



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá

TÚLIO SÉRGIO DE ALMEIDA

Gráficos de Controle por Variáveis por uma Abordagem *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar

Guaratinguetá-SP
2023

Túlio Sérgio de Almeida

Gráficos de Controle por Variáveis por uma Abordagem *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica na área de Projetos, Gestão e Otimização.

Orientadora: Profa. Dr.^a.Marcela Aparecida Guerreiro Machado de Freitas
Coorientadora: Profa. Dr.^a Paloma Maria Silva Rocha Rizol

A447g Almeida, Túlio Sérgio de
Gráficos de controle por variáveis por uma abordagem
fuzzy tipo-2 intervalar / Túlio Sérgio de Almeida -
Guaratinguetá, 2023.
201 f : il.
Bibliografia: f. 151-157

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista,
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2023.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Marcela Aparecida Guerreiro
Machado de Freitas
Coorientadora: Prof^a. Dr^a. Paloma Maria Silva Rocha
Rizol

1. Controle de qualidade. 2. Gráficos (Engenharia). 3 Ar -
qualidade. I. Título.

CDU 658.56(043)

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

A tese traz contribuições científicas e práticas relacionadas a área de controle estatístico de processos, inteligência artificial e gestão de impactos ambientais no que tange a poluição atmosférica. Cientificamente há duas principais contribuições: a análise de desempenho dos gráficos de controle \bar{X} -R sob uma abordagem fuzzy tipo-2 intervalar e o desenvolvimento de um novo gráfico de controle, o IT2TFN (*interval type-2 triangular fuzzy number*) T^2 para processos bivariados. O uso da lógica *fuzzy* tipo-2 confere aos modelos propostos flexibilidade e maior assertividade nas tomadas de decisão. Por fim, a aplicação dos modelos propostos aos dados de poluição atmosférica da CETESB (Companhia Ambiental do Estado de São Paulo) demonstra como os gráficos de controle por variáveis integrados com inteligência artificial podem trazer benefícios para a sociedade e para a redução de impactos ambientais.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH


The thesis brings scientific and practical contributions related to the area of statistical process control, artificial intelligence, and environmental impact management with regard to atmospheric pollution. Scientifically, there are two main contributions: analysing the performance of \bar{X} -R control charts under an interval type-2 fuzzy approach and developing a new control chart, the IT2TFN (interval type-2 triangular fuzzy number) T^2 for bivariate processes. The use of type-2 fuzzy logic gives the proposed models flexibility and greater assertiveness in decision-making. Finally, the application of the proposed models to air pollution data from CETESB (Companhia Ambiental do Estado de São Paulo) demonstrates how variable control charts integrated with artificial intelligence can bring benefits to society and reduce environmental impacts.

TÚLIO SÉRGIO DE ALMEIDA

**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA”**


**PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO: DOUTORADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


 Documento assinado digitalmente
MANOEL CLEBER DE SAMPAIO ALVES
Data: 14/11/2023 09:31:16-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Manoel Cléber de Sampaio Alves
Coordenador


BANCA EXAMINADORA:

 Documento assinado digitalmente
MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO DE
Data: 03/10/2023 11:47:25-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>


**Prof.ª Dr.ª MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO DE
FREITAS**
Orientador – UNESP

 Documento assinado digitalmente
FERNANDO AUGUSTO SILVA MARINS
Data: 03/10/2023 12:26:41-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>


Prof. Dr. FERNANDO AUGUSTO SILVA MARINS
UNESP

 Documento assinado digitalmente
FABRÍCIO MACIEL GOMES
Data: 06/10/2023 10:43:08-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. FABRÍCIO MACIEL GOMES
EEL/USP

 Documento assinado digitalmente
SANDRA REGINA MONTEIRO MASALSKIENE ROVA
Data: 11/10/2023 10:32:51-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

**Prof. Dr. SANDRA REGINA MONTEIRO MASALSKIENE
ROVEDA**
UNESP

 Documento assinado digitalmente
FELIPE SCHOEMER JARDIM
Data: 22/10/2023 05:36:04-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. FELIPE SCHOEMER JARDIM
UFF

Outubro/2023

DADOS CURRICULARES

TÚLIO SÉRGIO DE ALMEIDA

NASCIMENTO	05.07.1987 – Visconde de Rio Branco/MG
FILIAÇÃO	Naiva Maria da Silva Almeida Moacir Emidio de Almeida
2006/2012	Curso de Graduação-Bacharel em Engenharia de Produção, na Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda da Universidade Federal Fluminense
2013/2015	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica no nível de Mestrado, na Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda da Universidade Federal Fluminense
2018/2023	Curso de Pós-Graduação em Engenharia no nível de Doutorado, na Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

dedico este trabalho minha esposa
Amanda pelo companheirismo, pela
paciência e amor em todos os momentos

a meus pais Moacir e Naiva e meus
irmãos Elisângela e Rubens

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida e por toda graça concedida. Agradeço por toda minha família e amigos que puderam compartilhar dessa jornada.

às professoras orientadoras deste trabalho *Prof^a Dr^a Marcela Aparecida Guerreiro Machado de Freitas* e *Prof^a Dr^a Paloma Maria Silva Rocha Rizol*, que assim como todas as professoras e professores que passaram pela minha vida, fizeram toda a diferença não somente pelos ensinamentos como também pelo exemplo profissional e os seres humanos que são.

à minha esposa *Amanda dos Santos Mendes* pelo companheirismo, pela paciência e pelo amor, principalmente nos momentos difíceis que passamos juntos durante a pandemia da COVID-19. É muito importante ter alguém que sempre luta ao seu lado e vibra com cada conquista, um obrigado é realmente muito pouco.

aos meus pais *Naiva Maria da Silva Almeida* e *Moacir Emidio de Almeida*, pessoas muito simples, que não tiveram a oportunidade de estudar nessa vida, mas fizeram tudo dentro de seus limites para que eu pudesse me dedicar aos estudos e ir alcançando meus sonhos.

a meus irmãos *Elisângela Silva de Almeida* e *Rubens Carlos de Almeida*, a primeira por ser uma segunda mãe que tenho nessa vida, ser sempre carinhosa e compreensiva em todos os momentos e o segundo, por sempre me incentivar na carreira docente, sendo inspiração por ser professor e ter sido o primeiro de nossa família a se formar na graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

RESUMO

Os gráficos de controle são uma das ferramentas da qualidade mais importantes dentro do CEP (Controle Estatístico de Processos) e são utilizados no monitoramento de variáveis de processo que podem ser entendidas como características de qualidade. Visto que as incertezas oriundas dos sistemas de medição juntamente com as decisões humanas, tornam a imprecisão dos dados um fator determinante no desempenho nas ferramentas de CEP, a teoria dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 vem ao encontro de tal abordagem, incorporando aos gráficos de controle por variáveis incertezas que estes não são capazes de detectar. Este trabalho propõe gráficos de controle \bar{X} - R , \bar{X} - S e T^2 por uma abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar para o monitoramento de processos e a implementação destes para monitorar a poluição atmosférica. A análise de desempenho de IT2TFN \bar{X} e IT2TFN \bar{X} - R por meio de simulação computacional evidenciou um melhor desempenho em relação aos seus correspondentes tradicional e *fuzzy* tipo-1 para valores de *FOU* (*footprint of uncertainty*) na faixa 0,05 a 0,15. A aplicação a dados reais referentes a qualidade do ar oriundos da Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (CETESB) mostrou como os métodos, organização dos dados, fuzzificação e defuzzificação podem impactar no projeto dos gráficos de controle de \bar{X} - R , \bar{X} - S e para T^2 de Hotelling. Tal comparação foi feita para os gráficos tradicionais, TFN e IT2TFN a fim de apresentar as vantagens e desvantagens de cada abordagem. Desta forma, verificou-se que os gráficos de controle propostos são mais eficientes que os gráficos de controle tradicionais e *fuzzy* tipo-1, mais flexíveis devido aos parâmetros *fuzzy* e podem trazer benefícios na gestão pública quanto implementados no monitoramento de poluentes atmosféricos.

PALAVRAS-CHAVE: gráficos de controle; *fuzzy* tipo-2 intervalar; controle de variáveis; monitoramento da qualidade do ar.

ABSTRACT

Control charts one of the most important quality tools within SPC (Statistical Process Control) and are used in monitoring process variables that can be understood as quality characteristics. Since uncertainties arising from measurement systems, together with human decisions, make data imprecision a determining factor in performance in SPC tools, type-2 fuzzy set theory meets such an approach, incorporating to the control charts by variables uncertainties that these are not able to detect. This work proposes \bar{X} - R , \bar{X} - S and T^2 control chart models using the interval type-2 fuzzy approach for monitoring univariate and multivariate processes and their implementation to monitor atmospheric pollution. Analysing the performance of IT2TFN \bar{X} and IT2TFN \bar{X} - R using computer simulation showed better performance than their traditional and type-1 fuzzy counterparts for *FOU* (footprint of uncertainty) values in 0.05 to 0.15 range. The application to real data referring to air quality from the Environmental Company of the State of São Paulo (CETESB) showed how methods, data organisation, fuzzification and defuzzification can impact on the design of the control charts of \bar{X} - R , \bar{X} - S and for Hotelling's T^2 . This comparison was made for traditional, TFN and IT2TFN charts in order to show the advantages and disadvantages of each approach. In this way, it was found that the proposed control charts are more efficient than the traditional and type-1 fuzzy control charts, more flexible due to the fuzzy parameters and can bring benefits to public management when implemented in the monitoring of atmospheric pollutants.

KEYWORDS: control chart; interval type-2 fuzzy; variable control; air quality monitoring.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Publicações de artigos referentes a gráficos de controle.....	26
Figura 2 - Publicações de artigos sobre gráficos de controle por área de conhecimento.	26
Figura 3 - Publicações de artigos referentes a gráficos de controle fuzzy tipo-1	27
Figura 4 – Áreas envolvidas nos artigos de gráficos de control fuzzy tipo-1.	28
Figura 5 - Publicações de artigos referentes a gráficos de controle fuzzy tipo-2.....	28
Figura 6 – Estrutura do trabalho	32
Figura 7 – Diferenças entre causas comuns e causas especiais em processos	34
Figura 8 – Exemplo de gráfico de controle X para a medição do módulo de elasticidade de material metálico.....	35
Figura 9 - Tipos de gráficos de controle por variáveis e suas aplicações	36
Figura 10 – Exemplo de processo multivariado com variáveis não correlacionadas.	40
Figura 11 – Gráfico de controle T^2 de Hotelling, a partir de 20 de amostras de tamanho 10 para as variáveis x_1 e x_2	42
Figura 12 – Áreas da teoria dos conjuntos fuzzy.....	45
Figura 13 – Exemplo de número <i>fuzzy</i> triangular $(a, b, c) = (2, 5, 7)$	46
Figura 14 – Área do corte-alpha para um TFN (<i>triangular fuzzy number</i>).....	48
Figura 15 – Representação do número <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar triangular	51
Figura 16 – Representação de um número fuzzy tipo-2 triangular intervalar.....	52
Figura 17 - FOU do número <i>fuzzy</i> tipo-2 intervalar triangular.....	53
Figura 18 – Funções de pertinência e a FOU para um TFN	54
Figura 19 – Sistema de Inferência Fuzzy (SIF) do tipo-2.....	55
Figura 20 – Número fuzzy tipo-2 trapezoidal intervalar generalizado	64
Figura 21 – Modelo de pesquisa quantitativa.....	70
Figura 22 – Diagrama esquemático para a classificação desta pesquisa	71
Figura 23 – Estações de medição da qualidade do ar e suas localizações no estado de São Paulo.....	72
Figura 24 – Apresentação dos índices de poluição atmosférica.....	73
Figura 25 – Etapas do algoritmo de análise de desempenho do gráfico de controle proposto.....	76
Figura 26 – Etapas do processo de fuzzificação para dados <i>fuzzy</i> TFN (tipo-1).....	77
Figura 27 – Etapas do processo de fuzzificação para dados <i>fuzzy</i> IT2TFN (tipo-2)	78

Figura 28 – Fluxograma da Pesquisa	90
Figura 29 - IT2TFN para $H(A^U) = H(A^L) = 1$	96
Figura 30 – Redução percentual média do NMA no X IT2TFN em função do valor da FOU. Valor de referência: Gráfico de Controle X Tradicional. (Cenário 1).....	101
Figura 31 – NMA do gráfico de controle X IT2TFN em função do valor da FOU. (Cenário 1).....	102
Figura 32 – Redução percentual média do NMA no X IT2TFN em função do valor da FOU. Valor de referência: Gráfico de Controle X Tradicional. (Cenário 2).....	103
Figura 33 – Valor do NMA em função do deslocamento δ e da perturbação λ . (FOU = 0,30)	105
Figura 34 - Gráfico Operância do sistema de medição de concentração e MP_{10} por dia. Fração do dia em que opera (medições horárias/24 horas).	113
Figura 35 – Exemplo para a tabulação das 10 primeiras amostras de dados referentes à concentração de MP_{10}	113
Figura 36 - Gráfico Operância do sistema de medição de concentração e SO_2 por dia. Fração do dia em que opera (medições horárias/24 horas).	115
Figura 37 - Gráfico de controle X Tradicional (fase I) para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).	117
Figura 38 - Gráfico de controle R Tradicional (fase I) para monitorar a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00)	117
Figura 39 - Gráfico de controle X Tradicional (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).	118
Figura 40 - Gráfico de controle R Tradicional (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).	118
Figura 41 - Gráfico de controle X TFN (fase I), para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).....	122
Figura 42 - Gráfico de controle R TFN (fase I), para monitorar a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).	122
Figura 43 - Gráfico de controle X TFN (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).	123

Figura 44 - Gráfico de controle R TFN (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a média da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³ no período da manhã (07:00 – 12:00).	123
Figura 45 - Gráfico de controle X IT2TFN (fase I) para monitorar a média da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³ no período da manhã (07:00 – 12:00).	126
Figura 46 - Gráfico de controle R IT2TFN (fase I) para monitorar a amplitude da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³ no período da manhã (07:00 – 12:00).	127
Figura 47 - Gráfico de controle X IT2TFN (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a média da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³ no período da manhã (07:00 – 12:00).	127
Figura 48 - Gráfico de controle R IT2TFN (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a amplitude da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³ no período da manhã (07:00 – 12:00).	128
Figura 49 - Gráfico de controle X Tradicional (fase I) para monitorar a média diária da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³	132
Figura 50 - Gráfico de controle s Tradicional (fase I) para monitorar o desvio padrão diário da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³	133
Figura 51 - Gráfico de controle X TFN (fase I) para monitorar a média diária da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³	134
Figura 52 - Gráfico de controle S TFN (fase I) para monitorar o desvio padrão diário da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³	134
Figura 53 - Gráfico de controle X IT2TFN (fase I) para monitorar a média diária da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³	136
Figura 54 - Gráfico de controle S TFN (fase I) para monitorar o desvio padrão diário da concentração de MP ₁₀ em µg/m ³	136
Figura 55 - Gráfico de controle X IT2TFN (fase I) com os limites de controle válidos.	137
Figura 56 - Gráfico de controle S IT2TFN (fase I) com os limites de controle válidos.	137
Figura 57 – Exemplo para a tabulação das 10 primeiras amostras de dados referentes à concentração de SO ₂	140
Figura 58 - Gráfico de controle T ² (fase I) para monitorar os níveis de concentração de MP ₁₀ em µg/m ³ e os níveis de concentração de SO ₂ em µg/m ³ simultaneamente.....	141

Figura 59 - Gráfico de controle T^2 (fase I) para monitorar os níveis de concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ e os níveis de concentração de SO_2 em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ simultaneamente.....	142
Figura 60 - Gráfico de controle TFN T^2 (fase I) para monitorar os níveis de concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ e os níveis de concentração de SO_2 em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ simultaneamente por meio da estatística $T\alpha - mr2$	143
Figura 61 - Gráfico de controle TFN T^2 (fase I) após a retirada dos pontos.....	144
Figura 62 - Gráfico de controle TFN T^2 (fase I) após a retirada dos pontos.....	144
Figura 63 - Gráfico de controle IT2TFN T^2 (fase I) para monitorar os níveis de concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ e os níveis de concentração de SO_2 em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ simultaneamente por meio da estatística $T^2 D_{\text{TriT}}$	145
Figura 64 - Gráfico de controle IT2TFN T^2 (fase I) após a retirada parcial dos pontos fora de controle (análise de estabilidade).	146
Figura 65 - Gráfico de controle TFN T^2 (fase I) após a retirada dos pontos. Validação dos limites de controle.	146

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Gaps de Pesquisa Propostos pelos principais artigos da área	29
--	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Classificação da qualidade do ar de acordo com IQA.....	74
Tabela 2 - Simulação dos NMAs conforme a FOU para o cenário 1 ($L_1 = 0,25$ e $L_2 = 0,45$) (Continua).....	97
Tabela 3 - Simulação dos NMAs conforme a FOU para o cenário 1 ($L_1 = 0,25$ e $L_2 = 0,45$) (Continuação)	98
Tabela 4 - Simulação dos NMAs conforme a FOU para o cenário 2 ($L_1 = 0,50$ e $L_2 = 0,95$) (Continua).....	99
Tabela 5 - Simulação dos NMAs conforme a FOU para o cenário 2 ($L_1 = 0,50$ e $L_2 = 0,95$) (Continuação)	100
Tabela 6 - Simulação dos NMAs para os gráficos de controle $X-R$ Tradicionais e IT2TFN $X-R$. (FOU = 0,30)	104
Tabela 7 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle \bar{x} para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada. ...	119
Tabela 8 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle R para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada. ...	120
Tabela 9 – Tabulação das 20 primeiras amostras de dados fuzzificados para a concentração de MP_{10}	121
Tabela 10 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle \bar{x} TFN para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.	124
Tabela 11 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle \bar{x} TFN para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.	125
Tabela 12 – Tabulação das 20 primeiras amostras de dados fuzzy tipo-2 triangular para a concentração de MP_{10}	125
Tabela 13 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle \bar{x} IT2TFN para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.	129
Tabela 14 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle R IT2TFN para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.	129

Tabela 15 – Comparação entre os gráficos de controle X tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.	130
Tabela 16 – Comparação entre os gráficos de controle R tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.	131
Tabela 17 – Comparação entre os gráficos de controle $Xbar$ tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.	138
Tabela 18 – Comparação entre os gráficos de controle S tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.	139
Tabela 19 – Comparação entre os gráficos de controle S tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.	147

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CEP - Controle Estatístico de Processos

CETESB – Companhia Ambiental do Estado de São Paulo

CUSUM - Cumulated Sum

EQL – Extra Quadratic Less

EWMA - Exponentially weighted moving average

GIT2TFN – General Interval Type-2 Triangular Fuzzy Number

IT2TFN – Interval Type-2 Triangular Fuzzy Number

LM - Linha média

LIC- Limite Inferior de Controle

LSC - Limite Superior de Controle

MCUSUM – Multivariate Cumulated Sum

MEWMA – Multivariate Exponentially Weighted Moving Average

NMA- Número Médio de Amostras até o sinal

PIT2TFN – Perfectly Interval Type-2 Triangular Fuzzy Number

TFN- Triangular Fuzzy Number

TFN2 – Triangular Fuzzy Number Type-2

TraFN- Trapezoidal Fuzzy Number

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	21
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E QUESTÕES DE PESQUISA.....	21
1.2	OBJETIVOS.....	23
1.3	DELIMITAÇÃO.....	24
1.4	JUSTIFICATIVA.....	25
1.5	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	31
2	REVISÃO DE LITERATURA.....	33
2.1	GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS.....	33
2.1.1	Conceito de Gráfico de Controle.....	33
2.1.2	Gráficos de Controle por Variáveis.....	35
2.2	GRÁFICOS DE CONTROLE PARA PROCESSOS UNIVARIADOS.....	37
2.2.1	Gráficos de Controle X e R.....	37
2.2.2	Gráficos de Controle X e S.....	38
2.3	GRÁFICOS DE CONTROLE PARA PROCESSOS MULTIVARIADOS.....	39
2.3.1	Gráfico de Controle T^2 de Hotelling.....	41
2.4	ANÁLISE DE DESEMPENHO DE GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS.....	42
2.4.1	Número Médio de Amostras até o Sinal (NMA).....	43
2.5	TEORIA DOS CONJUNTOS <i>FUZZY</i> TIPO-1.....	44
2.5.1	Conceito de Lógica Fuzzy.....	44
2.5.2	Conjuntos Fuzzy Triangulares.....	46
2.5.3	Conjuntos α-cut.....	47
2.5.4	O Processo de Defuzzificação.....	48
2.6	TEORIA DOS CONJUNTOS <i>FUZZY</i> TIPO-2 INTERVALAR.....	49
2.6.1	Proposta de Mendel.....	49
2.6.2	Características de um Conjunto Fuzzy Tipo-2 Triangular Intervalar.....	50
2.6.3	Redução de Tipo e o Processo de Defuzzificação.....	55
2.7	GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS <i>FUZZY</i>	57
2.7.1	Gráficos de Controle X e R TFN.....	57
2.7.2	Gráficos de Controle X e S TFN.....	59
2.7.3	Gráficos de Controle Multivariados <i>Fuzzy</i>.....	61
2.8	GRÁFICOS DE CONTROLE <i>FUZZY</i> TIPO-2 INTERVALAR.....	63

2.8.1	Gráficos de Controle por Atributos Fuzzy Tipo-2 Intervalar	64
2.8.2	Gráficos de Controle por Variáveis Fuzzy Tipo-2 Intervalar	67
3	CLASSIFICAÇÃO, MATERIAIS E MÉTODO DA PESQUISA.....	69
3.1	CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA.....	69
3.1.1	Tipo da Pesquisa	69
3.1.2	Abordagem e Procedimentos.....	70
3.2	COLETA E TRATAMENTO DOS DADOS.....	71
3.2.1	Companhia Ambiental do Estado de São Paulo	71
3.2.2	Características dos Dados Coletados.....	73
3.3	TÉCNICAS E FERRAMENTAS DE ANÁLISE.....	74
3.3.1	Ferramentas Computacionais Aplicadas	74
3.3.2	Avaliação de Desempenho de Gráficos de Controle	75
3.3.3	Processo de Fuzzificação e Defuzzificação	77
3.4	APLICAÇÃO AOS DADOS DA CETESB E ANÁLISE COMPARATIVA	79
3.4.1	Implementação dos Gráficos de Controle X e R	79
3.4.2	Implementação dos Gráficos de Controle X e S	82
3.4.3	Implementação do Gráfico de Controle T^2	86
3.5	FLUXOGRAMA DA PESQUISA.....	89
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	91
4.1	GRÁFICO DE CONTROLE X - R E R POR UMA ABORDAGEM FUZZY TIPO-2 INTERVALAR	91
4.1.1	Equacionamento e Propriedades.....	91
4.1.2	Avaliação de Desempenho do Gráfico de Controle de X	95
4.1.3	Avaliação de Desempenho dos Gráficos de Controle de X - R	103
4.2	GRÁFICO DE CONTROLE X - S E S POR UMA ABORDAGEM FUZZY TIPO-2 INTERVALAR	106
4.2.1	Equacionamento e Propriedades.....	106
4.3	GRÁFICO DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING POR UMA ABORDAGEM FUZZY TIPO-2 INTERVALAR.....	109
4.3.1	Equacionamento e Propriedades.....	109
4.4	MONITORAMENTO DA QUALIDADE DO AR POR GRÁFICOS DE CONTROLE FUZZY TIPO-2 INTERVALAR	112
4.4.1	Sistema de Monitoramento da Concentração de MP_{10}	112
4.4.2	Sistema de Monitoramento Multivariado para MP_{10} e SO_2	114

4.4.3	Caracterização de Dados IT2TFN.....	115
4.5	APLICAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE X E R NO MONITORAMENTO DA QUALIDADE DO AR.....	116
4.5.1	Gráficos de Controle X e R Tradicionais.....	116
4.5.2	Gráficos de Controle X e R TFN.....	120
4.5.3	Gráficos de Controle X e R IT2TFN	125
4.6	APLICAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE X E S NO MONITORAMENTO DA QUALIDADE DO AR.....	132
4.6.1	Gráficos de Controle X e S Tradicionais.....	132
4.6.2	Gráficos de Controle X e S TFN	133
4.6.3	Gráficos de Controle X e S IT2TFN	135
4.7	APLICAÇÃO DO GRÁFICO DE CONTROLE T ² DE HOTELLING NO MONITORAMENTO DA QUALIDADE DO AR.....	140
4.7.1	Gráfico de Controle T² de Hotelling.....	140
4.7.2	Gráfico de Controle T² TFN	142
4.7.3	Gráfico de Controle T² IT2TFN	145
5	CONCLUSÕES.....	149
5.1	VERIFICAÇÃO DOS OBJETIVOS E RESPOSTAS À QUESTÃO DE PESQUISA.....	149
5.2	SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS.....	151
	REFERÊNCIAS.....	152
	APÊNDICE A – ALGORITMO DE SIMULAÇÃO DO NMA PARA AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE PROPOSTOS.....	159
	APÊNDICE B – FASE I DOS GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS APLICADOS AOS DADOS DE POLUIÇÃO ATMOSFÉRICA.....	164
	APÊNDICE C – PLANILHAS DE RESULTADO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE IT2TFN X-R, IT2TFN X-S E IT2TFN T² REFERENTES AOS DADOS DA CETESB	182

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E QUESTÕES DE PESQUISA

O controle estatístico de processos (CEP) é uma das técnicas utilizadas para controlar processos e distinguir causas de variação, sinalizando assim a necessidade de ações corretivas. Walter Shewhart em 1924, desenvolveu o CEP com objetivo de melhoria da qualidade e reduzir a variabilidade nos processos produtivos (RAZALI *et al.*, 2021).

Quando os julgamentos e subjetividade humana desempenham um papel importante na definição da característica de qualidade, os gráficos de controle tradicionais não podem ser aplicados. Neste caso a teoria dos conjuntos *fuzzy* desenvolvida por Zadeh (1965) pode ser utilizada, pois, traz uma maior flexibilidade para o gráfico de controle, mais informações sobre a situação do processo, assim como a melhora do desempenho do mesmo (OZDEMIR, 2020).

A fim de reunir os conceitos de gráficos de controle *fuzzy* e teoria dos conjuntos *fuzzy*, trabalhos importantes foram desenvolvidos utilizando-se tanto de gráficos de controle por variáveis quanto gráficos de controle por atributos como Bradshaw (1983), Wang e Raz (1990), Gulbay, Kahraman e Ruan (2004), Gulbay e Kahraman (2006).

Erginel *et al.* (2011) introduziram o desvio padrão *fuzzy* para obter o gráfico de controle *fuzzy* \bar{X} -S. O gráfico de controle proposto foi usado na indústria de alimentos para monitorar se os processos estavam ou não sob controle considerando aparência, sabor e cor dos alimentos. Sentürk *et al.* (2014) propuseram o gráfico de controle *fuzzy* EWMA (*exponentially weight moving average*), que pode ser aplicado para detectar pequenas alterações no processo. Kaya, Erdogan e Yildiz (2017) sugeriram a aplicação do gráfico de controle *fuzzy* a valores individuais na área financeira, para detectar pequenas mudanças, aumentar a flexibilidade nos limites de controle e, assim, analisar a variabilidade nos preços das ações.

Mendes, Machado e Rocha Rizol (2019) apresentaram o gráfico de controle *fuzzy* para o monitoramento da média e amplitude de processos univariados. No trabalho os valores da característica de qualidade são gerados pela inserção de incertezas e transformados em valores representativos para uma melhor comparação com os gráficos de controle tradicionais. O desempenho do gráfico de controle foi medido pelo NMA (número médio de amostras até o sinal) e pelo *Extra Quadratic Less* (EQL),

considerando-se nos dois casos a variação na magnitude de perturbação da média e da variabilidade. Os autores observaram que o gráfico de controle *fuzzy* tem maior eficiência do que os gráficos de controle tradicionais.

Em situações em que existem várias fontes de incerteza para os dados em análise, é viável a utilização da abordagem *fuzzy* tipo-2, proposta por Zadeh (1978), e formulada matematicamente por Mendel (2001). De acordo com Mendel e John (2002), é possível aplicar os conjuntos *fuzzy* intervalar tipo-2 em algumas situações, são elas: o sistema que gera os dados é conhecido por variar no tempo e a formulação matemática dessa variação no tempo é desconhecida, os recursos usados em um aplicativo de reconhecimento de padrões têm atributos estatísticos não estacionários que são desconhecidos, o conhecimento é extraído de um grupo de especialistas usando questionários com palavras incertas, entre outras.

Embora a teoria dos conjuntos *fuzzy* proposta por Zadeh (1965) tenha grandes vantagens, por vezes os conjuntos *fuzzy* clássicos não podem modelar a incerteza com definições claras para as funções de pertinência. Assim, conjuntos de *fuzzy* de tipo-2 podem ser utilizados com sucesso para melhorar a qualidade de modelação da incerteza. Sabe-se também que as funções de pertinência dos conjuntos clássicos *fuzzy* consistem em duas dimensões, enquanto as funções de pertinência dos conjuntos de *fuzzy* de tipo-2 são tridimensionais. Assim, os conjuntos *fuzzy* tipo-2 podem representar com sucesso a incerteza e reduzir os seus efeitos nocivos (KAYA; TURGUT, 2021).

Senturk e Antucheviciene (2017) desenvolveram gráficos de controle c usando o método de defuzzificação para conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalar. Teksen e Anagun (2017) apresentaram métodos de defuzzificação e probabilidade para gráficos de controle c utilizando a lógica *fuzzy* tipo-2. Teksen e Anagun (2018a) usaram os métodos de redução e defuzzificação para conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalar para gráficos de controle tipo c. Teksen e Anagun (2018b) demonstraram como criar limites de controle para gráficos de controle \bar{X} -R utilizando os números *fuzzy* tipo-2 intervalar trapezoidal (IT2TraFN).

Existem vários estudos que utilizam números *fuzzy* type-2 na literatura. No entanto, não se encontrou na literatura disponível gráficos de controle para medidas individuais e amplitude móvel utilizando números *fuzzy* type-2, somente para os conjuntos *fuzzy* clássicos.

Ao que concerne a gráficos de controle por variáveis por uma abordagem *fuzzy* tipo-2, são apresentadas as seguintes questões de pesquisa:

- Quais são os conceitos e métodos referentes a teoria dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 aplicados em gráficos de controle por variáveis?
- Quais são os critérios e condições para a implementação de conjuntos *fuzzy* tipo-2 no monitoramento de processos?
- Quais são as vantagens e desvantagens do uso da abordagem *fuzzy* tipo-2 em gráficos de controle por variáveis (univariados e multivariados)?

1.2 OBJETIVOS

No intuito de obter resposta às questões de pesquisa estabelecidas na Seção 1.1 o objetivo geral deste trabalho é propor gráficos de controle por variáveis do tipo \bar{X} -R, \bar{X} -S e T^2 fazendo uso de uma abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar utilizando de números *fuzzy* triangulares (IT2TFN) para o monitoramento de processos univariados e multivariados.

Como objetivos específicos, têm-se:

- Propor modelos de gráficos de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar por variáveis do tipo \bar{X} -R e \bar{X} -S a partir da adaptação de modelos da literatura;
- Desenvolver modelo de gráfico de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar da estatística T^2 para o monitoramento de processos bivariados;
- Avaliar o desempenho do gráfico de controle \bar{X} e \bar{X} -R *fuzzy* tipo-2 intervalar por meio do NMA (número médio de amostras até o sinal) obtido de testes computacionais;
- Identificar as principais condições dos processos nos quais os gráficos de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar podem ser aplicados;
- Apresentar métodos viáveis de coleta e análise de dados amostrais segundo uma abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar para os gráficos de controle \bar{X} -R, \bar{X} -s e T^2 ;
- Aplicar os modelos a um problema real da Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (CETESB) associado à poluição atmosférica;
- Comparar os gráficos de controle \bar{X} -R, \bar{X} -S e T^2 utilizando-se dos dados da CETESB pelas perspectivas tradicional, *fuzzy* tipo-1 e *fuzzy* tipo-2 intervalar.

1.3 DELIMITAÇÃO

A pesquisa é delimitada aos gráficos de controle por variáveis fazendo uso de uma abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar.

No que tange ao CEP, o foco principal do trabalho está em gráficos de controle por variáveis, uma vez que serão estudadas as implicações das incertezas oriundas do sistema medição, além das subjetividades. No caso de processos univariados, são aplicados os gráficos de controle \bar{X} e R (em conjunto), \bar{X} e S (em conjunto).

Para processos multivariados, é aplicado o gráfico de controle do tipo T^2 de Hotelling, considerando no caso, apenas duas variáveis. Nesse caso, serão duas variáveis mensuráveis que podem ou não estar correlacionadas.

Os modelos tanto de gráficos de controle pela abordagem *fuzzy* tipo-2 são extraídos da literatura (livros, artigos e revistas científicas). No caso de livros, obras da área de controle estatístico de processos e de teoria dos conjuntos *fuzzy*. Quanto aos artigos, estes são pesquisados nas bases Scopus e Web of Science, fazendo uso de palavras-chave como “*control chart*”; “*fuzzy*” e/ou “*type-2 fuzzy*”.

Em conjunto com os gráficos de controle é aplicada, dentre várias abordagens e modelos de lógica fuzzy tipo-2, a abordagem fuzzy tipo-2 intervalar para números *fuzzy* triangulares, isto é, *triangular fuzzy numbers*, que para esta pesquisa serão descritos por IT2TFN. De acordo com Kaya e Kahraman (2011), quando as características de qualidade a serem monitoradas puderem ser obtidas por um instrumento de medição, os números *fuzzy* triangulares representam melhor os valores medidos que se aproxima de um único valor.

Fazendo uso da linguagem de programação como o R, é possível realizar a avaliação de desempenho dos gráficos de controle propostos frente aos gráficos de controle clássicos. Tal avaliação poderá é feita calculando o NMA em cada cenário apresentado. Os cenários são definidos conforme o nível do *alpha-cut* para os gráficos de controle *fuzzy* do tipo-1; e a altura $H(\tilde{A}^L)$ referente à função de pertinência inferior, juntamente com a altura da mancha de incerteza para gráficos de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar. A análise de desempenho, delimita-se ao gráfico de controle \bar{X} e R *fuzzy* tipo-2 intervalar sendo comparado aos modelos tradicional e *fuzzy* tipo-1.

Por fim, realiza-se uma aplicação a dados públicos da Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (CETESB). Dados de poluição atmosférica como MP_{10} (material

particulado de $10\mu\text{g}/\text{m}^3$) e SO_2 (dióxido de enxofre), possuem as características necessárias para a implementação da lógica *fuzzy* do tipo-2 intervalar. Os dados foram obtidos para o nível de poluição atmosférica para o poluente MP_{10} para o uso em gráficos de controle univariados no período de 01 de janeiro de 2021 a 31 de março de 2021. Para o uso em gráficos de controle multivariados obtém-se além do MP_{10} , obtém-se também dados referentes ao SO_2 , sendo possível assim a implementação do gráfico de controle de T^2 de Hotelling.

Dentre as diversas estações de medição, escolheu-se a estação da Marginal Tietê – Ponte dos Remédios devido ao volume de variáveis medidas e localização geográfica. Para dados *fuzzy* tipo-2 intervalar, é possível que os estudos sejam estendidos a outras estações próximas.

1.4 JUSTIFICATIVA

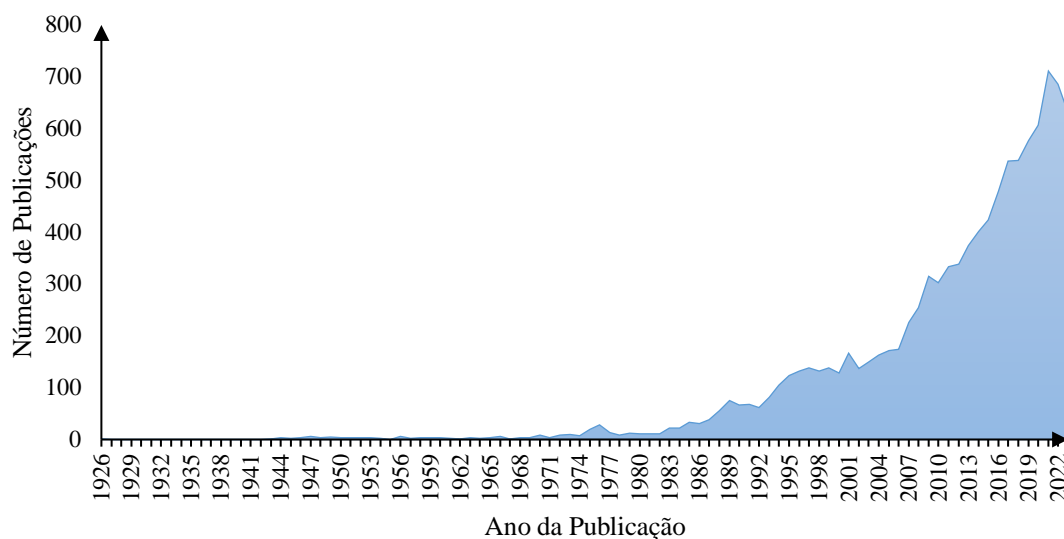
Com o aumento do volume de informação e da capacidade de processamento dos computadores, a quantidade de variáveis que podem interferir nos processos (independente da natureza) também aumenta, assim como a detecção (medição) destas. Além das incertezas presentes em processos de medição, há também a subjetividade humana que participa de grande parte dos processos, seja na execução de tarefas seja na tomada de decisão. Desta maneira, percebe-se que o simples uso do controle estatístico de processo pode não ser o suficiente, necessitando de novas abordagens que visam aprimorar os modelos de gráfico de controle já existentes.

A teoria dos conjuntos fuzzy clássica aplicada em gráficos de controle já foi explorada e se mostrou eficiente, porém há casos onde existem um número maior de incertezas, dados vagos e subjetividades humanas, torna-se necessário o uso de conjuntos fuzzy do tipo-2. No caso de um sistema de medição que monitore a poluição atmosférica, há diversos fatores interferindo na resposta que vão desde as condições dos instrumentos de medição, quanto ao comportamento humano, estações do ano e outros problemas ambientais correlatos, a abordagem *fuzzy* tipo-2 pode ser considerada adequada para o monitoramento da qualidade do ar, por considerar mais fontes de incerteza em relação aos conjuntos *fuzzy* clássicos (tipo-1).

A fim de evidenciar a relevância acadêmica do tema, pesquisa-se a palavra-chave “*control chart*” nas bases Scopus® e Web of Science®, até o ano de 2023 foram

publicados 10.359 documentos, delimitados a artigos científicos. Obtendo assim o gráfico, representado pela Figura 1:

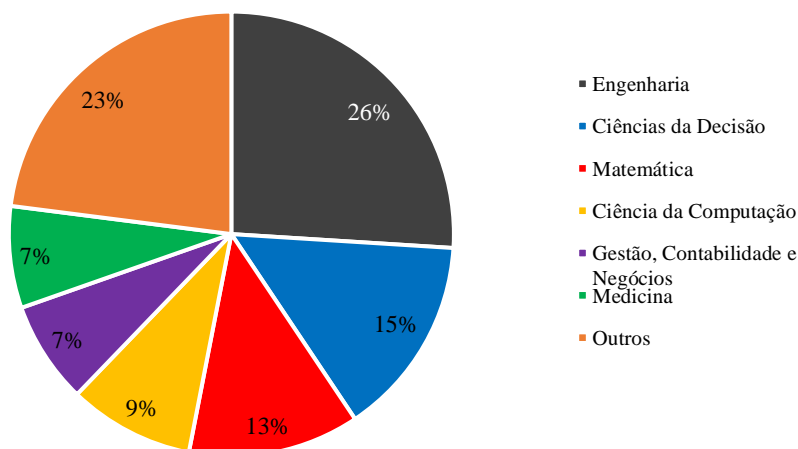
Figura 1 - Publicações de artigos referentes a gráficos de controle.



Fonte: adaptado de Scopus Elsevier®(2023)

Como pode ser observado na Figura 1, os gráficos de controle, além de serem a ferramenta de CEP mais utilizada, continuam sendo um tema cientificamente relevante, chegando acumulando 5.589 artigos publicados nos últimos 10 anos (2014-2023). A aplicação dos gráficos de controle também é diversa, porém se concentra mais nas áreas de Engenharia, Ciências da Decisão e Matemática que juntas são responsáveis por 54% das publicações, como pode ser observado na Figura 2.

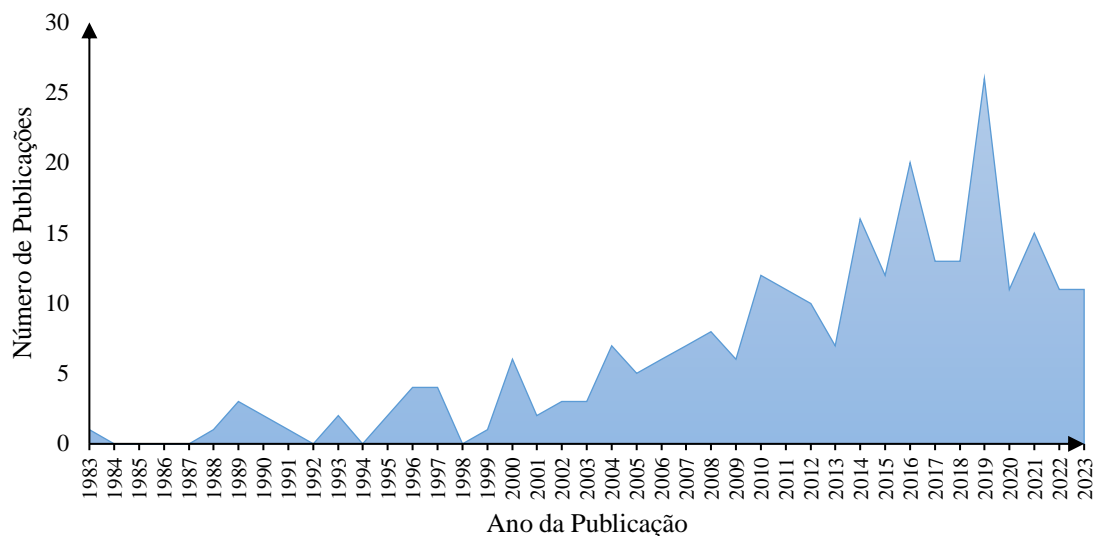
Figura 2 - Publicações de artigos sobre gráficos de controle por área de conhecimento.



Fonte: adaptado de Scopus Elsevier®(2023)

A fim de se aproximar do ponto focal deste trabalho, ao se aplicar as palavras-chave “*control chart*” e “*fuzzy*” nas bases da Scopus® e Web of Science® e limitando apenas a artigos científicos, obteve-se 262 documentos. A Figura 3 ilustra o crescimento das publicações ao longo dos anos.

Figura 3 - Publicações de artigos referentes a gráficos de controle fuzzy tipo-1

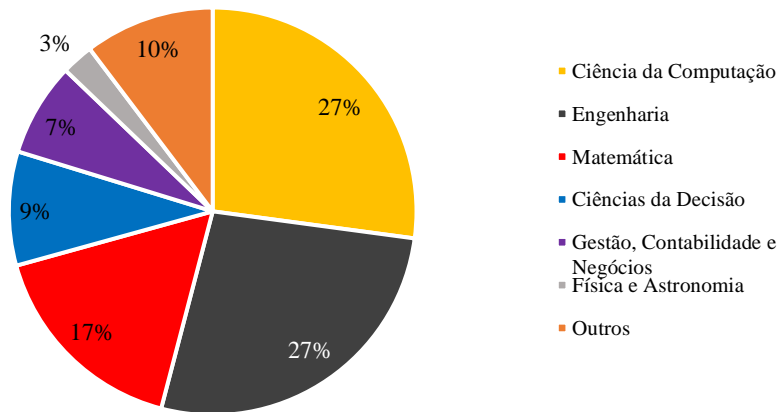


Fonte: adaptado de Scopus Elsevier®(2023)

A primeira publicação sobre o tema surgiu no ano de 1983, apresentando uma tendência de crescimento a partir dos anos 2000. O pico de publicações se dá no ano de 2019 com número de 26 publicações, chegando a 11 publicações nos ano de 2023.

Quanto as áreas de pesquisa, as publicações se concentram em 3 principais: Ciência da Computação (27%), que demonstrou maior relevância com o uso de conjuntos fuzzy, Engenharia (27%) e Matemática (17%). Tal situação pode ser observada na Figura 4.

Figura 4 – Áreas envolvidas nos artigos de gráficos de control *fuzzy* tipo-1.

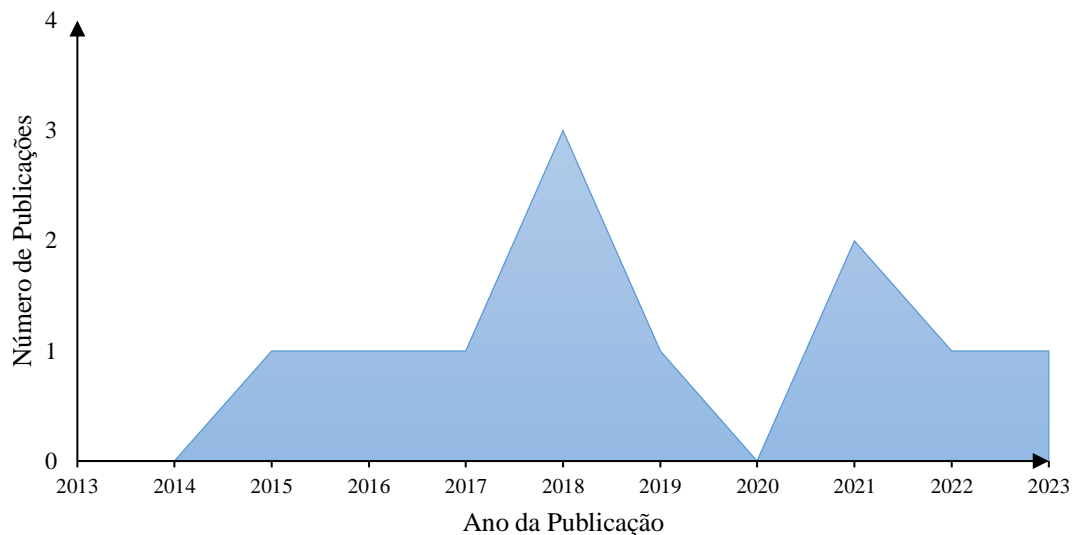


Fonte: adaptado de Scopus Elsevier®(2023)

A integração da teoria dos conjuntos *fuzzy* aos gráficos de controle altera o foco das publicações, uma vez que depende mais do uso de algoritmos computacionais, além das propriedades matemáticas dos conjuntos *fuzzy*.

Limitando mais a pesquisa, ao buscar artigos na base da Scopus® e Web of Science utilizando as palavras-chave “*control chart*” e “*type-2 fuzzy*”, obteve-se 11 artigos até 2023, sendo o primeiro no ano de 2015.

Figura 5 - Publicações de artigos referentes a gráficos de controle fuzzy tipo-2



Fonte: adaptado de Scopus Elsevier®(2023)

No que se refere a gráficos de controle por atributos, Senturk e Antucheviciene (2017), Teksen e Anagün (2018a) e Teksen e Anagün (2019) propuseram a aplicação de gráficos de controle por atributos do tipo c fazendo uso de números fuzzy do tipo-2

trapezoidais, apresentando todo o equacionamento para os limites de controle. Foram feitas aplicações em dados reais, sugestão de regras de decisão para a interpretação dos gráficos e a aplicação de métodos de defuzzificação. A partir do trabalho de Senturk e Antucheviciene (2017), Erginel *et al.* (2018) desenvolveram os limites para os gráficos de controle por atributos dos tipos p e np utilizando TraFN2, aplicados em um processo de extração de gás natural e de fabricação de bolos, respectivamente.

Em relação aos gráficos de controle por variáveis, Teksen e Anagün (2018b), propuseram a aplicação de gráficos de controle \bar{X} -R fazendo uso de TraFN2. Kaya e Turgut (2021) propuseram gráficos \bar{X} -R, \bar{X} -S e $I - MR$ (para valores individuais) aplicados na medição de um terminal macho de um conector elétrico. Razali *et al.* (2021) propuseram um gráfico CUSUM e Adepoju *et al.* (2022) propuseram um gráfico de controle EWMA, ambos fazendo uso de conjunto fuzzy tipo-2 intervalar utilizando de números trapezoidais. O primeiro aplicou o modelo a um processo de fabricação de fertilizantes enquanto o segundo aplicou a um exemplo ilustrativo. O Quadro 1 sintetiza as principais propostas dos artigos.

Quadro 1 - *Gaps* de Pesquisa Propostos pelos principais artigos da área

Ano	Autores	Título	Gráfico de Controle Abordado	Proposta de Pesquisas Futuras
2015	ZARANDI, M.H.F. e NAJAFI, S.	A type-2 fuzzy-statistical clustering approach for estimating the multiple change points in a process mean with monotonic change	Não há um gráfico de controle específico, foca na identificação de padrões (causas especiais)	<ul style="list-style-type: none"> - Estender o modelo para um conjunto fuzzy tipo-2 generalizado; - Estudar os efeitos da variação no tamanho da amostra; - Analisar as variações na média e no desvio simultaneamente;
2016	KHORMALI, A. e ADEH, J.	A novel approach for recognition of control chart patterns: Type-2 fuzzy clustering optimized support vector machine	Não há um gráfico de controle específico, foca na identificação de padrões (causas especiais) por meio de <i>Machine Learning</i>	Não há
2017	SENTURK, S. e ANTUCHEVICIENE, J.	Interval Type-2 Fuzzy c-Control Charts: An Application in a Food Company	Gráfico de Controle (número de defeitos)	<ul style="list-style-type: none"> - Outros tipos de gráficos de controle; - Aplicação de outros conjuntos fuzzy (intuicionista, hesitante e/ou neutrosófico)

Ano	Autores	Título	Gráfico de Controle Abordado	Proposta de Pesquisas Futuras
2018	TEKSEN, H.E. e ANAGUN, A.S.	Interval type-2 fuzzy c-control charts using likelihood and reduction methods	Gráfico de Controle (número de defeitos)	- Aplicação de conjuntos fuzzy tipo-2 trapezoidais diferentes; - Aplicação em um caso real
2018	ERGINEL, N.; SENTURK, S. & YILDIZ, G.	Modeling attribute control charts by interval type-2 fuzzy sets	Gráfico de Controle (proporção de defeituosos) e Gráfico de Controle np (número de defeituosos)	- Aplicação do conjunto fuzzy neutrosófico
2018	TEKSEN, H.E. e ANAGUN, A.S.	Different methods to fuzzy X-R control charts used in production: Interval type-2 fuzzy set example	Gráficos de Controle \bar{X} -R (média e amplitude)	- Implementação de novos métodos relacionados ao fuzzy tipo-2 intervalar;
2019	TEKSEN, H.E. e ANAGUN, A.S.	Interval type-2 fuzzy c-Control charts using ranking methods	Gráfico de Controle (número de defeitos)	- Estudar os efeitos dos diferentes métodos de ranqueamento.
2021	KAYA, I e TURGUT, A.	Design of variable control charts based on type-2 fuzzy sets with a real case study	Gráficos de Controle \bar{X} -R (média e amplitude), \bar{X} -S (média e desvio-padrão)	- Outros tipos de gráficos de controle como p, np, c e u; - Análise de desempenho por meio de NMA e OC - Aplicação de outros conjuntos fuzzy (intuicionista, hesitante e/ou pitagoriano)
2021	RAZALI, N.H.M.; ABDULLAH, L.; SALLEH, Z.; AB GHANI, A.T. e YAP, B.W.	Interval Type-2 Fuzzy Standardized Cumulative Sum Control Charts in Production of Fertilizers	Gráfico CUSUM (soma acumulada)	- Aumento do tamanho amostral; - Outras estruturas de CUSUM e de defuzzificação
2022	ADEPOJU, A.A.; ABDULKADIR, S.S.; JIBASEN, D. e CHIROMA, H.	Interval Type-2 fuzzy Exponentially Weighted Moving Average Control Chart	Gráfico de Controle EWMA (média móvel exponencialmente ponderada)	- Extensão para o caso multivariado (MEWMA); - Aplicação de outros conjuntos fuzzy (intuicionista e/ou hesitante)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Todos os artigos propuseram e/ou aplicaram modelos de gráfico de controle uni-atributos ou uni-variados, usam de regras de decisão, aplicam a dados reais, porém não fazem sequer a menção de uma análise de desempenho dos gráficos para fins de

comparação, tornando a avaliação de desempenho por meio do NMA uma oportunidade de pesquisa a ser explorada.

Os números *fuzzy* triangulares do tipo-2 TFN2 são mais simples e apresentam um melhor ajuste no que se refere a medição de variáveis, por tal situação são preferíveis aos números *fuzzy* trapezoidais do tipo-2 TraFN2 (KAYA e KAHRAMAN, 2011).

Por não haver pesquisas envolvendo gráficos de controle para processos multivariados utilizando uma abordagem *fuzzy* tipo-2, contatou-se que é outra oportunidade de pesquisa a ser explorada.

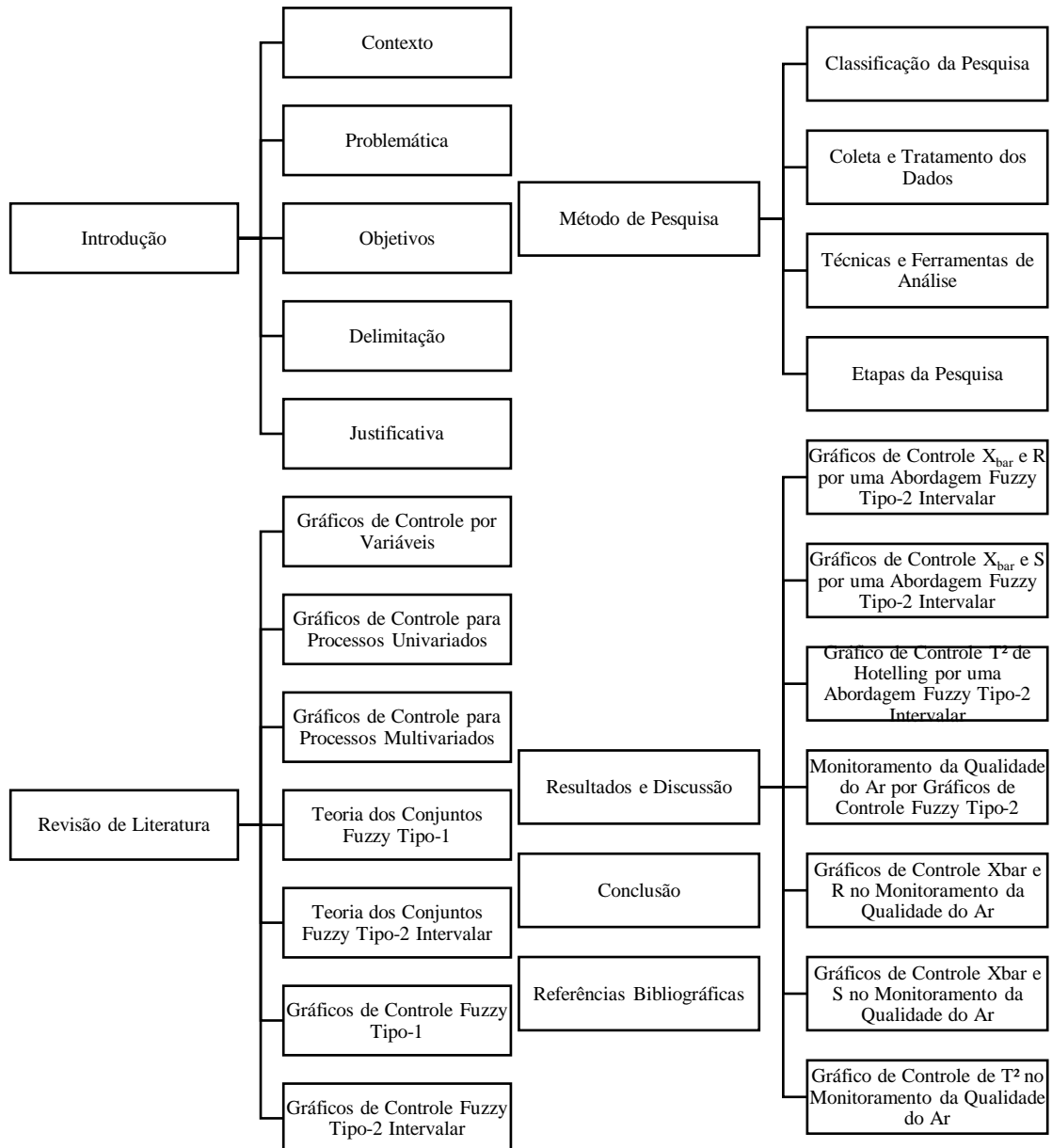
Normalmente as variáveis difusas estão associadas à linguística e à ambiguidade, mas as variáveis contínuas (principalmente) apresentam incerteza e podem gerar diferentes interpretações. O processo de monitoramento da qualidade do ar reúne todas as características necessárias para que se possa implementar gráficos de controle sob uma abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar. Inicia-se apresentando os gráficos de controle por variáveis mais simples e à medida que vão surgindo dúvidas acerca das informações ou até dificuldade de interpretação, recorre-se a um modelo de gráfico de controle que melhor se adeque à situação, e no caso deste trabalho, o acréscimo da teoria dos conjuntos *fuzzy* tipo-1 e tipo-2.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta tese está organizada em mais quatro Capítulos, além deste introdutório. O Capítulo 2 fornece uma Revisão da Literatura, apresentando e discutindo conceitos relevantes já consolidados e os mais recentes trabalhos acerca da temática da pesquisa. No Capítulo 3, apresenta-se o método utilizado na pesquisa, assim como suas etapas. No Capítulo 4, Resultados e Discussões, são propostos modelos de gráficos de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar referente a variáveis de processo, são feitas simulações a fim de comparar o gráfico de controle \bar{X} e R e por fim são feitas aplicações a dados da Companhia Ambiental do Estado de São Paulo referentes a poluição atmosférica considerando os gráficos tradicionais, *fuzzy* tipo-1 (TFN) e *fuzzy* tipo-2 intervalar (IT2TFN). No Capítulo 5, apresenta-se as conclusões do trabalho realizado e discute-se sugestões de pesquisas futuras, seguidas pelas referências bibliográficas consultadas para a elaboração deste texto. Finalmente, nos Apêndices A-C são apresentados os algoritmos utilizados para a análise de desempenho dos gráficos, as figuras referentes a

fase I dos gráficos de controle aplicados aos dados de poluição atmosférica da CETESB e as planilhas de cálculo referentes aos gráficos de controle IT2TFN \bar{X} -R, IT2TFN \bar{X} -S e IT2TFN T^2 . A Figura 6, ilustra a estrutura do trabalho:

Figura 6 – Estrutura do trabalho



Fonte: Elaborado pelo autor.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo serão apresentados os principais tópicos estudados que foram de fundamental importância para o desenvolvimento e embasamento teórico do trabalho.

2.1 GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS

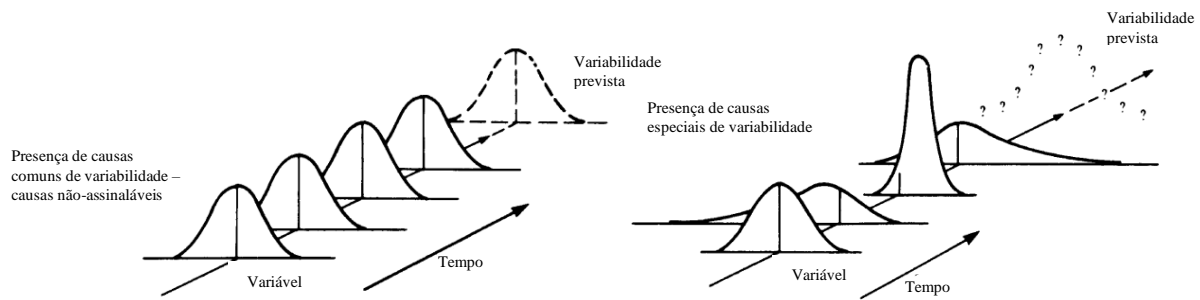
2.1.1 Conceito de Gráfico de Controle

Os gráficos de controle são ferramentas poderosas no que se refere a tomada de ações corretivas, preventivas e preditivas na melhoria de processos. Desde sua criação por volta de 1924, quando Walter A. Shewhart aplicou tal ferramenta nos Bell Telephone Laboratories, os gráficos de controle vêm sendo amplamente implementados em indústrias de manufatura, e com o tempo passaram a ser usados em empresas de outras áreas no que se refere não somente a bens como também em serviços. (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

Desde a Era do Controle Estatístico de Processos, os gráficos de controle vem sendo a principal ferramenta capaz de promover a qualidade. Os gráficos de controle ilustram de forma clara a variabilidade do processo, que está relacionada às diferenças entre as unidades produzidas. As medições/observações são a forma de registrar esta variabilidade natural do processo, quando este está sujeito a causas comuns ou aleatórias. Quando o processo está sujeito a causas especiais, o gráfico irá apontá-las tornando possível não só o monitoramento de processos como também, tomadas de decisão no que se refere a identificação de defeitos, medidas de contenção e correção e acompanhamento da eficácia das ações tomadas. (MONTGOMERY, 2016; OAKLAND, 2008)

A Figura 7 ilustra as diferenças estatísticas entre causas aleatórias (comuns) e causas especiais a partir da medição de amostras.

Figura 7 – Diferenças entre causas comuns e causas especiais em processos



Fonte: Adaptado de Oakland (2008)

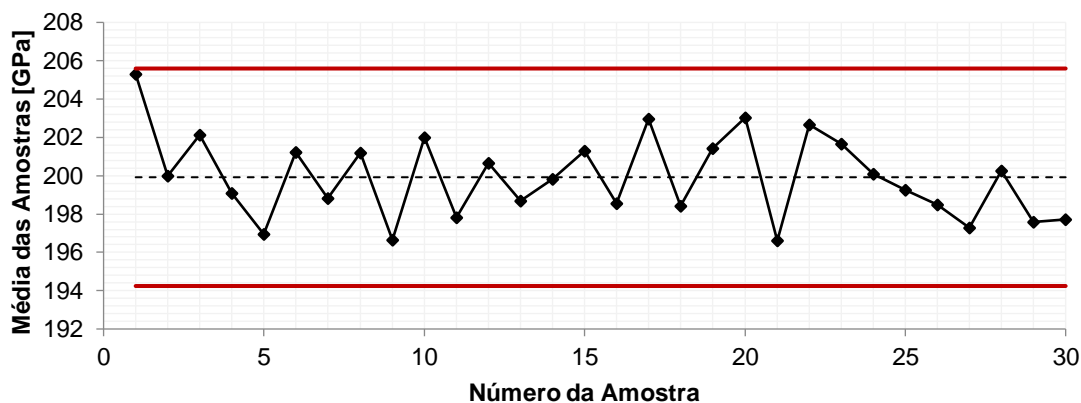
Tais características conferem aos gráficos de controle ao mesmo tempo certa complexidade frente a outras ferramentas da qualidade, robustez em relação às informações e decisões que podem ser tomadas a partir do mesmo.

Em qualquer processo que está sob controle estatístico, é imprescindível monitorar uma medida de localização (tendência central) e outra medida de variabilidade (dispersão), porém as incertezas relacionadas aos sistemas de medição são analisadas separadamente através das incertezas aleatórias que se referem a repetitividade e reprodutibilidade e incertezas sistemáticas relacionadas às características do instrumento de medição como escala, precisão e exatidão. (MONTGOMERY, 2016)

Os gráficos de controle podem ser classificados conforme a característica de qualidade que estes monitoram, que são respectivamente: gráficos de controle por variáveis e gráficos de controle por atributos. Para Staphenhurst (2005), esta classificação se dá pelo tipo de dados que são monitorados. Para os gráficos de controle por variáveis, os dados podem possuir um grau de precisão (definido, geralmente pelo número de casas decimais), e mensurar grandezas contínuas como comprimento, altura, massa, tempo entre outras. Para os gráficos de controle por atributos, os dados podem possuir ou não determinado atributo, como número de itens não conformes, número de não conformidades por lote, fazendo uso assim de variáveis discretas, ou seja, contáveis.

Os gráficos de controle consistem basicamente em três linhas plotadas que indicam respectivamente: limite superior de controle (*LSC*), linha média (*LM*) e limite inferior de controle (*LIC*); e as medidas de tendência central e/ou de dispersão acerca de cada amostra retirada do processo, para o caso de controle de variáveis. Essas medidas são referentes a alguma variável de processo e feitas periodicamente. (SAMONHYL, 2009). A Figura 8 exemplifica um gráfico de controle por variáveis.

Figura 8 – Exemplo de gráfico de controle \bar{X} para a medição do módulo de elasticidade de material metálico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.2 Gráficos de Controle por Variáveis

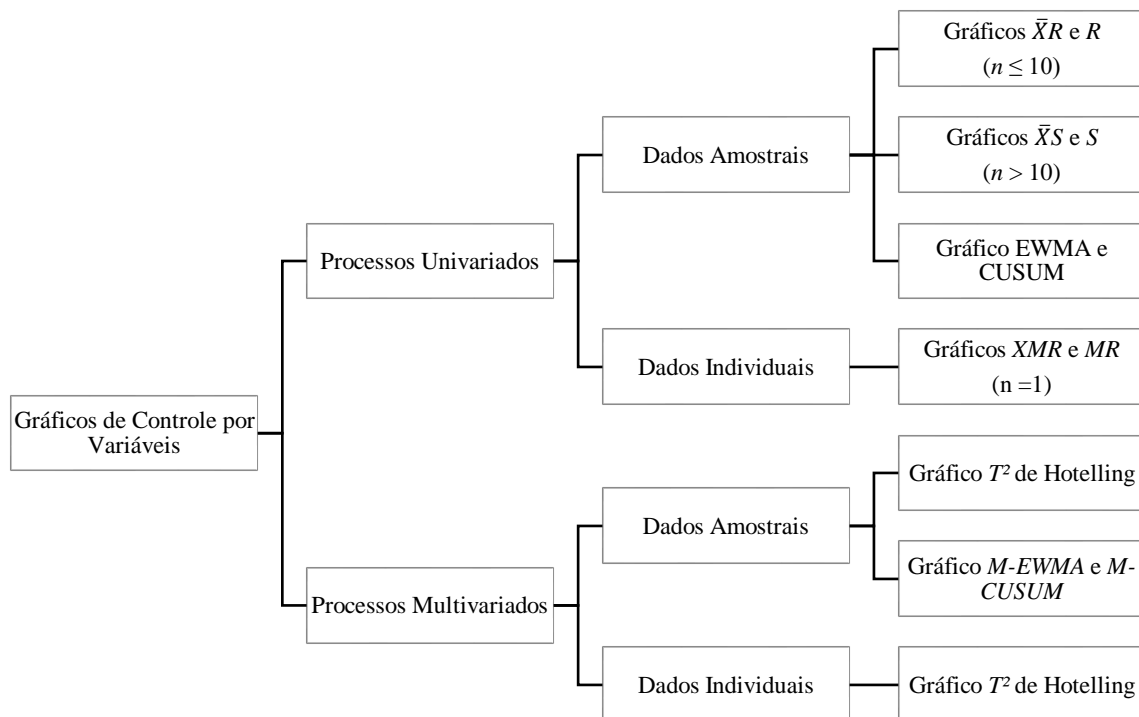
Ao lidar com um tipo de característica de qualidade que pode ser expressa como uma medida, é comum monitorar tanto o valor médio quanto a variabilidade. O gráfico de \bar{X} é amplamente utilizado para monitorar a média e a variabilidade do processo pode ser controlada pelo gráfico de R ou pelo gráfico do desvio padrão S . (MONTGOMERY, 2016).

De acordo com Costa, Epprecht e Carpinetti (2005), quando a variável a ser monitorada é contínua, é usual que se use um par de gráficos para monitorar o processo: um gráfico para monitorar a média e outro para monitorar a dispersão.

O monitoramento de variáveis de processo é muito importante na indústria. Woodall e Montgomery (1999), já afirmavam que o controle de processos multivariados seria uma área de CEP que se desenvolveria rapidamente.

Em muitas situações é necessário monitorar simultaneamente duas ou mais características de qualidade do processo. Sendo x_1 e x_2 duas variáveis de processo independentes entre si, com uma distribuição de probabilidade normal, estas podem ser monitoradas de forma simultânea por meio de gráficos de controle multivariados. (MONTGOMERY, 2016). A Figura 9 sintetiza os principais tipos de gráficos de controle por variáveis.

Figura 9 - Tipos de gráficos de controle por variáveis e suas aplicações



Fonte: Adaptado de Montgomery (2016)

Como pode ser observado na Figura 9, o tamanho da amostra impacta na escolha do tipo de gráfico de controle. Montgomery (2016) recomenda que no caso dos gráficos de controle \bar{X} - S , estes são mais eficientes quando se utiliza amostras moderadamente grandes ($n > 10$) quando comparados aos gráficos de controle \bar{X} - R .

Há gráficos de controle especiais que foram propostos baseados em outros tipos de estatística. Lowry *et al.* (1992), propuseram a partir dos gráficos *EWMA* e *CUSUM* (*cumulated sum*), um modelo multivariado denominado *MEWMA* (*multivariate exponentially weighted moving average*) e *MCUSUM* (*multivariate cumulated sum*).

Hotelling (1947) propôs o gráfico de controle que faz uso da estatística T^2 e é capaz de trabalhar o vetor das médias com a matriz de variâncias de duas ou mais variáveis. (MONTGOMERY, 2016)

2.2 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA PROCESSOS UNIVARIADOS

2.2.1 Gráficos de Controle \bar{X} e R

O gráfico de controle \bar{X} monitora a média das amostras de tamanho n , conforme (1), em contrapartida, o gráfico de controle R monitora a amplitude das mesmas amostras de tamanho, sendo as amplitudes R_i calculadas conforme (2):

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}}{n} \quad (1)$$

$$R_i = \text{máximo}(x_{ij}) - \text{mínimo}(x_{ij}) \quad (2)$$

Os parâmetros necessários para o cálculo dos limites de controle de ambos os gráficos para um conjunto de m amostras são obtidos por (3) e (4):

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i}{m} \quad (3)$$

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m} \quad (4)$$

O limite de controle superior (LSC), a linha média (LM) e o limite de controle inferior (LIC) para o gráfico \bar{X} podem ser obtidos por (5), (6) e (7):

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} \quad (5)$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{x}} \quad (6)$$

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} \quad (7)$$

sendo que A_2 é um coeficiente que depende do tamanho da amostra n e é calculado por (8) e d_2 é uma constante que depende do tamanho da amostra n (MONTGOMERY, 2016):

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \quad (8)$$

Os limites de controle para o gráfico de R podem ser obtidos por (9), (10) e (11):

$$LSC_R = D_4 \bar{R} \quad (9)$$

$$LM_R = \bar{R} \quad (10)$$

$$LIC_R = D_3 \bar{R} \quad (11)$$

sendo que D_3, D_4 são coeficientes que dependem do tamanho da amostra n e podem ser calculados por (12) e (13), e d_2 e d_3 são constantes que dependem do tamanho da amostra n (MONTGOMERY, 2016):

$$D_3 = 1 - \frac{3d_3}{d_2} \quad (12)$$

$$D_4 = 1 + \frac{3d_3}{d_2} \quad (13)$$

2.2.2 Gráficos de Controle \bar{X} e S

De acordo com Montgomery (2016), o gráfico S é preferível ao R quando o tamanho da amostra é maior que 10, ou seja, moderadamente grande, uma vez que a estimação de R se torna ineficiente para valores amostrais maiores.

Como já foi visto o gráfico de controle \bar{X} monitora a média das amostras de tamanho n , conforme (1), em contrapartida, o gráfico de controle S monitora o desvio-padrão de cada um dos subgrupos de tamanho n das m amostras, sendo os desvios-padrão s_i calculados conforme (14):

$$s_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n-1}} \quad (14)$$

Os parâmetros necessários para o cálculo dos limites de controle de ambos os gráficos para um conjunto de m amostras são obtidos utilizando-se (3), já a média dos desvios-padrão nas m amostras que pode ser obtida por (15):

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^m s_i}{m} \quad (15)$$

Os limites de controle para o gráfico \bar{X} podem ser obtidos pelas equações (16), (17) e (18):

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} \quad (16)$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{x}} \quad (17)$$

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s} \quad (18)$$

sendo que A_3 é um coeficiente que depende do tamanho da amostra n , de forma similar ao coeficiente A_2 do gráfico de controle \bar{X} em função de R (MONTGOMERY, 2016):

$$A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}} \quad (19)$$

Os limites de controle para o gráfico de s podem ser obtidos por (20), (21) e (22):

$$LSC_s = B_4\bar{s} \quad (20)$$

$$LM_s = \bar{s} \quad (21)$$

$$LIC_s = B_3\bar{s} \quad (22)$$

sendo que B_3 e B_4 são coeficientes que dependem do tamanho da amostra n e podem ser calculados por (23) e (24), c_4 é também uma constante que depende do tamanho da amostra n (MONTGOMERY, 2016):

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4} \quad (23)$$

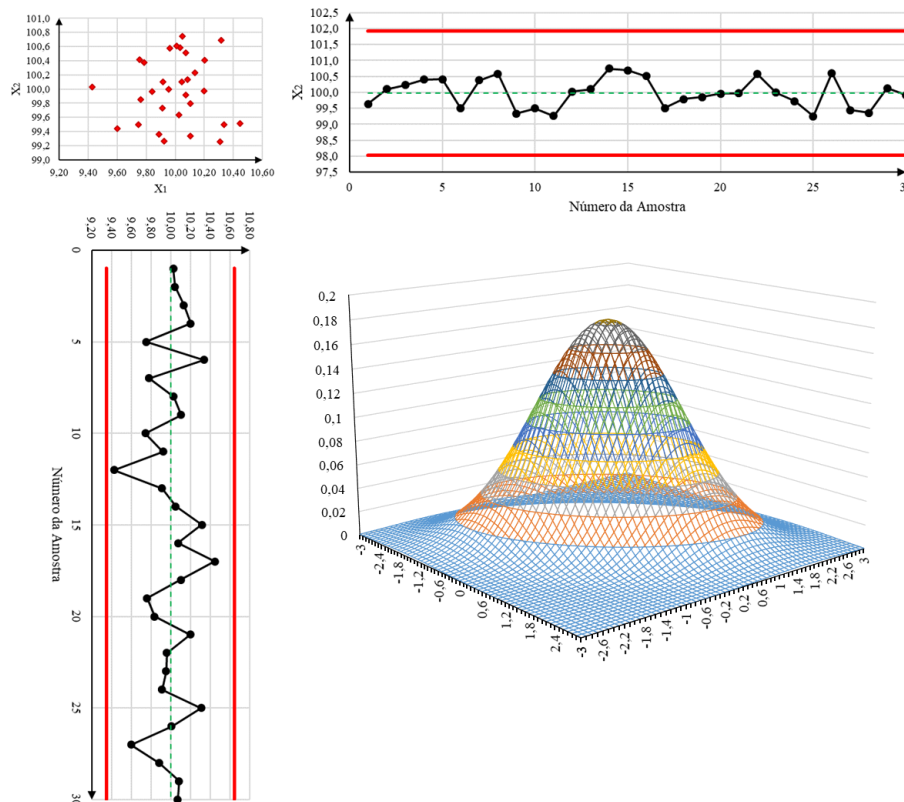
$$B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4} \quad (24)$$

2.3 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA PROCESSOS MULTIVARIADOS

De acordo com Hair *et al.* (2009), a informação disponível na tomada de decisão e tendem a continuar dessa forma no futuro e crescendo cada vez mais. As diversas variáveis de um processo podem ser “garimpadas” ou melhor, mineradas (*data mining*) para que sejam explicadas análises estatísticas multivariadas, considerando assim o máximo de informação.

Conforme Montgomery (2016), há situações nas quais é necessário monitorar ou controlar simultaneamente duas ou mais características de qualidade. Porém, monitorar duas características de qualidade de maneira independente, pode levar a erros de interpretação que resultarão em tomadas de decisão equivocadas. A forma de se representar graficamente duas variáveis x_1 e x_2 que podem ou não se correlacionar, pode ser ilustrada na Figura 10.

Figura 10 – Exemplo de processo multivariado com variáveis não correlacionadas.



Fonte: Adaptado de Montgomery (2016)

Para o caso de duas variáveis x_1 e x_2 , a função densidade de probabilidade pode ser expressa por (25) (HAMEDANI; TATA, 1975):

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\} \quad (25)$$

sendo σ_1 e σ_2 são os desvios-padrão das variáveis x_1 e x_2 ; μ_1 e μ_2 são as médias das variáveis x_1 e x_2 e ρ é o coeficiente de correlação entre as variáveis x_1 e x_2 , respectivamente.

2.3.1 Gráfico de Controle T^2 de Hotelling

O procedimento multivariado de monitoramento e controle de processo mais conhecido é o gráfico de controle T^2 de Hotelling, onde se monitorar o vetor médio do processo. É um análogo direto do gráfico de Shewhart univariada. (MONTGOMERY, 2016)

Hotelling (1947) propôs o primeiro modelo de monitoramento multivariado da qualidade. No caso ele realizou estudos sobre a mira de bombardeios, por se tratar de uma manobra militar que faz uso de muitas variáveis para se obter o máximo possível de precisão.

O gráfico de controle baseado na estatística T^2 para o monitoramento de processos multivariados foi criado por Hotelling (1947). Assim como gráfico de \bar{X} , o gráfico de T^2 apresenta pequena sensibilidade a pequenos deslocamentos nos parâmetros do processo. (MACHADO, 2009)

Para o caso do monitoramento de processos onde se obtém medições organizadas em subgrupos racionais. O valor da estatística de T^2 a ser plotado no gráfico de controle, considerando duas variáveis e amostras de tamanhos iguais, é dado por (26):

$$T^2 = \frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} [\sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12}^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)(\bar{x}_2 - \mu_2)] \quad (26)$$

sendo que, para duas variáveis de qualidade x_1 e x_2 , μ_1 e μ_2 são as médias do processo que podem ser estimadas, σ_1^2 e σ_2^2 são as variâncias, σ_{12} é a covariância, \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são as médias de cada subgrupo amostral, respectivamente.

