



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Gustavo Andreto Marcato

Polinômios Ortogonais Clássicos: uma Abordagem Matricial

São José do Rio Preto
2019

Gustavo Andreto Marcato

Polinômios Ortogonais Clássicos: uma Abordagem Matricial

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

São José do Rio Preto
2019

M313p	Marcato, Gustavo Polinômios Ortogonais Clássicos : uma Abordagem Matricial / Gustavo Marcato. -- São José do Rio Preto, 2019 41 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto Orientador: Alagacone Sri Ranga 1. Matemática. 2. Análise Matemática. 3. Funções Especiais. 4. Polinômios Ortogonais. I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Gustavo Andreto Marcato

Polinômios Ortogonais Clássicos: uma Abordagem Matricial

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
Orientador

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
Departamento de Matemática Aplicada - Unesp

Prof. Dr. Jorge Manuel Vieira Capela
Departamento de Físico-Química - Unesp

São José do Rio Preto
27 de fevereiro de 2019

*À minha família,
dedico.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Ivanildo e Dirce, pelo apoio, dedicação e carinho durante toda a minha trajetória.

À minha irmã Larissa, pelo incentivo e companheirismo.

À minha namorada Isadora, por estar sempre ao meu lado durante esta caminhada.

Um agradecimento especial ao meu orientador Prof. Alagacone Sri Ranga, pelo incentivo, dedicação e amizade dedicados durante todo o período em que me orientou.

À Profa. Cleonice Fátima Bracciali, pelo incentivo, empenho e amizade.

Aos amigos, pelos bons momentos vividos durante o curso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

A Deus, por tudo.

RESUMO

Neste trabalho estudamos uma construção dos polinômios ortogonais usando uma abordagem matricial. Para isto, consideramos algumas propriedades de uma determinada classe de matrizes infinitas que possuem papel importante na determinação e representação de certas sequências polinomiais. Tais propriedades permitem a obtenção de alguns resultados clássicos da teoria de polinômios ortogonais. Usando a mesma abordagem, discutimos algumas caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos.

Palavras-chave: Polinômios Ortogonais. Caracterização dos Polinômios Ortogonais Clássicos. Matrizes de Hessenberg Infinitas. Sequências Polinomiais.

ABSTRACT

In this work we study a construction of orthogonal polynomials using a matrix approach. For this purpose, we consider properties of a certain class of infinite matrices that play an important role in determination and representation of some polynomial sequences. These properties are useful to obtain some classical results in the theory of orthogonal polynomials. Using the same approach, we discuss some characterizations of classical orthogonal polynomials.

Keywords: Orthogonal Polynomials. Characterization of Classical Orthogonal Polynomials. Infinite Hessenberg Matrices. Polynomial Sequences.

Lista de Símbolos

Lista de símbolos dividida em alfabeto romano e alfabeto grego.

Alfabeto Romano

A	matriz infinita do tipo m -Hessenberg inferior
$\tilde{A}$	dada por $\hat{D}AD$, é a matriz associada à sequência de polinômios mônicos $\{P'_{n+1}/(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$, onde A é a matriz associada a uma sequência de polinômios mônicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$
$A_{(k)}$	matriz finita $k \times k$ dada por $A_{(k)} = [a_{j,i}]$, onde $0 \leq j \leq k-1$ e $0 \leq i \leq k-1$
$A^{(k)}$	$\hat{D}A^{(k-1)}D$ para $k \geq 2$, onde $A^{(1)} = \tilde{A}$
D	matriz diagonal de índice 1 com entradas $d_{j,j-1} = j$ para $j \geq 1$
$\hat{D}$	matriz diagonal de índice -1 com entradas $\hat{d}_{j-1,j} = 1/j$ para $j \geq 1$
$\mathcal{F}$	funcional de momentos
$\mathcal{G}$	conjunto das matrizes $A \in \mathcal{L}$ tais que $\text{ind}(A) = 0$ e $a_{j,j} \neq 0$ para todo $j \geq 0$
I	matriz identidade infinita
$\text{ind}(A)$	menor inteiro m tal que $A \in \mathcal{L}$ possui pelo menos uma entrada não-nula em sua m -ésima diagonal
J	matriz diagonal de índice 0 que possui a entrada na posição $(0,0)$ igual a 0 e a entrada na posição (j,j) igual a 1 para $j \geq 1$.
$\mathcal{L}$	conjunto das matrizes infinitas do tipo m -Hessenberg inferior
MPO	matriz de polinômios ortogonais; veja Definição 4.3
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$	sequência polinomial onde P_n é de grau exatamente $n \in \mathbb{N}$
R	elemento mônico de $\mathcal{L}$ de índice -1
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathcal{T}$	conjunto das matrizes $(-1,1)$ -banda que possuem todas as entradas nas diagonais -1 e 1 não-nulas
T_A	aplicação dada por $T_A(Z) = A^{-1}ZA$ para $Z \in \mathcal{L}$, onde $A \in \mathcal{G}$
U	$A\tilde{A}^{-1}$
$\mathbb{T}$	circunferência unitária $\mathbb{T} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$
X	matriz diagonal de índice -1 com entradas $x_{j,j+1} = 1$ para $j \geq 0$
$\hat{X}$	$X^\top$
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros

