e } [V]^H = [V]^{-1} \quad (84)$$

Os valores singulares σ_i são raízes positivas dos autovalores da matriz $[A]^T [A]$, se $[A]$ é real, e raízes $[A]^H [A]$, se $[A]$ é complexa. Desde que $[A]^T [A]$ é simétrica e $[A]^H [A]$ é hermitiana, seus autovalores são sempre reais, então ambas as equações (79) e (82) resultam em valores singulares reais.

Deve-se considerar o caso onde $m \geq n$, pois é mais comum em casos de aplicações em engenharia. Se $m \leq n$, pode-se decompor A^T . As colunas de $[U]$ e $[V]$ são respectivamente os autovetores de $[A][A]^T$ e $[A]^T [A]$, e são chamados de vetores singulares. Por esta razão, os algoritmos usados para calcular a decomposição em valores singulares são similares aos usados para calcular os autovetores e autovalores, o que possibilita o uso do SVD para o cálculo dos autovalores e autovetores de sistemas dinâmicos.

4.3.2 Identificação dos Modos de Vibrar e Amortecimento

Na decomposição no domínio da frequência, uma vez definida a matriz espectral nos pontos discretos de frequência ($\omega = \omega_i$), a mesma é decomposta para cada frequência, utilizando o conceito de decomposição em valores singulares (SVD), como pode ser visto na equação (85). Se a excitação for exatamente um ruído branco e a estrutura for levemente amortecida e apresentar modos geometricamente ortogonais a decomposição da matriz densidade espectral de saída leva a um conjunto de autofunções. Se estas condições não são satisfeitas a técnica ainda pode produzir uma aproximação satisfatória, e em alguns casos ainda melhor do que a análise modal convencional.

$$[S_{xx}(j\omega_i)] = [U_i][S_i][U_i^H] \quad (85)$$

A matriz $[U_i]$ é uma matriz unitária formada pelos vetores singulares u_{ij} e $[S_i]$ é uma matriz diagonal contendo os valores singulares s_{ij} da matriz de densidade espectral de saída nas proximidades de um pico correspondente ao i -ésimo modo. As amplitudes dominantes são devidas àquele modo ou a um outro modo próximo. No caso de um único modo dominante existe apenas um termo na equação (78), portanto o primeiro vetor singular u_{i1} é uma estimativa do próprio modo, equação (86).

$$\hat{\phi} = u_{i1} \quad (86)$$

ou seja, a decomposição da matriz de densidade espectral em valores singulares exatamente no pico máximo de amplitude associados ao respectivo vetor singular, permite a estimativa dos modos de vibrar do sistema. Tem-se ainda que, o primeiro vetor singular de cada linha de frequência próxima ao modo fornece as informações daquele modo e o correspondente valor singular leva a função de densidade espectral de um sistema de um grau de liberdade (1GL) que corresponde àquele modo.

A função densidade espectral de um grau de liberdade é estimada comparando o modo identificado na frequência de ressonância (modo próprio) com os vetores singulares para os pontos de frequência em torno do pico. Quando o vetor singular apresenta uma alta correlação com modo o identificado, este pertence à função densidade do sistema 1GL. A correlação dos vetores neste caso é avaliada a partir do valor do coeficiente MAC-valor (Alemang, 82), que é calculado para cada linha de frequência. Uma vez identificado à frequência em que nenhum vetor singular possui MAC-valores acima de um dado valor pré-definido, a procura por partes coincidentes com a função de densidade espectral é terminada e as linhas de frequências restantes são completadas com zeros.

A partir da identificação da função de densidade espectral do sistema de 1GL, pode-se obter a frequência natural e o amortecimento do referido modo, transformando a função

densidade espectral para o domínio do tempo, utilizando a transformada de Fourier inversa.

Identificado a função de densidade espectral de um grau de liberdade correspondente ao r -ésimo modo, o coeficiente de amortecimento é obtido utilizando o conceito de decremento logarítmico. Primeiramente todos os extremos r_k correspondentes aos picos e vales da função de autocorrelação são encontrados e o decremento logarítmico δ é dado pela expressão (87):

$$\delta = \frac{2}{k} \ln \left(\frac{r_0}{|r_k|} \right) \quad (87)$$

r_0 é o valor inicial da função de autocorrelação e r_k é o k -ésimo extremo. O decremento logarítmico é obtido por regressão linear e o fator do amortecimento é calculado pela expressão (88):

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2 + 4\pi^2)}} \quad (88)$$

Um procedimento similar é adotado para a determinação das frequências naturais não amortecidas. Com o auxílio da regressão linear, obtida a partir dos vales e picos da função de autocorrelação de 1GL, construída para o cálculo do fator de amortecimento, é possível encontrar o período e assim a frequência natural amortecida. Encontrada a frequência natural amortecida e o fator de amortecimento é possível calcular a frequência natural não amortecida, equação (87).

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (87)$$

CAPÍTULO 5

Simulação

Nesta primeira etapa, a avaliação da técnica de decomposição no domínio da frequência, será feita utilizando dados simulados. A utilização de dados simulados é fundamental, pois permite ao usuário ter o conhecimento exato dos parâmetros modais utilizados no modelo e assim estabelecer uma base de dados de referência para a avaliação da metodologia proposta.

Neste caso, as matrizes de massa e rigidez do sistema serão obtidas utilizando o método de elementos finitos, e a resposta do sistema será simulada através de rotinas já disponíveis no software comercial MATLAB®. Estas simulações são baseadas nos modelos de espaço de estado do sistema.

5.1 IDENTIFICAÇÃO DE UM SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Neste item a técnica de decomposição no domínio da frequência será avaliada

utilizando um sistema massa-mola amortecido de dois graus de liberdade, Figura 5.6.

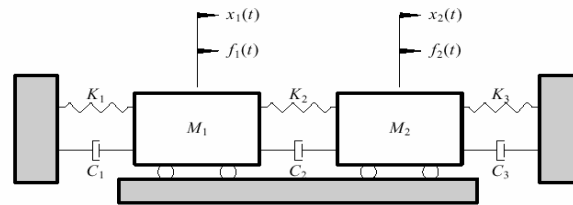


Figura 5.6 – Sistema de dois graus de Liberdade

As matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema são:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \quad K = (10^6) * \begin{bmatrix} 1.2 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Para a simulação da resposta do sistema será utilizado um modelo de espaço de estado discreto, construído a partir das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. No apêndice I é apresentada uma breve discussão da formulação de espaço de estado utilizada na simulação dos dados. Com base neste modelo será gerada a resposta do sistema utilizando sub-rotinas disponíveis no software comercial MATLAB®. Neste caso, a entrada do sistema será um ruído branco Gaussiano de média zero. A Figura 5.7 mostra as respostas do sistema para uma entrada aplicada na massa M_1 .

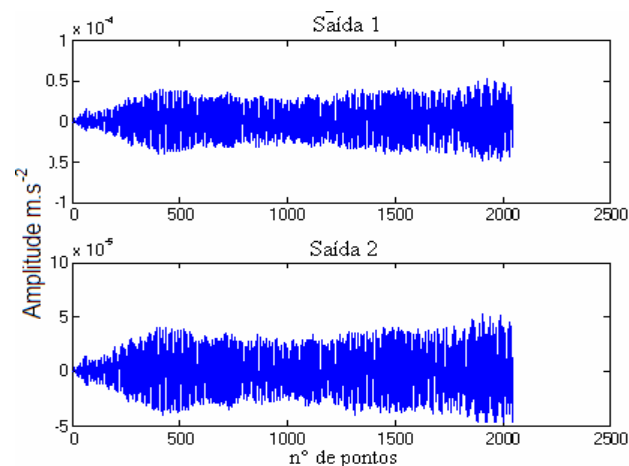


Figura 5.7 – Resposta do sistema de dois graus de liberdade.

Uma vez definida a resposta do modelo, os parâmetros modais são estimados a partir da matriz densidade espectral de saída (S_{xx}). A Figura 5.8 mostra a função de densidade espectral de potencial, medida em M_1 .

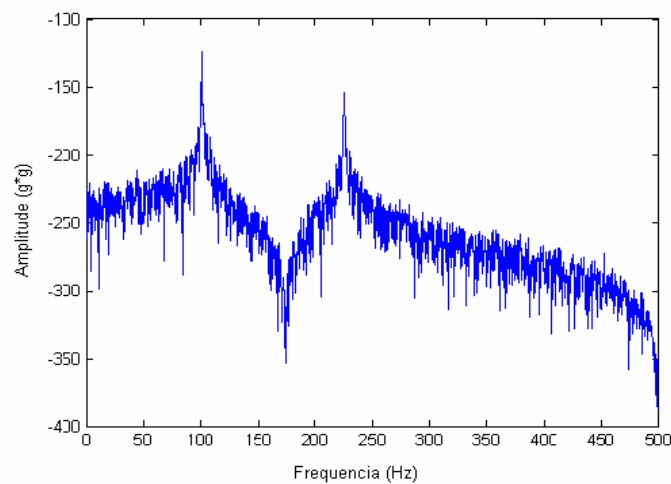


Figura 5.8 – Função de densidade espectral de saída da estrutura.

A decomposição em valores singulares da matriz de densidade espectral de saída é feita para um conjunto de frequências discretas em torno dos picos de amplitude correspondente a cada modo. A Figura 5.9 mostra o gráfico da função densidade espectral estimada para o 1º modo.

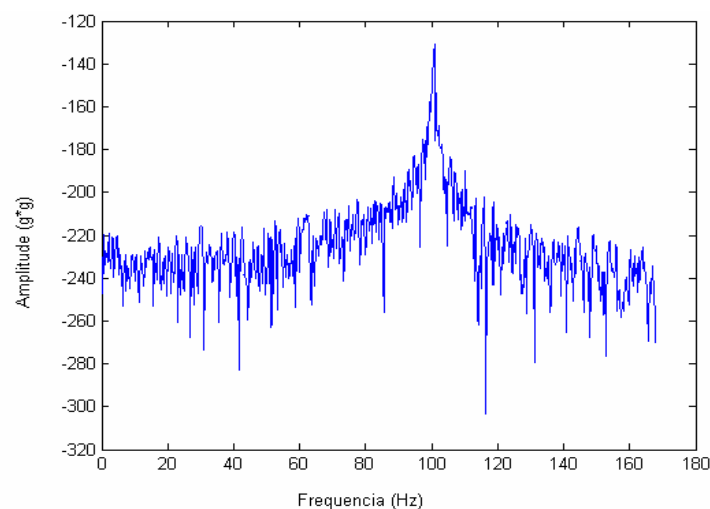


Figura 5.9 Decomposição em valores singulares da densidade espectral (1º modo).

A decomposição da matriz densidade espectral em valores singulares para cada linha de frequência, associados ao respectivo vetor singular permite a estimativa dos modos de vibrar do sistema. O primeiro vetor singular de cada linha de frequência próxima a um dado modo fornece as informações daquele modo, conforme discutido anteriormente. Foram utilizados valores de MAC superiores a 0,5 na estimativa das funções de densidades espectrais correspondentes ao sistema de um grau de liberdade. A Tabela 5.1 mostra os valores estimados pela técnica de decomposição no domínio da frequência para os dois primeiros modos e os compara com os dados originais (referência). Neste caso os dados de referência são obtidos diretamente das matrizes de massa e rigidez do modelo, resolvendo o problema de autovalor/autovetor. A comparação dos modos é feita a partir do cálculo dos MAC-valores entre o modo estimado e o correspondente modo de referência.

Tabela 5.1 – Comparação entre os parâmetros estimados e os de referência.

Modos	Exato f_1 (Hz)	Estimado $\hat{f}_1$ (Hz)	Diferença (%)	MAC
1º modo	100.60	100.65	0.05	0.9999
2º modo	225.07	225.17	0.04	0.9998

Identificados os valores singulares da função de densidade espectral a mesma é transformada para o domínio do tempo para a identificação dos fatores de amortecimento do sistema. A Figura 5.10 mostra a transformada inversa da densidade espectral estimada para o 1º modo, conforme discutido no capítulo 4, que equivale à resposta livre de um sistema de um grau de liberdade no domínio do tempo. O amortecimento é obtido aplicando o conceito de decremento logarítmico, equações (80) e (81) para um sistema de (1GL). De maneira análoga é estimada a razão de amortecimento do segundo modo.

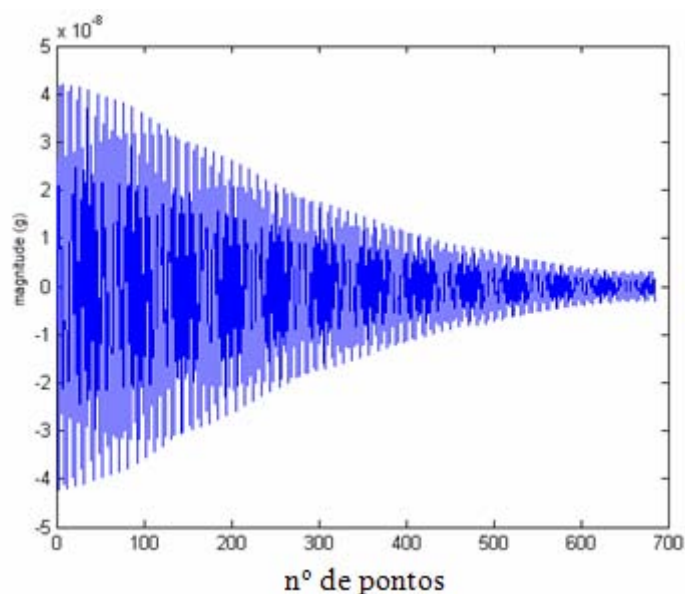


Figura 5.10 – Transformada inversa de Fourier da função de valores singulares (1º modo).

A Tabela 5.2 mostra a comparação dos valores de amortecimento utilizados na simulação dos dados e os valores estimados a partir da Decomposição no Domínio da Frequência. Os valores obtidos, conforme ilustrado, apresentam-se bem próximos dos valores utilizados na geração dos dados, com uma diferença abaixo de 7%.

Tabela 5.2 – Fatores de amortecimento exatos e estimados.

Modos	<i>Exato</i> ζ	<i>Estimado</i> $\hat{\zeta}$	<i>Erro</i>
1º modo	0,01	0,0097	3 %
2º modo	0,01	0,0093	7 %

5.2 IDENTIFICAÇÃO DE UMA ESTRUTURA TIPO “FRAME”

Neste segundo teste, o modelo é um pouco mais complexo, uma estrutura do tipo *frame* foi utilizada para a simulação dos dados. A estrutura é feita de barras de aço (ABNT 1010) ocas e apresenta dimensões de 0.4 m de comprimento por 0.3m de largura por 0.7m de

altura. A seção de área transversal das barras horizontais $(20 \times 20 \times 1) \times 10^{-3}$ m, a seção de área transversal das barras verticais $(30 \times 20 \times 0.8) \times 10^{-3}$ m e a massa total da estrutura é 6 kg. As matrizes de massa e rigidez da estrutura foram obtidas pelo método de elementos finitos. A estrutura foi discretizada com elementos de viga, contendo seis graus de liberdade por nó, e a resposta foi calculada a partir das matrizes de espaço de estado do modelo, assumindo amortecimento proporcional as matrizes de massa e a rigidez.

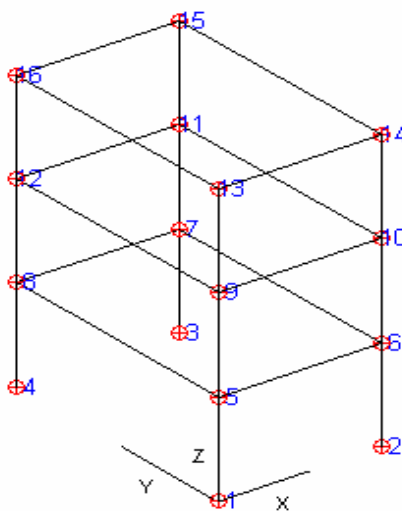


Figura 5.11 – Estrutura do tipo “frame”.

A Figura 5.11 mostra a geometria e os pontos de medição. As respostas foram definidas assumindo que o modelo é excitado por uma entrada aleatória. Diferentemente do item anterior, a estrutura não será excitada por ruído branco Gaussiano de média zero, mas sim por um sinal aleatório, de densidade espectral S_{ff} . Este teste busca avaliar a metodologia para uma entrada que não seja necessariamente um ruído branco.