Os limites de controle (LCs) devem ser aplicados na fase I, segundo (27) e (28):

$$LSC_{T^2} = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (27)$$

$$LIC_{T^2} = 0 \quad (28)$$

sendo que p é número de características de qualidade sendo monitoradas (variáveis), m é a quantidade de amostras de cada característica de qualidade, n é tamanho dos subgrupos racionais (tamanho amostral) e F refere-se ao valor tabelado da distribuição

de Fisher-Snedecor para uma significância α , p variáveis e $mn-m-n+1$ graus de liberdade.

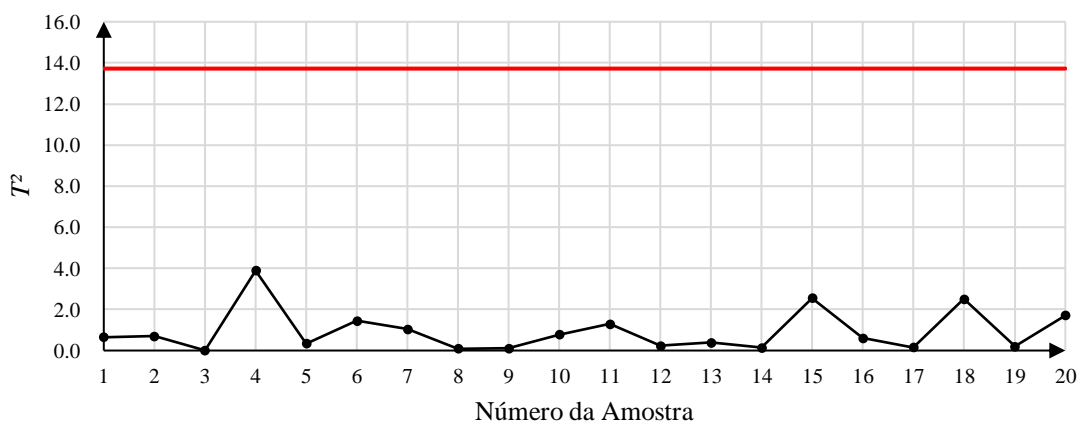
Uma vez excluídos os pontos fora de controle para a estimação dos parâmetros, aplica-se (29) e (30) para o monitoramento do processo (fase II):

$$LSC_{T^2} = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (29)$$

$$LIC_{T^2} = 0 \quad (30)$$

O gráfico de controle de T^2 de Hotelling, a partir de duas variáveis de processo, é capaz de sintetizar as informações em apenas um gráfico, conforme ilustra a Figura 11.

Figura 11 – Gráfico de controle T^2 de Hotelling, a partir de 20 de amostras de tamanho 10 para as variáveis x_1 e x_2 .



Fonte: Adaptado de Montgomery (2016)

2.4 ANÁLISE DE DESEMPENHO DE GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS

Conforme Costa, Epprecht e Carpinetti (2005), o estudo de desempenho de gráficos de controle mede sua capacidade de detecção de amostras fora de controle em função de outros parâmetros como o tamanho de amostra n , intervalo de tempo entre as amostras h e o fator de abertura k dos limites de controle, que para este trabalho foi considerado $k = 3$.

No caso de gráficos de controle que fazem uso de números *fuzzy*, os parâmetros *fuzzy* também serão considerados na análise de desempenho.

A análise de desempenho dos gráficos de controle pode ser realizada por várias medidas, porém a principal delas é o NMA, que também pode ser chamado de *ARL* (*average run length*).

2.4.1 Número Médio de Amostras até o Sinal (NMA)

Em situações das quais os processos se encontram estáveis, ou seja, livre de causas especiais, o NMA_0 é definido como a principal medida de desempenho. O NMA_0 revela o número de amostras necessárias para que haja um alarme falso no processo de monitoramento do processo. Isto implica que o gráfico de controle indicará que uma amostra está fora de controle, quando na verdade ela está em controle (JENSEN *et al.*, 2006). De acordo com o Montgomery (2016), o NMA_0 é o inverso do erro tipo I (α) como em (31):

$$NMA_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (31)$$

sendo α neste caso, a incerteza de tipo I, diferentemente da abordagem fuzzy tipo-1, cujo valor de α , refere-se ao *alpha-cut*.

Para Costa (2007), o gráfico de controle pode ser definido como um teste de hipótese, no qual as hipóteses, no caso amostras, são testadas constantemente:

H_0 : Processo em controle

H_1 : Processo fora de controle

ou ainda, para o caso de um teste de hipóteses referente a médias

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

Desta forma, a hipótese nula será verdadeira sempre que o valor da média amostral estiver dentro dos limites de controle, ou seja, sob controle. No caso contrário, rejeita-se a hipótese nula, considerando que o processo está fora de controle. Portanto, há dois tipos de erro no processo: erro tipo I e erro tipo II. Caso a hipótese H_0 seja considerada verdadeira (aceita), existe um risco α desta hipótese ser falsa. Em contrapartida, se a hipótese H_1 for a verdadeira, existe um risco β que a hipótese H_1 seja falsa (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

As probabilidades α e β são representadas, respectivamente por (32) e (33) respectivamente:

$$\alpha = \Pr(\bar{X} > LSC_{\bar{X}} \text{ ou } \bar{X} < LIC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0) \quad (32)$$

$$\beta = \Pr(LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0) \quad (33)$$

Conforme Costa, Epprecht e Carpinetti (2005), um gráfico de controle pode sinalizar mais rapidamente quando há deslocamentos na média, representados por δ , ou aumentos da variabilidade (perturbação) que podem ser representados por λ . Sendo assim, quando o processo está sob controle, o *NMA* pode ser calculado conforme (31) e quando estiver fora de controle $NMA = 1/Pd$ sendo $Pd = 1 - \beta$. Nesse caso Pd representa o poder de detecção do gráfico de controle, sendo $0 \leq Pd \leq 1$.

2.5 TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY TIPO-1

2.5.1 Conceito de Lógica Fuzzy

Em 1965, Zadeh deu início a lógica *fuzzy* (difusa) ou lógica nebulosa, que diferentemente da lógica Booleana que atribui apenas verdadeiro (1) e falso (0) para determinada afirmação, usa de graus de pertinência $\mu(x)$ capazes de representar situações em que as variáveis de decisão estão entre o verdadeiro e o falso, ou seja, no intervalo $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq \mu(x) \leq 1\}$.

É inevitável quando se pensa no conceito de informação deixar a incerteza de lado. A incerteza está presente em qualquer medição, principalmente quando há presença do ser humano. A lógica *fuzzy* é capaz de tratar toda essa incerteza, por meio das funções de pertinência. Toda a incerteza relacionada às palavras desaparece, visto que tais funções são precisas. (ROCHA RIZOL; MESQUITA; SAOTOME, 2011).

Na teoria dos conjuntos clássica é comum um elemento pertencer ou não pertencer a determinado conjunto; já na lógica *fuzzy* como possui vários graus de pertinência, determinado objeto pode pertencer com tal grau de pertinência, ao contrário do conjunto tradicional onde só existem dois graus de pertinência: 0 (falso) ou 1 (verdadeiro) (EL-HAWARY, 1998).

A fim explicar a transição de conjuntos numéricos regulares, também chamados de números *crisp* (crus), Siler e Burkley (2005) demonstram que para conjuntos

numéricos fuzzy inicia-se com subconjuntos *crisp* de X . Seja A um subconjunto de X , para cada x em X se $x \in A$ ou $x \notin A$. Define-se uma função em X cujos valores variam entre 0 e 1 como segue:

- o valor da função de x é 1 se x pertence ao subconjunto A e;
- o valor da função de x é 0 se x não pertence ao subconjunto A .

De acordo com Sandri e Correa (1999), um conjunto nebuloso A contido em um universo de discurso Ω pode ser definido por uma função de pertinência $\mu_A : \Omega \rightarrow [0,1]$.

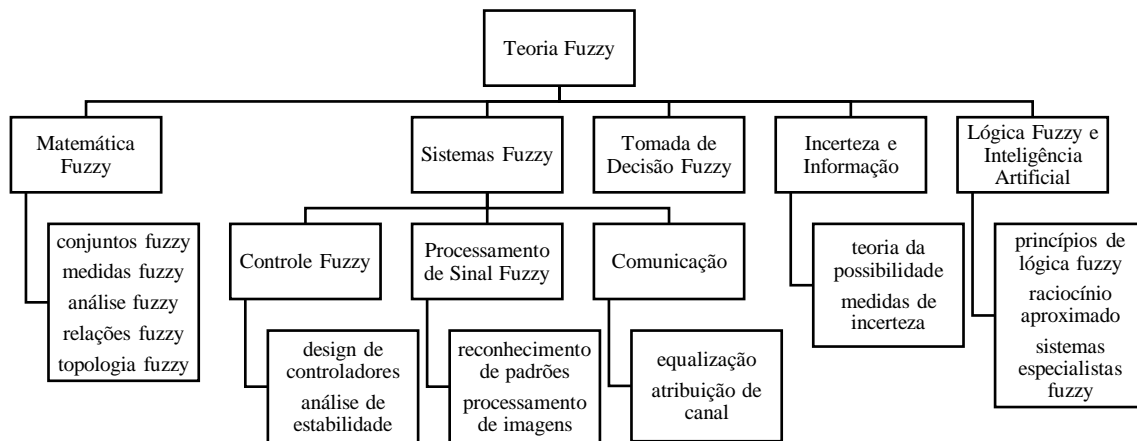
Tal função associa a cada elemento x pertencente ao universo Ω o grau $\mu_A(x)$, que representa o quão x pertence ao conjunto nebuloso A . Enfim, a função de pertinência indica o grau de compatibilidade entre x e o conceito expresso por A .

O grau de pertinência pode ser interpretado da seguinte maneira:

- $\mu_A(x) = 1$ indica que x é completamente compatível com A
- $\mu_A(x) = 0$ indica que x é completamente incompatível com A
- $0 < \mu_A(x) < 1$ indica que x é parcialmente compatível com A , com grau $\mu_A(x)$.

As áreas e aplicações da teoria dos conjuntos *fuzzy* podem ser ilustradas na Figura 12.

Figura 12 – Áreas da teoria dos conjuntos *fuzzy*.



Fonte: Adaptado de Wang (1997).

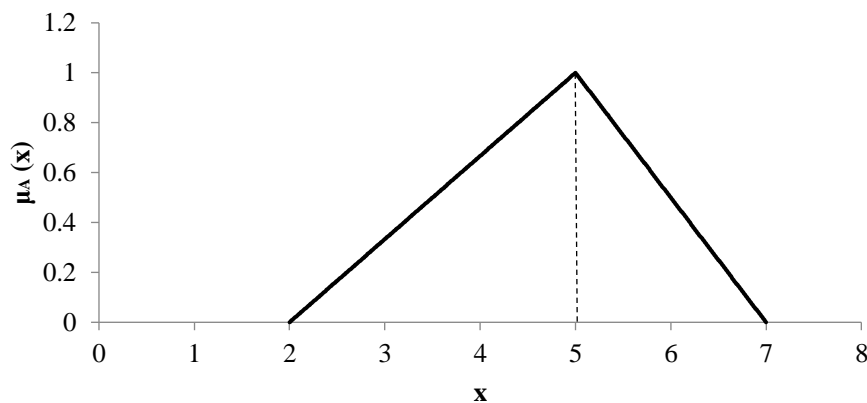
2.5.2 Conjuntos Fuzzy Triangulares

Um número *fuzzy* pode ser triangular (a,b,c) ou trapezoidal (a,b,c,d) . O número triangular é utilizado quando se tem medições “aproximadamente x ” e o trapezoidal quando se tem medições “entre x e y ” (KAYA e KAHRAMAN, 2011).

Um exemplo de número *fuzzy* triangular, possui apenas um valor cujo grau de pertinência $\mu_A(x) = 1$. Pode-se observar na Figura 11, que considera um número *fuzzy* triangular com valores $(2, 5, 7)$, que há apenas um ponto cujo grau de pertinência é máximo, quando $\mu(x) = 1$, que para o exemplo em questão é ponto relacionado a $\mu(5)$. Ao ponto no triângulo onde o grau de pertinência $\mu(x)$ é igual a 1, dá-se o nome de *singleton*.

Os números *fuzzy* triangulares (TFN) serão priorizados em detrimento aos números *fuzzy* trapezoidais (TraFN) neste trabalho. Na literatura, os números *fuzzy* triangulares são amplamente utilizados. Um número *fuzzy* triangular representa três pontos da seguinte forma: $A = (a, b, c)$ conforme ilustrado pela Figura 13 (OZDEMIR, 2020).

Figura 13 – Exemplo de número *fuzzy* triangular $(a, b, c) = (2, 5, 7)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A função de pertinência $\mu_A(x)$ para um número *fuzzy* triangular tipo-1 é dada por (34):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{(x-b)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x = b \\ \frac{(c-x)}{(c-b)}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \geq c \end{cases} \quad (34)$$

sendo x um valor qualquer para a variável em estudo para um TFN do tipo (a, b, c) .

O processo de fuzzificação de um conjunto de medidas dadas para um número triangular *fuzzy*, se dá por uma margem de variação (incerteza) obtida por meio da opinião de especialistas ou pela própria variabilidade das medições realizadas pelos operadores (SENTURK e ERGINEL, 2009)

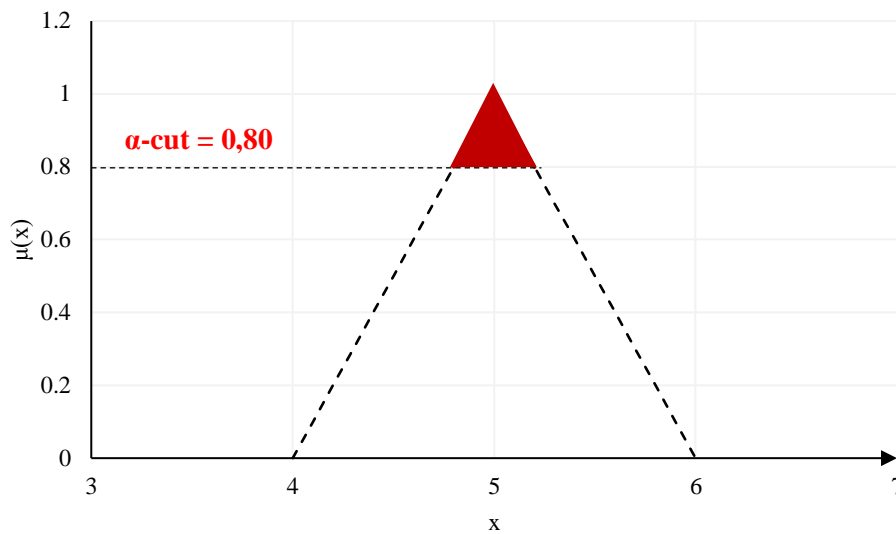
2.5.3 Conjuntos *Alpha-cut*

Para um conjunto *fuzzy*, cujo grau de pertinência está contido no intervalo $\alpha \in [0,1]$, o conjunto α -*cut*, será o conjunto de elementos que possuam grau de pertinência maior ou igual ao valor especificado para α , ou seja, o corte alfa. Considerando um conjunto B definido em X , o α -*cut*, pode ser dado por (35):

$$B_\alpha = \{x | \mu_B(x) \geq \alpha\} \quad (35)$$

Desta forma, para gráficos de controle *fuzzy* tipo-1, o α -*cut* pode ser entendido como a quantidade de incerteza que é inserida no processo. Nesse caso, quanto maior o valor do α -*cut*, menor será a incerteza inserida, ou seja, a incerteza inserida no processo e os valores de α -*cut* são inversamente proporcionais. Sendo assim, um gráfico de controle *fuzzy* tipo-1 com um α de 0,95 ficará mais próximo de um gráfico de controle de Shewhart tradicional que um gráfico de controle com um α de 0,55, por exemplo (FADEI; POOYA, 2018).

Figura 14 – Área do corte- α para um TFN (*triangular fuzzy number*)



Fonte: Adaptado de Fadei e Pooya (2018).

A área em destaque da Figura 14 ilustra o quanto de incerteza que será considerada dos TFN no processo de defuzzificação. No caso de um α -cut = 0,45, ou seja, bem menor que 0,80, a quantidade de incerteza do número fuzzy que será carregada para o conjunto defuzzificado (valores representativos *fuzzy*) será bem maior.

2.5.4 O Processo de Defuzzificação

A fim de assegurar o formato padrão dos gráficos de controle e facilitar a ilustração das observações no gráfico, faz-se a conversão dos conjuntos *fuzzy* em escalares chamados de valores representativos. Existem diversos métodos de transformação na literatura, que são similares às medidas de tendência central utilizadas na estatística descritiva. Neste trabalho será utilizada a transformação α -level *fuzzy midrange*, dada por (36), como, de acordo com Wang e Raz (1990), não existe uma base teórica que ampare a escolha específica de algum dos métodos, a seleção deve ser embasada principalmente na facilidade de cálculo ou na preferência do usuário:

$$S_{mr}^{\alpha} = \frac{(a^{\alpha} + c^{\alpha})}{2} \quad (36)$$

sendo que a^{α} é o menor valor do TFN no formato (a, b, c) sob efeito do α -cut e c^{α} , é o valor maior. S_{mr}^{α} é descrito como o ponto médio das extremidades do α -cut. O α -cut,

indicado por B^α , é um conjunto de valores que possuem graus de pertinência maiores ou iguais a α , sendo a^α e c^α os pontos extremos (GULBAY; KAHRAMAN, 2006).

Para Senturk e Erginel (2009), um número *fuzzy* triangular tipo-1 definido por TFN $= (a, b, c)$, os valores de a^α e c^α podem ser calculados por meio de (37) e (38):

$$a^\alpha = a + \alpha(b - a) \quad (37)$$

$$c^\alpha = c + \alpha(c - b) \quad (38)$$

Mendes, Machado e Rocha Rizol (2019) obtiveram (39) por meio da aplicação e simplificação de (36), (37) e (38):

$$S_{mr}^\alpha = \frac{(a_j + c_j) + \alpha[(b_j - a_j) - (c_j - b_j)]}{2} \quad (39)$$

2.6 TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY TIPO-2 INTERVALAR

2.6.1 Proposta de Mendel

Em situações em que há várias fontes de incerteza para os dados em análise é viável o uso da abordagem *fuzzy* tipo-2, proposta por Zadeh em 1976, e formulados matematicamente por Mendel (2001).

A lógica *fuzzy* tipo-1 utiliza-se de incertezas relacionadas ao significado das palavras utilizando de funções de pertinência precisas. Tais funções de pertinência, quando bem definidas, são capazes de fazer com que as incertezas oriundas do significado das palavras desapareçam. A função de pertinência da lógica *fuzzy* tipo-2, por outro lado, possui uma mancha de incertezas, conhecida como *FOU* (*footprint of uncertainty*), que permite que um nível maior de incertezas possa ser trabalhado. Portanto, se as funções de pertinência *fuzzy* tipo-2 forem bem definidas, as incertezas tipo-2 também desaparecem, reestabelecendo os dados para números *fuzzy* tipo-1 (MENDEL, 2001).

Há situações em que se torna necessário a aplicação da teoria dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 ao invés dos conjuntos *fuzzy* clássicos devido as especificidades dos dados ou das decisões que serão tomadas. Conforme Mendel e John (2002), é viável a aplicação da abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar quando:

1. O sistema que gera os dados é conhecido por variar no tempo e a formulação matemática desta variação no tempo é desconhecida.
2. O ruído nas medições é não-estacionário e a não-estacionariedade é desconhecida.
3. Os recursos utilizados em uma aplicação de reconhecimento de padrões possuem atributos estatísticos não-estacionários que são desconhecidos.
4. O conhecimento é extraído de um grupo de especialista fazendo uso de questionários com palavras incertas.
5. São utilizados termos linguísticos que possuem um domínio imensurável.

2.6.2 Características de um Conjunto Fuzzy Tipo-2 Triangular Intervalar

A função de pertiência *fuzzy* tipo-2 é obtida por meio de uma “mancha de incerteza” em torno da função de associação *fuzzy* tipo-1. Nos conjuntos *fuzzy* tipo-1, para um valor $x = x'$, obtemos apenas um valor para o grau de associação $\mu(x)$. No caso de conjuntos *fuzzy* tipo-2, para um valor $x = x'$, obtemos um intervalo a partir da linha vertical que intercepta o ponto de incerteza (*FOU*) (CASTILLO e MELIN, 2008).

Segundo Mendel e John (2002), um conjunto fuzzy tipo-2, denotado por \tilde{A} , pode ser caracterizado pela função de pertinência $\mu_{\tilde{A}} = (x, u)$, onde $x \in X$ e $u \in J_x \subseteq [0,1]$.

Matematicamente, pode ser entendido como (40):

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) | \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]\}, \text{ sendo } 0 \leq \mu_{\tilde{A}} = (x, u) \leq 1. \quad (40)$$

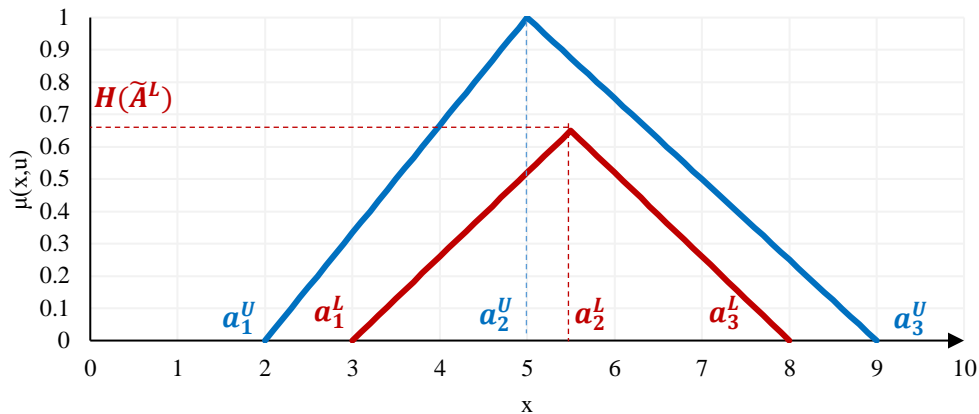
O conjunto fuzzy tipo-2 também pode ser expresso como (41):

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x, u) | (x, u) \quad J_x \subseteq [0,1] \quad (41)$$

Um conjunto fuzzy intervalar tipo-2 \tilde{A} pode ser representado por *LMF* \tilde{A}^L e por *UMF* \tilde{A}^U , $\tilde{A} = \langle \tilde{A}^L, \tilde{A}^U \rangle$. Em particular, quando as funções de pertinência triangulares são utilizadas, esse conjunto fuzzy tipo-2 intervalar pode ser ilustrado como mostrado na Figura (15), onde $\tilde{A}^L = ((a_{i1}^L, a_{i2}^L, a_{i3}^L; H(\tilde{A}^L)))$, $\tilde{A}^U = (a_{i1}^U, a_{i2}^U, a_{i3}^U; H(\tilde{A}^U))$, $(a_{i1}^L, a_{i2}^L, a_{i3}^L)$ e $(a_{i1}^U, a_{i2}^U, a_{i3}^U)$ denotam os três pontos-chave do

LMF e do UMF, respectivamente, e \tilde{A}^L e \tilde{A}^U , com $a_1^U \leq a_1^L$, $a_3^U \leq a_3^L$, $0 < H \tilde{A}^L \leq H \tilde{A}^U = 1$ denotam os valores máximos de associação. Claramente, quanto mais próximas as formas de \tilde{A}^L e \tilde{A}^U , menos incertas as informações contidas em \tilde{A} são. Quando \tilde{A}^L coincide com \tilde{A}^U , o conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar se torna um conjunto *fuzzy* tipo-1 (CHEN e SHEN, 2017)

Figura 15 – Representação do número *fuzzy* tipo-2 intervalar triangular

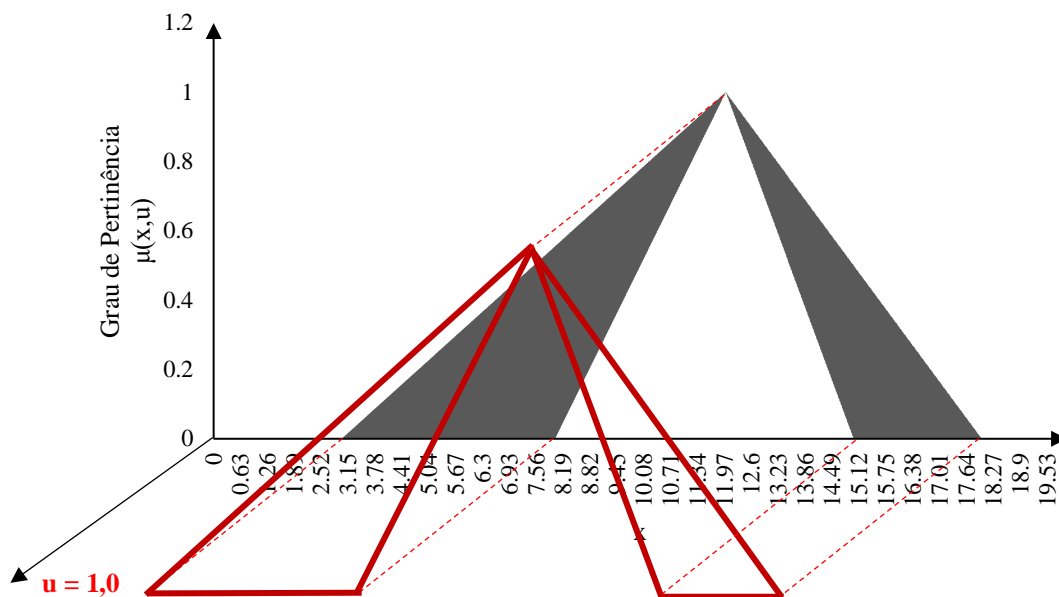


Fonte: Adaptado de Chen e Shen (2017).

Conforme Javanmard e Nehi (2017); Chen *et al.* (2012), definem o esquema apresentado na Figura 15 como *general interval type-2 triangular fuzzy numbers* (GIT2TFN), ou seja, números *fuzzy* triangulares tipo-2 intervalar de forma generalizada, onde $a_2^U \neq a_2^L$ e $H(\tilde{A}^U) \neq H(\tilde{A}^L)$.

A fim de simplificar o modelo, considera-se o número *fuzzy* central $a_2^U = a_2^L$, define o *singleton* do conjunto, porém a altura da função de pertinência superior $H(\tilde{A}^U)$ pode coincidir com a altura da função de pertinência inferior $H(\tilde{A}^L)$, como pode ser observado na Figura 16.

Figura 16 – Representação de um número fuzzy tipo-2 triangular intervalar.

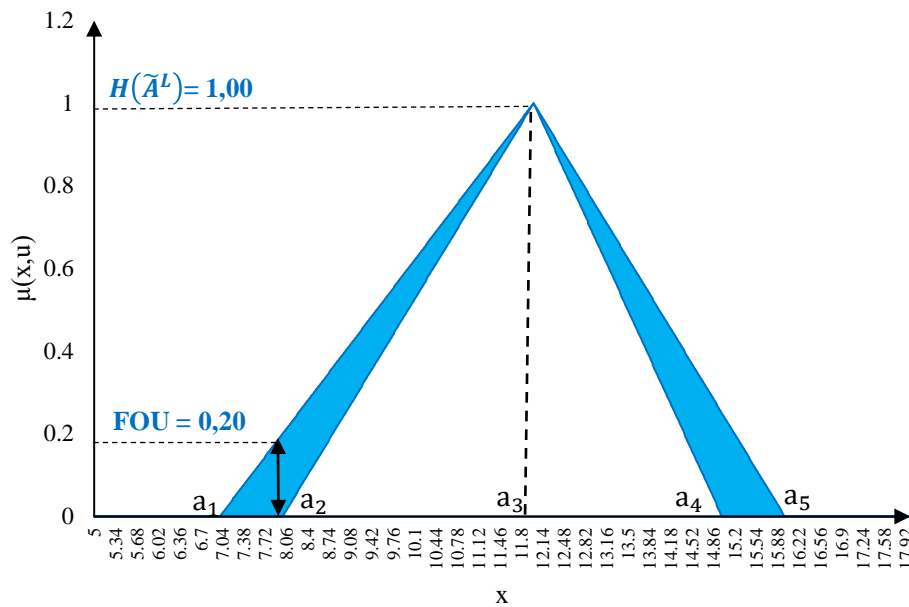


Fonte: Adaptado de Mendel e John, 2002

Como se pode observar, a incerteza u , possui um valor unitário ao longo de todo o conjunto, permitindo que seja simplificado de um modelo tridimensional para um modelo bidimensional, diferentemente de um modelo não-intervalar. Muitos trabalhos utilizam-se dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares para reduzir a complexidade e necessidade de *hardware* para processar as informações (ROCHA RIZOL, 2011; MENDEL; JOHN; LIU, 2006).

Para o caso específico onde $a_2^u = a_2^l$ e $H(\tilde{A}^u) = H(\tilde{A}^l)$, obtém-se o que pode ser chamado de *perfectly interval type-2 triangular fuzzy number* (PIT2TFN) (JAVANMARD e NEHI, 2017).

De acordo com Chen e Shen (2017) a incerteza das pertinências primárias em conjuntos fuzzy tipo-2 é representada pela mancha de incerteza ou FOU (*footprint of uncertainty*). Se esse aspecto não estiver presente, o conjunto fuzzy tipo-2 em questão se tornará um conjunto fuzzy comum. A Figura 17 ilustra a FOU do número fuzzy tipo-2 intervalar triangular. Sua altura deve ser consistente com o tipo de problema em análise, bem como com o grau de incerteza desejado (MENDELL e JOHN, 2002).

Figura 17 - FOU do número *fuzzy* tipo-2 intervalar triangular

Fonte: Adaptado de Mendell e John , 2002

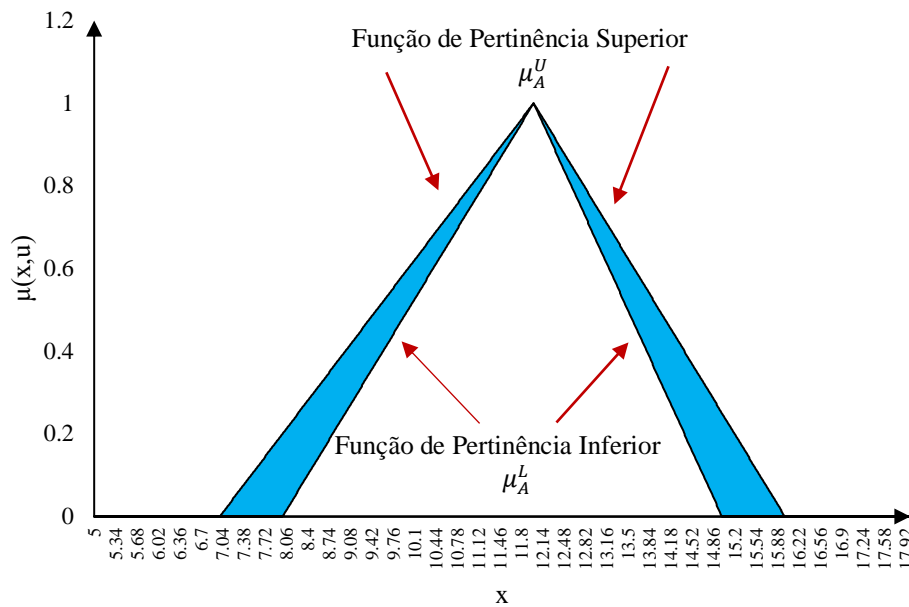
Para um conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar no qual não seja do tipo GIT2TFN ou PIT2TFN, ou seja, $a_2^U = a_2^L$ e $H(\tilde{A}^U) \neq H(\tilde{A}^L)$, as funções de pertinência superior e inferior podem ser expressas por (42) e (43) e ilustradas pela Figura (16):

$$\mu_A^U = \begin{cases} \frac{x-a_2^U}{a_2^U-a_1^U}, & \text{se } a_1^U \leq x \leq a_2^U \\ x = 1, & \text{se } x = a_2^U \\ \frac{a_3^U-x}{a_3^U-a_2^U}, & \text{se } a_2^U \leq x \leq a_3^U \end{cases} \quad (42)$$

$$\mu_A^L = \begin{cases} H(\tilde{A}^L) \left(\frac{x-a_2^L}{a_2^L-a_1^L} \right), & \text{se } a_1^L \leq x \leq a_2^L \\ x = H(\tilde{A}^L), & \text{se } x = a_2^L \\ H(\tilde{A}^L) \left(\frac{a_3^L-x}{a_3^L-a_2^L} \right), & \text{se } a_2^L \leq x \leq a_3^L \end{cases} \quad (43)$$

sendo que μ_A^U é a função de pertinência superior para o universo de discurso A, cujos TFN são (a_1^U, a_2^U, a_3^U) respectivamente; e μ_A^L é a função de pertinência inferior para o mesmo universo de discurso, cujos TFN são (a_1^L, a_2^L, a_3^L) .

Figura 18 – Funções de pertinência e a FOU para um TFN



Fonte: Adaptado de Rocha Rizol , 2011

Algumas operações aritméticas relacionadas a conjuntos fuzzy tipo-2 intervalar triangular são dadas abaixo. Essas operações foram obtidas de Kahraman *et al* (2014).

A operação de adição entre conjuntos fuzzy tipo-2 intervalar triangular \tilde{A}_1 e \tilde{A}_2 é definida como:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = & ((a_{11}^U + a_{21}^U, a_{12}^U + a_{22}^U, a_{13}^U + a_{23}^U; \min(H(\tilde{A}_1^U); H(\tilde{A}_2^U)), \\ & (a_{11}^L + a_{21}^L, a_{12}^L + a_{22}^L, a_{13}^L + a_{23}^L; \min(H(\tilde{A}_1^L); H(\tilde{A}_2^L)))) \end{aligned} \quad (44)$$

A operação de subtração entre conjuntos fuzzy tipo-2 intervalar triangular \tilde{A}_1 e \tilde{A}_2 pode ser definida como:

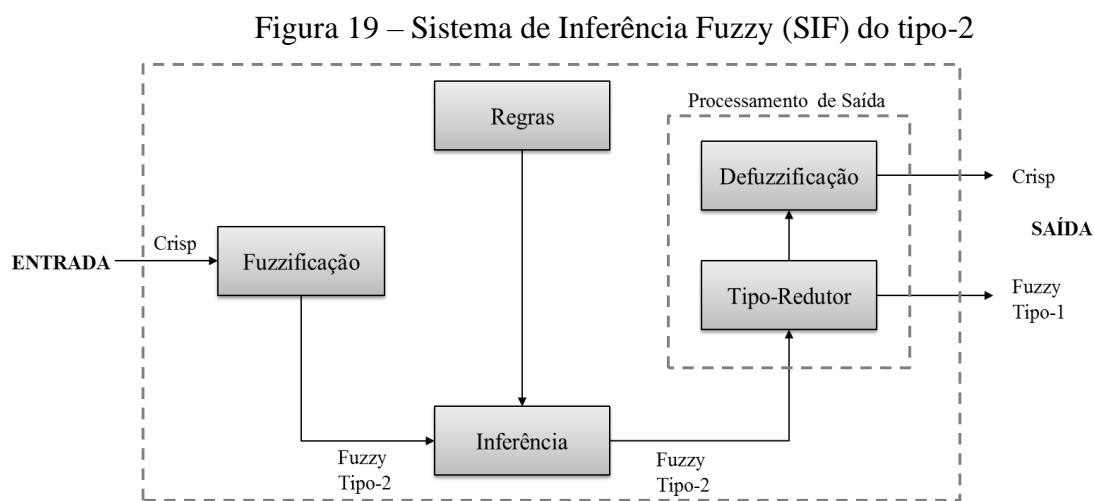
$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 = & ((a_{11}^U - a_{23}^U, a_{12}^U - a_{22}^U, a_{13}^U - a_{21}^U; \min(H(\tilde{A}_1^U); H(\tilde{A}_2^U)), \\ & (a_{11}^L - a_{23}^L, a_{12}^L - a_{22}^L, a_{13}^L - a_{21}^L; \min(H(\tilde{A}_1^L); H(\tilde{A}_2^L)))) \end{aligned} \quad (45)$$

A operação entre os conjuntos fuzzy tipo-2 intervalar triangular \tilde{A}_i e o valor k é definida por (46):

$$kx\tilde{A}_i = ((kxa_{i1}^U, kxa_{i2}^U, kxa_{i3}^U; (H(\tilde{A}_i^U))), (kxa_{i1}^L, kxa_{i2}^L, kxa_{i3}^L; (H(\tilde{A}_i^L)))) \quad (46)$$

2.6.3 Redução de Tipo e o Processo de Defuzzificação

De acordo com Mendel (2001), Mendel, John e Liu (2006) e Contreras (2007), para o Sistema de Inferência *Fuzzy* Tipo-2, é composto por cinco blocos: fuzzificador, inferência, base de regras, tipo-redutor e defuzzificador. A Figura 19 ilustra os blocos do processo de fuzzificação e defuzzificação por uma abordagem *fuzzy* do tipo-2.



Fonte: Adaptado de Castillo e Melin, 2008

O tipo-redutor gera em sua saída um número *fuzzy* tipo-1, que poderá ser defuzzificado para finalmente se tornar um número na saída do sistema. Os valores de saída de um tipo redutor podem ser obtidos por meio de métodos como do centroide ou método de ranqueamento capaz de calcular os valores de $Rank^U$ e de $Rank^L$ a partir dos valores de TFN das funções de pertinência superior e inferior. Os valores reduzidos R^U e R^L podem ser calculados por (47) e (48) (CASTILLO e MELIN, 2008):

$$R^U = \frac{\sum_{i=1}^m f_i^U a_i^U}{\sum_{i=1}^m f_i^U} \quad (47)$$

$$R^L = \frac{\sum_{i=1}^m f_i^L a_i^L}{\sum_{i=1}^m f_i^L} \quad (48)$$

sendo que f_i^U e f_i^L são funções reais definidas em um intervalo do universo de discurso A, a_i^U é uma variável inserida no universo de discurso A para a função de pertinência superior μ_A^U e a_i^L é uma variável inserida no universo de discurso A para a função de pertinência inferior μ_A^L .

De acordo com Kahraman *et al.* (2014), o tipo-redutor utilizado nesta pesquisa, será aplicado em números *fuzzy* tipo-2 triangulares do tipo $(a_{i1}^U, a_{i1}^L, a_{i2}^U=a_{i2}^L, a_{i3}^L, a_{i3}^U)$. Onde o índice “U” significa *upper*, e apresenta os valores *fuzzy* relacionados a função de pertinência superior, e o índice “L” significa *lower*, e apresenta os valores *fuzzy* relacionados a função de pertinência inferior. O processo de redução de tipo é dado por (49) e (50):

$$R_{Tri}^U = \frac{(a_{i3}^U - a_{i1}^U) + (a_{i2}^U - a_{i1}^U)}{3} + a_{i1}^U \quad (49)$$

$$R_{Tri}^L = H(\tilde{A}^L) \left[\frac{(a_{i3}^L - a_{i1}^L) + (a_{i2}^L - a_{i1}^L)}{3} + a_{i1}^L \right] \quad (50)$$

sendo que para um *IT2TFN* (número *fuzzy* triangular tipo-2 intervalar) representado por $(a_1^U, a_1^L, a_2^U=a_2^L, a_3^L, a_3^U)$, obtém-se R_{Tri}^U para a função de pertinência superior e R_{Tri}^L para a função de pertinência inferior. $H(\tilde{A}^L)$ é a altura que delimita a função de pertinência inferior.

Como o resultado do tipo redutor, retorna um intervalo *fuzzy*, é necessário realizar uma defuzzificação, por meio de (51):

$$D_{Tri} = \frac{R_{Tri}^U + R_{Tri}^L}{2} \quad (51)$$

Por fim, o método de defuzzificação adotado para obter os valores representativos *fuzzy* é o da média (*average*).

Nos conjuntos *fuzzy* tipo-2, várias técnicas de defuzzificação foram propostas para o processo de redução. Desta maneira, o método proposto por Kahraman *et al.* (2014), que modificaram o método *Best Nonfuzzy Performance* (BNP) para conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalar triangular. Pode ser sintetizado por (52):

$$D_{TriT} = \frac{\frac{(a_{i3}^U - a_{i1}^U) + (a_{i2}^U - a_{i1}^U)}{3} + a_{i1}^U + H(\tilde{A}^L) \left[\frac{(a_{i3}^L - a_{i1}^L) + (a_{i2}^L - a_{i1}^L)}{3} + a_{i1}^L \right]}{2}} \quad (52)$$

2.7 GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS FUZZY

2.7.1 Gráficos de Controle \bar{X} e R TFN

Gráficos de controle por variáveis obtém os valores das variáveis por meio de medições, e estas por sua vez, faz uso de instrumentos de medição e muitas das vezes sendo utilizados por um operador. Sendo assim o fator humano, além das incertezas do instrumento de medição, um componente muito importante no processo. Mesmo quando se aumenta o nível de tecnologia do sistema de medição, o fator humano estará presente na interpretação de resultados e tomadas de decisão, sendo a aplicação da teoria dos conjuntos *fuzzy* em gráficos de controle algo pertinente.

Para Ozdemir (2020), a teoria dos conjuntos *fuzzy* proposta por Zadeh quando aplicadas a gráficos de controle, tende a aumentar a flexibilidade dos gráficos de controle, acrescentando mais informações e aumentando seu poder de detecção, melhorando assim o seu desempenho.

Ao se realizar medições em um processo, pelo fato de as medições de variáveis apresentarem incertezas, é normal que possa expressar uma variável como $x = \bar{x} \pm u(x)$, onde $u(x)$ é incerteza relacionada a variável x . Desta forma, quando se expressa de maneira linguística, é comum dizer que um valor medido é “aproximadamente x ”.

De acordo com Kaya e Kahraman (2011), quando uma característica de qualidade pode ser expressa da forma descrita anteriormente, tais variáveis medidas podem ser convertidas de números *crisp* x para TFN = (x_1, x_2, x_3) .

Desta forma, os parâmetros \bar{X} e R que serão monitorados, podem ser obtidos por meio de (53) e (54):

$$\bar{x}_{i-TFN} = \left(\frac{\sum_{j=1}^n x_{1ij}}{n}, \frac{\sum_{j=1}^n x_{2ij}}{n}, \frac{\sum_{j=1}^n x_{3ij}}{n} \right) \quad (53)$$

$$R_{i-TFN} = (\text{máx}(x_{1ij}) - \text{mín}(x_{3ij}), \text{máx}(x_{2ij}) - \text{mín}(x_{2ij}), \text{máx}(x_{3ij}) - \text{mín}(x_{1ij})) \quad (54)$$

sendo que x_1 , x_2 e x_3 são capazes de expressar as características de qualidade *fuzzy* que estão sendo medidas, i varia de 1 a m , sendo m o número de amostras em análise, j é o número da medição dentro de cada amostra i e n por sua vez, refere-se ao tamanho dos subgrupos amostrais.

Assim como no modelo tradicional, necessita-se dos parâmetros para o cálculo dos limites de controle de ambos os gráficos para um conjunto de m amostras:

$$\bar{\bar{x}}_{TFN} = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{1i}}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{2i}}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{3i}}{m} \right) \quad (55)$$

$$\bar{\bar{R}}_{TFN} = \left(\frac{\sum_{i=1}^m R_{1i}}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m R_{2i}}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m R_{3i}}{m} \right) \quad (56)$$

Para Kahraman, Gulbay e Bolturk (2016) e considerando as equações propostas por Senturk e Erginel (2009), o limite de controle superior (LSC), a linha média (LM) e o limite de controle inferior (LIC) para o gráfico de controle \bar{X} TFN podem ser obtidos por (57), (58) e (59):

$$LSC_{\bar{X}-TFN} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_3) + A_2(\bar{\bar{R}}_1, \bar{\bar{R}}_2, \bar{\bar{R}}_3) \quad (57)$$

$$LM_{\bar{X}-TFN} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_3) \quad (58)$$

$$LIC_{\bar{X}-TFN} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_3) - A_2(\bar{\bar{R}}_1, \bar{\bar{R}}_2, \bar{\bar{R}}_3) \quad (59)$$

Os limites de controle para o gráfico de controle de R TFN podem ser obtidos por (60), (61) e (62), respectivamente:

$$LSC_{R-TFN} = D_4(\bar{\bar{R}}_1, \bar{\bar{R}}_2, \bar{\bar{R}}_3) \quad (60)$$

$$LM_{R-TFN} = (\bar{\bar{R}}_1, \bar{\bar{R}}_2, \bar{\bar{R}}_3) \quad (61)$$

$$LIC_{R-TFN} = D_3(\bar{\bar{R}}_1, \bar{\bar{R}}_2, \bar{\bar{R}}_3) \quad (62)$$

Aplicando-se a transformação α -level fuzzy midrange descrita pela equação (39), obtém-se que os parâmetros a serem monitorados serão respectivamente $S_{mr-\bar{X}}^\alpha$ e S_{mr-R}^α , definidos por (63) e (64):

$$S_{mr-\bar{X}}^\alpha = \frac{(x_{1i}+x_{3i})+\alpha[(x_{2i}-x_{1i})-(x_{3i}-x_{2i})]}{2} \quad (63)$$

$$S_{mr-R}^\alpha = \frac{(R_{1i}+R_{3i})+\alpha[(R_{2i}-R_{1i})-(R_{3i}-R_{2i})]}{2} \quad (64)$$

A partir dos limites de controle definidos por Senturk e Erginel (2009) e implementados por Mendes (2019) para o gráfico de controle de \bar{X} utilizando a transformação descrita anteriormente, obtém-se (65), (66) e (67) para os limites $LSC_{mr-\bar{X}}^\alpha$, $LM_{mr-\bar{X}}^\alpha$ e $LIC_{mr-\bar{X}}^\alpha$ respectivamente:

$$LSC_{mr-\bar{X}}^{\alpha} = \left(\frac{\bar{x}_1^{\alpha} + \bar{x}_3^{\alpha}}{2} \right) + A_2 \left(\frac{\bar{R}_1^{\alpha} + \bar{R}_3^{\alpha}}{2} \right) \quad (65)$$

$$LM_{mr-\bar{X}}^{\alpha} = \left(\frac{\bar{x}_1^{\alpha} + \bar{x}_3^{\alpha}}{2} \right) \quad (66)$$

$$LIC_{mr-\bar{X}}^{\alpha} = \left(\frac{\bar{x}_1^{\alpha} + \bar{x}_3^{\alpha}}{2} \right) - A_2 \left(\frac{\bar{R}_1^{\alpha} + \bar{R}_3^{\alpha}}{2} \right) \quad (67)$$

E para o gráfico de controle R, os limites LSC_{mr-R}^{α} , LM_{mr-R}^{α} e LIC_{mr-R}^{α} são expressos por (68), (69) e (70):

$$LSC_{mr-R}^{\alpha} = D_4 \left(\frac{\bar{R}_1^{\alpha} + \bar{R}_3^{\alpha}}{2} \right) \quad (68)$$

$$LM_{mr-R}^{\alpha} = \left(\frac{\bar{R}_1^{\alpha} + \bar{R}_3^{\alpha}}{2} \right) \quad (69)$$

$$LIC_{mr-R}^{\alpha} = D_3 \left(\frac{\bar{R}_1^{\alpha} + \bar{R}_3^{\alpha}}{2} \right) \quad (70)$$

Observa-se a necessidade de se defuzzificar os dados e os limites de controle para que os modelos propostos se adequem melhor visualmente aos conceitos de gráfico de controle.

2.7.2 Gráficos de Controle \bar{X} e S TFN

De forma similar aos gráficos de controle \bar{X} e R, Senturk e Erginel (2009) propuseram os gráficos de controle \bar{X} e S TFN, aplicando o mesmo método de transformação α -level fuzzy midrange conforme a equação (39). Ozdemir (2020) sugere um modelo de aplicação \bar{X} e S TFN para dados desbalanceados visando situações onde os gráficos de controle estatísticos não são efetivos.

Desta forma, o parâmetro \bar{X} pode ser calculado por (53) e o parâmetro s (desvio-padrão amostral) pode ser obtido por meio de (71):

$$s_i = \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{1ij} - \bar{x}_{3i})^2}{n-1}}, \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{2ij} - \bar{x}_{2i})^2}{n-1}}, \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{3ij} - \bar{x}_{1i})^2}{n-1}} \right) \quad (71)$$

Assim como no modelo tradicional, necessita-se dos parâmetros para o cálculo dos limites de controle de ambos os gráficos para um conjunto de m amostras. Para que

os números fuzzy triangulares possam ser ordenados adequadamente, de acordo com Ross (1995) *apud* Darestani e Nasiri (2016), é preciso calcular $(x_{1ij} - \bar{x}_{3i})$, por exemplo, com i sendo cada linha que corresponde aos subgrupos da amostra e j sendo o valor medido de cada amostra. Caso o valor de $(x_{1ij} - \bar{x}_{3i})$, $(x_{2ij} - \bar{x}_{2i})$ ou $(x_{3ij} - \bar{x}_{1i})$ sejam inferiores a 0, considera-se a condição $\max [0; (x_{1ij}^U - \bar{x}_{3i}^U)]$. O parâmetro \bar{x} é definido por (55) enquanto o parâmetro \bar{s} pode ser obtido por (72), conforme segue:

$$\bar{s} = \left(\frac{\sum_{i=1}^m s_{1i}}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m s_{2i}}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m s_{3i}}{m} \right) \quad (72)$$

sendo que s_1 , s_2 e s_3 são os valores *fuzzy* de um desvio-padrão s qualquer, m é a quantidade de amostras de tamanho n obtidas por instrumento de medição.

De forma similar aos gráficos de controle \bar{X} e R , Senturk e Erginel (2009), Kahraman, Gulbay e Bolturk (2016) e Ozdemir (2020), o limite de controle superior (*LSC*), a linha média (*LM*) e o limite de controle inferior (*LIC*) para o gráfico de controle \bar{X} TFN podem ser calculados por (73), (74) e (75), respectivamente:

$$LSC_{\bar{X}-TFN} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + A_3(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) \quad (73)$$

$$LM_{\bar{X}-TFN} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad (74)$$

$$LIC_{\bar{X}-TFN} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) - A_3(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) \quad (75)$$

Os limites de controle para o gráfico de s podem ser calculados por (76), (77) e (78):

$$LSC_{s-TFN} = B_4(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) \quad (76)$$

$$LM_{s-TFN} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) \quad (77)$$

$$LIC_{s-TFN} = B_3(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) \quad (78)$$

Aplicando-se a transformação α -level *fuzzy midrange* descrita por (39), o parâmetro $S_{mr-\bar{x}}^\alpha$ pode ser calculado por (63) descrita anteriormente e o parâmetro S_{mr-s}^α pode ser calculado por (79):

$$S_{mr-s}^\alpha = \frac{(s_{1i} + s_{3i}) + \alpha[(s_{2i} - s_{1i}) - (s_{3i} - s_{2i})]}{2} \quad (79)$$

Os limites de controle definidos Senturk e Erginel (2009) para o gráfico de controle de \bar{X} TFN em função de s , utilizando a transformação descrita anteriormente, obtém-se (80), (81) e (82) para os limites $LSC_{mr-\bar{X}}^\alpha$, $LM_{mr-\bar{X}}^\alpha$ e $LIC_{mr-\bar{X}}^\alpha$ respectivamente:

$$LSC_{mr-\bar{X}}^\alpha = \left(\frac{\bar{x}_1^\alpha + \bar{x}_3^\alpha}{2} \right) + A_3 \left(\frac{s_1^\alpha + s_3^\alpha}{2} \right) \quad (80)$$

$$LM_{mr-\bar{X}}^\alpha = \left(\frac{\bar{x}_1^\alpha + \bar{x}_3^\alpha}{2} \right) \quad (81)$$

$$LIC_{mr-\bar{X}}^\alpha = \left(\frac{\bar{x}_1^\alpha + \bar{x}_3^\alpha}{2} \right) - A_3 \left(\frac{s_1^\alpha + s_3^\alpha}{2} \right) \quad (82)$$

E para o gráfico de controle R TFN, os limites LSC_{mr-R}^α , LM_{mr-R}^α e LIC_{mr-R}^α são expressos por (83), (84) e (85):

$$LSC_{mr-s}^\alpha = B_4 \left(\frac{s_1^\alpha + s_3^\alpha}{2} \right) \quad (83)$$

$$LM_{mr-s}^\alpha = \left(\frac{s_1^\alpha + s_3^\alpha}{2} \right) \quad (84)$$

$$LIC_{mr-s}^\alpha = B_3 \left(\frac{s_1^\alpha + s_3^\alpha}{2} \right) \quad (85)$$

2.7.3 Gráficos de Controle Multivariados *Fuzzy*

Para processos multivariados há predominantemente três gráficos de controle: T^2 de Hotelling, *MEWMA* e *MCUSUM*. Sendo os dois últimos aplicados em conjunto na maioria das vezes, logo as pesquisas consistem na aplicação da lógica *fuzzy* nos dados de entrada, nas regras de decisão e/ou no processo de defuzzificação.

Pode-se dizer que Wang e Chen (2002), foram os primeiros a enxergar tal lacuna de pesquisa, sendo que só havia trabalhos de gráficos de controle *fuzzy* para processos univariados e atributos. Apresentaram o $F-T^2$ de Hotelling devido a sua estatística mais simples, se comparado com os demais modelos de gráfico de controle multivariados.

Taleb (2009), apresenta um modelo multivariado livre de distribuição de probabilidade (não paramétrico) que pode ser aplicado a vários processos sobre controle estatístico. Este autor adquiriu relevância em relação às citações de seu trabalho, Taleb, Limam e Hirota (2006), que apresenta uma aplicação em uma empresa de alimentos e

esta aplicação fornece dados para vários outros artigos seja em problemas univariados ou multivariados.

Continuando a exploração do tema, Alipour e Noorossana (2010) tratam do gráfico de controle *MEWMA fuzzy* para o monitoramento e detecção de causas especiais fazendo uso de TFN. O modelo foi avaliado por meio do NMA, comparando o gráfico *F-MEWMA* com gráfico *F-T²* de Hotelling.

Alizadeh e Ghomi (2011), apresenta modelos de gráfico de controle multivariados em conjunto com otimização *fuzzy*, mostrando a variedade de aplicações da área de pesquisa. Um modelo de análise de gráficos de controle por meio de *clustering* é proposto por Zarandi e Alaeddini (2010). No caso em estudo, faz-se uma análise de *cluster* híbrida (estatística-*fuzzy*) para a detecção de causas especiais usando para a validação do método uma simulação numérica. O modelo híbrido, mostrou uma melhora no desempenho na detecção de causas especiais em gráficos de controle tipo *S*, *p* e *T²* de Hotelling, o que faz do modelo proposto aplicável em diferentes modelos de processos sobre controle estatístico sendo ele univariado, uniatributo ou multivariado.

Ghobadi *et al.* (2012) investiga o monitoramento de perfis lineares em ambientes *fuzzy* nos gráficos de controle *F-T²*, *F-MEWMA* e *F-MCUSUM*. Os modelos são aplicados a um questionário respondido por turistas acerca do nível de satisfação dos mesmos relacionado a cada dia da viagem. Como as opiniões são subjetivas e sujeitas a incertezas, a teoria *fuzzy* ajuda a explicar o problema. Realizou-se simulação dos dados em a fim de comparar os gráficos de controle *F-T²*, *F-MEWMA* e *F-CUSUM* por meio do NMA.

Al-Refaie (2013), apresenta por meio da aplicação de um modelo de programação objetiva *fuzzy*, uma forma de melhoria no processo de produção de comprimidos. As variáveis de processo avaliadas são respectivamente peso, espessura e dureza dos comprimidos, variáveis estas que são subjetivas e sujeitas a incertezas uma vez que a fabricação de comprimidos exige altos níveis de precisão a abordagem se faz necessária. Uma análise de capacidade por meio dos índices C_p e C_{pk} mostra um diagnóstico inicial da situação inicial do processo que sofre melhoria após um modelo de programação linear de minimização.

Pastuizaca-Fernández, Garcia e Barzola (2015) propuseram um modelo mais simples para uma análise multivariada em ambiente *fuzzy* e desta forma desenvolveu um gráfico de controle *F-T²*. Os exemplos a serem aplicados estão relacionados a análise de 3 variáveis linguísticas (aparência, cor e sabor) para alimentos congelados, exemplo

proposto por Taleb, Limam e Hirota (2006) e outras 3 variáveis (aparência, translucidez e alvura) para um processo de fabricação de porcelanas. Dispensando de simulação, o modelo foi aplicado de modo a ser comparado com os gráficos *F-MEWMA* e *F-MCUSUM*, mostrando-se similar em desempenho, porém simples no que se refere a estatística aplicada. A estatística T^2 é obtida a partir de atributos, não de variáveis, como este trabalho pretende apresentar.

Ghobadi *et al.* (2015) desenvolveu um modelo de gráfico de controle *F-MCUSUM* (soma acumulada multivariado para dados *fuzzy*) fazendo uso de variáveis linguísticas. No caso, o modelo foi implementado na análise de 3 variáveis linguísticas (aparência, cor e sabor) em uma indústria do ramo alimentício, conforme Taleb, Limam e Hirota (2006). Foi observado que o gráfico *F-MCUSUM* possui uma maior sensibilidade a pequenas variações frente a outros modelos como o *F-MEWMA* e o T^2 de Hotelling. Para a comparação do desempenho foi utilizado o NMA após a simulação de 10.000 corridas em diferentes níveis de deslocamento (*shift*).

2.8 GRÁFICOS DE CONTROLE FUZZY TIPO-2 INTERVALAR

No que se refere aos gráficos de controle, estes podem ser classificados, primeiramente, no que se refere ao tipo de característica de qualidade que estes estão monitorando nos processos, que são respectivamente variáveis e atributos. Os gráficos de controle por atributos, diferentemente das variáveis, estão mais sujeitos a subjetividades e variáveis linguísticas do que os gráficos de controle por variáveis, em contrapartida possuem uma formulação menos complexa.

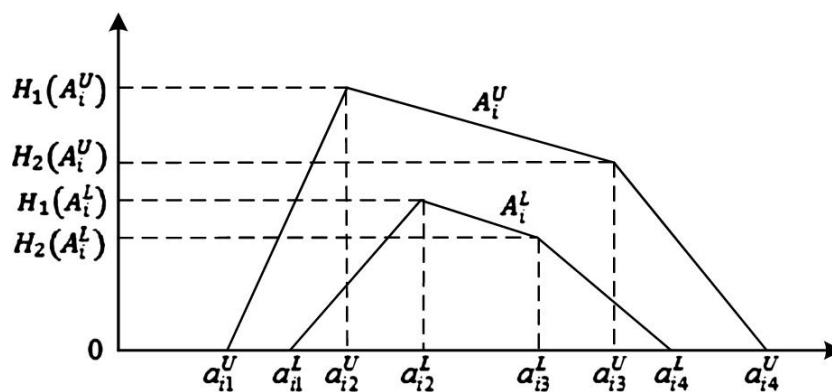
Os gráficos de controle por variáveis, por fazerem uso de instrumentos de medição, estão obviamente, sujeitos as incertezas do sistema de medição. O sistema de medição por sua vez, possui inúmeras fontes de incerteza que vem desde a precisão, resolução do instrumento, como também dos operadores que atuam na medição e até das condições ambientais.

Desta forma, segundo as condições apontadas por Mendel e John (2002), para sistemas de medição de variáveis que apresentam tais características, torna-se viável o uso de números *fuzzy* do tipo-2.

2.8.1 Gráficos de Controle por Atributos Fuzzy Tipo-2 Intervalar

O primeiro estudo acerca de gráficos de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar foi realizado por Senturk e Antucheviciene (2017), onde propuseram algo mais próximo dos gráficos de controle fuzzy estudados até então. Uma formulação matemática para o cálculo dos limites de controle para um gráfico de controle *c* (não-conformidades) fuzzy tipo-2 intervalar, utilizando-se de números *fuzzy* trapezoidais no formato $(a_1^U, a_1^L, a_2^U, a_2^L, a_3^U, a_3^L, a_4^U, a_4^L)$, como ilustra a Figura 20.

Figura 20 – Número fuzzy tipo-2 trapezoidal intervalar generalizado



Fonte: Senturk e Antucheviciene (2017)

Os limites de controle propostos para o gráfico de controle do tipo *c* em relação a função de pertinência superior são definidos por (86), (87) e (88):

$$LSC_{c-IT2TraFN}^U = \left[\bar{c}_{a_1^U} + 3\sqrt{\bar{c}_{a_1^U}}, \bar{c}_{a_2^U} + 3\sqrt{\bar{c}_{a_2^U}}, \bar{c}_{a_3^U} + 3\sqrt{\bar{c}_{a_3^U}}, \bar{c}_{a_4^U} + 3\sqrt{\bar{c}_{a_4^U}}; \min(H_1(\tilde{A}_i^U), H_2(\tilde{A}_i^U)) \right] \quad (86)$$

$$LM_{c-IT2TraFN}^U = \left[\bar{c}_{a_1^U}, \bar{c}_{a_2^U}, \bar{c}_{a_3^U}, \bar{c}_{a_4^U}; \min(H_1(\tilde{A}_i^U), H_2(\tilde{A}_i^U)) \right] \quad (87)$$

$$LIC_{c-IT2TraFN}^U = \left[\bar{c}_{a_1^U} - 3\sqrt{\bar{c}_{a_1^U}}, \bar{c}_{a_2^U} - 3\sqrt{\bar{c}_{a_2^U}}, \bar{c}_{a_3^U} - 3\sqrt{\bar{c}_{a_3^U}}, \bar{c}_{a_4^U} - 3\sqrt{\bar{c}_{a_4^U}}; \min(H_1(\tilde{A}_i^U), H_2(\tilde{A}_i^U)) \right] \quad (88)$$

sendo $(\bar{c}_{a_1^U}, \bar{c}_{a_2^U}, \bar{c}_{a_3^U}, \bar{c}_{a_4^U})$ um número fuzzy referente a função de pertinência superior que define a taxa média de defeitos por lote, $H_1(\tilde{A}_i^U)$ e $H_2(\tilde{A}_i^U)$ são os valores da função de pertinência superior μ_A^U que define as duas alturas do trapézio.

Da mesma forma, os limites de controle para o gráfico de controle *c* em relação a função de pertinência inferior são definidos por (89), (90) e (91):

$$LSC_{c-IT2TraFN}^L = \left[\bar{c}_{a_1^L} + 3\sqrt{\bar{c}_{a_1^L}}, \bar{c}_{a_2^L} + 3\sqrt{\bar{c}_{a_2^L}}, \bar{c}_{a_3^L} + 3\sqrt{\bar{c}_{a_3^L}}, \bar{c}_{a_4^L} + 3\sqrt{\bar{c}_{a_4^L}}; \min(H_1(\tilde{A}_i^L), H_2(\tilde{A}_i^L)) \right] \quad (89)$$

$$LM_{c-IT2TraFN}^L = \left[\bar{c}_{a_1^L}, \bar{c}_{a_2^L}, \bar{c}_{a_3^L}, \bar{c}_{a_4^L}; \min(H_1(\tilde{A}_i^L), H_2(\tilde{A}_i^L)) \right] \quad (90)$$

$$LIC_{c-IT2TraFN}^L = \left[\bar{c}_{a_1^L} - 3\sqrt{\bar{c}_{a_1^L}}, \bar{c}_{a_2^L} - 3\sqrt{\bar{c}_{a_2^L}}, \bar{c}_{a_3^L} - 3\sqrt{\bar{c}_{a_3^L}}, \bar{c}_{a_4^L} - 3\sqrt{\bar{c}_{a_4^L}}; \min(H_1(\tilde{A}_i^L), H_2(\tilde{A}_i^L)) \right] \quad (91)$$

sendo $(\bar{c}_{a_1^L}, \bar{c}_{a_2^L}, \bar{c}_{a_3^L}, \bar{c}_{a_4^L})$ um número *fuzzy* referente a função de pertinência inferior que define a taxa média de defeitos por lote, $H_1(\tilde{A}_i^L)$ e $H_2(\tilde{A}_i^L)$ são os valores da função de pertinência superior μ_A^L que define as duas alturas do trapézio.

Para a obtenção dos limites de controle defuzzificados, assim como é feito para números *fuzzy* triangulares, Kahraman *et al.* (2014), propôs um método modificado a partir do *BNP* para defuzzificar os números *fuzzy* trapezoidais.

Posteriormente, Erginel, Senturk e Yildiz (2018), desenvolveram os gráficos de controle p e np *fuzzy* tipo-2 intervalar pela primeira vez. Usando dos conceitos desenvolvidos por Senturk e Antucheviciene (2017), desenvolveram um modelo matemático para o monitoramento do percentual de itens não-conformes. Os limites de controle propostos para o gráfico de controle p em relação a sua função de pertinência superior podem ser calculados por (92), (93) e (94):

$$LSC_{p-IT2TraFN}^U = \left[\bar{p}_{a_1^U} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_1^U}(1-\bar{p}_{a_1^U})}{n}}, \bar{p}_{a_2^U} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_2^U}(1-\bar{p}_{a_2^U})}{n}}, \bar{p}_{a_3^U} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_3^U}(1-\bar{p}_{a_3^U})}{n}}, \bar{p}_{a_4^U} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_4^U}(1-\bar{p}_{a_4^U})}{n}}; \min(H_1(\tilde{A}_i^U), H_2(\tilde{A}_i^U)) \right] \quad (92)$$

$$LM_{p-IT2TraFN}^U = \left[\bar{p}_{a_1^U}, \bar{p}_{a_2^U}, \bar{p}_{a_3^U}, \bar{p}_{a_4^U}; \min(H_1(\tilde{A}_i^U), H_2(\tilde{A}_i^U)) \right] \quad (93)$$

$$LIC_{p-IT2TraFN}^U = \left[\bar{p}_{a_1^U} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_1^U}(1-\bar{p}_{a_1^U})}{n}}, \bar{p}_{a_2^U} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_2^U}(1-\bar{p}_{a_2^U})}{n}}, \bar{p}_{a_3^U} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_3^U}(1-\bar{p}_{a_3^U})}{n}}, \bar{p}_{a_4^U} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_4^U}(1-\bar{p}_{a_4^U})}{n}}; \min(H_1(\tilde{A}_i^U), H_2(\tilde{A}_i^U)) \right] \quad (94)$$

sendo $(\bar{p}_{a_1^U}, \bar{p}_{a_2^U}, \bar{p}_{a_3^U}, \bar{p}_{a_4^U})$ um número *fuzzy* referente a função de pertinência inferior que define a proporção média de itens defeituosos por amostra, $H_1(\tilde{A}_i^U)$ e $H_2(\tilde{A}_i^U)$ são os valores da função de pertinência superior μ_A^U que define as duas alturas do trapézio.

Analogamente, foram propostos os limites de controle para a função de pertinência inferior, como demonstra as equações (95), (96) e (97):

$$LSC_{p-IT2TraFN}^L = \left[\bar{p}_{a_1^L} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_1^L}(1-\bar{p}_{a_1^L})}{n}}, \bar{p}_{a_2^L} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_2^L}(1-\bar{p}_{a_2^L})}{n}}, \bar{p}_{a_3^L} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_3^L}(1-\bar{p}_{a_3^L})}{n}}, \bar{p}_{a_4^L} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_4^L}(1-\bar{p}_{a_4^L})}{n}}; \min(H_1(\tilde{A}_i^L), H_2(\tilde{A}_i^L)) \right] \quad (95)$$

$$LM_{\bar{p}-IT2TraFN}^L = [\bar{p}_{a_1^L}, \bar{p}_{a_2^L}, \bar{p}_{a_3^L}, \bar{p}_{a_4^L}; \min(H_1(\tilde{A}_i^L), H_2(\tilde{A}_i^L))] \quad (96)$$

$$LIC_{\bar{p}-IT2TraFN}^L = \left[\bar{p}_{a_1^L} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_4^L}(1-\bar{p}_{a_4^L})}{n}}, \bar{p}_{a_2^L} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_3^L}(1-\bar{p}_{a_3^L})}{n}}, \bar{p}_{a_3^L} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_2^L}(1-\bar{p}_{a_2^L})}{n}}, \bar{p}_{a_4^L} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{a_1^L}(1-\bar{p}_{a_1^L})}{n}}; \min(H_1(\tilde{A}_i^L), H_2(\tilde{A}_i^L)) \right] \quad (97)$$

sendo $(\bar{p}_{a_1^L}, \bar{p}_{a_2^L}, \bar{p}_{a_3^L}, \bar{p}_{a_4^L})$ um número *fuzzy* referente a função de pertinência inferior que define a proporção média de itens defeituosos por amostra, $H_1(\tilde{A}_i^L)$ e $H_2(\tilde{A}_i^L)$ são os valores da função de pertinência superior μ_A^L que define as duas alturas do trapézio.

Teksen e Anagün (2018a), utilizaram de uma abordagem comparativa no que se refere aos diferentes tipos defuzzificação e reduções de tipo. Aplicando em um gráfico de controle por atributos do tipo c, foi possível observar as diferenças entre as abordagens, além de mostrarem outras possibilidades de aplicação da teoria dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalar em gráficos de controle, como por exemplo utilizando-se de regras de decisão, ou até mesmo realizar análises sem a necessidade de defuzzificação dos números.

Teksen e Anagün (2019) aplicaram em um gráfico de controle tipo c dois métodos de ranqueamento: método de Chen (2005) e método de Qin, Liu e Liu (2011). Sabe-se que um bom método de fuzzificação é de suma importância para garantir a eficiência de um gráfico de controle *fuzzy* do tipo-2 intervalar. Como em outros artigos, utiliza-se IT2TraFN (números *fuzzy* tipo-2 trapezoidais intervalar).

Almeida *et al.* (2021), apresentou um modelo de gráfico de controle do tipo np para um conjunto *fuzzy* do tipo-2 intervalar para números *fuzzy* triangulares, fez-se uma análise de desempenho por meio do NMA comparando com gráfico de controle np tradicional. Verificou-se uma sutil diferença de desempenho a favor do gráfico de controle IT2TFN np, sugerindo-se a aplicação para um número *fuzzy* trapezoidal. Por fim, fez-se uma aplicação a serviços, verificando a satisfação de clientes em um restaurante.

A partir dos limites de controle propostos por Erginel, Senturk e Yildiz (2018), Almeida *et al.* (2021) propuseram os limites de controle para um gráfico de controle np para números *fuzzy* tipo-2 triangulares intervalar, como demonstrado em (98), (99) e (100):

$$LSC_{np-IT2TraFN} = (n\bar{p}_{a_1}^U, n\bar{p}_{a_1}^L, n\bar{p}_{a_2}^U, n\bar{p}_{a_2}^L, n\bar{p}_{a_3}^U, n\bar{p}_{a_3}^L) + 3\sqrt{(n\bar{p}_{a_1}^U, n\bar{p}_{a_1}^L, n\bar{p}_{a_2}^U, n\bar{p}_{a_2}^L, n\bar{p}_{a_3}^U, n\bar{p}_{a_3}^L)[1 - (\bar{p}_{a_1}^U, \bar{p}_{a_1}^L, \bar{p}_{a_2}^U, \bar{p}_{a_2}^L, \bar{p}_{a_3}^U, \bar{p}_{a_3}^L)]} \quad (98)$$

$$LM_{np-IT2TraFN} = (n\bar{p}_{a_1}^U, n\bar{p}_{a_1}^L, n\bar{p}_{a_2}^U, n\bar{p}_{a_2}^L, n\bar{p}_{a_3}^U, n\bar{p}_{a_3}^L) \quad (99)$$

$$LIC_{IT2TraFN} = (n\bar{p}_{a1}^U, n\bar{p}_{a1}^L, n\bar{p}_{a2}^U, n\bar{p}_{a2}^L, n\bar{p}_{a3}^U, n\bar{p}_{a3}^L) - 3\sqrt{(n\bar{p}_{a1}^U, n\bar{p}_{a1}^L, n\bar{p}_{a2}^U, n\bar{p}_{a2}^L, n\bar{p}_{a3}^U, n\bar{p}_{a3}^L)[1 - (\bar{p}_{a1}^U, \bar{p}_{a1}^L, \bar{p}_{a2}^U, \bar{p}_{a2}^L, \bar{p}_{a3}^U, \bar{p}_{a3}^L)]} \quad (100)$$

sendo $(n\bar{p}_{a1}^U, n\bar{p}_{a1}^L, n\bar{p}_{a2}^U, n\bar{p}_{a2}^L, n\bar{p}_{a3}^U, n\bar{p}_{a3}^L)$ um número fuzzy referente ao número médio de itens defeituosos por amostra. Os IT2TFN simplificam o modelo em relação aos IT2TraFN, enquanto a altura $H(\tilde{A}_i^U)$ para a função de pertinência superior μ_A^U pode ser considerada igual a 1 para simplificação do modelo, a altura $H(\tilde{A}_i^L)$ pode assumir valores para que se possa obter variações nos valores defuzzificados.

A fim de defuzzificar os dados e os limites, faz-se uso do método de defuzzificação proposto por Kahraman *et al.* (2014).

2.8.2 Gráficos de Controle por Variáveis Fuzzy Tipo-2 Intervalar

No que se refere a gráficos de controle por variáveis fazendo uso da abordagem fuzzy tipo-2 intervalar, Teksen e Anagün (2018b), propuseram um modelo generalizado de gráficos de controle \bar{x} e R fazendo uso de conjunto de números *fuzzy* tipo-2 trapezoidal no formato $(a_1^U, a_1^L, a_2^U, a_2^L, a_3^U, a_3^L, a_4^U, a_4^L)$. As equações (101), (102) e (103) representam os limites de controle de \bar{x} para a função de pertinência superior:

$$LSC_{\bar{x}-IT2TraFN}^U = (\bar{x}_1^U + A_2\bar{r}_1^U, \bar{x}_2^U + A_2\bar{r}_2^U, \bar{x}_3^U + A_2\bar{r}_3^U, \bar{x}_4^U + A_2\bar{r}_4^U; \min(H_1(\tilde{A}_i^U)); \min(H_2(\tilde{A}_i^U))) \quad (101)$$

$$LM_{\bar{x}-IT2TraFN}^U = [\bar{x}_1^U, \bar{x}_2^U, \bar{x}_3^U, \bar{x}_4^U; \min(H_1(\tilde{A}_i^U)); \min(H_2(\tilde{A}_i^U))] \quad (102)$$

$$LIC_{\bar{x}-IT2TraFN}^U = (\bar{x}_1^U - A_2\bar{r}_4^U, \bar{x}_2^U - A_2\bar{r}_3^U, \bar{x}_3^U - A_2\bar{r}_2^U, \bar{x}_4^U - A_2\bar{r}_1^U; \min(H_1(\tilde{A}_i^U)); \min(H_2(\tilde{A}_i^U))) \quad (103)$$

Para a função de pertinência inferior por sua vez, obtém-se os limites de controle, que podem ser calculados por (104), (105) e (106):

$$LSC_{\bar{x}-IT2TraFN}^L = (\bar{x}_1^L + A_2\bar{r}_1^L, \bar{x}_2^L + A_2\bar{r}_2^L, \bar{x}_3^L + A_2\bar{r}_3^L, \bar{x}_4^L + A_2\bar{r}_4^L; \min(H_1(\tilde{A}_i^L)); \min(H_2(\tilde{A}_i^L))) \quad (104)$$

$$LM_{\bar{x}-IT2TraFN}^L = [\bar{x}_1^L, \bar{x}_2^L, \bar{x}_3^L, \bar{x}_4^L; \min(H_1(\tilde{A}_i^L)); \min(H_2(\tilde{A}_i^L))] \quad (105)$$

$$LIC_{\bar{x}-IT2TraFN}^L = (\bar{x}_1^L - A_2\bar{r}_4^L, \bar{x}_2^L - A_2\bar{r}_3^L, \bar{x}_3^L - A_2\bar{r}_2^L, \bar{x}_4^L - A_2\bar{r}_1^L; \min(H_1(\tilde{A}_i^L)); \min(H_2(\tilde{A}_i^L))) \quad (106)$$

Da mesma forma, Teksen e Anagün (2018b) apresentaram equações para o cálculo dos limites de controle para um gráfico de controle R, conforme descrito por (107), (108) e (109):

$$LSC_{R-IT2TraFN}^U = (D_4\bar{r}_1^U, D_4\bar{r}_2^U, D_4\bar{r}_3^U, D_4\bar{r}_4^U; \min(H_1(\tilde{A}_i^U)); \min(H_2(\tilde{A}_i^U))) \quad (107)$$

$$LM_{R-IT2TraFN}^U = [\bar{r}_1^U, \bar{r}_2^U, \bar{r}_3^U, \bar{r}_4^U; \min(H_1(\tilde{A}_i^U)); \min(H_2(\tilde{A}_i^U))] \quad (108)$$

$$LIC_{R-IT2TraFN}^U = (D_3\bar{r}_1^U, D_3\bar{r}_2^U, D_3\bar{r}_3^U, D_3\bar{r}_4^U; \min(H_1(\tilde{A}_i^U)); \min(H_2(\tilde{A}_i^U))) \quad (109)$$

Para a função de pertinência inferior, tem-se (110), (111) e (112):

$$LSC_{R-IT2TraFN}^L = (D_4\bar{r}_1^L, D_4\bar{r}_2^L, D_4\bar{r}_3^L, D_4\bar{r}_4^L; \min(H_1(\tilde{A}_i^L)); \min(H_2(\tilde{A}_i^L))) \quad (110)$$

$$LM_{R-IT2TraFN}^L = [\bar{r}_1^L, \bar{r}_2^L, \bar{r}_3^L, \bar{r}_4^L; \min(H_1(\tilde{A}_i^L)); \min(H_2(\tilde{A}_i^L))] \quad (111)$$

$$LIC_{R-IT2TraFN}^L = (D_3\bar{r}_1^L, D_3\bar{r}_2^L, D_3\bar{r}_3^L, D_3\bar{r}_4^L; \min(H_1(\tilde{A}_i^L)); \min(H_2(\tilde{A}_i^L))) \quad (112)$$

Almeida *et al.* (2019), adaptaram o equacionamento de gráficos de controle \bar{x} e R por uma abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar proposto por Teksen (2018b) de números trapezoidais (TraFN2) para números *fuzzy* triangulares (TFN2). Por fim, fez-se uma aplicação a exemplo ilustrativo apresentado em Montgomery (2016). Foi realizado um processo de fuzzificação dos dados, cálculo dos limites de controle *fuzzy* e comparação com os gráficos tradicionais.