Alfabeto Grego

$\delta_{m,n}$ delta de Kronecker

$\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ sequência de momentos

Sumário

1	Introdução	9
2	Preliminares	11
2.1	Polinômios Ortogonais na Reta Real	11
2.2	Polinômios Ortogonais Clássicos	14
3	Matrizes Infinitas do Tipo Hessenberg Inferior	17
4	Sequências Polinomiais	22
4.1	Sequências Polinomiais	22
4.2	Sequências de Polinômios Ortogonais	26
4.2.1	Relação de Recorrência de Três Termos	30
4.2.2	Zeros	30
4.3	Sequências de Polinômios Ortogonais Clássicos	31
4.3.1	Caracterização de Al-Salam e Chihara	33
4.3.2	Equação Diferencial de Bochner	35
4.3.3	Teorema de Hahn	37
	Considerações Finais	38
	Referências	40

1 Introdução

A teoria dos polinômios ortogonais possui diversas aplicações e contribuições em diferentes áreas da matemática e da física. Tais polinômios foram largamente estudados desde o século XIX e apresentam inúmeras propriedades interessantes que permitiram o desenvolvimento de notáveis ferramentas matemáticas, tais como as fórmulas de quadratura gaussianas (veja [5]).

Uma das propriedades mais importantes dos polinômios ortogonais consiste no fato de que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Se $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais mônicos, então existem constantes β_n e $\alpha_n \neq 0$ tais que

$$\alpha_n P_{n-1}(x) + \beta_n P_n(x) + P_{n+1}(x) = x P_n(x), \quad n \geq 1,$$

onde $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - \beta_0$.

Os chamados polinômios ortogonais clássicos (Jacobi, Laguerre, Hermite e Bessel) compõem os exemplos mais importantes no estudo dos polinômios ortogonais, pois possuem várias caracterizações em comum que os destacam dos demais polinômios ortogonais. Estas famílias de polinômios ortogonais foram amplamente estudadas a partir do uso de diferentes abordagens.

A primeira destas abordagens foi introduzida em 1929 por S. Bochner [4] e utiliza a teoria de operadores diferenciais. Bochner classificou todos os polinômios ortogonais clássicos como sendo soluções de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes polinomiais.

Mais recentemente, alguns autores estudaram os polinômios ortogonais clássicos usando uma abordagem funcional, isto é, obtiveram caracterizações já conhecidas na literatura usando a teoria de funcionais lineares. Veja por exemplo Marcellán, Brankin e Petronilho [16] e Maroni [17].

Em 2013, L. Verde-Star [21] introduziu uma nova abordagem para o estudo dos polinômios ortogonais utilizando matrizes infinitas, que é estudada nesta dissertação. Dada uma sequência de polinômios mônicos $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, onde

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} x^j, \quad \text{com } a_{n,n} = 1,$$

constrói-se a matriz infinita A com entradas $a_{n,j}$ para $0 \leq j \leq n$, $n \geq 0$, e entradas nulas caso contrário. Deste modo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{1,0} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & 1 & 0 & \dots \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Observe que A é uma matriz triangular inferior infinita cujas entradas na n -ésima linha são os coeficientes de $P_n(x)$. Estas matrizes possuem propriedades básicas que permitem a obtenção de vários resultados clássicos da teoria dos polinômios ortogonais e algumas caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos.