As respostas foram simuladas utilizando o modelo de espaço de estado, considerando entrada aleatória aplicada no ponto 2 da estrutura na direção x . Por conveniência, as respostas foram tomadas apenas na direção coincidente com a direção de excitação (eixo x).

As respostas do modelo foram simuladas na faixa de frequência de 0 a 400 Hz, utilizando 2049 pontos. Essa faixa de frequência inclui os três primeiros modos de vibrar do

modelo. A partir dos sinais de saída (respostas) foram calculadas as matrizes de densidade espectral de saída (S_{xx}). A Figura 5.12 mostra a densidade espectral de potência coletada no ponto 14, direção x.

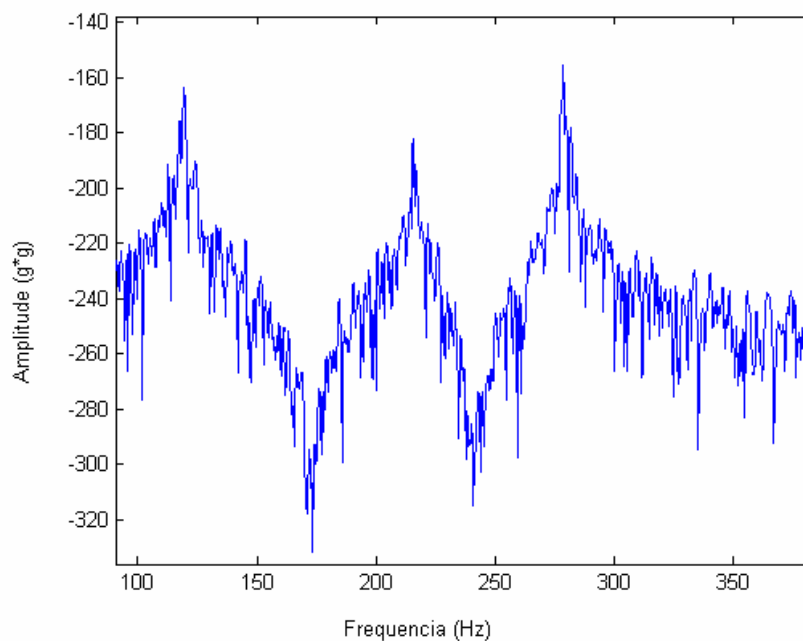


Figura 5.12 – Densidade espectral de saída da estrutura.

A Figura 5.13 mostra o gráfico da função de densidade estimada para o 1º modo. Neste caso, foram utilizados valores de Mac superiores a 0.5.

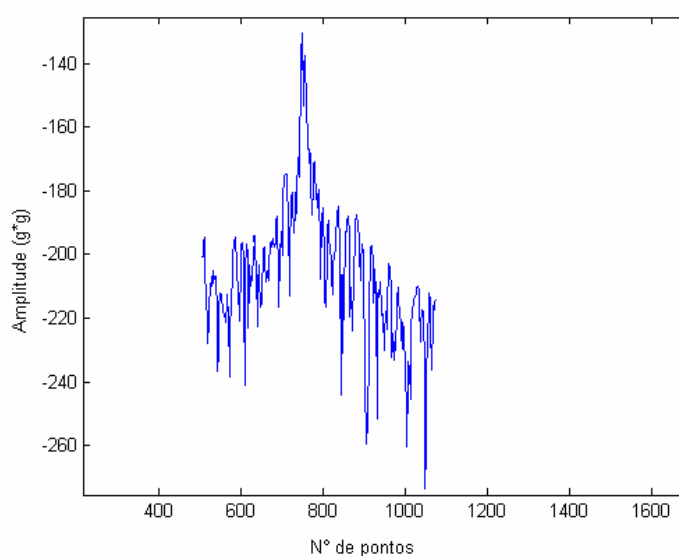


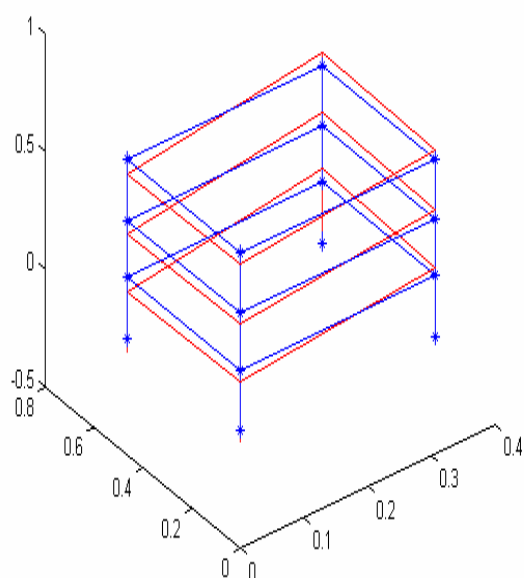
Figura 5.13 – Decomposição em valores singulares da matriz densidade espectral.

A Tabela 5.3 mostra a comparação entre os dados de referência e os dados estimados utilizando a técnica de decomposição no domínio da frequência. A comparação dos modos é feita através do cálculo dos MAC-valores entre o modo estimado e o seu correspondente modo de referência.

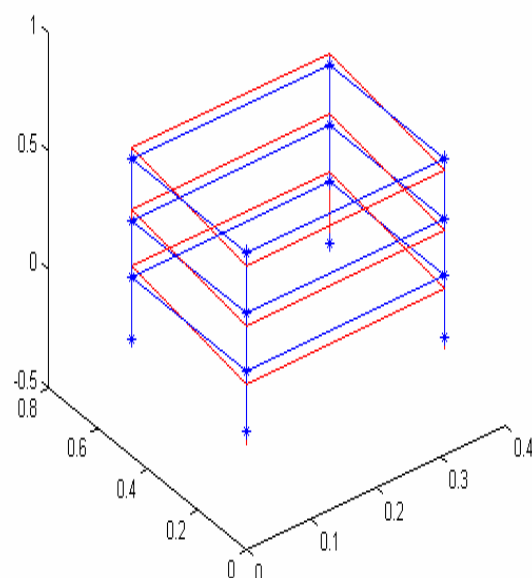
Tabela 5.3 – Comparação entre os parâmetros estimados e de referência.

Modos	Simulado $f_1(\text{Hz})$	Estimado $\hat{f}_1(\text{Hz})$	MAC
1º modo	119.4	119.8	0.9999
2º modo	215.1	215.4	0.9998
3º modo	278.9	279.3	0.9999

A Figura 5.14 ilustra os dois primeiros modos de vibrar da estrutura, identificados a partir da técnica da decomposição no domínio da frequência.



(a) primeiro modo.



(b) segundo modo.

Figura 5.14 – Modos de Vibrar da estrutura.

Definida a decomposição em valores singulares da matriz densidade espectral, passou-se a estimativa das razões de amortecimento. A Figura 5.15 mostra a resposta do modelo equivalente de um grau de liberdade estimada a partir da decomposição da matriz densidade espectral para o primeiro e segundo modos, respectivamente. Uma vez definida as respostas, é estimado as razões de amortecimento.

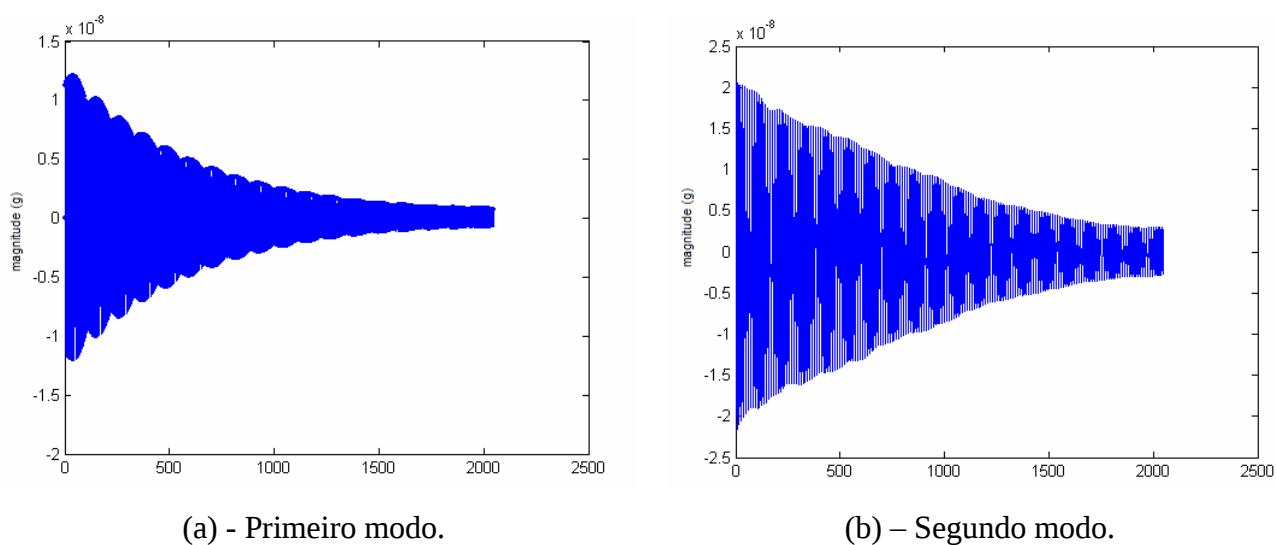


Figura 5.15 – Transformada inversa de Fourier da função de valores singulares.

A Tabela 5.4 mostra uma comparação entre as razões de amortecimento utilizados para simulação do modelo e os valores estimados. Os valores obtidos, como no caso anterior, são próximos dos valores utilizados na simulação dos dados, com erros máximos da mesma ordem.

Tabela 5.4 – Fatores de amortecimento simulados e estimados.

Modos	Exato ζ	Estimado $\hat{\zeta}$	Erro
1º modo	0.0027	0.0025	7.41%
2º modo	0.0015	0.0014	6.67%
3º modo	0.0012	0.0013	8.33%

Os resultados obtidos mostraram que a técnica é capaz de estimar os parâmetros modais do modelo sem medir a entrada do sistema com uma boa precisão. A discrepância máxima observada na identificação da razão de amortecimento, esta diretamente associada ao número de médias coletados dos sinais observados. Neste teste procurou-se fazer o menor número de médias do sinal, de forma que este apresentasse uma forte contaminação por ruído. Esta análise permitiu que se avaliasse a robustez da técnica de identificação proposta. É importante ressaltar, que com o aumento do número de médias, o erro encontrado diminui drasticamente.

Entretanto observando a literatura conclui-se que mesmo com uma forte contaminação por ruídos, os erros desta ordem na identificação do amortecimento são bastante razoáveis.

O estudo de casos simulados foi de grande importância na avaliação de novas metodologias, pois possibilitaram identificar as potencialidades e deficiências dos algoritmos propostos de forma rápida e versátil. Contudo, é imprescindível que o próximo passo seja a verificação da metodologia com base em dados experimentais, coletados de estruturas físicas reais.

CAPÍTULO 6

Testes Experimentais

Nos capítulos anteriores foram apresentadas as bases teóricas da técnica de Decomposição no Domínio da Freqüência. Exemplos simulados foram utilizados para a avaliação prévia da metodologia em diversas situações, onde foram levantadas e discutidas as principais dificuldades e limitações para a identificação dos parâmetros modais.

Neste capítulo serão apresentados os estudos de dois testes experimentais. No primeiro caso, utilizou-se uma estrutura do tipo “frame” que poderia ser o esqueleto de um prédio de três andares simplificado. No segundo caso, a estrutura é um pouco mais complexa, trata-se da estrutura real de um mini-carro, utilizado em competições universitárias – Projeto Mini-Baja.

A identificação dos parâmetros modais das estruturas reais, foi feita utilizando a decomposição no domínio da freqüência (DDF) e técnicas clássicas de análise modal baseadas na relação entrada-saída. Os resultados foram comparados visando uma avaliação das potencialidades da técnica proposta.

6.1 ESTRUTURA DO TIPO “FRAME”

O modelo avaliado é uma estrutura do tipo *frame*, que foi construída em laboratório utilizando tubos de aço de seção quadrada, soldados de forma a ter o esqueleto de um prédio de três andares em modelo reduzido. O fator de escala utilizado foi 1:10, ou seja, a estrutura é equivalente à décima parte de um prédio. Para a simplificação do modelo não foram simulados os efeitos de pré-tensão existentes em uma estrutura real deste porte, como por exemplo, o peso suportado pela estrutura em cada piso (laje) e outros, resumidamente esta é uma representação grosseira que tem caráter apenas ilustrativo de como uma estrutura de um prédio poderia ser avaliado.

Neste teste a estrutura foi excitada por um sinal aleatório, o que permitiria simular alguns tipos de excitações, as quais o prédio poderia estar sujeito. Em condições reais a estrutura estaria sujeito a excitações de caráter aleatório provocadas pelo vento, pessoas em movimento e outros. A Figura 6.16 mostra uma visão geral da bancada experimental utilizada no teste.



Figura 6.16 – Bancada experimental.

Em um primeiro momento, os parâmetros modais da estrutura foram identificados através da análise modal experimental clássica, ou seja, os parâmetros modais foram identificados a partir das FRF(s) relação entrada/saída. Os resultados obtidos com esta abordagem foram tomados como referência para o estudo e a avaliação dos parâmetros modais extraídos com o uso da técnica de decomposição no domínio da frequência baseada apenas nas respostas do modelo.

Paralelamente aos testes experimentais, desenvolveu-se um modelo de elementos finitos da estrutura, que foi utilizado tanto para auxiliar no planejamento dos experimentos quanto para a verificação da consistência dos resultados experimentais.

6.1.1 Testes Preliminares

Os testes contidos nesta seção incluem desde a montagem da estrutura de testes até a estimativa preliminar de alguns parâmetros modais. A Tabela 6.5 apresenta os materiais e instrumentos utilizados para realização dos testes experimentais.

A montagem do “*set up*” experimental consiste em providenciar uma suspensão adequada da estrutura, fixar os acelerômetros nos devidos pontos, conectar os cabos dos acelerômetros e do *shaker* no sistema de aquisição/geração, e por fim configurar o sistema de aquisição e geração da excitação. O sinal de excitação é produzido pelo gerador de sinais do software *SignalCalc Ace*, e neste caso, foi utilizado um sinal aleatório.

Um importante aspecto observado na montagem do experimento foi à interferência da suspensão nos resultados dos testes. A suspensão deve representar adequadamente a condição de suporte desejada, neste caso, a condição livre-livre. Vários testes foram efetuados variando-se as características da suspensão, neste caso cabos elásticos, buscando uma condição que apresentasse a menor interferência possível.

Tabela 6.6 – Materiais e instrumentos utilizados no experimento

Itens	Especificações
Sistema de aquisição	SignalCalc Age – 32 bits Fabricante: Data Physics Corporation Frequência máxima de operação: 20Khz 2 entradas e 2 saídas
Acelerômetro axial	Fabricante: PCB Piezotronics, Inc Sensibilidade: 97,8 mV/g Erro de amplitude: 0.1%
Condicionador de sinais	Ganho: 1, 10 e 100V Banda de frequência: 0,15 Hz a 100kHz Fonte de alimentação: Baterias
Shaker	Frequência de operação: 15 a 5000 Hz Fator de transmissão: 15 N/A Pico máximo: ± 3 mm
Célula de carga	Fabricante: PCB Piezotronics, Inc Sensibilidade: 48,45 mV/lbf Erro: 0.18 %
Microcomputador	Processador: Pentium / 128 MB – RAM
Estrutura	Tipo: Frame Fabricação: aço ABNT 1010
Elásticos	

Um outro fator a ser observado é como o *shaker* será ser conectado à estrutura, ou seja, como será realizada a transmissão da excitação ao sistema em estudo. Neste sentido, é imprescindível que a força seja aplicada no ponto e na direção desejadas. Uma solução viável encontrada foi acoplar a estrutura e o *shaker* por meio de uma haste flexível. A Figura 6.17 ilustra o acoplamento utilizado.