Visando uma aplicação prática, Kaya e Turgut (2021) apresentam modelos de gráficos de controle dos tipos \bar{x} e R , \bar{x} e S e XMR e MR (valores individuais) para conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalar para números trapezoidais. Há a aplicação em um caso real de monitoramento da medição do conector macho de conector elétrico, enfatizando as inúmeras fontes de incerteza nas medições.

Há na literatura, apenas um artigo visando a aplicação de conjuntos *fuzzy* do tipo-2 em gráficos do tipo *CUSUM* conforme apresentado por Razali *et al.* (2021). Outros gráficos de controle como o *EWMA* para processos univariados e os gráficos de controle T^2 de Hotelling, *MEWMA* e *MCUSUM* para processos multivariados ainda não foram explorados segundo uma abordagem *fuzzy* tipo-2.

3 CLASSIFICAÇÃO, MATERIAIS E MÉTODO DA PESQUISA

Neste capítulo serão apresentados os métodos e procedimentos de pesquisa aplicados neste trabalho assim como a análise de desempenho por meio de métodos computacionais para o cálculo do *NMA* e a descrição das etapas de coleta e tratamento de dados, implementação dos gráficos de controle tradicionais, *fuzzy* tipo-1 e *fuzzy* tipo-2 intervalar.

3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

3.1.1 Tipo da Pesquisa

Trata-se de uma pesquisa aplicada por utilizar de conhecimentos consolidados como o CEP (Controle Estatístico de Processos) e a Lógica *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar. Quanto à sua natureza, pode ser considerada como um trabalho científico original devido a lacuna de pesquisa identificada por meio de pesquisas prévias a base de artigos e periódicos sobre o assunto em questão. É importante que a pesquisa agregue valor a comunidade no geral, promovendo discussão acadêmica e científica, sendo desta forma não só interessante como também importante. (MIGUEL *et al.*, 2012)

Para Gil (2008), quanto aos objetivos da pesquisa, a mesma pode ser entendida como exploratória, uma vez que proporciona maior familiaridade com tema abordado com intuito de torná-lo mais explícito a ponto de construir hipóteses. Também pode ser considerada descritiva, uma vez que apresenta as características da área de pesquisa, promovendo uma discussão entre os diversos modelos já existentes na literatura.

Já o objeto da pesquisa é a bibliografia disponível em periódicos, jornais e livros sobre assunto, mostrando assim como principal objeto a pesquisa bibliográfica. que é fundamental para qualquer trabalho acadêmico. (RUIZ, 2002). E de acordo com Gil (2008), a pesquisa bibliográfica possui a vantagem de dar ao pesquisador uma cobertura maior da pesquisa em relação a uma pesquisa de campo.

3.1.2 Abordagem e Procedimentos

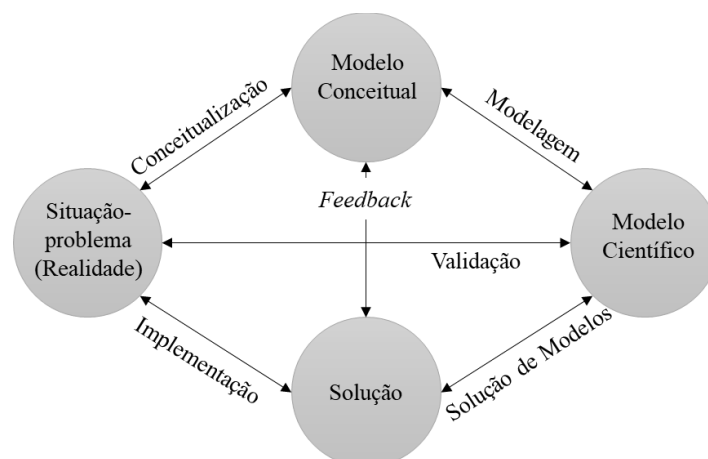
De acordo com Miguel *et al.* (2012), a abordagem predominante no trabalho é a abordagem quantitativa, uma vez que as variáveis de estudo são mensuráveis e capazes de explicar matematicamente os resultados obtidos de forma objetiva.

Os gráficos de controle são ferramentas oriundas do CEP e obviamente, quantitativas. No caso dos gráficos de controle por variáveis, cujas variáveis são oriundas de instrumentos de medição, justifica-se ainda mais o uso da abordagem quantitativa.

Bertrand e Fransoo (2002), classificam tal pesquisa como quantitativa axiomática normativa. Para Miguel *et al.* (2012), uma pesquisa axiomática normativa busca desenvolver normas para melhorar resultados obtidos na literatura ou resolver novos problemas com o uso de ferramentas já conhecidas.

No que se refere aos procedimentos técnicos da pesquisa, esta apresenta duas características. Segundo Miguel *et al.* (2012), o primeiro procedimento da pesquisa é a modelagem, pois utiliza de ferramentas matemáticas para explicar determinado problema e o segundo procedimento é a simulação, pois a validação dos dados e da tratativa do problema se dará por meio de softwares de simulação. Para Bertrand e Fransoo (2002), problemas relacionados a gestão de operações, podem ser modelados quantitativamente segundo a Figura 21.

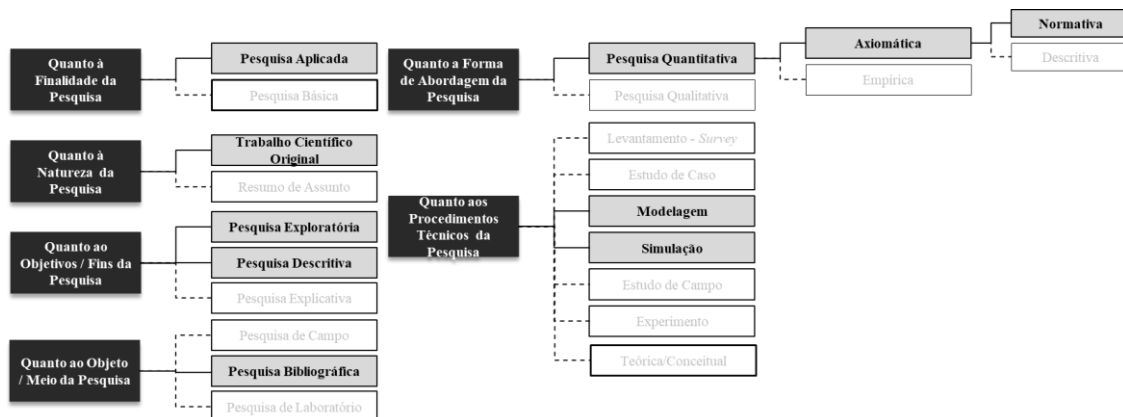
Figura 21 – Modelo de pesquisa quantitativa



Fonte: Mitroff *et al.* (1974) *apud* Bertrand e Fransoo (2002)

Modelos quantitativos são modelos abstratos que podem ser descritos em linguagem matemática (ou estatística) e experimental (simulação), que são capazes de calcular valores numéricos acerca das propriedades do problema estudado. A classificação da pesquisa pode ser ilustrada pela Figura 22.

Figura 22 – Diagrama esquemático para a classificação desta pesquisa



Fonte: Adaptado de Khotari, 2013

3.2 COLETA E TRATAMENTO DOS DADOS

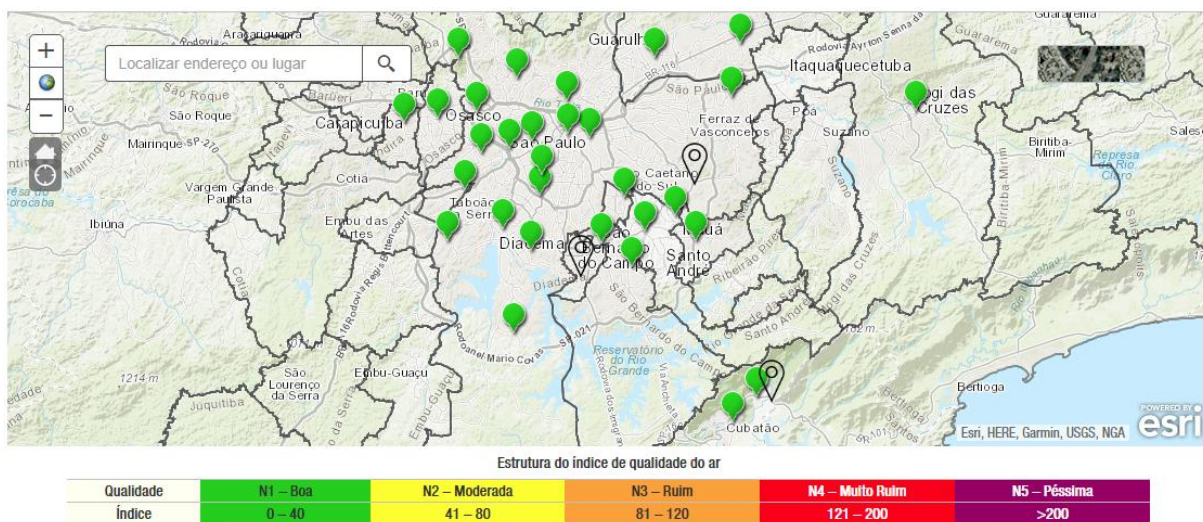
3.2.1 Companhia Ambiental do Estado de São Paulo

Os dados reais para os quais os modelos de gráfico de controle serão aplicados são referentes à qualidade do ar na região metropolitana de São Paulo. Trata-se do sistema da CETESB, que obtém de uma em uma hora os índices de poluição oriundos de diversos tipos de poluentes como material particulado (MP_{10} e $MP_{2,5}$), Monóxido de Carbono (CO), entre outros.

A Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (CETESB) é uma agência do Governo do Estado de São Paulo responsável por controlar, fiscalizar, monitorar e licenciar atividades que podem gerar poluição ao meio ambiente, buscando ações para a preservação e recuperação da qualidade das águas, do ar e do solo. (CETESB, 2022)

A Instituição mantém uma página na web com dados públicos e relatórios técnicos abertos à população, o que torna possível avaliar a qualidade do ar diariamente em intervalos de uma hora. As localizações das unidades de monitoramento do ar podem ser observadas na Figura 23.

Figura 23 – Estações de medição da qualidade do ar e suas localizações no estado de São Paulo



Fonte: CETESB, 2022.

Há unidades de monitoramento do ar por todo o estado de São Paulo, o que abrange as regiões/locais de Americana, Araçatuba, Araraquara, Bauru, Campinas (Centro, Taquaral e V.União), Capão Redondo, Carapicuíba, Catanduva, Cerqueira César, Cidade Universitária (USP), Congonhas, Cubatão (Centro, V. Parisi e Vale do Mogi), Diadema, Grajaú, Guaratinguetá, Guarulhos (Paço Municipal e Pimentas), Ibirapuera, Interlagos, Itaim Paulista, Itaquera, Jacareí, Jaú, Jundiaí, Limeira, Marginal Tietê (Ponte dos Remédios), Marília, Mauá, Mooca, Nossa Senhora do Ó, Osasco, Parque Dom Pedro II, Paulínia (Centro e Sta. Terezinha), Perus, Pico do Jaraguá, Pinheiros, Piracicaba, Presidente Prudente, Ribeirão Preto, Rio Claro, Santo André, São Bernardo (Centro e Pauliceia), São José dos Campos (Centro, Jd. Satélite e Vista Verde), Santa Gertrudes, Santana, Santos (Centro e Ponta da Praia), São Caetano do Sul, São José do Rio Preto, Sorocaba, Taboão da Serra, Tatuí e Taubaté. No total são 62 unidades de monitoramento por todo o estado. A fim de demonstrar a aplicação do gráfico de controle fuzzy proposto, será utilizada a unidade da Marginal Tietê, dada sua localização e importância.

A aplicação aos dados referentes à qualidade do ar da Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (CETESB) dispõe os dados de tal forma que seja possível organizá-los de várias maneiras. Para cada tipo de gráfico de controle, há uma forma e organizar os dados. O método de fuzzificação proposto por Mendes (2009) pode ser

estendido para o *fuzzy* tipo-2 intervalar por meio das equações de pertinência e do tamanho esperado para a FOU. Nesse trabalho são apresentados métodos viáveis de coleta, fuzzificação, redução de tipo e defuzzificação de dados.

3.2.2 Características dos Dados Coletados

Os dados são extraídos do próprio website da CETESB, e são apresentadas as medições acerca de 6 poluentes atmosféricos: SO₂ (dióxido de enxofre), NO₂ (dióxido de nitrogênio), MP₁₀ (partículas grossas inaláveis de 2,5 a 10,0 µg/m³), CO (monóxido de carbono), TRS (partículas totais em suspensão) e MP_{2,5} (partículas finas inaláveis abaixo de 2,5 µg/m³).

Para esta pesquisa utiliza-se os dados referentes à média horária, uma vez que o índice da qualidade do ar é obtido por meio de equação e pode ser transformado em variável linguística. Tal situação pode ser vista na Figura 24.

Figura 24 – Apresentação dos índices de poluição atmosférica

Índice de Qualidade Classificação															
0 - 40 41 - 80 81 - 120 121 - 200 > 200															
N1 - Boa N2 - Moderada N3 - Ruim N4 - Muito Ruim N5 - Péssima															
Marg.Tietê-Pte Remédios - 01/01/2022															
Hora	SO ₂ µg/m ³			NO ₂ µg/m ³		MP ₁₀ µg/m ³			CO ppm			TRS ppb	MP _{2,5} µg/m ³		
	Média horária	Média 24 h	Índice / Qualidade	Média Horária	Índice / Qualidade	Média horária	Média 24 h	Índice / Qualidade	Média horária	Média 8 h	Índice / Qualidade	Média Horária	Média horária	Média 24 h	Índice / Qualidade
01:00	1	1	2	38	8	75	18	14	1,2	1,1	5	--	63	13	20
02:00	1	1	2	34	7	92	21	17	0,9	1,1	5	--	73	16	25
03:00	1	1	2	31	6	56	23	18	0,7	1,1	5	--	50	17	27
04:00	1	1	2	23	5	35	24	19	0,4	1,1	5	--	27	18	28
05:00	1	1	2	24	5	30	25	20	0,0	1,0	4	--	21	19	30
06:00	1	1	2	22	5	29	26	21	0,0	0,8	4	--	19	19	30
07:00	1	1	2	23	5	24	27	21	0,0	0,6	3	--	31	20	31
08:00	1	1	2	21	4	18	27	21	0,0	0,4	2	--	15	21	33
09:00	1	1	2	15	3	12	27	21	0,0	0,3	1	--	0	21	33
10:00	1	1	2	13	3	9	27	21	0,0	0,1	1	--	1	21	33
11:00	1	1	2	12	2	9	27	21	0,0	0,1	0	--	2	20	31
12:00	1	1	2	13	3	7	27	21	0,0	0,0	0	--	2	20	31
13:00	1	1	2	18	4	7	27	21	0,0	0,0	0	--	2	20	31
14:00	1	1	2	17	3	3	26	21	0,0	0,0	0	--	17	20	31
15:00	1	1	2	17	3	9	26	21	0,0	0,0	0	--	6	20	31
16:00	1	1	2	20	4	19	26	21	0,0	0,0	0	--	10	20	31
17:00	1	1	2	24	5	3	26	21	0,0	0,0	0	--	7	20	31
18:00	1	1	2	27	5	10	26	21	0,0	0,0	0	--	5	20	31

Fonte: CETESB, 2022

Foi utilizado como exemplo o dia 01 de janeiro de 2021, e são apresentados os dados horários até as 18:00, como exemplo, sendo possível obter dados para as 24 horas do dia.

Há dias onde não é possível medir todos os horários por alguma limitação temporária no sistema de medição, nesse caso essas amostras podem ser descartadas a fim de se obter parâmetros confiáveis para a obtenção dos limites de controle (Fase I).

Os dados coletados são referentes às variáveis MP_{10} e SO_2 , e o período em análise para a fase I são os meses de janeiro, fevereiro e março de 2021, uma vez que para análise de séries temporais é necessário obter no mínimo 3 meses.

As variáveis medidas, na verdade, são transformadas em variáveis linguísticas. Para cada um dos poluentes medidos é calculado um índice, o índice da qualidade do ar (IQA) que é um valor adimensional. Dependendo do índice obtido, o ar recebe uma qualificação (Boa, Moderada, Ruim, Muito Ruim ou Péssima), que é uma espécie de *score* para a qualidade do ar, além de uma cor que causa impacto visual de acordo com a gravidade. A Tabela 1 extraída do próprio site da CETESB apresenta a classificação da qualidade do ar, as faixas do IQA e os níveis de cada poluente atmosférico:

Tabela 1 - Classificação da qualidade do ar de acordo com IQA

Qualidade	Índice	MP_{10} ($\mu\text{g}/\text{m}^3$) 24h	$MP_{2,5}$ ($\mu\text{g}/\text{m}^3$) 24h	O_3 ($\mu\text{g}/\text{m}^3$) 8h	CO (ppm) 8h	NO_2 ($\mu\text{g}/\text{m}^3$) 1h	SO_2 ($\mu\text{g}/\text{m}^3$) 24h
N1 – Boa	0 40	0 50	0 25	0 100	0 9	0 200	0 20
N2 – Moderada	41 80	50 100	25 50	100 130	9 11	200 240	20 40
N3 – Ruim	81 120	100 150	50 75	130 160	11 13	240 320	40 365
N4 – Muito Ruim	121 200	150 250	75 125	160 200	13 15	320 1130	365 800
N5 – Péssima	>200	>250	>125	>200	>15	>1130	>800

Fonte: Adaptado de CETESB, 2022

3.3 TÉCNICAS E FERRAMENTAS DE ANÁLISE

3.3.1 Ferramentas Computacionais Aplicadas

Para fins de cálculos e organização, usar-se-á do Microsoft Excel® e suas ferramentas estatísticas e gráficas. Para modelos mais complexos, serão utilizados códigos programados em R e compilados pela interface Rstudio®. Os próprios Ihaka e Gentleman (1996), criadores da linguagem R, a define como uma linguagem para análise de dados e gráficos. Visto o crescimento das aplicações envolvendo *big data*, tal linguagem tem ganhado cada vez mais espaço na comunidade acadêmica.

A principal ferramenta a ser estudada será o gráfico de controle, que possui ao mesmo tempo simplicidade em sua essência e diversas aplicações que podem torna-lo

mais complexo, como a lógica *fuzzy* e o monitoramento de 2 ou mais variáveis de processo. O projeto de um gráfico de controle pode demandar muito tempo, exigindo que se use de computadores com maiores capacidades de processamento e ao mesmo tempo algoritmos mais otimizados.

Quando se aplica a gráficos de controle por variáveis, que necessita de n valores medidos por amostra, o volume de dados é bem maior em relação a gráficos de controle por atributos, e esse volume aumenta ainda mais quando se trabalha com múltiplas variáveis, como é o caso de gráficos de controle como o T^2 de Hotelling. O *fuzzy* tipo-2, vem de encontro aos gráficos de controle para inserir todas incertezas estocásticas, subjetividades e imprecisão dos sistemas de medição/inspeção.

Portanto, o uso de modelos computacionais é de suma importância e torna possível o desenvolvimento deste trabalho, seja para o tratamento estatístico dos dados associados aos conjuntos *fuzzy* do tipo-1 e do tipo-2, seja para a simulação de desempenho do modelo dos gráficos de controle propostos que englobam processos de fuzzificação e defuzzificação de dados, culminando na implementação dos próprios gráficos de controle, que se tornam no fim, uma ferramenta de gestão visual muito eficiente.

3.3.2 Avaliação de Desempenho de Gráficos de Controle

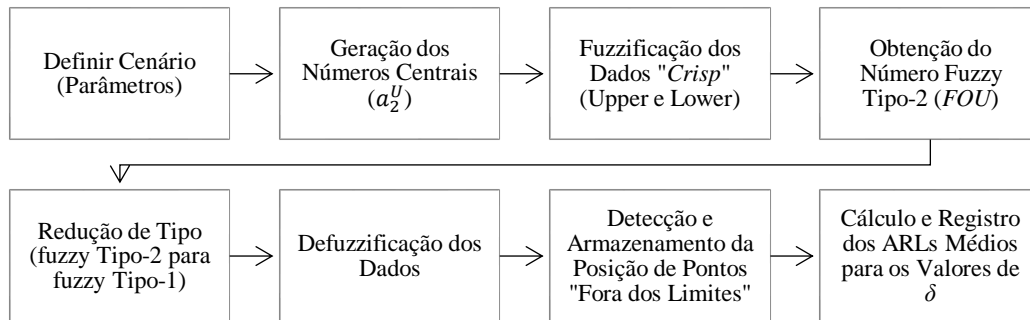
A partir dos modelos matemáticos obtidos, adapta-se estes para a criação de algoritmos computacionais de tal forma que se possa simular os valores do *NMA* (número médio de amostras até o sinal) para os gráficos de controle propostos nesta pesquisa.

De acordo com Costa, Epprecht e Carpinetti (2005), o *NMA* é medida de eficiência de gráficos de controle mais usual, e apesar de apresentar equações fechadas para alguns tipos de gráficos de controle, normalmente pode ser obtido numericamente por meio de simulação computacional.

Para esta pesquisa, o *NMA* foi adotado como a principal medida de desempenho para os gráficos de controle propostos. Tal medida é o inverso do poder de detecção do gráfico de controle, ou seja, $NMA = 1/Pd$, quando as observações são independentes, sendo que deslocamento da média do processo é expresso em unidades δ do desvio padrão (LEONI, 2011).

A visão geral do algoritmo de simulação pode ser observada na Figura 25.

Figura 25 – Etapas do algoritmo de análise de desempenho do gráfico de controle proposto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A simulação será feita considerando cenários referentes aos limitantes L_1 e L_2 , à altura da função de pertinência inferior, ou seja, o valor de $H(\tilde{A}^L)$ que está presente na equação (40), e à mancha de incerteza (FOU) adotada em cada situação.

A simulação do NMA , de forma geral, segue o procedimento a seguir descrito:

1. O primeiro passo é escolher os parâmetros que definirão o cenário que será avaliado, que para um gráfico de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar serão, além dos limitantes L_1 e L_2 , que irão caracterizar as incertezas do processo, o valor de $H(\tilde{A}^L)$, onde $0 \leq H(\tilde{A}^L) \leq 1$ e o valor da FOU , onde $0 \leq FOU \leq 1$;
2. Gerar aleatoriamente, segundo uma distribuição de probabilidade contínua normal e para os parâmetros de processo conhecidos (média e desvio-padrão), um valor *crisp*, que será utilizado como o valor central $a_2^U = a_2^L$ do TFN2. Observação: para o caso de amostras de tamanho n , gera-se n números.
3. Gerar números aleatórios entre 0 e 1, segundo uma distribuição de probabilidade contínua uniforme, para os valores de *upper bound* e *lower bound* a fim de iniciar o processo de fuzzificação de $a_2^U = a_2^L$. Tais valores são capazes de fuzzificar o valor gerado no passo anterior;
4. A partir dos limitantes L_1 e L_2 , calcula-se a_1^U e a_3^U por: $a_1^U = a_2^U - (lower\ bound).L_1$ e $a_3^U = a_2^U + (upper\ bound).L_2$. L_1 é o limitante da incerteza na borda inferior e L_2 é o limitante da incerteza da borda superior. Observação: esta etapa é similar ao processo de fuzzificação

(*fuzzy* tipo-1), e desta forma, obtém-se os valores de a_1^U e a_3^U , definindo assim os valores referentes à função de pertinência superior;

5. Para um valor predeterminado da *FOU*, a partir da equação (42), obtém-se:

$$a_1^L = FOU(a_2^U - a_1^U) + a_1^U$$

$$a_3^L = FOU(a_2^U - a_3^U) + a_3^U$$

Desta forma, tem-se o TFN2 = $(a_1^U, a_1^L, a_2^U, a_3^L, a_3^U)$

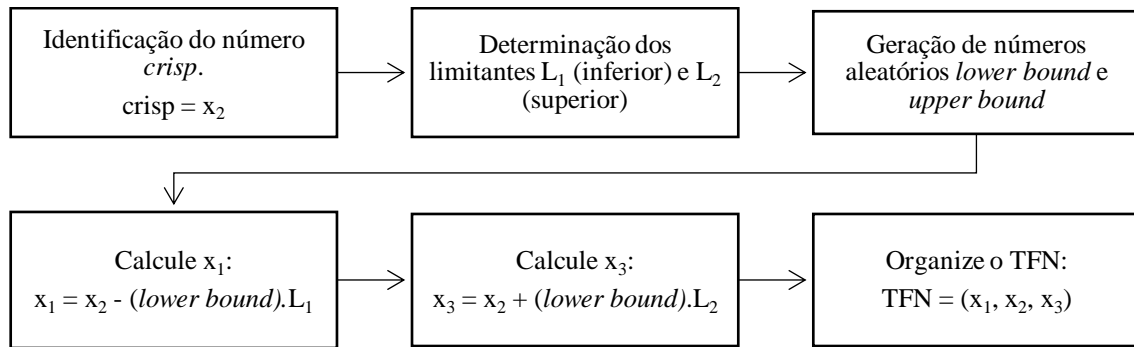
6. Para o gráfico \bar{X} , calcula-se a média amostral do número TFN2 = $(\bar{x}_1^U, \bar{x}_1^L, \bar{x}_2^U, \bar{x}_3^L, \bar{x}_3^U)$, para as 10.000 amostras/iterações, conforme proposto por Domangue e Patch (1991).
7. A fim de defuzzificar os dados, aplica-se as equação (49), (50) e (51) ao TFN2 = $(\bar{x}_1^U, \bar{x}_1^L, \bar{x}_2^U, \bar{x}_3^L, \bar{x}_3^U)$, onde será aplicado valores de $H(\tilde{A}^L)$, que definirá junto com os valores da *FOU*, os cenários para a simulação.
8. Para fins comparação dos gráficos de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar com os gráficos de controle tradicionais, utilizam-se os limites de controle *LSC* e *LIC* estimados e armazenados no passo 7. Observação: tal comparação demonstrará a sensibilidade de detecção dos gráficos de controle propostos em cada cenário.
9. O algoritmo computacional consiste em armazenar a posição das amostras que ultrapassaram os limites de controle, ou seja, acima do *LSC* ou abaixo do *LIC*.
10. Por fim, calcula-se a média das 10.000 posições armazenadas, obtendo assim o *NMA* em cada situação. Observação: valores pequenos de *NMA* demonstram que o gráfico de controle (em determinado cenário) possui uma capacidade maior de detectar amostras fora de controle.

3.3.3 Processo de Fuzzificação e Defuzzificação

Para este trabalho há dois processos de fuzzificação: números *crisp* \rightarrow números *fuzzy* triangulares tipo-1 e números *crisp* \rightarrow números *fuzzy* triangulares tipo-2 intervalar.

A transformação dos números *crisp* em TFN = (x_1, x_2, x_3) , descrito por Mendes (2019), ocorre como ilustra a Figura 26:

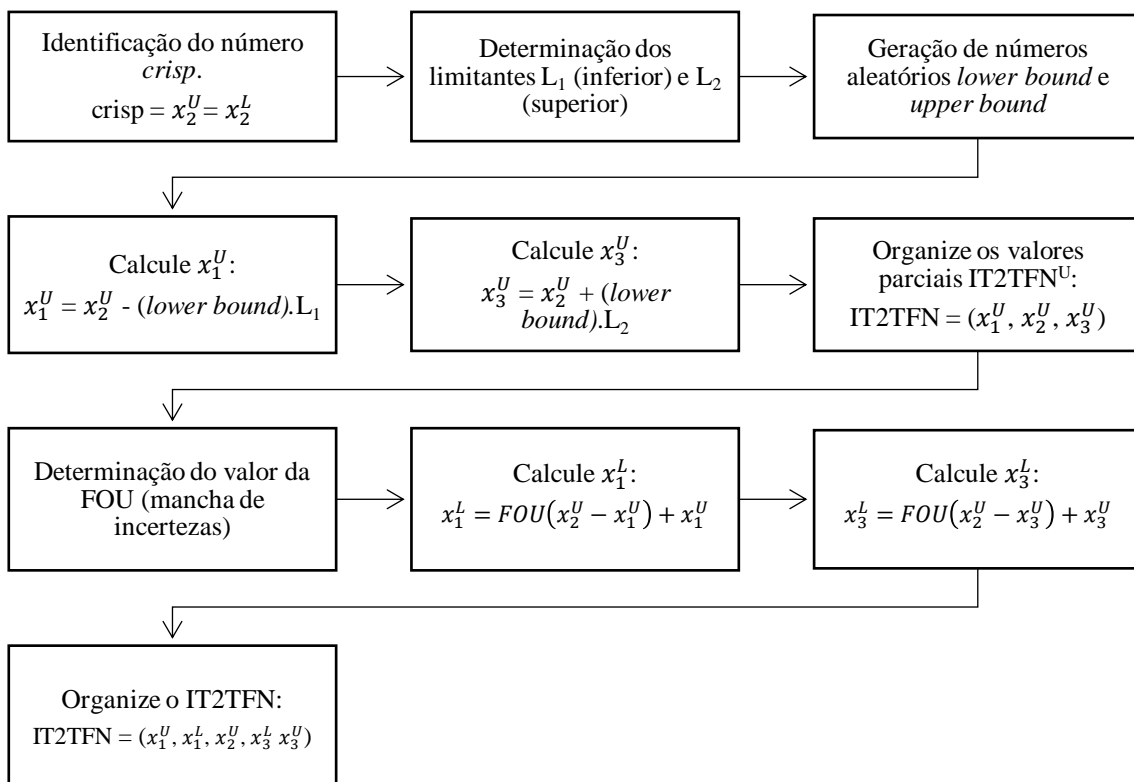
Figura 26 – Etapas do processo de fuzzificação para dados *fuzzy* TFN (tipo-1)



Fonte: Elaborado pelo autor.

A transformação dos números *crisp* em IT2TFN (*intervalar type-2 triangular fuzzy number*), onde IT2TFN = $(x_1^U, x_1^L, x_2^U, x_3^L, x_3^U)$, definido neste trabalho, ocorre como ilustra a figura 27:

Figura 27 – Etapas do processo de fuzzificação para dados *fuzzy* IT2TFN (tipo-2)



Fonte: Elaborado pelo autor.

O processo de defuzzificação TFN \rightarrow valor representativo *fuzzy* é realizado pelo *alpha-level fuzzy midrange* para TFN, de acordo com a equação (36).

O processo de defuzzificação IT2TFN \rightarrow valor representativo *fuzzy* é realizado em duas etapas, de acordo com a Figura 18. Primeiramente ocorre uma redução de tipo,

de fuzzy tipo-2 para fuzzy tipo-1, por meio das equações (46) e (47), obtendo $Rank^U$ e $Rank^L$, respectivamente. Posteriormente, para obter o valor representativo *fuzzy*, aplica-se os ranks obtidos na equação (51). Para o cálculo direto, é possível defuzzificar utilizando a equação (52).

3.4 APLICAÇÃO AOS DADOS DA CETESB E ANÁLISE COMPARATIVA

Primeiramente é importante avaliar o nível de operância do sistema de medição para cada dia, pois há períodos de inoperância que devem ser descartados no cálculo dos limites. Isso deve ser avaliado de acordo com o poluente atmosférico que será monitorado, e claramente influenciará na escolha dos dados mais confiáveis para a aplicação dos gráficos de controle.

A partir dos dados obtidos para os 3 meses, utiliza-se os valores referentes às médias horárias, uma vez que se pretende monitorar graficamente a variável atmosférica e não o índice da qualidade do ar já existente. A partir dos dados coletados pretende-se aplicar os gráficos de controle \bar{X} e R, \bar{X} e s e T^2 de Hotelling considerando os modelos tradicionais, fuzzy tipo-1 e fuzzy tipo-2 intervalar.

3.4.1 Implementação dos Gráficos de Controle \bar{X} e R

O primeiro gráfico de controle que será proposto para o monitoramento da poluição atmosférica será o \bar{X} e R tradicional, que servirá de base de comparação com os modelos propostos para *fuzzy* tipo-1 e *fuzzy* tipo-2. A implementação do gráfico de controle \bar{X} e R ocorrerá conforme segue:

1. Considera-se apenas uma variável, desta forma escolhe-se o MP₁₀. E conforme dito anteriormente, lê-se os dados *crisp* referentes a média horária de 00:00 às 23:00 de cada dia;
2. Como para os gráficos de controle \bar{X} e R é viável que o tamanho de amostras (medições) seja menor que 10 ($n < 10$), divide-se o dia em 4 partes: 01:00 às 06:00 (madrugada); 07:00 às 12:00 (manhã); 13:00 às 18:00 (tarde) e 19:00 às 00:00 (noite). Observação: desta forma, será necessário um par de gráficos para cada período, obtendo assim 8 gráficos de controle;
3. Para cada período, obtém-se a média amostral \bar{x} e a amplitude R, de acordo com (1) e (2) respectivamente, considerando as constantes para $n = 6$;

4. Calcula-se os parâmetros $\bar{\bar{x}}$ e $\bar{\bar{R}}$ para cada período do dia de acordo com as (3) e (4);
5. Calcula-se os Limites de Controle (LIC , LM e LSC) de acordo com (5), (6) e (7) e plota-se o gráfico (opcional);
6. Avalia-se a estabilidade do processo identificando pontos fora de controle tanto em \bar{X} quanto em R . Após a identificação dos pontos fora, deve-se retirá-los (começando por R) e recalculá-los os limites até que não haja pontos fora de controle. Observação: as amostras fora de controle devem ser retiradas tanto em R quanto em \bar{X} , mesmo que esteja sinalizando fora de controle em apenas um deles.
7. Como os limites de controle validados, conclui-se a fase I do gráfico de controle e dá-se início a fase II do gráfico de controle, o monitoramento;
8. Para o monitoramento, basta coletar os dados de concentração de MP_{10} referentes a cada período (madrugada, manhã, tarde e noite) em cada dia e plotar suas médias e amplitudes em seus respectivos gráficos. Monitora-se a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no gráfico \bar{X} e a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no gráfico R . Observação: os gráficos devem ser avaliados em conjunto e de forma individual para cada faixa horária.

Para fins de comparação a partir implementação dos gráficos de controle \bar{X} e R tradicional, realiza-se a implementação dos gráficos de controle *fuzzy* que além dos dados fuzzificados, necessita do parâmetro *alpha-cut*. O processo ocorrerá conforme segue:

1. Segue-se os passos 1 e 2 da situação descrita para a implementação de \bar{X} e R tradicionais, porém deve-se fuzzificar os dados para um número *fuzzy* triangular (TFN) conforme descrito anteriormente. Tem-se a partir de um valor x_i um TFN = (x_1, x_2, x_3) ou também TFN = (a, b, c) ;
2. Para cada período, obtém-se os valores para a média amostral $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_3)$ ou $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{c}})$ conforme (53) e a amplitude $R = (R_1, R_2, R_3)$ ou $R = (R_a, R_b, R_c)$ de acordo com (54), considerando as constantes para $n = 6$;
3. Calcula-se os parâmetros $\bar{\bar{\bar{x}}} = (\bar{\bar{\bar{x}}}_1, \bar{\bar{\bar{x}}}_2, \bar{\bar{\bar{x}}}_3)$ ou $\bar{\bar{\bar{x}}} = (\bar{\bar{\bar{a}}}, \bar{\bar{\bar{b}}}, \bar{\bar{\bar{c}}})$ e $\bar{\bar{\bar{R}}} = (\bar{\bar{\bar{R}}}_1, \bar{\bar{\bar{R}}}_2, \bar{\bar{\bar{R}}}_3)$ ou $R = (\bar{\bar{R}}_a, \bar{\bar{R}}_b, \bar{\bar{R}}_c)$ para cada período do dia de acordo com as equações (55) e (56);

4. Defuzzifica-se os parâmetros por meio da equação (39), que faz uso da técnica *midrange*. Observação: deve-se definir um valor de *alpha-cut* para o processo de defuzzificação proposto;
5. Calcula-se os Limites de Controle (*LIC*, *LM* e *LSC*) por meio de (57), (58) e (59) para \bar{X} TFN e (60), (61) e (62) para o gráfico de controle *R* TFN. Observação: os valores plotados/analísados em \bar{X} *fuzzy* quanto em *R fuzzy* devem ser defuzzificados conforme (63) e (64) respectivamente.
6. Avalia-se a estabilidade do processo identificando pontos fora de controle tanto em \bar{X} TFN quanto em *R* TFN. Após a identificação dos pontos fora, deve-se retirá-los (começando por *R* TFN) e recalcular os limites até que não haja pontos fora de controle. Observação: as mesmas regras relacionadas aos gráficos de controle tradicionais também são válidas para este caso.
7. Como os limites de controle validados, conclui-se a fase I do gráfico de controle *fuzzy* e dá-se início a fase II do gráfico de controle, o monitoramento;
8. Para o monitoramento, basta coletar os dados de concentração de MP_{10} referentes a cada período (madrugada, manhã, tarde e noite) em cada dia e plotar suas médias e amplitudes defuzzificadas em seus respectivos gráficos. Monitora-se a média da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no gráfico \bar{X} e a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no gráfico *R*. Observação: os gráficos devem ser avaliados em conjunto e de forma individual para cada faixa horária.

Por fim, para os gráficos de controle \bar{X} e *R fuzzy* tipo-2 intervalar, que utilizará de TFN2, serão considerados os valores já fuzzificados anteriormente e parâmetros como o $H(\tilde{A}^L)$ e a *FOU*. A implementação dos gráficos de controle \bar{X} e *R fuzzy* tipo-2 intervalar se dará por:

1. A partir dos dados fuzzificados de \bar{X} e *R fuzzy*, deve-se fuzzificar os dados TFN para um TFN2 conforme descrito anteriormente. Tem-se a partir de um TFN = (x_1, x_2, x_3) ou também TFN = (a, b, c) , um número fuzzy triangular tipo-2 TFN2 = $(x_1^U, x_1^L, x_2^U, x_3^L, x_3^U)$ ou também TFN2 = $(a_1^U, a_1^L, a_2^U, a_3^L, a_3^U)$;
2. Para cada período, obtém-se os valores para a média amostral $\bar{x} = (\bar{x}_1^U, \bar{x}_1^L, \bar{x}_2^U, \bar{x}_3^L, \bar{x}_3^U)$ ou $\bar{x} = (\bar{a}_1^U, \bar{a}_1^L, \bar{a}_2^U, \bar{a}_3^L, \bar{a}_3^U)$ e a amplitude $R = (R_1^U, R_1^L, R_2^U, R_3^L, R_3^U)$, considerando as constantes para $n = 6$;
3. Calcula-se os parâmetros $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1^U, \bar{\bar{x}}_1^L, \bar{\bar{x}}_2^U, \bar{\bar{x}}_3^L, \bar{\bar{x}}_3^U)$ ou $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{a}}_1^U, \bar{\bar{a}}_1^L, \bar{\bar{a}}_2^U, \bar{\bar{a}}_3^L, \bar{\bar{a}}_3^U)$ e $\bar{\bar{R}} = (\bar{\bar{R}}_1^U, \bar{\bar{R}}_1^L, \bar{\bar{R}}_2^U, \bar{\bar{R}}_3^L, \bar{\bar{R}}_3^U)$ para cada período do dia;

4. Faz-se a redução de tipo (*fuzzy* tipo-2 para *fuzzy* tipo-1), que faz uso da técnica de centroide, calculando-se $Rank^U$ e $Rank^L$. Observação: deve-se definir um valor de $H(\tilde{A}^L)$ para o processo de redução de tipo proposto;
5. Defuzzifica-se os parâmetros $Rank^U$ e $Rank^L$, obtendo assim o que ser chamado de valor representativo *fuzzy*;
6. Calcula-se os Limites de Controle (LIC , LM e LSC) de acordo (115), (116) e (117) para o gráfico de \bar{X} *fuzzy* tipo-2 intervalar e com as equações (120), (121) e (122) para o gráfico R *fuzzy* tipo-2 intervalar. Observação: os valores plotados/analísados em \bar{X} *fuzzy* tipo-2 intervalar quanto em R *fuzzy* tipo-2 intervalar devem ser defuzzificados conforme (52).
7. Avalia-se a estabilidade do processo identificando pontos fora de controle tanto em \bar{X} *fuzzy* tipo-2 intervalar quanto em R *fuzzy* tipo-2 intervalar. Após a identificação dos pontos fora, deve-se retirá-los (começando por R *fuzzy* tipo-2 intervalar) e recalcular os limites até que não haja pontos fora de controle. Observação: as mesmas regras relacionadas aos gráficos de controle tradicionais também são válidas para este caso.
8. Como os limites de controle validados, conclui-se a fase I do gráfico de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar e dá-se início a fase II do gráfico de controle, o monitoramento;
9. Para o monitoramento, basta coletar os dados de concentração de MP_{10} referentes a cada período (madrugada, manhã, tarde e noite) em cada dia e plotar suas médias e amplitudes defuzzificadas (após passar pela redução de tipo) em seus respectivos gráficos. Monitora-se a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no gráfico \bar{X} e a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no gráfico R . Observação: os gráficos devem ser avaliados em conjunto e de forma individual para cada faixa horária.

3.4.2 Implementação dos Gráficos de Controle \bar{X} e S

Os gráficos de controle de \bar{X} e s tradicional, que servirá de base de comparação com os modelos propostos para *fuzzy* tipo-1 e *fuzzy* tipo-2 posteriormente, pode ser considerado uma solução para os gráficos \bar{X} e R , pois s permite trabalhar com amostras maiores em relação a amplitude R , logo haverá um único par de gráficos para expressas

as grandezas média e desvio padrão respectivamente. A implementação do gráfico de controle \bar{X} e s ocorrerá conforme segue:

1. Considera-se apenas uma variável, desta forma escolhe-se o MP_{10} . E conforme dito anteriormente, lê-se os dados *crisp* referentes a média horária de 00:00 às 23:00 de cada dia;
2. Para cada dia, obtém-se a média amostral \bar{x} e o desvio padrão s , de acordo com as equações (1) e (14) respectivamente, considerando as constantes para $n = 24$;
3. Calcula-se os parâmetros $\bar{\bar{x}}$ e \bar{s} para cada período do dia de acordo com as equações (3) e (15);
4. Calcula-se os Limites de Controle (LIC , LM e LSC) de acordo com as equações (5), (6) e (7) para o gráfico de controle de \bar{X} e as equações (9), (10) e (11) para o gráfico de controle s . Plota-se o gráfico (opcional);
5. Avalia-se a estabilidade do processo identificando pontos fora de controle tanto em \bar{X} quanto em s . Após a identificação dos pontos fora, deve-se retirá-los (começando por s) e recalculando os limites até que não haja pontos fora de controle. Observação: as amostras fora de controle devem ser retiradas tanto em s quanto em \bar{X} , mesmo que esteja sinalizando fora de controle em apenas um deles.
6. Como os limites de controle validados, conclui-se a fase I do gráfico de controle e dá-se início a fase II do gráfico de controle, o monitoramento;
7. Para o monitoramento, basta coletar os dados de concentração de MP_{10} referentes a cada dia e plotar suas médias e desvios padrão em seus respectivos gráficos. Monitora-se a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no gráfico \bar{X} e o desvio padrão da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no gráfico R . Observação: os gráficos devem ser avaliados em conjunto diariamente.

Para fins de comparação, a partir da implementação dos gráficos de controle \bar{X} e s tradicional, realiza-se a implementação dos gráficos de controle *fuzzy* que além dos dados fuzzificados, necessita do parâmetro *alpha-cut*. O processo ocorrerá conforme segue:

1. Deve-se fuzzificar os dados para um número *fuzzy* triangular (TFN) conforme descrito anteriormente. Tem-se a partir de um valor x_i um TFN = (x_1, x_2, x_3) ou também TFN = (a, b, c) ;

2. Para cada dia, obtém-se os valores para a média amostral $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ou $\bar{x} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ conforme a equação (53) e a amplitude $S = (s_1, s_2, s_3)$ ou $S = (s_a, s_b, s_c)$ de acordo com a equação (71), considerando as constantes para $n = 24$;
3. Calcula-se os parâmetros $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_3)$ ou $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{c}})$ e $\bar{\bar{s}} = (\bar{\bar{s}}_1, \bar{\bar{s}}_2, \bar{\bar{s}}_3)$ ou $\bar{\bar{S}} = (\bar{\bar{s}}_a, \bar{\bar{s}}_b, \bar{\bar{s}}_c)$ para cada período do dia de acordo com as equações (55) e (72);
4. Defuzzifica-se os parâmetros por meio da equação (39), que faz uso da técnica *midrange*. Observação: deve-se definir um valor de *alpha-cut* para o processo de defuzzificação proposto;
5. Calcula-se os Limites de Controle (*LIC*, *LM* e *LSC*) de acordo com as equações (73), (74) e (75) para \bar{X} TFN e as equações (76), (77) e (78) para o gráfico de controle *s* TFN. Observação: os valores plotados/analísados em \bar{X} *fuzzy* quanto em *s* *fuzzy* devem ser defuzzificados conforme a equação (63) e (64) respectivamente.
6. Avalia-se a estabilidade do processo identificando pontos fora de controle tanto em \bar{X} TFN quanto em *s* TFN. Após a identificação dos pontos fora, deve-se retirá-los (começando por *s* TFN) e recalculer os limites até que não haja pontos fora de controle. Observação: as mesmas regras relacionadas aos gráficos de controle tradicionais também são válidas para este caso.
7. Como os limites de controle validados, conclui-se a fase I do gráfico de controle *fuzzy* e dá-se início a fase II do gráfico de controle, o monitoramento;
8. Para o monitoramento, basta coletar os dados de concentração de MP_{10} referentes a cada dia e plotar suas médias e desvios padrão defuzzificados em seus respectivos gráficos. Monitora-se a média $S_{mr-\bar{X}}^\alpha$ da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no gráfico \bar{X} e o desvio padrão S_{mr-s}^α da concentração de MP_{10} em $\mu g/m^3$ no gráfico *s*. Observação: os gráficos devem ser avaliados em conjunto em cada dia.

Por fim, para os gráficos de controle \bar{X} e *s* *fuzzy* tipo-2 intervalar, que utilizará de TFN2, serão considerados os valores já fuzzificados anteriormente e parâmetros como o $H(\tilde{A}^L)$ e a *FOU*. A implementação dos gráficos de controle \bar{X} e *s* *fuzzy* tipo-2 intervalar se dará por:

1. A partir dos dados fuzzificados de \bar{X} e *s* *fuzzy*, deve-se fuzzificar os dados TFN para um TFN2 conforme descrito anteriormente. Tem-se a partir de um TFN =

- (x_1, x_2, x_3) ou também TFN = (a, b, c) , um número *fuzzy* triangular tipo-2 TFN2 = $(x_1^U, x_1^L, x_2^U, x_2^L, x_3^U)$ ou também TFN2 = $(a_1^U, a_1^L, a_2^U, a_2^L, a_3^U)$;
2. Para cada dia, obtém-se os valores para a média amostral $\bar{x} = (\bar{x}_1^U, \bar{x}_1^L, \bar{x}_2^U, \bar{x}_2^L, \bar{x}_3^U)$ ou $\bar{x} = (\bar{a}_1^U, \bar{a}_1^L, \bar{a}_2^U, \bar{a}_2^L, \bar{a}_3^U)$ e o desvio padrão $s = (s_1^U, s_1^L, s_2^U, s_2^L, s_3^U)$, considerando as constantes para $n = 24$;
 3. Calcula-se os parâmetros $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1^U, \bar{\bar{x}}_1^L, \bar{\bar{x}}_2^U, \bar{\bar{x}}_2^L, \bar{\bar{x}}_3^U)$ ou $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{a}}_1^U, \bar{\bar{a}}_1^L, \bar{\bar{a}}_2^U, \bar{\bar{a}}_2^L, \bar{\bar{a}}_3^U)$ e $\bar{\bar{s}} = (\bar{\bar{s}}_1^U, \bar{\bar{s}}_1^L, \bar{\bar{s}}_2^U, \bar{\bar{s}}_2^L, \bar{\bar{s}}_3^U)$;
 4. Faz-se a redução de tipo (*fuzzy* tipo-2 para *fuzzy* tipo-1), que faz uso da técnica de centroide, calculando-se $Rank^U$ e $Rank^L$. Observação: deve-se definir um valor de $H(\tilde{A}^L)$ para o processo de redução de tipo proposto;
 5. Defuzzifica-se os parâmetros $Rank^U$ e $Rank^L$, obtendo assim o que pode ser chamado de valor representativo *fuzzy*;
 6. Calcula-se os Limites de Controle (LIC , LM e LSC) de acordo com as equações (161), (162) e (163) para o gráfico de controle \bar{X} *fuzzy* tipo-2 intervalar e de acordo com as equações (164), (165) e (166) para o gráfico de controle s *fuzzy* tipo-2 intervalar. Observação: os valores plotados/analísados em \bar{X} *fuzzy* tipo-2 intervalar quanto em s *fuzzy* tipo-2 intervalar devem ser defuzzificados conforme a equação (52)
 7. Avalia-se a estabilidade do processo identificando pontos fora de controle tanto em \bar{X} *fuzzy* tipo-2 intervalar quanto em s *fuzzy* tipo-2 intervalar. Após a identificação dos pontos fora, deve-se retirá-los (começando por s *fuzzy* tipo-2 intervalar) e recalcular os limites até que não haja pontos fora de controle. Observação: as mesmas regras relacionadas aos gráficos de controle tradicionais também são válidas para este caso.
 8. Como os limites de controle validados, conclui-se a fase I do gráfico de controle *fuzzy* tipo-2 intervalar e dá-se início a fase II do gráfico de controle, o monitoramento;
 9. Para o monitoramento, basta coletar os dados de concentração de MP_{10} referentes a cada dia e plotar suas médias $\bar{X}D_{tri}$ e desvios padrão SD_{tri} defuzzificados (após passar pela redução de tipo) em seus respectivos gráficos. Monitora-se a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no gráfico \bar{X} e o desvio padrão da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no gráfico de controle R . Observação: os gráficos devem ser avaliados em conjunto em cada dia.

3.4.3 Implementação do Gráfico de Controle T^2

O gráfico de controle de T^2 tradicional, que servirá de base de comparação com os modelos propostos para *fuzzy* tipo-1 e *fuzzy* tipo-2, diferentemente dos modelos anteriores, fará uso de duas variáveis: MP_{10} e SO_2 . A implementação do gráfico de controle de T^2 ocorrerá conforme segue:

1. Considera-se duas variáveis, desta forma escolhe-se o MP_{10} como a variável x_1 e SO_2 como a variável x_2 . E conforme dito anteriormente, lê-se os dados *crisp* referentes a média horária de 00:00 às 23:00 de cada dia;
2. Para cada dia, obtém-se as médias amostrais \bar{x}_1 e \bar{x}_2 para as variáveis x_1 e x_2 respectivamente; da mesma forma obtém-se as variâncias amostrais $var(x_1)$ e $var(x_2)$, e por fim, a covariância amostral $cov(x_1, x_2)$ respectivamente, considerando as constantes para $n = 23$;
3. Calcula-se os parâmetros μ_1 e μ_2 fazendo a média das médias amostrais; e os parâmetros σ_1^2 , σ_2^2 e σ_{12} são obtidos por meio da média das variâncias amostrais de x_1 , de x_2 e das covariâncias amostrais entre elas.
4. Desta forma, com todos os parâmetros em mãos, calcula-se o valor de T^2 para cada amostra, conforme (26);
5. Calcula-se os Limites de Controle (*LIC* e *LSC*) de acordo com (27) e (28) para a fase I do gráfico de controle de T^2 . Plota-se o gráfico (opcional);
6. Avalia-se a estabilidade do processo identificando pontos fora de controle para os valores de T^2 . Após a identificação dos pontos fora, deve-se retirá-los e recalculá-los até que não haja pontos fora de controle.
7. Com os limites de controle validados, conclui-se a fase I do gráfico de controle. Para que se possa dar início a fase II do gráfico de controle de T^2 , deve-se calcular os novos limites de controle (*LIC* e *LSC*) utilizando-se de (29) e (30), para o monitoramento do processo;
8. Para o monitoramento, basta coletar os dados de concentração de MP_{10} e SO_2 referentes a cada dia, calcular e plotar os valores de T^2 para cada amostra.

Para fins de comparação, a partir implementação do gráfico de controle de T^2 tradicional, realiza-se a implementação do gráfico de controle de T^2 *fuzzy*, que além dos dados fuzzificados para ambas as variáveis x_1 e x_2 , necessita do parâmetro *alpha-cut*. O processo ocorrerá conforme segue:

1. Deve-se fuzzificar os dados para um número *fuzzy* triangular (TFN) conforme descrito anteriormente. Tem-se para a variável x_1 um TFN = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) e para a variável x_2 um TFN = (x_{21}, x_{22}, x_{23}) ;
2. Para cada dia, obtém-se as médias amostrais $\bar{x}_1 = (\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \bar{x}_{13})$ e $\bar{x}_2 = (\bar{x}_{21}, \bar{x}_{22}, \bar{x}_{23})$ para as variáveis x_1 e x_2 respectivamente conforme (53); da mesma forma obtém-se as variâncias amostrais $var(x_1) = (var(x_1)_1, var(x_1)_2, var(x_1)_3)$ e $var(x_2) = (var(x_2)_1, var(x_2)_2, var(x_2)_3)$, e por fim, a covariância amostral $cov(x_1, x_2) = (cov(x_1, x_2)_1, cov(x_1, x_2)_2, cov(x_1, x_2)_3)$ respectivamente, considerando as constantes para $n = 23$;
3. Calcula-se os parâmetros $\mu_1 = (\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \bar{x}_{13})$, $\mu_2 = (\bar{x}_{21}, \bar{x}_{22}, \bar{x}_{23})$ e os parâmetros $\sigma_1^2 = (\overline{var(x_1)_1}, \overline{var(x_1)_2}, \overline{var(x_1)_3})$, $\sigma_2^2 = (\overline{var(x_2)_1}, \overline{var(x_2)_2}, \overline{var(x_2)_3})$ e $\sigma_{12} = (\overline{cov(x_1, x_2)_1}, \overline{cov(x_1, x_2)_2}, \overline{cov(x_1, x_2)_3})$, para que possam ser utilizados nos cálculos de T^2 ;
4. Defuzzifica-se os parâmetros por meio da equação (39), que faz uso da técnica *midrange*. Observação: deve-se definir um valor de *alpha-cut* para o processo de defuzzificação proposto;
5. Calcula-se os limites de controle (*LIC* e *LSC*) de acordo com (27) e (28) para a fase I do gráfico de controle TFN T^2 . Observação: os valores plotados/analísados no gráfico de controle TFN T^2 devem ser defuzzificados de maneira similar ao que foi nos gráficos de controle TFN \bar{X} , TFN R e TFN s , ou seja, o valor de $S_{mr-T^2}^\alpha$.
6. Avalia-se a estabilidade do processo identificando pontos fora de controle para os valores de $S_{mr-T^2}^\alpha$. Após a identificação dos pontos fora, deve-se retirá-los e recalculá-los até que não haja pontos fora de controle.
7. Com os limites de controle validados, conclui-se a fase I do gráfico de controle. Para que se possa dar início a fase II do gráfico de controle de TFN T^2 , deve-se calcular os novos limites de controle (*LIC* e *LSC*) utilizando-se de (29) e (30), para o monitoramento do processo;
8. Para o monitoramento, basta coletar os dados de concentração de MP_{10} e SO_2 referentes a cada dia, calcular e plotar os valores de $S_{mr-T^2}^\alpha$ para cada amostra.

Por fim, para o gráfico de controle T^2 fuzzy tipo-2 intervalar, serão considerados os valores já fuzzificados anteriormente e parâmetros como o $H(\tilde{A}^L)$ e a FOU , para ambas as variáveis (x_1 e x_2). A implementação do gráfico de controle IT2TFN T^2 se dará por:

1. A partir dos dados fuzzificados das variáveis x_1 e x_2 , deve-se fuzzificar os dados TFN para um IT2TFN conforme descrito anteriormente. Tem-se para a variável x_1 IT2TFN2 = $(x_{11}^U, x_{11}^L, x_{12}^U, x_{13}^L, x_{13}^U)$ e para a variável x_2 IT2TFN2 = $(x_{21}^U, x_{21}^L, x_{22}^U, x_{23}^L, x_{23}^U)$;
2. Para cada dia, obtém-se os valores das médias amostrais $\bar{x}_1 = (\bar{x}_{11}^U, \bar{x}_{11}^L, \bar{x}_{12}^U, \bar{x}_{13}^L, \bar{x}_{13}^U)$, $\bar{x}_2 = (\bar{x}_{21}^U, \bar{x}_{21}^L, \bar{x}_{22}^U, \bar{x}_{23}^L, \bar{x}_{23}^U)$ para as variáveis x_1 e x_2 respectivamente, da mesma forma obtém-se as variâncias amostrais $var(x_1) = (var(x_1)_1^U, var(x_1)_1^L, var(x_1)_2^U, var(x_1)_3^L, var(x_1)_3^U)$ e $var(x_2) = (var(x_2)_1^U, var(x_2)_1^L, var(x_2)_2^U, var(x_2)_3^L, var(x_2)_3^U)$, e por fim, a covariância amostral $cov(x_1, x_2) = (cov(x_1, x_2)_1^U, cov(x_1, x_2)_1^L, cov(x_1, x_2)_2^U, cov(x_1, x_2)_3^L, cov(x_1, x_2)_3^U)$ respectivamente, considerando as constantes para $n = 23$;
3. Calcula-se os parâmetros $\mu_1 = (\bar{x}_{11}^U, \bar{x}_{11}^L, \bar{x}_{12}^U, \bar{x}_{13}^L, \bar{x}_{13}^U)$ e $\mu_2 = (\bar{x}_{21}^U, \bar{x}_{21}^L, \bar{x}_{22}^U, \bar{x}_{23}^L, \bar{x}_{23}^U)$ referentes a média das variáveis x_1 e x_2 , os parâmetros $\sigma_1^2 = (\overline{var(x_1)_1^U}, \overline{var(x_1)_1^L}, \overline{var(x_1)_2^U}, \overline{var(x_1)_3^L}, \overline{var(x_1)_3^U})$, $\sigma_2^2 = (\overline{var(x_2)_1^U}, \overline{var(x_2)_1^L}, \overline{var(x_2)_2^U}, \overline{var(x_2)_3^L}, \overline{var(x_2)_3^U})$ e parâmetros $\sigma_{12} = (\overline{cov(x_1, x_2)_1^U}, \overline{cov(x_1, x_2)_1^L}, \overline{cov(x_1, x_2)_2^U}, \overline{cov(x_1, x_2)_3^L}, \overline{cov(x_1, x_2)_3^U})$, para que possam ser utilizados nos cálculos de IT2TFN T^2 ;
4. Faz-se a redução de tipo (fuzzy tipo-2 para fuzzy tipo-1), que faz uso da técnica de centroide, calculando-se $Rank^U$ e $Rank^L$. Observação: deve-se definir um valor de $H(\tilde{A}^L)$ para o processo de redução de tipo proposto;
5. Defuzzifica-se os parâmetros $Rank^U$ e $Rank^L$, obtendo assim o que pode ser chamado de valor representativo fuzzy para a estatística T^2 ;
6. Calcula-se os limites de controle (LIC e LSC) de acordo com (27) e (28) para a fase I do gráfico de controle IT2TFN T^2 . Observação: os valores plotados/analísados no gráfico de controle IT2TFN T^2 devem ser defuzzificados de maneira similar ao que foi nos gráficos de controle IT2TFN \bar{X} , IT2TFN R e IT2TFN s , ou seja, o valor de $D_{TIT} T^2$;

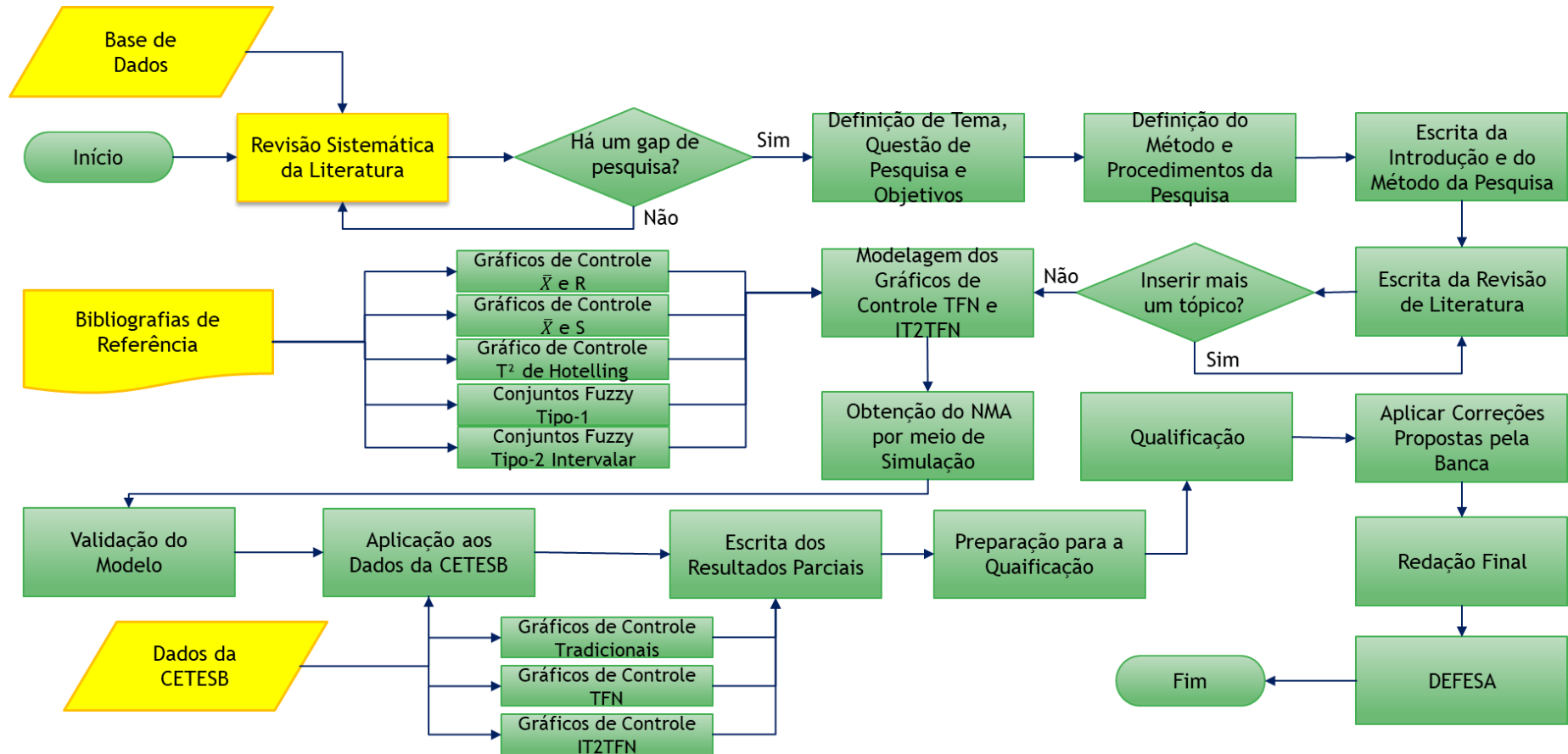
7. Avalia-se a estabilidade do processo identificando pontos fora de controle para os valores de $T^2 D_{TriT}$. Após a identificação dos pontos fora, deve-se retirá-los e recalcular os limites até que não haja pontos fora de controle.
8. Com os limites de controle validados, conclui-se a fase I do gráfico de controle. Para que se possa dar início a fase II do gráfico de controle de IT2TFN T^2 , deve-se calcular os novos limites de controle (*LIC* e *LSC*) utilizando-se de (29) e (30), para o monitoramento do processo;
9. Para o monitoramento, basta coletar os dados de concentração de MP_{10} e SO_2 referentes a cada dia, calcular e plotar os valores de $D_{TriT} T^2$ para cada amostra.

Importante salientar que os limites de controle do gráfico de controle de T^2 independe da fuzzificação e defuzzificação dos dados, uma vez que independem dos valores medidos.

3.5 FLUXOGRAMA DA PESQUISA

As etapas da pesquisa podem ser acompanhadas por meio do fluxograma da pesquisa ilustrado pela Figura 28.

Figura 28 – Fluxograma da Pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, serão apresentados os principais resultados obtidos a respeito do desempenho dos gráficos de controle por variáveis *fuzzy* tipo-2 intervalar. Por fim, apresenta-se a aplicação dos modelos propostos aos dados da qualidade do ar da CETESB.

4.1 GRÁFICO DE CONTROLE \bar{X} -R E R POR UMA ABORDAGEM FUZZY TIPO-2 INTERVALAR

4.1.1 Equacionamento e Propriedades

Senturk e Erginel (2009) propuseram modelos de gráficos de controle \bar{X} e R para números *fuzzy* triangulares. Posteriormente, Teksen e Anagün (2018b) propuseram gráficos de controle de \bar{X} e R para números *fuzzy* trapezoidais do tipo-2 intervalares. Adaptando as equações para a situação atual, tem-se que os parâmetros \bar{X} e R que serão plotados podem ser entendidos por (113) e (114):

$$\bar{x}_i = \left(\frac{\sum_{i=1}^m x_1^U}{n}, \frac{\sum_{i=1}^m x_1^L}{n}, \frac{\sum_{i=1}^m x_2^U}{n}, \frac{\sum_{i=1}^m x_2^L}{n}, \frac{\sum_{i=1}^m x_3^U}{n} \right) \quad (113)$$

$$R_i = (\max(x_{1i}^U) - \min(x_{1i}^U), \max(x_{1i}^L) - \min(x_{1i}^L), \max(x_{2i}^U) - \min(x_{2i}^U), \max(x_{2i}^L) - \min(x_{2i}^L), \max(x_{3i}^U) - \min(x_{3i}^U)) \quad (114)$$

sendo a variável x número *fuzzy* tipo-2 triangular intervalar no formato $(x_{i1}^U, x_{i1}^L, x_{i2}^L = x_{i2}^U, x_{i3}^L, x_{i3}^U)$ e n o tamanho da amostra.

Os limites de controle para o gráfico de controle \bar{X} *fuzzy* tipo-2 intervalar triangular podem ser obtidos usando as operações aritméticas para números *fuzzy* tipo-2 intervalar triangular, adaptando-se das equações apresentadas por Teksen e Anagün (2018b). Começando pela região da função de pertinência superior, os limites de controle podem ser calculados por (115), (116) e (117):

$$LSC_{\bar{X}-IT2TFN}^U = (\bar{x}_1^U + A_2 \bar{r}_1^U, \bar{x}_2^U + A_2 \bar{r}_2^U, \bar{x}_3^U + A_2 \bar{r}_3^U) \quad (115)$$

$$LM_{\bar{X}-IT2TFN}^U = (\bar{x}_1^U, \bar{x}_2^U, \bar{x}_3^U) \quad (116)$$

$$LIC_{\bar{X}-IT2TFN}^U = (\bar{x}_1^U - A_2 \bar{r}_3^U, \bar{x}_2^U - A_2 \bar{r}_2^U, \bar{x}_3^U - A_2 \bar{r}_1^U) \quad (117)$$

Para um nível mín ($H(\tilde{A}^U)$), onde $H(\tilde{A}^U)$ é o valor da função de pertinência superior μ^U . Para modelos IT2TFN é comum adotar $H(\tilde{A}^U) = 1$.

Os parâmetros da equação podem ser calculados segundo (118) e (119):

$$\bar{x}_i^U = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_1^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_2^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_3^U}{m} \right) \quad (118)$$

$$\bar{r}_i^U = \left(\frac{\sum_{i=1}^m r_1^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m r_2^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m r_3^U}{m} \right) \quad (119)$$

A partir das equações das *upper boundaries*, pode-se obter as equações referentes aos limites de controle para as *lower boundaries*. De forma análoga, os limites de controle referentes a função de pertinência inferior, podem ser calculados por (120), (121) e (122):

$$LSC_{\bar{X}-IT2TFN}^L = (\bar{x}_1^L + A_2 \bar{r}_1^L, \bar{x}_2^L + A_2 \bar{r}_2^L, \bar{x}_3^L + A_2 \bar{r}_3^L) \quad (120)$$

$$LM_{\bar{X}-IT2TFN}^L = (\bar{x}_1^L, \bar{x}_2^L, \bar{x}_3^L) \quad (121)$$

$$LIC_{\bar{X}-IT2TFN}^U = (\bar{x}_1^L - A_2 \bar{r}_3^L, \bar{x}_2^L - A_2 \bar{r}_2^L, \bar{x}_3^L - A_2 \bar{r}_1^L) \quad (122)$$

Para um nível mín ($H(\tilde{A}^L)$), onde $H(\tilde{A}^L)$ é o valor da função de pertinência inferior μ^L . Relaciona-se com $H(\tilde{A}^U)$ da seguinte forma: $0 < H(\tilde{A}^L) \leq H(\tilde{A}^U) = 1$. Importante salientar que o \bar{x}_2^L é igual ao valor de \bar{x}_2^U .

De forma análoga, o cálculo dos parâmetros podem ser realizados por (123) e (124):

$$\bar{x}_i^L = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_1^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_2^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_3^L}{m} \right) \quad (123)$$

$$\bar{r}_i^L = \left(\frac{\sum_{i=1}^m r_1^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m r_2^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m r_3^L}{m} \right) \quad (124)$$

Unificando todos os parâmetros em uma única equação, os limites de controle fuzzy tipo-2 intervalar para um gráfico de controle \bar{X} podem ser entendidos por (125), (126) e (127):

$$LSC_{\bar{X}-IT2TFN} = (\bar{x}_1^U + A_2 \bar{r}_1^U, \bar{x}_1^L + A_2 \bar{r}_1^L, \bar{x}_2^U + A_2 \bar{r}_2^U, \bar{x}_2^L + A_2 \bar{r}_2^L, \bar{x}_3^U + A_2 \bar{r}_3^U, \bar{x}_3^L + A_2 \bar{r}_3^L) \quad (125)$$

$$LM_{\bar{X}-IT2TFN} = (\bar{x}_1^U, \bar{x}_1^L, \bar{x}_2^U, \bar{x}_2^L, \bar{x}_3^U) \quad (126)$$

$$LIC_{\bar{X}-IT2TFN} = (\bar{x}_1^U - A_2 \bar{r}_3^U, \bar{x}_1^L - A_2 \bar{r}_3^L, \bar{x}_2^U - A_2 \bar{r}_2^U, \bar{x}_2^L - A_2 \bar{r}_2^L, \bar{x}_3^U - A_2 \bar{r}_1^U, \bar{x}_3^L - A_2 \bar{r}_1^L) \quad (127)$$

Por sua vez, os limites de controle para o gráfico de controle R fuzzy tipo-2 intervalar triangular podem ser obtidos usando as operações aritméticas para números fuzzy tipo-2 intervalar triangular resultando em (128), (129) e (130):

$$LSC_{R-IT2TFN}^U = (D_4 \bar{r}_1^U, D_4 \bar{r}_2^U, D_4 \bar{r}_3^U) \quad (128)$$

$$LM_{R-IT2TFN}^U = (\bar{r}_1^U, \bar{r}_2^U, \bar{r}_3^U) \quad (129)$$

$$LIC_{R-IT2TFN}^U = (D_3 \bar{r}_1^U, D_3 \bar{r}_2^U, D_3 \bar{r}_3^U) \quad (130)$$

Para um nível mín ($H(\tilde{A}^U)$). A partir das equações das *upper boundaries*, pode-se obter (131), (132) e (133) referentes aos limites de controle para as *lower boundaries*:

$$LSC_{R-IT2TFN}^L = (D_4 \bar{r}_1^L, D_4 \bar{r}_2^L, D_4 \bar{r}_3^L) \quad (131)$$

$$LM_{R-IT2TFN}^L = (\bar{r}_1^L, \bar{r}_2^L, \bar{r}_3^L) \quad (132)$$

$$LIC_{R-IT2TFN}^L = (D_3 \bar{r}_1^L, D_3 \bar{r}_2^L, D_3 \bar{r}_3^L) \quad (133)$$

Para um nível mín ($H(\tilde{A}^L)$). Unificando todos os parâmetros em uma única equação, os limites de controle fuzzy tipo-2 intervalar para um gráfico de controle R podem ser entendidos por (134), (135) e (136):

$$LSC_{R-IT2TFN} = (D_4 \bar{r}_1^U, D_4 \bar{r}_1^L, D_4 \bar{r}_2^U, D_4 \bar{r}_2^L, D_4 \bar{r}_3^U, D_4 \bar{r}_3^L) \quad (134)$$

$$LM_{R-IT2TFN} = (\bar{r}_1^U, \bar{r}_1^L, \bar{r}_2^U, \bar{r}_2^L, \bar{r}_3^U, \bar{r}_3^L) \quad (135)$$

$$LIC_{R-IT2TFN} = (D_3 \bar{r}_1^U, D_3 \bar{r}_1^L, D_3 \bar{r}_2^U, D_3 \bar{r}_2^L, D_3 \bar{r}_3^U, D_3 \bar{r}_3^L) \quad (136)$$

A fim de comparar os gráficos de controle \bar{X} e R fuzzy tipo-2 intervalar (IT2TFN) com os modelos clássicos e com os modelos que utilizam de *fuzzy* do tipo-1 (TFN), deve-se aplicar uma redução de tipo seguida de uma defuzzificação. Como os valores calculados são semelhantes aos valores *crisp*, os gráficos de controle fuzzy tipo-2 intervalar triangular gerados por esses métodos são semelhantes aos gráficos de controle clássicos. Portanto, os métodos de redução e de defuzzificação apresentados são capazes de avaliar o processo como "em controle" e "fora de controle" da mesma

forma que o método clássico. A partir da equação proposta por Kahraman *et al.* (2014), os parâmetros plotados podem ser defuzzificados por (137) e (138):

$$\bar{x}D_{TriT} = \frac{\frac{(x_{i3}^U - x_{i1}^U) + (x_{i2}^U - x_{i1}^U)}{3} + x_{i1}^U + H\tilde{A}^L \left[\frac{(x_{i3}^L - x_{i1}^L) + (x_{i2}^L - x_{i1}^L)}{3} + x_{i1}^U \right]}{2} \quad (137)$$

$$RD_{TriT} = \frac{\frac{(r_{i3}^U - r_{i1}^U) + (r_{i2}^U - r_{i1}^U)}{3} + r_{i1}^U + H\tilde{A}^L \left[\frac{(r_{i3}^L - r_{i1}^L) + (r_{i2}^L - r_{i1}^L)}{3} + r_{i1}^L \right]}{2} \quad (138)$$

Para obter os limites de controle defuzzificados de \bar{X} , faz-se uso das equações (139), (140) e (141). O processo para a obtenção das equações é descrito a seguir:

$$LSC_{\bar{X}-D_{TriT}}^U = \frac{(\bar{x}_3^U + A_2\bar{r}_3^U - \bar{x}_1^U - A_2\bar{r}_1^U) + (\bar{x}_2^U + A_2\bar{r}_2^U - \bar{x}_1^U - A_2\bar{r}_1^U)}{3} + \bar{x}_1^U + A_2\bar{r}_1^U$$

Simplificando a equação anterior, tem-se que o Rank U, do método de redução de tipo:

$$LSC_{\bar{X}-D_{TriT}}^U = \frac{\bar{x}_1^U + \bar{x}_2^U + \bar{x}_3^U + A_2(\bar{r}_1^U + \bar{r}_2^U + \bar{r}_3^U)}{3}$$

Para o Rank L, tem-se:

$$LSC_{\bar{X}-D_{TriT}}^L = H\tilde{A}^L \left[\frac{(\bar{x}_3^L + A_2\bar{r}_3^L - \bar{x}_1^L + A_2\bar{r}_1^L) + (\bar{x}_2^L + A_2\bar{r}_2^L - \bar{x}_1^L + A_2\bar{r}_1^L)}{3} + \bar{x}_1^L + A_2\bar{r}_1^L \right]$$

Simplificando a equação anterior, tem-se que o Rank L, do método de redução de tipo:

$$LSC_{\bar{X}-D_{TriT}}^L = H\tilde{A}^L \left[\frac{\bar{x}_1^L + \bar{x}_2^L + \bar{x}_3^L + A_2(\bar{r}_1^L + \bar{r}_2^L + \bar{r}_3^L)}{3} \right]$$

Por fim, realizando a defuzzificação de Rank U e Rank L, e de forma análoga para LM e LIC, tem-se que:

$$LSC_{\bar{X}-D_{TriT}} = \frac{\bar{x}_1^U + \bar{x}_2^U + \bar{x}_3^U + A_2(\bar{r}_1^U + \bar{r}_2^U + \bar{r}_3^U)}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{\bar{x}_1^L + \bar{x}_2^L + \bar{x}_3^L + A_2(\bar{r}_1^L + \bar{r}_2^L + \bar{r}_3^L)}{6} \right] \quad (139)$$

$$LM_{\bar{X}-D_{TriT}} = \frac{\bar{x}_1^U + \bar{x}_2^U + \bar{x}_3^U}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{\bar{x}_1^L + \bar{x}_2^L + \bar{x}_3^L}{6} \right] \quad (140)$$

$$LIC_{\bar{X}-D_{TriT}} = \frac{\bar{x}_1^U + \bar{x}_2^U + \bar{x}_3^U - A_2(\bar{r}_1^U + \bar{r}_2^U + \bar{r}_3^U)}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{\bar{x}_1^L + \bar{x}_2^L + \bar{x}_3^L - A_2(\bar{r}_1^L + \bar{r}_2^L + \bar{r}_3^L)}{6} \right] \quad (141)$$

sendo $LIC_{\bar{X}-D_{TriT}}$, $LM_{\bar{X}-D_{TriT}}$ e $LSC_{\bar{X}-D_{TriT}}$ os limites de controle defuzzificados para um gráfico de controle IT2TFN \bar{X} a partir das variáveis IT2TFN $\bar{X} = (\bar{x}_1^U, \bar{x}_1^L, \bar{x}_2^L = \bar{x}_2^U, \bar{x}_3^L, \bar{x}_3^U)$ e IT2TFN $\bar{R} = (\bar{r}_1^U, \bar{r}_1^L, \bar{r}_2^L = \bar{r}_2^U, \bar{r}_3^L, \bar{r}_3^U)$, com $0 \leq H(\tilde{A}^L) \leq 1$.