Este trabalho tem por objetivo, portanto, estudar esta nova abordagem para a construção dos polinômios ortogonais.

Os resultados estudados neste trabalho estão divididos em 3 capítulos.

No Capítulo 2 introduzimos conceitos e resultados preliminares da teoria dos polinômios ortogonais na reta real utilizando uma abordagem tradicional. Em seguida são apresentadas algumas caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos. Estes resultados são necessários para o bom entendimento deste trabalho.

No Capítulo 3 estudamos definições e propriedades de matrizes infinitas do tipo Hessenberg inferior que serão úteis na determinação e representação de sequências polinomiais no capítulo posterior.

Finalmente, no Capítulo 4 deste trabalho apresentamos uma correspondência entre sequências polinomiais e matrizes infinitas do tipo Hessenberg inferior. Na Seção 4.1 estabelecemos algumas propriedades destas sequências polinomiais tais como uma relação de recorrência e matrizes companheiras. Na Seção 4.2 estudamos sequências de polinômios ortogonais e apresentamos alguns resultados clássicos. Na Seção 4.3 definimos uma matriz de polinômios ortogonais clássica e estudamos algumas caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados que são necessários para a compreensão deste trabalho.

2.1 Polinômios Ortogonais na Reta Real

Nesta seção apresentamos resultados sobre polinômios ortogonais na reta real seguindo uma abordagem tradicional, normalmente utilizada na literatura. Tais resultados podem ser encontrados em Chihara [5]. Nos textos de Ismail [11] e de Szegő [19] também encontramos mais detalhes.

Definição 2.1. *Sejam $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de números complexos e $\mathcal{F}$ um funcional linear definido, sobre o espaço dos polinômios com coeficientes complexos, por*

$$\mathcal{F}(x^n) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dizemos que $\mathcal{F}$ é um funcional de momentos associado à sequência de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$. A constante μ_n é denominada momento de ordem n .

Consideramos $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ como sendo uma sequência infinita de polinômios de uma variável com P_n de grau exatamente $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios mônicos se para $n = 0, 1, 2, \dots$, o coeficiente do termo de maior grau de P_n é igual a 1.

A seguir, definimos a ortogonalidade de uma sequência de polinômios com respeito a um funcional de momentos.

Definição 2.2. *Dizemos que a sequência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, com P_n de grau exatamente n , é ortogonal com respeito a um funcional de momentos $\mathcal{F}$ se*

$$\mathcal{F}(P_m(x)P_n(x)) = \gamma_n \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

onde $\gamma_n \neq 0$ e $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker, isto é, $\delta_{m,n} = 0$ se $m \neq n$ e $\delta_{m,n} = 1$ se $m = n$.

O próximo resultado estabelece relações de ortogonalidade equivalentes à (2.1).

Teorema 2.1. *Sejam $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios e $\mathcal{F}$ um funcional de momentos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal com respeito a $\mathcal{F}$;

$$(ii) \mathcal{F}(\pi(x)P_n(x)) = \begin{cases} 0, & \text{para todo polinômio } \pi \text{ de grau } m \leq n-1, \\ \hat{\gamma}_n \neq 0, & \text{para todo polinômio } \pi \text{ de grau } n; \end{cases}$$

$$(iii) \mathcal{F}(x^m P_n(x)) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\gamma}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Como P_n é de grau exatamente n , é fácil ver que $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ é uma base para o espaço dos polinômios de grau no máximo m . Então, existem constantes $c_0, c_1, \dots, c_m$ tais que

$$\pi(x) = \sum_{j=0}^m c_j P_j(x), \text{ onde } c_m \neq 0.$$

Assim,

$$\mathcal{F}(\pi(x)P_n(x)) = \begin{cases} \sum_{j=0}^m c_j \mathcal{F}(P_j(x)P_n(x)) = 0, & \text{se } m \leq n-1, \\ c_n \mathcal{F}(P_n^2(x)) \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

A prova de que (ii) $\Rightarrow$ (iii) é imediata.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_{m,j} x^j$, com $a_{m,m} \neq 0$.