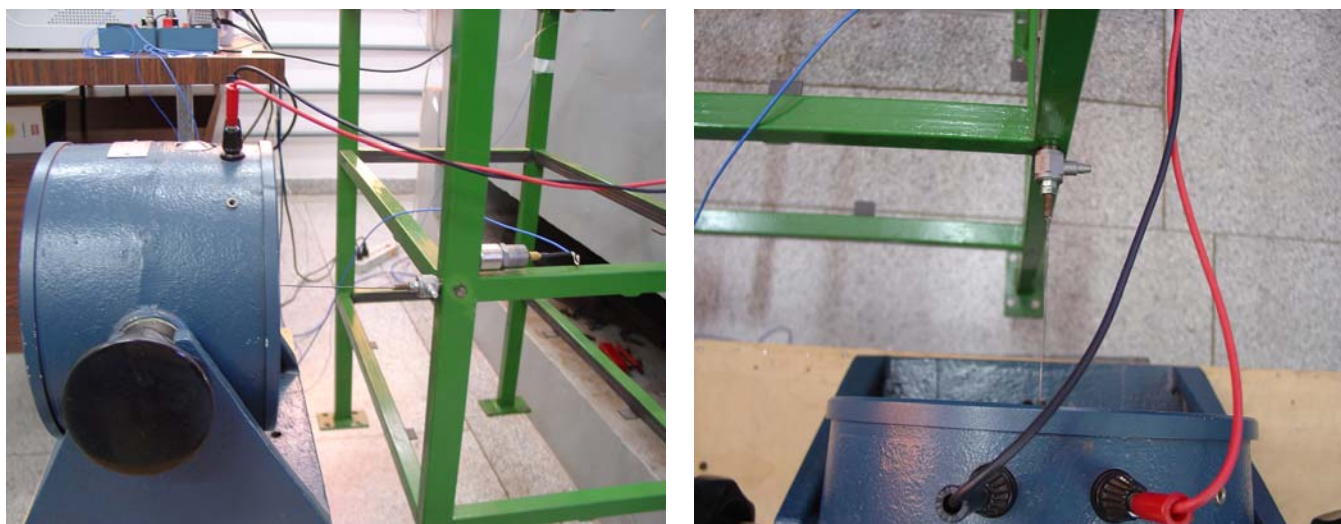


Figura 6.17 – Acoplamento flexível Shaker – estrutura.

Deve-se considerar também a fixação do acelerômetro no ponto exato de medida, pois a fixação irregular do acelerômetro pode acarretar distorções no sinal medido. Neste caso, a malha foi gerada levando em consideração a topologia dos pontos de medidas do modelo experimental, de tal forma que todos os pontos de medida tivessem um nó correspondente no modelo analítico. Uma discussão mais aprofundada sobre os efeitos da suspensão, acoplamento do Shaker à estrutura e a fixação dos acelerômetros será apresentada na próxima seção.

6.1.2 Discretização da Estrutura e Fixação dos Sensores

A estrutura é feita de tubos de aço (ABNT 1010) de seção quadrada e apresenta dimensões de 0.4 m de comprimento por 0.3m de largura por 0.7m de altura. A seção de área transversal das barras horizontais $(20 \times 20 \times 0.8) \times 10^{-3}$ m, a seção de área transversal das barras verticais $(30 \times 20 \times 0.5) \times 10^{-3}$ m e a massa total da estrutura é 5,5 kg. A Tabela 6.7 resume as principais propriedades da estrutura.

Tabela 6.7 – Propriedades do material.

Propriedades	Valores
Módulo de Elasticidade	$2,1 \cdot 10^{11} \text{ [N/m}^2\text{]}$
Massa específica	$7850 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$
Coeficiente de Poisson	0,30

Definida a condição de ensaio da estrutura, o próximo passo é a definição do modelo experimental. A Figura 6.18 mostra a estrutura real e o modelo experimental discretizado. O modelo mostra os pontos de medidas onde os sinais de saída da estrutura foram capturados.

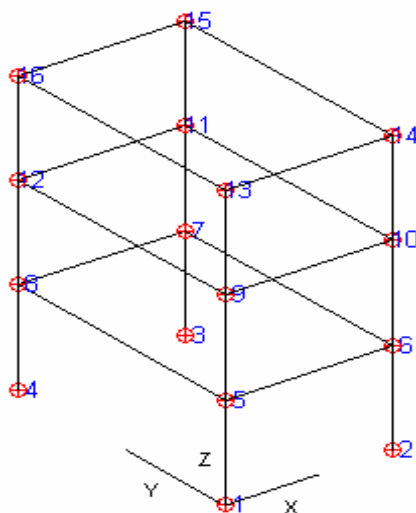


Figura 6.18 – Esqueleto da estrutura analisada, o símbolo “ $\oplus$ ” representa os pontos em que serão colocados os acelerômetros.

6.1.3 Modelo Analítico

A estrutura foi modelada utilizando o software comercial Ansys® versão acadêmica. Inicialmente, foram utilizados elementos de viga 3D e elementos de massa concentrada. A Figura 6.19 mostra a discretização da malha formada por 24 elementos de viga e 4 elementos de massa concentrada que representam os pés da estrutura. O modelo contém 16 nós, sendo

que cada nó possui 6 graus de liberdade, translação e rotação em x,y e z, resultando em um modelo de 96 graus de liberdade.

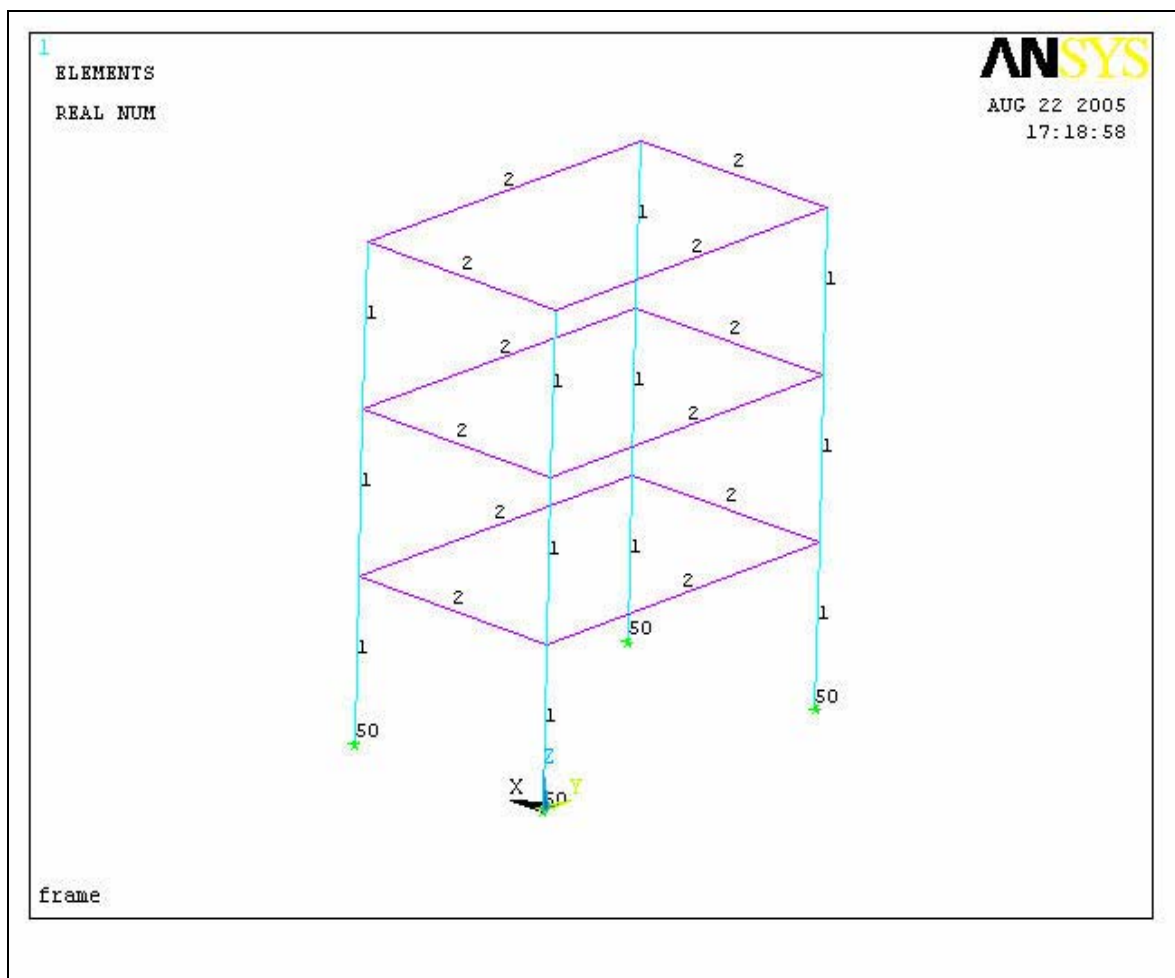


Figura 6.19 – Estrutura modelada com elementos de viga.

A utilização de elementos de viga mostrou não ser adequada para a modelagem desta estrutura, pois os resultados, por mais que se refinasse a malha do modelo, apresentaram uma grande discrepância com os dados experimentais obtidos no pré-teste da estrutura. Um segundo modelo foi proposto, em que as barras foram modeladas utilizando elementos de placa (Shell), resultando em um modelo com 192 elementos de áreas, como mostrada na Figura 6.20

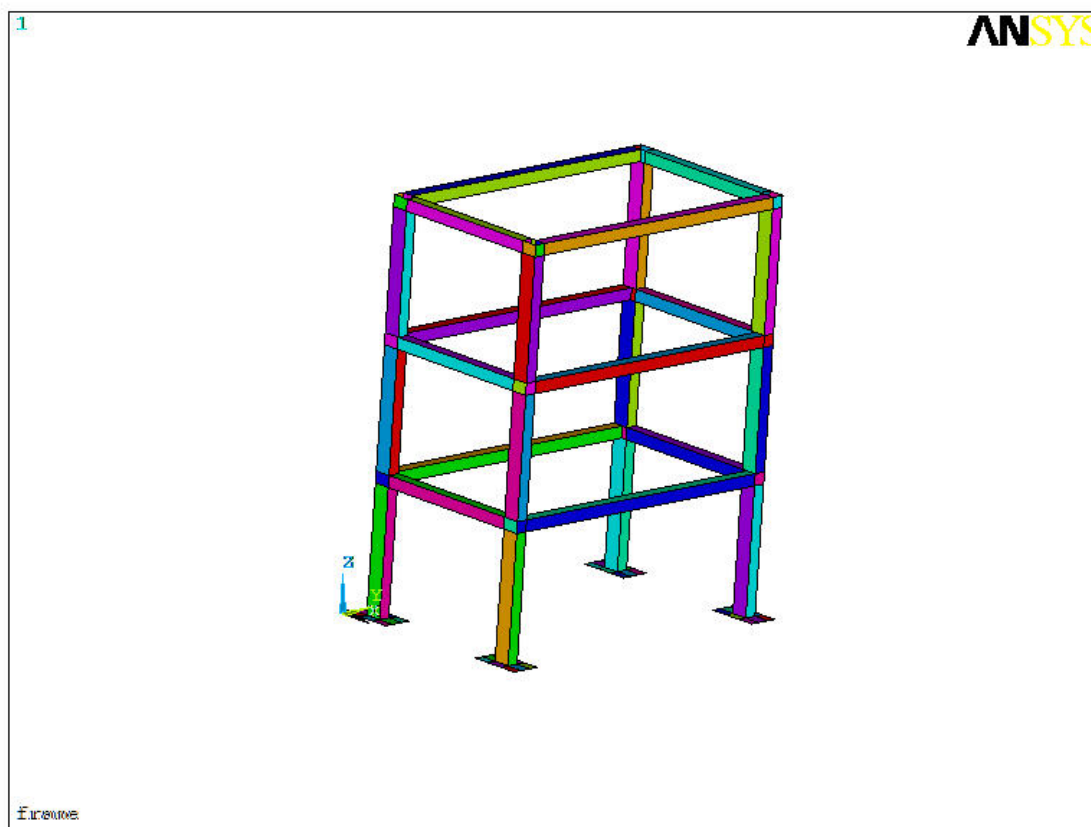


Figura 6.20 – Áreas da estrutura do tipo frame.

A utilização destes elementos na modelagem da estrutura mostrou-se satisfatório para a representação do modelo espacial. Neste caso, a malha foi gerada levando em consideração a topologia dos pontos de medidas do modelo experimental, de tal forma que todos os pontos de medida tivessem um nó correspondente no modelo analítico.

6.1.4 Modelo Experimental

A Figura 6.21 mostra esquematicamente o aparato experimental utilizado, neste caso, a estrutura será excitada por um sinal aleatório produzido pelo software Signal CalcAce. Este sinal passará por um amplificador de sinais e assim chegará ao Shaker, que por sua vez transmitirá a força de excitação através de uma haste flexível instrumentada com uma célula de carga, destinada a registrar o sinal de entrada.

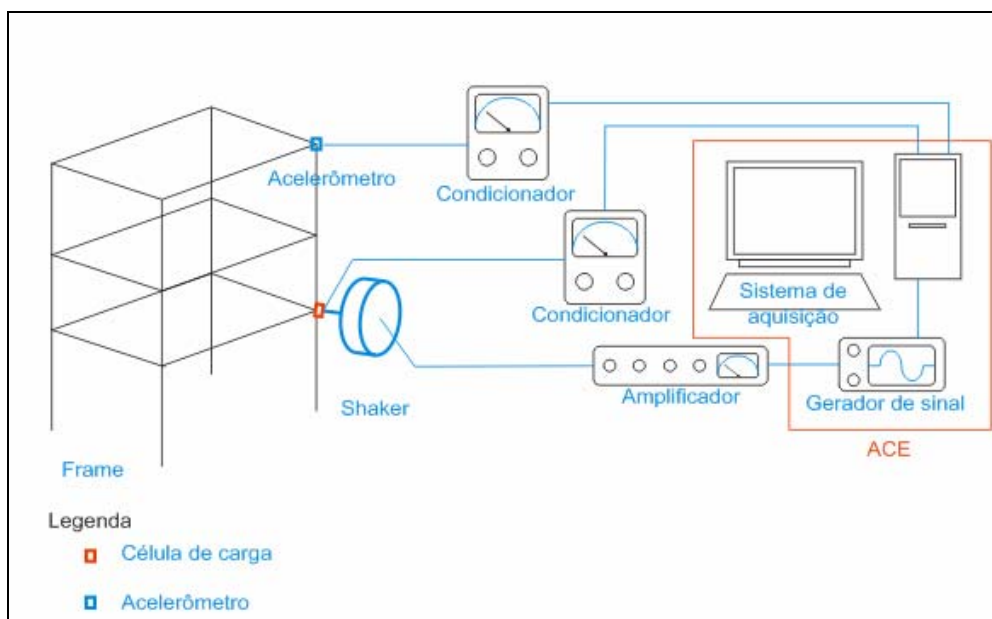


Figura 6.21 – Esquema da instrumentação utilizada no ensaio experimental.

A Figura 6.22 mostra o “set up” utilizado para a realização dos testes experimentais.



Figura 6.22 – “Set up” experimental

Uma vez concluída a fase de montagem do aparato experimental, partiu-se para a realização de alguns “checks” antes de se iniciar a aquisição propriamente dita. Esta etapa consistiu na consideração de vários fatores, como: o comportamento das FRF(s), e respectivas funções de coerência, visualização gráfica da parte real e imaginária da resposta para o ponto de excitação (“Drive Point”), testes de reciprocidade e outros.

Após a realização destes testes, em um primeiro momento foram capturados os dados

para realização da análise modal com base na relação entrada-saída. Posteriormente, foram capturados apenas os dados de saída para realização da análise modal baseada apenas nas respostas.

6.1.5 Testes Experimentais

Neste teste a entrada e as respostas foram capturadas por sensores fixados nos pontos de medição da estrutura, mostrada na Figura 6.18. Neste teste utilizou-se uma frequência de amostragem de 125 Hz, definida com 800 linhas espectrais, o que inclui os três primeiros modos de vibrar do sistema. Neste caso, o sistema de aquisição fornece diretamente as FRF(s) a partir dos sinais captados pelos acelerômetros e pela célula de carga.

Os parâmetros modais da estrutura neste caso, foram identificados a partir das FRF(s) utilizando um método de identificação bem consolidado na análise modal clássica, o método Ibrahim. A Figura 6.23 mostra a Função de Resposta em Frequência medida no próprio ponto de excitação.