Para o gráfico R, os limites de controle são definidos por (142), (143) e (144):

$$LSC_{R-D_{TriT}} = \frac{D_4(\bar{r}_1^U + \bar{r}_2^U + \bar{r}_3^U)}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{D_4(\bar{r}_1^L + \bar{r}_2^L + \bar{r}_3^L)}{6} \right] \quad (142)$$

$$LM_{R-D_{TriT}} = \frac{\bar{r}_1^U + \bar{r}_2^U + \bar{r}_3^U}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{\bar{r}_1^L + \bar{r}_2^L + \bar{r}_3^L}{6} \right] \quad (143)$$

$$LIC_{R-D_{TriT}} = \frac{D_3(\bar{r}_1^U + \bar{r}_2^U + \bar{r}_3^U)}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{D_3(\bar{r}_1^L + \bar{r}_2^L + \bar{r}_3^L)}{6} \right] \quad (144)$$

sendo $LIC_{R-D_{TriT}}$, $LM_{R-D_{TriT}}$ e $LSC_{R-D_{TriT}}$ os limites de controle defuzzificados para um gráfico de controle IT2TFN R a partir da variável e IT2TFN $\bar{R} = (\bar{r}_1^U, \bar{r}_1^L, \bar{r}_2^L = \bar{r}_2^U, \bar{r}_3^L, \bar{r}_3^U)$, com $0 \leq H(\tilde{A}^L) \leq 1$.

4.1.2 Avaliação de Desempenho do Gráfico de Controle de \bar{X}

O modelo matemático e as propriedades dos gráficos de controle \bar{X} e R sob uma abordagem *fuzzy* tipo-2 foram apresentados por Teksen e Anagün (2018b), mas este trabalho mostra de forma inédita a análise de desempenho calculando o *NMA* por meio de algoritmo computacional, evidenciando a capacidade de detecção de falhas do gráfico de controle sugerido.

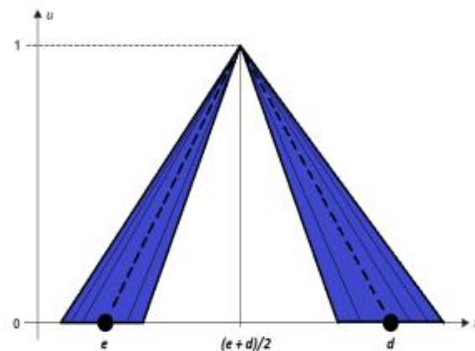
Para as simulações do *NMA* do gráfico de controle \bar{X} Tradicional, \bar{X} *Fuzzy* e \bar{X} *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar, foi utilizado o tamanho de amostra $n = 5$, média de processo 1.000 e desvio padrão 4. Os valores de δ variam de 0 a 2 com acréscimos sucessivos de 0,1 e, segundo Domangue e Patch (1991), devem ser realizadas 10.000 iterações na simulação a fim de obter um resultado mais preciso.

Considerando os valores de *NMA* obtidos por Mendes (2019) para o gráfico de controle de \bar{X} Tradicional e \bar{X} *Fuzzy*, para o valor de $H(\tilde{A}^L)$ de 1,0, ou seja, $H(\tilde{A}^U) = H(\tilde{A}^L) = 1,0$. Para fins de comparação com gráfico de controle \bar{X} *Fuzzy* Tipo-2 Intervalar, serão acrescentadas ainda, os valores da *FOU* de 0 a 1. Simula-se *shifts* (δ) que variam de 0,0 a 2,0. A comparação deve ser feita utilizando-se dos limites de processo (preestabelecidos), o que é sugerido por Khan *et al* (2022) para a cálculo do *NMA*.

Considerando o primeiro cenário no qual os IT2TFN são gerados a partir dos limitantes $L_1 = 0,25$ e $L_2 = 0,45$ (cenário 1). Tal cenário foi proposto por Mendes (2019) e aplicado ao gráfico de controle \bar{X} fuzzy tipo-1, utilizando-se de TFN. Para a altura $H(\tilde{A}^L) = 1$, e os valores da FOU variando entre 0,00 e 1,00 obtém-se a Tabela 2.

O segundo cenário, no qual os IT2TFN são gerados a partir dos limitantes $L_1 = 0,50$ e $L_2 = 0,45$ (cenário 2). Considerando $H(\tilde{A}^L) = 1$ e FOU variando entre 0,00 e 1,00 obtém-se a Tabela 3. A Figura 29 ilustra a situação descrita.

Figura 29 - IT2TFN para $H(A^U) = H(A^L) = 1$



Fonte: Rocha Rizol (2011)

O gráfico de controle \bar{X} IT2TFN foi avaliado frente ao gráfico de controle \bar{X} tradicional e ao gráfico de controle \bar{X} TFN utilizando-se de uma transformação *alpha-level midrange* e demonstrou uma capacidade de detecção de pontos fora de controle quando simulado seu NMA considerando que os parâmetros de processo são conhecidos. O algoritmo computacional em R pode ser observado no Apêndice A e as Tabelas 2 (cenário 1) e 3 (cenário 2) ilustram os valores de *NMA* de acordo com os valores da *FOU*.

Tabela 2 - Simulação dos *NMA*s conforme a *FOU* para o cenário 1 ($L_1 = 0,25$ e $L_2 = 0,45$) (Continua)

δ	NMA_T Tradicional (padrão)	Fuzzy 1 NMA_{TFN} $FOU = 0,00$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,05$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,10$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,15$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,20$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,25$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,30$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,35$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,40$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,45$	NMA_{IT2TFN} $FOU = 0,50$
0,0	370,4	370,5	372,5	372,7	372,6	372,6	372,7	372,9	373,0	373,2	373,1	373,1
0,1	295,8	283,1	282,7	283,0	283,4	283,8	284,0	284,1	284,8	285,2	285,4	285,9
0,2	177,7	169	168,9	169,3	169,6	169,9	170,2	170,4	170,6	170,7	170,8	170,8
0,3	99,5	95,8	94,1	94,2	94,3	94,2	94,4	94,7	94,6	94,9	95,0	95,3
0,4	56,6	53,4	55,1	55,0	55,1	55,2	55,2	55,2	55,1	55,0	55,1	55,1
0,5	33,4	31,9	31,5	31,7	31,8	31,9	32,1	32,2	32,2	32,3	32,2	32,2
0,6	20,6	19,8	20,1	20,2	20,3	20,2	20,1	20,1	20,1	20,2	20,1	20,1
0,7	13,2	12,9	12,6	12,6	12,5	12,6	12,7	12,7	12,7	12,7	12,7	12,7
0,8	8,9	8,7	8,6	8,6	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7
0,9	6,2	6,1	6,0	6,0	6,0	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1
1,0	4,5	4,5	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,5	4,4	4,5	4,4	4,4
1,1	3,4	3,4	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3
1,2	2,7	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6
1,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1
1,4	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
1,5	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6
1,6	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
1,7	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2	1,3	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	1,2
1,8	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
1,9	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
2,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3 - Simulação dos *NMA*s conforme a *FOU* para o cenário 1 ($L_1 = 0,25$ e $L_2 = 0,45$) (Continuação)

δ	NMA _T Tradicional (padrão)	Fuzzy 1										
		NMA _{TFN} FOU =0,00	NMA _{IT2TFN} FOU =0,55	NMA _{IT2TFN} FOU =0,60	NMA _{IT2TFN} FOU =0,65	NMA _{IT2TFN} FOU =0,70	NMA _{IT2TFN} FOU =0,75	NMA _{IT2TFN} FOU =0,80	NMA _{IT2TFN} FOU =0,85	NMA _{IT2TFN} FOU =0,90	NMA _{IT2TFN} FOU =0,95	NMA _{IT2TFN} FOU =1,00
0,0	370,4	370,5	373,2	373,5	373,5	373,7	373,7	373,8	373,9	373,7	373,7	373,5
0,1	295,8	283,1	286,3	286,7	286,8	287,0	287,2	287,5	287,9	288,1	288,5	288,8
0,2	177,7	169	171,0	171,1	171,3	171,4	171,7	171,9	172,1	172,6	172,6	172,9
0,3	99,5	95,8	95,5	95,5	95,7	95,8	95,8	95,9	96,2	96,4	96,7	97,1
0,4	56,6	53,4	55,3	55,4	55,6	55,7	56,0	56,1	56,0	55,9	55,8	55,8
0,5	33,4	31,9	32,3	32,3	32,3	32,3	32,3	32,3	32,5	32,6	32,6	32,7
0,6	20,6	19,8	20,1	20,2	20,1	20,1	20,0	20,1	20,1	20,1	20,0	20,1
0,7	13,2	12,9	12,8	12,8	12,9	12,9	13,0	13,0	13,0	13,1	13,1	13,1
0,8	8,9	8,7	8,7	8,7	8,7	8,8	8,8	8,8	8,8	8,9	8,9	8,8
0,9	6,2	6,1	6,1	6,1	6,1	6,1	6,0	6,0	6,0	5,9	6,0	6,0
1,0	4,5	4,5	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,5	4,5	4,4
1,1	3,4	3,4	3,3	3,3	3,3	3,4	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3
1,2	2,7	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6
1,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1
1,4	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
1,5	1,6	1,6	1,5	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,6
1,6	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
1,7	1,3	1,3	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
1,8	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
1,9	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
2,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4 - Simulação dos *NMA*s conforme a *FOU* para o cenário 2 ($L_1 = 0,50$ e $L_2 = 0,95$) (Continua)

δ	<i>NMA</i> _T	Fuzzy 1										
	Tradicional (padrão)	<i>NMA</i> _{TFN} FOU =0,00	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,05	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,10	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,15	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,20	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,25	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,30	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,35	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,40	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,45	<i>NMA</i> _{IT2TFN} FOU =0,50
0,0	370,4	370,4	368,4	368,6	369,0	369,1	369,6	370,0	370,0	370,1	370,6	370,2
0,1	295,8	274,8	269,8	270,5	271,4	271,8	272,0	272,3	272,8	273,2	273,9	274,4
0,2	177,7	162,3	155,5	156,0	156,4	157,2	157,7	158,4	159,2	159,8	160,0	160,6
0,3	99,5	91,4	87,5	87,7	87,8	88,1	88,7	88,9	89,1	89,3	89,6	89,6
0,4	56,6	52,1	50,8	51,1	51,5	51,7	52,0	52,1	52,3	52,3	52,7	53,0
0,5	33,4	31,2	30,4	30,4	30,5	30,4	30,4	30,5	30,5	30,6	30,6	30,7
0,6	20,6	19,0	18,7	18,9	18,9	18,9	18,9	18,9	19,0	19,0	19,0	19,1
0,7	13,2	12,4	12,0	12,0	12,0	12,0	12,2	12,2	12,1	12,2	12,4	12,5
0,8	8,9	8,3	8,2	8,2	8,1	8,2	8,3	8,3	8,3	8,4	8,4	8,3
0,9	6,2	5,9	5,7	5,9	5,9	5,8	5,7	5,7	5,8	5,8	5,9	6,0
1,0	4,5	4,3	4,3	4,1	4,1	4,2	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3
1,1	3,4	3,3	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2
1,2	2,7	2,6	2,5	2,6	2,6	2,6	2,5	2,6	2,6	2,6	2,5	2,6
1,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1
1,4	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
1,5	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
1,6	1,4	1,4	1,3	1,4	1,3	1,4	1,4	1,4	1,3	1,4	1,4	1,4
1,7	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3
1,8	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
1,9	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
2,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1

Fonte: Elaborado pelo autor.

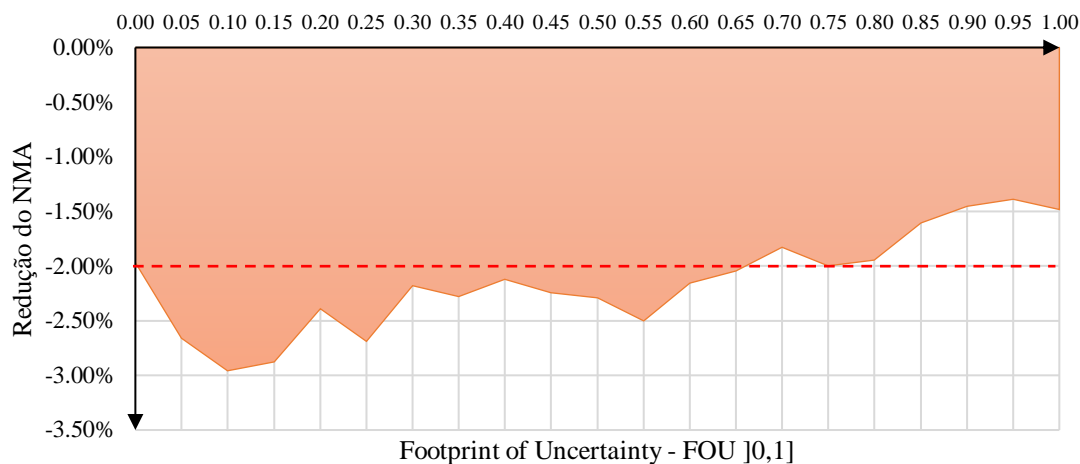
Tabela 5 - Simulação dos *NMA*s conforme a *FOU* para o cenário 2 ($L_1 = 0,50$ e $L_2 = 0,95$) (Continuação)

δ	NMA _T	Fuzzy 1										
	Tradicional (padrão)	NMA _{TFN} FOU = 0,00	NMA _{IT2TFN} FOU = 0,55	NMA _{IT2TFN} FOU = 0,60	NMA _{IT2TFN} FOU = 0,65	NMA _{IT2TFN} FOU = 0,70	NMA _{IT2TFN} FOU = 0,75	NMA _{IT2TFN} FOU = 0,80	NMA _{IT2TFN} FOU = 0,85	NMA _{IT2TFN} FOU = 0,90	NMA _{IT2TFN} FOU = 0,95	NMA _{IT2TFN} FOU = 1,00
0,0	370,4	370,4	370,8	370,9	371,1	371,6	371,9	371,4	371,2	371,5	371,4	371,4
0,1	295,8	274,8	275,3	275,9	276,4	276,7	276,9	277,6	278,3	278,9	279,7	280,0
0,2	177,7	162,3	161,2	161,6	161,8	162,4	163,1	163,6	164,3	164,8	165,4	166,1
0,3	99,5	91,4	89,8	90,4	90,7	90,7	91,0	91,3	91,8	92,2	92,4	92,7
0,4	56,6	52,1	53,1	53,4	53,6	53,9	54,2	54,3	54,1	54,3	54,5	54,6
0,5	33,4	31,2	30,6	30,8	31,0	31,0	31,0	31,2	31,2	31,3	31,3	31,2
0,6	20,6	19,0	19,1	19,1	19,0	19,1	19,3	19,4	19,5	19,6	19,6	19,7
0,7	13,2	12,4	12,5	12,4	12,6	12,6	12,7	12,6	12,6	12,7	12,8	12,8
0,8	8,9	8,3	8,4	8,5	8,5	8,5	8,5	8,6	8,5	8,5	8,5	8,4
0,9	6,2	5,9	6,0	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9	5,8	5,9	5,9	6,0
1,0	4,5	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,4	4,4	4,4	4,3
1,1	3,4	3,3	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3	3,3	3,3	3,3
1,2	2,7	2,6	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6
1,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1
1,4	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
1,5	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
1,6	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
1,7	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3
1,8	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
1,9	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
2,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode se observar na Tabela 2, relativa ao cenário 1, os valores do *NMA* do gráfico de controle \bar{X} IT2TFN são, em média, menores que os valores do *NMA* do gráfico \bar{X} tradicional. A Figura 30 ilustra a redução percentual do *NMA* do modelo proposto em função do valor da *FOU* para o cenário 1.

Figura 30 – Redução percentual média do *NMA* no \bar{X} IT2TFN em função do valor da *FOU*. Valor de referência: Gráfico de Controle \bar{X} Tradicional. (Cenário 1)



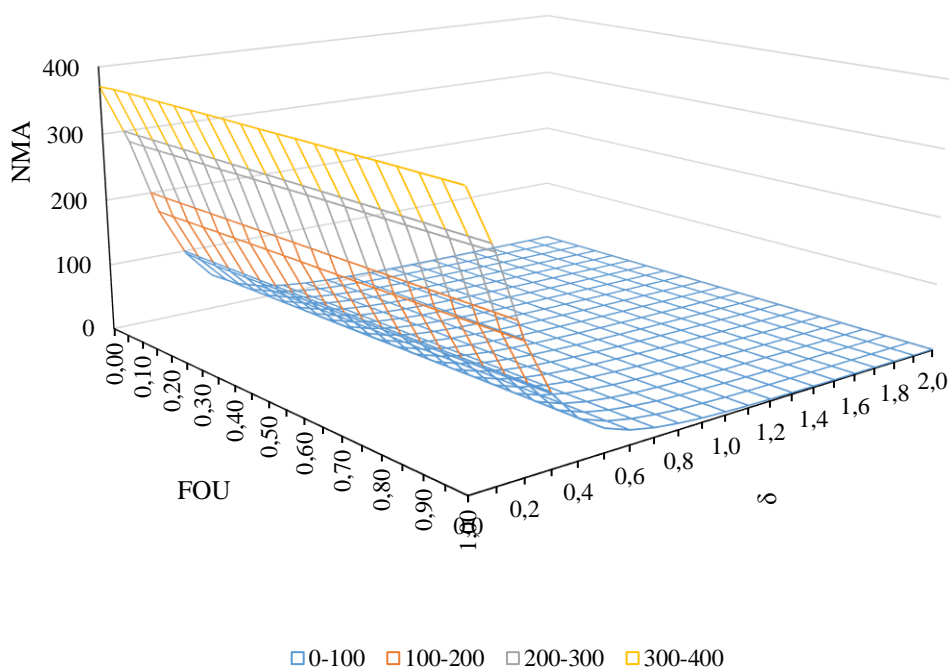
Fonte: Elaborado pelo autor.

O valor percentual apresentado refere-se ao percentual de redução no valor do *NMA* em relação ao *NMA* do gráfico de controle tradicional (Shewhart). O gráfico de controle \bar{X} IT2TFN, apresenta um percentual médio de redução no *NMA* maior, quando se realiza o cálculo $[(NMA_{\text{atual}} - NMA_{\text{tradicional}}) / NMA_{\text{tradicional}}] \cdot 100$, para valores de *FOU* entre 0,05 e 0,15. Nessa faixa de valores a redução no *NMA* é em média, 2,83% em relação ao *NMA* do gráfico de controle \bar{X} tradicional, enquanto o modelo proposto de *fuzzy* tipo-1 possui o *NMA* 1,97% menor que o tradicional. Comparando o *NMA* do gráfico de controle \bar{X} IT2TFN com o \bar{X} TFN para o cenário 1, verifica-se que a utilização de uma abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar melhora o desempenho de um gráfico de controle de \bar{X} se comparado com a utilização de uma abordagem *fuzzy* tipo-1.

A Figura 31 ilustra a superfície formada em função das variações da *FOU* e do deslocamento da média. Há variações ínfimas ao longo da superfície, logo torna-se necessário apresentar um modelo mais visual capaz de comparar a porcentagem de redução no *NMA* em relação com o gráfico de controle tradicional, além da linha

tracejada que representa o percentual de redução do *NMA* para o modelo *fuzzy* tipo-1 proposto, ou seja, para uma *FOU* = 0.

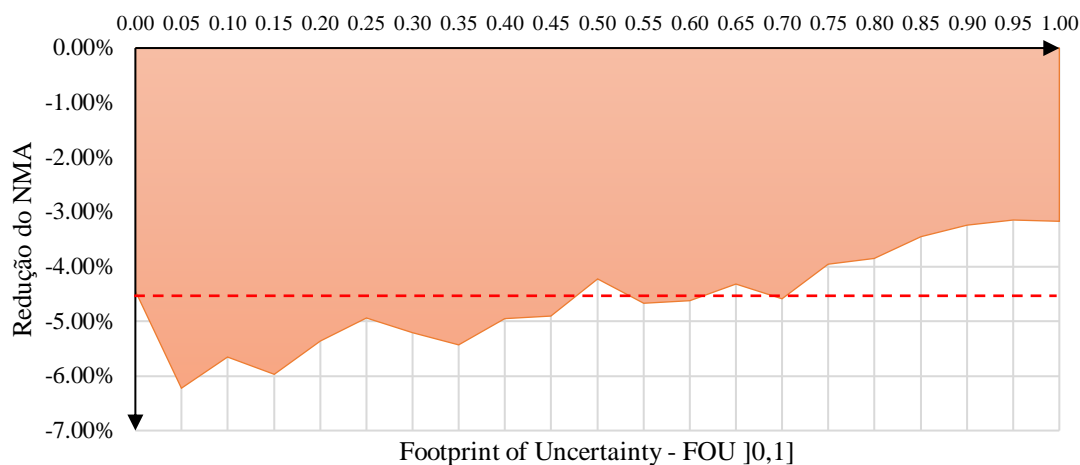
Figura 31 – *NMA* do gráfico de controle \bar{X} IT2TFN em função do valor da *FOU*. (Cenário 1)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a Tabela 3, relativa ao segundo cenário, percebe-se uma ampla vantagem do gráfico de controle \bar{X} IT2TFN em relação ao gráfico de controle da média tradicional, e novamente a *FOU* com valores entre 0,05 e 0,15 apresenta os melhores desempenhos em relação aos outros valores. Para a faixa de valores da *FOU* variando entre 0,05 e 0,15, o gráfico de controle \bar{X} IT2TFN apresentou um *NMA* 5,95% menor que o modelo tradicional, enquanto o modelo de *fuzzy* tipo-1 é 4,45% menor que o *NMA* do gráfico de controle \bar{X} TFN, que faz uso de uma boa estimativa dos limitantes e de um valor recomendado de α -cut = 0,45. A Figura 32 ilustra a redução percentual do *NMA* do modelo proposto em função do valor da *FOU* para o cenário 2.

Figura 32 – Redução percentual média do NMA no \bar{X} IT2TFN em função do valor da FOU. Valor de referência: Gráfico de Controle \bar{X} Tradicional. (Cenário 2)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a simulação computacional para o gráfico de controle \bar{X} , constatou-se que o método de fuzzificação proposto é funcional para conjuntos de dados *crisp*, uma vez que estejam definidos os parâmetros $H(A^L)$, a FOU e os limitantes L_1 e L_2 . O gráfico de controle de \bar{X} se mostrou mais eficiente em desempenho quando comparado ao tradicional e ao *fuzzy* tipo-1 por apresentar os menores valores de NMA . Dentre os valores de FOU simulados, os valores contidos no intervalo de 0,05 a 0,15 apresentaram um desempenho superior aos demais.

A partir do exposto pode-se afirmar que o gráfico de controle \bar{X} IT2TFN possui um melhor desempenho que o seu equivalente tradicional e *fuzzy* tipo-1 no que se refere a capacidade de detectar amostras fora de controle estatístico.

4.1.3 Avaliação de Desempenho dos Gráficos de Controle de \bar{X} -R

Uma vez realizadas as simulações para o gráfico de controle \bar{X} para números fuzzy triangulares tipo-2 intervalar, é importante que se faça uma simulação dos gráficos de controle de \bar{X} e R atuando em conjunto, pois é o cenário ideal quando se trata de monitoramento de processos reais e de eficiência na detecção de amostras fora de controle.

Para as simulações do *NMA* dos gráficos de controle \bar{X} -*R* Tradicional e \bar{X} -*R Fuzzy* Tipo-2 Intervalar, foi utilizado o tamanho de amostra $n = 5$, média de processo 0.000 e desvio padrão 1.000, ou seja, a curva normal padrão. Os limitantes L_1 e L_2 foram considerados desta vez, com valores iguais, ou seja: $L_1 = L_2 = 0,05$. Os valores de δ variam de 0 a 1,6 com acréscimos sucessivos de 0,2 e os valores de λ variam de 1 a 2,5.

De acordo com Zhang *et al.* (2022), para controladores PI, o valor da *FOU* pode interferir na velocidade de resposta, que foi o caso demonstrado nas simulações do tópico 4.1.2, ou na redução dos *overshoots*, que no caso dos gráficos de controle seriam os alarmes falsos. Neste caso em especial, foi considerado um valor de $FOU = 0,30$ por apresentar um equilíbrio entre a rapidez de resposta e a redução de alarmes falsos.

A Tabela 6 ilustra os valores de *NMA* simulados para os gráficos de controle \bar{X} -*R* tradicionais e os gráficos de controle \bar{X} -*R* IT2TFN para um valor de $FOU = 0,30$.

Tabela 6 - Simulação dos *NMA*s para os gráficos de controle \bar{X} -*R* Tradicionais e IT2TFN \bar{X} -*R*. ($FOU = 0,30$)

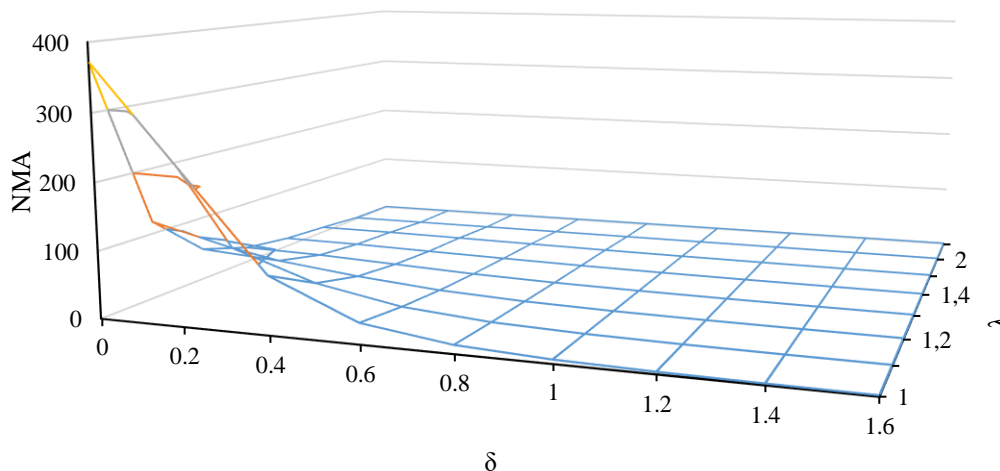
NMA Gráficos de Controle \bar{X}-<i>R</i> Tradicionais									
λ	δ (Shift)								
#	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
1,0	370,5	228,0	84,9	30,8	12,6	6,0	3,3	2,1	1,5
1,1	119,2	88,2	44,1	20,1	9,7	5,2	3,1	2,1	1,6
1,2	48,8	40,3	25,0	13,8	7,7	4,5	2,9	2,1	1,6
1,3	24,2	21,3	15,3	9,8	6,2	4,0	2,8	2,0	1,6
1,4	13,9	12,8	10,1	7,2	5,0	3,5	2,6	2,0	1,6
1,5	8,9	8,4	7,1	5,5	4,2	3,1	2,4	1,9	1,6
2,0	2,6	2,5	2,4	2,3	2,1	1,9	1,7	1,5	1,4
2,5	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2
NMA Gráficos de Controle \bar{X}-<i>R</i> IT2TFN									
λ	δ (Shift)								
#	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
1,0	372,45	228,54	85,32	30,43	12,55	5,93	3,35	2,11	1,56
1,1	118,56	87,10	44,23	20,32	9,56	5,17	3,11	2,10	1,59
1,2	48,54	39,54	24,89	13,77	7,67	4,54	2,95	2,08	1,58
1,3	24,10	21,09	15,45	9,71	6,14	4,03	2,76	2,00	1,60
1,4	13,91	12,61	9,77	7,27	4,99	3,50	2,56	1,97	1,60
1,5	8,70	8,33	7,06	5,52	4,10	3,08	2,41	1,92	1,59
2,0	2,56	2,50	2,42	2,29	2,05	1,87	1,70	1,54	1,42
2,5	1,57	1,55	1,54	1,50	1,45	1,40	1,36	1,29	1,26

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Embora não partam de um $NMA = 370,50$, os gráficos de controle IT2TFN mostram uma redução média de 0,31% nos valores de *NMA*, quando comparados aos valores encontrados usando gráficos de controle tradicionais.

Os valores de NMA cujo $\delta = 0,8$ apresentam valores 1,37% menores (em média) em relação ao mesmo valor de δ simulado nos gráficos de controle tradicionais. Em relação a λ , os melhores valores de NMA foram encontrados quando $\lambda = 1,40$, apresentando redução 0,76% em relação ao mesmo valor de λ simulado nos gráficos de controle tradicionais. A Figura 33 ilustra os valores de NMA como uma função de δ e λ , respectivamente.

Figura 33 – Valor do NMA em função do deslocamento δ e da perturbação λ . ($FOU = 0,30$)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se que os gráficos de controle \bar{X} -R IT2TFN possuem um desempenho ligeiramente superior aos gráficos de controle tradicionais, considerando apenas o uso do NMA como medida de desempenho e considerando o valor da $FOU = 0,30$ (equilibrado).

Caso o valor da FOU esteja contido no intervalo $0,05 \leq FOU \leq 0,15$, o modelo irá apresentar uma capacidade ainda maior de detecção de causas especiais, ou seja, o gráfico de controle ficará mais sensível a variações do processo. Caso a FOU apresente valores maiores que 0,30, como foi simulado, haverá um aumento nos valores do NMA, o que diminuirá a capacidade de detecção de causas especiais, porém apresentará como vantagem a redução dos alarmes falsos.

4.2 GRÁFICO DE CONTROLE \bar{X} -S E S POR UMA ABORDAGEM FUZZY TIPO-2 INTERVALAR

4.2.1 Equacionamento e Propriedades

Senturk e Erginel (2009) propuseram modelos de gráficos de controle \bar{X} e S para números *fuzzy* triangulares. Os valores amostrais \bar{x} podem ser definidos conforme (110), porém as equações do desvio-padrão s para um conjunto *fuzzy* triangular intervalar podem ser definidas a partir das equações para números *fuzzy* triangulares definidas por Kaya e Turgut (2021):

$$S_i = \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{1ij}^U - \bar{x}_{3i}^U)^2}{n-1}}, \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{1ij}^L - \bar{x}_{3i}^L)^2}{n-1}}, \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{2ij}^U - \bar{x}_{2i}^U)^2}{n-1}}, \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{3ij}^L - \bar{x}_{1i}^L)^2}{n-1}}, \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{3ij}^U - \bar{x}_{1i}^U)^2}{n-1}} \right) \quad (145)$$

sendo as diferenças $(x_{1ij}^U - \bar{x}_{3i}^U)$, $(x_{1ij}^L - \bar{x}_{3i}^L)$, $(x_{2ij}^U - \bar{x}_{2i}^U)$, $(x_{3ij}^L - \bar{x}_{1i}^L)$ e $(x_{3ij}^U - \bar{x}_{1i}^U)$, calculadas dentro de cada desvio padrão, referentes as propriedades matemáticas dos conjuntos *fuzzy*. Em seguida, tais desvios padrão devem ser ordenados a fim de se obter o número triangular *fuzzy* tipo-2 intervalar $S_i = (s_1^U, s_1^L, s_2^U, s_3^L, s_3^U)$.

Para que os números sejam ordenados adequadamente, conforme Ross (1995) apud Darestani e Nasiri (2016), primeiramente deve-se calcular $(x_{1ij}^U - \bar{x}_{3i}^U)$, por exemplo, sendo i cada linha que corresponde aos subgrupos amostrais e j o valor de cada amostra. Para um IT2TFN $(x_1^U, x_1^L, x_2^U, x_3^L, x_3^U)$ ou $(-x_1^U, -x_1^L, -x_2^U, -x_3^L, -x_3^U)$ o valor de $(x_{1ij}^U - \bar{x}_{3i}^U)$ for negativo, considera-se o resultado $\tilde{A}_i = \max [0; (x_{1ij}^U - \bar{x}_{3i}^U)]$. Tal situação se estende para os casos $(x_{1ij}^L - \bar{x}_{3i}^L)$, $(x_{2ij}^U - \bar{x}_{2i}^U)$, $(x_{3ij}^L - \bar{x}_{1i}^L)$, $(x_{3ij}^U - \bar{x}_{1i}^U)$.

Assim como foi feito para os gráficos \bar{X} e R, os limites de controle para o gráfico de controle \bar{X} *fuzzy* tipo-2 intervalar triangular, a partir do desvio padrão, podem ser obtidos usando as operações aritméticas para números *fuzzy* tipo-2 intervalar triangular resultando em (146), (147) e (148):

$$LSC_{\bar{X}-TFN}^U = (\bar{x}_1^U + A_3 \bar{s}_1^U, \bar{x}_2^U + A_3 \bar{s}_2^U, \bar{x}_3^U + A_3 \bar{s}_3^U) \quad (146)$$

$$LM_{\bar{X}-TFN}^U = (\bar{x}_1^U, \bar{x}_2^U, \bar{x}_3^U) \quad (147)$$

$$LIC_{\bar{X}-TFN}^U = (\bar{x}_1^U - A_3 \bar{s}_3^U, \bar{x}_2^U - A_3 \bar{s}_2^U, \bar{x}_3^U - A_3 \bar{s}_1^U) \quad (148)$$

Para um nível mín ($H(\tilde{A}^U)$). O cálculo do parâmetro \bar{s}_i^U é realizado por meio (149), uma vez que o parâmetro referente a média é o mesmo utilizado para os limites de \bar{X} e R :

$$\bar{s}_i^U = \left(\frac{\sum_{i=1}^m s_1^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m s_2^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m s_3^U}{m} \right) \quad (149)$$

A partir das equações das *upper boundaries*, pode-se obter as equações referentes aos limites de controle para as *lower boundaries*, como em (150), (151) e (152):

$$LSC_{\bar{X}-TFN}^L = \left(\bar{x}_1^L - A_3 \bar{s}_1^L, \bar{x}_2^L - A_3 \bar{s}_2^L, \bar{x}_3^L + A_3 \bar{s}_3^L \right) \quad (150)$$

$$LM_{\bar{X}-TFN}^L = \left(\bar{x}_1^L, \bar{x}_2^L, \bar{x}_3^L \right) \quad (151)$$

$$LIC_{\bar{X}-TFN}^L = \left(\bar{x}_1^L - A_3 \bar{s}_3^L, \bar{x}_2^L - A_3 \bar{s}_2^L, \bar{x}_3^L - A_3 \bar{s}_1^L \right) \quad (152)$$

Para um nível mín ($H(\tilde{A}^L)$). De forma similar aos cálculos anteriores, obtém-se (153):

$$\bar{s}_i^L = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \bar{s}_1^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{s}_2^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{s}_3^L}{m} \right) \quad (153)$$

Por sua vez, os limites de controle para o gráfico de controle S fuzzy tipo-2 intervalar triangular podem ser obtidos usando as operações aritméticas para números fuzzy tipo-2 intervalar triangular resultando em (154), (155) e (156):

$$LSC_{s-TFN}^U = \left(B_4 \bar{s}_1^U, B_4 \bar{s}_2^U, B_4 \bar{s}_3^U \right) \quad (154)$$

$$LM_{s-TFN}^U = \left(\bar{s}_1^U, \bar{s}_2^U, \bar{s}_3^U \right) \quad (155)$$

$$LIC_{s-TFN}^U = \left(B_3 \bar{s}_1^U, B_3 \bar{s}_2^U, B_3 \bar{s}_3^U \right) \quad (156)$$

Para um nível mín ($H(\tilde{A}^U)$). A partir das equações das *upper boundaries*, pode-se obter as equações referentes aos limites de controle para as *lower boundaries*, como se vê em (157), (158) e (159):

$$LSC_{s-TFN}^L = (B_4\bar{s}_1^L, B_4\bar{s}_2^L, B_4\bar{s}_3^L) \quad (157)$$

$$LM_{s-TFN}^L = (\bar{s}_1^L, \bar{s}_2^L, \bar{s}_3^L) \quad (158)$$

$$LIC_{s-TFN}^U = (B_3\bar{s}_1^L, B_3\bar{s}_2^L, B_3\bar{s}_3^L) \quad (159)$$

Para um nível mín ($H(\tilde{A}^L)$). A partir da equação proposta por Kahraman *et al* (2014), o parâmetro \bar{x} pode ser plotado segundo a equação (137), e o s pode ser defuzzificado por (160):

$$SD_{TriT} = \frac{\frac{(s_{i3}^U - s_{i1}^U) + (s_{i2}^U - s_{i1}^U)}{3} + s_{i1}^U + H\tilde{A}^L \left[\frac{(s_{i3}^L - s_{i1}^L) + (s_{i2}^L - s_{i1}^L)}{3} + s_{i1}^L \right]}{2} \quad (160)$$

De forma análoga ao processo obtido em \bar{X} e R , aplicando o método de redução de tipo e realizando a defuzzificação de *Rank U* e *Rank L*, obtém-se os limites de \bar{X} em função de s , como demonstrado por (161), (162) e (163):

$$LSC_{\bar{X}-D_{TriT}} = \frac{\bar{x}_1^U + \bar{x}_2^U + \bar{x}_3^U + A_3(\bar{s}_1^U + \bar{s}_2^U + \bar{s}_3^U)}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{\bar{x}_1^L + \bar{x}_2^L + \bar{x}_3^L + A_3(\bar{s}_1^L + \bar{s}_2^L + \bar{s}_3^L)}{6} \right] \quad (161)$$

$$LM_{\bar{X}-D_{TriT}} = \frac{\bar{x}_1^U + \bar{x}_2^U + \bar{x}_3^U}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{\bar{x}_1^L + \bar{x}_2^L + \bar{x}_3^L}{6} \right] \quad (162)$$

$$LIC_{\bar{X}-D_{TriT}} = \frac{\bar{x}_1^U + \bar{x}_2^U + \bar{x}_3^U - A_3(\bar{s}_1^U + \bar{s}_2^U + \bar{s}_3^U)}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{\bar{x}_1^L + \bar{x}_2^L + \bar{x}_3^L - A_3(\bar{s}_1^L + \bar{s}_2^L + \bar{s}_3^L)}{6} \right] \quad (163)$$

sendo $LIC_{\bar{X}-D_{TriT}}$, $LM_{\bar{X}-D_{TriT}}$ e $LSC_{\bar{X}-D_{TriT}}$ os limites de controle defuzzificados para um gráfico de controle IT2TFN \bar{X} a partir das variáveis IT2TFN $\bar{X} = (\bar{x}_1^U, \bar{x}_1^L, \bar{x}_2^L = \bar{x}_2^U, \bar{x}_3^L, \bar{x}_3^U)$ e IT2TFN $\bar{S} = (\bar{s}_1^U, \bar{s}_1^L, \bar{s}_2^L = \bar{s}_2^U, \bar{s}_3^L, \bar{s}_3^U)$, com $0 \leq H(\tilde{A}^L) \leq 1$.

Para o gráfico S , os limites são definidos por (164), (165) e (166):

$$LSC_{S-D_{TriT}} = \frac{B_4(\bar{s}_1^U + \bar{s}_2^U + \bar{s}_3^U)}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{B_4(\bar{s}_1^L + \bar{s}_2^L + \bar{s}_3^L)}{6} \right] \quad (164)$$

$$LM_{S-D_{TriT}} = \frac{\bar{s}_1^U + \bar{s}_2^U + \bar{s}_3^U}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{\bar{s}_1^L + \bar{s}_2^L + \bar{s}_3^L}{6} \right] \quad (165)$$

$$LIC_{S-D_{TriT}} = \frac{B_3(\bar{s}_1^U + \bar{s}_2^U + \bar{s}_3^U)}{6} + H\tilde{A}^L \left[\frac{B_3(\bar{s}_1^L + \bar{s}_2^L + \bar{s}_3^L)}{6} \right] \quad (166)$$

sendo $LIC_{S-D_{TriT}}$, $LM_{S-D_{TriT}}$ e $LSC_{S-D_{TriT}}$ os limites de controle defuzzificados para um gráfico de controle IT2TFN S a partir da variável e IT2TFN $\bar{S} = (\bar{s}_1^U, \bar{s}_1^L, \bar{s}_2^L = \bar{s}_2^U, \bar{s}_3^L, \bar{s}_3^U)$, com $0 \leq H(\bar{A}^L) \leq 1$.

Kaya e Turgut (2021) apresentaram o modelo matemático e as propriedades dos gráficos de controle \bar{X} e S para conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalares, apresentou um modelo de aplicação, porém não avaliou o desempenho. Este trabalho busca apresentar de forma viável o gráfico de controle T^2 de Hotelling bivariado aplicado aos dados de poluição do ar da CETESB (MP₁₀ e SO₂), uma vez que não há trabalhos científicos referentes a teoria dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalar aplicada a gráficos de controle multivariados.

4.3 GRÁFICO DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING POR UMA ABORDAGEM FUZZY TIPO-2 INTERVALAR

4.3.1 Equacionamento e Propriedades

Para o cálculo da estatística de T^2 TFN, é possível chegar a um TFN $T^2 = (T_a^2, T_b^2, T_c^2)$ ou $T^2 = (T_1^2, T_2^2, T_3^2)$. Tal como Pastuizaca Fernandez, Garcia e Barzola (2015), que aplicou o modelo a variáveis nominais referentes ao *score* da aparência, cor e sabor de alimentos em uma indústria alimentícia e posteriormente aplicou o mesmo conceito a aparência, translucidez e alvura em uma indústria de porcelanas. A estatística $T^2 = (T_a^2, T_b^2, T_c^2)$ foi defuzzificada a fim de se obter um valor representativo *fuzzy* tipo-1.

Neste trabalho, busca-se aplicar os conceitos da lógica *fuzzy* ao monitoramento de variáveis e estendê-los para a lógica *fuzzy* tipo-2 intervalar. Assim como foi abordado por Pastuizaca Fernandez, Garcia e (2015). Ghobadi *et al.* (2015), aplicam TFNs a gráficos de controle F- T^2 e F-MEWMA e ao gráfico de acompanhamento/monitoramento F-CUSUM e conseguiu analisar seus desempenhos por meio do *ARL* (*average run length*), ou seja, simulando computacionalmente o *NMA*.

Tendo como base a equação da estatística T^2 , para um modelo bivariado a partir da equação (26), onde se considera as amostras de x_1 e x_2 com o mesmo tamanho n , a estatística T^2 deverá ser reescrita de tal forma que seja fuzzificada. Sejam as variáveis x_1 e x_2 , não-correlacionadas entre si e mensuráveis. As médias IT2TFN para as variáveis x_1

e x_2 são respectivamente, e podem ser calculadas para cada uma das variáveis conforme (113) para o gráfico de controle \bar{X} IT2TFN: $\bar{x}_1 = (\bar{x}_{11}^U, \bar{x}_{11}^L, \bar{x}_{12}^U = \bar{x}_{12}^L, \bar{x}_{13}^L, \bar{x}_{13}^U)$ e $\bar{x}_2 = (\bar{x}_{21}^U, \bar{x}_{21}^L, \bar{x}_{22}^U = \bar{x}_{22}^L, \bar{x}_{23}^L, \bar{x}_{23}^U)$.

Os valores de \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são obtidos por cada amostra e aplicados na equação para a obtenção da estatística T^2 que deverá ser plotada no gráfico.

Além das médias, há também as medidas de dispersão que nesse caso são as variâncias de x_1 e x_2 , que são definidas por (167) e (168):

$$var(x_1) = (var_{11}^U, var_{11}^L, var_{12}^U = var_{12}^L, var_{13}^L, var_{13}^U) \quad (167)$$

$$var(x_2) = (var_{21}^U, var_{21}^L, var_{22}^U = var_{22}^L, var_{23}^L, var_{23}^U) \quad (168)$$

Como a variância é entendida como o quadrado do desvio padrão, $var(x) = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$, adaptando a partir da equação (145), tem-se (169), (170), (171), (172) e (173):

$$s^2(x_i)_1^U = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{1ij}^U - \bar{x}_{3i}^U)^2}{n-1} \quad (169)$$

$$s^2(x_i)_1^L = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{1ij}^L - \bar{x}_{3i}^L)^2}{n-1} \quad (170)$$

$$s^2(x_i)_2^U = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{2ij}^U - \bar{x}_{2i}^U)^2}{n-1} \quad (171)$$

$$s^2(x_i)_3^L = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{3ij}^L - \bar{x}_{1i}^L)^2}{n-1} \quad (172)$$

$$s^2(x_i)_3^U = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{3ij}^U - \bar{x}_{1i}^U)^2}{n-1} \quad (173)$$

E a covariância segue o mesmo modelo de TF2N, de forma análoga às variâncias:

$$cov(x_1, x_2) = (cov_{21}^U, cov_{21}^L, cov_{22}^U = cov_{22}^L, cov_{23}^L, cov_{23}^U) \quad (174)$$

A partir da mesma propriedade de subtração de números *fuzzy*, as covariâncias podem ser escritas conforme (175), (176), (177), (178) e (179):

$$cov(x_1, x_2)_1^U = \frac{\sum_{j=1}^n [(x_1)_{1ij}^U - (\bar{x}_1)_{3i}^U] [(x_2)_{1ij}^U - (\bar{x}_2)_{3i}^U]}{n-1} \quad (175)$$

$$cov(x_1, x_2)_1^L = \frac{\sum_{j=1}^n [(x_1)_{1ij}^L - (\bar{x}_1)_{3i}^L] [(x_2)_{1ij}^L - (\bar{x}_2)_{3i}^L]}{n-1} \quad (176)$$

$$cov(x_1, x_2)_2^U = \frac{\sum_{j=1}^n [(x_1)_{2ij}^U - (\bar{x}_1)_{2i}^U] [(x_2)_{2ij}^U - (\bar{x}_2)_{2i}^U]}{n-1} \quad (177)$$

$$cov(x_1, x_2)_3^L = \frac{\sum_{j=1}^n [(x_1)_{3ij}^L - (\bar{x}_1)_{1i}^L] [(x_2)_{3ij}^L - (\bar{x}_2)_{1i}^L]}{n-1} \quad (178)$$

$$cov(x_1, x_2)_3^U = \frac{\sum_{j=1}^n [(x_1)_{3ij}^U - (\bar{x}_1)_{1i}^U] [(x_2)_{3ij}^U - (\bar{x}_2)_{1i}^U]}{n-1} \quad (179)$$

Para se aplicar a equação de T², deve-se obter os parâmetros estimados para as variáveis x_1 e x_2 , conforme (180) e (181):

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{11i}^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{11i}^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{12i}^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{13i}^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{13i}^U}{m} \right) \quad (180)$$

$$\bar{x}_2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{21i}^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{21i}^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{22i}^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{23i}^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{23i}^U}{m} \right) \quad (181)$$

A partir das variâncias e covariâncias amostrais, calcula-se as variâncias e covariâncias (estimadas), por meio de (182), (183) e (184):

$$var(x_1) = \sigma_1^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{1i}))_1^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{1i}))_1^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{1i}))_2^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{1i}))_3^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{1i}))_3^U}{m} \right) \quad (182)$$

$$var(x_2) = \sigma_2^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{2i}))_1^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{2i}))_1^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{2i}))_2^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{2i}))_3^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (var(x_{2i}))_3^U}{m} \right) \quad (183)$$

$$cov(x_1, x_2) = \sigma_{12} = \left(\frac{\sum_{i=1}^m (cov(x_{1i}, x_{2i}))_1^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (cov(x_{1i}, x_{2i}))_1^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (cov(x_{1i}, x_{2i}))_2^U}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (cov(x_{1i}, x_{2i}))_3^L}{m}, \frac{\sum_{i=1}^m (cov(x_{1i}, x_{2i}))_3^U}{m} \right) \quad (184)$$

A partir dos parâmetros apresentados, é possível calcular o valor de T² utilizando IT2TFN. A estatística T² pode ser expressa por $T_{IT2TFN}^2 = [(T^2)_1^U, (T^2)_1^L, (T^2)_2^U, (T^2)_3^L, (T^2)_3^U]$. Os valores de IT2TFN T² podem ser calculados por (185), (186), (187), (188) e (189):

$$(T^2)_1^U = \frac{n}{(\sigma_1^U)^U (\sigma_2^U)^U - (\sigma_{12}^U)^U} \{ (\sigma_1^U)^U [(\bar{x}_1)_1^U - (\mu_1)_3^U]^2 + (\sigma_2^U)^U [(\bar{x}_2)_1^U - (\mu_2)_3^U]^2 - 2(\sigma_{12}^U)^U [(\bar{x}_1)_1^U - (\mu_1)_3^U] [(\bar{x}_2)_1^U - (\mu_2)_3^U] \} \quad (185)$$

$$(T^2)_1^L = \frac{n}{(\sigma_1^L)^L (\sigma_2^L)^L - (\sigma_{12}^L)^L} \{ (\sigma_1^L)^L [(\bar{x}_1)_1^L - (\mu_1)_3^L]^2 + (\sigma_2^L)^L [(\bar{x}_2)_1^L - (\mu_2)_3^L]^2 - 2(\sigma_{12}^L)^L [(\bar{x}_1)_1^L - (\mu_1)_3^L] [(\bar{x}_2)_1^L - (\mu_2)_3^L] \} \quad (186)$$

$$(T^2)_2^U = \frac{n}{(\sigma_1^U)^U (\sigma_2^U)^U - (\sigma_{12}^U)^U} \{ (\sigma_1^U)^U [(\bar{x}_1)_2^U - (\mu_1)_2^U]^2 + (\sigma_2^U)^U [(\bar{x}_2)_2^U - (\mu_2)_2^U]^2 - 2(\sigma_{12}^U)^U [(\bar{x}_1)_2^U - (\mu_1)_2^U] [(\bar{x}_2)_2^U - (\mu_2)_2^U] \} \quad (187)$$

$$(T^2)_3^L = \frac{n}{(\sigma_1^2)_3^L (\sigma_2^2)_3^L - (\sigma_{12}^2)_3^L} \{ (\sigma_2^2)_3^L [(\bar{x}_1)_3^L - (\mu_1)_1^L]^2 + (\sigma_1^2)_3^L [(\bar{x}_2)_3^L - (\mu_2)_1^L]^2 - 2(\sigma_{12})_3^L [(\bar{x}_1)_3^L - (\mu_1)_1^L][(\bar{x}_2)_3^L - (\mu_2)_1^L] \} \quad (188)$$

$$(T^2)_3^U = \frac{n}{(\sigma_1^2)_3^U (\sigma_2^2)_3^U - (\sigma_{12}^2)_3^U} \{ (\sigma_2^2)_3^U [(\bar{x}_1)_3^U - (\mu_1)_1^U]^2 + (\sigma_1^2)_3^U [(\bar{x}_2)_3^U - (\mu_2)_1^U]^2 - 2(\sigma_{12})_3^U [(\bar{x}_1)_3^U - (\mu_1)_1^U][(\bar{x}_2)_3^U - (\mu_2)_1^U] \} \quad (189)$$

Uma vez obtido os cinco valores ordenados de IT2TFN T^2 , é importante que se calcule obtenha um único valor de T^2 defuzzificado, como pode ser visto em (190):

$$T^2 D_{TriT} = \frac{\frac{[(T^2)_{i3}^U - (T^2)_{i1}^U] + [(T^2)_{i2}^U - (T^2)_{i1}^U]}{3} + (T^2)_{i1}^U + H\tilde{A}^L \left\{ \frac{[(T^2)_{i3}^L - (T^2)_{i1}^L] + [(T^2)_{i2}^L - (T^2)_{i1}^L]}{3} + (T^2)_{i1}^L \right\}}{2} \quad (190)$$

Os limites de controle para fase I e fase II não sofrem interferência do processo de fuzzificação e defuzzificação dos dados de entrada.

4.4 MONITORAMENTO DA QUALIDADE DO AR POR GRÁFICOS DE CONTROLE FUZZY TIPO-2 INTERVALAR

4.4.1 Sistema de Monitoramento da Concentração de MP₁₀

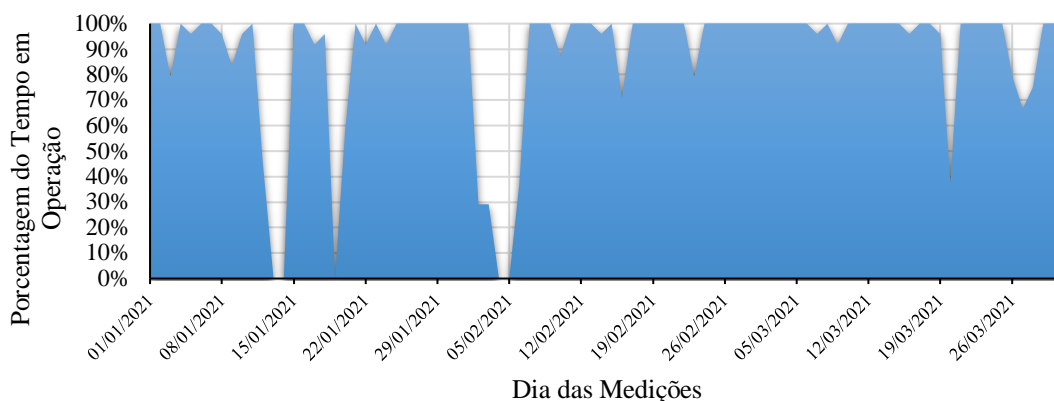
A CETESB realiza medições diárias das concentrações de SO₂, NO₂, MP₁₀, CO, TRS e MP_{2,5}, a fim de se obter o índice de qualidade do ar (IQA). Devido à alta emissão de poluentes atmosféricos oriundos de veículos automotores, torna-se imprescindível o monitoramento do poluente MP₁₀, cuja unidade de medida é µg/m³. Para este trabalho, serão utilizados os dados referentes à estação de medição Marginal Tietê – Ponte dos Remédios, pois além da localização estratégica, de estar sempre exposta ao tráfego de veículos que emitem poluentes atmosféricos; tal estação apresenta valores de medição de pelo menos 3 variáveis de poluição atmosférica com uma maior frequência, o que é imprescindível para a aplicação dos dados em gráficos de controle univariados e multivariados.

Os dados são coletados diariamente, e organizados de forma horária no site da CETESB, e disponibilizados para o público, o que permitiu a coleta e tratamento destes dados. A fim de se obter confiabilidade nos resultados, obteve-se dados referentes aos meses de janeiro, fevereiro e março de 2021. É uma estratégia importante visto que é preciso garantir que tenha um número suficiente de dias (amostras), mesmo que alguns

precisem ser descartados por apresentarem falha ou inconsistências em algumas medições.

Após a obtenção dos dados relacionados a concentração de MP_{10} , observou-se que o sistema de medição fica inoperante em alguns momentos e até por dias inteiros, o que leva a manutenção dos instrumentos. Desta forma, no que tange a operância do sistema de medição, os 90 dias de medição podem ser representadas pela Figura 34.

Figura 34 - Gráfico Operância do sistema de medição de concentração e MP_{10} por dia. Fração do dia em que opera (medições horárias/24 horas).



Fonte: Elaborado pelo autor a partir da base de dados da CETESB.

Analisando os 90 dias, percebeu-se que 31 deles apresentaram algum tipo de inoperância durante as medições, o que alteraria a quantidade de medições horárias por dia. Desta forma, houve 59 dias, nos quais se conseguiu medir a concentração de MP_{10} durante as 24 horas. Sendo, assim serão 59 dias (amostras) com 24 medições cada (tamanho dos subgrupos racionais).

Figura 35 – Exemplo para a tabulação das 10 primeiras amostras de dados referentes à concentração de MP_{10} .

Dia	Amostra	01:00	02:00	03:00	04:00	05:00	06:00	07:00	08:00	09:00	10:00
01/01/2021	1	31	35	35	20	19	16	17	21	16	13
02/01/2021	2	11	9	17	13	4	3	10	9	7	13
04/01/2021	3	1	7	17	7	5	11	10	14	15	17
06/01/2021	4	41	58	54	40	38	43	34	31	24	28
07/01/2021	5	16	22	26	15	21	28	33	38	30	26
11/01/2021	6	21	31	23	13	12	14	12	14	9	25
15/01/2021	7	17	23	22	18	19	20	20	31	29	35
16/01/2021	8	24	24	16	21	25	30	22	18	25	24
21/01/2021	9	18	25	18	23	23	21	19	22	27	33
23/01/2021	10	23	23	21	22	21	21	24	28	64	56

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da base de dados da CETESB.

De acordo com a Figura 35, percebe-se que os dias 03, 05, 08, 09, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 20 e 22 de janeiro foram descartados devido a inoperância do sistema. Os dados completos encontram-se em anexo.

4.4.2 Sistema de Monitoramento Multivariado para MP₁₀ e SO₂

Considerando modelos bivariados, é possível combinar duas variáveis referentes a poluição atmosférica. Desta forma surge um problema referente ao nível de operância do sistema de medição, pois para que qualquer análise multivariada seja realizada, é necessário que todas as variáveis envolvidas estejam disponíveis e pareadas, ou seja, ao se realizar as medições em uma amostra, deve-se obter os valores tanto da variável x_1 quanto da variável x_2 .

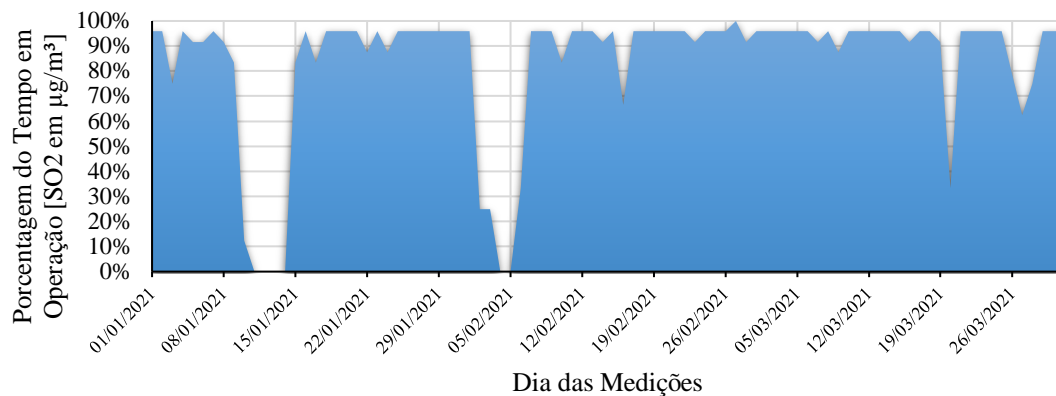
Caso uma das variáveis esteja indisponível, mesmo que temporariamente, não é possível realizar a análise multivariada naquele conjunto de dados. Logo o grau de operância do sistema de medição deve ser visto em função de cada uma das variáveis envolvidas.

Para a aplicação do gráfico de controle de T^2 de Hotelling, torna-se necessário a medição mais uma variável. Nesse caso, além da medição do MP₁₀, mede-se o índice de SO₂ (dióxido de enxofre) em $\mu\text{g}/\text{m}^3$. Coletando-se dados nas mesmas datas e horários do MP₁₀, verifica-se que o sistema de medição de cada variável opera de forma individual, mas a análise deve ser feita de forma conjunta.

Foram avaliados 90 dias, e destes 90 dias, 31 deles apresentou alguma inoperância no sistema, porém na maioria das vezes, conseguiu operar 100% do tempo, ou seja, 24 horas por dia.

Diferentemente do sistema de medição do MP₁₀, o SO₂ opera a um nível de 92%, ou seja, opera 23 horas por dia. Fora do padrão de operação de 96%, há 33 dias que devem ser excluídos da análise.

Figura 36 - Gráfico Operância do sistema de medição de concentração e SO₂ por dia. Fração do dia em que opera (medições horárias/24 horas).



Fonte: Elaborado pelo autor a partir da base de dados da CETESB.

Uma situação diferente ocorre agora, pois para que um par de variáveis mensuradas seja válido, é necessário que ambos os sistemas de medição estejam operantes em cada amostragem. A fim de se manter o mesmo tamanho de amostra para o uso da estatística T^2 , retira-se as medições referentes a média horária de 04:00 para os valores de concentração de MP₁₀, uma vez que a concentração de SO₂ não foi medida nessa faixa de horário. Desta forma, cada amostra de MP₁₀ e de SO₂ possuem o tamanho de 23 medições.

4.4.3 Caracterização de Dados IT2TFN

Ao se analisar separadamente os dados de medição por períodos como manhã (07:00 – 12:00), tarde (13:00 – 18:00), noite (19:00 – 00:00) e madrugada (01:00 – 06:00), percebe-se algumas características conforme Mendel e John (2002):

1. O sistema de medição pode variar no tempo e está sujeito a incertezas, desgaste e oscilações referentes às condições climáticas. Além disso, essa variação da incerteza no tempo é desconhecida matematicamente.
2. O ruído nas medições é não-estacionário, isto é, não pode ser modelado, muito menos previsto. Além disso a não-estacionariedade é desconhecida.

Pela situação descrita, sugere-se a implementação de números *fuzzy* a fim de inserir mais incerteza as medições e por consequência tornar as análises mais confiáveis.

Além disso, há várias estações de medição da qualidade do ar em uma mesma cidade, como no caso da cidade de São Paulo, podendo haver discordâncias nas medições entre elas, o que aumenta a possibilidade de aplicação da teoria dos conjuntos fuzzy do tipo-2. Para o caso multivariado, nos quais as estações de medição atuam, o grau de incerteza aumenta ainda mais, fazendo com que seja necessário um modelo que considere todas as incertezas e não-estacionariedade dos dados sem tornar os modelos muito complexos.

Dentre as abordagens *fuzzy* tipo-2, abordagem intervalar, com números *fuzzy* triangulares torna-se viável para os dados obtidos. Desta forma, sugere-se gráficos de controle que utilizem IT2TFN.

Há a aplicação dos gráficos de controle \bar{X} e R, \bar{X} e s para dados univariados que demonstra a diferença entre os modelos: tradicional, TFN e IT2TFN. Por fim, em um sistema que monitora a concentração de vários poluentes atmosféricos, é possível aplicar modelos de gráfico de controle para dados multivariados como é o caso do T^2 , que aumenta ainda mais o grau de incertezas presentes nos dados. Conforme dito anteriormente os dados da CETESB se encaixam na perspectiva de dados difusos com alto grau de incerteza.

4.5 APLICAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE \bar{X} E R NO MONITORAMENTO DA QUALIDADE DO AR

4.5.1 Gráficos de Controle \bar{X} e R Tradicionais

Para a obtenção de um par de gráficos de controle \bar{X} e R viáveis, torna-se necessário subdividir as 24 amostras diárias (24 horas) em 4 grupos de 6 horas. Desta forma, obtém-se manhã (07:00-12:00), tarde (13:00-18:00), noite (19:00-00:00) e madrugada (00:00-06:00).

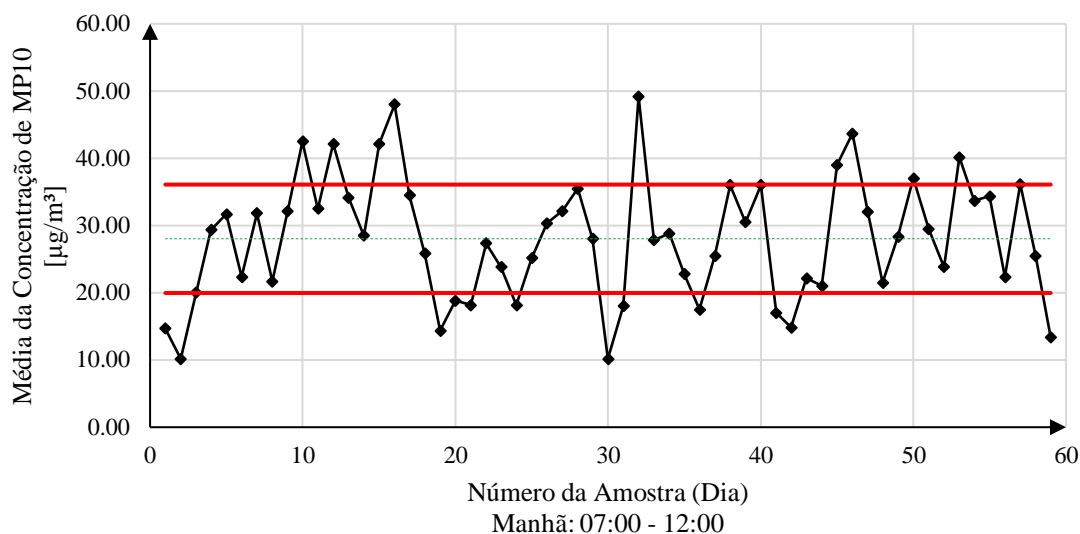
Considerando os dados obtidos, para a realização da Fase I dos gráficos de controle, isto é, para obtenção dos limites de controle válidos, chegou-se aos parâmetros: $\bar{x} = 28,03 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\bar{R} = 16,69 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o período da manhã (07:00-12:00), $\bar{x} = 27,54 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\bar{R} = 18,18 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o período da tarde (13:00-18:00), $\bar{x} = 13,41 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\bar{R} = 13,50 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o período da noite (19:00-00:00) e $\bar{x} = 23,63 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\bar{R} = 12,61 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o período da madrugada (01:00-06:00).

Os gráficos de controle \bar{X} e R apresentam as constantes A_2 igual a 0,483, $D_3 = 0$ e $D_4 = 2,004$, para um tamanho amostral de 6 unidades.

Para o período da manhã (07:00-12:00), o gráfico de controle \bar{X} , apresentará limites de controle: $LIC = 19,97 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 28,03 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 36,09 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

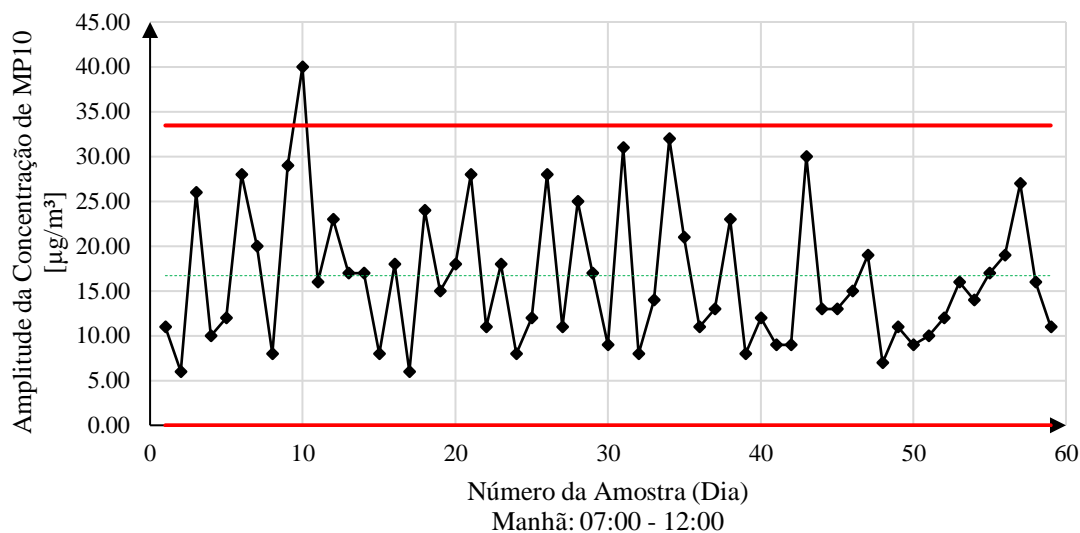
Para o gráfico de controle R , seus limites de controle são: $LIC = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 19,69 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 33,45 \mu\text{g}/\text{m}^3$. As Figuras 37 e 38 ilustram os gráficos de controle acerca da situação descrita.

Figura 37 - Gráfico de controle \bar{X} Tradicional (fase I) para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

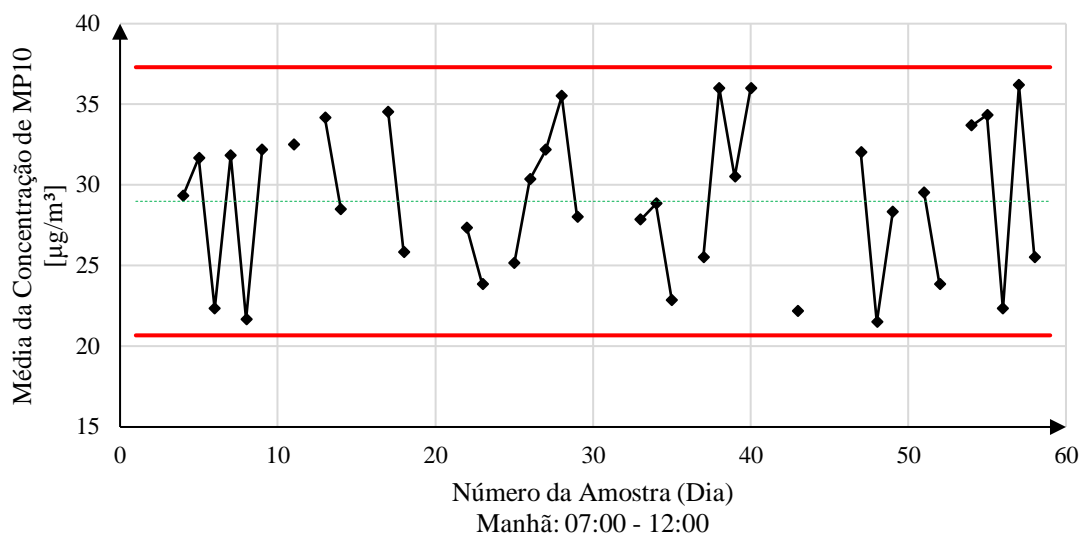
Figura 38 - Gráfico de controle R Tradicional (fase I) para monitorar a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00)



Fonte: Elaborado pelo autor.

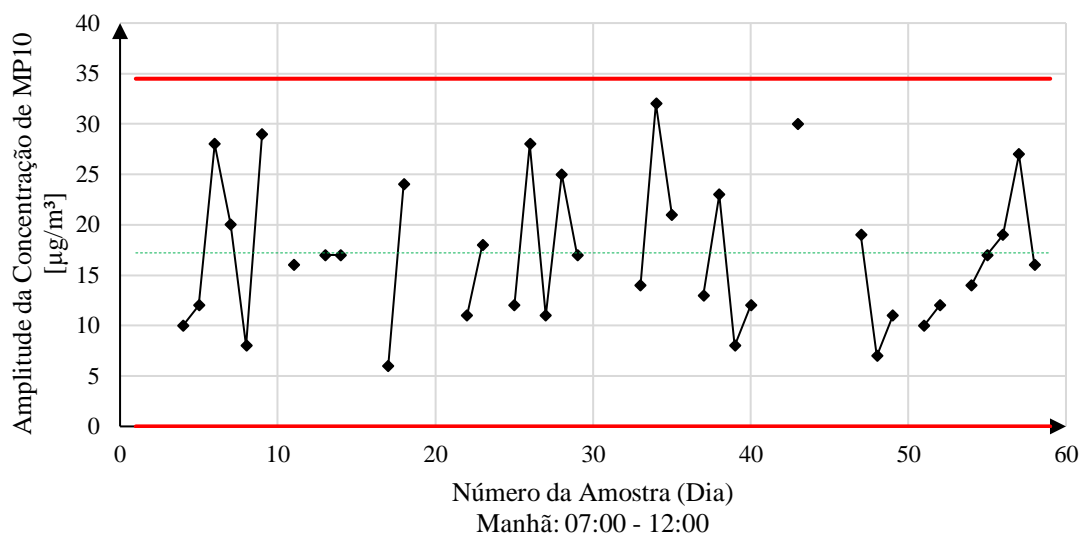
Percebe-se que há pontos fora de controle, que devem ser retirados para que os limites de controle possam ser recalculados. Excluiu-se 23 amostras, obtendo assim os limites de controle válidos para o gráfico \bar{X} : $LIC = 20,68 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 28,99 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 37,30 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R , os limites de controle válidos: $LIC = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 17,21 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 34,48 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Os gráficos após a retirada dos pontos são ilustrados pela Figura 39 e pela Figura 40.

Figura 39 - Gráfico de controle \bar{X} Tradicional (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 - Gráfico de controle R Tradicional (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para mais detalhes consulte os gráficos no Apêndice B. Para o período da tarde (13:00-18:00), após a exclusão de 20 amostras, os limites de controle válidos para \bar{X} : $LIC = 18,76 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 27,54 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 36,32 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R , os limites de controle válidos: $LIC = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 18,18 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 36,44 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

Para o período da noite (19:00-00:00), após a exclusão de 22 amostras, os limites de controle válidos para \bar{X} : $LIC = 6,88 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 13,41 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 19,95 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R , os limites de controle válidos: $LIC = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 13,50 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 27,05 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Percebe-se uma redução significativa nos valores dos limites de controle em relação aos períodos da manhã e da tarde.

Por fim, para o período da madrugada (01:00-06:00), após a exclusão de 35 amostras, os limites de controle válidos para \bar{X} : $LIC = 17,53 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 23,63 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 29,72 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R , os limites de controle válidos: $LIC = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 12,71 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 25,27 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

Sendo realizada a fase I dos gráficos de controle, pode-se registrar os limites de controle válidos para o gráfico de \bar{X} e R para os períodos de manhã, tarde, noite e madrugada. As Tabelas 7 e 8 apresentam os limites de \bar{X} e R respectivamente:

Tabela 7 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle \bar{x} para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

Limites de Controle \bar{X}	Manhã (07:00 – 12:00)	Tarde (13:00 – 18:00)	Noite (19:00 – 00:00)	Madrugada (01:00 – 06:00)
LSC	37,30 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	36,32 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	19,93 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	29,72 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LM	28,99 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	27,54 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	13,41 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	23,63 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LIC	20,68 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	18,76 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	6,88 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	17,53 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para um mesmo dia, percebe-se que há mudanças bruscas nas faixas de valores. Há muitas fontes de incertezas agindo no sistema de medição e isso provoca *shifts* no “processo” de acordo com a mudança de faixa horária. A mudança brusca ocorre principalmente no período da noite em relação aos demais.

Tabela 8 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle R para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

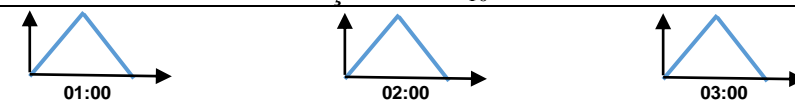
Limites de Controle R	Manhã (07:00 – 12:00)	Tarde (13:00 – 18:00)	Noite (19:00 – 00:00)	Madrugada (01:00 – 06:00)
LSC	34,48 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	36,44 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	27,05 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	25,27 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LM	17,21 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	18,18 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	13,50 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	12,71 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LIC	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Há uma proximidade na dispersão entre as medições entre os períodos da manhã e da tarde e outra proximidade entre os períodos da noite e da madrugada. Isso pode apontar também para um comportamento social associado a cada faixa horária.

4.5.2 Gráficos de Controle \bar{X} e R TFN

A partir do processo de fuzzificação de dados descrito em Mendes (2019), obtém-se os TFN para o conjunto de dados em análise. A Tabela 9 ilustra as primeiras 20 amostras válidas (dias) para os horários de 01:00 às 03:00. A coluna central em cada faixa horária é o dado *crisp*, obtido diretamente do sistema de medição, os valores que antecedem e sucedem o valor *crisp* foram obtidos por meio do processo de fuzzificação, onde o limitante inferior $L_1 = 0,50$ e o limitante superior $L_2 = 0,95$. Ao se utilizar os números aleatórios gerados, segundo uma distribuição uniforme entre 0 e 1, é possível obter a *lower bound* e a *upper bound*.

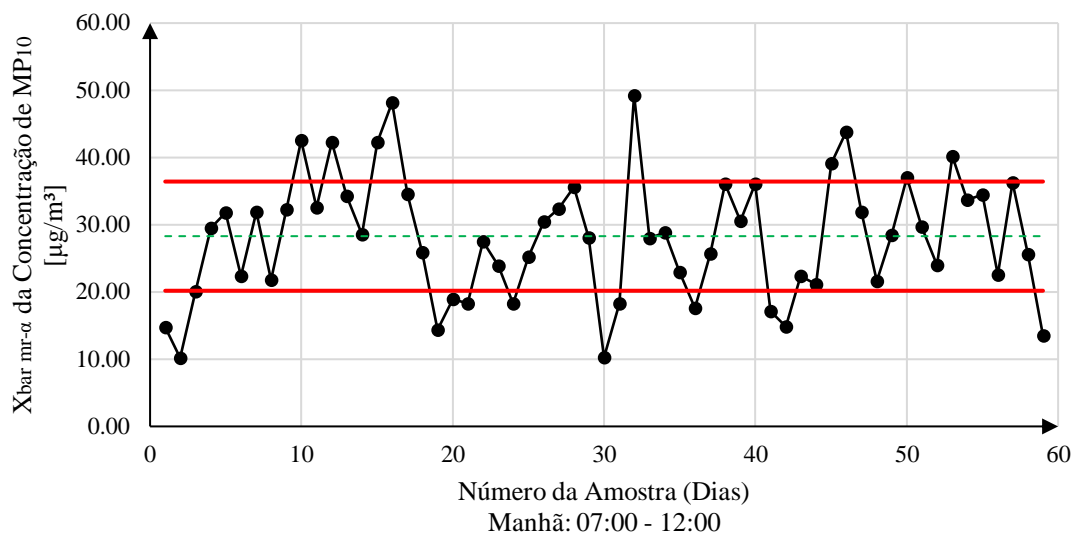
Tabela 9 – Tabulação das 20 primeiras amostras de dados fuzzificados para a concentração de MP₁₀.