Se $m \leq n-1$, então

$$\mathcal{F}(P_m(x)P_n(x)) = \sum_{j=0}^m a_{m,j} \mathcal{F}(x^j P_n(x)) = 0.$$

O caso $m > n$ é análogo. Se $m = n$, então

$$\mathcal{F}(P_n^2(x)) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} \mathcal{F}(x^j P_n(x)) = a_{n,n} \tilde{\gamma}_n \neq 0.$$

□

A fim de estudar a existência de uma sequência de polinômios ortogonais dado um funcional de momentos, definimos os determinantes a seguir.

Definição 2.3. *Seja $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de momentos. Os determinantes definidos por*

$$\mathcal{H}_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0,$$

são chamados de determinantes de Hankel.

Teorema 2.2. *Seja $\mathcal{F}$ um funcional de momentos associado à sequência de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma sequência de polinômios ortogonais com respeito a $\mathcal{F}$ é que*

$$\mathcal{H}_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Neste caso, dizemos que o funcional de momentos $\mathcal{F}$ é semi-definido.

Dizemos que um funcional de momentos $\mathcal{F}$ é positivo-definido se $\mathcal{F}(\pi(x)) > 0$, para todo polinômio $\pi(x)$ não identicamente nulo satisfazendo $\pi(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabe-se que um funcional de momentos $\mathcal{F}$ é positivo-definido se, e somente se, seus momentos são todos reais e $\mathcal{H}_n > 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$.

Uma propriedade importante dos polinômios ortogonais é o fato de que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos.

Teorema 2.3. *Se $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com respeito a um funcional de momentos semi-definido $\mathcal{F}$, então eles satisfazem uma relação de recorrência do tipo*

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.2)$$

onde $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$, β_n e α_n são constantes com $\alpha_n \neq 0$ dadas por

$$\alpha_{n+1} = \frac{\mathcal{F}(P_n^2(x))}{\mathcal{F}(P_{n-1}^2(x))} \quad e \quad \beta_n = \frac{\mathcal{F}(xP_{n-1}^2(x))}{\mathcal{F}(P_{n-1}^2(x))}, \quad n \geq 1.$$

A recíproca desse Teorema é verdadeira e é conhecida como Teorema de Favard.

Teorema 2.4 (Favard). *Sejam $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ sequências arbitrárias de números complexos tais que $\alpha_n \neq 0$, $n \geq 1$. Considere a sequência de polinômios mônicos $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ satisfazendo a relação de recorrência de três termos*

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$.

Então, existe um único funcional de momentos semi-definido $\mathcal{F}$ tal que

$$\mathcal{F}(1) = \alpha_1, \quad \mathcal{F}(P_m(x)P_n(x)) = 0 \quad \text{se} \quad m \neq n, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $\mathcal{F}$ é positivo-definido se, e somente se, $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha_n > 0$, $n \geq 1$.

Outro aspecto interessante dos polinômios ortogonais é referente aos seus zeros. Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais com respeito a um funcional de momentos positivo-definido $\mathcal{F}$. Sabe-se que todos os zeros de P_n são reais, simples e vale a propriedade do entrelaçamento, isto é, se $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ são os n zeros de P_n em ordem crescente e $x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \dots < x_{n-1,n-1}$ são os $n-1$ zeros de P_{n-1} em ordem crescente, então

$$x_{n,j} < x_{n-1,j} < x_{n,j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.3)$$

Definição 2.4. *Seja ψ uma função real não-decrescente definida no intervalo $[a, b]$ com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Dizemos que $\xi \in [a, b]$ é um ponto de aumento de ψ se $\psi(\xi + \varepsilon) - \psi(\xi - \varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Consideramos medidas positivas $\psi(x)$ em $[a, b]$ tais que seus momentos definidos por

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

são finitos. Isto é, ψ é uma função real definida em $[a, b]$, limitada, não-decrescente, com infinitos pontos de aumento, e tal que μ_n existe para $n = 0, 1, 2, \dots$. Observe que

se $[a, b]$ é um intervalo finito, então os momentos definidos por (2.4) sempre existem. Quando $\mu_0 = 1$, a medida é chamada de medida de probabilidade.