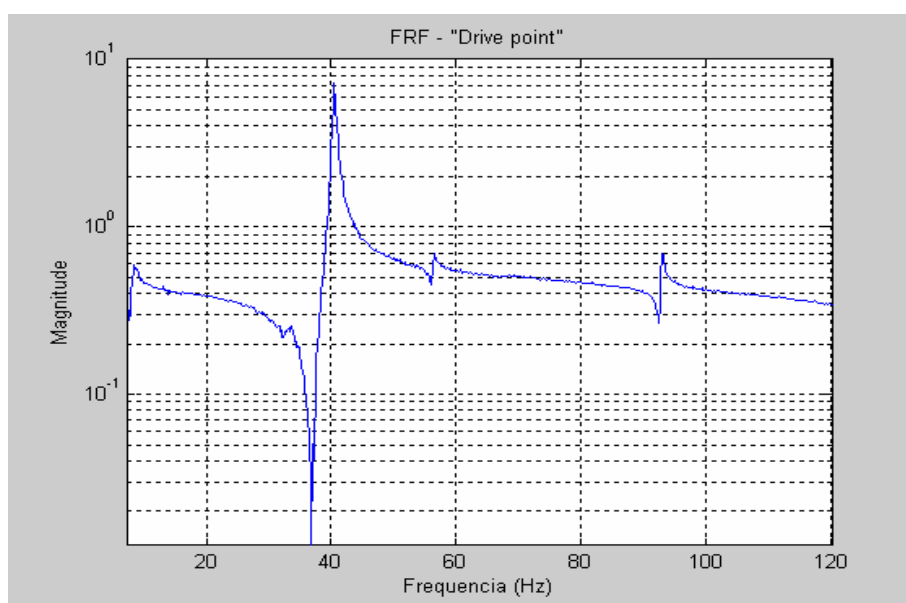


Figura 6.23 – FRF(s) coletadas na estrutura de testes.

Os resultados obtidos com o método de Ibrahim serão comparados com os parâmetros obtidos no modelo de elementos finitos. A Tabela 6.8 compara os dados estimados utilizando o método de Ibrahim com o modelo analítico.

Tabela 6.8 – Comparação dos métodos de identificação Analítico e Experimental.

Modelo experimental Ibrahim		Modelo analítico Elementos Fin.	Diferença	
Modo	f_e (Hz)	f_a (Hz)	$\frac{\omega_A - \omega_E}{\omega_E} (\%)$	MAC(%)
1°	40,46	39,23	3,00	85,71
2°	56,24	56,11	0,23	88,13
3°	92,87	94,88	2,11	96,01

Os resultados mostram uma pequena diferença das frequências estimadas pelo método de Ibrahim com relação ao modelo analítico e uma boa correlação dos modos. Isso é evidenciado pelos altos valores de MAC. A Figura 6.24 mostra os índices de correlação (MAC-Valores) dos modelos, utilizando um gráfico de barras.

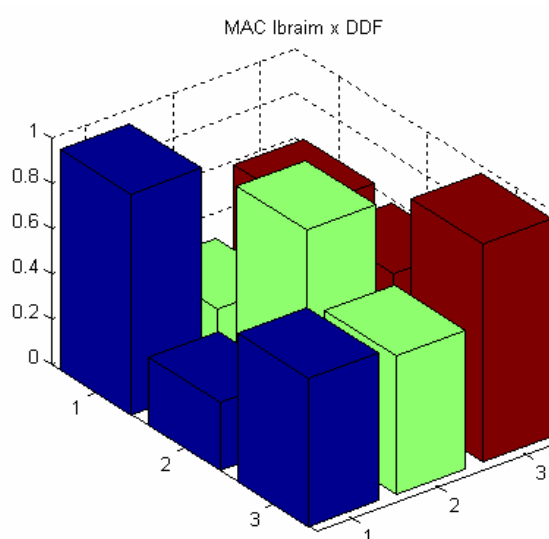


Figura 6.24 – Comparação dos modos de vibrar

Os resultados mostram a identificação dos parâmetros obtidos a partir das relações entrada-saída medida do modelo. A comparação dos resultados evidencia uma boa correlação entre o modelo analítico e experimental, o que aumenta a confiança nos testes. Esses resultados serão posteriormente utilizados para comparação e avaliação da proposta de identificação baseada apenas nas respostas, utilizando a técnica de Decomposição no Domínio da Frequência.

6.1.6 Análise Modal Utilizando Apenas a Resposta da Estrutura

O procedimento para aquisição dos dados foram os mesmos utilizados na seção anterior, diferindo apenas no fato de que somente as respostas da estrutura foram medidas. Neste caso, célula de carga foi mantida presa à estrutura para evitar qualquer modificação na força de excitação, com relação ao teste anterior.

Assim como na análise convencional a estrutura foi excitada com um sinal aleatório. Os sinais foram capturados simultaneamente através de dois acelerômetros e posteriormente processados pelo próprio sistema de aquisição para gerar as respectivas funções de autocorrelação e de correlação cruzada e as respectivas funções de densidade espectral.

A Figura 6.25 mostra uma típica densidade espectral definida com 800 linhas espectrais e capturada na faixa de frequência de 0 a 125 Hz, o que inclui os três primeiros modos de vibrar do sistema.

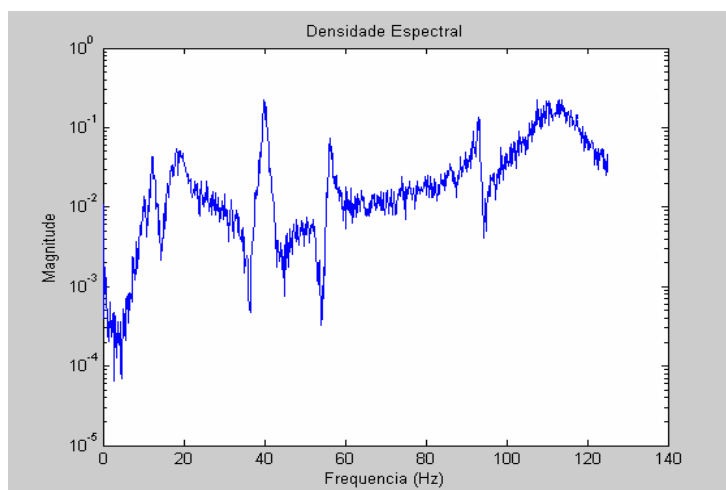


Figura 6.25 – Função de densidade espectral experimental.

Obtidas as densidades espectrais passou-se a fase de identificação dos parâmetros modais, agora utilizando a técnica de decomposição no domínio da frequência implementada. O programa desenvolvido é modular e possui varias interfaces gráficas, de forma que o usuário possa observar e analisar os dados nas varias fases do processo. A Figura 6.26 mostra a densidade espectral e a primeira interface gráfica criada para auxiliar o usuário.

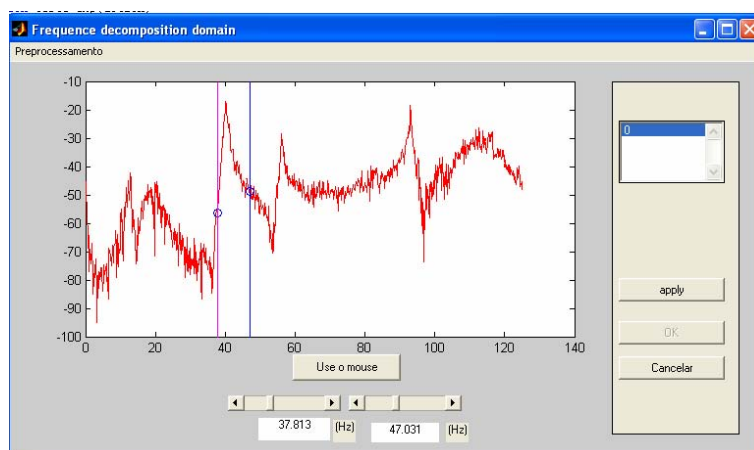


Figura 6.26 – Interface gráfica – Decomposição no Domínio da Frequência

A interface permite ao usuário escolher a área de análise em torno do pico de frequência de interesse, visualizar a frequência natural correspondente a aquele pico e optar por proceder ou não a identificação dos parâmetros correspondente àquela faixa de frequência. O usuário pode ainda optar pela seleção de todos ou alguns picos de interesse de uma única vez.

Selecionado o pico de interesse é calculada a decomposição em valores singulares (SVD) das respectivas funções de densidades para as linhas de frequências em torno do pico de ressonância.

Uma vez estimado o modo de vibrar referente ao pico de interesse, é feita uma busca dos vetores singulares, em torno do pico de frequência correlacionado com o modo. Essa correlação é definida para MAC-valores maiores que um dado valor pré-definido pelo usuário. Neste caso, o índice utilizado foi 0.5 e o processo termina quando é encontrado algum valor singular com correlação inferior a este índice.

Cada vetor singular obtido tem um correspondente valor singular, os quais definem uma função de valores singulares, corresponde à função de densidade espectral de um sistema de um grau de liberdade para o respectivo modo.

Identificado à função de densidade espectral do sistema de 1GL, pode-se obter a frequência natural e o amortecimento do referido modo, transformando a função densidade espectral para o domínio do tempo, utilizando a transformada inversa de Fourier. O amortecimento é obtido com base no conceito de decremento logarítmico. A Figura 6.27 mostra a função de densidade espectral do sistema de 1GL e sua respectiva transformada inversa.

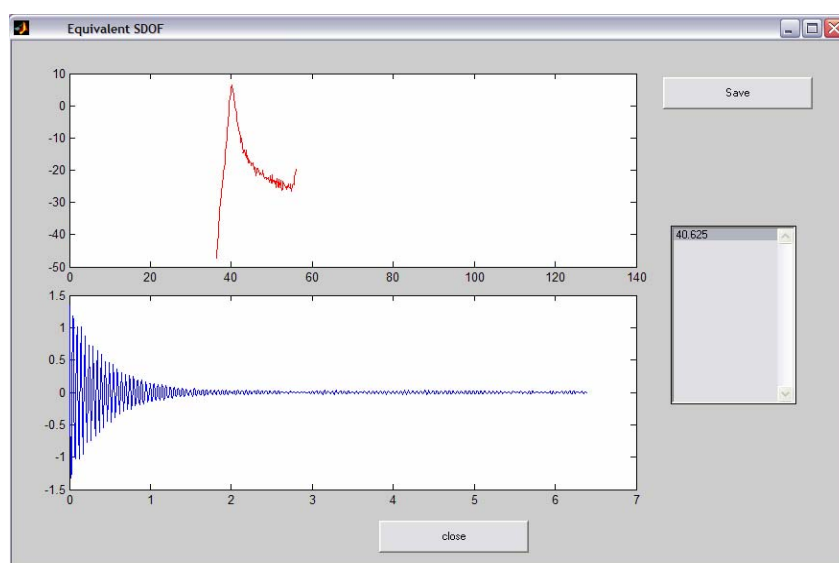


Figura 6.27 – Densidade espectral do sistema de 1GL e respectiva transformada.

A Tabela 6.9 compara os dados estimados utilizando a técnica de decomposição no domínio da frequência com o modelo analítico.

Tabela 6.9 – Correlação entre os modos obtidos pelo modelo analítico e experimental.

Modelo experimental		Modelo analítico	Diferença	
FDD		Elementos Fin.		
Modo	ω_E	ω_A	$\frac{\omega_A - \omega_E}{\omega_E}(\%)$	MAC(%)
1°	40,46	39,23	3,01	91,70
2°	56,25	56,11	0,25	85,13
3°	92,96	96,88	4,04	96,01

Os resultados mostram uma pequena diferença das frequências estimadas pela técnica de decomposição no domínio da frequência com relação ao modelo analítico e uma boa correlação dos modos. Isso é evidenciado pelos altos valores de MAC. A Figura 6.28 mostra os índices de correlação (MAC-Valores) dos modelos, utilizando um gráfico de barras.

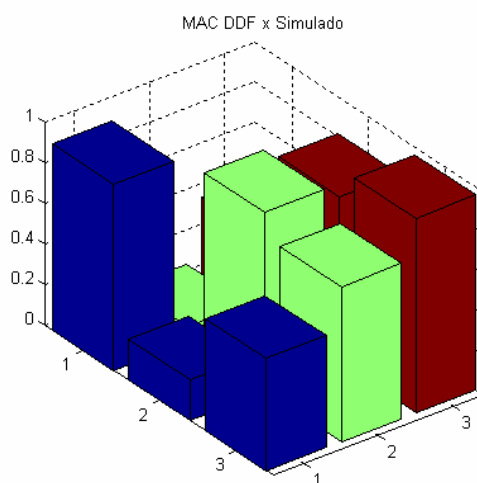
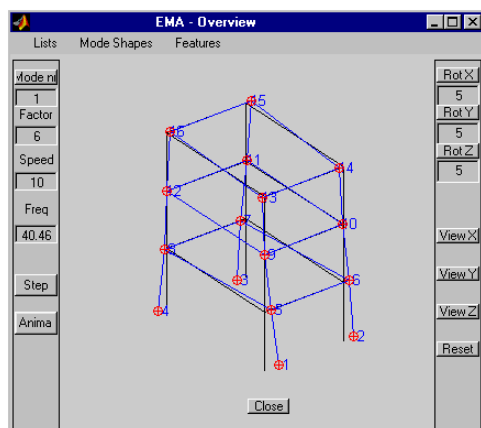
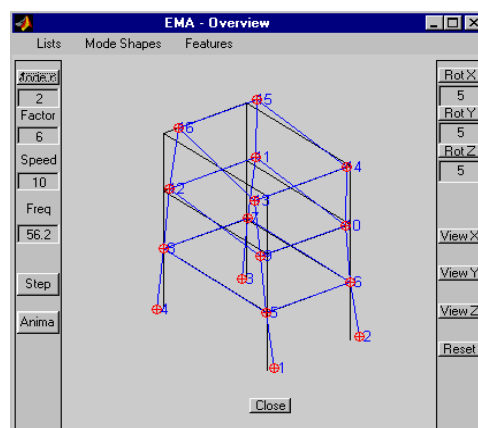


Figura 6.28 – Comparação dos modos de vibrar

O programa permite também a visualização dos modos, tanto em movimento como quadro a quadro. Também é possível comparar a estrutura deformada com a estrutura não deformada conforme pode ser visto na Figura 6.29. Ambos os modos foram identificados com a técnica de Decomposição no Domínio da Frequência.



(a) primeiro modo (azul).



(b) segundo modo (azul).

Figura 6.29 – Modos de vibrar identificados.

Os resultados obtidos mostraram que a técnica é capaz de estimar os parâmetros modais do modelo sem medir a entrada com uma boa precisão. Nota-se que os erros encontrados foram da mesma ordem de grandeza dos obtidos a partir das relações entrada-saída medida do modelo. A comparação dos resultados evidencia uma boa correlação entre o modelo analítico e experimental, tanto usando a técnica clássica de identificação (método de Ibrahim) como usando a decomposição no domínio da frequência.

6.2 ESTRUTURA DO PROJETO MINI-BAJA

Neste teste é discutida a aplicação da metodologia para identificação de um sistema

que apresenta características de estruturas automobilísticas. A estrutura é parte de um veículo desenvolvido e montado pelos alunos da Unesp – Ilha Solteira para competições (Projeto Mini-Baja). A plataforma (gaiola) do veículo será analisada utilizando a abordagem clássica de identificação baseada na relação entrada-saída medidas no sistema e a análise modal baseada apenas na resposta do modelo. A análise modal convencional será utilizada como base para avaliação da qualidade dos parâmetros modais obtidos com as medições das respostas.

Diferentemente dos casos simulados, nos testes experimentais não se tem o conhecimento exato dos parâmetros modais da estrutura de testes, o que dificulta a avaliação e validação da metodologia. Por esta razão, os resultados obtidos em um primeiro momento utilizando análise modal clássica serão comparados entre si, utilizando vários métodos de identificação e partir daí serão estabelecidos os critérios de desvios, para posterior comparação com o método proposto. A estrutura também foi modelada por elementos finitos, visando fornecer subsídios para o planejamento dos experimentos e para avaliar os resultados experimentais obtidos.

6.2.1 Estrutura

A estrutura consiste em um modelo espacial formado por 79 tubos de três diferentes espessuras e 8 barras, conectados entre si por soldas metálicas. A Figura 6.30 mostra o veículo em condições reais de operação e a estrutura (gaiola) ensaiada em laboratório.