Dia	m	01:00					02:00					03:00				
		lower	X ₁	X ₂	X ₃	upper	lower	X ₁	X ₂	X ₃	upper	lower	X ₁	X ₂	X ₃	upper
01/01/2021	1	0,19	30,90	31,00	31,75	0,79	0,97	34,51	35,00	35,15	0,16	0,43	34,78	35,00	35,24	0,25
02/01/2021	2	0,30	10,85	11,00	11,74	0,78	0,54	8,73	9,00	9,40	0,42	0,37	16,81	17,00	17,85	0,89
04/01/2021	3	0,34	0,83	1,00	1,66	0,69	0,69	6,66	7,00	7,24	0,25	0,85	16,57	17,00	17,66	0,69
06/01/2021	4	0,11	40,95	41,00	41,71	0,75	0,67	57,66	58,00	58,40	0,43	0,89	53,55	54,00	54,22	0,23
07/01/2021	5	0,67	15,66	16,00	16,42	0,44	0,03	21,98	22,00	22,83	0,87	0,72	25,64	26,00	26,94	0,99
11/01/2021	6	0,16	20,92	21,00	21,44	0,46	0,75	30,62	31,00	31,24	0,25	0,71	22,64	23,00	23,43	0,45
15/01/2021	7	0,31	16,85	17,00	17,54	0,57	0,51	22,75	23,00	23,54	0,57	0,94	21,53	22,00	22,59	0,62
16/01/2021	8	0,12	23,94	24,00	24,89	0,94	0,08	23,96	24,00	24,91	0,96	0,35	15,82	16,00	16,67	0,70
21/01/2021	9	0,21	17,89	18,00	18,64	0,68	0,62	24,69	25,00	25,04	0,04	0,22	17,89	18,00	18,62	0,65
23/01/2021	10	0,89	22,55	23,00	23,50	0,53	0,51	22,74	23,00	23,57	0,60	0,60	20,70	21,00	21,82	0,86
25/01/2021	11	0,81	29,60	30,00	30,31	0,33	0,90	27,55	28,00	28,40	0,42	0,06	29,97	30,00	30,46	0,48
26/01/2021	12	0,22	12,89	13,00	13,68	0,71	0,14	9,93	10,00	10,26	0,28	0,78	10,61	11,00	11,05	0,05
27/01/2021	13	0,93	27,53	28,00	28,24	0,25	0,95	22,53	23,00	23,72	0,76	0,07	34,97	35,00	35,12	0,13
28/01/2021	14	0,17	44,91	45,00	45,05	0,05	0,14	38,93	39,00	39,46	0,48	0,09	39,95	40,00	40,79	0,84
29/01/2021	15	0,19	57,91	58,00	58,43	0,45	0,60	50,70	51,00	51,37	0,39	0,15	38,93	39,00	39,36	0,38
30/01/2021	16	0,80	76,60	77,00	77,18	0,19	0,09	67,96	68,00	68,21	0,22	0,62	59,69	60,00	60,72	0,75
31/01/2021	17	0,91	39,54	40,00	40,59	0,62	0,65	26,68	27,00	27,24	0,25	0,79	32,60	33,00	33,15	0,16
01/02/2021	18	0,44	30,78	31,00	31,56	0,59	0,39	14,80	15,00	15,51	0,53	0,48	18,76	19,00	19,21	0,23
07/02/2021	19	0,59	15,70	16,00	16,76	0,80	0,84	7,58	8,00	8,20	0,21	0,27	9,86	10,00	10,10	0,10
08/02/2021	20	0,51	14,74	15,00	15,56	0,59	0,16	15,92	16,00	16,20	0,21	0,29	15,86	16,00	16,91	0,96

Fonte: Elaborado pelo autor.

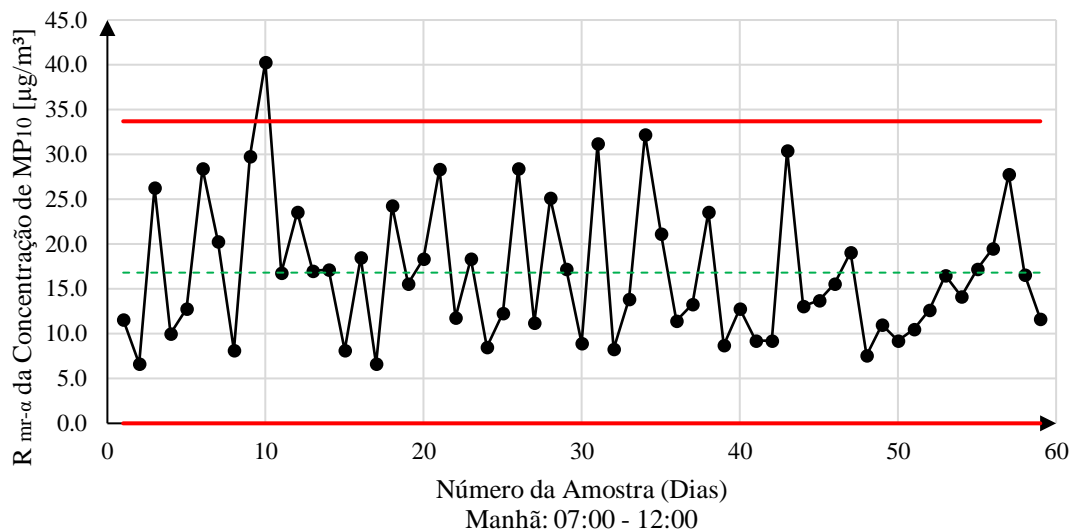
Nesse caso, os limites de controle também sofrem interferência dos números *fuzzy* triangulares gerados. Para o período da manhã (07:00 – 12:00), o valor dos limites de controle para o gráfico de controle \bar{X} *Fuzzy* tipo-1 para um *alpha-cut* de 0,45, após o processo de defuzzificação é respectivamente: $LIC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 20,18 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-\alpha-mr} = 28,30 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 36,46 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico de controle R *Fuzzy* tipo-1, para o mesmo valor de *alpha-cut* (0,45), obtém-se os limites de controle: $LIC_{R-\alpha-mr} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-\alpha-mr} = 16,82 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{R-\alpha-mr} = 33,70 \mu\text{g}/\text{m}^3$. As Figuras 41 e 42 ilustram os gráficos de controle acerca da situação descrita.

Figura 41 - Gráfico de controle \bar{X} TFN (fase I), para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 42 - Gráfico de controle R TFN (fase I), para monitorar a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).

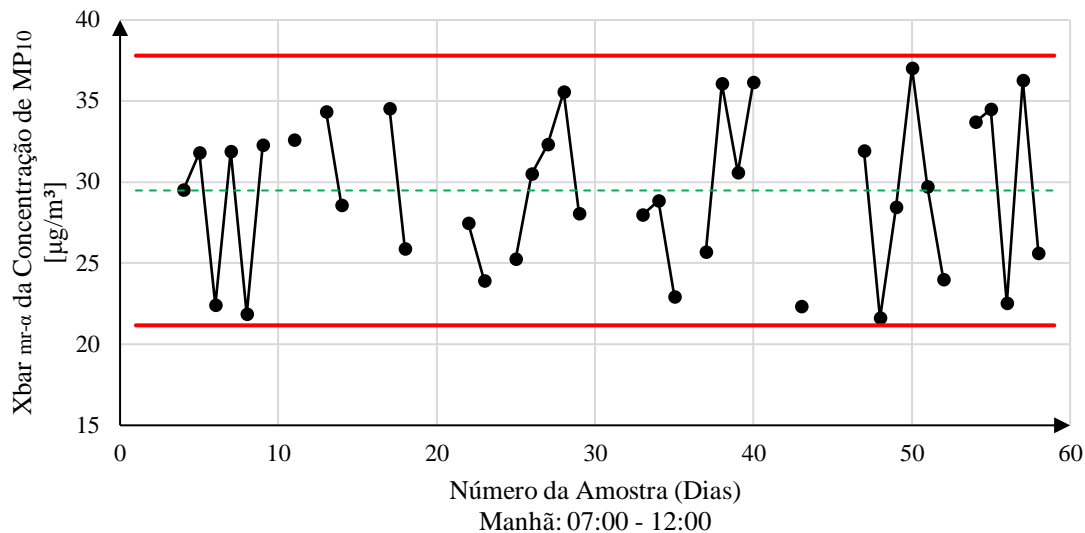


Fonte: Elaborado pelo autor.

Há pontos fora de controle, que devem ser retirados para que os limites de controle possam ser recalculados. Excluiu-se 22 amostras, obtendo assim os limites de controle válidos para o gráfico \bar{X} : $LIC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 21,17 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-\alpha-mr} = 29,48 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 37,80 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R , os limites de controle válidos: $LIC_{R-\alpha-mr} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-\alpha-mr} = 17,22 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{R-\alpha-mr} = 34,51 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Os

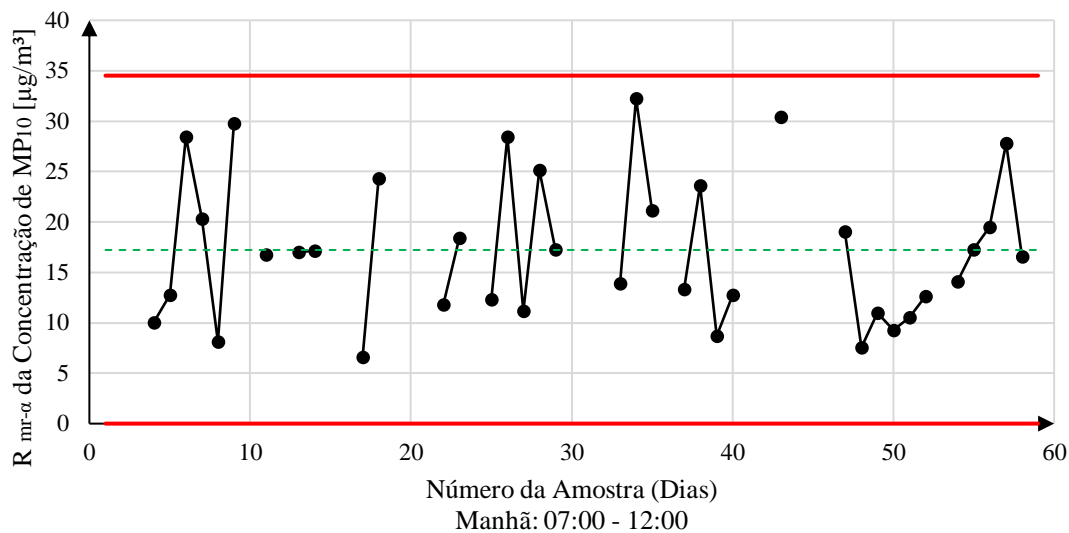
gráficos de controle após a retirada das amostras fora de controle são ilustrados pelas Figuras 43 e 44.

Figura 43 - Gráfico de controle \bar{X} TFN (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 44 - Gráfico de controle R TFN (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o período da tarde (13:00-18:00), após a exclusão de 19 amostras, os limites de controle válidos para \bar{X} TFN: $LIC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 18,56 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-\alpha-mr} = 27,63 \mu\text{g}/\text{m}^3$

e $LSC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 36,69 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R TFN, os limites de controle válidos: $LIC_{R-\alpha-mr} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-\alpha-mr} = 18,78 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{R-\alpha-mr} = 37,63 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

Para o período da noite (19:00-00:00), após a exclusão de 17 amostras, os limites de controle válidos para \bar{X} TFN: $LIC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 10,89 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-\alpha-mr} = 17,61 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 24,34 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R TFN, os limites de controle válidos: $LIC_{R-\alpha-mr} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-\alpha-mr} = 13,92 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{R-\alpha-mr} = 27,90 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Percebe-se que além da magnitude (escala) dos valores em relação aos períodos da manhã e da tarde, há uma redução no número de amostras a serem excluídas para se obter a estabilidade do gráfico de controle *fuzzy*, quando comparado com o tradicional.

Por fim, para o período da madrugada (01:00-06:00), após a exclusão de 34 amostras, os limites de controle válidos para \bar{X} TFN: $LIC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 17,28 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-\alpha-mr} = 23,68 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 30,09 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R TFN, os limites de controle válidos: $LIC_{R-\alpha-mr} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-\alpha-mr} = 13,27 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{R-\alpha-mr} = 26,59 \mu\text{g}/\text{m}^3$. O período da madrugada mostrou-se o mais instável dos quatro, pela necessidade de se retirar mais de 30 amostras para se estabilizar o processo.

As Tabelas 10 e 11 resumem os limites de controle de controle de \bar{X} TFN e R TFN para uma abordagem *fuzzy* tipo-1.

Tabela 10 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle \bar{x} TFN para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

Limites de Controle \bar{X} TFN	Manhã (07:00 – 12:00)	Tarde (13:00 – 18:00)	Noite (19:00 – 00:00)	Madrugada (01:00 – 06:00)
$LSC_{mr-\bar{X}}^{\alpha}$	37,80 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	36,69 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	24,34 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	30,09 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
$LM_{mr-\bar{X}}^{\alpha}$	29,48 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	27,63 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	17,61 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	23,68 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
$LIC_{mr-\bar{X}}^{\alpha}$	21,17 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	18,56 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	10,89 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	17,28 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os valores dos limites obtidos após o processo de defuzzificação *alpha-level midrange* apresentam valores distintos dos limites clássicos, porém o comportamento das variáveis ao longo do tempo se mantém com a mesma escala, porém com o acréscimo de algumas incertezas.

Tabela 11 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle \bar{x} TFN para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

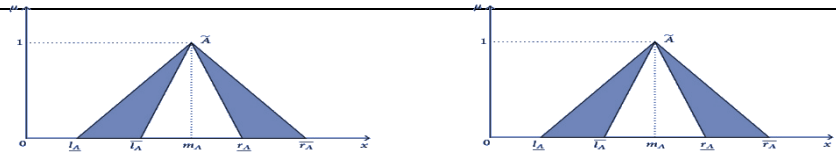
Limites de Controle R TFN	Manhã (07:00 – 12:00)	Tarde (13:00 – 18:00)	Noite (19:00 – 00:00)	Madrugada (01:00 – 06:00)
LSC_{mr-R}^{α}	34,51 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	37,63 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	27,90 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	26,59 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LM_{mr-R}^{α}	17,22 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	18,78 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	13,92 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	13,27 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LIC_{mr-R}^{α}	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5.3 Gráficos de Controle \bar{X} e R IT2TFN

A partir dos dados fuzzificados (*fuzzy* tipo-1), aplica-se um valor 0,30 para a mancha de incertezas (*FOU*). A Tabela 12 demonstra o resultado parcial do processo:

Tabela 12 – Tabulação das 20 primeiras amostras de dados *fuzzy* tipo-2 triangular para a concentração de MP_{10} .



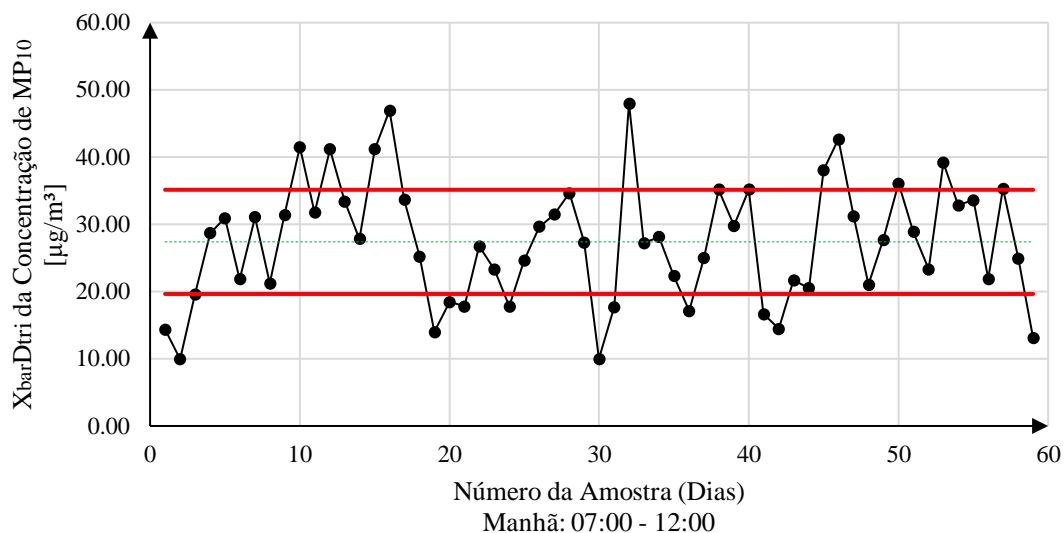
Dia	Amostra	01:00						02:00							
		lower	x_1^U	x_1^L	x_2^U	x_3^L	x_3^U	upper	lower	x_1^U	x_1^L	x_2^U	x_3^L	x_3^U	upper
01/01/2021	1	0,19	30,90	30,93	31,00	31,53	31,75	0,79	0,97	34,51	34,66	35,00	35,10	35,15	0,16
02/01/2021	2	0,30	10,85	10,90	11,00	11,52	11,74	0,78	0,54	8,73	8,81	9,00	9,28	9,40	0,42
04/01/2021	3	0,34	0,83	0,88	1,00	1,46	1,66	0,69	0,69	6,66	6,76	7,00	7,17	7,24	0,25
06/01/2021	4	0,11	40,95	40,96	41,00	41,50	41,71	0,75	0,67	57,66	57,76	58,00	58,28	58,40	0,43
07/01/2021	5	0,67	15,66	15,76	16,00	16,29	16,42	0,44	0,03	21,98	21,99	22,00	22,58	22,83	0,87
11/01/2021	6	0,16	20,92	20,94	21,00	21,30	21,44	0,46	0,75	30,62	30,74	31,00	31,16	31,24	0,25
15/01/2021	7	0,31	16,85	16,89	17,00	17,38	17,54	0,57	0,51	22,75	22,82	23,00	23,38	23,54	0,57
16/01/2021	8	0,12	23,94	23,96	24,00	24,63	24,89	0,94	0,08	23,96	23,97	24,00	24,64	24,91	0,96
21/01/2021	9	0,21	17,89	17,93	18,00	18,45	18,64	0,68	0,62	24,69	24,78	25,00	25,03	25,04	0,04
23/01/2021	10	0,89	22,55	22,69	23,00	23,35	23,50	0,53	0,51	22,74	22,82	23,00	23,40	23,57	0,60
25/01/2021	11	0,81	29,60	29,72	30,00	30,22	30,31	0,33	0,90	27,55	27,69	28,00	28,28	28,40	0,42
26/01/2021	12	0,22	12,89	12,92	13,00	13,47	13,68	0,71	0,14	9,93	9,95	10,00	10,19	10,26	0,28
27/01/2021	13	0,93	27,53	27,67	28,00	28,16	28,24	0,25	0,95	22,53	22,67	23,00	23,51	23,72	0,76
28/01/2021	14	0,17	44,91	44,94	45,00	45,03	45,05	0,05	0,14	38,93	38,95	39,00	39,32	39,46	0,48
29/01/2021	15	0,19	57,91	57,93	58,00	58,30	58,43	0,45	0,60	50,70	50,79	51,00	51,26	51,37	0,39
30/01/2021	16	0,80	76,60	76,72	77,00	77,12	77,18	0,19	0,09	67,96	67,97	68,00	68,15	68,21	0,22
31/01/2021	17	0,91	39,54	39,68	40,00	40,41	40,59	0,62	0,65	26,68	26,77	27,00	27,17	27,24	0,25
01/02/2021	18	0,44	30,78	30,85	31,00	31,39	31,56	0,59	0,39	14,80	14,86	15,00	15,35	15,51	0,53
07/02/2021	19	0,59	15,70	15,79	16,00	16,53	16,76	0,80	0,84	7,58	7,71	8,00	8,14	8,20	0,21
08/02/2021	20	0,51	14,74	14,82	15,00	15,39	15,56	0,59	0,16	15,92	15,94	16,00	16,14	16,20	0,21

Fonte: Elaborado pelo autor.

O TFN2 pode ser definido como $TFN2 = (x_1^U, x_1^L, x_2^U, x_3^L, x_3^U)$, e como pode ser observado na Tabela 12, a amostra 1 para a hora 1:00, tem-se que $TFN2 = (30,90; 30,93; 31,00; 31,53; 31,75)$.

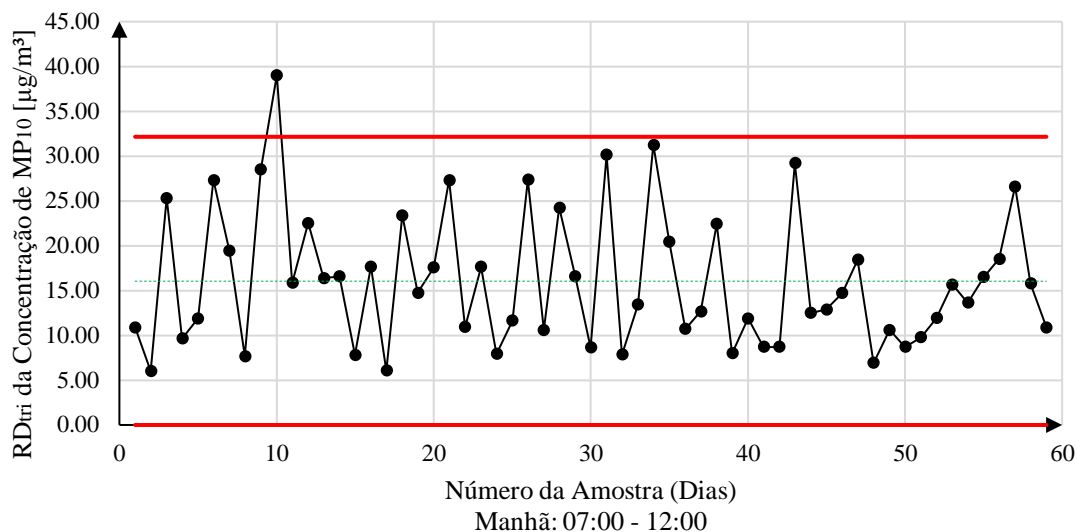
Os limites de controle sofrem interferência dos números *fuzzy* triangulares gerados do tipo-2 gerados. O grande diferencial em relação ao *fuzzy* tipo-1 é a mancha de incertezas que pode ser aplicada, que neste caso assume um valor de 0,30. Os valores de x_2^U e x_2^L são coincidentes para o modelo apresentado, porém a altura da função de pertinência inferior μ^L pode ser diferente de 1,0, logo para este caso será utilizado $H(\tilde{A}^L) = 0,95$. Para o período da manhã (07:00 – 12:00), o valor dos limites de controle para o gráfico de controle \bar{X} *fuzzy* tipo-2 intervalar para um $H(\tilde{A}^L)$ de 0,95 e $FOU = 0,30$, após o processo de redução de tipo e de defuzzificação é respectivamente: $LIC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 19,64 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-D_{TriT}} = 27,39 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 35,14 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico de controle R *Fuzzy* tipo-2 intervalar, para os mesmos valores $H(\tilde{A}^L)$ e FOU , obtém-se os limites de controle: $LIC_{R-D_{TriT}} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-D_{TriT}} = 16,04 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{R-D_{TriT}} = 32,15 \mu\text{g}/\text{m}^3$. As Figuras 45 e 46 ilustram os gráficos de controle acerca da situação descrita.

Figura 45 - Gráfico de controle \bar{X} IT2TFN (fase I) para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

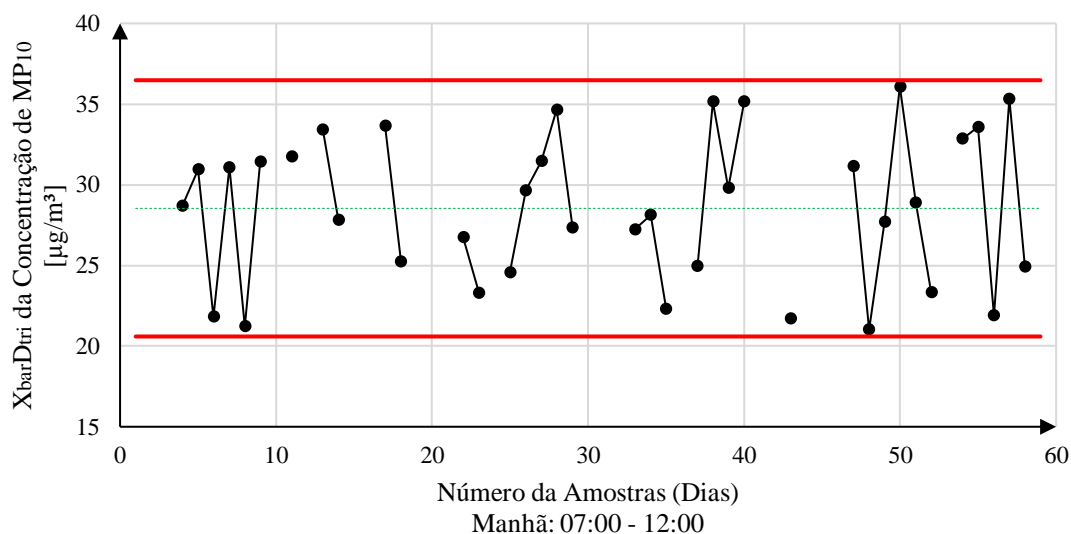
Figura 46 - Gráfico de controle R IT2TFN (fase I) para monitorar a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

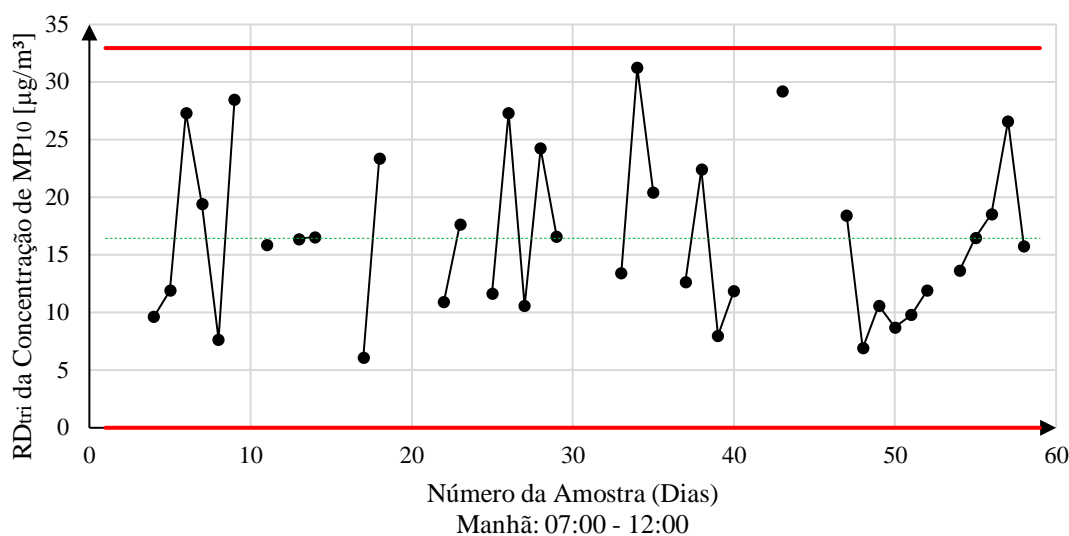
Há pontos fora de controle, que devem ser retirados para que os limites de controle possam ser recalculados. Excluiu-se 22 amostras, obtendo assim os limites de controle válidos para o gráfico \bar{X} fuzzy tipo-2 intervalar: $LIC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 20,60 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-D_{TriT}} = 28,54 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 36,48 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R , os limites de controle válidos: $LIC_{R-D_{TriT}} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-D_{TriT}} = 16,44 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{R-D_{TriT}} = 32,95 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Os gráficos com os pontos retirados são ilustrados pelas Figuras 47 e 48.

Figura 47 - Gráfico de controle \bar{X} IT2TFN (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a média da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 - Gráfico de controle R IT2TFN (fase I), após a extração dos pontos fora dos limites, para monitorar a amplitude da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ no período da manhã (07:00 – 12:00).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o período da tarde (13:00-18:00), após a exclusão de 24 amostras, os limites de controle válidos para \bar{X} IT2TFN: $LIC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 17,13 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-D_{TriT}} = 25,42 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 33,71 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R IT2TFN, os limites de controle válidos: $LIC_{R-D_{TriT}} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-D_{TriT}} = 17,16 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{R-D_{TriT}} = 34,40 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

Para o período da noite (19:00-00:00), após a exclusão de 17 amostras, os limites de controle válidos para \bar{X} IT2TFN: $LIC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 10,55 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-D_{TriT}} = 16,95 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 23,35 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R IT2TFN, os limites de controle válidos: $LIC_{R-D_{TriT}} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-D_{TriT}} = 13,25 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{R-D_{TriT}} = 26,56 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Claramente o período da noite apresenta uma redução na concentração de MP_{10} , pois tal situação se repetiu nos três modelos de gráficos de controle \bar{X} e R apresentados durante a fase I. Assim como os gráficos de controle \bar{X} e R fuzzy tipo-1, este modelo também apresentou uma redução no número de amostras que deve ser retirado para a estabilização do gráfico e validação dos limites de controle.

Por fim, para o período da madrugada (01:00-06:00), após a exclusão de 34 amostras, os limites de controle válidos para \bar{X} IT2TFN: $LIC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 16,78 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-D_{TriT}} = 22,87 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-D_{TriT}} = 28,96 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico R IT2TFN, os limites de controle válidos: $LIC_{R-D_{TriT}} = 0,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{R-D_{TriT}} = 12,61 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e

$LSC_{R-D_{TriT}} = 25,27 \mu\text{g}/\text{m}^3$. O período da madrugada mostrou-se o mais instável em todos os gráficos de controle apresentados.

Uma particularidade observada pelos gráficos de controle \bar{X} e R IT2TFN é que o valor de $H(\tilde{A}^L)$ realiza um *shift* para baixo na escala de todos os valores após a defuzzificação, quando se aplica o método proposto por Kahraman *et al.* (2014). O valor de 0,95 apresenta os valores dentro de uma escala próxima aos valores obtidos pelos gráficos de controle tradicionais e *fuzzy* do tipo-1. As Tabelas 13 e 14 apresentam os limites de controle válidos obtidos para todos os períodos estudados pelo gráfico de controle que utilizam uma abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar.

Tabela 13 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle \bar{x} IT2TFN para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

Limites de Controle \bar{X} IT2TFN	Manhã (07:00 – 12:00)	Tarde (13:00 – 18:00)	Noite (19:00 – 00:00)	Madrugada (01:00 – 06:00)
LSC	36,48 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	33,71 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	23,35 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	28,96 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LM	28,54 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	25,42 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	16,95 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	22,87 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LIC	20,60 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	17,13 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	10,55 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	16,78 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao se utilizar de números *fuzzy* triangulares do tipo-2, considera-se que as incertezas do processo foram incorporadas ao sistema, ou seja, o *fuzzy* tipo-2 considera ainda mais incertezas que o *fuzzy* tipo-1, desta forma, apresenta maiores alterações nos valores defuzzificados.

Tabela 14 – Resumo dos limites de controle válidos (após análise de estabilidade) obtidos para o gráfico de controle R IT2TFN para os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

Limites de Controle R IT2TFN	Manhã (07:00 – 12:00)	Tarde (13:00 – 18:00)	Noite (19:00 – 00:00)	Madrugada (01:00 – 06:00)
LSC	32,95 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	34,40 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	26,56 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	25,57 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LM	16,44 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	17,16 $\mu\text{g}/\text{m}$	13,25 $\mu\text{g}/\text{m}$	12,61 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
LIC	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	0,00 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir dos resultados apresentados, é possível compará-los por meio das Tabelas 15 e 16. Percebe-se que a abordagem *fuzzy* tipo-2 intervalar acrescenta mais informação ao monitoramento das variáveis. O número médio de amostras retiradas durante o projeto do gráfico de controle não se diferencia muito dos gráficos de controle

tradicional e *fuzzy* tipo-1, demonstrando que não haverá tanto impacto no aumento de alarmes falsos.

Tabela 15 – Comparação entre os gráficos de controle \bar{X} tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

	Gráfico de Controle \bar{X}	Gráfico de Controle \bar{X} TFN (midrange, $\alpha = 0,45$)	Gráfico de Controle \bar{X} IT2TFN (Kahraman <i>et al</i> (2014), $H(A^L)$ $= 0,95$ e $FOU = 0,30$)
Pontos Retirados da Amostra Inicial (fase I)	Manhã: 23 amostras Tarde: 20 amostras Noite: 22 amostras Madrugada: 35 amostras	Manhã: 22 amostras Tarde: 19 amostras Noite: 17 amostras Madrugada: 34 amostras	Manhã: 22 amostras Tarde: 24 amostras Noite: 17 amostras Madrugada: 34 amostras
Linha Média (LM)	Manhã: 28,99 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Tarde: 27,54 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Noite: 13,41 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Madrugada: 23,63 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	Manhã: 29,48 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Tarde: 27,63 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Noite: 17,61 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Madrugada: 23,68 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	Manhã: 28,54 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Tarde: 25,42 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Noite: 16,95 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Madrugada: 22,87 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
Principais Vantagens	Simplicidade de aplicação, os dados já vem prontos.	Incorpora incertezas do sistema ao gráfico de controle, tornando-o mais confiável e flexível, podendo aumentar seu poder de detecção dependendo da escolha dos parâmetros.	Incorpora ainda mais incertezas ao gráfico de controle, tornando-o mais robusto (à prova de erros). O poder de detecção aumenta bastante em relação aos modelos tradicionais e <i>fuzzy</i> tipo-1
Principais Desvantagens	Desconsidera as subjetividades e outras características específicas do sistema, usa apenas de estatística.	Torna o modelo mais complexo e os limitantes L_1 e L_2 , o <i>alpha-cut</i> devem ser bem definidos.	Torna o modelo ainda mais complexo. Além dos limitantes L_1 e L_2 , há outras variáveis como $H(A^L)$ e a FOU que devem ser bem definidos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Enquanto a média da concentração de MP_{10} aumenta o valor seu valor numérico na transição dos gráficos de controle tradicionais para os modelos que utilizam conjuntos *fuzzy* tipo-1, esses valores diminuem para os modelos que utilizam conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalar.

Tabela 16 – Comparação entre os gráficos de controle R tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

	Gráfico de Controle R	Gráfico de Controle R TFN (midrange, $\alpha = 0,45$)	Gráfico de Controle R IT2TFN (Kahraman <i>et al</i> (2014), $H(A^L) = 0,95$ e $FOU = 0,30$)
Pontos Retirados da Amostra Inicial (fase I)	Manhã: 23 amostras Tarde: 20 amostras Noite: 22 amostras Madrugada: 35 amostras	Manhã: 22 amostras Tarde: 19 amostras Noite: 17 amostras Madrugada: 34 amostras	Manhã: 22 amostras Tarde: 24 amostras Noite: 17 amostras Madrugada: 34 amostras
Linha Média (LM)	Manhã: 17,21 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Tarde: 18,18 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Noite: 13,50 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Madrugada: 12,71 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	Manhã: 17,22 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Tarde: 18,78 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Noite: 13,92 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Madrugada: 13,27 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	Manhã: 16,44 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Tarde: 17,16 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Noite: 13,25 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ Madrugada: 12,61 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
Principal Vantagem	Um dos modelos mais simples de gráficos de controle	Incorpora incertezas do sistema ao gráfico de controle, tornando-o mais confiável e flexível, podendo aumentar seu poder de detecção dependendo da escolha dos parâmetros.	Incorpora ainda mais incertezas ao gráfico de controle, tornando-o mais robusto (à prova de erros). O poder de detecção aumenta bastante em relação aos modelos tradicionais e <i>fuzzy</i> tipo-1
Principal Desvantagem	Desconsidera as subjetividades e outras características específicas do sistema, usa apenas de estatística. O fato de R não ser confiável para $n > 10$, tornou o monitoramento mais trabalhoso.	Torna o modelo mais complexo e no caso de R , mais trabalhoso por limitar o tamanho das amostras e ter que separar o dia em períodos (para os dados utilizados). Os limitantes L_1 e L_2 , o <i>alpha-cut</i> devem ser bem definidos.	Torna o modelo ainda mais complexo e no caso de R , mais trabalhoso por limitar o tamanho das amostras e ter que separar o dia em períodos (para os dados utilizados). Os limitantes L_1 e L_2 , o $H(A^L)$ e a FOU que devem ser bem definidos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a aplicação dos gráficos de controle \bar{X} e R aos dados relacionados à concentração de MP_{10} na atmosfera, foi necessário dividir o dia (24 horas) em períodos de 6 horas (manhã, tarde, noite e madrugada) aumentando o número de gráficos de controle, porém mantendo as características da variável R , que perde confiança estatísticas quando o tamanho amostral é maior que 10. Com essa divisão por períodos, é possível observar uma variável linguística *fuzzy* atuando no controle do processo e suas implicações, como por exemplo os diferentes parâmetros de processo obtidos para um mesmo dia, algo que pode levar a discordâncias e discussões sobre a lógica *fuzzy* do tipo-2.

4.6 APLICAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE \bar{X} E S NO MONITORAMENTO DA QUALIDADE DO AR

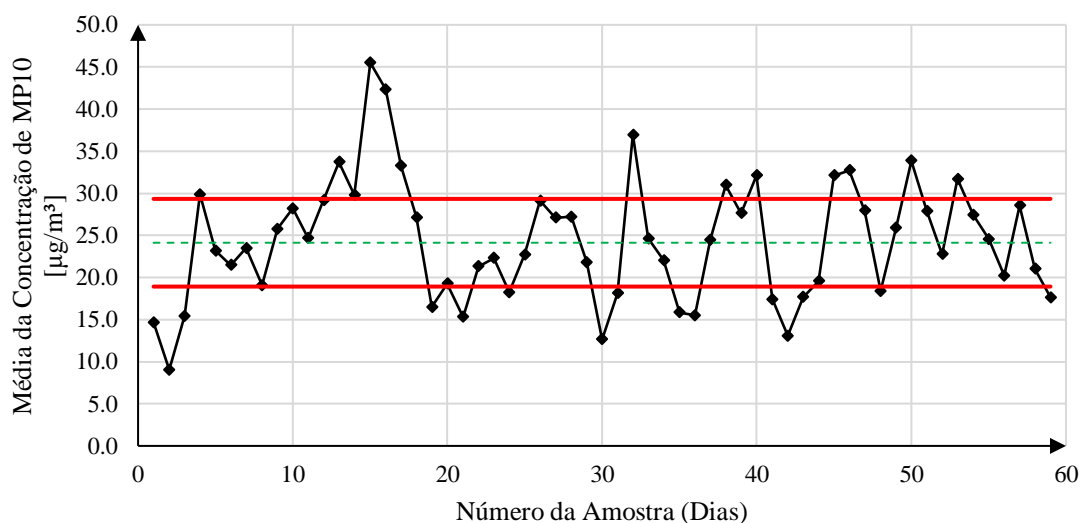
4.6.1 Gráficos de Controle \bar{X} e S Tradicionais

Diferentemente dos gráficos de controle \bar{X} e R que requerem de um tamanho de amostra menor, os gráficos de controle \bar{X} e S permitem o uso de tamanhos de amostra maiores que 10 unidades, e como vantagem, pode-se apresentar apenas um gráfico de controle ao invés de 4 por dia analisado.

Considerando os dados obtidos, para a realização da fase I do gráfico de controle, isto é, a obtenção de seus limites de controle válidos, chegou-se aos parâmetros: $\bar{\bar{x}} = 24,13 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\bar{s} = 8,41 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Levando em conta o gráfico de controle \bar{X} , sua constante A_3 , para um tamanho amostral de 24 unidades, é igual a 0,619. Seus limites de controle são respectivamente: $LIC = 18,92 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 24,13 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 29,23 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

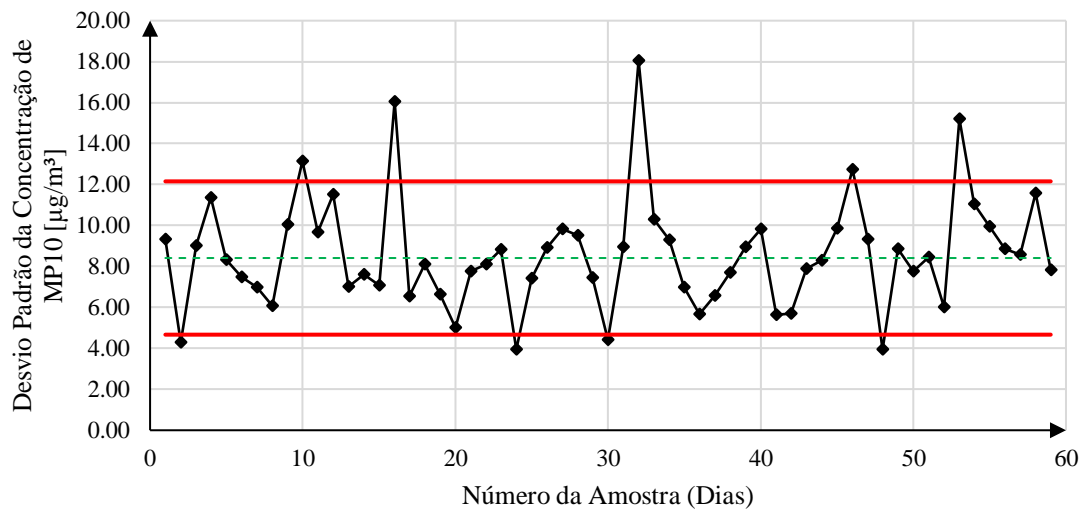
Para o gráfico de controle s , suas constantes B_3 e B_4 são 0,555 e 1,445 respectivamente. Seus limites de controle são: $LIC = 4,67 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 8,41 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 12,15 \mu\text{g}/\text{m}^3$. As Figuras 49 e 50 ilustram os gráficos de controle acerca da situação descrita.

Figura 49 - Gráfico de controle \bar{X} Tradicional (fase I) para monitorar a média diária da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 50 - Gráfico de controle s Tradicional (fase I) para monitorar o desvio padrão diário da concentração de MP₁₀ em µg/m³.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a retirada de 30 pontos fora de controle, obtém-se os limites de controle válidos. Para o gráfico de controle \bar{X} , os limites de controle válidos após o término da fase I são: $LIC = 19,00 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 24,31 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 29,63 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Em contrapartida, para o gráfico s, os limites de controle são: $LIC = 4,81 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM = 8,67 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC = 12,54 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para observar os pontos amostrais que foram retirados para que fosse possível obter os limites válidos, consulte o Apêndice B.

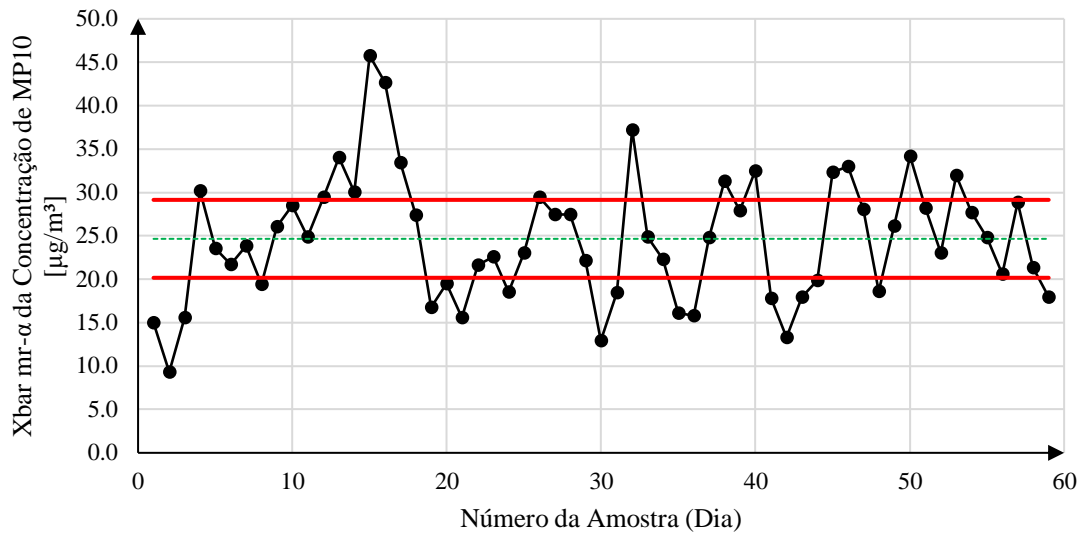
4.6.2 Gráficos de Controle \bar{X} e S TFN

A partir do processo de fuzzificação de dados descrito em Mendes (2019), obtém os TFN para o conjunto de dados em análise.

Nesse caso, os limites de controle também sofrem interferência dos números fuzzy triangulares gerados. Os parâmetros iniciais do processo são $\bar{x} = (24,11; 24,37; 24,86)$ e $\bar{s} = (6,68; 7,07; 7,47)$, que após a aplicação da transformação *midrange*, obtém-se $\bar{x}_{\alpha-mr} = 24,65 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\bar{s}_{\alpha-mr} = 7,25 \mu\text{g}/\text{m}^3$. O valor dos limites de controle para o gráfico de controle \bar{X} Fuzzy para um *alpha-cut* de 0,45, após o processo de defuzzificação é respectivamente: $LIC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 20,17 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-\alpha-mr} = 24,65 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-\alpha-mr} = 29,14 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Para o gráfico de controle s Fuzzy, para o mesmo valor de

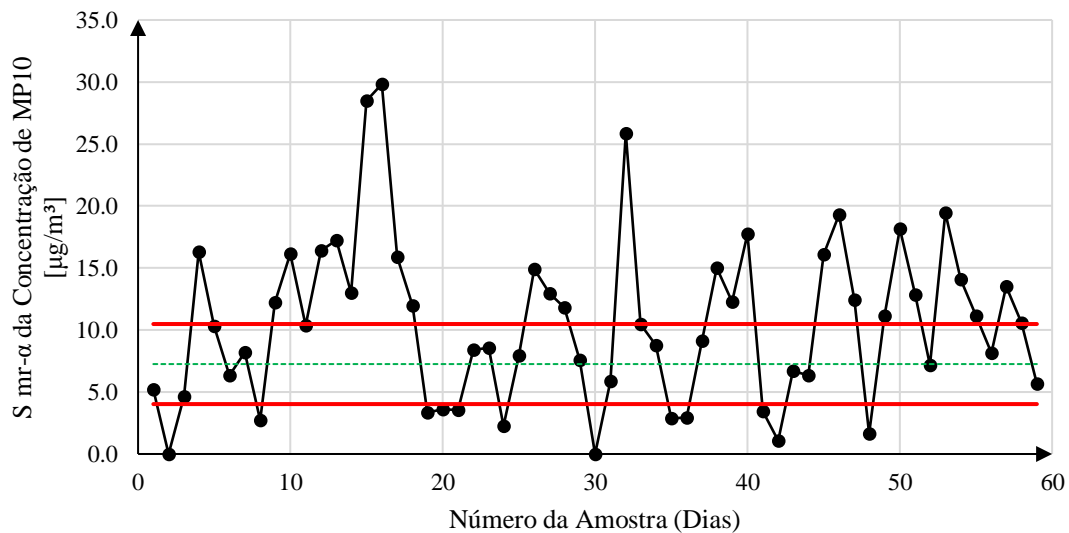
α -cut (0,45), obtêm-se os limites de controle: $LIC_{S-\alpha-mr} = 4,03 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{S-\alpha-mr} = 7,25 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{S-\alpha-mr} = 10,48 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Os gráficos de controle TFN \bar{X} e s TFN são ilustrados pelas Figuras 50 e 51.

Figura 51 - Gráfico de controle \bar{X} TFN (fase I) para monitorar a média diária da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 52 - Gráfico de controle S TFN (fase I) para monitorar o desvio padrão diário da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a retirada de 43 amostras fora de controle, obtém-se novos parâmetros de processo (estimados): $\bar{\bar{x}}_{\alpha-mr} = 21,77 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\bar{s}_{\alpha-mr} = 6,33 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Os limites de controle válidos, são respectivamente: $LIC_{\bar{x}-\alpha-mr} = 17,85 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{x}-\alpha-mr} = 21,77 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{x}-\alpha-mr} = 25,68 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o gráfico de \bar{X} TFN e; $LIC_{s-\alpha-mr} = 3,51 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{s-\alpha-mr} = 6,53 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{s-\alpha-mr} = 9,14 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o gráfico de s TFN.

O valor de $\alpha-cut$ influencia na quantidade de incerteza que pode ser considerada no processo de defuzzificação, que no caso, quanto mais próximo de 0 (zero), mais incerteza será acrescentada ao modelo. Como foi necessário a retirada de 43 amostras dentre as 59 iniciais do processo, um maior valor de $\alpha-cut$ pode ser utilizado para que os dados sejam estabilizados.

Consulte o Apêndice B para observar a retiradas dos pontos fora de controle para estes gráficos.

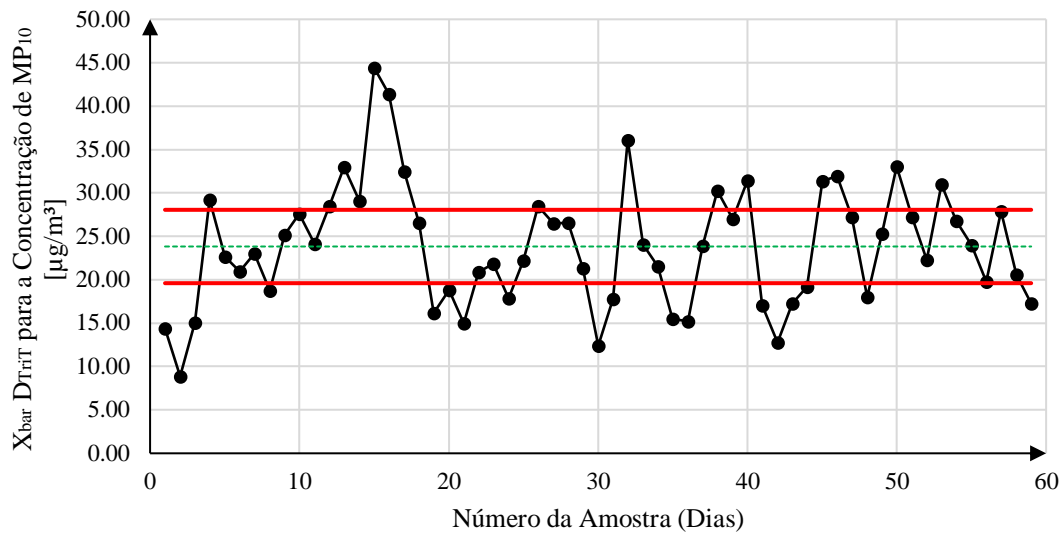
4.6.3 Gráficos de Controle \bar{X} e S IT2TFN

A partir dos números *fuzzy* tipo-2 triangulares intervalar criados a partir dos valores *crisp* da concentração de MP_{10} , obtém-se os parâmetros $\bar{\bar{X}} = (24,11; 24,19; 24,37; 24,71; 24,86)$ e $\bar{s} = (6,68; 6,79; 7,07; 7,35; 7,47)$.

Aplicando o processo de redução de tipo conforme equação (49), e posteriormente a defuzzificação, obtém-se $\bar{\bar{X}}D_{TriT} = 23,83 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\bar{s}D_{TriT} = 6,89 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para um $H(\tilde{A}^L)$ de 0,95 e uma FOU de 0,30. Desta forma, obtém-se os limites de controle IT2TFN: $LIC_{\bar{x}-D_{TriT}} = 19,60 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{x}-D_{TriT}} = 23,83 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{x}-D_{TriT}} = 28,05 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o gráfico da média e $LIC_{s-D_{TriT}} = 3,82 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{s-D_{TriT}} = 6,89 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{s-D_{TriT}} = 9,97 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o gráfico do desvio padrão.

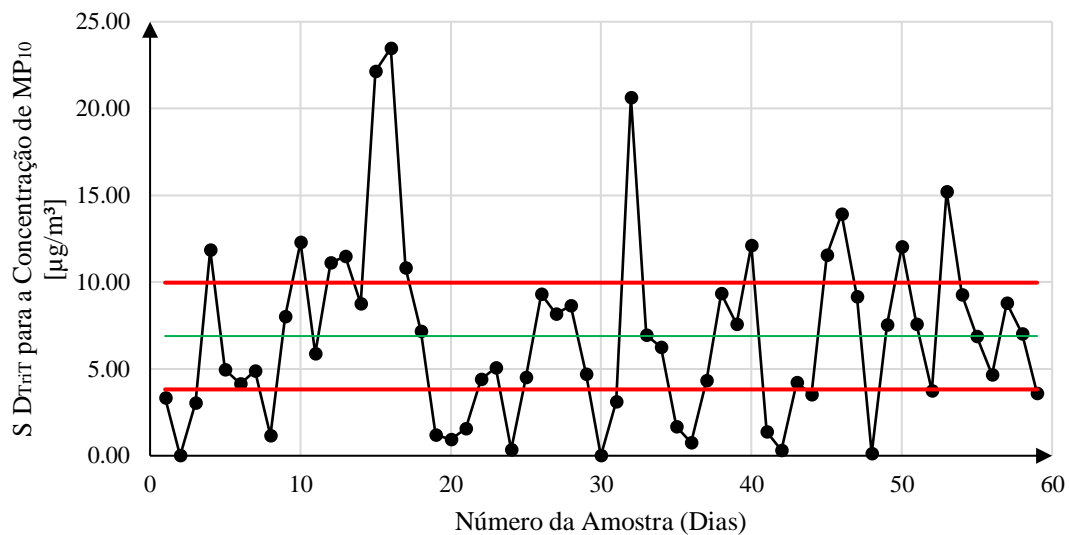
Após o processo de fuzzificação, redução de tipo e defuzzificação das 59 amostras válidas, obtém-se os gráficos de controle de \bar{x} e s conforme as Figuras 53 e 54.

Figura 53 - Gráfico de controle \bar{X} IT2TFN (fase I) para monitorar a média diária da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 54 - Gráfico de controle S TFN (fase I) para monitorar o desvio padrão diário da concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$.

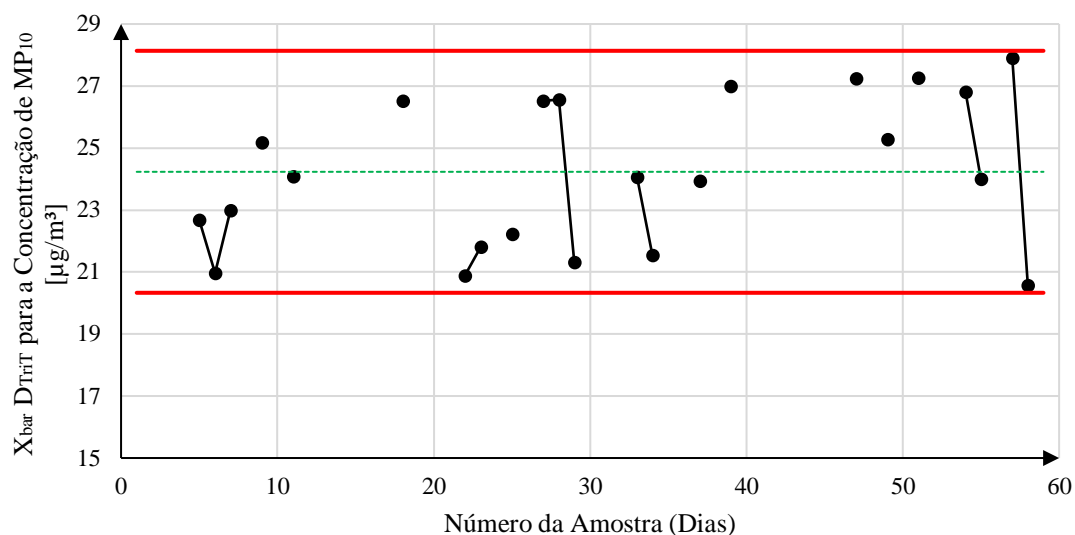


Fonte: Elaborado pelo autor.

Retirando-se 36 amostras fora de controle, dando início a retirada das amostras fora de controle no gráfico de controle que monitora o desvio padrão e posteriormente retirando as amostras restantes no gráfico de controle que monitora a média, obtém os novos valores dos limites de controle: $LIC_{\bar{X}-D_{TrIT}} = 20,33 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{\bar{X}-D_{TrIT}} = 24,23$

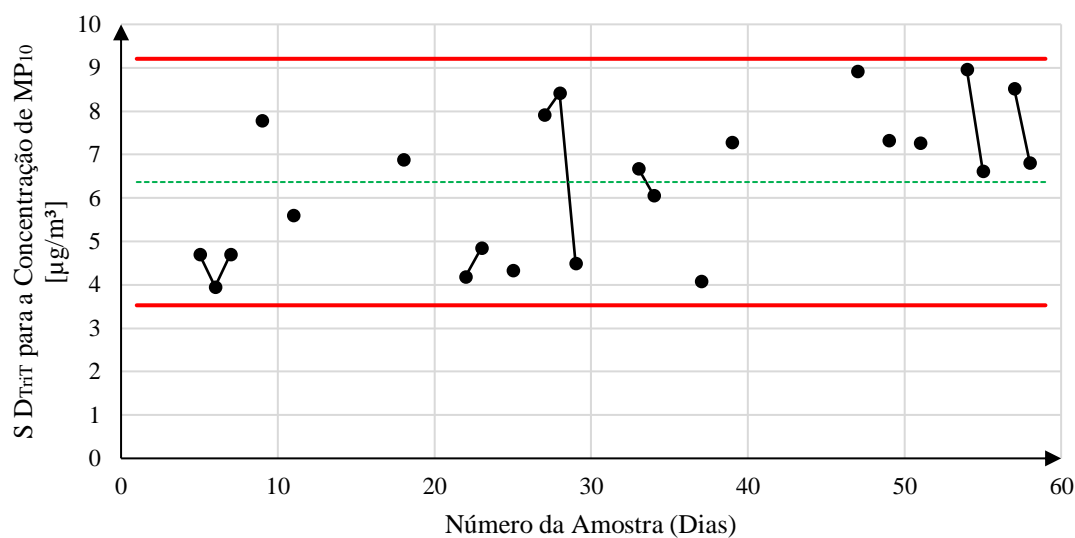
$\mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{\bar{X}-D_{TrIT}} = 28,14 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o gráfico de controle \bar{X} IT2TFN e $LIC_{S-D_{TrIT}} = 3,53 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $LM_{S-D_{TrIT}} = 6,37 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $LSC_{S-D_{TrIT}} = 9,21 \mu\text{g}/\text{m}^3$ para o gráfico de controle s IT2TFN. Os gráficos de controle IT2TFN \bar{X} -S com as amostras (pontos) fora de controle retiradas e limites válidos são ilustrados nas Figuras 55 e 56.

Figura 55 - Gráfico de controle \bar{X} IT2TFN (fase I) com os limites de controle válidos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 56 - Gráfico de controle S IT2TFN (fase I) com os limites de controle válidos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir dos limites válidos, torna-se viável o monitoramento do processo, a execução da Fase II. As Tabelas 17 e 18 sintetizam as diferenças entre os modelos apresentados a partir dos gráficos de controle obtidos.

Tabela 17 – Comparação entre os gráficos de controle \bar{X} tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

	Gráfico de Controle \bar{X}	Gráfico de Controle \bar{X} TFN (midrange, $\alpha = 0,45$)	Gráfico de Controle \bar{X} IT2TFN (Kahraman <i>et al</i> (2014), $H(A^L)$ $= 0,95$ e $FOU = 0,30$)
Pontos Retirados da Amostra Inicial (fase I)	30 amostras	43 amostras	36 amostras
Linha Média (LM)	24,31 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	21,77 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	24,23 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
Principais Vantagens	Simplicidade de aplicação, os dados já vem prontos. Trabalhando junto com os, reduziu-se bruscamente a quantidade de gráficos de controle.	Incorpora incertezas do sistema ao gráfico de controle, tornando-o mais confiável e flexível, podendo aumentar seu poder de detecção dependendo da escolha dos parâmetros.	Incorpora ainda mais incertezas ao gráfico de controle, tornando-o mais robusto (à prova de erros). O poder de detecção aumenta bastante em relação aos modelos tradicionais e <i>fuzzy</i> tipo-1
Principais Desvantagens	Desconsidera as subjetividades e outras características específicas do sistema, usa apenas de estatística. Costuma ser um pouco mais complexo quando aplicado junto com o gráfico s.	Torna o modelo mais complexo e os limitantes L_1 e L_2 , o <i>alpha-cut</i> devem ser bem definidos. O desvio padrão exige um pouco mais de atenção nos cálculos.	Torna o modelo ainda mais complexo. Além dos limitantes L_1 e L_2 , há outras variáveis como $H(A^L)$ e a FOU que devem ser bem definidos. Necessita de um pouco mais de capacidade computacional quando se trabalha com s.

Fonte: Elaborado pelo autor.

É notório todas as vantagens relativas a aplicação de conjuntos *fuzzy* aos gráficos de controle tradicionais, porém é necessário escolher adequadamente os parâmetros fuzzy para que a análise da estabilidade do processo não dificulte a transição da fase I para a fase II.

Desta forma, os modelos que utilizam conjuntos *fuzzy* tipo-1 devem se ater aos valores de *alpha-cut*, que definem a quantidade de incerteza que será considerada durante o processo de defuzzificação.

O modelo que utiliza conjuntos *fuzzy* do tipo-2 por sua vez se mostraram uma boa capacidade de detecção de pontos fora de controle e ao mesmo tempo não foram necessárias a retirada de tantas amostras para a obtenção dos limites de controle válidos,

uma vez que foram retiradas 30 amostras nos gráficos de controle \bar{X} -S tradicionais e 36 nos gráficos de controle IT2TFN \bar{X} .

Tabela 18 – Comparação entre os gráficos de controle S tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

	Gráfico de Controle S	Gráfico de Controle S TFN (midrange, $\alpha = 0,45$)	Gráfico de Controle S IT2TFN (Kahraman <i>et al</i> (2014), $H(A^L) = 0,95$ e $FOU = 0,30$)
Pontos Retirados da Amostra Inicial (fase I)	30 amostras	43 amostras	36 amostras
Linha Média (LM)	8,67 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	6,53 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	6,37 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
Principais Vantagens	Permite que se monitore a dispersão de dados cujo $n > 10$, reduzindo assim o número de gráficos a serem aplicados.	Incorpora incertezas do sistema ao gráfico de controle, tornando-o mais confiável e flexível, podendo aumentar seu poder de detecção dependendo da escolha dos parâmetros.	Incorpora ainda mais incertezas ao gráfico de controle, tornando-o mais robusto (à prova de erros).
Principais Desvantagens	Desconsidera as subjetividades e outras características específicas do sistema, usa apenas de estatística. Calcular um desvio padrão requer mais perspicácia matemática do que o R.	Torna o modelo mais complexo e no caso de s, requer uma atenção especial no cálculo dos 3 valores de desvio padrão. Os limitantes L_1 e L_2 , o α -cut devem ser bem definidos.	Torna o modelo ainda mais complexo. Os limitantes L_1 e L_2 , o $H(A^L)$ e a FOU que devem ser bem definidos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos de controle \bar{X} e s se mostram mais simples de serem implementados frente ao modelo anterior por poder fazer uso das 24 horas do dia como tamanho amostral. Simplifica-se o processo de obtenção dos gráficos de controle, tendo assim apenas um par de gráficos por dia, ao invés de 4 pares. Os modelos matemáticos aplicados no desenvolvimento das equações dos limites e das propriedades utilizados em \bar{X} e R TFN e IT2TFN, podem ser adaptados para \bar{X} e s TFN e IT2TFN, porém a propriedade matemática de subtração juntamente com as condições apresentadas por Darestani e Nasiri (2016), faz com que sejam necessárias mais etapas de cálculo em relação aos gráficos de controle \bar{X} e R utilizando TFN e IT2TFN. Desta forma obtém-se \bar{X} e R TFN, \bar{X} e s TFN para conjuntos *fuzzy* tipo-1 e \bar{X} e R IT2TFN, \bar{X} e s para conjuntos

fuzzy tipo-2 intervalar. Para mais detalhes, consulte a planilha de resultados no Apêndice C.

4.7 APLICAÇÃO DO GRÁFICO DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING NO MONITORAMENTO DA QUALIDADE DO AR

Para se aplicar o gráfico de T^2 de Hotelling, torna-se necessário a medição de duas ou mais variáveis de processo. Dentre as variáveis medidas, além da concentração de material particulado MP_{10} , tem-se a concentração de dióxido de enxofre SO_2 que é medida em $\mu g/m^3$. Desta forma deve-se utilizar as duas variáveis e seus respectivos valores horários combinados de acordo com dia.

O modelo bivariado proposto indica que o tamanho n das amostras deve ser o mesmo para ambas as variáveis. No caso do SO_2 , não há medições horárias para as 04:00, logo deve-se retirar as medições referentes a este horário para a variável MP_{10} . A Figura 63 ilustra a tabulação de dados e demonstra a diferenças de escala entre os dados de MP_{10} que estão em média na faixa de $20,00 \mu g/m^3$ enquanto SO_2 possui valores bem menores.

Figura 57 – Exemplo para a tabulação das 10 primeiras amostras de dados referentes à concentração de SO_2 .

Dia	Amostras	01:00	02:00	03:00	05:00	06:00	07:00	08:00	09:00	10:00
01/01/2021	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
02/01/2021	2	1	1	1	1	0	1	1	1	1
04/01/2021	3	1	1	1	1	2	3	3	3	2
07/01/2021	4	1	1	1	3	3	3	3	3	2
16/01/2021	5	2	1	1	2	2	3	4	2	2
21/01/2021	6	1	1	2	2	1	1	3	4	5
23/01/2021	7	1	1	2	3	4	3	3	3	3
25/01/2021	8	1	4	4	1	2	2	1	2	2
26/01/2021	9	0	0	1	2	2	2	3	2	4
27/01/2021	10	1	2	2	3	4	4	3	3	3

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados da CETESB.

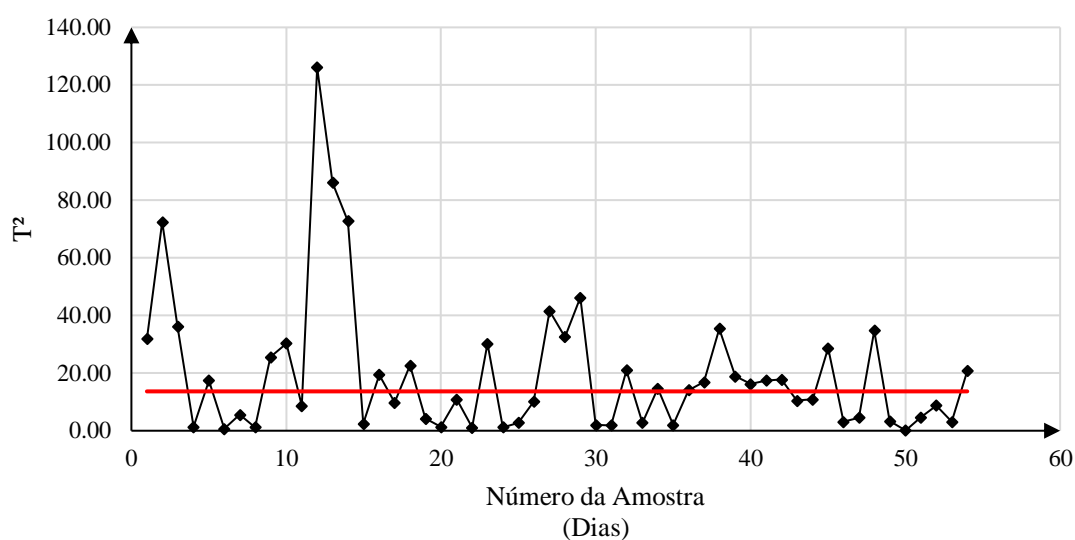
4.7.1 Gráfico de Controle T^2 de Hotelling

Considerando os dados obtidos, para a realização da fase I do gráfico de controle de T^2 de Hotelling, tem-se $p = 2$ (2 variáveis), $m = 54$ (número de amostras) e $n = 23$ (tamanho das amostras), e partir dos cálculos chegou-se aos parâmetros: $\mu_1 = 24,53$

$\mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\mu_2 = 1,79 \mu\text{g}/\text{m}^3$, que são respectivamente os valores médios da concentração de MP_{10} e SO_2 ; $\sigma_1^2 = 84,02 \mu\text{g}/\text{m}^3$, $\sigma_2^2 = 0,81 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\sigma_{12} = 3,82 \mu\text{g}/\text{m}^3$, que são as variâncias de MP_{10} e SO_2 respectivamente, além da covariância.

Calculando os valores de T^2 e dos limites iniciais, conforme (27) e (28), que para a fase I, os seus limites de controle são respectivamente: $\text{LIC} = 0,00$ e $\text{LSC} = 13,65$, para uma significância $\alpha = 0,001$. O gráfico de T^2 inicialmente, pode ser observado na Figura 58.

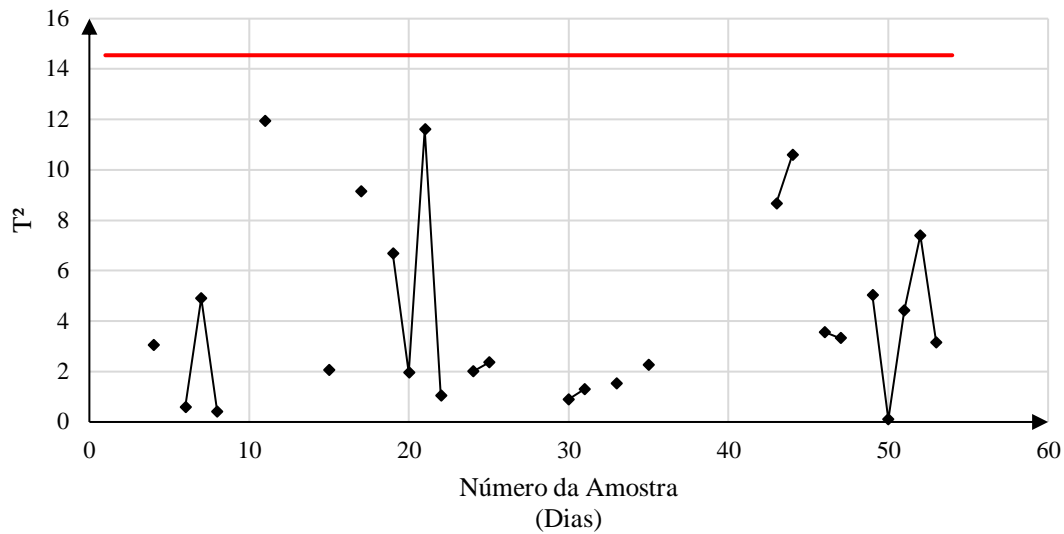
Figura 58 - Gráfico de controle T^2 (fase I) para monitorar os níveis de concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ e os níveis de concentração de SO_2 em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ simultaneamente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode-se observar, há 27 pontos acima do LSC, e desta forma deve-se excluí-los e verificar a estabilidade do gráfico. Após a retirada de 27 pontos fora de controle, o cálculo dos novos limites apresentou mais um ponto fora de controle que também foi retirado, somando assim 28 pontos fora de controle. Conclui-se a fase I e calcula-se os novos limites de controle para a fase II do gráfico de controle de T^2 , obtendo: $\text{LIC} = 0$ e $\text{LSC} = 14,17$. A Figura 59 demonstra os pontos retirados após a análise anterior.

Figura 59 - Gráfico de controle T^2 (fase I) para monitorar os níveis de concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ e os níveis de concentração de SO_2 em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ simultaneamente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o gráfico de controle T^2 de Hotelling é possível monitorar pelo menos duas variáveis simultaneamente, e com isso reduz-se a quantidade de gráficos de controle necessários para se monitorar a qualidade do ar diariamente.

Em relação ao grau de incertezas, é viável a aplicação tanto da teoria dos conjuntos *fuzzy* tipo-1 quanto da teoria dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 explanadas nesse trabalho, implementando assim os gráficos de controle: T^2 TFN e T^2 IT2TFN.

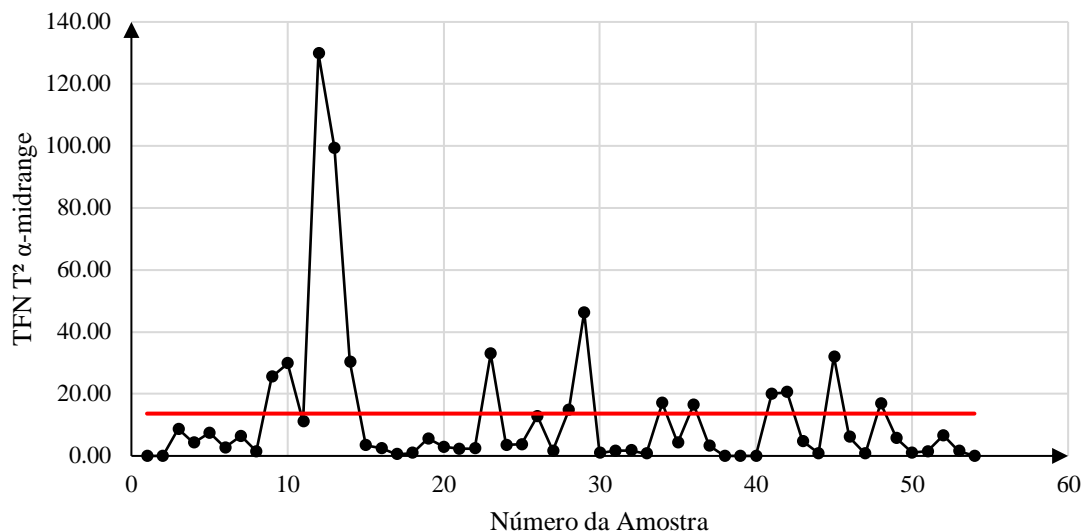
4.7.2 Gráfico de Controle T^2 TFN

A partir do processo de fuzzificação de dados descrito em Mendes (2019), obtém os TFN para o conjunto de dados em análise.

Considerando os dados obtidos, para a realização da fase I do gráfico de controle de T^2 , tem-se $p = 2$ (2 variáveis), $m = 54$ (número de amostras) e $n = 23$ (tamanho das amostras), e partir dos cálculos chegou-se aos parâmetros: $\mu_1 = (24,28; 24,53; 25,02)$ $\mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\mu_2 = (1,55; 1,79; 2,26)$ $\mu\text{g}/\text{m}^3$, que são respectivamente os valores *fuzzy* médios da concentração de MP_{10} e SO_2 respectivamente; $\sigma_1^2 = (73,56; 80,43; 87,86)$ $\mu\text{g}/\text{m}^3$; $\sigma_2^2 = (0,30; 0,70; 1,61)$ $\mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\sigma_{12} = (2,19; 4,31; 7,70)$ $\mu\text{g}/\text{m}^3$, que são as variâncias de MP_{10} e SO_2 respectivamente, além da covariância.

Calculando os valores de T^2 α -midrange para α -cut = 0,45, os seus limites de controle são respectivamente: $LIC_{T^2-\alpha-mr} = 0,00$ e $LSC_{T^2-\alpha-mr} = 13,65$ para um nível de significância $\alpha = 0,001$. Ao se realizar a primeira rodada da fase I, obtém-se o gráfico de controle TFN T^2 , como pode ser ilustrado pela Figura 60.

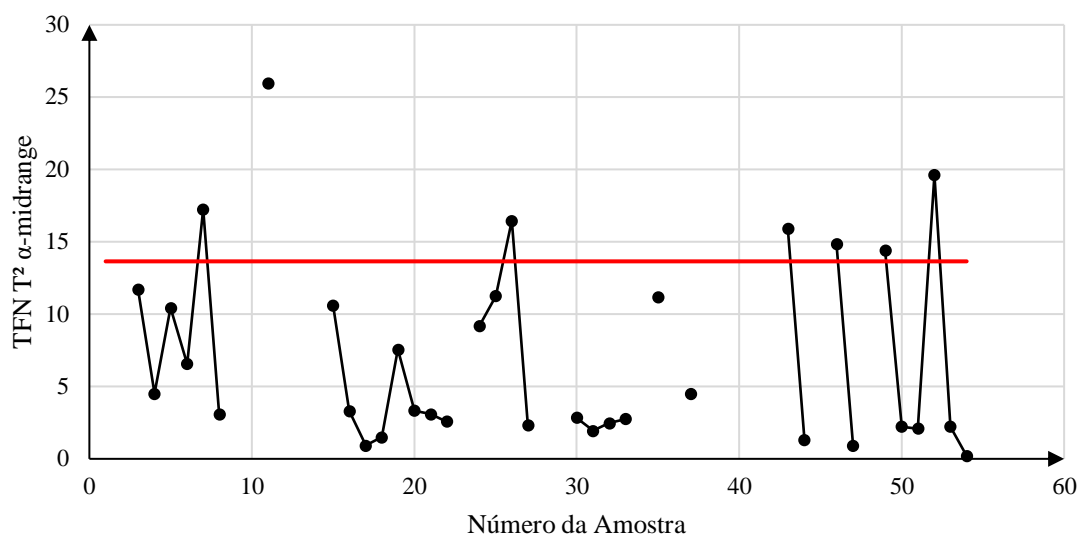
Figura 60 - Gráfico de controle TFN T^2 (fase I) para monitorar os níveis de concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ e os níveis de concentração de SO_2 em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ simultaneamente por meio da estatística $T^2_{\alpha-mr}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode-se observar, há 19 pontos fora dos limites de controle (14 acima do LSC e 5 iguais a zero), e desta forma deve-se excluí-los e verificar a estabilidade do gráfico. Considerando os novos limites de controle como $LIC_{T^2-\alpha-mr} = 0$ e $LSC_{T^2-\alpha-mr} = 13,56$; o gráfico de controle T^2 TFN após a retirada dos 19 pontos, pode ser ilustrado na Figura 61.