Se $d\psi(x) = \rho(x)dx$, onde ρ é uma função absolutamente contínua, não negativa e não identicamente nula em (a, b) , ρ é denominada função peso.

Todo funcional de momentos positivo-definido $\mathcal{F}$ pode ser representado por uma integral de Stieltjes associada a uma medida positiva $d\psi$, isto é,

$$\mathcal{F}(p(x)) = \int_{\mathbb{R}} p(x) d\psi(x),$$

onde p é um polinômio com coeficientes complexos. Assim, se $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com respeito ao funcional de momentos positivo-definido $\mathcal{F}$, dizemos que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com respeito à medida positiva $d\psi$.

2.2 Polinômios Ortogonais Clássicos

Aqui apresentamos alguns resultados sobre caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos que podem ser encontrados em Chihara [5], Álvarez-Nodarse [2, 3] e Kwon, Lee e Yoo [14].

Os polinômios ortogonais de Jacobi, de Laguerre, de Hermite e de Bessel são conhecidos como polinômios ortogonais clássicos. Eles são considerados os exemplos mais importantes no estudo dos polinômios ortogonais, pois possuem várias caracterizações em comum que os destacam dos demais polinômios ortogonais.

Em 1929, S. Bochner [4] classificou todos os polinômios ortogonais clássicos como sendo soluções de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes polinomiais.

Teorema 2.5 (Bochner). *Uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é clássica, se, e somente se, dado $n \geq 0$, P_n satisfaz a equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes polinomiais*

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0, \quad (2.5)$$

onde σ é um polinômio de grau no máximo 2, τ é um polinômio de grau 1, ambos não dependem de n , e λ_n é uma constante que não depende de x .

Bochner mostrou que os únicos polinômios ortogonais que satisfazem (2.5) são

1. Os polinômios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfazem

$$(1 - x^2)y''(x) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y'(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(x) = 0,$$

com $\alpha, \beta > -1$;

2. Os polinômios de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfazem

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0,$$

com $\alpha > -1$;

3. Os polinômios de Hermite $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfazem

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0;$$

4. Os polinômios de Bessel $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfazem

$$x^2y''(x) + (2x + 2)y'(x) - n(n + 1)y(x) = 0.$$

Sabe-se que os polinômios de Bessel, diferentemente das outras três famílias de polinômios ortogonais clássicos, não são ortogonais com respeito a uma medida positiva na reta real, isto é, eles são ortogonais com respeito a um funcional de momentos semi-definido. Mais precisamente, tais polinômios foram formalmente apresentados e estudados em 1949 por Krall e Frink [12] que mostraram sua ortogonalidade com respeito a uma função peso na circunferência unitária $\mathbb{T} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

A mais antiga das caracterizações é devida a N. Sonin [18] que, em 1887, mostrou que os únicos polinômios ortogonais P_n cujas derivadas P'_n também eram ortogonais, eram os polinômios de Jacobi, de Laguerre e de Hermite.

Em 1935, W. Hahn [7] redescobriu este fato e o estendeu aos polinômios de Bessel que não haviam sido considerados por Sonin. Sua prova consistiu basicamente em supor que P_n e P'_n satisfazem, respectivamente, uma relação de recorrência de três termos

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x)$$

e

$$\frac{P'_n(x)}{n} = (x - \tilde{\beta}_n) \frac{P'_{n-1}(x)}{n-1} - \tilde{\alpha}_n \frac{P'_{n-2}(x)}{n-2},$$

e após algumas manipulações, mostrar que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz (2.5).

Dois anos mais tarde, Hahn [8] demonstrou um resultado mais geral envolvendo as derivadas dos polinômios ortogonais clássicos.

Teorema 2.6 (Hahn). *Se $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais tal que para algum $k \in \mathbb{N}$, a sequência das k -ésimas derivadas $\{P_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, então $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é clássica.*

A terceira caracterização foi proposta por Tricomi [20] que parcialmente demonstrou que somente os polinômios ortogonais clássicos possuem uma fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{\kappa_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x) \rho(x)], \quad (2.6)$$

onde ρ é uma função não-negativa em um certo intervalo, σ é um polinômio de grau no máximo 2 que não depende de n e κ_n é uma constante que não depende de x .