Figura 6.30 – Estrutura em condições reais e em laboratório.

A Figura 6.31 mostra as dimensões da estrutura, e os vários componentes utilizados na montagem da mesma. Os componentes estão dispostos em diferentes cores para proporcionar uma melhor identificação dos elementos utilizados na construção da estrutura de teste.

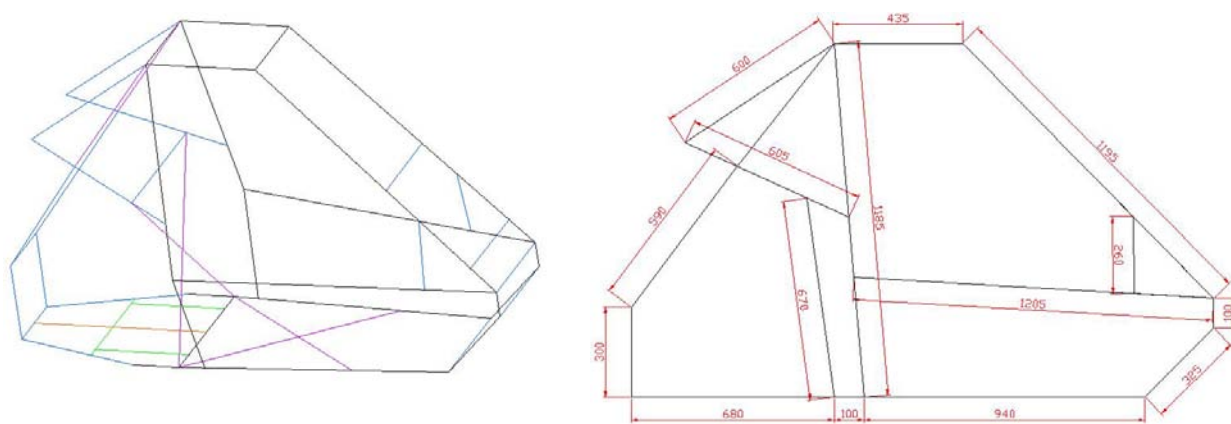


Figura 6.31 – Dimensões da estrutura de testes.

A Tabela 6.10 resume as principais propriedades do material utilizado na construção da estrutura, cada um desses elementos é identificado por uma determinada cor, Figura 6.31.

Tabela 6.10 – Propriedades do material.

Propriedades	Tubo (1) (preto)	Tubo (2) (Azul)	Tubo (3) (Roxo)	Barra (1) (verde)	Barra (2) (Laranja)
Modulo de Elasticidade [N/m ²]	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$
Massa especifica [kg/m ³]	7860	7860	7860	7860	7860
Área da seção transversal [m ²]	$2,30 \cdot 10^{-4}$	$3,66 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-4}$	$6,12 \cdot 10^{-4}$	$3,80 \cdot 10^{-4}$
Coefficiente de Poisson	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3

6.2.2 Modelo Analítico por Elementos Finitos

O modelo analítico da estrutura foi gerado pelo método de elementos finitos, utilizando elementos de viga 3D e massas concentradas. A estrutura foi dividida em tubos e barras de seção transversal retangular com diferentes dimensões (propriedades), formando cinco regiões distintas (mesmas propriedades) conforme mostrado na Figura 6.32.

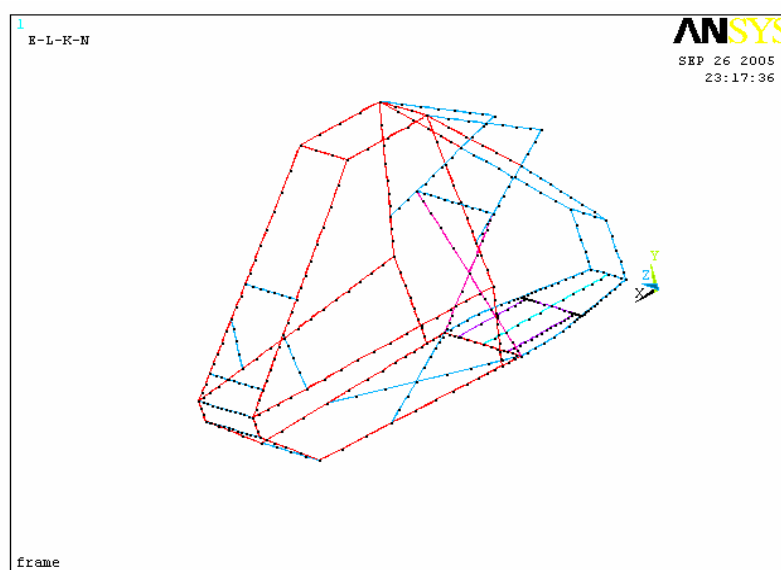


Figura 6.32 – Modelo Analítico

Os elementos de soldas nas conexões das barras e tubos, bem como pinos e pequenas abas de chapa soldadas aos tubos foram considerados como elementos de massa concentrada. A estrutura foi discretizada com 429 nós e 460 elementos.

Um aspecto a ser considerado no modelo são as conexões entre os componentes. As soldas entre os tubos são componentes estruturais que apresentam parâmetros físicos e geométricos difíceis de serem obtidos corretamente, além disso, podem influenciar no amortecimento do sistema, concentrando os efeitos de amortecimento nestas regiões da estrutura. Isso caracteriza o que se denomina *amortecimento não proporcional*, tornando-se um obstáculo para obtenção de modelos de elementos finitos mais representativos. O modelo foi elaborado e reavaliado vários vezes, as propriedades e resultados foram checados e redefinidos buscando a obtenção de um modelo consistente. A tabela 6.6 mostra as 10 primeiras frequências naturais do modelo. Esses resultados foram inclusive comparados com os dados preliminares e utilizados como subsídios para os testes experimentais.

Tabela 6.6 - Frequências naturais obtidas com o modelo de Elementos Finitos.

Modos	Frequências (Hz)
1°	64,45
2°	72,37
3°	77,31
4°	84,15
5°	95,76
6°	100,13
7°	103,58
8°	109,13
9°	115,34
10°	118,14

6.2.3 Testes Preliminares

Os testes referidos nesta seção, incluem desde testes para a escolha da melhor forma de suspensão da estrutura para simular a condição livre-livre até a estimativa preliminar dos parâmetros modais. Os instrumentos utilizados são os mesmos do teste anterior. Alguns detalhes referentes à montagem do experimento são apresentados a seguir.

Suspensão da estrutura.

Neste experimento a condição de suporte utilizada será a condição livre-livre, para isso, a estrutura foi suspensa usando cabos flexíveis. A condição de suporte deve ser bem definida e repetitivamente experimentada, pois esta montagem pode influenciar negativamente na identificação das propriedades dinâmicas da estrutura. Para verificar se a rigidez das molas associada com a massa da estrutura suspensa teria uma frequência natural muito abaixo da faixa de frequência de interesse, e também para minimizar o amortecimento introduzido pelo sistema de suspensão na estrutura, foram feitos vários testes observando a resposta do conjunto estrutura suspensão. Nestes testes, buscou-se analisar a “qualidade” das FRF(s) medidas, procurando definir a montagem que minimize os erros devidos as propriedades do suporte (condição livre-livre). A Figura 6.33 mostra o aparato utilizado para manter a estrutura suspensa, para isso foram utilizados cabos elásticos.



Figura 6.33 – Estrutura suspensa, condição livre-livre.

Ponto de excitação.

A escolha do ponto de excitação foi definida a partir da realização de testes em diferentes pontos, avaliando as características das FRF(s) na faixa de frequência de interesse. Numa primeira avaliação foi utilizada uma excitação impulsiva aplicada com o uso de um martelo instrumentado, que permitiu uma rápida varredura em todos os prováveis pontos de excitação. A Figura 6.34(a) mostra os detalhes da excitação utilizando um martelo instrumentado (entrada impulsiva) para encontrar os melhores pontos de excitação. Nesta etapa, também foi utilizado um Shaker para avaliar como a estrutura responde a entradas aleatórias.

Com base nas características das respostas (função de coerência, quantidade de ruído e etc) para os dois tipos de entrada. Observou-se que o ponto 47 seria o mais adequado para conectar o Shaker, Figura 6.34(b). Devido a limitações nos instrumentos de teste, a estrutura será excitada apenas na direção horizontal.



(a) Excitação impulsiva.



(b) Ponto de excitação

Figura 6.34 – Excitação da estrutura de testes.

Haste e acoplamento do Shaker com a estrutura.

A maioria das técnicas de excitação estrutural requer algum contato físico entre estrutura de testes e o instrumento usado para provocar uma excitação. O objetivo é transmitir uma excitação controlada para a estrutura no ponto e na direção pré-definidos.

O Shaker deve ser acoplado à estrutura por meio de uma conexão, que deve evitar a distorção do sinal de entrada do sistema. Para evitar este fenômeno, uma haste flexível é geralmente usada para conectar o Shaker à estrutura de teste. A haste flexível deve ser designada de modo que a mesma tenha flexibilidade em movimentos laterais e de rotação entre as duas extremidades, mas seja rígida axialmente para transmitir a excitação. Para a estrutura em questão, foi utilizada uma haste flexível de aço, de aproximadamente 0.001 m de secção transversal a qual foi definida após alguns testes preliminares. A Figura 6.35 mostra o Shaker, a haste flexível e a célula de carga acoplada a estrutura.



Figura 6.35 – Acoplamento Shaker- Estrutura.

6.2.4 Discretização da Estrutura e Fixação dos Sensores

A Figura 6.36 mostra a estrutura real e o modelo experimental discretizado. Os pontos de medida foram definidos em todas as conexões das barras. Devido as limitações do sistema de aquisição de dados, as respostas da estrutura foram medidas apenas na direção da força de excitação.

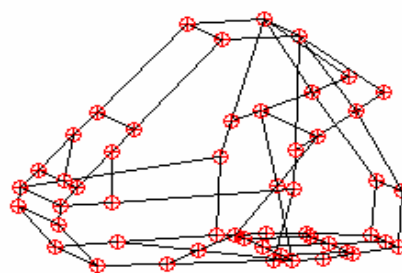


Figura 6.36 – Modelo discretizado.

Um aspecto importante a ser considerado na discretização da estrutura é a fixação correta do sensor na estrutura. A fixação irregular pode acarretar distorções no sinal medido, por isso, a colagem dos acelerômetros na estrutura deve garantir que as medidas sejam

coletadas na direção desejada. Devido ao fato da estrutura de teste ser constituída de tubos, a colagem dos acelerômetros não pôde ser feita diretamente sobre estes elementos. Isto impossibilitaria a fixação correta dos sensores. Portanto, nas localidades onde os acelerômetros seriam fixados os tubos foram previamente lixados e a estes foram adaptadas pequenas bases de alumínio, para melhorar a condição de fixação, tornando os resultados mais confiáveis.

6.2.5 Modelo Experimental

O aparato experimental e o procedimento para aquisição dos dados foram os mesmos utilizados no item 6.1.4, e mostrados na Figura 6.21. Como no caso anterior a estrutura será excitada por um sinal aleatório produzido pelo software Signal CalcAce. A Figura 6.37 mostra a estrutura do Mini Carro e a instrumentação utilizada nos testes.



Figura 6.37 – “Set up” experimental.

Uma vez concluída a fase de montagem do aparato experimental, partiu-se para a realização de alguns “checks” antes de se iniciar a aquisição propriamente dita. Esta etapa consistiu na consideração de vários fatores, como: o comportamento das FRF(s), e respectivas

funções de coerência, visualização gráfica da parte real e imaginária da resposta para o ponto de excitação (“Drive Point”), testes de reciprocidade e outros. As Figura 6.38 e Figura 6.39 mostram alguns “checks” realizados na estrutura de testes.

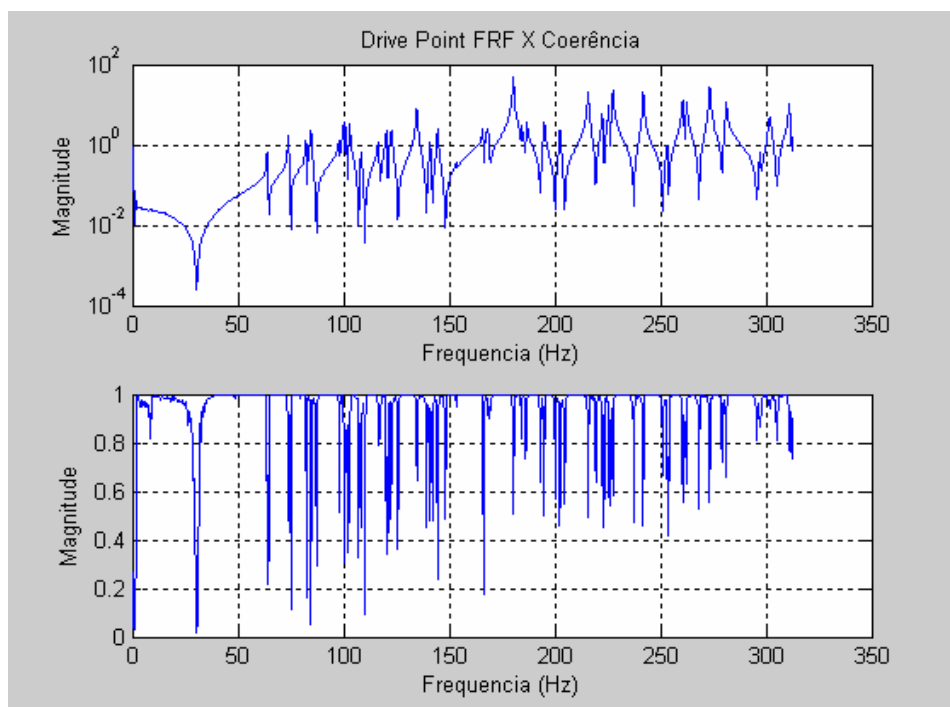


Figura 6.38 – “Drive Point” FRF x Coerência

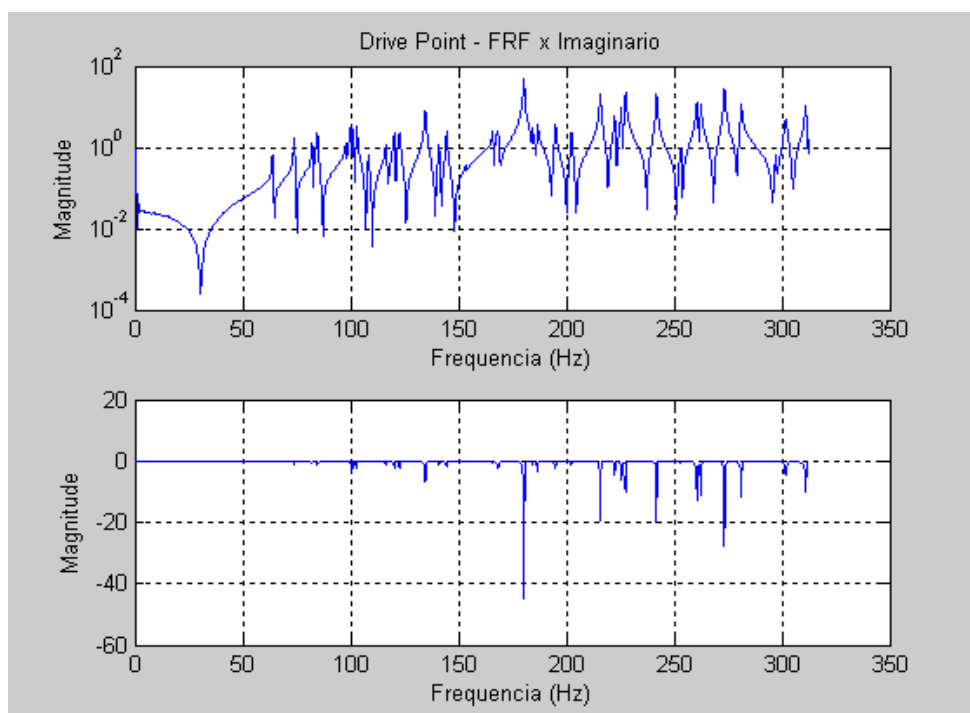


Figura 6.39 – “Drive point” FRF x Imaginário.