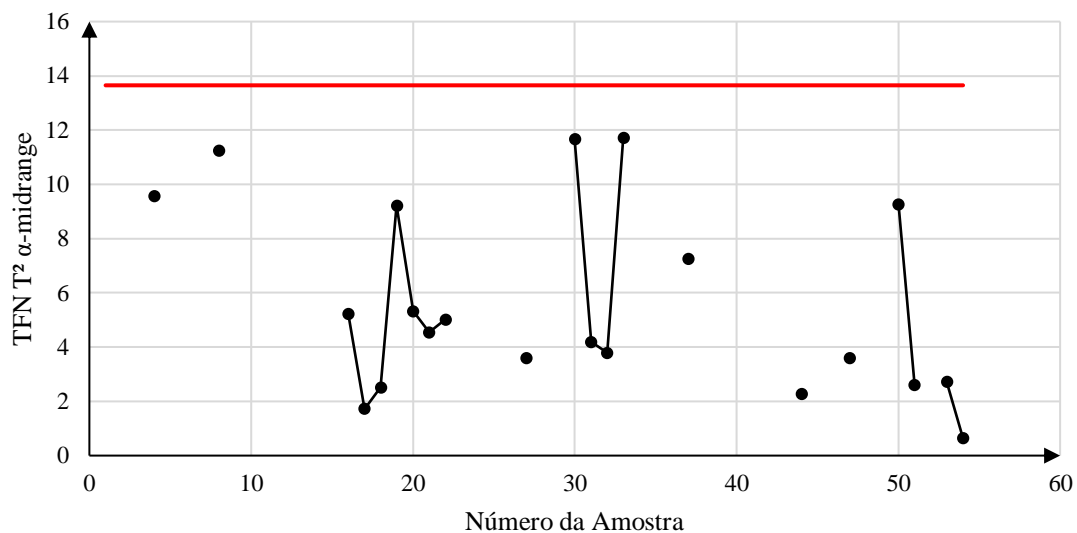
Figura 61 - Gráfico de controle TFN T^2 (fase I) após a retirada dos pontos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a retirada de um total de 26 pontos fora de controle, conclui-se a fase I e calcula-se os novos limites de controle para a fase II do gráfico de controle de T^2 , obtendo: $LIC_{T^2-\alpha-mr} = 0$ e $LSC_{T^2-\alpha-mr} = 14,72$. A Figura 62 demonstra os pontos retirados após a análise anterior.

Figura 62 - Gráfico de controle TFN T^2 (fase I) após a retirada dos pontos.



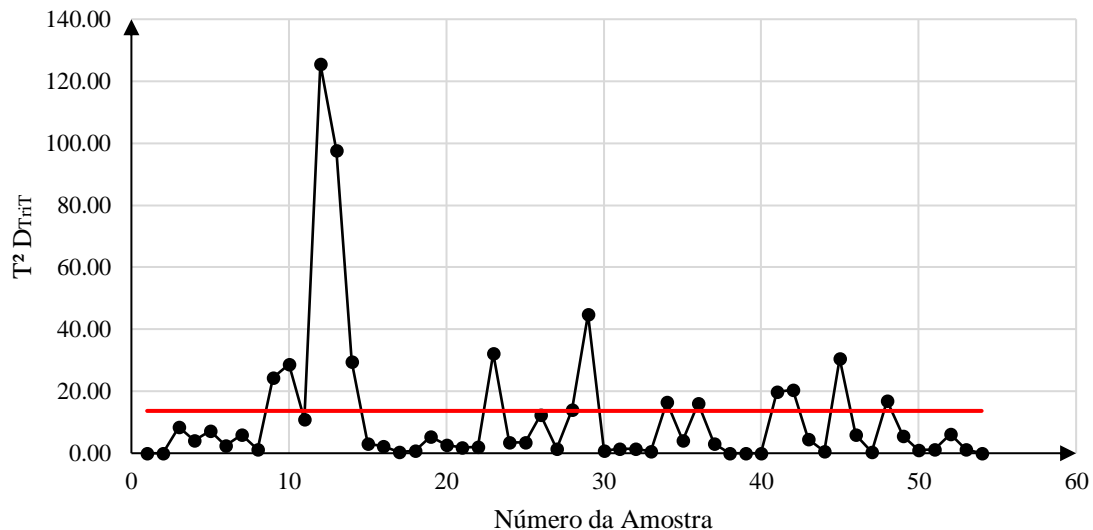
Fonte: Elaborado pelo autor.

4.7.3 Gráfico de Controle T^2 IT2TFN

A partir dos números *fuzzy* tipo-2 triangulares intervalar criados a partir dos valores *crisp* da concentração de MP_{10} e SO_2 , tem-se os seguintes parâmetros: $p = 2$ (2 variáveis), $m = 54$ (número de amostras) e $n = 23$ (tamanho das amostras), $\mu_1 = (24,28; 24,36; 24,53; 24,87; 25,02) \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\mu_2 = (1,55; 1,62; 1,79; 2,26) \mu\text{g}/\text{m}^3$, que são respectivamente os valores IT2TFN médios da concentração de MP_{10} e SO_2 respectivamente; $\sigma_1^2 = (73,56; 75,56; 80,43; 85,57; 87,86) \mu\text{g}/\text{m}^3$, $\sigma_2^2 = (0,30; 0,39; 0,70; 1,27; 1,61) \mu\text{g}/\text{m}^3$ e $\sigma_{12} = (2,19; 2,69; 4,31; 6,62; 7,70) \mu\text{g}/\text{m}^3$, que são as variâncias de MP_{10} e SO_2 respectivamente, além da covariância.

Calculando os valores de $T^2 D_{Trit}$ para $H(A^U) = 1,00$ e $H(A^L) = 0,95$, os seus limites de controle são respectivamente: $LIC_{T^2-D_{Trit}} = 0,00$ e $LSC_{T^2-D_{Trit}} = 13,65$ para um nível de significância $\alpha = 0,001$. Ao se realizar a primeira rodada da fase I, obtém-se o gráfico de controle IT2TFN T^2 , como pode ser ilustrado pela Figura 63.

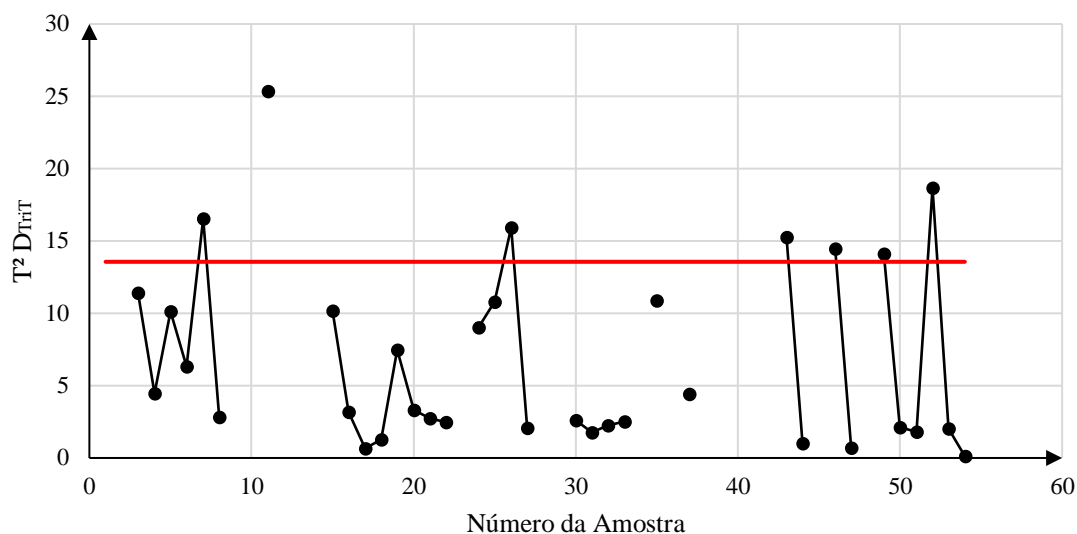
Figura 63 - Gráfico de controle IT2TFN T^2 (fase I) para monitorar os níveis de concentração de MP_{10} em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ e os níveis de concentração de SO_2 em $\mu\text{g}/\text{m}^3$ simultaneamente por meio da estatística $T^2 D_{Trit}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode-se observar, há 19 pontos fora dos limites de controle (14 acima do $LSC_{T^2-D_{Trit}}$ e 5 iguais a zero), assim como no TFN T^2 , e desta forma deve-se excluí-los e verificar a estabilidade do gráfico. Considerando os novos limites de controle como $LIC_{T^2-D_{Trit}} = 0$ e $LSC_{T^2-D_{Trit}} = 13,56$; o gráfico de controle T^2 TFN após a retirada dos 19 pontos, pode ser ilustrado na Figura 64.

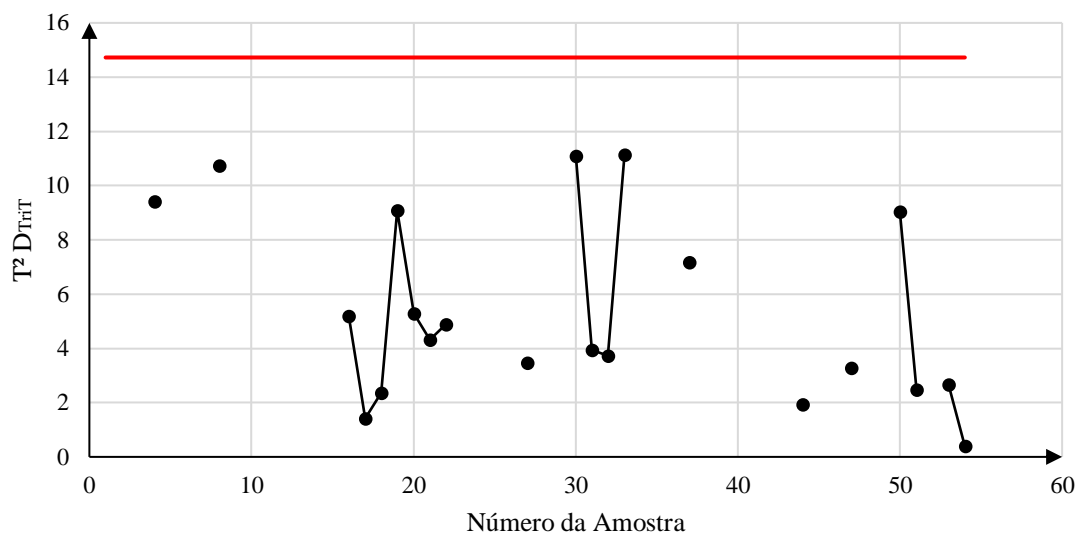
Figura 64 - Gráfico de controle IT2TFN T^2 (fase I) após a retirada parcial dos pontos fora de controle (análise de estabilidade).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a retirada de um total de 33 pontos fora de controle, conclui-se a fase I e calcula-se os novos limites de controle para a fase II do gráfico de controle de T^2 , obtendo: $LIC_{T^2-D_{Trit}} = 0$ e $LSC_{T^2-D_{Trit}} = 14,72$. A Figura 65 demonstra os pontos retirados após a análise anterior.

Figura 65 - Gráfico de controle TFN T^2 (fase I) após a retirada dos pontos. Validação dos limites de controle.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 19 compara os gráficos de controle de T^2 bivariado tradicional, sob a perspectiva do *fuzzy* tipo-1 (TFN) e sob a perspectiva do *fuzzy* tipo-2 intervalar (IT2TFN).

Tabela 19 – Comparação entre os gráficos de controle T^2 tradicional, TFN e IT2TFN considerando os períodos da manhã, tarde, noite e madrugada.

	Gráfico de Controle T^2	Gráfico de Controle T^2 TFN (midrange, $\alpha = 0,45$)	Gráfico de Controle T^2 IT2TFN (Kahraman <i>et al</i> (2014), $H(A^L)$ = 0,95 e FOU = 0,30)
Pontos Retirados da Amostra Inicial (fase I)	28 amostras	26 amostras	36 amostras
Limites de Controle	LSC = 14,17 LIC = 0,00	LSC = 14,72 LIC = 0,00	LSC = 14,72 LIC = 0,00
Principais Vantagens	Permite que se monitore duas ou mais variáveis simultaneamente por meio do vetor das médias. Tal monitoramento é mais eficiente do que monitorar duas ou mais variáveis separadamente.	Incorpora incertezas do sistema ao gráfico de controle, tornando-o mais confiável e flexível, podendo aumentar seu poder de detecção dependendo da escolha dos parâmetros.	Incorpora ainda mais incertezas ao gráfico de controle, tornando-o mais robusto (à prova de erros). Os parâmetros L_1 , L_2 , FOU (para a fuzzificação) e $H(A^L)$ para a defuzzificação torna o modelo ainda mais flexível em relação a utilização de TFN. Além disso, os números fuzzy tipo-2 triangulares intervalar conseguem explicar melhor dados com tamanha incerteza com é o caso dos dados da CETESB.
Principais Desvantagens	Desconsidera as subjetividades e outras características específicas do sistema, usa apenas de estatística. O gráfico de T^2 apresenta pouca sensibilidade a pequenas variações.	Torna o modelo mais complexo e no caso de T^2 , requer uma maior capacidade computacional para que sejam feitos todos os processos: fuzzificação, cálculo dos parâmetros, defuzzificação, obtenção dos limites, fase I e fase II utilizam pelo menos 3 vezes mais dados que o modelo tradicional. Os limitantes L_1 e L_2 , o <i>alpha-cut</i> devem ser bem definidos.	Torna o modelo ainda mais complexo. Os limitantes L_1 e L_2 , o $H(A^L)$ e a FOU que devem ser bem definidos. Os processos de fuzzificação, cálculo dos parâmetros, defuzzificação, obtenção dos limites de controle, fase I e fase II utilizam pelo menos cinco vezes mais dados que o modelo tradicional.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os parâmetros escolhidos assim como os métodos utilizados nos processos de fuzzificação e defuzzificação são responsáveis pelo bom desempenho dos gráficos de controle, logo é importante saber que cada parâmetro tem uma faixa ideal de atuação e cada método de defuzzificação implicará em prós e contras. Para mais detalhes, consulte a planilha de resultados no Apêndice C.

5 CONCLUSÕES

5.1 VERIFICAÇÃO DOS OBJETIVOS E RESPOSTAS À QUESTÃO DE PESQUISA

Os gráficos de controle por uma abordagem fuzzy tipo-2 intervalar receberam a frente de seus nomes a sigla IT2TFN (*interval type-2 triangular fuzzy number*) pelas características do conjunto fuzzy que foi abordado. Desta forma foram propostos três modelos de gráfico de controle: IT2TFN \bar{X} -R para o monitoramento da média e da amplitude, IT2TFN \bar{X} -s para o monitoramento da média e do desvio padrão e por fim o IT2TFN T^2 , para o monitoramento do vetor das médias de processos bivariados.

Em relação ao desempenho, o teste computacional implementado no RStudio® demonstrou que o gráfico de controle IT2TFN \bar{X} possui uma maior capacidade de detecção de causas especiais, em ambos os cenários, em relação tanto ao gráfico de controle \bar{X} tradicional quanto ao modelo TFN \bar{X} de tal forma que o *NMA* é em média 2,5% menor no cenário 1 e 4,6% menor no cenário 2, em relação ao *NMA* do gráfico de controle \bar{X} tradicional, o que supera o gráfico de controle TFN \bar{X} que reduz o *NMA* em 1,97% no cenário 1 e 4,5% no cenário 2 em relação ao *NMA* do gráfico de controle \bar{X} tradicional. Outro fato relevante é o desempenho em função da *FOU*, que demonstrou valores menores de *NMA* para valores de *FOU* entre 0,05 e 0,15, o que ocorreu em ambos os cenários.

Para o caso dos gráficos de controle \bar{X} -R trabalhando de forma conjunta, outro teste computacional foi realizado a fim de verificar o desempenho dos gráficos de controle \bar{X} -R IT2TFN frente aos gráficos de controle tradicionais. O valor da *FOU* = 0,30 proposto pela literatura se mostrou capaz de melhorar a capacidade de detecção dos gráficos de controle, ou seja, o modelo proposto apresentou uma redução média 0,31% no valor do *NMA* mesmo trabalhando com um valor de *FOU* mais equilibrado (diferente do intervalo de 0,05 e 0,15) e ao mesmo tempo que evita uma grande quantidade de alarmes falsos. Comprovando também a flexibilidade do modelo proposto, além de sua rapidez de resposta.

A aplicação da teoria dos conjuntos *fuzzy* tipo-2 intervalar aos gráficos de controle no monitoramento da qualidade do ar se mostrou relevante uma vez que considera o ruído presente nas medições e as condições dos sensores que medem a concentração de

MP₁₀ e SO₂ na atmosfera medidos em µg/m³. Pelo comportamento dos dados pode-se perceber o grau de instabilidade dos dados e de quão sujeitos a incertezas estão sendo submetidos.

Os gráficos de controle propostos apresentaram vantagens e desvantagens, que vão desde a simplicidade até a robustez na tomada de decisão. Os gráficos de controle IT2TFN \bar{X} -R são os mais simples de serem aplicados, porém estão limitados ao tamanho amostral, que para a aplicação aos dados da CETESB, foi necessário dividir o dia em quatro períodos (manhã: 07:00 – 12:00, tarde: 13:00 – 18:00, noite: 19:00 – 00:00, madrugada: 01:00 – 06:00). A divisão do dia em períodos iguais e com características climáticas similares facilita na tomada de decisão, porém gera quatro pares de gráficos de controle de \bar{X} -R, um par para cada período do dia.

Os gráficos de controle IT2TFN \bar{X} -S resolvem tal situação, pois o cálculo do desvio padrão pode ser feito para amostras de tamanho 24, como são as horas do dia e desta forma monitorar a concentração de MP₁₀ com apenas um par de gráficos. O cálculo do desvio padrão considerando as propriedades dos conjuntos *fuzzy* do tipo-2 intervalar aumenta a manipulação de dados e por consequência a necessidade de uma maior capacidade de processamento.

Quando se pretende monitorar duas ou mais variáveis simultaneamente, como os dados da CETESB são coletados, o gráfico de controle IT2TFN T² se mostra uma ferramenta importante, apesar do aumento expressivo no volume de dados, pois acrescenta as incertezas oriundas dos sistemas de medição, do conhecimento de especialistas além de sintetizar todas as informações em apenas um gráfico. A fuzzificação dos dados *crisp* para dados *fuzzy* tipo-2 intervalar torna o gráfico de controle de T² mais sensível a pequenas variações, algo que não é sua característica.

Vale ressaltar o fato dos gráficos de controle *fuzzy* em geral serem mais flexíveis quanto aos objetivos pretendidos com o monitoramento do processo em relação aos gráficos de controle tradicionais. O desempenho dos gráficos de controle TFN \bar{X} -R, TFN \bar{X} -S e TFN T² está sujeito ao método de fuzzificação e método de defuzzificação, que para os modelos propostos leva em conta o valor do α -cut, que faz com se acrescente mais ou menos incertezas aos dados.

O desempenho dos gráficos de controle IT2TFN \bar{X} -R, IT2TFN \bar{X} -S e IT2TFN T² por sua vez, dependem de mais fatores como o valor da mancha de incertezas (*FOU*) utilizado no processo de fuzzificação e o valor de $H(\tilde{A}^L)$ utilizado no processo de

defuzzificação. O $H(\tilde{A}^L)$ pode variar de 0 a 1, fazendo com que os valores defuzzificados se alterem de forma conveniente.

A utilização dos gráficos de controle IT2TFN no monitoramento da qualidade demonstrou como ferramentas estatísticas podem ser aplicadas fora do ambiente industrial e trazer benefícios para o meio ambiente e por consequência, para a solução de outros problemas na sociedade.

5.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Para pesquisas futuras sugere-se:

1. Avaliar o desempenho dos gráficos de controle IT2TFN \bar{X} -s e IT2TFN T² propostos comparando-os com os seus correspondentes tradicional e TFN (*triangular fuzzy number*);
2. Estender o modelo IT2TFN (*interval type-2 triangular fuzzy number*) a outros gráficos de controle como I-MR para valores individuais, EWMA e CUSUM;
3. Aplicar outros conjuntos *fuzzy* aos gráficos de controle apresentados como os conjuntos intuicionista, hesitante e neutrosófico e, por fim;
4. Desenvolver uma interface computacional capaz de aplicar os métodos aqui apresentados, a fim de facilitar o acesso por operadores industriais, decisores e órgãos governamentais.

REFERÊNCIAS

- ADEPOJU, A. A. *et al.* Interval type-2 fuzzy exponentially weighted moving average control chart. **Statistics in Transition**, Poland, v. 23, n. 1, p. 185-200, 2022.
- ALIPOUR, H.; NOOROSANA, R. Fuzzy multivariate exponentially weighted moving average control chart. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, London, v. 48, p. 1001–1007, 2010.
- ALIZADEH, H. M.; GHOMI, S. M. T. F. Fuzzy development of mean and range control charts using statistical properties of different representative values. **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, [s.l.], v. 22, n. 5, p. 253-265, 2011.
- ALMEIDA, T. S. *et al.* Gráficos de controle \bar{X} -R por uma abordagem fuzzy tipo-2 intervalar. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), 51, 2009, Limeira - SP, **Anais [...]**, São Paulo: Galoá, 2019.
- ALMEIDA, T. S. *et al.* Análise de desempenho de gráfico de controle por atributo np por abordagem fuzzy tipo-2 intervalar. In: Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (CBSF), 6, 2021, São José do Rio Preto - SP, **Anais [...]**, Campinas: SBMAC, 2021.
- AL-REFAIE, A. FGP model to optimize performance of tableting process with three quality responses. **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, London, v. 36, n. 3, p. 336-346, 2013.
- BERTRAND, J.; FRANSOO, J. Modelling and simulation: operations management research methodologies using quantitative modeling. **International Journal Operations & Production Management**, Bradford, v. 22, n. 2, p. 241-264, 2002.
- BRADSHAW, C. W. A fuzzy set theoretic interpretation of economic control limits. **European Journal of Operations Research**, Amsterdam, v. 13, n. 4, p. 403-408, 1983.
- CASTILLO, O.; MELIN, P. **Type-2 fuzzy logic: theory and applications**. Hildenberg: Springer, 2008.
- CHEN, C. B. Fuzzy process control: construction of control charts with fuzzy numbers. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 154, n. 2, p. 287-303, 2005.
- CHEN, C.; SHEN, Q. Transformation-based fuzzy rule interpolation using interval type-2 fuzzy sets. **Algorithms**, [s.l.], v. 10, n. 3, p. 1-20, 2017.
- CHEN, S.-M. *et al.* Fuzzy multiple attributes group decision-making based on ranking interval type-2 fuzzy sets. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 5, p. 5295–5308, 2012.
- CETESB. **Qualidade do Ar**. São Paulo: Companhia Ambiental do Estado de São Paulo, [2022]. Disponível em: <https://cetesb.sp.gov.br/>. Acessado em: 30 de julho de 2022.

CONTRERAS, R. J. **Modelos neuro-fuzzy hierárquicos BSP do Tipo-2**. 2007. Tese (Doutorado Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, RJ, 2007.

COSTA, A. F. B. **Gráficos de controle de Shewhart: duas décadas de pesquisa**. 2007. Tese (Livre-Docência em Engenharia de Qualidade) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP - Brasil, 2007.

COSTA, A.F.B.; EPPRECHT E.K.; CARPINETTI, L.C.R. **Controle estatístico de qualidade**. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2005.

DARESTANI, S. A.; NASIRI M. Fuzzy \bar{X} -S control chart and process capability indices in normal data environment. **International Journal of Quality & Reliability Management**, Bradford, v. 33, n. 1, p. 2-24, 2014.

DOMANGUE, R.; PATCH, S. C. Some omnibus exponentially weighted moving average statistical process monitoring schemes. **Technometrics**, Washington, v. 33, n. 3, p. 299-313, 1991.

EL-HAWARY, M. E. **Electric power applications of fuzzy systems**. New York: Wiley – IEEE Press, 1998.

ERGINEL, N.; SENTÜRK, S.; KAHRAMAN, C.; KAYA, I. Evaluating the packing process in food industry using fuzzy control charts. **International Journal of Computational Intelligence System**, [s.l.], v. 4, n. 4, p. 504-520. 2011.

ERGINEL, N.; SENTÜRK, S.; YILDIZ, G. Modeling attribute control charts by interval type-2 fuzzy sets. **Soft Computing**, [s.l.], v. 22, n. 15, p. 5033-5041, 2018.

FADEI, S.; POOYA, A. Fuzzy u control chart based on fuzzy rules and evaluating its performance using fuzzy OC curve. **The TQM Journal**, [s.l.], v. 30, n. 3, p. 232-247, 2018.

GHOBADI, S. *et al.* Developing a fuzzy multivariate CUSUM control chart to monitor multinomial linguistic quality characteristics. **International Journal Advantages in Manufacturing and Technologies**, London, v. 79, p. 1893–1903, 2015.

GHOBADI, S. *et al.* Developing a multivariate approach to monitor fuzzy quality profiles. **Quality Quantity**, Dordrecht, v. 48, p. 817–836, 2012.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6.ed. São Paulo: Atlas S.A, 2008.

GULBAY, M. e KAHRAMAN, C. An alternative approach to fuzzy control charts: direct fuzzy approach. **Information Sciences**, New York, v. 177, n. 6, 2 1463-1480, 2007.

GULBAY, M.; KAHRAMAN, C. Development of fuzzy process control charts and fuzzy unnatural pattern analyses. **Computational Statistics & Data Analysis**, Amsterdam, v. 51, n. 1, p. 434–451, 2006.

GULBAY, M.; KAHRAMAN, C.; RUAN, D. α -cut fuzzy control charts for linguistic data. **International Journal of Intelligent Systems**, [s.l.], v. 19, n. 12, p. 1173-1195, 2004.

HAIR, J.F. *et al.* **Multivariate data analysis**. 7th ed. New York: Pearson Prentice-Hall, 2009.

HAMEDANI, G. G.; TATA, M. N. On the Determination of the Bivariate Normal Distribution from Distributions of Linear Combinations of the Variables. **The American Mathematical Monthly**, Menasha, v. 82, n. 9. p. 913-915, 1975.

HOTELLING, H. Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights. **Techniques of Statistical Analysis**, New York, p. 111-184, 1947.

IHAKA, R.; GENTLEMAN, R. R: A Language for Data Analysis and Graphics. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, [s.l.], v. 5, n. 3, p. 299-314, 1996.

JAVANMARD, M.; NEHI, H. M. **Solving interval type-2 fuzzy linear programming problem with a new ranking function method**. In: Iranian Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems (CFIS), 5, 2017, Tehran, **Proceedings [...]**, Iran: IEEE, 2017.

JENSEN, W.A. *et al.* . Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review. **Journal of Quality Technology**, [s.l.], v. 38, p. 349–364, 2006.

KAHRAMAN, C.; GULBAY, M.; BOLTURK, E. Fuzzy Shewhart control charts. **Fuzzy Statistical Decision-Making**, [s.l.], v. 343, n. 1, p. 263-280, 2016.

KAHRAMAN, C. *et al.* Fuzzy analytic hierarchy process with interval type-2 fuzzy sets. **Knowledge Based Systems**, [s.l.], v. 59, p. 48-57, 2014.

KAYA, I., ERDOGAN, M., YILDIZ, C. Analysis and control of variability by using fuzzy individual control charts. **Applied Soft Computing**, v. 51, n.2, p.370-381, 2017.

KAYA I.; KAHRAMAN, C. Process capability analyses with fuzzy parameters. **Expert Syst Appl**, New, York, v. 38, n. 9, p. 11918–11927, 2011.

KAYA I.; TURGUT, A. Design of variable control charts based on type-2 fuzzy sets with a real case study. **Soft Computing**, [s.l.], v. 25, n. 1, p. 613-633, 2021.

KHAN, M. Z.; KHAN, M. F.; ASLAM, M.; MUGHAL, A. R. A study on average run length of *fuzzy* EWMA control chart. **Soft Computing**, [s.l.], v. 26, n. 18, p. 9117–9124, 2022.

KHORMALI, A.; ADDEH, J. A Novel approach for recognition of control chart patterns: type-2 fuzzy clustering optimized support vector machine. **ISA Transactions**, Pittsburgh, v. 63, p. 256-264, 2016.

KOTHARI, C. **Research methodology: methods and techniques**. 2nd ed. New Delhi: New Age International, 2013.

LEONI, R. C. **Estudo do desempenho dos gráficos de controle quando a média do processo oscila de acordo com o modelo AR (1)**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica - Transmissão e Conversão de Energia) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP, 2011.

LOWRY, C. A. *et al.* A multivariate exponentially weighted moving average control chart. **Technometrics**, Washington, v. 34, n. 1, p. 46-53, 1992.

MACHADO, M.A.G. **Gráficos de Controle para o Monitoramento de Processos Multivariados**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Guaratinguetá, SP, 2009.

MENDEL, J. M. **Uncertain rule-based fuzzy logic systems: introduction and new directions**. New Jersey: Prentice Hall, 2001.

MENDEL, J. M.; JOHN, R. I. B. Type-2 fuzzy sets made simple. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 10, n. 2, p. 117-127, 2002.

MENDEL, J.; JOHN, R.; LIU, F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. **IEEE Transactions on Fuzzy systems**, New York, v. 14, n. 6, p. 808-821, 2006.

MENDES, A.S. **Gráficos de controle fuzzy para o monitoramento da média e amplitude de processos univariados**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Guaratinguetá, SP, 2019.

MENDES, A. S.; MACHADO, M. A. G.; ROCHA RIZOL, P. M. S. Fuzzy control chart for monitoring mean and range univariate processes. **Revista Pesquisa Operacional**, Rio de Janeiro, v. 39, n. 2, p. 339-357, 2019.

MIGUEL, P. A. C. *et al.* **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. 2.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

MITROFF, I. I.; BETZ, F.; PONDY, L. R.; SAGASTI, F. On managing science in the system age: two schemas for the study of science as a whole system phenomenon. **Interfaces**, [s.l.], v. 4, n. 3, p. 46-58, 1974.

MONTGOMERY, D.C. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. 7a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

OAKLAND, J.S. **Statistical process control**. 6th ed. Burlington: Butterworth-Heinemann, 2008.

OZDEMIR, A. Development of fuzzy \bar{X} – S control charts with unbalanced fuzzy data. **Soft Computing**, [s.l.], v. 25, n. 5, p. 4015–4025, 2021.

PASTUIZACA FERNÁNDEZ, M. N.; GARCIA, A. C.; BARZOLA, O. R. Multivariate multinomial T^2 control chart using fuzzy approach. **International Journal of Production Research**, London, v. 53, n. 7, p. 2225–2238, 2015.

QIN, R.; LIU, Y. K.; LIU, Z. Q. Methods of critical value reduction for type-2 fuzzy variables and their applications. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, [s.l.], v. 235, p. 1454-1481, 2011.

RAZALI, N. H. M. *et al.* Interval type-2 fuzzy standardized cumulative sum control charts in production of fertilizers. **Mathematical Problems in Engineering**, [s.l.], v. 2021, p. 1-20, 2021.

ROCHA RIZOL, P.M.S. **Arquitetura de um controlador fuzzy tipo-2 intervalar em hardware analógico**. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia Eletrônica e Computação, Área de Dispositivos e Sistemas Eletrônicos) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, 2011.

ROCHA RIZOL, P. M. S ; MESQUITA, L.; SAOTOME, O. Lógica fuzzy tipo-2. **Revista SODEBRAS**, [s.l.], v.6, p. 27-46, 2011.

ROSS, T. J. **Fuzzy logic with engineering applications**. United States of America: McGraw-Hill, 1995.

RUIZ, J. A. **Metodologia científica: guia para eficiência nos estudos**. 5ª edição. São Paulo: Atlas, 2002.

SAMOHYL, Robert Wayne. **Controle estatístico de qualidade**. São Paulo: Elsevier, 2009.

SANDRI, S.; CORREA, C. Lógica nebulosa . In: Escola de Redes Neurais, 5,1999, São José dos Campos – SP, **Anais [...]**, São José dos Campos: ITA, 1999.

SENTÜRK, S.; ERGINEL, N. Development of fuzzy \bar{X} -R and \bar{X} -S control charts using α -cuts. **Information Sciences**, New York, v. 179, n. 10, p. 1542-1551, 2009.

SENTÜRK, S. *et al.* Fuzzy exponentially weighted moving average control chart for univariate data with a real case application. **Applied Soft Computing**, [s.l.], v. 22, p. 1-10, 2014.

SENTURK S.; ANTUCHEVICIENE J. Interval type-2 fuzzy c-control charts: An application in a food company. **Informatica**, [s.l.], v. 28, n. 2, p. 269–283, 2017.

SHEWHART, W. A.; DEMING, W. E. **Statistical method from the viewpoint of quality control**. Washington: Lancaster Press, 1939.

SILER, W.; BUCKLEY, J. J. **Fuzzy expert systems and fuzzy reasoning**. Birmingham: John Wiley & Sons, Inc., 2005.

STAPENHURST, T. **Mastering statistical process control: a handbook for performance improvement using cases**. Burlington: Elsevier, 2005.

TALEB, H.; LIMAM, M.; HIROTA, K. Multivariate fuzzy multinomial control charts. **Quality Tecnology & Quantitative Management**, Hsinchu, v. 3, n. 4, p. 437-453, 2006.

TALEB, H. Control charts applications for multivariate attribute processes. **Computers & Industrial Engineering**, New York, v. 56, n. 1, p. 399-410, 2009.

TEKSEN, H.; ANAGÜN, A. S. Different methods to fuzzy \bar{X} -R control charts used in production: interval type-2 fuzzy set example. **Journal of Enterprise Information Management**, [s.l.], v. 48, n. 2, p. 510-520, 2018b.

TEKSEN, H.; ANAGÜN, A. S. Interval type-2 fuzzy c-Control charts using ranking methods. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, [s.l.], v. 48, n. 2, p. 510-520, 2019.

TEKSEN, H.; ANAGÜN, A. S. Interval type-2 fuzzy c control charts using likelihood and Reduction Methods. **Soft Computing**, [s.l.], v. 22, n. 15, p. 4921-4934, 2018a.

TEKSEN, H.; ANAGÜN, A.S. Type-2 fuzzy control charts using likelihood and defuzzification methods. In: Conference Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT), 10, 2017, Varsóvia, **Proceedings of the [...]**, Varsóvia: Springer, 2017.

WANG, J. H.; RAZ, T. On the construction of control charts using linguistic variables. **International Journal of Production Research**, London, v. 28, n. 3, p. 477-487, 1990.

WANG, T. Y.; CHEN, L. H. Mean shifts detection and classification in multivariate process. **Journal of Intelligent Manufacturing**, [s.l.], v. 13, p. 211-221, 2002.

WOODALL, W.; MONTGOMERY, D. C. Research issues and ideas in statistical process control. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, v. 31, n. 4. p. 376-386, 1999.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control** , New York, v. 8, n.3, p. 338-353, 1965.

ZADEH, L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v.1, n. 1, p. 3-28, 1978.

ZARANDI, M. H. F.; NAJAFI, S. A type-2 fuzzy-statistical clustering approach for estimating the multiple change points in a process mean with monotonic change. **The**

International Journal of Advanced Manufacturing Technology, [s.l.], v.77, p. 1751-1765, 2015.

ZARANDI, M. H. F.; ALAEDDINI, A. A general fuzzy-statistical clustering approach for estimating the time of change in variable sampling control charts. **Informations Sciences**, New York, v. 180, n. 16, p. 3033-3044, 2010.

ZHANG, C. *et al.* Analysis of the difference between footprints of uncertainty for interval type-2 fuzzy PI controllers. **Soft Computing**, [s.l.], v. 26, p. 9993–10005, 2022

**APÊNDICE A – Algoritmos de Simulação do NMA para Avaliação de
Desempenho dos Gráficos de Controle Propostos**

**Código em R para o cálculo do NMA do Gráfico de Controle IT2TFN \bar{X} (em
função da amplitude) em Função da FOU**

```

Começo=Sys.time()

n=5
l = c()

set.seed(39)

#Parametros Fuzzy
HA=1
FOU=0.3
L1=0.45
L2=0.95

#Parametros do Processo
k=3
mediaprocesso=1000
desvioprocesso=4
LSC=mediaprocesso + k*desvioprocesso/sqrt(n)
LIC=mediaprocesso - k*desvioprocesso/sqrt(n)

#Lista do NMA
NMA=c(1:21)
names(NMA) = c("0.0", "0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5", "0.6",
               "0.7", "0.8", "0.9", "1.0", "1.1", "1.2", "1.3",
               "1.4", "1.5", "1.6", "1.7", "1.8", "1.9", "2.0")

for (x in 1:21){
  for (i in 1:10000) {
    for (j in 1:5000) {

      delta=(x-1)*0.1

      gerador=rnorm(n,mean=mediaprocesso,sd=desvioprocesso)
      C=gerador+(delta*desvioprocesso)

      Incerteza1=runif(n,0,1)
      Incerteza2=runif(n,0,1)

      A=C-(Incerteza1*L1)
      E=C+(Incerteza2*L2)

      B=FOU*(C-A)+A
      D=FOU*(C-E)+E
    }
  }
}

```

```

xbarA=mean(A)
xbarB=mean(B)
xbarC=mean(C)
xbarD=mean(D)
xbarE=mean(E)

R1=(((xbarE-xbarA)+(xbarC-xbarA))/3)+xbarA
R2=HA*(((xbarD-xbarB)+(xbarC-xbarB))/3)+xbarB

MediaDefuzzificada=(R1+R2)/2

if (MediaDefuzzificada < LIC | MediaDefuzzificada > LSC)
  break
}

I[i] = as.integer(j)
}

NMA[x] = sum(1)/10000
}
lista=list(NMA)
names(lista)=c("NMA ")
Tabela = data.frame(lista)
View(Tabela)

Fim=Sys.time()
Tempo=(Fim-Começo)
show(Tempo)

```

Código em R para o cálculo do NMA dos Gráficos de Controle IT2TFN \bar{X} -R em função de δ e λ

```

Começo=Sys.time()

n=5
Na = c()

#Parametros Fuzzy
HA=1
FOU=0.3
L1=0.05
L2=0.05
w=5.38

#Parametros do Processo
k=3.205
mediaprocesso=0
desvioprocesso=1
LSC=mediaprocesso + k*desvioprocesso/sqrt(n)
LIC=mediaprocesso - k*desvioprocesso/sqrt(n)
LSCr=w*desvioprocesso

#Lista do NMA
NMA=matrix(ncol=8,nrow=9)

rownames(NMA)= c("0.0", "0.2", "0.4", "0.6", "0.8", "1.0", "1.2", "1.4", "1.6")
colnames(NMA)= c("1.0", "1.1", "1.2", "1.3", "1.4", "1.5", "2.0", "2.5")

for (y in 1:8){
  for (x in 1:9){
    for (i in 1:10000) {
      for (j in 1:5000) {

        delta=(x-1)*0.2
        lambda=1+(y-1)*0.1

        if (y==7)
          lambda=2

        if (y==8)
          lambda=2.5

        gerador=rnorm(n,mean=(mediaprocesso+delta*desvioprocesso),sd=desvioprocesso*lam
bda)

        C=gerador

```

```

Incerteza1=runif(n,0,1)
Incerteza2=runif(n,0,1)

A=C-(Incerteza1*L1)
E=C+(Incerteza2*L2)

B=FOU*(C-A)+A
D=FOU*(C-E)+E

xbarA=mean(A)
xbarB=mean(B)
xbarC=mean(C)
xbarD=mean(D)
xbarE=mean(E)

R1=(((xbarE-xbarA)+(xbarC-xbarA))/3)+xbarA
R2=HA*(((xbarD-xbarB)+(xbarC-xbarB))/3)+xbarB

MediaDefuzzificada=(R1+R2)/2

rA=max(A)-min(E)
rB=max(B)-min(D)
rC=max(C)-min(C)
rD=max(D)-min(B)
rE=max(E)-min(A)

R1_A=(((rE-rA)+(rC-rA))/3)+rA
R2_A=HA*(((rD-rB)+(rC-rB))/3)+rB

AmpDefuzzificada=(R1_A+R2_A)/2

if (MediaDefuzzificada < LIC | MediaDefuzzificada>
LSC|AmpDefuzzificada>LSCr)
  break
}

Na[i] = as.integer(j)
}

NMA[x,y] = sum(Na)/10000
}
}
tabela1 = as.data.frame(t(NMA))

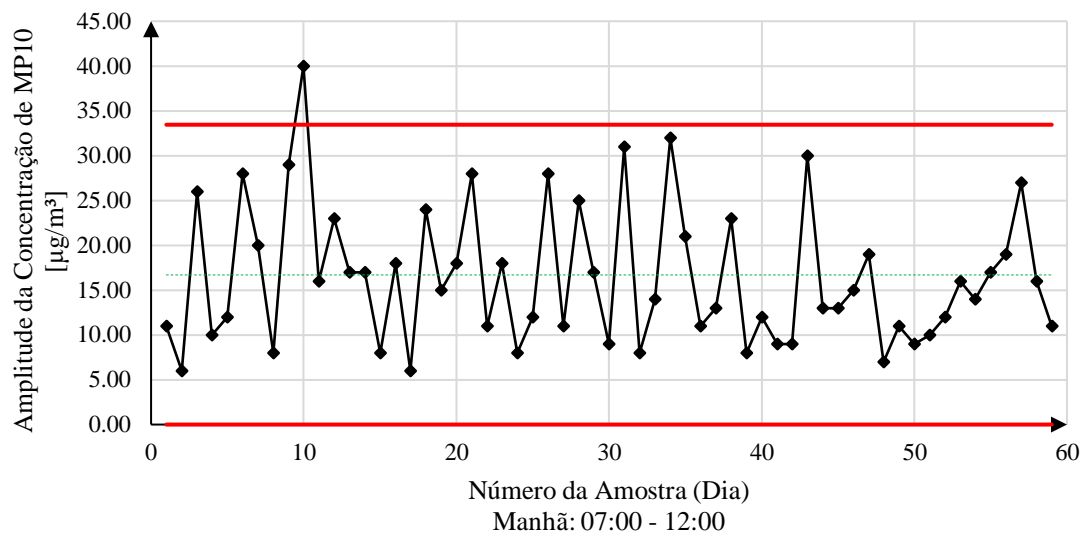
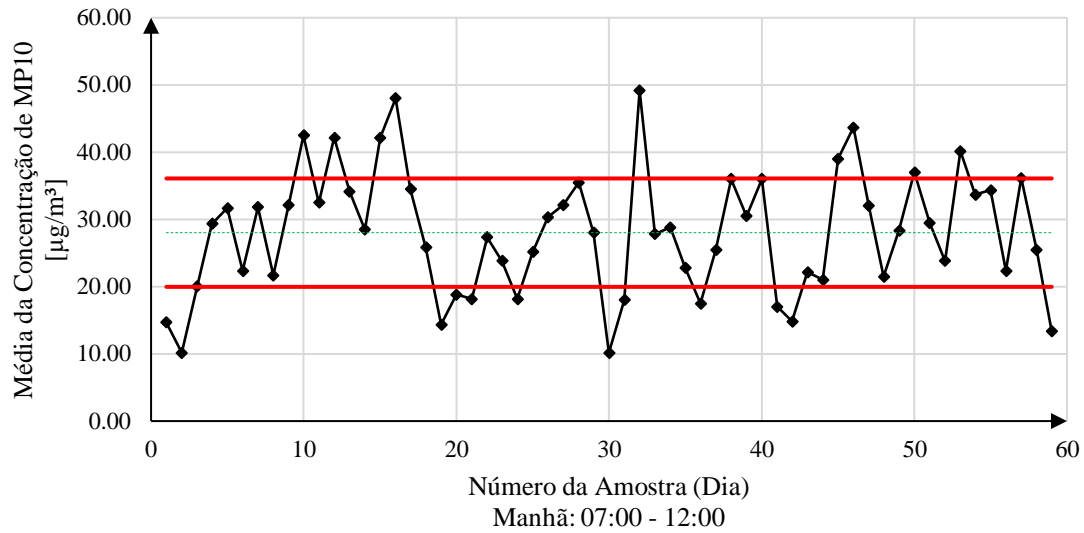
Fim=Sys.time()

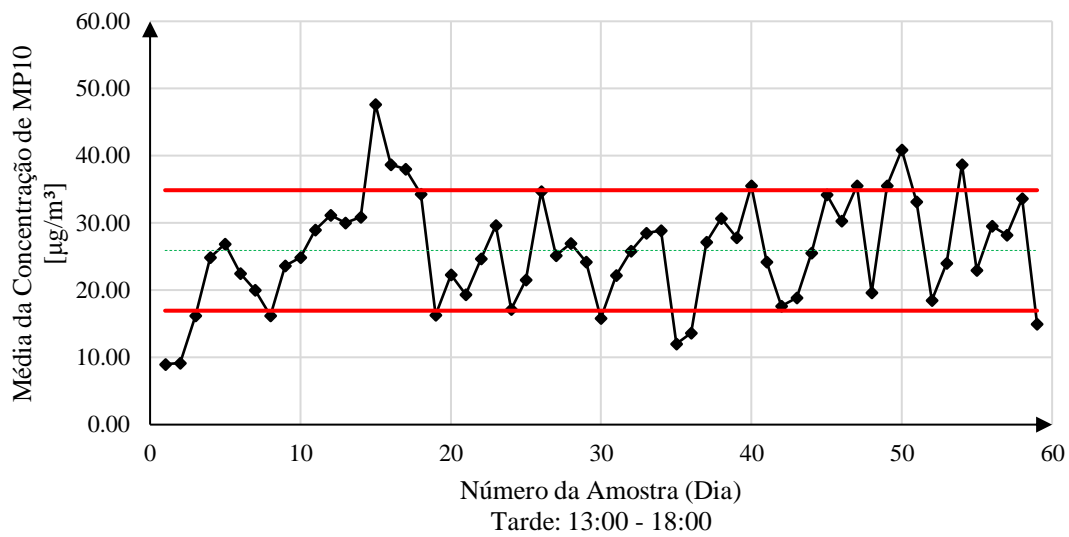
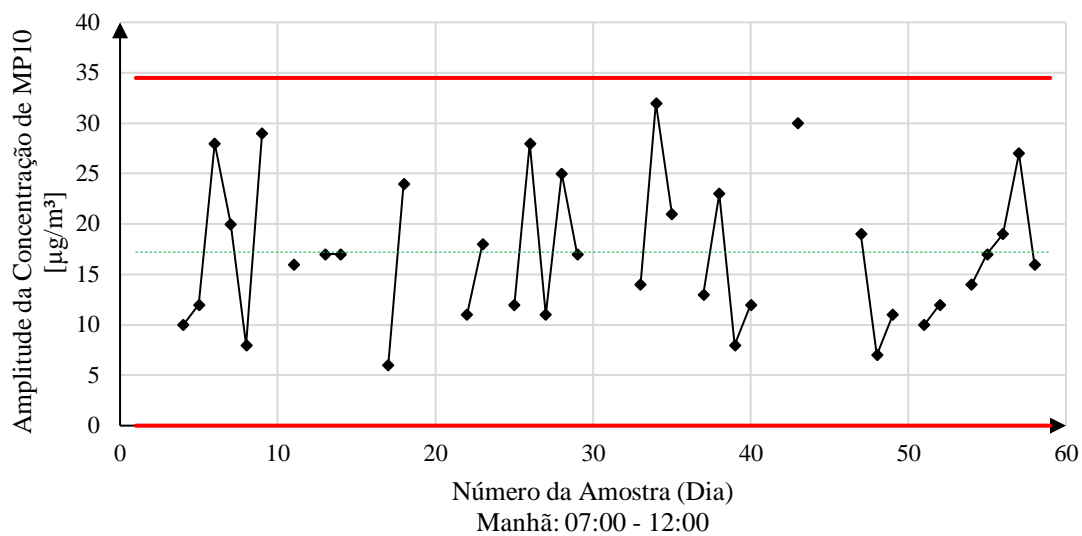
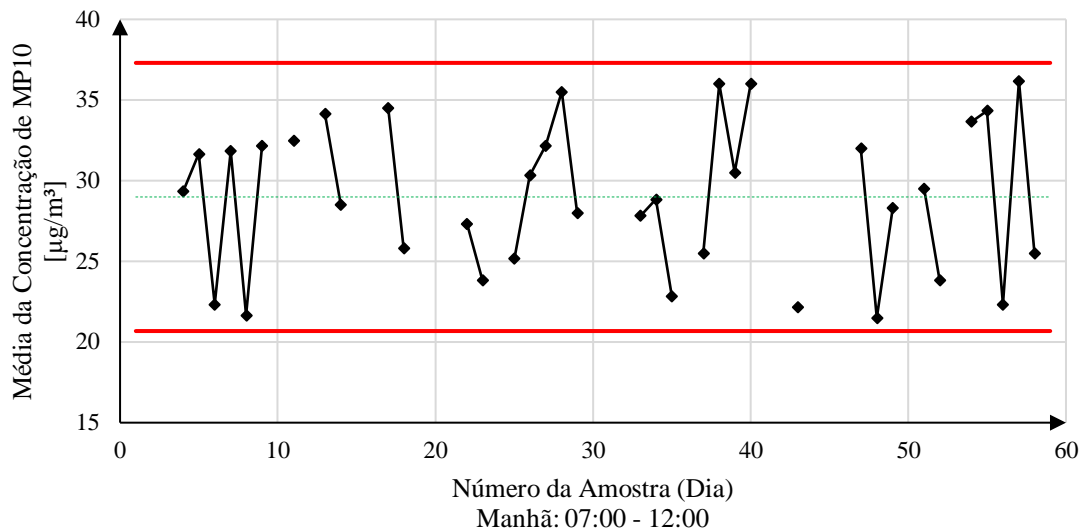
```

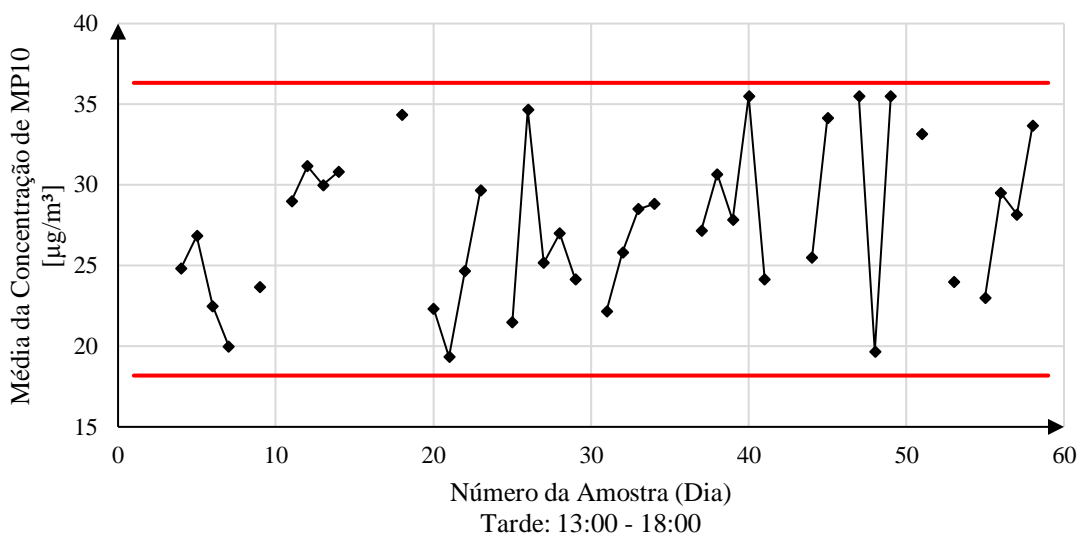
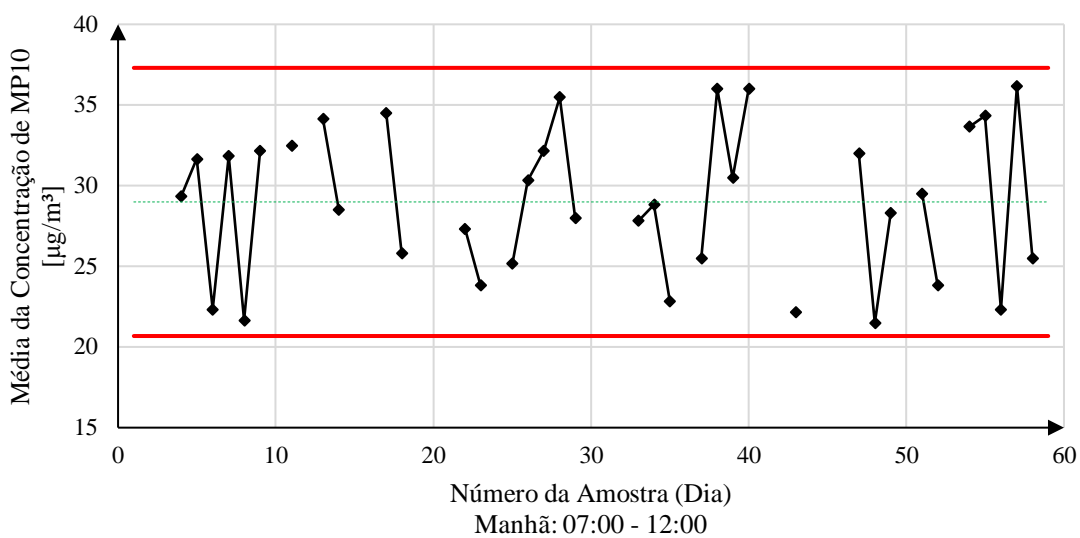
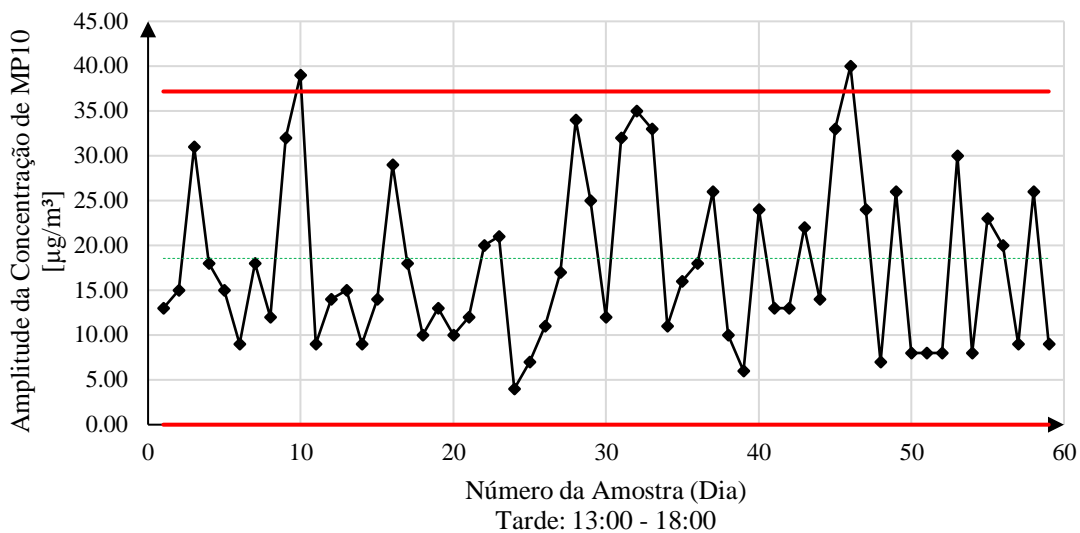
```
Tempo=(Fim-Começo)  
show(Tempo)
```

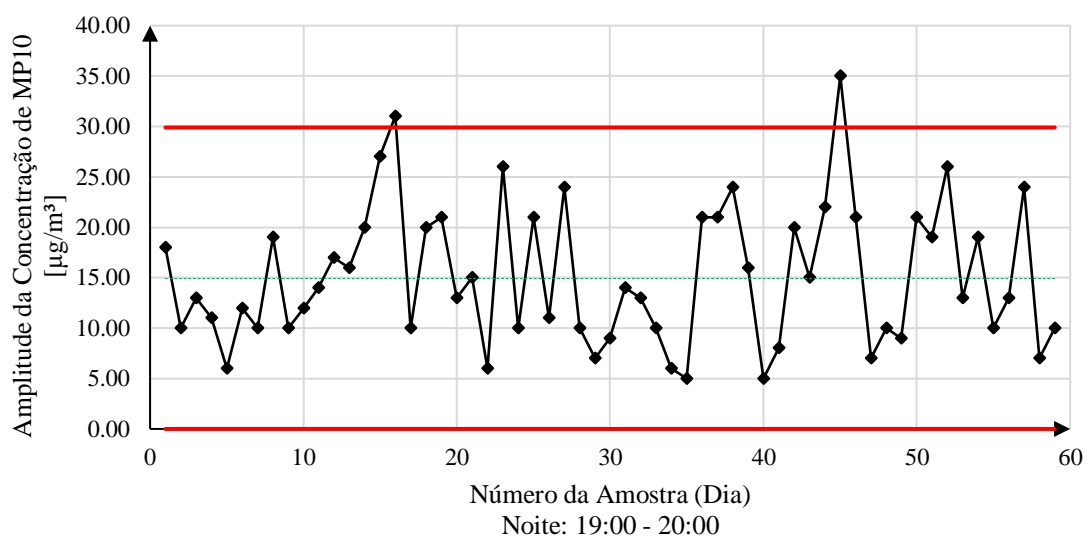
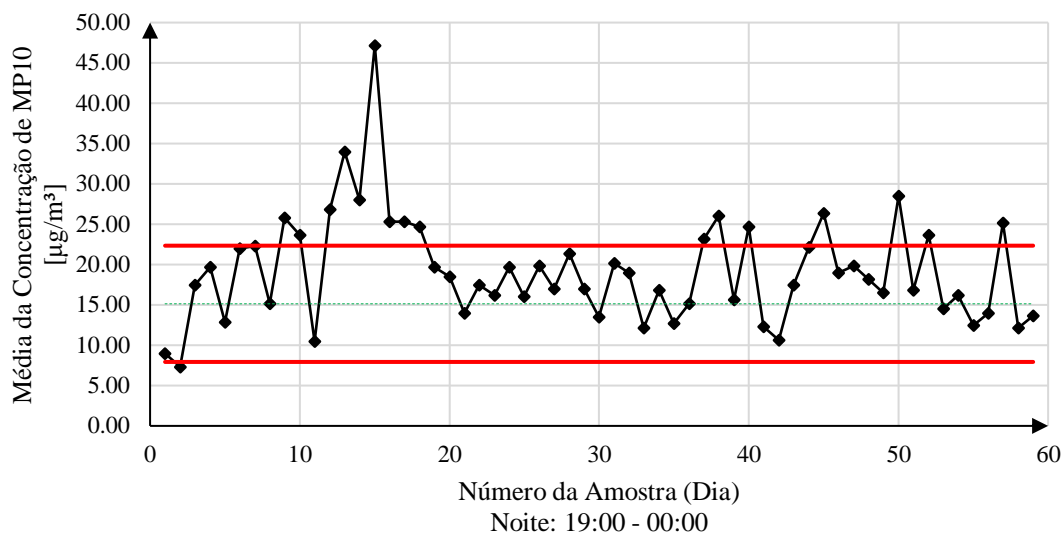
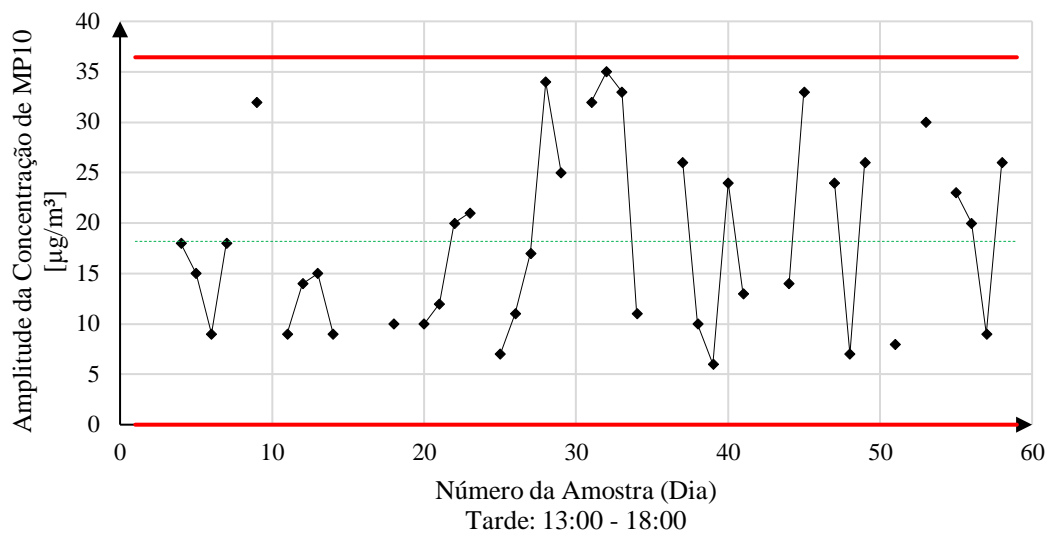
APÊNDICE B – Fase I dos Gráficos de Controle por Variáveis Aplicados aos Dados de Poluição Atmosférica

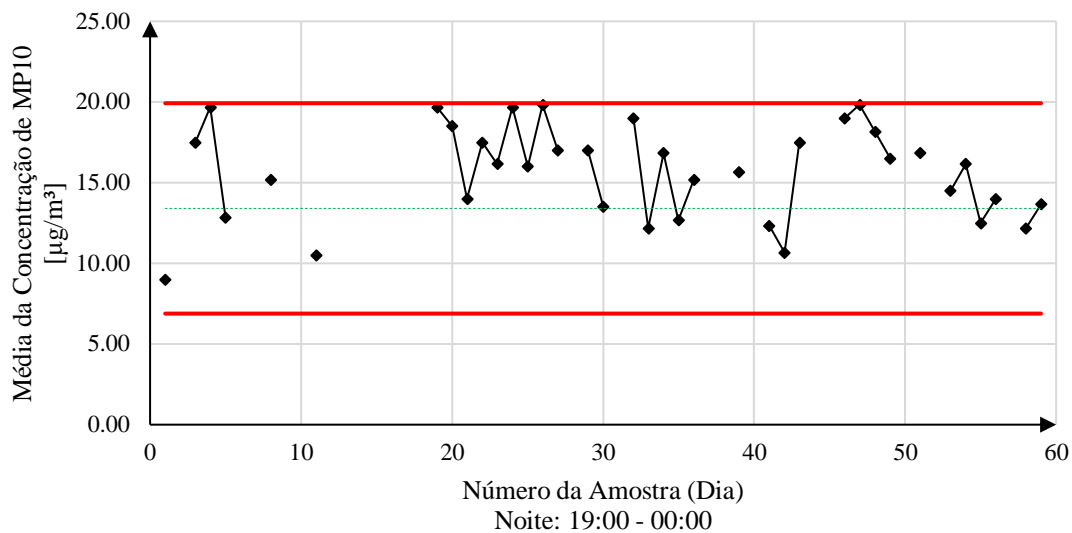
Gráficos de Controle X e R Tradicionais



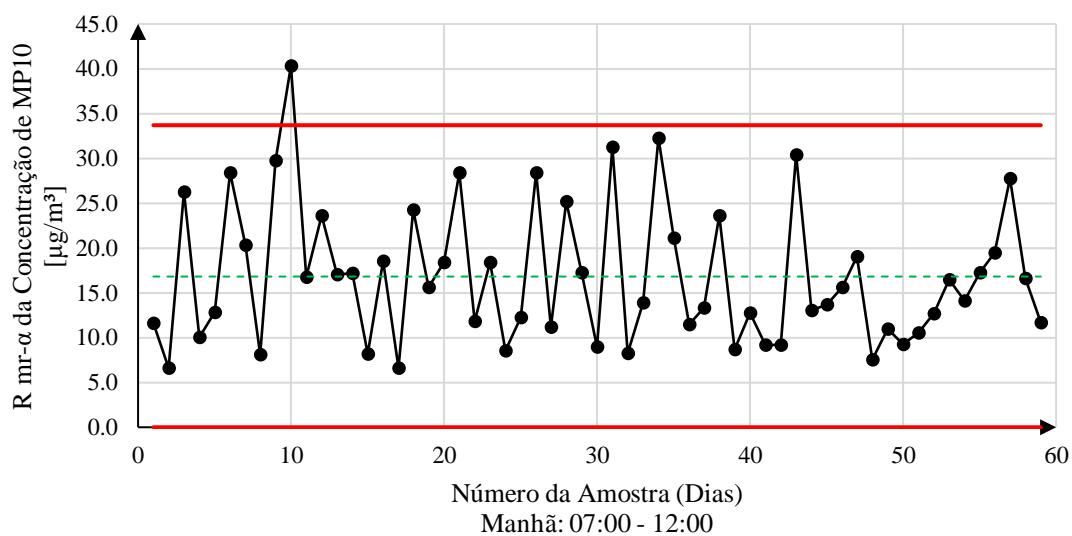
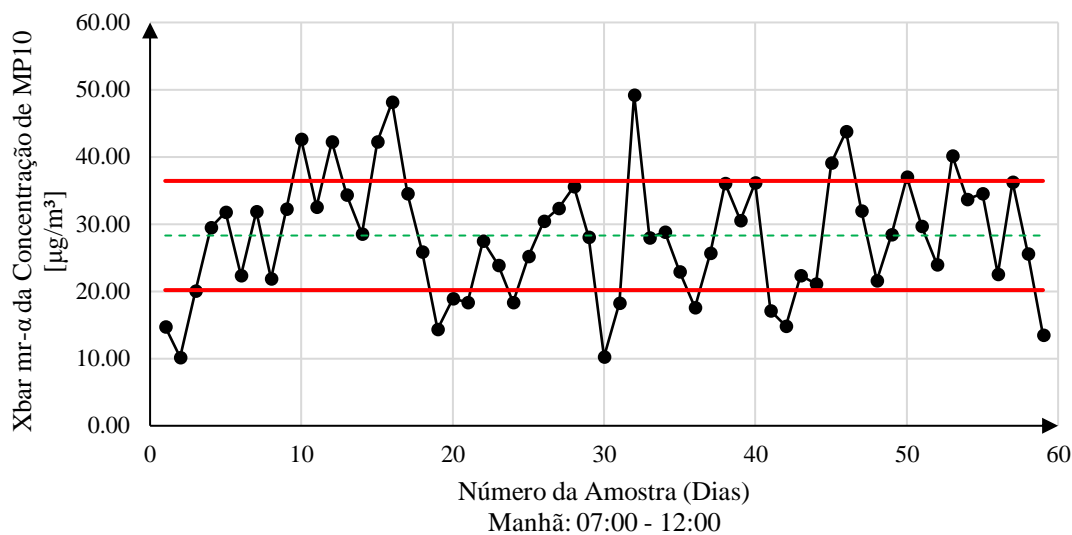


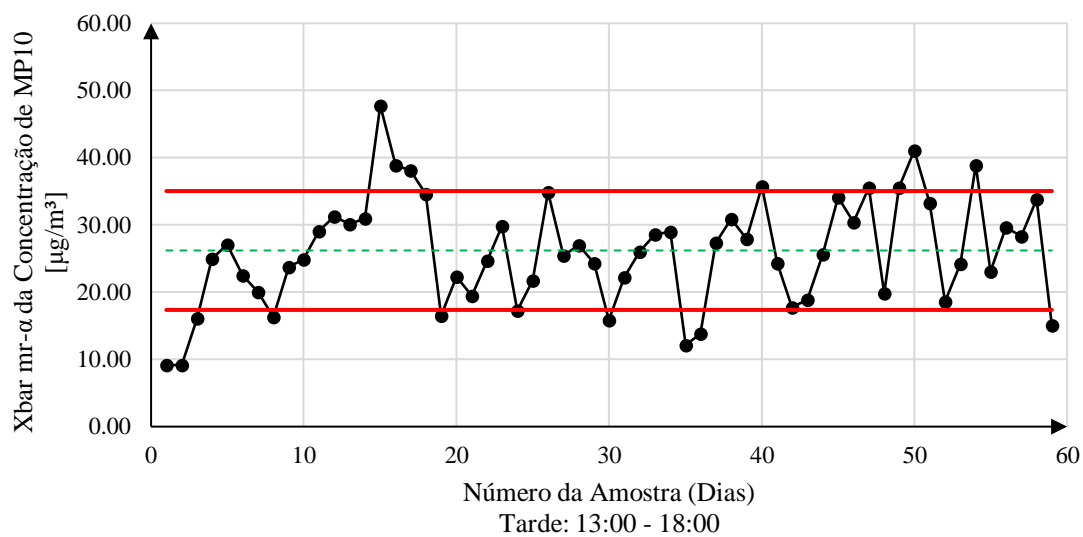
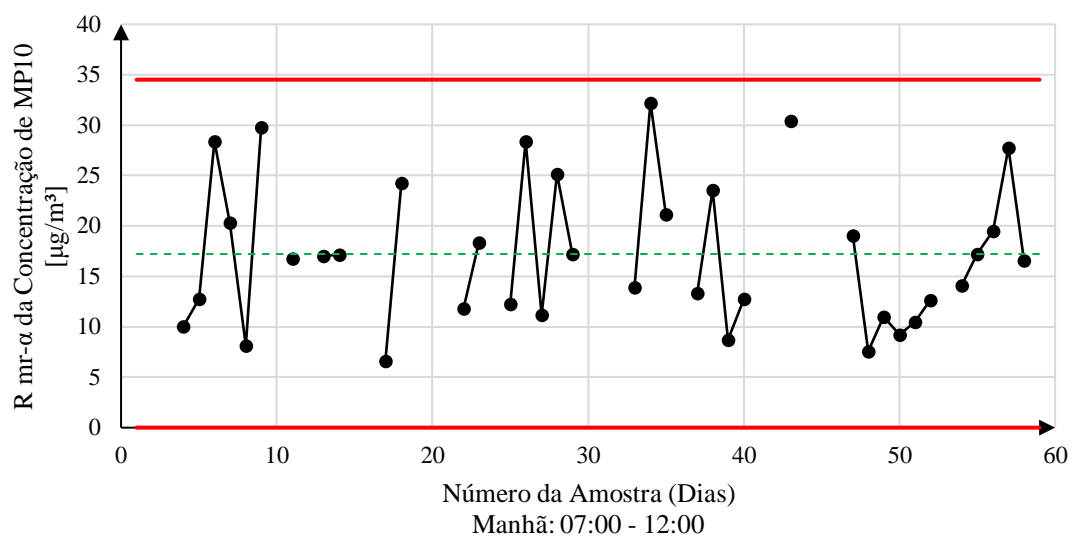
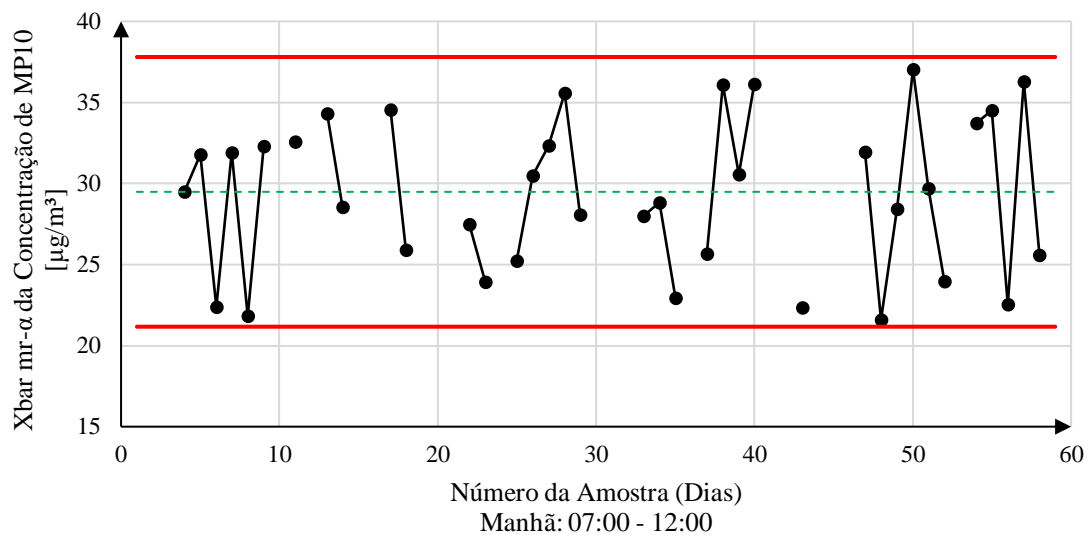


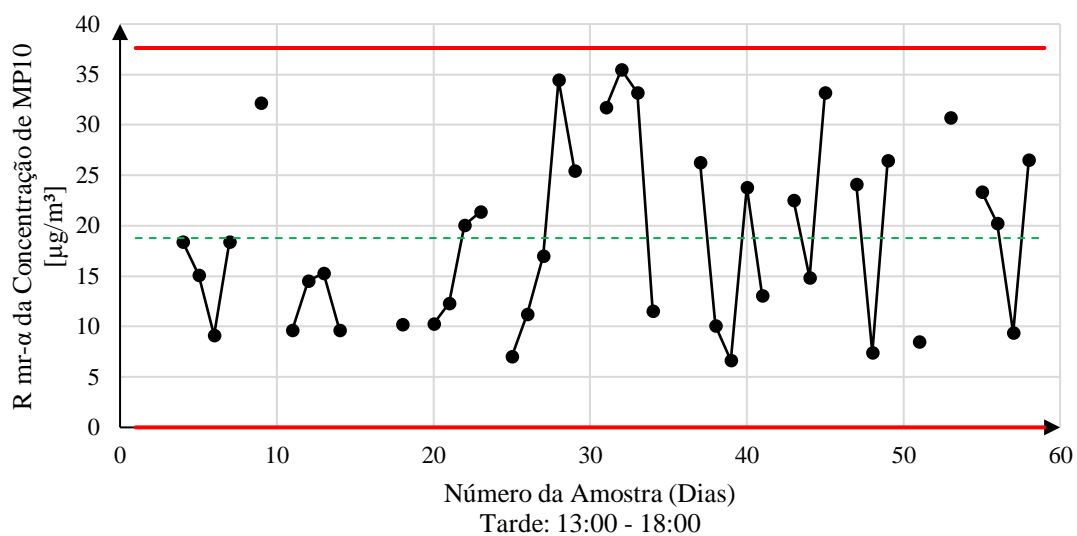
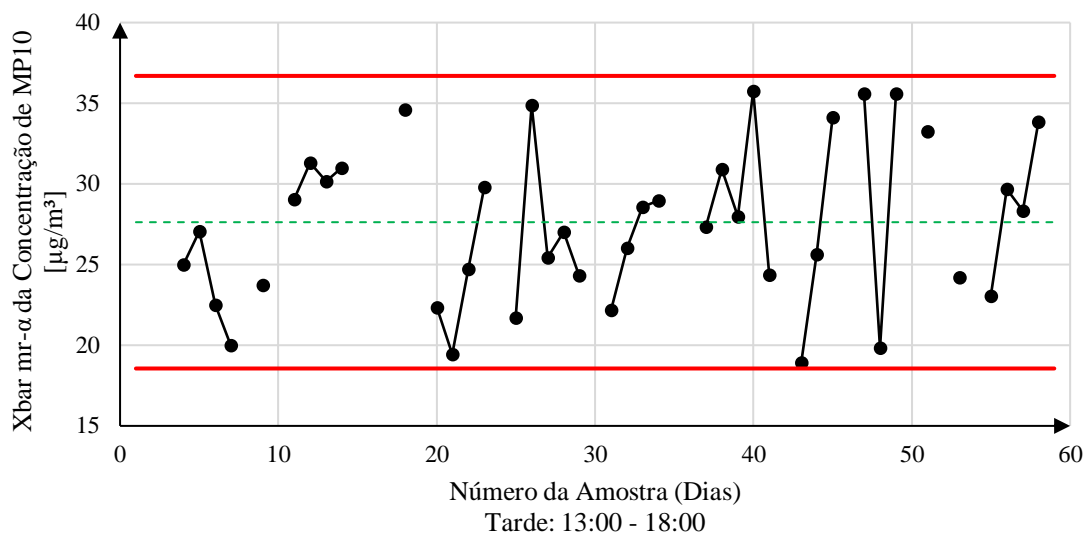
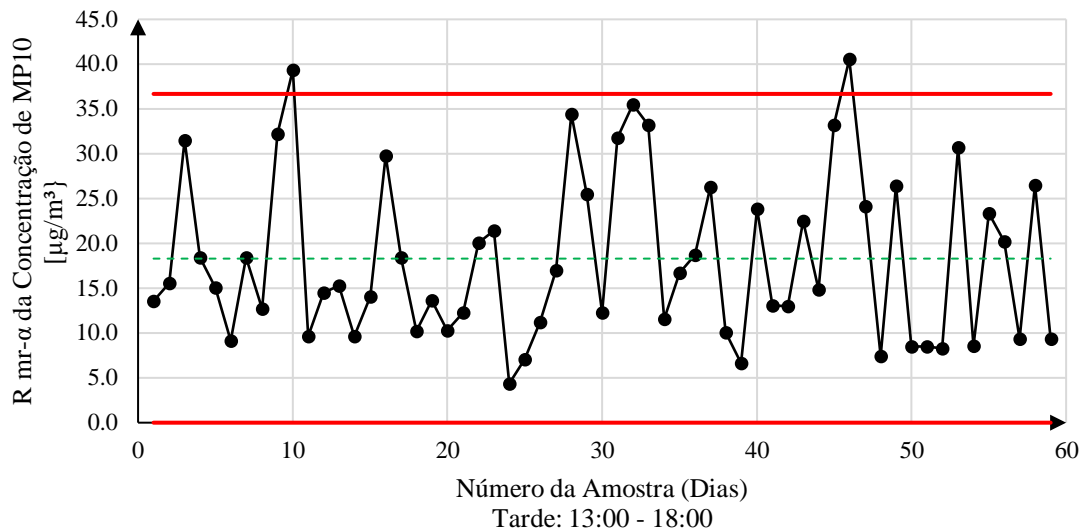