Uma demonstração rigorosa deste fato só foi dada em 1969 por C. Cryer [6].

Outra caracterização foi dada por E. H. Hildebrandt [9] em 1931 que mostrou que somente os polinômios ortogonais de Jacobi, de Laguerre e de Hermite são ortogonais com respeito a uma função peso ρ definida em (a, b) que é solução da equação de Pearson

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x), \quad (2.7)$$

onde σ é um polinômio de grau no máximo 2, τ é um polinômio de grau 1, ambos não dependem de n , e valem as condições de contorno

$$\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b) = 0.$$

No caso dos polinômios de Bessel, ρ é uma função peso na circunferência unitária e satisfaz (2.7) com condições de contorno diferentes. Veja Álvarez-Nodarse [3].

Os polinômios de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com respeito à função peso $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, e podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

Os polinômios de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$, são ortogonais no intervalo $[0, \infty)$ com respeito à função peso $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$, e podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}].$$

Os polinômios de Hermite, $H_n(x)$, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com respeito à função peso $\rho(x) = e^{-x^2}$, e podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}].$$

Os polinômios de Bessel, $B_n(x)$, são ortogonais com respeito à função peso $\rho(x) = e^{-2/x}$ na circunferência unitária $\mathbb{T}$, e podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$B_n(x) = 2^{-n} e^{2/x} \frac{d^n}{dx^n} [x^{2n} e^{-2/x}].$$

Uma outra caracterização foi obtida por Al-Salam e Chihara [1] que mostraram que uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é clássica se, e somente se, existem sequências de números complexos $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e σ um polinômio de grau no máximo 2, tais que

$$\sigma(x)P_n'(x) = a_n P_{n-1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n+1}(x), \quad n \geq 1. \quad (2.8)$$

3 Matrizes Infinitas do Tipo Hessenberg Inferior

Neste capítulo apresentamos algumas definições e propriedades de matrizes infinitas do tipo Hessenberg inferior que serão usadas no decorrer do trabalho. Tais matrizes infinitas possuem papel importante na determinação e representação de certas sequências polinomiais.

Os resultados apresentados são encontrados em Verde-Star [21, 22].

Seja $A = [a_{j,k}]$ uma matriz infinita com entradas reais da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & \dots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Dizemos que a entrada $a_{j,k}$ está na m -ésima diagonal de A se $j - k = m$. Ou seja, se $m > n$, então a m -ésima diagonal de A está abaixo da n -ésima diagonal de A .

Definição 3.1. Dizemos que uma matriz infinita $A = [a_{j,k}]$ é do tipo m -Hessenberg inferior se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a_{j,k} = 0$ sempre que $j - k < m$.

Denotamos por $\mathcal{L}$ o conjunto das matrizes infinitas do tipo m -Hessenberg inferior.

Definição 3.2. Se m é o menor inteiro tal que $A \in \mathcal{L}$ possui pelo menos uma entrada não-nula na diagonal m , dizemos que A é de índice m e escrevemos $\text{ind}(A) = m$.

Por definição, o índice da matriz nula infinita é infinito.

Por exemplo, a matriz identidade infinita

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

é uma matriz de $\mathcal{L}$ de índice 0.

É fácil ver que $\mathcal{L}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais de matrizes e é fechado para multiplicação. Sejam $A, B \in \mathcal{L}$ tais que $\text{ind}(A) = m$ e $\text{ind}(B) = n$. Se $C = AB$, então $C \in \mathcal{L}$, $\text{ind}(C) \geq m + n$ e

$$c_{i,k} = \sum_{j=k+n}^{i-m} a_{i,j} b_{j,k}, \quad i - k \geq m + n. \quad (3.1)$$

Definição 3.3. Dizemos que uma matriz não-nula de $\mathcal{L}$ é uma matriz diagonal se todas as suas entradas não-nulas estão em uma única diagonal.