Os sinais de resposta foram captados em uma faixa definida entre 0.0 e 325.5 Hz, com uma resolução de 1600 linhas espectrais. Nesta faixa de frequência coletada, estima-se que existam aproximadamente vinte modos de vibrar. Por motivos de simplificação da análise e devido ao fato de que em condições reais os modos de frequências mais baixas são geralmente os mais importantes, optou-se por estudar apenas os primeiros 10 modos naturais. A faixa de frequência utilizada nestes testes experimentais foi de 0 a 150 Hz.

Após a realização destes testes, em um primeiro momento foram capturados os dados para análise modal com base na relação entrada-saída. Posteriormente, foram capturados apenas os dados de saída para realização da análise modal baseada apenas nas respostas.

6.2.6 Testes Experimentais

Neste teste a entrada e as respostas foram capturadas por sensores fixados nos pontos de medição da estrutura, mostrada na Figura 6.36. Neste teste utilizou-se uma frequência de amostragem de 150 Hz, definida com 800 linhas espectrais, o que inclui aproximadamente os dez primeiros modos de vibrar do sistema. Neste caso, o sistema de aquisição fornece diretamente as FRF(s) a partir dos sinais captados pelos acelerômetros e pela célula de carga.

Os parâmetros modais da estrutura, foram identificados a partir das FRF(s) utilizando três métodos de identificação já bem consolidados na análise modal clássica, o método Ibrahim¹, Peak Picking² (PP) e Razão Polinomial² (RP). A Figura 6.40 mostra a Função de Resposta em Frequência medida no próprio ponto de excitação.

¹ Programa de análise modal experimental desenvolvido pelo orientador.

² Created at Los Alamos National Laboratory by Chuck Farrar, Scott Doebling e Phil Cornwell.

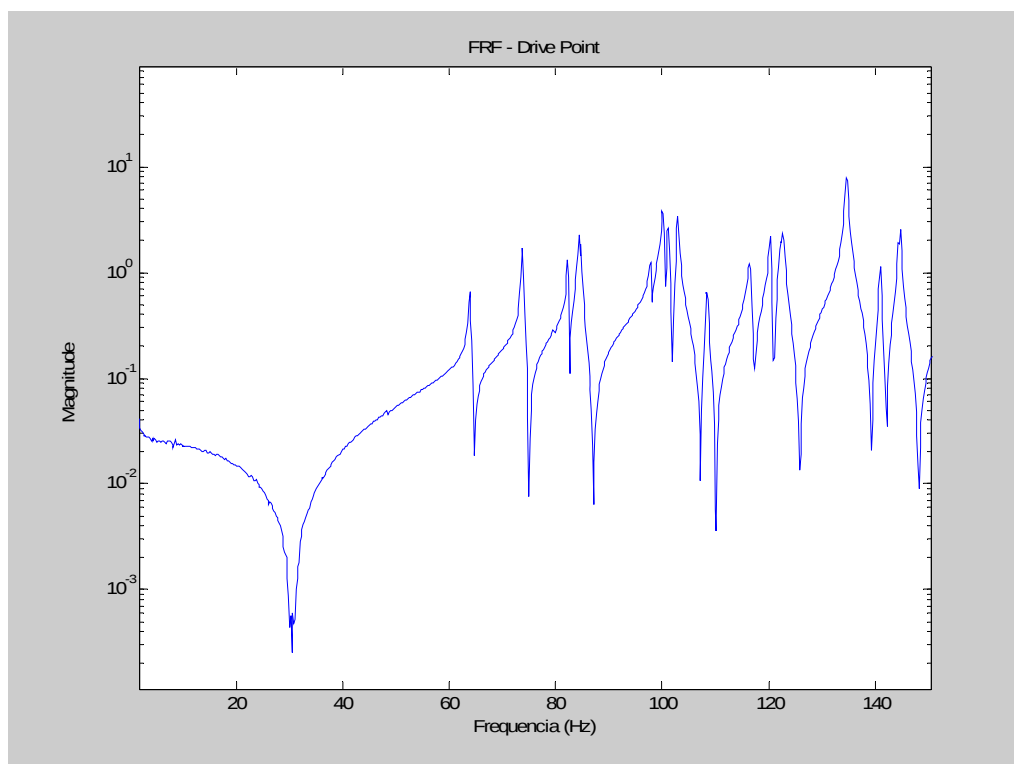


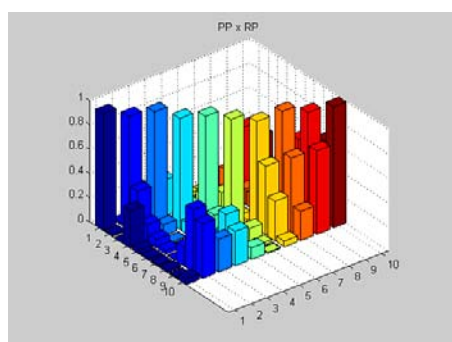
Figura 6.40 – Função de Resposta em Frequência.

A Tabela 6.7 compara os dez primeiros modos de vibração identificados utilizando os métodos de Ibrahim, Razão polinomial e Peak Picking.

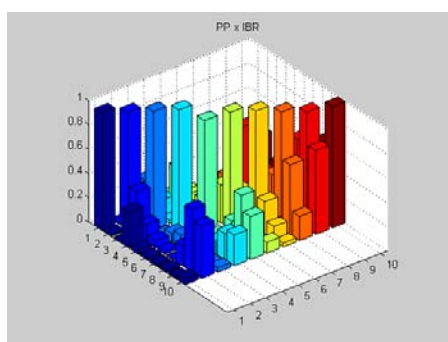
Tabela 6.7 – Comparação dos métodos experimentais.

Modo	Frequência (Hz)			Diferença Frequência (%)			MAC-Valor - Exp. x Exp.		
	ω_{IB}	ω_{PP}	ω_{RP}	$\omega_{IB} \times \omega_{PP}$	$\omega_{IB} \times \omega_{RP}$	$\omega_{PP} \times \omega_{RP}$	IB x PP	IB x RP	PP x RP
1°	63,79	63,86	63,80	0.11	0.01	0.09	0.9615	0.9967	0.9550
2°	73,80	73,82	73,80	0.02	0.00	0.02	0.9618	0.9940	0.9294
3°	79,71	79,75	79,63	0.05	0.10	0.15	0.9690	0.9929	0.9660
4°	82,25	82,22	82,25	0.03	0.00	0.03	0.9799	0.9830	0.9100
5°	97,86	97,93	97,90	0.07	0.04	0.03	0.8900	0.9947	0.9251
6°	100,18	100,20	100,17	0.02	0.01	0.03	0.9546	0.9190	0.8960
7°	102,78	102,85	102,86	0.06	0.07	0.01	0.9628	0.9100	0.8763
8°	108,33	108,40	108,44	0.06	0.1	0.03	0.9526	0.9942	0.9580
9°	116,44	116,55	116,52	0.09	0.06	0.02	0.9489	0.9996	0.9468
10°	120,24	120,53	120,56	0.24	0.26	0.02	0.9932	0.9996	0.9930

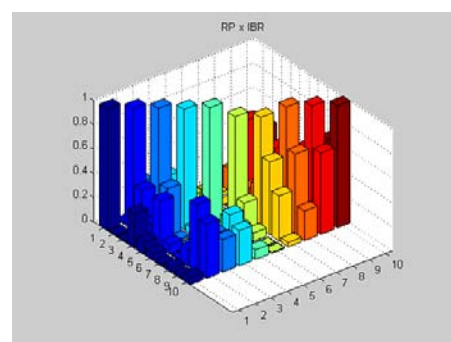
Como pode ser visto na Tabela 6.7, existe uma variação no valor das frequências naturais estimadas pelos diversos métodos clássicos da ordem de 0.3%. Para os modos estimados os Mac-valores estão todos acima de 0.87. A Figura 6.41 mostra os índices de correlação (MAC-Valores) dos modelos, utilizando um gráfico de barras. É importante mencionar que estes resultados serão usados como referencias na avaliação dos resultados estimados com o da técnica de Decomposição no Domínio da Frequência (DDF).



(a) – Ibrahim x P. P.



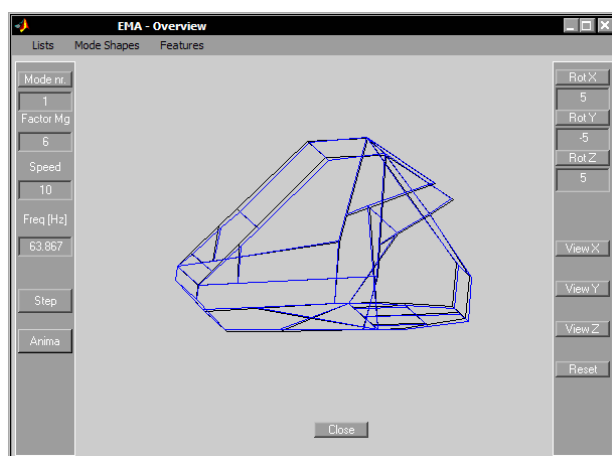
(b) – R.P. x Ibrahim



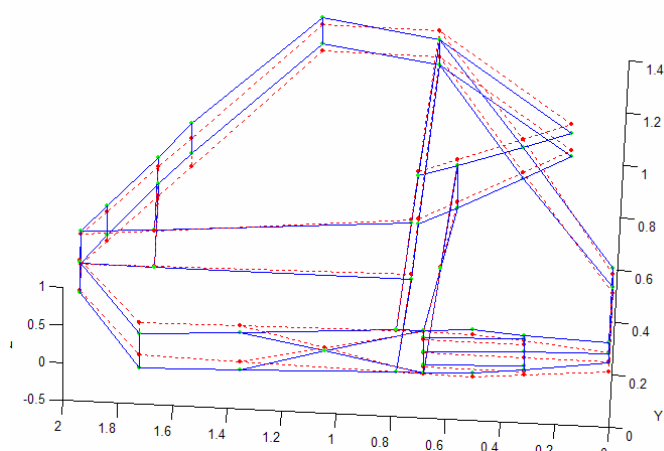
(c) – P.P. x R.P.

Figura 6.41 – Comparação dos modos de vibrar.

A Figura 6.42 mostra os deslocamentos modais da estrutura para o primeiro modo, identificados utilizando os métodos de Ibrahim, Figura 6.42(a), e razão polinomial, Figura 6.42(b).



(a)



(b)

Figura 6.42 – Interface para visualização dos modos de vibrar.

A Tabela 6.8 mostra a razão de amortecimento identificado pelos três diferentes métodos.

Tabela 6.8 – Identificação dos fatores de amortecimento.

	Ibraim	Peak Picking	Razão Pol.	Diferença (%)
1°	0.0019	0.0020	0.0018	10.00
2°	0.0010	0.0009	0.0009	10.00
3°	0.0008	0.0012	0.0013	38.46
4°	0.0015	0.0011	0.0011	26.66
5°	0.0014	0.0010	0.0011	40.00
6°	0.0014	0.0013	0.0011	15.38
7°	0.0025	0.0016	0.0015	40.00
8°	0.0012	0.0013	0.0013	7.69
9°	0.0058	0.0019	0.0019	67.24
10°	0.0049	0.0009	0.00087	81.63

A variação das razões de amortecimento identificadas pelos métodos está na faixa de 5 e 81%. A grande dispersão encontrada nos valores das razões de amortecimento identificadas pelos diferentes métodos mostra a grande dificuldade na avaliação amortecimento.

6.2.7 Análise Modal Utilizando Somente a Resposta.

O procedimento para aquisição dos dados foram os mesmos utilizados na seção anterior, diferindo apenas no fato de que somente as respostas da estrutura foram medidas. Neste caso, a célula de carga foi mantida presa à estrutura para evitar qualquer modificação na força de excitação, com relação ao teste anterior.

Assim como na análise convencional a estrutura foi excitada com um sinal aleatório. Os sinais foram capturados simultaneamente através de dois acelerômetros e posteriormente processados pelo próprio sistema de aquisição para gerar as respectivas funções de autocorrelação, correlação cruzada e densidade espectral.

Na Figura 6.43(a) e na Figura 6.43(b) pode-se observar a densidade espectral de potência e a densidade espectral cruzada respectivamente, definida com 800 linhas espectrais e capturada na faixa de frequência de 0 a 150 Hz, o que inclui os dez primeiros modos de vibrar do sistema.

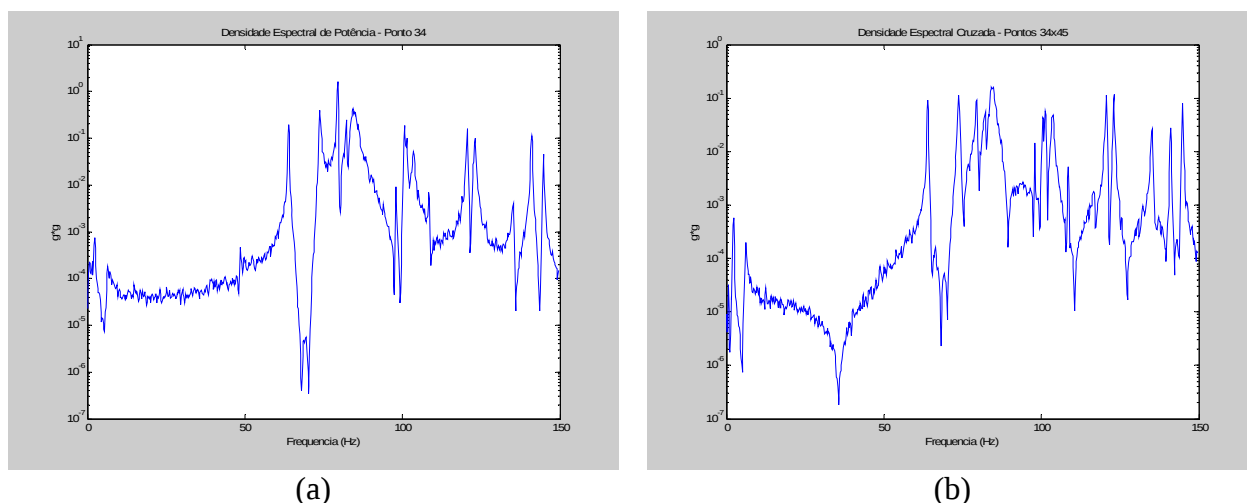


Figura 6.43 – Densidade espectral de potência, ponto de referência.

Obtidas as densidades espectrais passou-se a fase de identificação dos parâmetros modais, agora utilizando a técnica de decomposição no domínio da frequência implementada. A Figura 6.44 mostra a densidade espectral e a primeira interface gráfica criada para auxiliar o usuário.

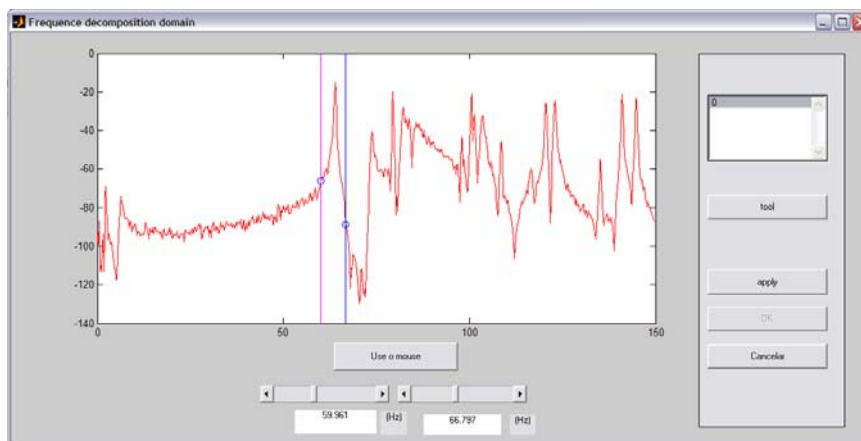


Figura 6.44 – Pico selecionado.

Selecionado o pico de interesse é calculada a decomposição em valores singulares (SVD) das respectivas funções de densidades para as linhas de frequências em torno do pico de ressonância.

Uma vez estimado o modo de vibrar referente ao pico de interesse, é feita uma busca dos vetores singulares, em torno do pico de frequência correlacionado com o modo. Essa correlação é definida para MAC-valores maiores que um dado valor pré-definido pelo usuário. Neste caso, o índice utilizado foi 0.5 e o processo termina quando é encontrado algum valor singular com correlação inferior a este índice.