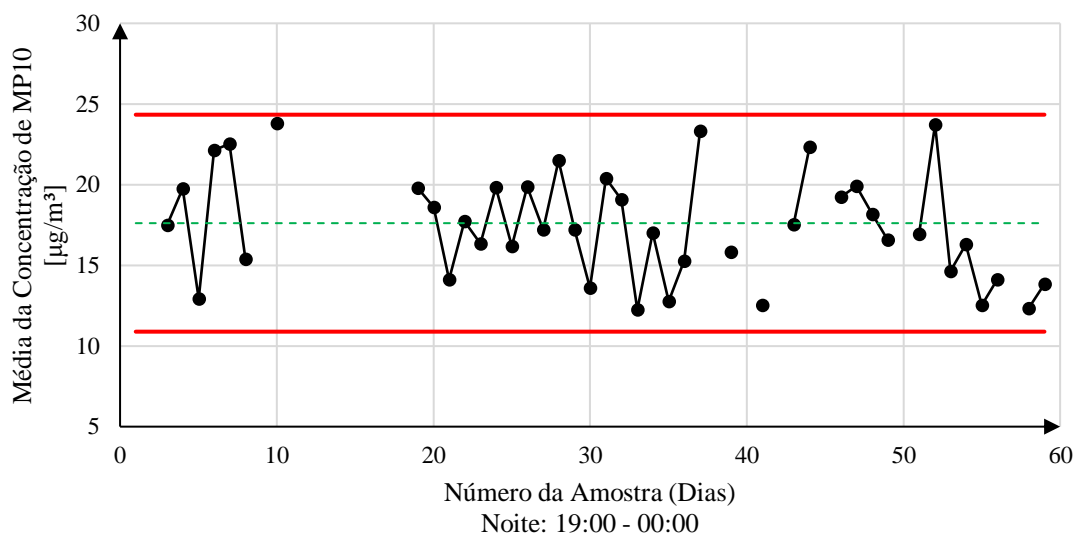
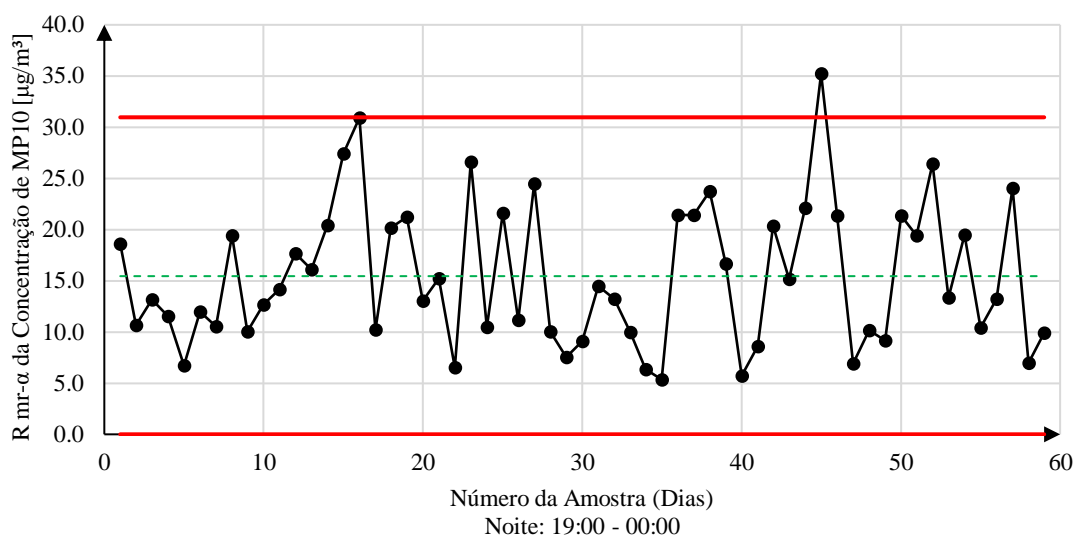
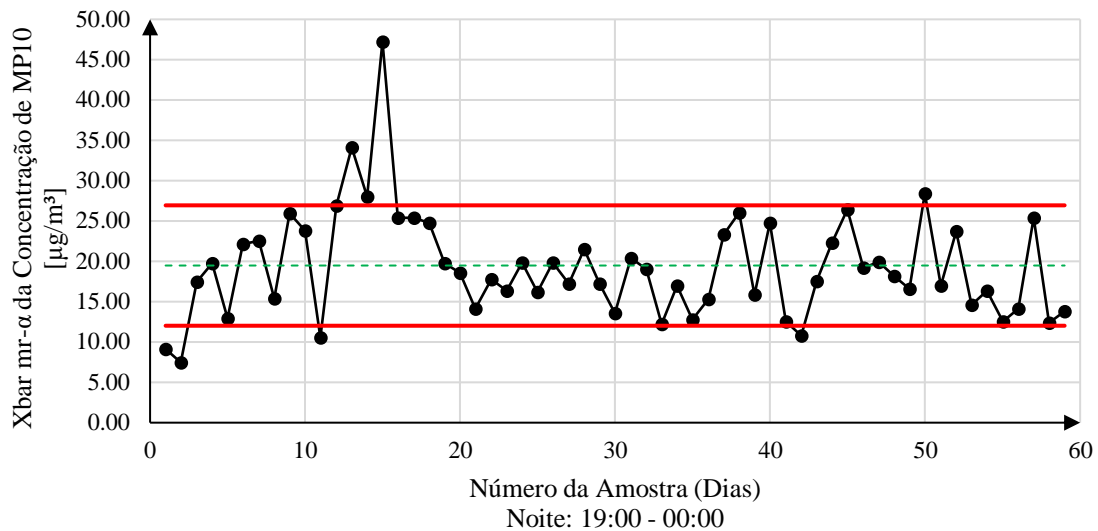


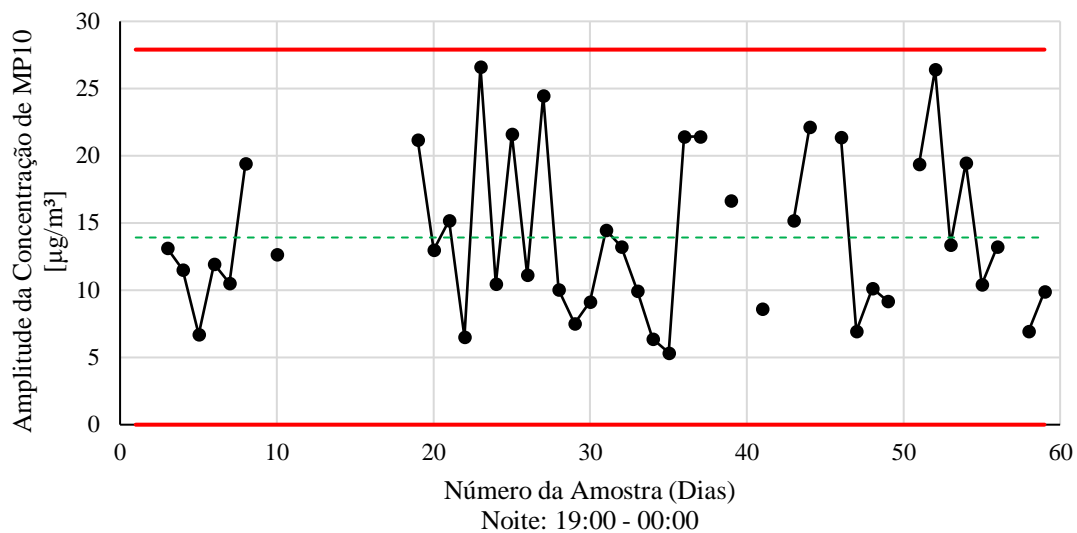
Gráficos de Controle \bar{X} e R TFN (fuzzy tipo-1)



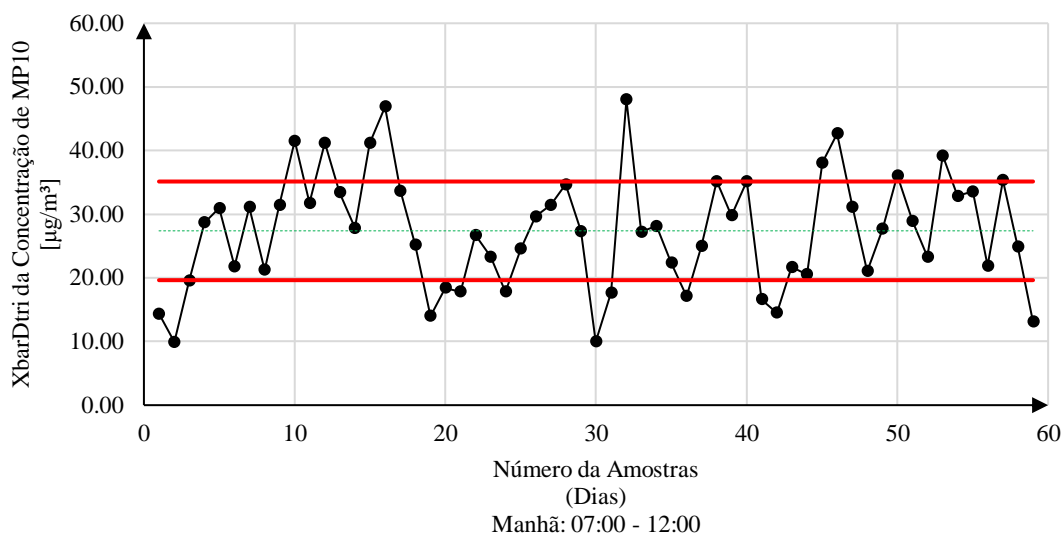


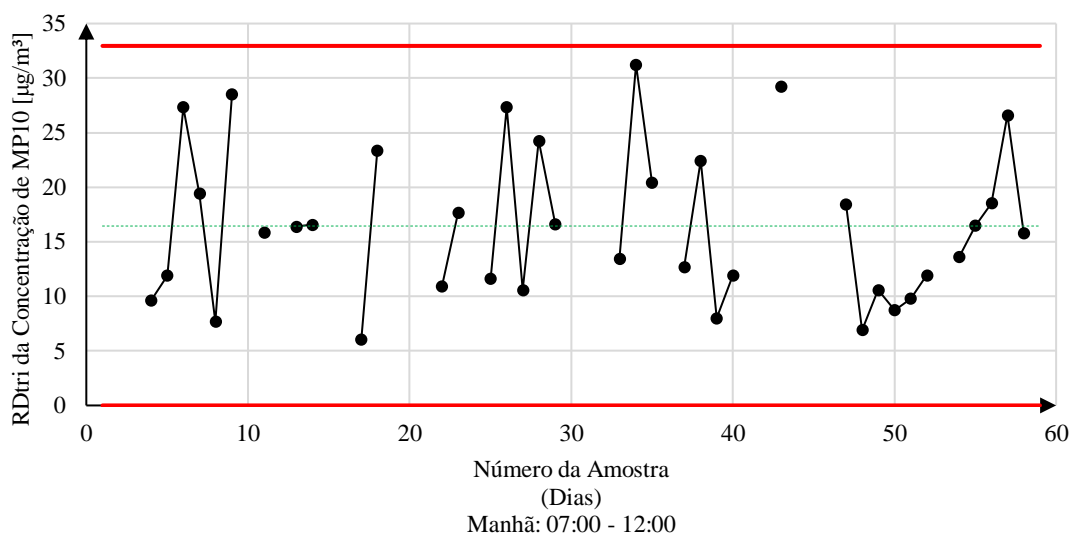
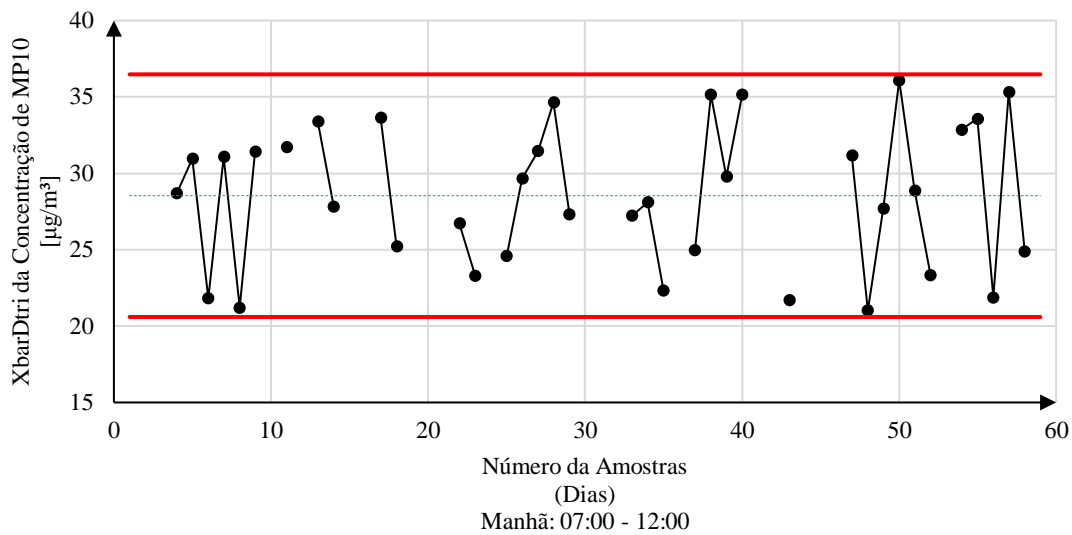
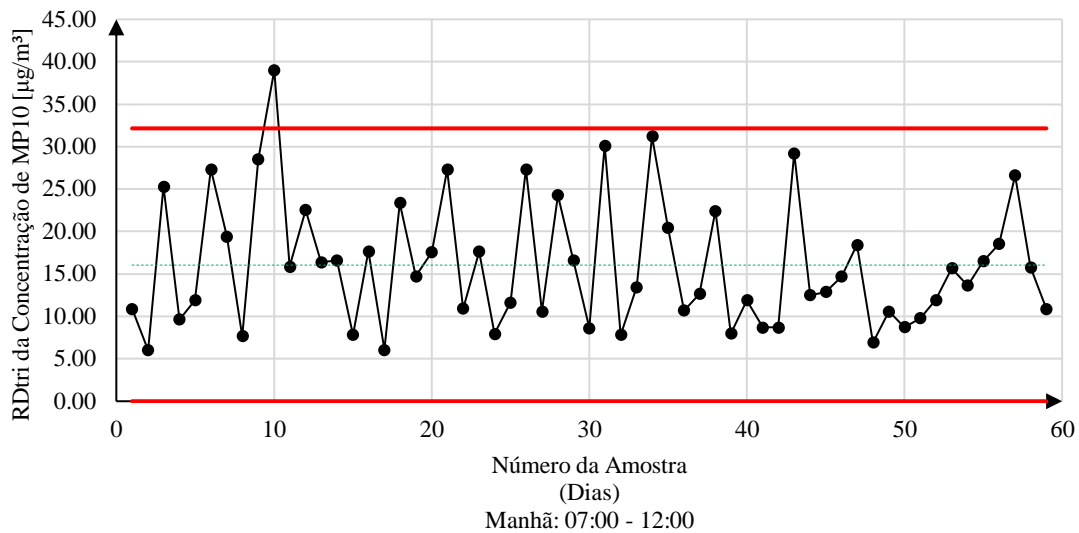


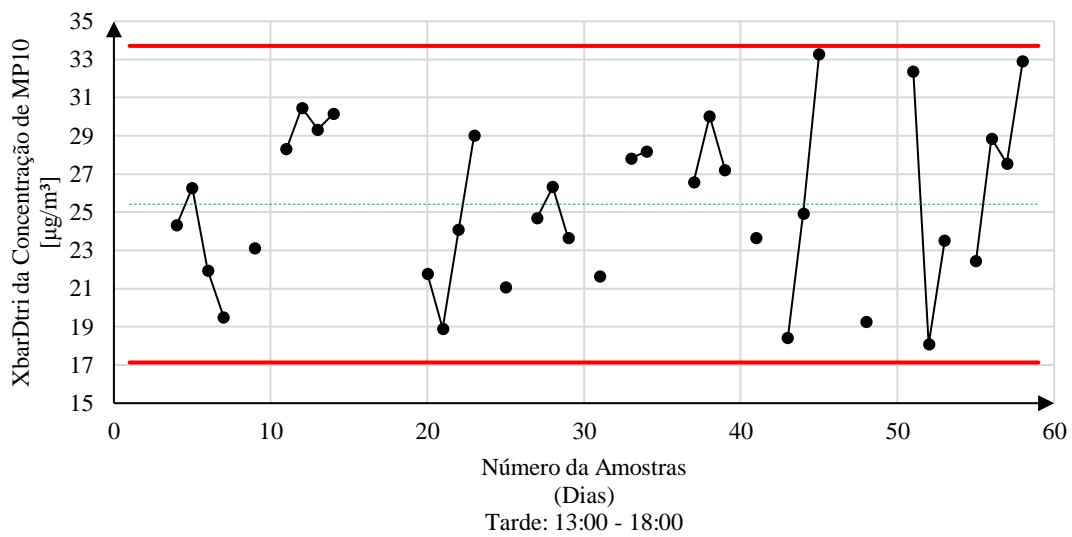
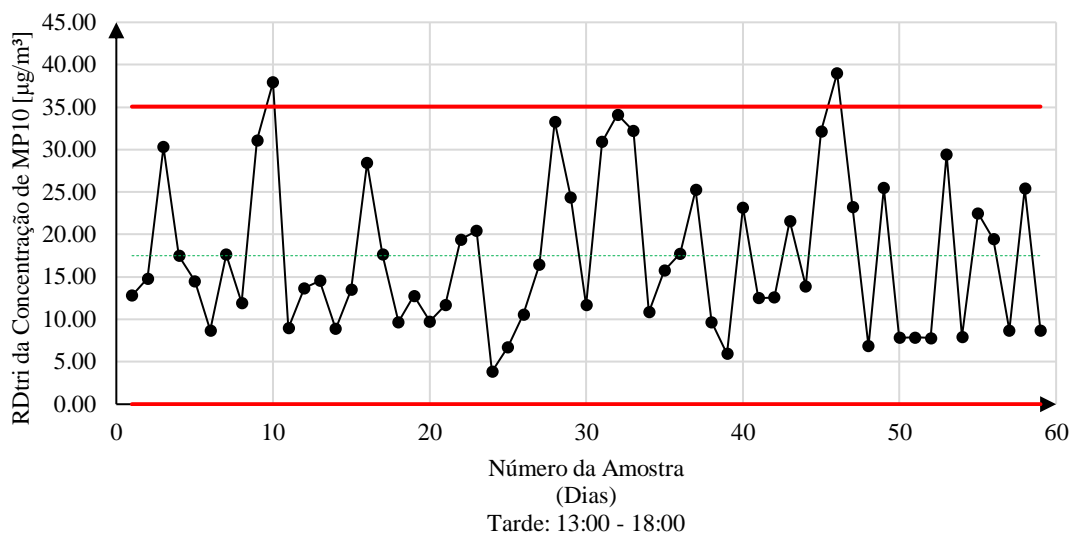
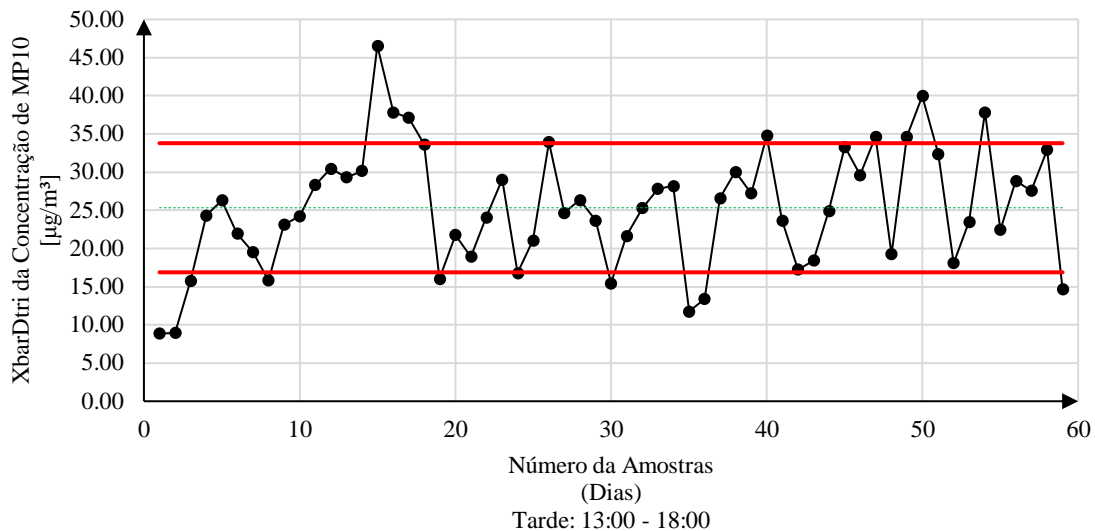


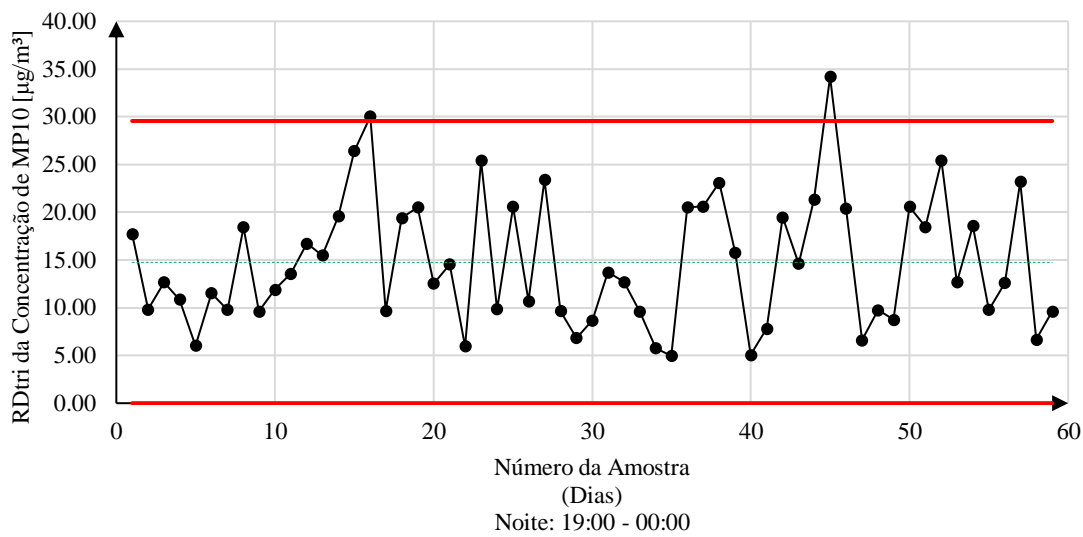
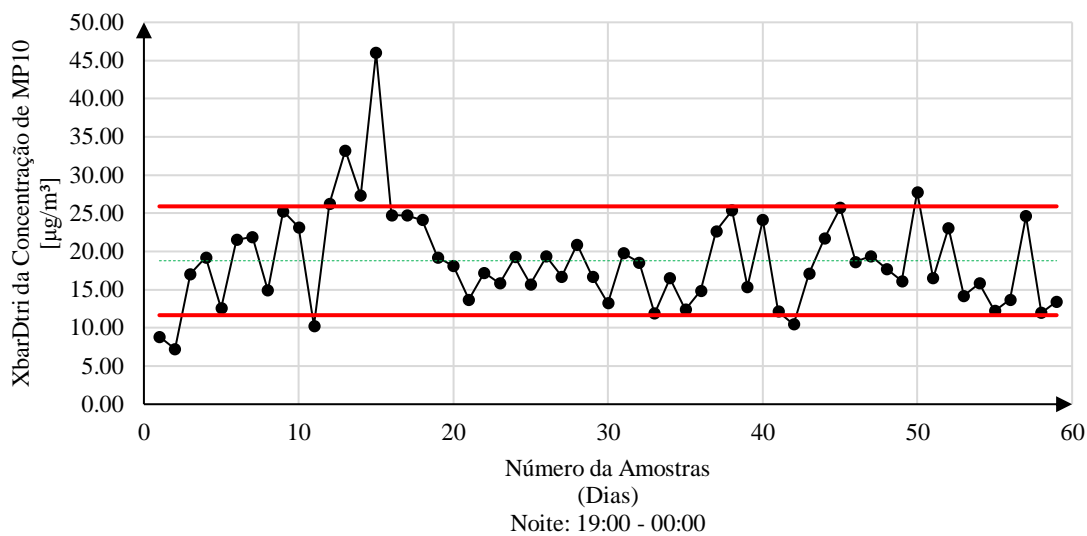
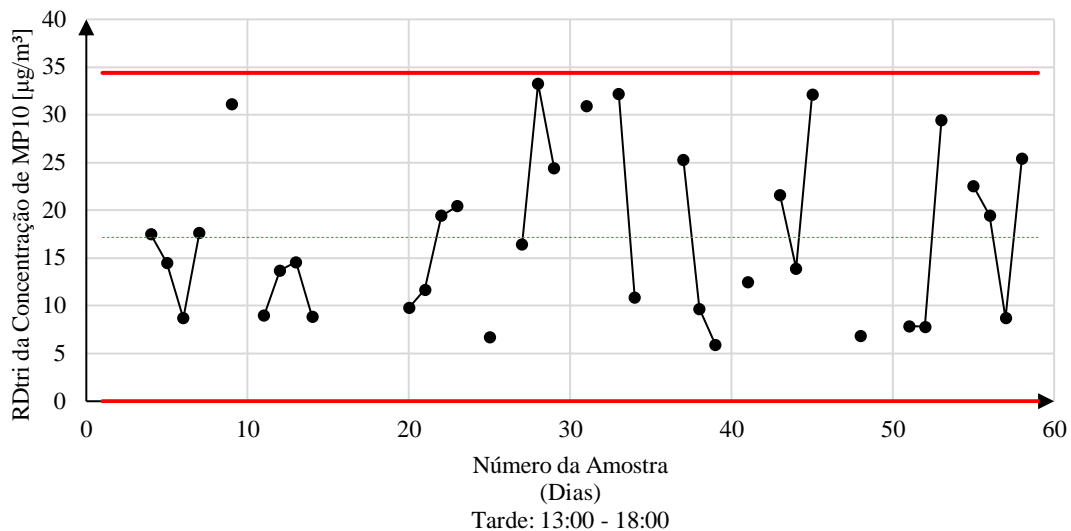


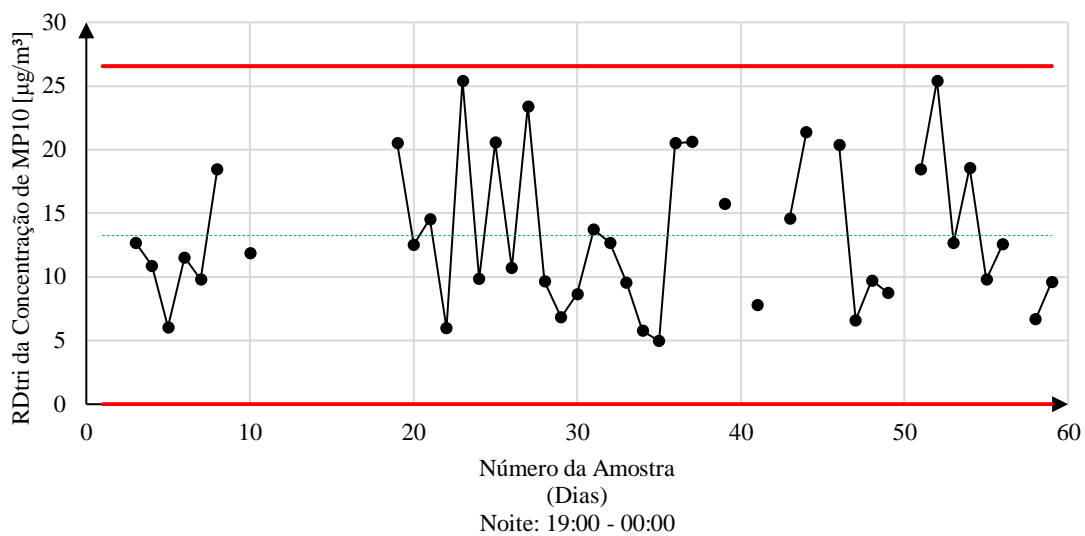
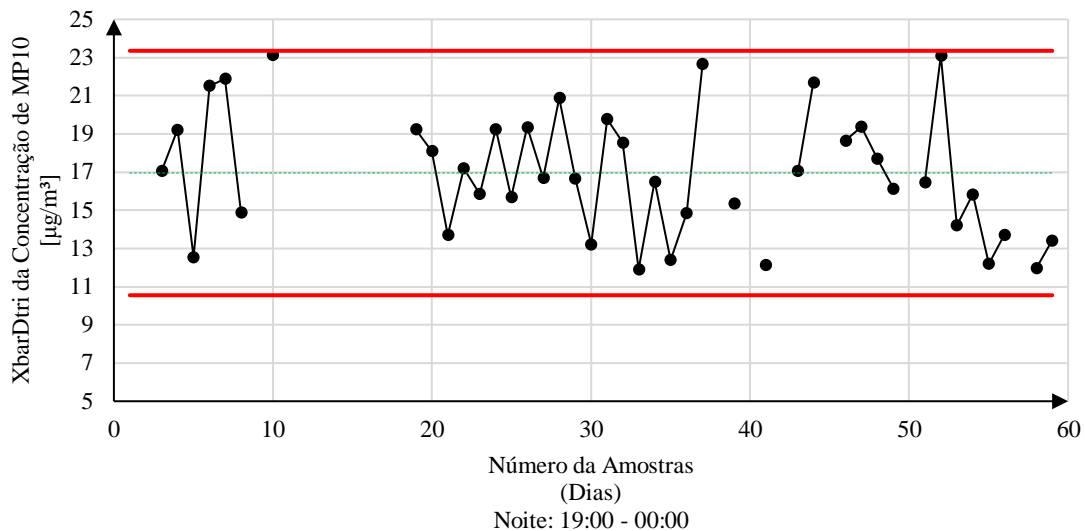
Gráficos de Controle X e R IT2TFN (*fuzzy tipo-2 intervalar*)



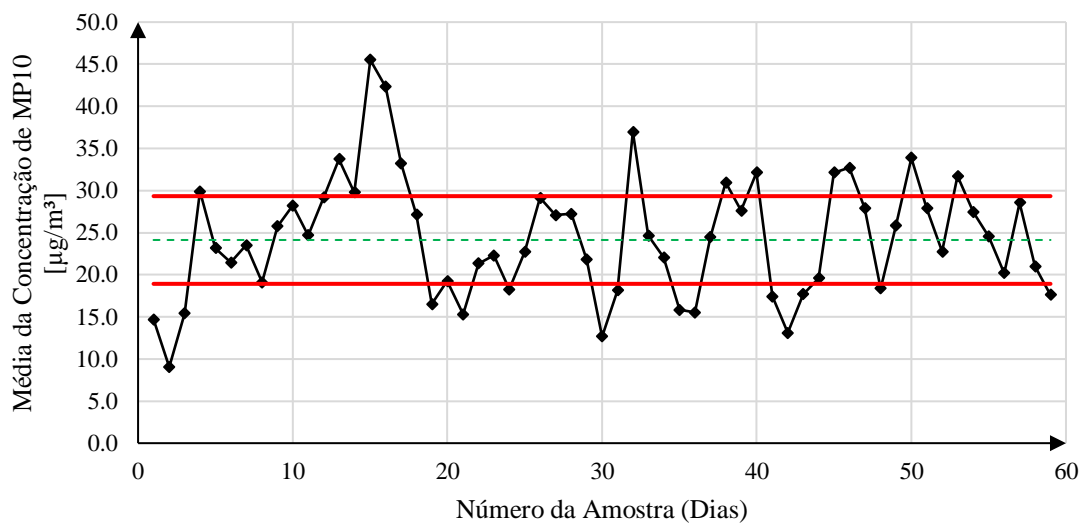


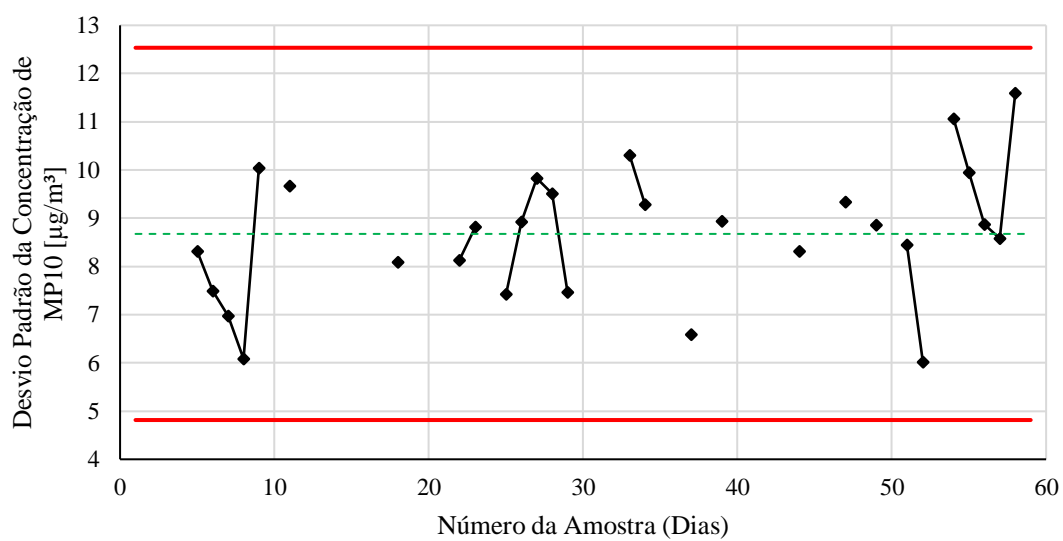
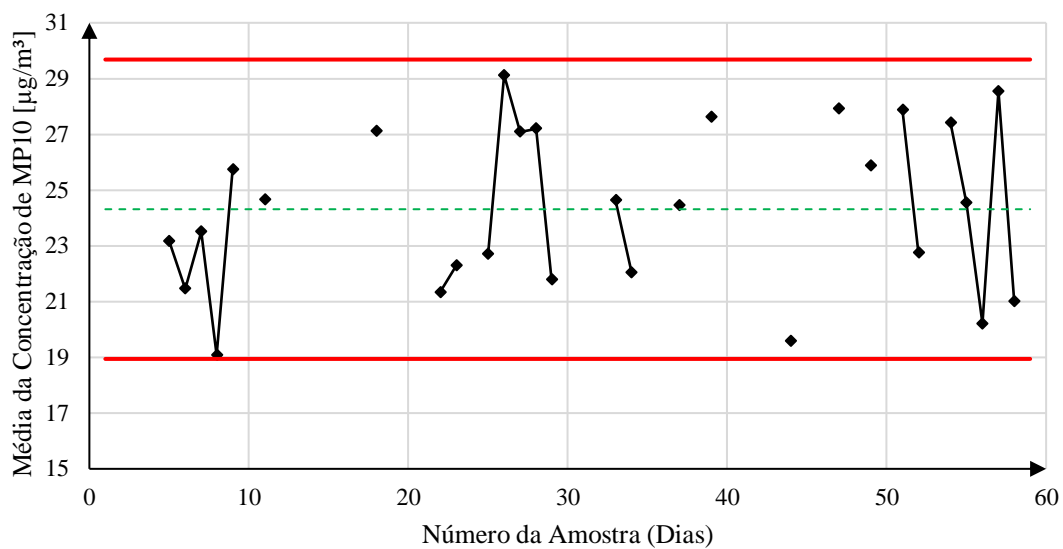
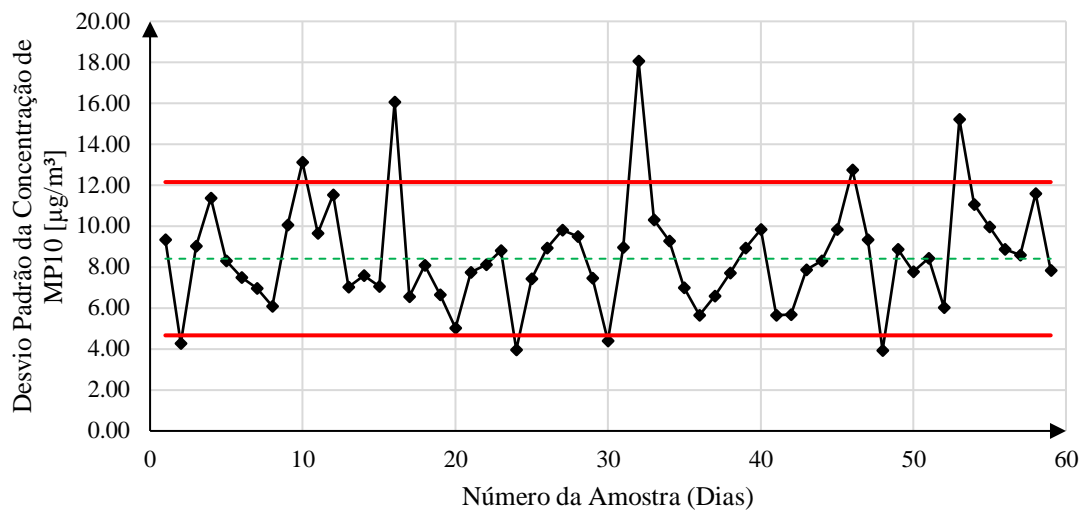




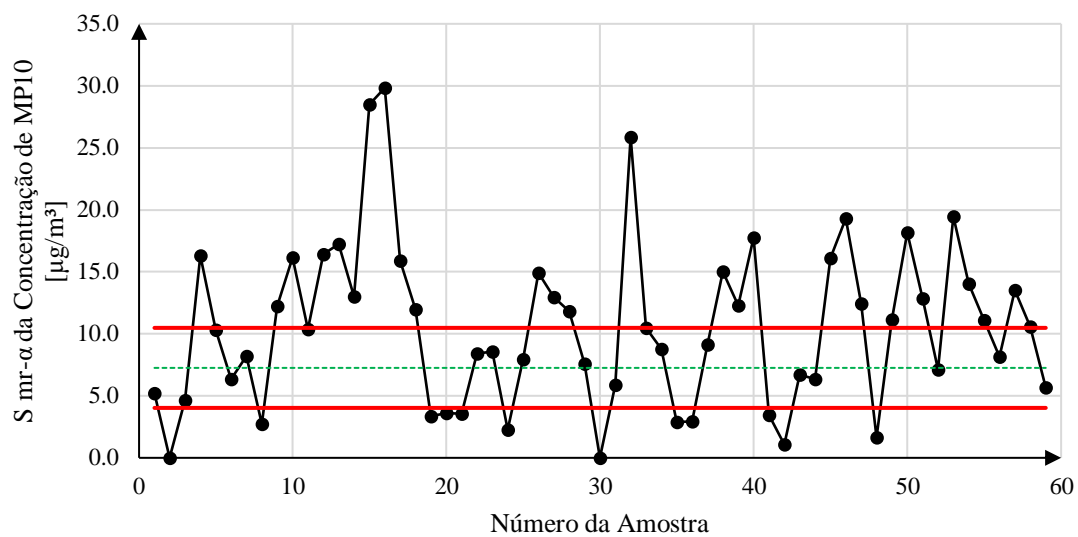
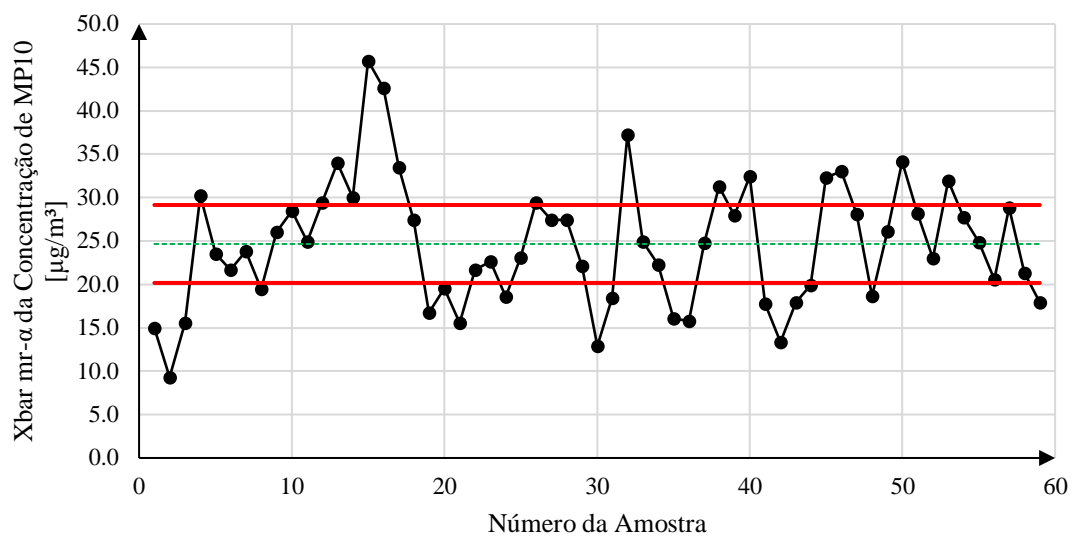


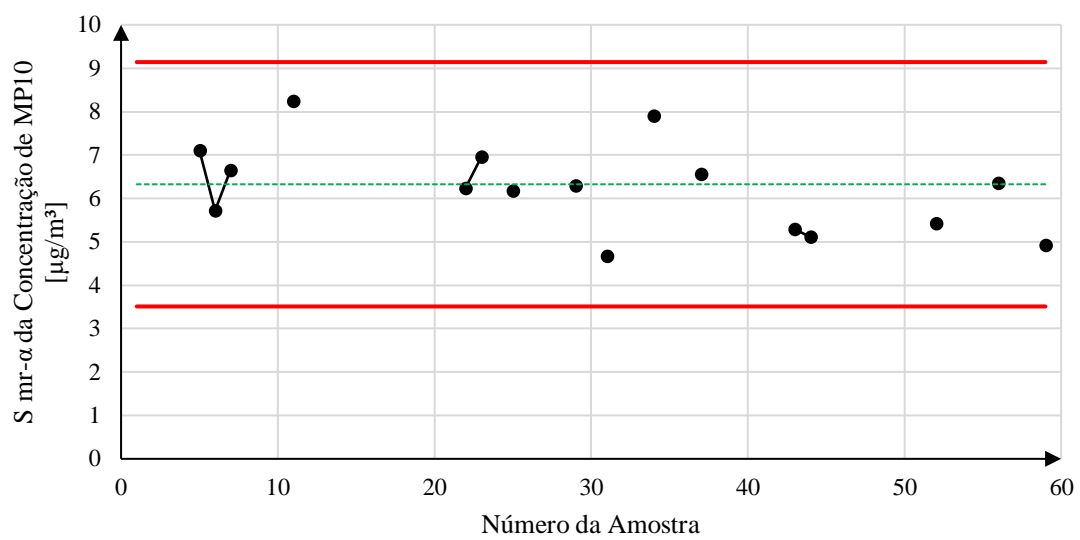
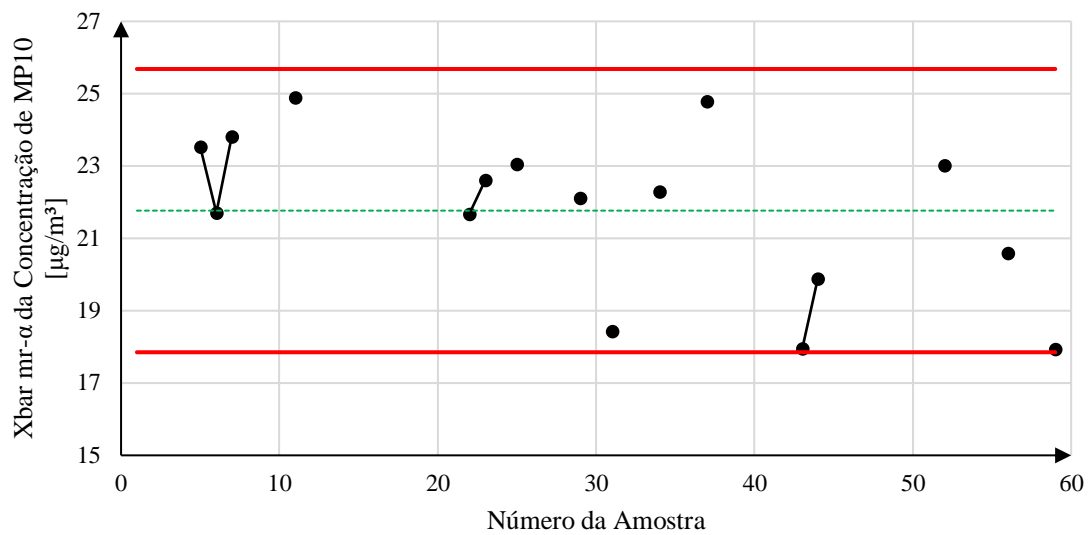
Gráficos de Controle X e S Tradicionais



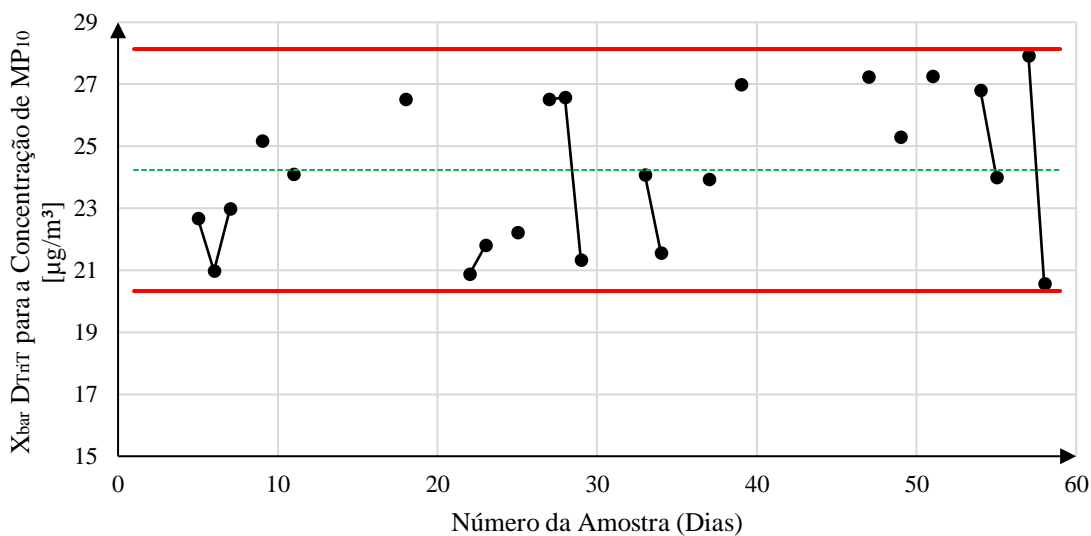
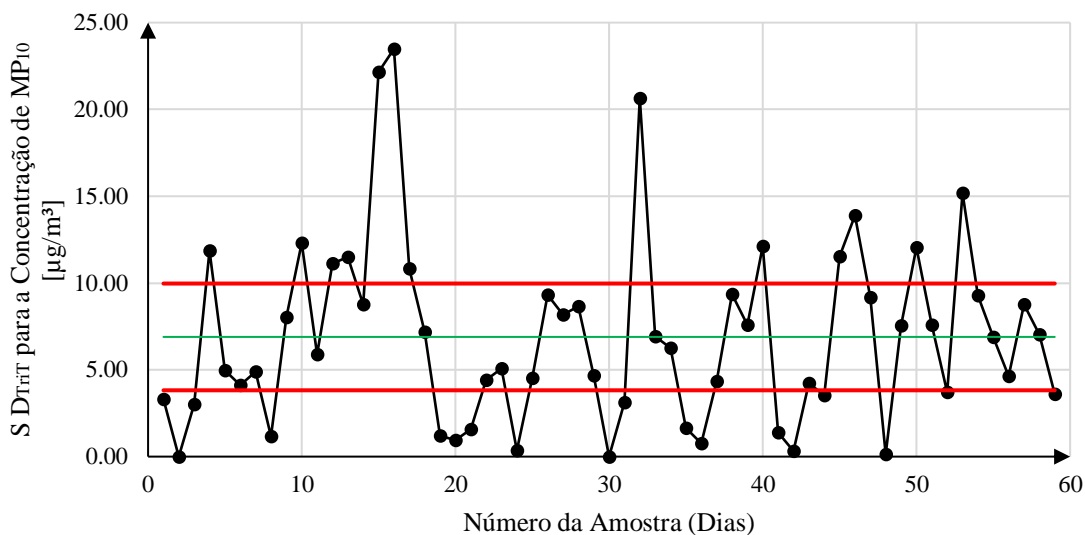
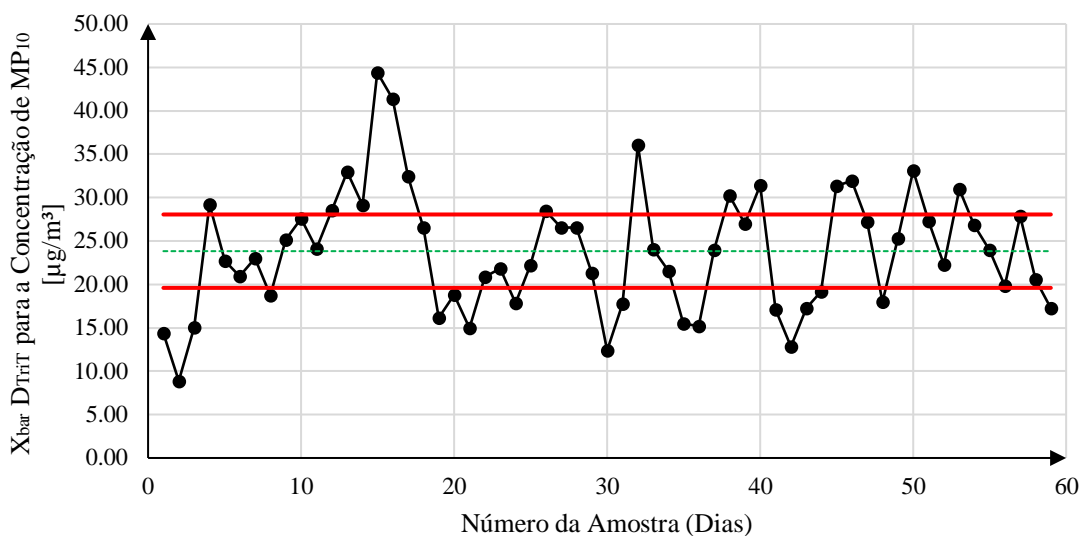


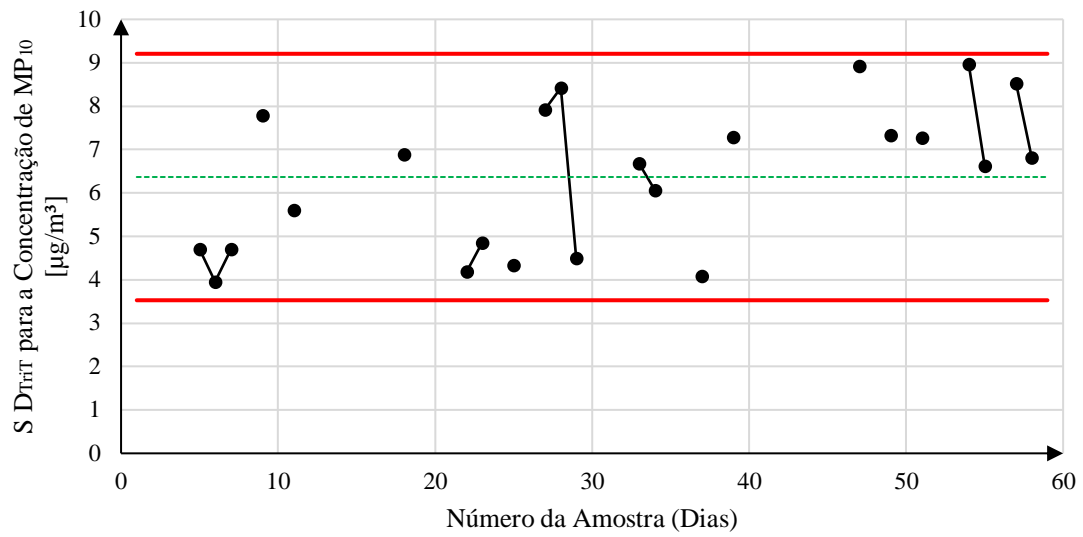
Gráficos de Controle X e S TFN (*fuzzy tipo-1*)





Gráficos de Controle X e S IT2TFN (fuzzy tipo-2 intervalar)





**APÊNDICE C – Planilhas de Resultado dos Gráficos de Controle IT2TFN \bar{X} -R,
IT2TFN \bar{X} -S e IT2TFN T² Referentes aos Dados da CETESB**

Gráficos de Controle \bar{X} -R IT2TFN (*fuzzy* tipo-2 intervalar)

Para o gráfico de controle IT2TFN \bar{X} para a concentração de MP₁₀ no período da
madrugada (01:00 – 06:00)

Amostra		\bar{X}_{barU1}	\bar{X}_{barL1}	\bar{X}_{barU2}	\bar{X}_{barL3}	\bar{X}_{barU3}	\bar{X}_{barRU}	\bar{X}_{barRL}	\bar{X}_{bar} D_{TriT}	LIC	LM	LSC
01/01/2021	1	25,73	25,81	26,00	26,29	26,42	26,05	24,73	25,39	16,69	23,80	30,91
02/01/2021	2	9,32	9,37	9,50	9,93	10,12	9,65	9,12	9,38	16,69	23,80	30,91
04/01/2021	3	7,77	7,84	8,00	8,29	8,41	8,06	7,64	7,85	16,69	23,80	30,91
06/01/2021	4	45,47	45,53	45,67	46,03	46,19	45,77	43,46	44,61	16,69	23,80	30,91
07/01/2021	5	21,02	21,12	21,33	21,86	22,08	21,48	20,36	20,92	16,69	23,80	30,91
11/01/2021	6	18,81	18,87	19,00	19,29	19,42	19,08	18,10	18,59	16,69	23,80	30,91
15/01/2021	7	19,55	19,64	19,83	20,32	20,54	19,97	18,93	19,45	16,69	23,80	30,91
16/01/2021	8	23,20	23,24	23,33	23,78	23,97	23,50	22,28	22,89	16,69	23,80	30,91
21/01/2021	9	21,15	21,21	21,33	21,63	21,76	21,42	20,32	20,87	16,69	23,80	30,91
23/01/2021	10	21,56	21,64	21,83	22,28	22,47	21,95	20,82	21,39	16,69	23,80	30,91
25/01/2021	11	26,40	26,48	26,67	27,00	27,14	26,73	25,38	26,06	16,69	23,80	30,91
26/01/2021	12	16,28	16,35	16,50	16,80	16,93	16,57	15,72	16,15	16,69	23,80	30,91
27/01/2021	13	36,41	36,48	36,67	37,02	37,17	36,75	34,89	35,82	16,69	23,80	30,91
28/01/2021	14	31,65	31,70	31,83	32,09	32,19	31,89	30,28	31,09	16,69	23,80	30,91
29/01/2021	15	44,75	44,83	45,00	45,37	45,53	45,09	42,81	43,95	16,69	23,80	30,91
30/01/2021	16	57,09	57,17	57,33	57,61	57,73	57,39	54,50	55,94	16,69	23,80	30,91
31/01/2021	17	34,86	34,96	35,17	35,47	35,60	35,21	33,44	34,32	16,69	23,80	30,91
01/02/2021	18	23,39	23,47	23,67	23,95	24,07	23,71	22,51	23,11	16,69	23,80	30,91
07/02/2021	19	15,35	15,45	15,67	15,85	15,93	15,65	14,87	15,26	16,69	23,80	30,91
08/02/2021	20	17,15	17,21	17,33	17,67	17,82	17,43	16,53	16,98	16,69	23,80	30,91
09/02/2021	21	9,40	9,48	9,67	9,99	10,12	9,73	9,23	9,48	16,69	23,80	30,91
11/02/2021	22	15,53	15,62	15,83	16,23	16,40	15,92	15,10	15,51	16,69	23,80	30,91
12/02/2021	23	19,23	19,31	19,50	19,93	20,11	19,61	18,60	19,11	16,69	23,80	30,91
13/02/2021	24	17,83	17,88	18,00	18,35	18,49	18,11	17,17	17,64	16,69	23,80	30,91
15/02/2021	25	27,90	27,98	28,17	28,55	28,72	28,26	26,82	27,54	16,69	23,80	30,91
17/02/2021	26	31,37	31,46	31,67	32,04	32,21	31,75	30,14	30,94	16,69	23,80	30,91
18/02/2021	27	33,65	33,76	34,00	34,39	34,56	34,07	32,35	33,21	16,69	23,80	30,91
19/02/2021	28	24,75	24,82	25,00	25,30	25,43	25,06	23,79	24,42	16,69	23,80	30,91
20/02/2021	29	17,71	17,80	18,00	18,42	18,60	18,10	17,17	17,64	16,69	23,80	30,91
21/02/2021	30	10,89	10,97	11,17	11,53	11,69	11,25	10,66	10,95	16,69	23,80	30,91
22/02/2021	31	11,84	11,94	12,17	12,49	12,63	12,21	11,59	11,90	16,69	23,80	30,91
24/02/2021	32	53,57	53,65	53,83	54,11	54,23	53,88	51,17	52,52	16,69	23,80	30,91
25/02/2021	33	29,73	29,81	30,00	30,37	30,53	30,08	28,56	29,32	16,69	23,80	30,91
26/02/2021	34	13,41	13,48	13,67	13,96	14,09	13,72	13,02	13,37	16,69	23,80	30,91
27/02/2021	35	15,48	15,59	15,83	16,17	16,32	15,88	15,07	15,47	16,69	23,80	30,91
28/02/2021	36	15,34	15,44	15,67	16,00	16,14	15,72	14,92	15,32	16,69	23,80	30,91

01/03/2021	37	21,76	21,83	22,00	22,38	22,55	22,10	20,97	21,54	16,69	23,80	30,91
02/03/2021	38	30,84	30,94	31,17	31,60	31,79	31,26	29,67	30,47	16,69	23,80	30,91
03/03/2021	39	36,30	36,36	36,50	36,72	36,82	36,54	34,70	35,62	16,69	23,80	30,91
04/03/2021	40	32,11	32,18	32,33	32,55	32,65	32,36	30,74	31,55	16,69	23,80	30,91
05/03/2021	41	15,95	16,02	16,17	16,60	16,78	16,30	15,45	15,87	16,69	23,80	30,91
06/03/2021	42	8,85	8,95	9,17	9,59	9,77	9,26	8,77	9,02	16,69	23,80	30,91
08/03/2021	43	11,88	11,97	12,17	12,57	12,74	12,26	11,62	11,94	16,69	23,80	30,91
10/03/2021	44	9,52	9,56	9,67	9,95	10,07	9,75	9,24	9,49	16,69	23,80	30,91
11/03/2021	45	28,77	28,84	29,00	29,23	29,33	29,03	27,57	28,30	16,69	23,80	30,91
12/03/2021	46	37,54	37,63	37,83	38,06	38,16	37,84	35,95	36,90	16,69	23,80	30,91
13/03/2021	47	24,08	24,15	24,33	24,59	24,70	24,37	23,14	23,75	16,69	23,80	30,91
14/03/2021	48	13,96	14,02	14,17	14,50	14,64	14,26	13,52	13,89	16,69	23,80	30,91
15/03/2021	49	22,94	23,01	23,17	23,51	23,66	23,26	22,07	22,66	16,69	23,80	30,91
17/03/2021	50	28,79	28,90	29,17	29,64	29,84	29,27	27,77	28,52	16,69	23,80	30,91
18/03/2021	51	31,74	31,82	32,00	32,41	32,58	32,11	30,47	31,29	16,69	23,80	30,91
21/03/2021	52	24,75	24,83	25,00	25,43	25,61	25,12	23,83	24,48	16,69	23,80	30,91
22/03/2021	53	47,90	47,98	48,17	48,35	48,43	48,16	45,76	46,96	16,69	23,80	30,91
23/03/2021	54	20,96	21,02	21,17	21,53	21,69	21,27	20,18	20,73	16,69	23,80	30,91
24/03/2021	55	28,11	28,18	28,33	28,74	28,92	28,45	27,00	27,73	16,69	23,80	30,91
25/03/2021	56	14,79	14,85	15,00	15,50	15,71	15,17	14,36	14,76	16,69	23,80	30,91
29/03/2021	57	24,46	24,52	24,67	24,97	25,11	24,74	23,49	24,11	16,69	23,80	30,91
30/03/2021	58	12,41	12,48	12,67	13,12	13,32	12,80	12,12	12,46	16,69	23,80	30,91
31/03/2021	59	28,28	28,35	28,50	28,80	28,93	28,57	27,12	27,85	16,69	23,80	30,91

Para o gráfico de controle IT2TFN R para a concentração de MP₁₀ no período da madrugada (01:00 – 06:00)

Amostra	R _{1U}	R _{1L}	R _{2U}	R _{3L}	R _{3U}	R _{RU}	R _{RL}	RD _{TFN}	LIC	LM	LSC	
01/01/2021	1	18,78	18,84	19,00	19,18	19,26	19,01	18,06	18,54	0,00	14,73	29,51
02/01/2021	2	12,88	13,22	14,00	14,86	15,24	14,04	13,33	13,68	0,00	14,73	29,51
04/01/2021	3	14,92	15,24	16,00	16,58	16,83	15,91	15,14	15,53	0,00	14,73	29,51
06/01/2021	4	19,41	19,59	20,00	20,38	20,55	19,99	18,99	19,49	0,00	14,73	29,51
07/01/2021	5	11,87	12,21	13,00	13,87	14,25	13,04	12,38	12,71	0,00	14,73	29,51
11/01/2021	6	18,26	18,48	19,00	19,27	19,38	18,88	17,97	18,43	0,00	14,73	29,51
15/01/2021	7	5,21	5,45	6,00	6,49	6,70	5,97	5,68	5,82	0,00	14,73	29,51
16/01/2021	8	13,26	13,48	14,00	14,34	14,49	13,92	13,24	13,58	0,00	14,73	29,51
21/01/2021	9	6,07	6,35	7,00	7,10	7,15	6,74	6,48	6,61	0,00	14,73	29,51
23/01/2021	10	1,32	1,52	2,00	2,61	2,86	2,06	1,94	2,00	0,00	14,73	29,51
25/01/2021	11	7,38	7,57	8,00	8,54	8,77	8,05	7,63	7,84	0,00	14,73	29,51
26/01/2021	12	19,25	19,48	20,00	20,34	20,49	19,91	18,94	19,43	0,00	14,73	29,51
27/01/2021	13	22,78	23,15	24,00	24,96	25,37	24,05	22,83	23,44	0,00	14,73	29,51
28/01/2021	14	31,40	31,58	32,00	32,15	32,21	31,87	30,31	31,09	0,00	14,73	29,51
29/01/2021	15	18,54	18,68	19,00	19,35	19,50	19,01	18,06	18,54	0,00	14,73	29,51
30/01/2021	16	37,51	37,66	38,00	38,28	38,40	37,97	36,08	37,03	0,00	14,73	29,51
31/01/2021	17	12,67	12,77	13,00	13,64	13,91	13,19	12,48	12,84	0,00	14,73	29,51
01/02/2021	18	15,27	15,49	16,00	16,53	16,75	16,01	15,21	15,61	0,00	14,73	29,51

07/02/2021	19	18,58	18,71	19,00	19,38	19,54	19,04	18,08	18,56	0,00	14,73	29,51
08/02/2021	20	4,42	4,59	5,00	5,36	5,52	4,98	4,74	4,86	0,00	14,73	29,51
09/02/2021	21	11,93	12,25	13,00	13,51	13,73	12,89	12,28	12,58	0,00	14,73	29,51
11/02/2021	22	18,79	19,15	20,00	20,80	21,14	19,98	18,99	19,48	0,00	14,73	29,51
12/02/2021	23	13,03	13,32	14,00	14,65	14,92	13,98	13,29	13,64	0,00	14,73	29,51
13/02/2021	24	15,94	16,26	17,00	17,58	17,83	16,92	16,10	16,51	0,00	14,73	29,51
15/02/2021	25	22,14	22,40	23,00	23,55	23,79	22,98	21,84	22,41	0,00	14,73	29,51
17/02/2021	26	16,68	17,07	18,00	18,44	18,62	17,77	16,94	17,36	0,00	14,73	29,51
18/02/2021	27	22,86	23,20	24,00	24,54	24,77	23,87	22,72	23,30	0,00	14,73	29,51
19/02/2021	28	10,96	11,27	12,00	12,56	12,80	11,92	11,35	11,63	0,00	14,73	29,51
20/02/2021	29	9,73	10,11	11,00	11,75	12,06	10,93	10,40	10,67	0,00	14,73	29,51
21/02/2021	30	10,76	11,13	12,00	12,34	12,48	11,75	11,23	11,49	0,00	14,73	29,51
22/02/2021	31	10,52	10,66	11,00	11,39	11,56	11,02	10,47	10,75	0,00	14,73	29,51
24/02/2021	32	26,55	26,69	27,00	27,85	28,22	27,26	25,82	26,54	0,00	14,73	29,51
25/02/2021	33	21,54	21,68	22,00	22,21	22,31	21,95	20,87	21,41	0,00	14,73	29,51
26/02/2021	34	6,49	6,65	7,00	7,36	7,51	7,00	6,65	6,83	0,00	14,73	29,51
27/02/2021	35	9,33	9,53	10,00	10,60	10,86	10,06	9,54	9,80	0,00	14,73	29,51
28/02/2021	36	6,24	6,47	7,00	7,51	7,73	6,99	6,64	6,82	0,00	14,73	29,51
01/03/2021	37	12,22	12,45	13,00	13,64	13,92	13,05	12,38	12,71	0,00	14,73	29,51
02/03/2021	38	12,66	13,06	14,00	14,41	14,59	13,75	13,13	13,44	0,00	14,73	29,51
03/03/2021	39	11,82	11,88	12,00	12,07	12,11	11,98	11,38	11,68	0,00	14,73	29,51
04/03/2021	40	33,86	33,90	34,00	34,12	34,17	34,01	32,31	33,16	0,00	14,73	29,51
05/03/2021	41	9,14	9,40	10,00	10,51	10,73	9,96	9,47	9,71	0,00	14,73	29,51
06/03/2021	42	6,93	7,25	8,00	8,81	9,16	8,03	7,62	7,83	0,00	14,73	29,51
08/03/2021	43	5,59	5,71	6,00	6,84	7,21	6,26	5,88	6,07	0,00	14,73	29,51
10/03/2021	44	8,99	9,29	10,00	10,11	10,16	9,72	9,31	9,51	0,00	14,73	29,51
11/03/2021	45	10,85	10,89	11,00	11,07	11,09	10,98	10,44	10,71	0,00	14,73	29,51
12/03/2021	46	15,25	15,48	16,00	16,72	17,03	16,10	15,26	15,68	0,00	14,73	29,51
13/03/2021	47	13,26	13,48	14,00	14,33	14,48	13,91	13,24	13,58	0,00	14,73	29,51
14/03/2021	48	6,72	6,81	7,00	7,48	7,68	7,14	6,74	6,94	0,00	14,73	29,51
15/03/2021	49	7,94	7,96	8,00	8,88	9,26	8,40	7,87	8,13	0,00	14,73	29,51
17/03/2021	50	21,25	21,47	22,00	22,94	23,35	22,20	21,03	21,61	0,00	14,73	29,51
18/03/2021	51	16,08	16,36	17,00	17,80	18,15	17,08	16,20	16,64	0,00	14,73	29,51
21/03/2021	52	6,53	6,67	7,00	7,42	7,61	7,04	6,68	6,86	0,00	14,73	29,51
22/03/2021	53	10,62	10,73	11,00	11,63	11,90	11,17	10,57	10,87	0,00	14,73	29,51
23/03/2021	54	22,50	22,65	23,00	23,58	23,83	23,11	21,93	22,52	0,00	14,73	29,51
24/03/2021	55	12,31	12,51	13,00	13,77	14,11	13,14	12,44	12,79	0,00	14,73	29,51
25/03/2021	56	12,47	12,63	13,00	13,74	14,06	13,18	12,47	12,82	0,00	14,73	29,51
29/03/2021	57	6,63	6,74	7,00	7,53	7,76	7,13	6,74	6,93	0,00	14,73	29,51
30/03/2021	58	23,22	23,46	24,00	24,58	24,83	24,02	22,81	23,41	0,00	14,73	29,51
31/03/2021	59	18,19	18,44	19,00	19,54	19,77	18,99	18,04	18,51	0,00	14,73	29,51

Para o gráfico de controle IT2TFN \bar{X} para a concentração de MP₁₀ no período da manhã
(07:00 – 12:00)

Amostra	X_{barU1}	X_{barL1}	X_{barU2}	X_{barL3}	X_{barU3}	X_{barRU}	X_{barRL}	X_{bar} D_{TriT}	LIC	LM	LSC	
01/01/2021	1	14,45	14,52	14,67	14,95	15,07	14,73	13,98	14,35	19,64	27,39	35,14
02/01/2021	2	9,86	9,96	10,17	10,41	10,52	10,18	9,67	9,93	19,64	27,39	35,14
04/01/2021	3	19,78	19,85	20,00	20,27	20,39	20,06	19,04	19,55	19,64	27,39	35,14
06/01/2021	4	29,09	29,16	29,33	29,74	29,91	29,44	27,94	28,69	19,64	27,39	35,14
07/01/2021	5	31,36	31,45	31,67	32,07	32,25	31,76	30,14	30,95	19,64	27,39	35,14
11/01/2021	6	22,03	22,12	22,33	22,64	22,78	22,38	21,25	21,81	19,64	27,39	35,14
15/01/2021	7	31,46	31,57	31,83	32,20	32,35	31,88	30,27	31,08	19,64	27,39	35,14
16/01/2021	8	21,50	21,55	21,67	22,03	22,18	21,78	20,66	21,22	19,64	27,39	35,14
21/01/2021	9	31,88	31,96	32,17	32,53	32,69	32,24	30,61	31,43	19,64	27,39	35,14
23/01/2021	10	42,25	42,33	42,50	42,81	42,94	42,57	40,42	41,49	19,64	27,39	35,14
25/01/2021	11	32,23	32,31	32,50	32,81	32,95	32,56	30,91	31,74	19,64	27,39	35,14
26/01/2021	12	41,90	41,98	42,17	42,54	42,70	42,26	40,12	41,19	19,64	27,39	35,14
27/01/2021	13	33,84	33,94	34,17	34,61	34,80	34,27	32,53	33,40	19,64	27,39	35,14
28/01/2021	14	28,32	28,38	28,50	28,71	28,80	28,54	27,10	27,82	19,64	27,39	35,14
29/01/2021	15	41,99	42,04	42,17	42,39	42,49	42,21	40,09	41,15	19,64	27,39	35,14
30/01/2021	16	47,74	47,82	48,00	48,46	48,65	48,13	45,69	46,91	19,64	27,39	35,14
31/01/2021	17	34,27	34,34	34,50	34,71	34,80	34,52	32,79	33,66	19,64	27,39	35,14
01/02/2021	18	25,63	25,69	25,83	26,07	26,18	25,88	24,57	25,23	19,64	27,39	35,14
07/02/2021	19	14,02	14,12	14,33	14,60	14,71	14,36	13,63	13,99	19,64	27,39	35,14
08/02/2021	20	18,60	18,67	18,83	19,18	19,33	18,92	17,95	18,44	19,64	27,39	35,14
09/02/2021	21	17,88	17,96	18,17	18,58	18,76	18,27	17,33	17,80	19,64	27,39	35,14
11/02/2021	22	26,94	27,06	27,33	27,81	28,01	27,43	26,03	26,73	19,64	27,39	35,14
12/02/2021	23	23,55	23,64	23,83	24,14	24,27	23,89	22,68	23,28	19,64	27,39	35,14
13/02/2021	24	17,98	18,04	18,17	18,50	18,64	18,26	17,32	17,79	19,64	27,39	35,14
15/02/2021	25	24,84	24,94	25,17	25,50	25,65	25,22	23,94	24,58	19,64	27,39	35,14
17/02/2021	26	30,07	30,15	30,33	30,74	30,92	30,44	28,89	29,66	19,64	27,39	35,14
18/02/2021	27	31,90	31,98	32,17	32,60	32,78	32,28	30,64	31,46	19,64	27,39	35,14
19/02/2021	28	35,20	35,29	35,50	35,81	35,94	35,55	33,76	34,65	19,64	27,39	35,14
20/02/2021	29	27,77	27,84	28,00	28,24	28,34	28,04	26,63	27,33	19,64	27,39	35,14
21/02/2021	30	9,91	9,99	10,17	10,47	10,60	10,23	9,70	9,96	19,64	27,39	35,14
22/02/2021	31	17,78	17,85	18,00	18,47	18,68	18,15	17,20	17,68	19,64	27,39	35,14
24/02/2021	32	48,92	49,00	49,17	49,47	49,59	49,23	46,75	47,99	19,64	27,39	35,14
25/02/2021	33	27,63	27,69	27,83	28,20	28,36	27,94	26,51	27,23	19,64	27,39	35,14
26/02/2021	34	28,57	28,65	28,83	29,03	29,11	28,84	27,39	28,12	19,64	27,39	35,14
27/02/2021	35	22,67	22,72	22,83	23,09	23,20	22,90	21,74	22,32	19,64	27,39	35,14
28/02/2021	36	17,18	17,28	17,50	17,88	18,05	17,58	16,68	17,13	19,64	27,39	35,14
01/03/2021	37	25,30	25,36	25,50	25,88	26,05	25,62	24,30	24,96	19,64	27,39	35,14
02/03/2021	38	35,61	35,73	36,00	36,40	36,56	36,06	34,24	35,15	19,64	27,39	35,14
03/03/2021	39	30,14	30,25	30,50	30,87	31,02	30,55	29,01	29,78	19,64	27,39	35,14
04/03/2021	40	35,71	35,80	36,00	36,39	36,55	36,09	34,26	35,17	19,64	27,39	35,14
05/03/2021	41	16,69	16,79	17,00	17,35	17,50	17,06	16,19	16,63	19,64	27,39	35,14
06/03/2021	42	14,53	14,62	14,83	15,08	15,19	14,85	14,10	14,47	19,64	27,39	35,14

08/03/2021	43	21,85	21,94	22,17	22,64	22,84	22,28	21,14	21,71	19,64	27,39	35,14
10/03/2021	44	20,66	20,76	21,00	21,36	21,52	21,06	19,99	20,52	19,64	27,39	35,14
11/03/2021	45	38,79	38,86	39,00	39,29	39,42	39,07	37,10	38,08	19,64	27,39	35,14
12/03/2021	46	43,38	43,47	43,67	44,08	44,26	43,77	41,55	42,66	19,64	27,39	35,14
13/03/2021	47	31,65	31,76	32,00	32,16	32,23	31,96	30,37	31,17	19,64	27,39	35,14
14/03/2021	48	21,25	21,32	21,50	21,82	21,96	21,57	20,47	21,02	19,64	27,39	35,14
15/03/2021	49	28,12	28,18	28,33	28,64	28,77	28,41	26,97	27,69	19,64	27,39	35,14
17/03/2021	50	36,66	36,76	37,00	37,28	37,39	37,02	35,16	36,09	19,64	27,39	35,14
18/03/2021	51	29,31	29,37	29,50	29,92	30,10	29,64	28,11	28,88	19,64	27,39	35,14
21/03/2021	52	23,63	23,69	23,83	24,19	24,34	23,93	22,71	23,32	19,64	27,39	35,14
22/03/2021	53	39,94	40,01	40,17	40,38	40,47	40,19	38,17	39,18	19,64	27,39	35,14
23/03/2021	54	33,41	33,49	33,67	33,92	34,03	33,70	32,01	32,86	19,64	27,39	35,14
24/03/2021	55	34,11	34,17	34,33	34,74	34,92	34,45	32,70	33,57	19,64	27,39	35,14
25/03/2021	56	22,12	22,18	22,33	22,78	22,98	22,48	21,31	21,89	19,64	27,39	35,14
29/03/2021	57	35,92	36,00	36,17	36,48	36,62	36,24	34,41	35,32	19,64	27,39	35,14
30/03/2021	58	25,30	25,36	25,50	25,77	25,88	25,56	24,27	24,91	19,64	27,39	35,14
31/03/2021	59	13,09	13,16	13,33	13,74	13,91	13,44	12,74	13,09	19,64	27,39	35,14

Para o gráfico de controle IT2TFN R para a concentração de MP₁₀ no período da manhã (07:00 – 12:00)