Consideramos $\mathcal{G}$ como sendo o conjunto das matrizes $A \in \mathcal{L}$ tais que $\text{ind}(A) = 0$ e $a_{j,j} \neq 0$ para todo $j \geq 0$. Note que toda matriz $A \in \mathcal{G}$ é invertível, isto é, existe $A^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, onde $I \in \mathcal{G}$ é a matriz identidade infinita.

Lema 3.1. Seja $A \in \mathcal{L}$ com $\text{ind}(A) = m$. Se $B \in \mathcal{G}$, então

$$\text{ind}(AB) = \text{ind}(BA) = m.$$

Demonstração. Seja $C = AB$, onde $A \in \mathcal{L}$ tal que $\text{ind}(A) = m$ e $B \in \mathcal{G}$.

Pela fórmula (3.1) obtemos que os elementos da m -ésima diagonal de C são

$$c_{m+k,k} = a_{m+k,k} b_{k,k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como $\text{ind}(A) = m$, existe $k_0 \geq 0$ tal que $a_{m+k_0,k_0} \neq 0$. Da definição de $\mathcal{G}$, $b_{k,k} \neq 0$ para todo $k \geq 0$, logo $c_{m+k_0,k_0} \neq 0$. Isso mostra que $\text{ind}(C) = m$.

A prova de que $\text{ind}(BA) = m$ é análoga. $\square$

A seguir, definimos alguns elementos de $\mathcal{L}$ que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Definimos $X = [x_{j,k}] \in \mathcal{L}$ como sendo uma matriz diagonal de índice -1 tal que $x_{j,j+1} = 1$ para $j \geq 0$, e $\hat{X} = X^\top$. Isto é,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{X} = X^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Observe que $\hat{X}$ é a inversa de X à direita, pois $X\hat{X} = I$ e

$$\hat{X}X = J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Para $m \in \mathbb{N}$, é fácil ver que X^m é uma matriz diagonal de índice $-m$ que possui todas as entradas na diagonal $-m$ iguais a 1 e $\hat{X}^m$ é uma matriz diagonal de índice m que possui todas as entradas na diagonal m iguais a 1.

Seja $A = [a_{j,k}]$ uma matriz infinita qualquer. Então,

$$XA\hat{X} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

ou seja, XAX pode ser obtida deslocando-se as entradas de A uma posição para a esquerda e uma posição para cima, de maneira que a linha 0 e a coluna 0 desapareçam.

Consideramos $D = [d_{j,k}]$ e $\hat{D} = [\hat{d}_{j,k}]$ duas matrizes diagonais tais que $\text{ind}(D) = 1$, $d_{j,j-1} = j$ para $j \geq 1$, $\text{ind}(\hat{D}) = -1$ e $\hat{d}_{j-1,j} = 1/j$ para $j \geq 1$. Isto é,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Assim, $\hat{D}D = I$ e $D\hat{D} = J$.

É fácil ver que

$$XD - DX = I, \quad XJ = X, \quad J\hat{X} = \hat{X}, \quad JD = D \quad \text{e} \quad \hat{D}J = \hat{D}. \quad (3.4)$$

Observação 3.1. Seja $A \in \mathcal{G}$. Então, $(XAX)^{-1} = XA^{-1}\hat{X}$ e $(\hat{D}AD)^{-1} = \hat{D}A^{-1}D$.

Lema 3.2. Seja $A \in \mathcal{G}$. Então, $A^{-1}JAD = D$.

Demonstração. Basta observar que

$$A^{-1}JA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ * & 1 & 0 & 0 & \dots \\ * & 0 & 1 & 0 & \dots \\ * & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

onde $*$ representa uma entrada qualquer. Logo, $A^{-1}JAD = D$. $\square$

Definição 3.4. $A \in \mathcal{L}$ é uma matriz do tipo banda se existem $n, m \in \mathbb{Z}$ com $n \leq m$, tais que todas as entradas não-nulas de A estão entre as diagonais n e m . Neste caso, dizemos que A é (n, m) -banda.

É claro que se A é (n, m) -banda, então $A^\top$ é $(-m, -n)$ -banda.