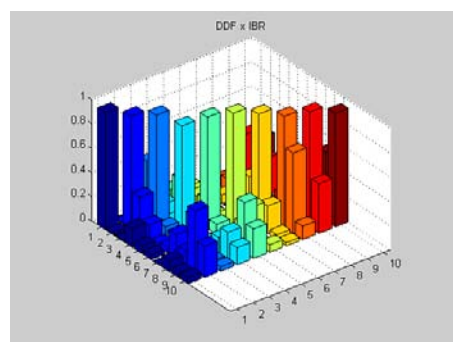
Cada vetor singular obtido tem um correspondente valor singular, os quais definem uma função de valores singulares, corresponde à função de densidade espectral de um sistema de um grau de liberdade para o respectivo modo.

A Tabela 6.11 compara as frequências e modos estimados utilizando a técnica de decomposição no domínio da frequência com os métodos clássicos.

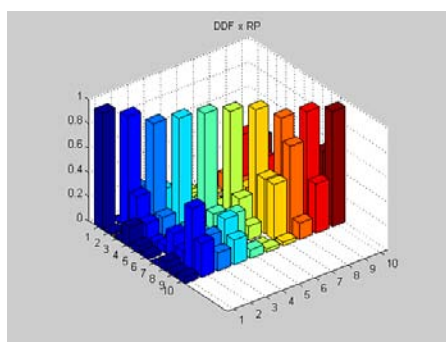
Tabela 6.11 – Comparação dos métodos experimentais.

Modo	Frequência (Hz)				Diferença Frequência (%)			MAC-Valor - Exp. x Exp.		
	f_{ddf}	f_{IB}	f_{pp}	f_{RP}	$f_{ddf} \times f_{ib}$	$f_{ddf} \times f_{RP}$	$f_{ddf} \times f_{pp}$	$ddf \times ib$	$ddf \times rp$	$ddf \times pp$
1°	63,86	63,79	63,86	63,80	0,20	0,00	0,09	0,9582	0,9512	0,9473
2°	73,82	73,80	73,82	73,80	0,02	0,00	0,02	0,9239	0,9198	0,9119
3°	79,49	79,71	79,75	79,63	0,27	0,32	0,17	0,9309	0,8590	0,9109
4°	82,22	82,25	82,22	82,25	0,03	0,00	0,03	0,8401	0,9010	0,8900
5°	97,85	97,86	97,93	97,90	0,01	0,08	0,05	0,9100	0,9373	0,8866
6°	100,59	100,18	100,20	100,17	0,40	0,38	0,41	0,9389	0,9530	0,9010
7°	103,02	102,78	102,85	102,86	0,23	0,16	0,14	0,9300	0,9630	0,9430
8°	108,49	108,33	108,40	108,44	0,14	0,08	0,04	0,9097	0,8939	0,9010
9°	116,60	116,44	116,55	116,52	0,13	0,04	0,06	0,9420	0,9443	0,8990
10°	120,51	120,24	120,53	120,56	0,05	0,01	0,04	0,9300	0,9450	0,9120

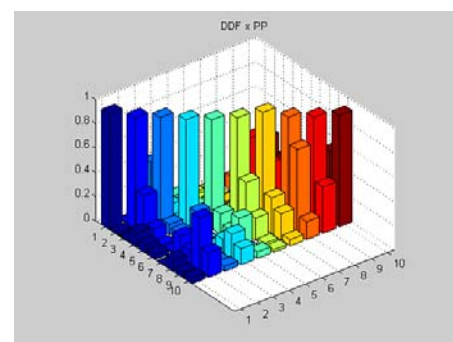
Os resultados mostram uma pequena diferença das frequências estimadas pela técnica de decomposição no domínio da frequência com relação aos métodos clássicos, e uma boa correlação dos modos. Isso é evidenciado pelos altos valores de MAC. A Figura 6.45 mostra os índices de correlação (MAC-Valores) dos modelos, utilizando um gráfico de barras.



(a) – Ibrahim x P. P.



(b) – R.P. x Ibraim

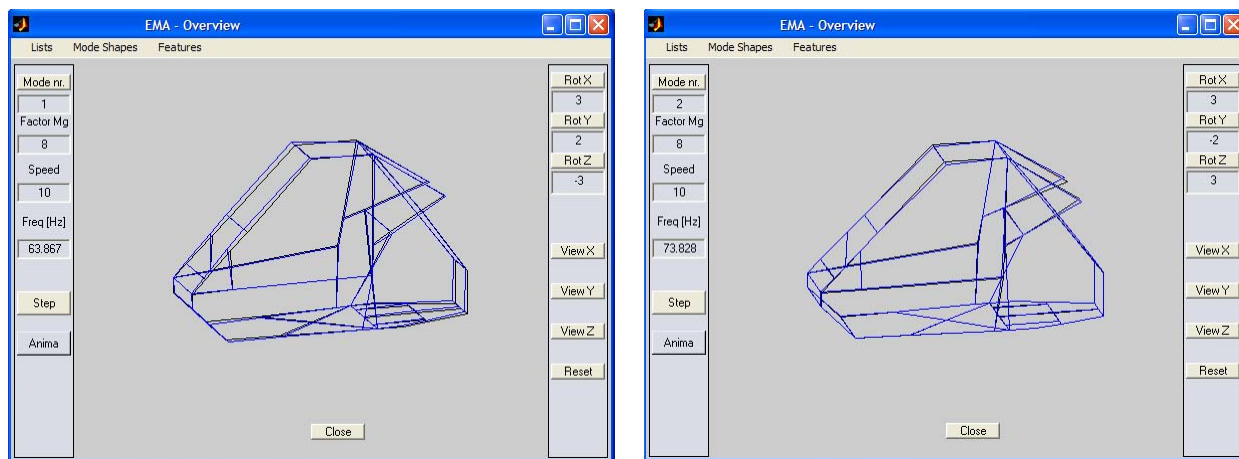


(c) – P.P. x R.P.

Figura 6.45 – Comparação dos modos de vibrar do sistema.

O programa permite também a visualização dos modos, tanto em movimento como

quadro a quadro. Também é possível comparar a estrutura deformada com a estrutura não deformada conforme pode ser visto na Figura 6.46. Ambos os modos foram identificados com a técnica de Decomposição no Domínio da Frequência.



(a) - Primeiro modo.

(b) - Segundo modo.

Figura 6.46 – Modos estimados pelo método FDD

Identificado à função de densidade espectral do sistema de 1GL, pode-se obter o amortecimento do referido modo, transformando a função densidade espectral para o domínio do tempo, utilizando a transformada inversa de Fourier. O amortecimento é obtido com base no conceito de decremento logarítmico. A Figura 6.47 mostra a função de densidade espectral do sistema de 1GL e sua respectiva transformada inversa de Fourier.

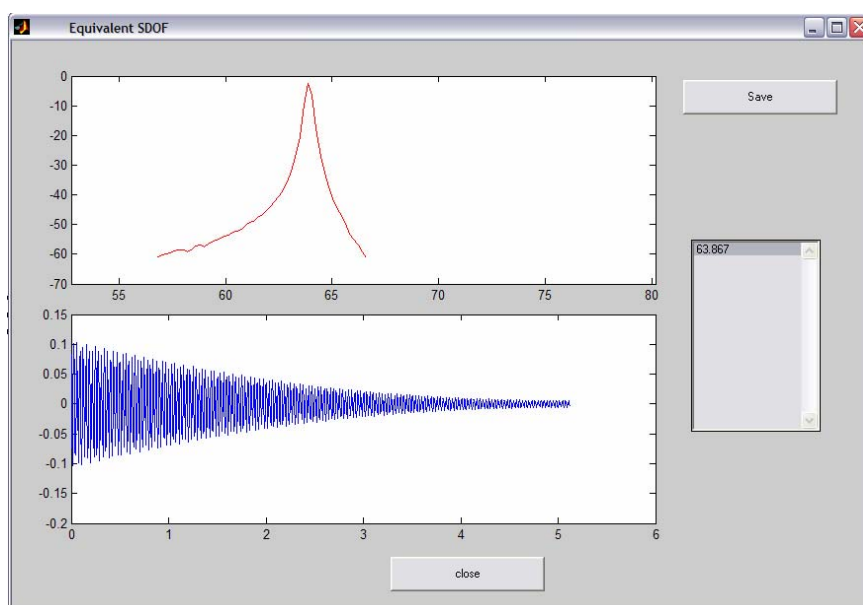


Figura 6.47 – Densidade espectral equivalente e respectiva transformada inversa de Fourier.

A Tabela 6.12 compara as razões de amortecimento estimado utilizando a técnica de decomposição no domínio da frequência e os métodos clássicos de análise modal.

Tabela 6.12 – Frequências naturais e razões de amortecimento identificados utilizando DDF.

	DDF	Ibraim	Peak Picking	Razão Pol.	Diferença (%)
1°	0,0018	0.0019	0.0020	0.0018	10.00
2°	0,0015	0.0010	0.0009	0.0009	10.00
3°	0,0010	0.0008	0.0012	0.0013	38.46
4°	0,0010	0.0015	0.0011	0.0011	36.66
5°	0,0012	0.0014	0.0010	0.0011	40.00
6°	0,0015	0.0014	0.0013	0.0011	15.38
7°	0,0013	0.0025	0.0016	0.0015	40.00
8°	0,0019	0.0012	0.0013	0.0013	7.69
9°	0.001	0.0058	0.0019	0.0019	67.24
10°	0.0010	0.0049	0.0009	0.00087	81.63

Os resultados obtidos mostraram que a técnica é capaz de estimar os parâmetros modais do modelo sem medir a entrada com uma boa precisão. A discrepância máxima observada na identificação da razão de amortecimento, entre os métodos de identificação mostra a dificuldade encontrada para estimar este parâmetro. Entretanto nota-se que os parâmetros estimados pelo método proposto estão na mesma ordem de grandeza dos demais métodos convencionais. É importante ressaltar, que observando a literatura conclui-se que erros desta ordem na identificação do amortecimento são bastante razoáveis, principalmente em se tratando de dados experimentais.

CAPÍTULO 7

Conclusão

O trabalho discute a análise modal baseada apenas na saída do sistema. Inicialmente foi apresentada uma discussão sobre análise modal convencional buscando entender os fundamentos da análise modal baseada na relação entrada-saída e posteriormente, a teoria foi expandida para a análise modal utilizando apenas a resposta do sistema.

A identificação dos parâmetros modais é conduzida no domínio da frequência, mais especificamente, utilizando o método de Decomposição no Domínio da Frequência (FDD). O método é baseado na decomposição em valores singulares da matriz de densidade espectral de saída. Para o desenvolvimento e implementação do método foram discutidos os conceitos probabilísticos de tratamento de sinais randômicos, correlação de sinais e funções de densidade espectral.

A metodologia foi avaliada inicialmente utilizando dados simulados. Um modelo de parâmetros concentrado e uma estrutura contínua do tipo *frame* foram analisados. As matrizes de massa e rigidez da estrutura foram obtidas pelo método de elementos finitos e

posteriormente, as respostas foram simuladas utilizando modelo de espaço de estado.

A utilização de modelos simulados foi importante na fase inicial, pois possibilitou o aprendizado e a avaliação, de forma sistemática, da técnica de decomposição no domínio da frequência, visto que na simulação é possível conhecer os valores exatos dos parâmetros modais do sistema e utiliza-los como referência. Isso viabilizou a realização de uma comparação quantitativa dos dados estimados.

Os resultados obtidos nesta fase mostraram-se bastante consistentes, os parâmetros modais do sistema foram estimados com uma boa exatidão. Contudo, a avaliação utilizando modelos simulados é limitada, pois, por mais bem elaborados que os sejam modelos, a simulação é incapaz de reproduzir toda a complexidade de um experimento. E portanto, exemplos experimentais são decisivos para avaliação da potencialidade da metodologia, o que demanda a realização de testes em estruturas reais.

Dois testes experimentais foram discutidos. No primeiro caso, utilizou-se uma estrutura do tipo “frame” que poderia ser um modelo muito simplificado do esqueleto de um prédio de três andares. No segundo caso, a estrutura é um pouco mais complexa, trata-se da estrutura real de um mini-carro, utilizado em competições universitárias – Projeto Mini-Baja. Em ambos os casos, as estruturas foram identificadas primeiramente através da análise modal clássica. Os resultados foram utilizados como referência para comparação e avaliação da técnica proposta.

No primeiro teste, estrutura do tipo “frame”, também foi criado um modelo de elementos finitos da estrutura, que foi utilizado como subsídio na montagem do aparato experimental e na verificação e avaliação dos resultados obtidos. Neste caso, os parâmetros modais identificados a partir do método de elementos finitos foram utilizados como referência, o que permitiu estabelecer a discrepância dos parâmetros modais identificados, tanto utilizando o método clássico como método proposto.

No segundo teste, estrutura Mini-baja, os parâmetros modais foram inicialmente estimados, com base na relação entrada-saída, utilizando três métodos diferentes de análise, cujo objetivo foi comparar a própria discrepância entre os métodos para posterior comparação com os resultados da DDF. Isso permitiu uma avaliação mais consistente da técnica.

Os resultados obtidos em ambos os casos, mostraram-se bastante promissores. Os parâmetros modais do sistema estimado com a técnica proposta têm a mesma ordem de precisão dos resultados obtidos com análise modal clássica. Isto demonstra que metodologia foi capaz de identificar os parâmetros modais do modelo e poderia ser aplicada na identificação de estruturas reais, utilizando apenas as respostas. Entretanto, alguns aspectos ainda necessitam ser melhor analisados.

Um aspecto que não foi abordado neste trabalho e deve ser discutidos em trabalhos futuros é a ocorrência de uma entrada não totalmente aleatória, visto que a formulação da técnica é baseada nesta hipótese. Um outro aspecto também seria a existência de componentes harmônicos na entrada, visando avaliar a robustez da técnica em relação a esses efeitos. E finalmente, a utilização da metodologia para identificação dos parâmetros modais de sistemas em condições reais de operação, por exemplo, identificação dos parâmetros do Mini-baja, em movimento.

REFERÊNCIAS

ALLEMANG, R., 1982, *Experimental Modal Analysis Bibliography*, Proceedings of the I-IMAC.

ALLEMANG, R. J., 1999, *Vibrations: Experimental Modal Analysis*, Course Notes, Seventh Edition, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, OH.

ANDERSEN, P., Identification of Civil Engineering Structures using Vector ARMA Models. Tese de pós-doutorado, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark, 1997.

BATHE, J.; WILSON, E. L. Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976. 528p.

BENDAT, JULIUS S AND ALLAN G. PIERSON, 1993, Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, John Wiley & Sons.

BRINCKER, R.; ZHANG, L.; ANDERSEN, P.; 2000, Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition, Proceedings of the XVIIIIMAC.

BRINCKER, B.; VENTURA, C.; ANDERSEN, P., Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition, IMAC XIX, Kissimmee, 2001.

DHATT, G.; TOUZOT, G.; CANTIN, G. The finite element method displayed. Chichester: John Wiley & Sons, 1984, 509p.

EWINS, D. J., 1984, *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons Inc, New

York.

FELBER, A. Development of a Hybrid Bridge Evaluation System. PhD Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1993.

FORMENTI, D., Analytical and experimental modal analysis, 1977, University of Cincinnati.

GARCIA, J.; *The Need for Computational Model Validation*, Experimental Techniques, Vol.25, N° 2, March/April 2001.

GOYDER, H. G. D., 1980, *Methods and Application of Structural Modelling from Measured Structural Frequency Response Data*, Journal of Sound Vibration.

HEYLEN, W.; LAMMENS, S.; SAS, PAUL; Modal Analysis Theory and Testing, Division of Production Engineering, 1995, Belgium.

IBRAIM, S. R.; MIKULCIK, E. C., A Time Domain Modal Vibration Test Technique, The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 43, N° 4, 1973, pp 21-37.

IBRAIM, S. R., A Method For The Direct Identification Of Vibration Parameters From the Free Response, The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 47, N° 4, 1977, pp 183-198.

JAMES III, G., H.; CARNE, T., G.; LAUFFER, J., P.; The natural excitation technique (NExT) for modal parameters extraction from operating structure. Modal Analysis: the international journal of analytical and experimental modal analysis, v.10, n.4, p.260-277.

JER-NAN JUANG; MINH Q. PHAN., 2001, "Identification and Control of Mechanical Systems", Cambridge University Press, First Published.