Amostra	R _{1U}	R _{1L}	R _{2U}	R _{3L}	R _{3U}	R _{RU}	R _{RL}	RD _{TIT}	LIC	LM	LSC	
01/01/2021	1	10,60	10,72	11,00	11,70	11,99	11,20	10,58	10,89	0,00	16,04	32,15
02/01/2021	2	5,52	5,67	6,00	6,74	7,06	6,19	5,83	6,01	0,00	16,04	32,15
04/01/2021	3	25,12	25,38	26,00	26,50	26,71	25,94	24,66	25,30	0,00	16,04	32,15
06/01/2021	4	9,22	9,46	10,00	10,22	10,32	9,85	9,40	9,62	0,00	16,04	32,15
07/01/2021	5	11,41	11,58	12,00	12,93	13,32	12,24	11,56	11,90	0,00	16,04	32,15
11/01/2021	6	27,22	27,45	28,00	28,61	28,88	28,03	26,62	27,33	0,00	16,04	32,15
15/01/2021	7	18,89	19,22	20,00	20,59	20,84	19,91	18,94	19,42	0,00	16,04	32,15
16/01/2021	8	6,90	7,23	8,00	8,44	8,62	7,84	7,49	7,67	0,00	16,04	32,15
21/01/2021	9	28,55	28,68	29,00	29,87	30,24	29,26	27,73	28,50	0,00	16,04	32,15
23/01/2021	10	39,39	39,57	40,00	40,46	40,66	40,02	38,01	39,01	0,00	16,04	32,15
25/01/2021	11	15,76	15,83	16,00	16,80	17,14	16,30	15,40	15,85	0,00	16,04	32,15
26/01/2021	12	22,37	22,56	23,00	23,75	24,07	23,15	21,95	22,55	0,00	16,04	32,15
27/01/2021	13	15,92	16,24	17,00	17,30	17,43	16,79	16,01	16,40	0,00	16,04	32,15
28/01/2021	14	16,60	16,72	17,00	17,26	17,37	16,99	16,14	16,56	0,00	16,04	32,15
29/01/2021	15	7,75	7,83	8,00	8,24	8,35	8,03	7,62	7,83	0,00	16,04	32,15
30/01/2021	16	17,56	17,69	18,00	18,63	18,90	18,15	17,20	17,68	0,00	16,04	32,15
31/01/2021	17	5,90	5,93	6,00	6,63	6,91	6,27	5,88	6,07	0,00	16,04	32,15
01/02/2021	18	23,22	23,45	24,00	24,49	24,70	23,97	22,78	23,38	0,00	16,04	32,15
07/02/2021	19	14,35	14,55	15,00	15,76	16,09	15,15	14,35	14,75	0,00	16,04	32,15
08/02/2021	20	17,15	17,40	18,00	18,59	18,85	18,00	17,10	17,55	0,00	16,04	32,15
09/02/2021	21	27,22	27,46	28,00	28,57	28,82	28,01	26,61	27,31	0,00	16,04	32,15
11/02/2021	22	10,40	10,58	11,00	11,95	12,36	11,25	10,62	10,94	0,00	16,04	32,15
12/02/2021	23	17,75	17,83	18,00	18,44	18,62	18,13	17,18	17,65	0,00	16,04	32,15
13/02/2021	24	7,63	7,74	8,00	8,61	8,87	8,17	7,71	7,94	0,00	16,04	32,15

15/02/2021	25	10,97	11,28	12,00	12,55	12,79	11,92	11,35	11,63	0,00	16,04	32,15
17/02/2021	26	27,27	27,49	28,00	28,60	28,85	28,04	26,63	27,34	0,00	16,04	32,15
18/02/2021	27	9,74	10,12	11,00	11,54	11,76	10,83	10,34	10,59	0,00	16,04	32,15
19/02/2021	28	23,97	24,28	25,00	25,43	25,61	24,86	23,66	24,26	0,00	16,04	32,15
20/02/2021	29	16,64	16,75	17,00	17,34	17,48	17,04	16,18	16,61	0,00	16,04	32,15
21/02/2021	30	8,25	8,47	9,00	9,17	9,24	8,83	8,44	8,63	0,00	16,04	32,15
22/02/2021	31	29,95	30,27	31,00	31,51	31,72	30,89	29,38	30,14	0,00	16,04	32,15
24/02/2021	32	7,67	7,77	8,00	8,35	8,50	8,06	7,64	7,85	0,00	16,04	32,15
25/02/2021	33	12,99	13,29	14,00	14,16	14,23	13,74	13,13	13,43	0,00	16,04	32,15
26/02/2021	34	31,68	31,78	32,00	32,31	32,44	32,04	30,43	31,23	0,00	16,04	32,15
27/02/2021	35	20,29	20,51	21,00	21,33	21,48	20,92	19,90	20,41	0,00	16,04	32,15
28/02/2021	36	9,92	10,24	11,00	11,72	12,03	10,98	10,44	10,71	0,00	16,04	32,15
01/03/2021	37	12,21	12,45	13,00	13,52	13,74	12,98	12,34	12,66	0,00	16,04	32,15
02/03/2021	38	21,68	22,07	23,00	23,93	24,33	23,00	21,85	22,43	0,00	16,04	32,15
03/03/2021	39	7,54	7,68	8,00	8,79	9,13	8,23	7,75	7,99	0,00	16,04	32,15
04/03/2021	40	11,39	11,58	12,00	12,92	13,31	12,23	11,56	11,89	0,00	16,04	32,15
05/03/2021	41	8,14	8,40	9,00	9,43	9,62	8,92	8,50	8,71	0,00	16,04	32,15
06/03/2021	42	8,10	8,37	9,00	9,45	9,64	8,91	8,49	8,70	0,00	16,04	32,15
08/03/2021	43	28,88	29,22	30,00	30,71	31,01	29,96	28,48	29,22	0,00	16,04	32,15
10/03/2021	44	11,87	12,21	13,00	13,37	13,53	12,80	12,22	12,51	0,00	16,04	32,15
11/03/2021	45	12,65	12,76	13,00	13,76	14,09	13,25	12,51	12,88	0,00	16,04	32,15
12/03/2021	46	14,08	14,36	15,00	15,83	16,19	15,09	14,31	14,70	0,00	16,04	32,15
13/03/2021	47	18,18	18,43	19,00	19,28	19,41	18,86	17,96	18,41	0,00	16,04	32,15
14/03/2021	48	6,26	6,48	7,00	7,72	8,03	7,10	6,72	6,91	0,00	16,04	32,15
15/03/2021	49	10,30	10,51	11,00	11,17	11,24	10,84	10,35	10,60	0,00	16,04	32,15
17/03/2021	50	8,14	8,40	9,00	9,47	9,67	8,94	8,51	8,72	0,00	16,04	32,15
18/03/2021	51	9,11	9,38	10,00	10,73	11,05	10,05	9,54	9,79	0,00	16,04	32,15
21/03/2021	52	11,89	11,92	12,00	12,67	12,96	12,28	11,59	11,93	0,00	16,04	32,15
22/03/2021	53	15,32	15,52	16,00	16,67	16,96	16,09	15,26	15,68	0,00	16,04	32,15
23/03/2021	54	13,58	13,71	14,00	14,23	14,32	13,97	13,28	13,62	0,00	16,04	32,15
24/03/2021	55	15,93	16,25	17,00	17,53	17,75	16,89	16,08	16,49	0,00	16,04	32,15
25/03/2021	56	18,04	18,33	19,00	19,72	20,03	19,03	18,07	18,55	0,00	16,04	32,15
29/03/2021	57	26,90	26,93	27,00	27,79	28,13	27,34	25,88	26,61	0,00	16,04	32,15
30/03/2021	58	15,71	15,79	16,00	16,64	16,91	16,21	15,34	15,77	0,00	16,04	32,15
31/03/2021	59	10,43	10,60	11,00	11,81	12,15	11,19	10,58	10,89	0,00	16,04	32,15

Para o gráfico de controle IT2TFN \bar{X} para a concentração de MP₁₀ no período da tarde
(13:00 – 18:00)

Amostra	X_{barU1}	X_{barL1}	X_{barU2}	X_{barL3}	X_{barU3}	X_{barRU}	X_{barRL}	X_{bar} D_{TriT}	LIC	LM	LSC	
01/01/2021	1	8,65	8,75	9,00	9,46	9,66	9,10	8,62	8,86	16,88	25,33	33,78
02/01/2021	2	8,89	8,97	9,17	9,42	9,52	9,19	8,73	8,96	16,88	25,33	33,78
04/01/2021	3	15,84	15,94	16,17	16,35	16,43	16,15	15,35	15,75	16,88	25,33	33,78
06/01/2021	4	24,56	24,64	24,83	25,28	25,48	24,96	23,67	24,31	16,88	25,33	33,78
07/01/2021	5	26,62	26,69	26,83	27,28	27,48	26,98	25,59	26,28	16,88	25,33	33,78
11/01/2021	6	22,17	22,27	22,50	22,76	22,87	22,51	21,38	21,95	16,88	25,33	33,78
15/01/2021	7	19,73	19,81	20,00	20,20	20,28	20,00	19,00	19,50	16,88	25,33	33,78
16/01/2021	8	16,06	16,09	16,17	16,42	16,53	16,25	15,42	15,83	16,88	25,33	33,78
21/01/2021	9	23,38	23,47	23,67	23,97	24,10	23,72	22,52	23,12	16,88	25,33	33,78
23/01/2021	10	24,56	24,64	24,83	25,09	25,20	24,86	23,61	24,24	16,88	25,33	33,78
25/01/2021	11	28,76	28,83	29,00	29,24	29,34	29,03	27,57	28,30	16,88	25,33	33,78
26/01/2021	12	30,96	31,02	31,17	31,51	31,65	31,26	29,67	30,46	16,88	25,33	33,78
27/01/2021	13	29,79	29,86	30,00	30,37	30,53	30,11	28,57	29,34	16,88	25,33	33,78
28/01/2021	14	30,62	30,68	30,83	31,21	31,38	30,94	29,37	30,15	16,88	25,33	33,78
29/01/2021	15	47,35	47,45	47,67	48,04	48,21	47,74	45,33	46,54	16,88	25,33	33,78
30/01/2021	16	38,40	38,48	38,67	39,16	39,37	38,81	36,83	37,82	16,88	25,33	33,78
31/01/2021	17	37,83	37,88	38,00	38,28	38,40	38,08	36,15	37,11	16,88	25,33	33,78
01/02/2021	18	34,19	34,24	34,33	34,81	35,01	34,51	32,74	33,62	16,88	25,33	33,78
07/02/2021	19	16,10	16,17	16,33	16,75	16,93	16,45	15,60	16,02	16,88	25,33	33,78
08/02/2021	20	22,04	22,13	22,33	22,56	22,66	22,34	21,22	21,78	16,88	25,33	33,78
09/02/2021	21	19,00	19,10	19,33	19,72	19,89	19,41	18,42	18,91	16,88	25,33	33,78
11/02/2021	22	24,39	24,47	24,67	24,93	25,05	24,70	23,46	24,08	16,88	25,33	33,78
12/02/2021	23	29,46	29,53	29,67	30,02	30,17	29,77	28,25	29,01	16,88	25,33	33,78
13/02/2021	24	16,84	16,94	17,17	17,54	17,70	17,23	16,35	16,79	16,88	25,33	33,78
15/02/2021	25	21,26	21,33	21,50	21,95	22,15	21,64	20,52	21,08	16,88	25,33	33,78
17/02/2021	26	34,44	34,51	34,67	35,15	35,36	34,82	33,04	33,93	16,88	25,33	33,78
18/02/2021	27	25,01	25,06	25,17	25,64	25,85	25,34	24,03	24,68	16,88	25,33	33,78
19/02/2021	28	26,77	26,84	27,00	27,17	27,25	27,00	25,65	26,33	16,88	25,33	33,78
20/02/2021	29	23,93	24,00	24,17	24,57	24,74	24,28	23,03	23,65	16,88	25,33	33,78
21/02/2021	30	15,53	15,62	15,83	16,03	16,11	15,83	15,04	15,43	16,88	25,33	33,78
22/02/2021	31	21,85	21,95	22,17	22,43	22,55	22,19	21,07	21,63	16,88	25,33	33,78
24/02/2021	32	25,62	25,69	25,83	26,26	26,44	25,96	24,63	25,30	16,88	25,33	33,78
25/02/2021	33	28,29	28,35	28,50	28,73	28,83	28,54	27,10	27,82	16,88	25,33	33,78
26/02/2021	34	28,62	28,68	28,83	29,19	29,34	28,93	27,46	28,19	16,88	25,33	33,78
27/02/2021	35	11,64	11,75	12,00	12,40	12,57	12,07	11,45	11,76	16,88	25,33	33,78
28/02/2021	36	13,41	13,48	13,67	14,03	14,18	13,75	13,04	13,40	16,88	25,33	33,78
01/03/2021	37	26,87	26,96	27,17	27,60	27,78	27,27	25,88	26,58	16,88	25,33	33,78
02/03/2021	38	30,51	30,55	30,67	31,11	31,30	30,83	29,24	30,03	16,88	25,33	33,78
03/03/2021	39	27,47	27,58	27,83	28,28	28,47	27,92	26,50	27,21	16,88	25,33	33,78
04/03/2021	40	35,31	35,37	35,50	35,99	36,19	35,67	33,84	34,75	16,88	25,33	33,78
05/03/2021	41	23,90	23,98	24,17	24,62	24,81	24,29	23,04	23,67	16,88	25,33	33,78
06/03/2021	42	17,38	17,47	17,67	17,92	18,02	17,69	16,80	17,24	16,88	25,33	33,78

08/03/2021	43	18,61	18,68	18,83	19,12	19,24	18,89	17,93	18,41	16,88	25,33	33,78
10/03/2021	44	25,22	25,31	25,50	25,87	26,03	25,58	24,28	24,93	16,88	25,33	33,78
11/03/2021	45	33,84	33,94	34,17	34,35	34,43	34,15	32,44	33,29	16,88	25,33	33,78
12/03/2021	46	29,98	30,08	30,33	30,71	30,87	30,39	28,86	29,62	16,88	25,33	33,78
13/03/2021	47	35,24	35,32	35,50	35,80	35,93	35,56	33,76	34,66	16,88	25,33	33,78
14/03/2021	48	19,44	19,51	19,67	20,06	20,24	19,78	18,76	19,27	16,88	25,33	33,78
15/03/2021	49	35,25	35,33	35,50	35,79	35,92	35,56	33,76	34,66	16,88	25,33	33,78
17/03/2021	50	40,64	40,70	40,83	41,32	41,52	41,00	38,90	39,95	16,88	25,33	33,78
18/03/2021	51	32,88	32,97	33,17	33,47	33,60	33,22	31,54	32,38	16,88	25,33	33,78
21/03/2021	52	18,22	18,31	18,50	18,79	18,92	18,55	17,61	18,08	16,88	25,33	33,78
22/03/2021	53	23,84	23,89	24,00	24,39	24,56	24,13	22,89	23,51	16,88	25,33	33,78
23/03/2021	54	38,53	38,57	38,67	39,05	39,21	38,80	36,82	37,81	16,88	25,33	33,78
24/03/2021	55	22,74	22,82	23,00	23,27	23,39	23,04	21,88	22,46	16,88	25,33	33,78
25/03/2021	56	29,25	29,33	29,50	29,92	30,11	29,62	28,10	28,86	16,88	25,33	33,78
29/03/2021	57	27,91	27,98	28,17	28,58	28,76	28,28	26,83	27,56	16,88	25,33	33,78
30/03/2021	58	33,51	33,56	33,67	34,01	34,16	33,78	32,06	32,92	16,88	25,33	33,78
31/03/2021	59	14,71	14,80	15,00	15,35	15,49	15,07	14,30	14,68	16,88	25,33	33,78

Para o gráfico de controle IT2TFN R para a concentração de MP_{10} no período da tarde (13:00 – 18:00)

Amostra		R_{IU}	R_{IL}	R_{2U}	R_{3L}	R_{3U}	R_{RU}	R_{RL}	RD_{TIT}	LIC	LM	LSC
01/01/2021	1	12,44	12,61	13,00	13,71	14,01	13,15	12,45	12,80	0,00	17,50	35,07
02/01/2021	2	14,89	14,92	15,00	15,57	15,81	15,23	14,40	14,82	0,00	17,50	35,07
04/01/2021	3	30,53	30,67	31,00	31,60	31,85	31,13	29,54	30,33	0,00	17,50	35,07
06/01/2021	4	16,72	17,10	18,00	18,75	19,08	17,93	17,05	17,49	0,00	17,50	35,07
07/01/2021	5	14,08	14,36	15,00	15,33	15,47	14,85	14,15	14,50	0,00	17,50	35,07
11/01/2021	6	8,25	8,47	9,00	9,31	9,45	8,90	8,48	8,69	0,00	17,50	35,07
15/01/2021	7	17,56	17,69	18,00	18,52	18,75	18,10	17,17	17,64	0,00	17,50	35,07
16/01/2021	8	11,79	11,85	12,00	12,72	13,03	12,27	11,58	11,93	0,00	17,50	35,07
21/01/2021	9	31,09	31,36	32,00	32,43	32,61	31,90	30,33	31,12	0,00	17,50	35,07
23/01/2021	10	37,63	38,04	39,00	39,70	40,00	38,88	36,97	37,92	0,00	17,50	35,07
25/01/2021	11	8,69	8,78	9,00	9,72	10,03	9,24	8,71	8,97	0,00	17,50	35,07
26/01/2021	12	13,16	13,41	14,00	14,71	15,02	14,06	13,34	13,70	0,00	17,50	35,07
27/01/2021	13	13,98	14,29	15,00	15,56	15,80	14,93	14,20	14,57	0,00	17,50	35,07
28/01/2021	14	8,24	8,47	9,00	9,81	10,15	9,13	8,64	8,88	0,00	17,50	35,07
29/01/2021	15	12,75	13,13	14,00	14,43	14,62	13,79	13,16	13,48	0,00	17,50	35,07
30/01/2021	16	28,27	28,49	29,00	29,93	30,33	29,20	27,68	28,44	0,00	17,50	35,07
31/01/2021	17	17,65	17,76	18,00	18,50	18,72	18,12	17,18	17,65	0,00	17,50	35,07
01/02/2021	18	9,19	9,43	10,00	10,39	10,56	9,92	9,44	9,68	0,00	17,50	35,07
07/02/2021	19	12,24	12,47	13,00	13,80	14,14	13,12	12,43	12,78	0,00	17,50	35,07
08/02/2021	20	9,47	9,63	10,00	10,40	10,58	10,02	9,51	9,76	0,00	17,50	35,07
09/02/2021	21	11,18	11,43	12,00	12,51	12,72	11,97	11,38	11,67	0,00	17,50	35,07
11/02/2021	22	19,45	19,61	20,00	20,20	20,29	19,91	18,94	19,43	0,00	17,50	35,07
12/02/2021	23	19,96	20,27	21,00	21,66	21,95	20,97	19,93	20,45	0,00	17,50	35,07
13/02/2021	24	2,82	3,17	4,00	4,67	4,95	3,92	3,75	3,84	0,00	17,50	35,07

15/02/2021	25	6,33	6,53	7,00	7,24	7,35	6,89	6,58	6,74	0,00	17,50	35,07
17/02/2021	26	9,64	10,05	11,00	11,59	11,85	10,83	10,34	10,58	0,00	17,50	35,07
18/02/2021	27	16,13	16,39	17,00	17,23	17,33	16,82	16,03	16,43	0,00	17,50	35,07
19/02/2021	28	33,74	33,82	34,00	34,52	34,74	34,16	32,41	33,28	0,00	17,50	35,07
20/02/2021	29	24,16	24,41	25,00	25,68	25,97	25,04	23,78	24,41	0,00	17,50	35,07
21/02/2021	30	11,23	11,46	12,00	12,48	12,69	11,97	11,38	11,68	0,00	17,50	35,07
22/02/2021	31	30,94	31,25	32,00	32,05	32,07	31,67	30,18	30,92	0,00	17,50	35,07
24/02/2021	32	34,05	34,33	35,00	35,72	36,03	35,02	33,27	34,15	0,00	17,50	35,07
25/02/2021	33	32,72	32,81	33,00	33,25	33,36	33,03	31,37	32,20	0,00	17,50	35,07
26/02/2021	34	10,42	10,59	11,00	11,70	12,00	11,14	10,54	10,84	0,00	17,50	35,07
27/02/2021	35	15,37	15,56	16,00	16,84	17,21	16,19	15,33	15,76	0,00	17,50	35,07
28/02/2021	36	17,68	17,78	18,00	18,75	19,07	18,25	17,27	17,76	0,00	17,50	35,07
01/03/2021	37	24,87	25,21	26,00	26,57	26,82	25,90	24,63	25,26	0,00	17,50	35,07
02/03/2021	38	9,29	9,50	10,00	10,29	10,41	9,90	9,43	9,67	0,00	17,50	35,07
03/03/2021	39	5,05	5,33	6,00	6,87	7,25	6,10	5,76	5,93	0,00	17,50	35,07
04/03/2021	40	23,19	23,43	24,00	24,05	24,07	23,75	22,64	23,20	0,00	17,50	35,07
05/03/2021	41	11,73	12,11	13,00	13,44	13,62	12,78	12,21	12,49	0,00	17,50	35,07
06/03/2021	42	12,47	12,63	13,00	13,14	13,20	12,89	12,28	12,58	0,00	17,50	35,07
08/03/2021	43	21,67	21,77	22,00	22,57	22,82	22,16	21,01	21,59	0,00	17,50	35,07
10/03/2021	44	13,57	13,70	14,00	14,91	15,30	14,29	13,49	13,89	0,00	17,50	35,07
11/03/2021	45	32,34	32,54	33,00	33,40	33,57	32,97	31,33	32,15	0,00	17,50	35,07
12/03/2021	46	38,81	39,17	40,00	40,85	41,21	40,01	38,00	39,01	0,00	17,50	35,07
13/03/2021	47	23,00	23,30	24,00	24,37	24,53	23,84	22,70	23,27	0,00	17,50	35,07
14/03/2021	48	6,26	6,48	7,00	7,61	7,87	7,04	6,68	6,86	0,00	17,50	35,07
15/03/2021	49	25,81	25,86	26,00	26,48	26,69	26,17	24,81	25,49	0,00	17,50	35,07
17/03/2021	50	7,07	7,35	8,00	8,75	9,07	8,05	7,63	7,84	0,00	17,50	35,07
18/03/2021	51	7,32	7,52	8,00	8,68	8,97	8,10	7,66	7,88	0,00	17,50	35,07
21/03/2021	52	7,38	7,56	8,00	8,44	8,63	8,00	7,60	7,80	0,00	17,50	35,07
22/03/2021	53	29,68	29,77	30,00	30,76	31,08	30,25	28,67	29,46	0,00	17,50	35,07
23/03/2021	54	7,59	7,71	8,00	8,69	8,98	8,19	7,73	7,96	0,00	17,50	35,07
24/03/2021	55	22,61	22,73	23,00	23,47	23,67	23,09	21,91	22,50	0,00	17,50	35,07
25/03/2021	56	19,22	19,45	20,00	20,42	20,60	19,94	18,96	19,45	0,00	17,50	35,07
29/03/2021	57	7,69	8,08	9,00	9,71	10,01	8,90	8,48	8,69	0,00	17,50	35,07
30/03/2021	58	25,14	25,40	26,00	26,74	27,06	26,07	24,75	25,41	0,00	17,50	35,07
31/03/2021	59	7,84	8,19	9,00	9,62	9,89	8,91	8,49	8,70	0,00	17,50	35,07

Para o gráfico de controle IT2TFN \bar{X} para a concentração de MP₁₀ no período da noite
(19:00 – 00:00)

Amostra		X_{barU1}	X_{barL1}	X_{barU2}	X_{barL3}	X_{barU3}	X_{barRU}	X_{barRL}	X_{bar} D_{TFT}	LIC	LM	LSC
01/01/2021	1	8,67	8,77	9,00	9,42	9,59	9,09	8,61	8,85	11,66	18,78	25,90
02/01/2021	2	7,09	7,16	7,33	7,69	7,85	7,42	7,03	7,23	11,66	18,78	25,90
04/01/2021	3	17,16	17,26	17,50	17,72	17,82	17,49	16,62	17,06	11,66	18,78	25,90
06/01/2021	4	19,44	19,51	19,67	19,96	20,08	19,73	18,73	19,23	11,66	18,78	25,90
07/01/2021	5	12,57	12,65	12,83	13,13	13,26	12,89	12,23	12,56	11,66	18,78	25,90
11/01/2021	6	21,78	21,85	22,00	22,35	22,50	22,09	20,96	21,53	11,66	18,78	25,90
15/01/2021	7	22,08	22,15	22,33	22,81	23,01	22,47	21,31	21,89	11,66	18,78	25,90
16/01/2021	8	14,83	14,93	15,17	15,70	15,93	15,31	14,50	14,91	11,66	18,78	25,90
21/01/2021	9	25,59	25,66	25,83	26,23	26,40	25,94	24,61	25,27	11,66	18,78	25,90
23/01/2021	10	23,47	23,53	23,67	23,99	24,12	23,75	22,54	23,15	11,66	18,78	25,90
25/01/2021	11	10,25	10,33	10,50	10,77	10,89	10,55	10,01	10,28	11,66	18,78	25,90
26/01/2021	12	26,55	26,64	26,83	27,14	27,28	26,89	25,53	26,21	11,66	18,78	25,90
27/01/2021	13	33,86	33,90	34,00	34,28	34,41	34,09	32,36	33,22	11,66	18,78	25,90
28/01/2021	14	27,69	27,79	28,00	28,23	28,33	28,01	26,60	27,31	11,66	18,78	25,90
29/01/2021	15	46,99	47,04	47,17	47,41	47,52	47,22	44,85	46,03	11,66	18,78	25,90
30/01/2021	16	25,06	25,15	25,33	25,65	25,79	25,40	24,11	24,75	11,66	18,78	25,90
31/01/2021	17	25,03	25,12	25,33	25,61	25,72	25,36	24,09	24,72	11,66	18,78	25,90
01/02/2021	18	24,41	24,48	24,67	25,04	25,19	24,76	23,49	24,12	11,66	18,78	25,90
07/02/2021	19	19,43	19,50	19,67	19,99	20,13	19,74	18,73	19,24	11,66	18,78	25,90
08/02/2021	20	18,22	18,31	18,50	18,84	18,99	18,57	17,62	18,10	11,66	18,78	25,90
09/02/2021	21	13,75	13,82	14,00	14,32	14,46	14,07	13,35	13,71	11,66	18,78	25,90
11/02/2021	22	17,36	17,40	17,50	17,95	18,14	17,67	16,74	17,20	11,66	18,78	25,90
12/02/2021	23	15,94	16,01	16,17	16,54	16,70	16,27	15,43	15,85	11,66	18,78	25,90
13/02/2021	24	19,43	19,50	19,67	20,05	20,21	19,77	18,75	19,26	11,66	18,78	25,90
15/02/2021	25	15,73	15,81	16,00	16,42	16,60	16,11	15,27	15,69	11,66	18,78	25,90
17/02/2021	26	19,58	19,65	19,83	20,08	20,18	19,86	18,86	19,36	11,66	18,78	25,90
18/02/2021	27	16,82	16,88	17,00	17,43	17,61	17,15	16,25	16,70	11,66	18,78	25,90
19/02/2021	28	21,08	21,16	21,33	21,73	21,90	21,44	20,34	20,89	11,66	18,78	25,90
20/02/2021	29	16,67	16,77	17,00	17,51	17,72	17,13	16,24	16,68	11,66	18,78	25,90
21/02/2021	30	13,22	13,31	13,50	13,83	13,97	13,56	12,87	13,22	11,66	18,78	25,90
22/02/2021	31	19,96	20,02	20,17	20,60	20,79	20,31	19,25	19,78	11,66	18,78	25,90
24/02/2021	32	18,77	18,84	19,00	19,25	19,36	19,04	18,08	18,56	11,66	18,78	25,90
25/02/2021	33	11,87	11,96	12,17	12,49	12,63	12,22	11,59	11,91	11,66	18,78	25,90
26/02/2021	34	16,58	16,66	16,83	17,24	17,41	16,94	16,07	16,50	11,66	18,78	25,90
27/02/2021	35	12,42	12,49	12,67	12,96	13,09	12,73	12,07	12,40	11,66	18,78	25,90
28/02/2021	36	14,89	14,97	15,17	15,52	15,67	15,24	14,46	14,85	11,66	18,78	25,90
01/03/2021	37	22,97	23,03	23,17	23,51	23,66	23,27	22,08	22,67	11,66	18,78	25,90
02/03/2021	38	25,77	25,84	26,00	26,26	26,37	26,05	24,73	25,39	11,66	18,78	25,90
03/03/2021	39	15,47	15,53	15,67	16,05	16,21	15,78	14,96	15,37	11,66	18,78	25,90
04/03/2021	40	24,29	24,40	24,67	25,08	25,26	24,74	23,48	24,11	11,66	18,78	25,90
05/03/2021	41	12,01	12,11	12,33	12,86	13,08	12,48	11,81	12,14	11,66	18,78	25,90
06/03/2021	42	10,46	10,52	10,67	10,97	11,09	10,74	10,18	10,46	11,66	18,78	25,90

08/03/2021	43	17,20	17,29	17,50	17,73	17,82	17,51	16,63	17,07	11,66	18,78	25,90
10/03/2021	44	21,90	21,98	22,17	22,58	22,75	22,27	21,13	21,70	11,66	18,78	25,90
11/03/2021	45	26,13	26,19	26,33	26,62	26,75	26,40	25,06	25,73	11,66	18,78	25,90
12/03/2021	46	18,77	18,84	19,00	19,48	19,68	19,15	18,15	18,65	11,66	18,78	25,90
13/03/2021	47	19,72	19,75	19,83	20,02	20,10	19,88	18,87	19,38	11,66	18,78	25,90
14/03/2021	48	17,77	17,89	18,17	18,43	18,54	18,16	17,25	17,71	11,66	18,78	25,90
15/03/2021	49	16,20	16,29	16,50	16,84	16,99	16,56	15,72	16,14	11,66	18,78	25,90
17/03/2021	50	28,20	28,29	28,50	28,64	28,70	28,47	27,05	27,76	11,66	18,78	25,90
18/03/2021	51	16,58	16,66	16,83	17,18	17,33	16,91	16,05	16,48	11,66	18,78	25,90
21/03/2021	52	23,46	23,52	23,67	23,88	23,97	23,70	22,50	23,10	11,66	18,78	25,90
22/03/2021	53	14,16	14,26	14,50	14,92	15,10	14,59	13,83	14,21	11,66	18,78	25,90
23/03/2021	54	15,98	16,04	16,17	16,50	16,65	16,27	15,42	15,85	11,66	18,78	25,90
24/03/2021	55	12,20	12,29	12,50	12,76	12,87	12,52	11,89	12,21	11,66	18,78	25,90
25/03/2021	56	13,75	13,83	14,00	14,32	14,46	14,07	13,35	13,71	11,66	18,78	25,90
29/03/2021	57	24,93	25,00	25,17	25,61	25,80	25,30	24,00	24,65	11,66	18,78	25,90
30/03/2021	58	12,03	12,07	12,17	12,52	12,67	12,29	11,64	11,97	11,66	18,78	25,90
31/03/2021	59	13,46	13,52	13,67	14,06	14,22	13,78	13,06	13,42	11,66	18,78	25,90

Para o gráfico de controle IT2TFN R para a concentração de MP₁₀ no período da madrugada (19:00 – 00:00)

Amostra	R _{1U}	R _{1L}	R _{2U}	R _{3L}	R _{3U}	R _{RU}	R _{RL}	RD _{TrT}	LIC	LM	LSC	
01/01/2021	1	17,49	17,64	18,00	18,74	19,06	18,18	17,22	17,70	0,00	14,75	29,56
02/01/2021	2	8,90	9,23	10,00	10,94	11,34	10,08	9,55	9,82	0,00	14,75	29,56
04/01/2021	3	12,69	12,78	13,00	13,24	13,35	13,01	12,36	12,69	0,00	14,75	29,56
06/01/2021	4	10,70	10,79	11,00	11,57	11,82	11,17	10,57	10,87	0,00	14,75	29,56
07/01/2021	5	5,50	5,65	6,00	6,84	7,20	6,23	5,85	6,04	0,00	14,75	29,56
11/01/2021	6	11,13	11,39	12,00	12,20	12,28	11,80	11,27	11,54	0,00	14,75	29,56
15/01/2021	7	9,04	9,33	10,00	10,77	11,09	10,05	9,53	9,79	0,00	14,75	29,56
16/01/2021	8	17,63	18,04	19,00	19,76	20,08	18,91	17,99	18,45	0,00	14,75	29,56
21/01/2021	9	9,05	9,33	10,00	10,30	10,43	9,82	9,38	9,60	0,00	14,75	29,56
23/01/2021	10	11,60	11,72	12,00	12,76	13,08	12,23	11,55	11,89	0,00	14,75	29,56
25/01/2021	11	13,14	13,40	14,00	14,38	14,55	13,90	13,23	13,56	0,00	14,75	29,56
26/01/2021	12	16,41	16,59	17,00	17,82	18,17	17,19	16,28	16,74	0,00	14,75	29,56
27/01/2021	13	15,12	15,38	16,00	16,31	16,45	15,86	15,10	15,48	0,00	14,75	29,56
28/01/2021	14	19,53	19,67	20,00	20,50	20,72	20,08	19,05	19,57	0,00	14,75	29,56
29/01/2021	15	26,55	26,68	27,00	27,52	27,74	27,09	25,71	26,40	0,00	14,75	29,56
30/01/2021	16	30,04	30,33	31,00	31,20	31,28	30,77	29,30	30,04	0,00	14,75	29,56
31/01/2021	17	9,08	9,35	10,00	10,49	10,70	9,93	9,45	9,69	0,00	14,75	29,56
01/02/2021	18	19,19	19,43	20,00	20,35	20,50	19,90	18,93	19,41	0,00	14,75	29,56
07/02/2021	19	20,76	20,83	21,00	21,27	21,39	21,05	19,98	20,52	0,00	14,75	29,56
08/02/2021	20	12,14	12,40	13,00	13,25	13,36	12,83	12,24	12,54	0,00	14,75	29,56
09/02/2021	21	14,10	14,37	15,00	15,43	15,62	14,91	14,19	14,55	0,00	14,75	29,56
11/02/2021	22	5,53	5,67	6,00	6,63	6,90	6,14	5,80	5,97	0,00	14,75	29,56
12/02/2021	23	25,01	25,31	26,00	26,86	27,23	26,08	24,75	25,42	0,00	14,75	29,56
13/02/2021	24	9,57	9,70	10,00	10,57	10,82	10,13	9,59	9,86	0,00	14,75	29,56

15/02/2021	25	20,21	20,45	21,00	21,80	22,14	21,12	20,03	20,57	0,00	14,75	29,56
17/02/2021	26	10,53	10,67	11,00	11,28	11,39	10,97	10,43	10,70	0,00	14,75	29,56
18/02/2021	27	22,96	23,27	24,00	24,74	25,06	24,01	22,80	23,40	0,00	14,75	29,56
19/02/2021	28	9,26	9,48	10,00	10,26	10,37	9,88	9,42	9,65	0,00	14,75	29,56
20/02/2021	29	5,82	6,17	7,00	7,81	8,16	6,99	6,65	6,82	0,00	14,75	29,56
21/02/2021	30	8,17	8,42	9,00	9,34	9,48	8,89	8,47	8,68	0,00	14,75	29,56
22/02/2021	31	13,31	13,51	14,00	14,66	14,95	14,08	13,36	13,72	0,00	14,75	29,56
24/02/2021	32	12,50	12,65	13,00	13,38	13,55	13,01	12,36	12,69	0,00	14,75	29,56
25/02/2021	33	9,08	9,36	10,00	10,21	10,30	9,79	9,36	9,58	0,00	14,75	29,56
26/02/2021	34	4,74	5,11	6,00	6,69	6,98	5,90	5,64	5,77	0,00	14,75	29,56
27/02/2021	35	4,73	4,81	5,00	5,42	5,59	5,11	4,82	4,96	0,00	14,75	29,56
28/02/2021	36	20,27	20,49	21,00	21,59	21,84	21,04	19,97	20,51	0,00	14,75	29,56
01/03/2021	37	20,77	20,84	21,00	21,49	21,70	21,16	20,05	20,61	0,00	14,75	29,56
02/03/2021	38	22,80	23,16	24,00	24,09	24,12	23,64	22,56	23,10	0,00	14,75	29,56
03/03/2021	39	15,42	15,60	16,00	16,78	17,12	16,18	15,32	15,75	0,00	14,75	29,56
04/03/2021	40	4,44	4,61	5,00	5,86	6,23	5,22	4,90	5,06	0,00	14,75	29,56
05/03/2021	41	6,69	7,09	8,00	8,93	9,33	8,01	7,60	7,81	0,00	14,75	29,56
06/03/2021	42	19,01	19,31	20,00	20,63	20,90	19,97	18,98	19,47	0,00	14,75	29,56
08/03/2021	43	14,46	14,62	15,00	15,33	15,47	14,98	14,23	14,60	0,00	14,75	29,56
10/03/2021	44	21,20	21,44	22,00	22,34	22,49	21,90	20,83	21,36	0,00	14,75	29,56
11/03/2021	45	34,85	34,90	35,00	35,26	35,36	35,07	33,30	34,19	0,00	14,75	29,56
12/03/2021	46	19,65	20,06	21,00	21,72	22,02	20,89	19,88	20,39	0,00	14,75	29,56
13/03/2021	47	5,86	6,20	7,00	7,24	7,34	6,73	6,47	6,60	0,00	14,75	29,56
14/03/2021	48	9,57	9,70	10,00	10,26	10,38	9,98	9,49	9,74	0,00	14,75	29,56
15/03/2021	49	8,39	8,57	9,00	9,33	9,46	8,95	8,52	8,73	0,00	14,75	29,56
17/03/2021	50	20,80	20,86	21,00	21,41	21,58	21,13	20,03	20,58	0,00	14,75	29,56
18/03/2021	51	17,82	18,17	19,00	19,69	19,99	18,94	18,01	18,47	0,00	14,75	29,56
21/03/2021	52	25,45	25,61	26,00	26,57	26,82	26,09	24,76	25,42	0,00	14,75	29,56
22/03/2021	53	12,24	12,47	13,00	13,55	13,78	13,01	12,36	12,68	0,00	14,75	29,56
23/03/2021	54	18,19	18,43	19,00	19,68	19,98	19,05	18,09	18,57	0,00	14,75	29,56
24/03/2021	55	9,33	9,53	10,00	10,57	10,82	10,05	9,53	9,79	0,00	14,75	29,56
25/03/2021	56	12,04	12,32	13,00	13,49	13,70	12,91	12,29	12,60	0,00	14,75	29,56
29/03/2021	57	22,61	23,03	24,00	24,44	24,63	23,75	22,63	23,19	0,00	14,75	29,56
30/03/2021	58	6,22	6,45	7,00	7,16	7,23	6,82	6,53	6,67	0,00	14,75	29,56
31/03/2021	59	9,39	9,57	10,00	10,08	10,11	9,83	9,39	9,61	0,00	14,75	29,56

Gráficos de Controle \bar{X} -S IT2TFN (fuzzy tipo-2 intervalar)

Para o gráfico de controle IT2TFN \bar{X} para a concentração de MP₁₀

		\bar{X}_{barU1}	\bar{X}_{barL1}	\bar{X}_{barU2}	\bar{X}_{barL3}	\bar{X}_{barU3}	\bar{X}_{barRU}	\bar{X}_{barRL}	\bar{X}_{bar} D_{TrIT}	LIC	LM	LSC
01/01/2021	1	14,38	14,46	14,67	15,03	15,19	14,743	13,984	14,36	19,60	23,83	28,05
02/01/2021	2	8,79	8,87	9,04	9,36	9,50	9,112	8,636	8,87	19,60	23,83	28,05
04/01/2021	3	15,14	15,22	15,42	15,66	15,76	15,439	14,661	15,05	19,60	23,83	28,05
06/01/2021	4	29,64	29,71	29,88	30,25	30,42	29,976	28,449	29,21	19,60	23,83	28,05
07/01/2021	5	22,89	22,98	23,17	23,59	23,77	23,275	22,081	22,68	19,60	23,83	28,05
11/01/2021	6	21,20	21,28	21,46	21,76	21,89	21,516	20,424	20,97	19,60	23,83	28,05
15/01/2021	7	23,21	23,29	23,50	23,88	24,04	23,583	22,380	22,98	19,60	23,83	28,05
16/01/2021	8	18,90	18,95	19,08	19,48	19,65	19,211	18,214	18,71	19,60	23,83	28,05
21/01/2021	9	25,50	25,57	25,75	26,09	26,24	25,828	24,515	25,17	19,60	23,83	28,05
23/01/2021	10	27,96	28,03	28,21	28,54	28,68	28,283	26,848	27,57	19,60	23,83	28,05
25/01/2021	11	24,41	24,49	24,67	24,96	25,08	24,718	23,468	24,09	19,60	23,83	28,05
26/01/2021	12	28,92	29,00	29,17	29,50	29,64	29,244	27,760	28,50	19,60	23,83	28,05
27/01/2021	13	33,48	33,55	33,71	34,07	34,23	33,803	32,086	32,94	19,60	23,83	28,05
28/01/2021	14	29,57	29,64	29,79	30,06	30,17	29,846	28,338	29,09	19,60	23,83	28,05
29/01/2021	15	45,27	45,34	45,50	45,80	45,93	45,568	43,270	44,42	19,60	23,83	28,05
30/01/2021	16	42,07	42,15	42,33	42,72	42,89	42,431	40,282	41,36	19,60	23,83	28,05
31/01/2021	17	33,00	33,07	33,25	33,52	33,63	33,293	31,616	32,45	19,60	23,83	28,05
01/02/2021	18	26,90	26,97	27,13	27,47	27,61	27,215	25,828	26,52	19,60	23,83	28,05
07/02/2021	19	16,23	16,31	16,50	16,80	16,92	16,551	15,709	16,13	19,60	23,83	28,05
08/02/2021	20	19,00	19,08	19,25	19,56	19,70	19,318	18,332	18,82	19,60	23,83	28,05
09/02/2021	21	15,01	15,09	15,29	15,65	15,81	15,369	14,578	14,97	19,60	23,83	28,05
11/02/2021	22	21,06	21,14	21,33	21,73	21,90	21,430	20,331	20,88	19,60	23,83	28,05
12/02/2021	23	22,05	22,12	22,29	22,66	22,81	22,384	21,238	21,81	19,60	23,83	28,05
13/02/2021	24	18,02	18,09	18,25	18,61	18,76	18,344	17,400	17,87	19,60	23,83	28,05
15/02/2021	25	22,43	22,52	22,71	23,11	23,28	22,807	21,638	22,22	19,60	23,83	28,05
17/02/2021	26	28,86	28,94	29,13	29,50	29,67	29,218	27,730	28,47	19,60	23,83	28,05
18/02/2021	27	26,85	26,92	27,08	27,52	27,70	27,210	25,814	26,51	19,60	23,83	28,05
19/02/2021	28	26,95	27,03	27,21	27,50	27,63	27,262	25,884	26,57	19,60	23,83	28,05
20/02/2021	29	21,52	21,60	21,79	22,18	22,35	21,888	20,766	21,33	19,60	23,83	28,05
21/02/2021	30	12,39	12,47	12,67	12,96	13,09	12,716	12,066	12,39	19,60	23,83	28,05
22/02/2021	31	17,86	17,94	18,13	18,50	18,66	18,215	17,279	17,75	19,60	23,83	28,05
24/02/2021	32	36,72	36,79	36,96	37,27	37,41	37,028	35,157	36,09	19,60	23,83	28,05
25/02/2021	33	24,38	24,45	24,63	24,95	25,09	24,697	23,441	24,07	19,60	23,83	28,05
26/02/2021	34	21,79	21,87	22,04	22,36	22,49	22,109	20,984	21,55	19,60	23,83	28,05
27/02/2021	35	15,55	15,64	15,83	16,16	16,29	15,894	15,082	15,49	19,60	23,83	28,05
28/02/2021	36	15,20	15,29	15,50	15,86	16,01	15,571	14,772	15,17	19,60	23,83	28,05
01/03/2021	37	24,23	24,30	24,46	24,85	25,01	24,565	23,307	23,94	19,60	23,83	28,05
02/03/2021	38	30,68	30,77	30,96	31,34	31,50	31,048	29,470	30,26	19,60	23,83	28,05
03/03/2021	39	27,35	27,43	27,63	27,98	28,13	27,700	26,294	27,00	19,60	23,83	28,05
04/03/2021	40	31,86	31,94	32,13	32,50	32,66	32,215	30,579	31,40	19,60	23,83	28,05
05/03/2021	41	17,14	17,22	17,42	17,86	18,04	17,534	16,624	17,08	19,60	23,83	28,05

06/03/2021	42	12,81	12,89	13,08	13,39	13,52	13,136	12,464	12,80	19,60	23,83	28,05
08/03/2021	43	17,38	17,47	17,67	18,01	18,16	17,737	16,830	17,28	19,60	23,83	28,05
10/03/2021	44	19,32	19,40	19,58	19,94	20,09	19,666	18,659	19,16	19,60	23,83	28,05
11/03/2021	45	31,88	31,96	32,13	32,37	32,48	32,163	30,544	31,35	19,60	23,83	28,05
12/03/2021	46	32,42	32,50	32,71	33,08	33,24	32,789	31,126	31,96	19,60	23,83	28,05
13/03/2021	47	27,67	27,74	27,92	28,14	28,24	27,942	26,538	27,24	19,60	23,83	28,05
14/03/2021	48	18,10	18,19	18,38	18,70	18,84	18,441	17,500	17,97	19,60	23,83	28,05
15/03/2021	49	25,63	25,70	25,88	26,20	26,34	25,946	24,628	25,29	19,60	23,83	28,05
17/03/2021	50	33,57	33,66	33,88	34,22	34,36	33,937	32,223	33,08	19,60	23,83	28,05
18/03/2021	51	27,63	27,70	27,88	28,24	28,40	27,969	26,544	27,26	19,60	23,83	28,05
21/03/2021	52	22,52	22,59	22,75	23,07	23,21	22,826	21,663	22,24	19,60	23,83	28,05
22/03/2021	53	31,46	31,53	31,71	32,01	32,14	31,769	30,163	30,97	19,60	23,83	28,05
23/03/2021	54	27,22	27,28	27,42	27,75	27,90	27,512	26,109	26,81	19,60	23,83	28,05
24/03/2021	55	24,29	24,37	24,54	24,88	25,02	24,619	23,366	23,99	19,60	23,83	28,05
25/03/2021	56	19,98	20,05	20,21	20,63	20,81	20,333	19,281	19,81	19,60	23,83	28,05
29/03/2021	57	28,30	28,38	28,54	28,91	29,07	28,639	27,180	27,91	19,60	23,83	28,05
30/03/2021	58	20,81	20,87	21,00	21,36	21,51	21,107	20,021	20,56	19,60	23,83	28,05
31/03/2021	59	17,39	17,46	17,63	17,98	18,14	17,716	16,804	17,26	19,60	23,83	28,05

Para o gráfico de controle IT2TFN S para a concentração de MP₁₀

		S _{1U}	S _{1L}	S _{2U}	S _{3L}	S _{3U}	S _{RU}	S _{RL}	SD _{TtT}	LIC	LM	LSC
01/01/2021	1	3,15	3,23	3,43	3,57	3,63	3,404	3,240	3,32	3,82	6,89	9,97
02/01/2021	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	0,00	3,82	6,89	9,97
04/01/2021	3	2,86	2,94	3,13	3,26	3,31	3,100	2,954	3,03	3,82	6,89	9,97
06/01/2021	4	11,69	11,82	12,15	12,48	12,63	12,155	11,543	11,85	3,82	6,89	9,97
07/01/2021	5	4,58	4,71	5,03	5,46	5,64	5,084	4,812	4,95	3,82	6,89	9,97
11/01/2021	6	3,95	4,04	4,26	4,43	4,51	4,238	4,031	4,13	3,82	6,89	9,97
15/01/2021	7	4,63	4,75	5,04	5,30	5,41	5,027	4,779	4,90	3,82	6,89	9,97
16/01/2021	8	1,06	1,09	1,19	1,30	1,37	1,204	1,135	1,17	3,82	6,89	9,97
21/01/2021	9	7,78	7,91	8,21	8,54	8,68	8,225	7,809	8,02	3,82	6,89	9,97
23/01/2021	10	12,22	12,34	12,63	12,92	13,05	12,632	12,001	12,32	3,82	6,89	9,97
25/01/2021	11	5,54	5,69	6,03	6,38	6,53	6,035	5,730	5,88	3,82	6,89	9,97
26/01/2021	12	10,88	11,02	11,36	11,77	11,95	11,397	10,817	11,11	3,82	6,89	9,97
27/01/2021	13	11,18	11,36	11,79	12,23	12,43	11,799	11,205	11,50	3,82	6,89	9,97
28/01/2021	14	8,52	8,66	8,99	9,32	9,46	8,993	8,542	8,77	3,82	6,89	9,97
29/01/2021	15	22,02	22,23	22,71	23,19	23,39	22,708	21,574	22,14	3,82	6,89	9,97
30/01/2021	16	23,47	23,64	24,07	24,54	24,74	24,090	22,878	23,48	3,82	6,89	9,97
31/01/2021	17	10,53	10,71	11,13	11,52	11,69	11,118	10,565	10,84	3,82	6,89	9,97
01/02/2021	18	6,84	6,99	7,35	7,73	7,90	7,364	6,992	7,18	3,82	6,89	9,97
07/02/2021	19	0,98	1,06	1,24	1,41	1,49	1,235	1,173	1,20	3,82	6,89	9,97
08/02/2021	20	0,72	0,79	0,96	1,17	1,27	0,983	0,925	0,95	3,82	6,89	9,97
09/02/2021	21	1,42	1,48	1,61	1,77	1,84	1,624	1,539	1,58	3,82	6,89	9,97
11/02/2021	22	4,09	4,22	4,51	4,83	4,97	4,523	4,293	4,41	3,82	6,89	9,97
12/02/2021	23	4,83	4,94	5,19	5,46	5,58	5,200	4,935	5,07	3,82	6,89	9,97
13/02/2021	24	0,20	0,24	0,34	0,49	0,56	0,366	0,339	0,35	3,82	6,89	9,97

15/02/2021	25	4,28	4,38	4,62	4,89	5,01	4,633	4,395	4,51	3,82	6,89	9,97
17/02/2021	26	8,99	9,15	9,55	9,98	10,17	9,568	9,083	9,33	3,82	6,89	9,97
18/02/2021	27	7,89	8,03	8,38	8,75	8,91	8,393	7,968	8,18	3,82	6,89	9,97
19/02/2021	28	8,47	8,60	8,89	9,14	9,24	8,868	8,432	8,65	3,82	6,89	9,97
20/02/2021	29	4,50	4,59	4,80	5,03	5,13	4,810	4,567	4,69	3,82	6,89	9,97
21/02/2021	30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	0,00	3,82	6,89	9,97
22/02/2021	31	2,89	2,98	3,22	3,43	3,53	3,211	3,051	3,13	3,82	6,89	9,97
24/02/2021	32	20,61	20,78	21,18	21,57	21,73	21,176	20,119	20,65	3,82	6,89	9,97
25/02/2021	33	6,67	6,81	7,13	7,41	7,53	7,111	6,761	6,94	3,82	6,89	9,97
26/02/2021	34	6,11	6,20	6,41	6,60	6,69	6,403	6,084	6,24	3,82	6,89	9,97
27/02/2021	35	1,52	1,58	1,72	1,82	1,86	1,701	1,621	1,66	3,82	6,89	9,97
28/02/2021	36	0,55	0,61	0,77	0,94	1,02	0,780	0,736	0,76	3,82	6,89	9,97
01/03/2021	37	3,96	4,09	4,42	4,80	4,97	4,451	4,219	4,33	3,82	6,89	9,97
02/03/2021	38	8,94	9,14	9,61	10,05	10,24	9,596	9,118	9,36	3,82	6,89	9,97
03/03/2021	39	7,24	7,40	7,78	8,15	8,31	7,776	7,387	7,58	3,82	6,89	9,97
04/03/2021	40	11,87	12,03	12,38	12,82	13,01	12,423	11,790	12,11	3,82	6,89	9,97
05/03/2021	41	1,16	1,24	1,44	1,60	1,67	1,423	1,355	1,39	3,82	6,89	9,97
06/03/2021	42	0,18	0,23	0,34	0,40	0,43	0,314	0,306	0,31	3,82	6,89	9,97
08/03/2021	43	4,09	4,16	4,33	4,52	4,60	4,338	4,117	4,23	3,82	6,89	9,97
10/03/2021	44	3,29	3,39	3,63	3,85	3,95	3,622	3,441	3,53	3,82	6,89	9,97
11/03/2021	45	11,28	11,46	11,87	12,21	12,37	11,838	11,253	11,55	3,82	6,89	9,97
12/03/2021	46	13,67	13,85	14,27	14,68	14,85	14,263	13,550	13,91	3,82	6,89	9,97
13/03/2021	47	8,97	9,11	9,44	9,68	9,79	9,398	8,938	9,17	3,82	6,89	9,97
14/03/2021	48	0,02	0,06	0,13	0,25	0,31	0,155	0,139	0,15	3,82	6,89	9,97
15/03/2021	49	7,35	7,47	7,75	8,02	8,14	7,749	7,359	7,55	3,82	6,89	9,97
17/03/2021	50	11,71	11,90	12,33	12,81	13,01	12,352	11,728	12,04	3,82	6,89	9,97
18/03/2021	51	7,20	7,37	7,75	8,16	8,34	7,766	7,371	7,57	3,82	6,89	9,97
21/03/2021	52	3,49	3,58	3,80	4,07	4,19	3,827	3,626	3,73	3,82	6,89	9,97
22/03/2021	53	15,07	15,23	15,61	15,93	16,07	15,584	14,813	15,20	3,82	6,89	9,97
23/03/2021	54	9,01	9,15	9,49	9,86	10,02	9,505	9,023	9,26	3,82	6,89	9,97
24/03/2021	55	6,64	6,76	7,03	7,37	7,51	7,061	6,699	6,88	3,82	6,89	9,97
25/03/2021	56	4,40	4,51	4,76	5,04	5,16	4,772	4,530	4,65	3,82	6,89	9,97
29/03/2021	57	8,55	8,67	8,98	9,34	9,50	9,010	8,548	8,78	3,82	6,89	9,97
30/03/2021	58	6,85	6,95	7,17	7,45	7,57	7,198	6,830	7,01	3,82	6,89	9,97
31/03/2021	59	3,43	3,51	3,72	3,88	3,95	3,698	3,517	3,61	3,82	6,89	9,97

Gráficos de Controle T² IT2TFN (*fuzzy tipo-2 intervalar*)

Medidas de tendência central para a aplicação de estatística IT2TFN T²

Amostras		\bar{X}_{U1} MP ₁₀	\bar{X}_{L1} MP ₁₀	\bar{X}_{U2} MP ₁₀	\bar{X}_{L3} MP ₁₀	\bar{X}_{U3} MP ₁₀	\bar{Y}_{U1} SO ₂	\bar{Y}_{L1} SO ₂	\bar{Y}_{U2} SO ₂	\bar{X}_{L3} SO ₂	\bar{X}_{U3} SO ₂
01/01/2021	1	14,15	14,24	14,43	14,80	14,96	0,77	0,84	1,00	1,37	1,53
02/01/2021	2	8,61	8,69	8,87	9,18	9,32	0,53	0,58	0,70	0,92	1,02
04/01/2021	3	15,49	15,58	15,78	16,03	16,13	1,82	1,89	2,04	2,42	2,58
07/01/2021	4	23,26	23,34	23,52	23,93	24,11	1,68	1,75	1,91	2,19	2,31
16/01/2021	5	18,82	18,88	19,00	19,39	19,56	1,78	1,86	2,04	2,36	2,50
21/01/2021	6	25,62	25,69	25,87	26,21	26,35	1,55	1,62	1,78	2,13	2,28
23/01/2021	7	28,23	28,31	28,48	28,80	28,94	1,50	1,58	1,78	2,13	2,28
25/01/2021	8	24,36	24,43	24,61	24,90	25,02	1,41	1,47	1,61	1,93	2,07
26/01/2021	9	29,45	29,52	29,70	30,03	30,17	2,37	2,48	2,74	3,02	3,15
27/01/2021	10	33,11	33,18	33,35	33,72	33,88	2,46	2,53	2,70	2,97	3,09
28/01/2021	11	29,52	29,59	29,74	30,01	30,13	1,96	2,04	2,22	2,53	2,66
29/01/2021	12	45,52	45,58	45,74	46,04	46,17	2,80	2,87	3,04	3,36	3,49
30/01/2021	13	41,53	41,61	41,78	42,16	42,32	1,94	2,02	2,22	2,48	2,59
31/01/2021	14	32,70	32,78	32,96	33,22	33,34	0,72	0,79	0,96	1,26	1,39
01/02/2021	15	26,92	26,98	27,13	27,48	27,63	1,51	1,59	1,78	2,09	2,22
07/02/2021	16	16,38	16,46	16,65	16,95	17,08	1,44	1,51	1,70	2,02	2,15
08/02/2021	17	19,06	19,14	19,30	19,60	19,73	1,05	1,13	1,30	1,67	1,82
09/02/2021	18	15,27	15,36	15,57	15,92	16,07	1,27	1,35	1,52	1,81	1,93
11/02/2021	19	21,50	21,58	21,78	22,18	22,35	1,72	1,77	1,91	2,28	2,43
12/02/2021	20	22,15	22,22	22,39	22,75	22,91	1,53	1,59	1,74	2,06	2,20
13/02/2021	21	17,98	18,05	18,22	18,58	18,74	1,25	1,33	1,52	1,95	2,13
15/02/2021	22	22,33	22,42	22,61	23,01	23,18	1,39	1,47	1,65	1,99	2,14
17/02/2021	23	28,75	28,82	29,00	29,38	29,54	2,56	2,64	2,83	3,20	3,36
18/02/2021	24	26,38	26,45	26,61	27,03	27,21	1,67	1,74	1,91	2,23	2,37
19/02/2021	25	27,05	27,12	27,30	27,60	27,73	1,49	1,58	1,78	2,10	2,23
20/02/2021	26	21,91	21,99	22,17	22,56	22,72	2,00	2,05	2,17	2,57	2,74
21/02/2021	27	12,46	12,54	12,74	13,02	13,14	1,30	1,38	1,57	1,90	2,04
22/02/2021	28	18,18	18,25	18,43	18,81	18,97	2,09	2,15	2,30	2,58	2,70
24/02/2021	29	36,23	36,31	36,48	36,80	36,93	2,54	2,61	2,78	3,13	3,28
25/02/2021	30	24,45	24,52	24,70	25,01	25,14	1,32	1,39	1,57	1,85	1,98
26/02/2021	31	22,20	22,27	22,43	22,75	22,89	1,31	1,39	1,57	1,90	2,04
27/02/2021	32	15,81	15,89	16,09	16,41	16,55	1,35	1,43	1,61	1,92	2,06
01/03/2021	33	24,47	24,54	24,70	25,08	25,25	1,29	1,36	1,52	1,81	1,94
02/03/2021	34	30,98	31,06	31,26	31,63	31,79	2,15	2,21	2,35	2,67	2,80
03/03/2021	35	26,90	26,98	27,17	27,53	27,68	1,64	1,71	1,87	2,24	2,39
04/03/2021	36	31,37	31,46	31,65	32,03	32,19	1,85	1,91	2,04	2,40	2,55
05/03/2021	37	17,26	17,34	17,52	17,96	18,14	1,54	1,61	1,78	2,11	2,25
06/03/2021	38	13,12	13,20	13,39	13,69	13,82	0,83	0,90	1,09	1,40	1,54
08/03/2021	39	17,75	17,84	18,04	18,38	18,53	0,81	0,88	1,04	1,36	1,49
10/03/2021	40	19,75	19,82	20,00	20,37	20,53	0,84	0,90	1,04	1,31	1,42
11/03/2021	41	32,07	32,14	32,30	32,55	32,65	2,03	2,11	2,30	2,62	2,75

12/03/2021	42	32,26	32,35	32,57	32,95	33,12	1,95	2,03	2,22	2,54	2,68
13/03/2021	43	27,93	28,01	28,17	28,40	28,49	1,29	1,36	1,52	1,81	1,94
14/03/2021	44	18,29	18,37	18,57	18,89	19,04	1,11	1,18	1,35	1,73	1,90
17/03/2021	45	34,10	34,18	34,39	34,74	34,88	2,26	2,32	2,48	2,83	2,98
18/03/2021	46	27,61	27,69	27,87	28,23	28,38	1,65	1,73	1,91	2,35	2,53
21/03/2021	47	22,33	22,40	22,57	22,88	23,01	1,19	1,25	1,39	1,73	1,87
22/03/2021	48	30,98	31,05	31,22	31,52	31,65	1,13	1,18	1,30	1,73	1,91
23/03/2021	49	27,60	27,65	27,78	28,10	28,24	1,82	1,89	2,04	2,35	2,48
24/03/2021	50	24,10	24,17	24,35	24,69	24,84	1,50	1,57	1,74	1,92	1,99
25/03/2021	51	20,33	20,40	20,57	20,98	21,16	1,32	1,38	1,52	1,86	2,01
29/03/2021	52	28,50	28,57	28,74	29,13	29,29	1,36	1,45	1,65	1,97	2,10
30/03/2021	53	21,04	21,09	21,22	21,57	21,72	1,30	1,39	1,61	1,90	2,03
31/03/2021	54	17,01	17,09	17,26	17,63	17,79	0,80	0,87	1,04	1,46	1,63

Variâncias para a aplicação de estatística IT2TFN T²

Amostras		$S^2(x)_{U1}$	$S^2(x)_{L1}$	$S^2(x)_{U2}$	$S^2(x)_{L3}$	$S^2(x)_{U3}$	$S^2(y)_{U1}$	$S^2(y)_{L1}$	$S^2(y)_{U2}$	$S^2(y)_{L3}$	$S^2(y)_{U3}$
		MP ₁₀	MP ₁₀	MP ₁₀	MP ₁₀	MP ₁₀	SO ₂	SO ₂	SO ₂	SO ₂	SO
01/01/2021	1	10,00	10,54	11,86	12,90	13,37	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03
02/01/2021	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
04/01/2021	3	8,21	8,69	9,88	10,70	11,06	0,47	0,64	1,16	1,99	2,45
07/01/2021	4	21,03	22,27	25,39	29,95	32,06	0,05	0,11	0,35	0,83	1,11
16/01/2021	5	1,09	1,17	1,38	1,64	1,80	0,27	0,36	0,67	1,35	1,76
21/01/2021	6	61,92	63,96	68,92	74,54	77,05	0,56	0,69	1,05	1,73	2,12
23/01/2021	7	153,97	157,13	164,67	172,25	175,58	0,16	0,25	0,56	1,21	1,60
25/01/2021	8	30,90	32,51	36,52	40,91	42,89	0,17	0,24	0,46	0,99	1,32
26/01/2021	9	121,30	124,54	132,40	142,15	146,47	1,71	2,06	3,18	4,43	4,97
27/01/2021	10	114,57	118,49	127,99	138,37	143,00	0,38	0,58	1,32	2,48	3,07
28/01/2021	11	72,47	74,78	80,41	86,36	89,03	0,40	0,54	1,01	1,98	2,49
29/01/2021	12	490,05	499,23	521,01	542,77	552,26	1,30	1,63	2,68	4,26	5,03
30/01/2021	13	529,59	537,56	556,55	577,88	587,24	0,50	0,64	1,10	1,85	2,24
31/01/2021	14	103,00	106,60	115,38	123,88	127,65	0,00	0,00	0,00	0,02	0,04
01/02/2021	15	47,23	49,33	54,45	60,22	62,81	0,04	0,09	0,28	0,79	1,07
07/02/2021	16	0,90	1,05	1,46	1,90	2,12	1,02	1,18	1,59	2,21	2,52
08/02/2021	17	0,47	0,57	0,85	1,29	1,51	0,01	0,02	0,08	0,25	0,35
09/02/2021	18	1,96	2,12	2,55	3,09	3,34	0,03	0,06	0,21	0,52	0,73
11/02/2021	19	16,81	17,86	20,48	23,47	24,85	0,28	0,37	0,66	1,47	1,94
12/02/2021	20	23,57	24,62	27,21	30,18	31,53	0,06	0,11	0,35	0,77	1,04
13/02/2021	21	0,03	0,04	0,10	0,21	0,28	0,08	0,11	0,24	0,61	0,89
15/02/2021	22	18,55	19,42	21,61	24,15	25,33	0,00	0,00	0,03	0,34	0,59
17/02/2021	23	80,42	83,35	90,45	98,85	102,60	1,38	1,70	2,67	4,18	4,92
18/02/2021	24	56,22	58,27	63,29	68,73	71,20	0,06	0,12	0,35	0,96	1,35
19/02/2021	25	73,40	75,62	80,96	85,38	87,34	0,06	0,11	0,35	0,79	1,09
20/02/2021	26	20,49	21,33	23,39	25,64	26,67	0,81	0,98	1,50	2,58	3,19
21/02/2021	27	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,09	0,21	0,64	0,93
22/02/2021	28	8,31	8,89	10,35	11,81	12,48	0,28	0,46	1,05	1,84	2,24
24/02/2021	29	414,90	421,90	438,50	454,83	461,94	1,78	2,20	3,37	5,02	5,86

25/02/2021	30	45,19	47,06	51,67	55,72	57,56	0,00	0,01	0,09	0,42	0,66
26/02/2021	31	38,15	39,26	42,00	44,52	45,66	0,04	0,06	0,15	0,50	0,74
27/02/2021	32	2,27	2,45	2,91	3,25	3,40	0,11	0,18	0,43	0,77	0,99
01/03/2021	33	15,59	16,70	19,52	23,08	24,73	0,02	0,03	0,09	0,33	0,50
02/03/2021	34	81,08	84,77	93,79	102,67	106,66	0,34	0,46	0,87	1,73	2,22
03/03/2021	35	45,92	47,98	53,12	58,47	60,91	0,06	0,10	0,29	0,94	1,38
04/03/2021	36	129,88	133,34	141,71	151,95	156,54	0,25	0,38	0,82	1,62	2,06
05/03/2021	37	1,28	1,48	2,00	2,50	2,73	0,05	0,08	0,22	0,74	1,10
06/03/2021	38	0,02	0,04	0,10	0,14	0,16	0,00	0,00	0,00	0,04	0,07
08/03/2021	39	17,09	17,68	19,13	20,88	21,66	0,00	0,00	0,01	0,10	0,19
10/03/2021	40	10,84	11,52	13,25	14,90	15,67	0,00	0,01	0,07	0,14	0,17
11/03/2021	41	129,68	133,70	143,39	151,79	155,52	0,48	0,66	1,23	2,11	2,58
12/03/2021	42	186,44	191,30	203,05	215,12	220,43	1,13	1,41	2,23	3,10	3,57
13/03/2021	43	82,24	84,84	91,12	96,01	98,17	0,12	0,18	0,36	0,64	0,78
14/03/2021	44	0,00	0,00	0,01	0,05	0,08	0,02	0,03	0,08	0,28	0,47
17/03/2021	45	140,16	144,63	155,46	167,77	173,25	0,58	0,78	1,46	2,73	3,44
18/03/2021	46	52,16	54,51	60,29	66,72	69,65	0,06	0,10	0,29	0,93	1,39
21/03/2021	47	12,11	12,71	14,25	16,20	17,11	0,00	0,00	0,02	0,27	0,44
22/03/2021	48	219,73	224,38	235,43	245,09	249,31	0,02	0,04	0,15	0,56	0,85
23/03/2021	49	82,67	85,31	91,71	99,09	102,39	0,42	0,55	1,01	1,70	2,10
24/03/2021	50	44,07	45,59	49,31	53,99	56,11	0,22	0,29	0,50	0,77	0,92
25/03/2021	51	19,53	20,51	22,93	25,67	26,91	0,46	0,55	0,83	1,46	1,82
29/03/2021	52	74,72	76,93	82,40	89,21	92,32	0,01	0,04	0,15	0,56	0,83
30/03/2021	53	48,05	49,37	52,61	56,72	58,57	0,00	0,00	0,03	0,29	0,50
31/03/2021	54	11,84	12,43	13,87	15,07	15,61	0,00	0,00	0,00	0,03	0,08

Covariâncias para a aplicação de estatística IT2TFN T²

Amostras		$S(xy)_{U1}$	$S(xy)_{L1}$	$S(xy)_{U2}$	$S(xy)_{L3}$	$S(xy)_{U3}$
		MP ₁₀ , SO ₂	MP ₁₀ , SO ₂	MP ₁₀ , SO ₂	MP ₁₀ , SO ₂	MP ₁₀ , SO ₂
01/01/2021	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
02/01/2021	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
04/01/2021	3	1,22	1,45	2,05	2,72	3,02
07/01/2021	4	0,52	0,85	2,03	3,66	4,43
16/01/2021	5	0,00	0,00	0,06	0,29	0,43
21/01/2021	6	3,10	3,62	5,25	7,69	8,84
23/01/2021	7	2,02	2,63	4,66	7,67	9,12
25/01/2021	8	0,48	0,59	1,54	3,27	4,17
26/01/2021	9	6,68	8,28	12,53	16,96	18,84
27/01/2021	10	5,50	7,11	11,47	16,23	18,24
28/01/2021	11	2,95	3,89	6,61	10,29	11,86
29/01/2021	12	15,66	19,07	28,57	40,49	45,25
30/01/2021	13	8,22	10,04	15,47	22,66	26,25
31/01/2021	14	0,00	0,00	0,01	0,05	0,78
01/02/2021	15	0,47	0,68	1,92	4,19	5,16
07/02/2021	16	0,00	0,00	0,04	0,09	0,12

08/02/2021	17	0,00	0,00	0,02	0,08	0,12
09/02/2021	18	0,05	0,08	0,27	0,49	0,59
11/02/2021	19	0,02	0,03	0,57	2,05	2,75
12/02/2021	20	0,50	0,87	2,08	3,68	4,43
13/02/2021	21	0,00	0,00	0,01	0,04	0,06
15/02/2021	22	0,00	0,00	0,39	1,17	1,61
17/02/2021	23	4,84	5,85	8,76	12,38	14,04
18/02/2021	24	0,67	0,98	2,37	4,96	6,17
19/02/2021	25	1,64	2,24	4,16	7,08	8,38
20/02/2021	26	2,49	2,96	4,13	5,71	6,44
21/02/2021	27	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
22/02/2021	28	0,33	0,46	1,01	1,77	2,13
24/02/2021	29	22,72	25,87	33,79	43,24	47,52
25/02/2021	30	0,11	0,25	1,38	3,88	5,01
26/02/2021	31	0,93	1,19	1,98	3,48	4,34
27/02/2021	32	0,10	0,14	0,32	0,62	0,75
01/03/2021	33	0,00	0,00	0,41	1,36	1,82
02/03/2021	34	3,79	4,51	7,20	11,75	13,68
03/03/2021	35	0,46	0,63	1,98	5,04	6,50
04/03/2021	36	4,52	5,88	9,45	13,83	15,81
05/03/2021	37	0,00	0,00	0,10	0,52	0,73
06/03/2021	38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03
08/03/2021	39	0,00	0,00	0,18	0,78	1,04
10/03/2021	40	0,05	0,10	0,28	0,51	0,67
11/03/2021	41	6,05	7,31	11,12	15,73	17,75
12/03/2021	42	11,41	13,07	17,66	22,27	24,54
13/03/2021	43	0,80	1,11	2,31	3,68	4,56
14/03/2021	44	0,00	0,00	0,00	0,05	0,08
17/03/2021	45	4,58	6,01	10,43	16,82	19,75
18/03/2021	46	0,18	0,25	1,56	5,47	7,33
21/03/2021	47	0,00	0,00	0,22	1,03	1,31
22/03/2021	48	1,05	1,63	4,55	10,34	13,03
23/03/2021	49	2,11	2,92	5,57	9,00	10,58
24/03/2021	50	1,01	1,23	2,07	3,16	3,67
25/03/2021	51	0,34	0,43	1,03	2,31	2,92
29/03/2021	52	0,49	0,84	2,31	5,23	6,78
30/03/2021	53	0,00	0,00	0,47	1,48	1,99
31/03/2021	54	0,00	0,00	0,11	0,43	0,57

Para o gráfico de controle IT2TFN T² para o monitoramento da concentração de MP₁₀ e SO₂

Amostras		T ² _{U1}	T ² _{L1}	T ² _{U2}	T ² _{L3}	T ² _{U3}	T ² _{RU}	T ² _{RL}	T ² _{D_{TrT}}	LIC	LSC
01/01/2021	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	0,00	0,00	13,6504
02/01/2021	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	0,00	0,00	13,6504
04/01/2021	3	0,00	0,00	3,08	19,26	26,36	9,812	7,074	8,44	0,00	13,6504
07/01/2021	4	0,00	0,00	0,71	9,68	14,15	4,955	3,291	4,12	0,00	13,6504
16/01/2021	5	0,00	0,00	3,08	16,49	22,19	8,423	6,197	7,31	0,00	13,6504
21/01/2021	6	0,14	0,27	0,76	4,86	8,41	3,103	1,865	2,48	0,00	13,6504
23/01/2021	7	4,11	4,73	6,63	6,10	8,17	6,304	5,529	5,92	0,00	13,6504
25/01/2021	8	0,00	0,00	0,00	2,20	5,19	1,730	0,697	1,21	0,00	13,6504
26/01/2021	9	6,18	9,54	29,57	36,65	37,91	24,557	23,990	24,27	0,00	13,6504
27/01/2021	10	20,62	21,99	31,31	35,23	36,02	29,319	28,035	28,68	0,00	13,6504
28/01/2021	11	8,07	8,92	8,80	15,12	17,67	11,512	10,399	10,96	0,00	13,6504
29/01/2021	12	131,85	130,56	129,27	126,53	125,50	128,874	122,346	125,61	0,00	13,6504
30/01/2021	13	108,61	112,51	97,23	93,40	92,40	99,412	95,995	97,70	0,00	13,6504
31/01/2021	14	23,49	25,09	30,23	35,35	37,04	30,252	28,714	29,48	0,00	13,6504
01/02/2021	15	1,43	1,79	2,88	4,12	6,38	3,565	2,781	3,17	0,00	13,6504
07/02/2021	16	0,00	0,00	0,00	4,67	8,99	2,996	1,480	2,24	0,00	13,6504
08/02/2021	17	0,00	0,00	0,00	0,06	1,86	0,621	0,020	0,32	0,00	13,6504
09/02/2021	18	0,00	0,00	0,00	1,01	3,50	1,167	0,318	0,74	0,00	13,6504
11/02/2021	19	0,00	0,00	0,71	12,84	19,11	6,608	4,292	5,45	0,00	13,6504
12/02/2021	20	0,00	0,00	0,00	5,85	10,49	3,496	1,854	2,67	0,00	13,6504
13/02/2021	21	0,00	0,00	0,00	3,18	8,29	2,762	1,006	1,88	0,00	13,6504
15/02/2021	22	0,00	0,00	0,00	4,17	8,61	2,871	1,319	2,09	0,00	13,6504
17/02/2021	23	7,73	15,76	36,54	49,55	52,32	32,198	32,255	32,23	0,00	13,6504
18/02/2021	24	0,74	1,00	1,24	6,87	10,13	4,035	2,882	3,46	0,00	13,6504
19/02/2021	25	1,64	2,04	3,27	4,34	6,67	3,859	3,054	3,46	0,00	13,6504
20/02/2021	26	0,00	0,00	7,11	27,20	35,09	14,068	10,864	12,47	0,00	13,6504
21/02/2021	27	0,00	0,00	0,00	2,30	5,96	1,987	0,728	1,36	0,00	13,6504
22/02/2021	28	0,00	0,09	12,81	27,74	32,64	15,148	12,866	14,01	0,00	13,6504
24/02/2021	29	39,55	40,42	46,82	50,51	51,33	45,901	43,620	44,76	0,00	13,6504
25/02/2021	30	0,00	0,00	0,01	1,10	3,26	1,092	0,353	0,72	0,00	13,6504
26/02/2021	31	0,00	0,00	0,00	2,24	5,85	1,950	0,711	1,33	0,00	13,6504
27/02/2021	32	0,00	0,00	0,00	2,73	6,37	2,124	0,864	1,49	0,00	13,6504
01/03/2021	33	0,00	0,00	0,01	0,68	2,51	0,841	0,220	0,53	0,00	13,6504
02/03/2021	34	14,15	13,00	14,81	21,16	23,43	17,462	15,507	16,48	0,00	13,6504
03/03/2021	35	1,41	1,79	2,20	6,81	10,40	4,668	3,419	4,04	0,00	13,6504
04/03/2021	36	16,08	17,42	15,32	16,78	18,62	16,677	15,681	16,18	0,00	13,6504
05/03/2021	37	0,00	0,00	0,00	7,19	12,14	4,046	2,276	3,16	0,00	13,6504
06/03/2021	38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	0,00	0,00	13,6504
08/03/2021	39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	0,00	0,00	13,6504
10/03/2021	40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	0,00	0,00	13,6504
11/03/2021	41	19,78	21,20	17,72	21,94	23,71	20,403	19,275	19,84	0,00	13,6504
12/03/2021	42	20,89	22,48	18,46	21,80	23,56	20,969	19,865	20,42	0,00	13,6504
13/03/2021	43	3,38	3,94	5,65	4,86	4,65	4,560	4,575	4,57	0,00	13,6504

14/03/2021	44	0,00	0,00	0,00	0,36	2,98	0,993	0,116	0,55	0,00	13,6504
17/03/2021	45	32,82	27,62	29,02	33,95	35,72	32,519	28,688	30,60	0,00	13,6504
18/03/2021	46	2,68	3,19	3,35	9,49	14,03	6,685	5,076	5,88	0,00	13,6504
21/03/2021	47	0,00	0,00	0,00	0,34	2,58	0,862	0,108	0,48	0,00	13,6504
22/03/2021	48	14,15	15,33	19,04	19,85	16,22	16,467	17,169	16,82	0,00	13,6504
23/03/2021	49	2,64	3,10	3,31	9,53	12,51	6,154	5,050	5,60	0,00	13,6504
24/03/2021	50	0,00	0,00	0,00	2,22	3,94	1,314	0,702	1,01	0,00	13,6504
25/03/2021	51	0,00	0,00	0,00	1,75	5,21	1,737	0,553	1,14	0,00	13,6504
29/03/2021	52	4,81	5,48	7,54	6,14	6,87	6,407	6,067	6,24	0,00	13,6504
30/03/2021	53	0,00	0,00	0,00	2,35	5,62	1,874	0,744	1,31	0,00	13,6504
31/03/2021	54	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17	0,056	0,000	0,03	0,00	13,6504