JUANG, J.N., and PAPA R. S., 1985, "An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction", J. Guid. Control Dyn.

KUNG, S., Y.; A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition. Proceedings of the 3rd international modal analysis conference, Orlando.

LEMBREGTS, F., 1988, "Frequency Domain Identification Techniques for Experimental Multiple Input Modal Analysis," Ph.D., Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

LEURIDAN, J. et al., "Review of Parameters Identification Techniques," Proceedings of the XIII International Seminar on Modal Analysis, - Course on Modal Analysis, Leuven, 1990.

LJUNG, L.: "System Identification: theory for the user", Second Edition, Prentice-Hall, 1999.

MAIA, S., et al., 1997, "Theoretical and Experimental Modal Analysis", Research Studies Press Ltd.

MAIA, N. M. M., "Fundamentals of Singular Value Decomposition", Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference (IMAC IX), Florence, Italy, Vol. II, April 1991, pp. 1515-1521.

MENDES, P.; BAPTISTA, A. M., Output-Only Analysis Applied on a Reinforced Concrete Building, IMAC-2004.

MERTINS, ALFRED, 1999, Signal Analysis, John Wiley & Sons Inc, England.

MEIROVITCH, L. Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff e Noordhoff International Publisher B. V., 1980.

MOLLER, N.; GATE, S., Operation Modal Analysis on an Automotive Transmission System, IMAC-2004

NEWLAND, D., E.; Random vibration, spectral and wavelet analysis, John Wiley & Sons Inc, New York, 1993.

OBERKAMPF, W. L.; *Computation Validation Series: Part 2*, Experimental Techniques, vol 25, no 3, pp 35-40, 2001.

OPPENHEIM, ALAN, V., 1998, Discrete-Time Signal Processing, Prentice-Hall Inc,

New Jersey.

PAPOULIS, A.; Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, Third Edition, McGraw-Hill Inc, Singapore, 1991.

PEETERS, B.; ROECK, G. D.; “*Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis a Review*”, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol.123, December 2001.

PEETERS, B.; G. DE ROECK; ANDERSEN, P.; Stochastic system identification: Uncertainty of the estimated modal parameters. Proceedings of IMAC XXVII, the international modal analysis conference, p. 231-237.

PEKKA, N.; HAAPANIEMI, H.; “Operational Modal Analysis of a Piping System”, IMAC-2004.

PEREIRA, J. A. Structural damage detection methodology using a model updating procedure based on frequency response function – FRF(s), Campinas, 1996. Tese (Doutor em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

PRZEMIENIECKI, J. S.; Theory of structural analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968. 468p.

RICHARDSON, M. H.; FORMENTI, D. L., Parameter Estimation Form Frequency Response Measurements Using Rational Fraction Polynomials, 1° International Modal Analysis Conference (IMAC I), Orlando, Florida, 1981.

RICHARDSON, M. H.; FORMENTI, D. L., Global Curve Fitting Of Frequency Response Measurements Using Rational Fraction Polynomials, 3° International Modal Analysis Conference (IMAC I), Orlando, Florida, 1985.

RODRIGUES, J.; BRINCKER, R.; ANDERSEN, PALLE, Improvement of Frequency Domain Output-Only Modal identification from the Application of the Random

Decrement Technique, IMAC, 2004.

ROST, R. et al, *Recent Advances in Multiple Input Frequency Response Functions Estimation* -, Proceedings of the X International Seminar on Modal Analysis, Leuven, 1985.

SNOEYS, R., et al; Trends in Experimental Modal Analysis, Proceedings of the XVII International Seminar on Modal Analysis, Leuven, 1992.

VAN OVERSCHEE P., DE MOOR B., *Subspace algorithms for the stochastic identification problem* 30th IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, UK, pp. 1321-1326, 1991.

VAN OVERSCHEE P., DE MOOR B., *Subspace Identification for Linear Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

WEI-SIN, R.; ZHOU-HONG, Z., Output-only Modal Parameter Identification of Civil Engineering Structures. Structural Engineering and Mechanics, Vol.17, n. 3-4, 2004.

YOSHIDA, A.; TAMURA, Y.; ITOH, T., System Identification of Structures for Wind-Induced Responses, ISMA 2004.

PUBLICAÇÕES

1. BORGES, A. S.; NUNES JR, O. A.; PEREIRA, J. A.; 2004, “*Identificação do Amortecimento utilizando Decomposição no Domínio da Frequência*” III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM 2004 – Belém, PA – Brasil.
2. BORGES, A. S.; NUNES JR, O. A.; PEREIRA, J. A.; 2004, “*Identificação dos Parâmetros Modais utilizando Decomposição no Domínio da Frequência*” XXV CILAMCE 2004 – Iberian Latin American Congress on Computation Methods – Recife, PE – Brasil.
3. BORGES, A.S., NUNES JR, O.A., PEREIRA, J.A., 2005, “Identificação dos Parâmetros Modais Utilizando a Técnica de Decomposição no Domínio da Frequência”, 4º Congresso temático de Dinâmica e controle da SBMAC, Bauru - SP.
4. BORGES, A.S., NUNES JR, O.A., PEREIRA, J.A., 2005,” Output-Only Modal Analysis using Frequency Domain Decomposition”, 18 th COBEM International Mechanical Engineering, COBEM- Ouro Preto – MG.
5. NUNES JR, O.A., BORGES, A.S., PEREIRA, J.A., 2005, “Identificação Estocástica do Subespaço aplicada para estimação de Parâmetros Modais”, 4º Congresso temático de Dinâmica e controle da SBMAC, Bauru - SP.
6. NUNES JR, O.A., BORGES, A.S., PEREIRA, J.A., 2005, “Modal Parameters Identification Applied to Operational Data”, XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Guarapari - Espírito Santo.

APÊNDICE

A.1 Modelos de Espaço de Estado

Na análise estrutural o comportamento dinâmico de um sistema mecânico com n graus de liberdade, m entradas e n respostas, pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais lineares de segunda-ordem com coeficientes constantes (Meirovitch, 1980).

$$[M]\ddot{w}(t) + [C]\dot{w}(t) + [K]w(t) = B_f u(t) \quad (1)$$

em que $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, de amortecimento e rigidez da estrutura respectivamente. A variável $w(t)$ representa o deslocamento relativo das inércias do sistema, a matriz B_f é chamada de matriz de influencia de entrada, considerando que o número de entradas difere do número de graus de liberdade, e por último o vetor $u(t)$ é a força externa aplicada no sistema. As matrizes de massa, rigidez e amortecimento são de ordem $n \times n$, a matriz B_f é de ordem $n \times m$ e o vetor de força $u(t)$ é de ordem $m \times 1$.

Assumindo que a matriz $[M]$ seja inversível, isolando a variável $\ddot{w}(t)$ tem-se:

$$\ddot{w}(t) = -[M]^{-1}[C]\dot{w}(t) - [M]^{-1}[K]w(t) + [M]^{-1}B_f u(t) \quad (2)$$

A equação (2) pode agora ser descrita na forma de uma equação de primeira-ordem, equação (3).

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_f \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

Para simplificar a equação (3), defini-se o vetor de estado $x(t)$ como:

$$x(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

A equação (3) pode ser escrita numa forma mais compacta em termos do vetor de estado $x(t)$. Substituindo em (4) em (3), tem-se:

$$\frac{dx}{dt} = [A_c]x(t) + [B_c]u(t) \quad (5)$$

Em que:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_f \end{bmatrix}.$$

Para descrever completamente o comportamento do sistema na representação de estado, é necessária a representação das respostas do modelo (saída), ou seja, de que pontos de medidas foram aquisitadas as respostas. Em geral, a variável de saída $y(t)$ é escrita em função da variável de estado $x(t)$, equação (6).

$$y(t) = [C_c]x(t) \quad (6)$$

C_c é chamada de matriz de influência de saída. As equações (5) e (6) são chamadas modelo de espaço de estado (Jer-Nan Juang, 2001).

Nota-se que o vetor de saída $y(t)$ na equação (6) é limitado às informações de deslocamento $w(t)$ e velocidade $\dot{w}(t)$ ou uma combinação linear dos dois. Frequentemente são medidos também sinais de resposta do sistema em aceleração. Neste caso também é necessário incorporar as informações de aceleração na equação (6).

Na equação (2), observa-se que a aceleração $\ddot{w}(t)$ é em função do vetor deslocamento $w(t)$, da velocidade $\dot{w}(t)$, e do vetor de entrada do sistema.

Para incluir a medida de aceleração na equação de saída, deve-se estabelecer a seguinte relação:

$$y(t) = [C_a]\ddot{w}(t) \quad (7)$$

C_a descreve a relação entre o vetor $\ddot{w}(t)$ e do vetor $y(t)$. Substituindo a equação (2) na equação (7) tem-se:

$$y(t) = [C_a \mathbb{I} M]^{-1} [B_f u(t) - [C] \dot{w}(t) - [K] w(t)] \quad (8)$$

Em uma forma mais compacta,

$$y(t) = [C] x(t) + [D] u(t) \quad (9)$$

Onde:

$$[C] = \begin{bmatrix} -[C_a \mathbb{I} M]^{-1} [K] & -[C]_a [M]^{-1} [C] \end{bmatrix}, \quad [D] = [C_a \mathbb{I} M]^{-1} B_f$$

C é a matriz de influência das respostas do sistema para o vetor de estado $x(t)$. D é o termo de transmissão direta, pois transmite diretamente a entrada $u(t)$ para a saída $y(t)$ sem intermediação da equação de estado.

A seguir será ilustrada a montagem do modelo de espaço de estado de um sistema massa-mola amortecido de 2 graus de liberdade, mostrado na Figura 1, para algumas combinações de variáveis de entrada e saída.

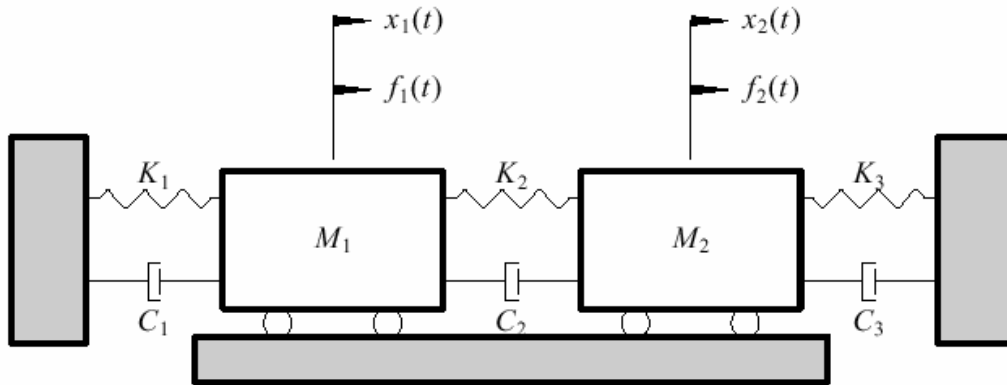


Figura 1 - Sistema de dois graus de liberdade.

Neste exemplo o vetor $w(t)$ será escrito em função do deslocamento das duas massas

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

A equação matricial de segunda-ordem é dada por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1(t) \\ \ddot{w}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Em uma forma mais compacta

$$[M]\ddot{w}(t) + [C]\dot{w}(t) + [K]w(t) = u(t) \quad (12)$$

O vetor de estado para o sistema de dois graus de liberdade é definido como:

$$x(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \dot{w}_1(t) \\ w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

A equação de estado é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = [A_c]x(t) + [B_c]u(t) \quad (14)$$

Onde:

$$[A_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2)/m_1 & k_2/m_1 & -(C_1 + C_2)/m_1 & C_2/m_1 \\ k_2/m_2 & -(k_2 + k_3)/m_2 & C_2/m_2 & -(C_2 + C_3)/m \end{bmatrix} \quad (15)$$

A matriz $[A_c]$ é dada em função dos parâmetros do sistema, m_j , C_j e k_j para $j = 1, 2$.

Antes de definir a matriz de entrada do sistema $[B_c]$, é necessário conhecer o número de entradas e onde elas estão sendo aplicadas. Neste exemplo, o número máximo de entradas são duas, ou seja, a força pode ser aplicada na primeira massa ou na segunda, ou ainda, em ambas. Esses três casos são mostrados a seguir.

(a) força de entrada na primeira massa

Para este caso, a força $u_1(t)$ é aplicada na massa m_1 , o que resulta em uma matriz $[B_c]$

de ordem 2×1 , é dada por:

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_f \end{bmatrix} \quad (16)$$

Onde:

$$[M]^{-1}[B_f] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

(b) força de entrada aplicada na segunda massa

A matriz $[B_c]$ é definida de modo análogo ao caso anterior é dada por:

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

(c) força de entrada aplicada em ambas as massas

Por último, neste caso, a força de entrada do sistema pode ser aplicada nas duas massas simultaneamente. A matriz $[B_c]$ torna-se:

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

A matriz de saída $[C_c]$, neste caso, depende do número e localização dos sensores usados para medir a saída do sistema. A seguir serão mostradas algumas possíveis saídas do sistema.

(1) medida de deslocamento na primeira massa

A matriz de saída neste caso é dada por:

$$[C_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (120)$$

(2) medida de velocidade na segunda massa

A matriz de saída do sistema é dada por:

$$[C_c] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

(3) medidas de velocidade e deslocamento em ambas as massas

Neste caso existem quatro saídas do sistema, portanto a matriz C é dada por:

$$[C_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

De modo análogo é montada a matriz de saída $[C]$ para medidas de deslocamento e velocidade na massa m_2 .

Substituindo as matrizes de massa, rigidez e amortecimento na equação (2), pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{w}_1(t) \\ \ddot{w}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{C_1+C_2}{m_1} & \frac{C_2}{m_1} \\ \frac{C_2}{m_2} & -\frac{C_2+C_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_1(t)}{m_1} \\ \frac{u_2(t)}{m_2} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Assumindo que as respostas do sistema sejam medidas em deslocamento na primeira massa, velocidade e aceleração na segunda massa, tem-se:

$$y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \ddot{w}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (24)$$

A variável $y_3(t)$ corresponde à aceleração medida na segunda massa. A matriz de influência mostrada na equação (7) é igual a $C_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se:

$$y_3(t) = \ddot{w}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Substituindo a equação (23) na equação (25), tem-se:

$$y_3(t) = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\varsigma_2}{m_2} & -\frac{\varsigma_2 + \varsigma_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{Bmatrix} + \frac{1}{m_2} u_2(t) \quad (26)$$

A equação geral para as três medidas torna-se:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & \frac{\varsigma_2}{m_2} & -\frac{\varsigma_2 + \varsigma_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

A matriz de transmissão direta D é dada por:

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

A representação do modelo de estado pode variar dependendo das variáveis de entrada e de saída do sistema. Estas variáveis descrevem o modelo, desde as suas propriedades físicas até a excitação e resposta do sistema.

A simulação da resposta do sistema será feita computacionalmente, ou seja, será feita uma amostragem do sinal de resposta em intervalos de tempo durante certo período, por isso é necessário trabalhar com modelos de espaço de estado discreto. A seguir será apresentada a discretização do modelo de espaço de estado contínuo.

A.1.1 Modelo de Espaço de Estado Discreto

As quantidades físicas como deslocamento, velocidade e aceleração são contínuos na natureza, ou seja, mudam continuamente com o tempo. Os sensores de medidas que captam estas mudanças são chamados de analógicos. O sinal analógico deve ser transformado para um sinal discreto para que possa ser manipulado computacionalmente. A formulação detalhada da modelagem discutida é apresentada em Jer-Nan Juang (2001). Nesta seção será apresentado apenas as equações básicas para converter um modelo de espaço de estado contínuo para discreto.

O modelo de espaço de estado discreto é dado por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= [A_d]x(k) + [B_d]u(k) \\ y(k) &= [C_d]x(k) + [D_d]u(k) \end{aligned} \quad (29)$$

as matrizes discretas A_d e B_d são:

$$\begin{aligned} [A_d] &= e^{A_c(k\Delta t)} \\ [B_d] &= \int_0^{\Delta t} e^{A_c\tau'} d\tau' B_c \end{aligned} \quad (30)$$

Δt é o intervalo de discretização.

As matrizes C e D são a mesmas da representação do espaço de estado contínuo.

Ilha Solteira-SP, 10 de abril de 2006.

Assinatura do aluno