Definição 3.5. As matrizes de $\mathcal{L}$ da forma

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-m} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-m-1} & t_{-m} & 0 & 0 & \dots \\ t_2 & t_1 & t_0 & \dots & t_{-m-2} & t_{-m-1} & t_{-m} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} t_k \hat{X}^k + \sum_{k=1}^m t_{-k} X^k,$$

onde $m \in \mathbb{N}$, são chamadas de matrizes de Toeplitz. Se $t_{-m} \neq 0$, então $\text{ind}(T) = -m$.

Proposição 3.1. Seja $A \in \mathcal{L}$ tal que $\text{ind}(A) = n$ e $AX = XA$. Se $n \geq 1$, então $A = 0$, e se $n \leq 0$, então A é um polinômio em X de grau $-n$.

Demonstração. Como $X\hat{X} = I$, multiplicando por $\hat{X}$ à direita em ambos os lados da equação $AX = XA$, segue que $A = XAX$. Assim, vemos que todas as entradas em

uma mesma diagonal de A são iguais, isto é, A é uma matriz de Toeplitz e podemos escrever

$$A = \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} a_{k,0} \hat{X}^k, & \text{se } n \geq 1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,0} \hat{X}^k + \sum_{k=0}^{-n} a_{0,k} X^k, & \text{se } n \leq 0. \end{cases}$$

Igualando as entradas correspondentes na coluna 0 em ambos os lados da equação $AX = XA$, obtemos que $a_{k,0} = 0$ para todo $k \geq 1$, ou seja, se $n \geq 1$, então $A = 0$, e se $n \leq 0$, segue que

$$A = \sum_{k=0}^{-n} a_{0,k} X^k.$$

□

Exemplo 3.1. Considere $A \in \mathcal{L}$ uma matriz de índice -2 que comuta com X . Assim,

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = a_0 I + a_1 X + a_2 X^2,$$

onde $a_2 \neq 0$, é um polinômio em X de grau 2.

Corolário 3.1. *Sejam $L = B^{-1}XB$, para algum $B \in \mathcal{G}$, e $A \in \mathcal{L}$ tal que $AL = LA$. Se $\text{ind}(A) = n \leq 0$, então A é um polinômio em L de grau $-n$, e se $\text{ind}(A) \geq 1$, então $A = 0$.*

Demonstração. De $L = B^{-1}XB$ e $AL = LA$, segue que $(BAB^{-1})X = X(BAB^{-1})$. Pelo Lema 3.1, obtemos $\text{ind}(BAB^{-1}) = \text{ind}(A) = n$.

Assim, pela proposição anterior, se $n \geq 1$, então $BAB^{-1} = 0$ daí $A = 0$, e se $n \leq 0$, então $BAB^{-1} = g(X)$ onde $g(X)$ é um polinômio de grau $-n$. Neste caso, $A = B^{-1}g(X)B = g(B^{-1}XB) = g(L)$. □

Definição 3.6. *Seja $A \in \mathcal{L}$ tal que $\text{ind}(A) = m$. Dizemos que A é um elemento mônico se todas as suas entradas na diagonal m são iguais a 1.*

Note que se $A \in \mathcal{G}$ é mônico, então A^{-1} também é um elemento mônico de $\mathcal{G}$.

O próximo resultado é encontrado em Verde-Star [22].

Teorema 3.1. *Seja $R \in \mathcal{L}$ mônico de índice -1 . Então, existe um único $B \in \mathcal{G}$ mônico tal que $BR = XB$.*

Demonstração. Para $j \geq 0$, tomemos ν_j como sendo a j -ésima linha da matriz I . Note que para $A \in \mathcal{L}$, $\nu_j A$ é a j -ésima linha de A . Em particular $\nu_j X = \nu_{j+1}$, $j \geq 0$.

Deste modo, se B satisfaz $BR = XB$, então

$$\nu_j BR = \nu_j XB = \nu_{j+1} B, \quad j \geq 0.$$

Assim, pode-se obter a $(j+1)$ -ésima linha de B multiplicando a j -ésima linha de B à direita por R . Como a linha 0 de B deverá ser ν_0 , é possível determinar todas linhas de B fazendo sucessivas multiplicações por R . Observe que este processo determina um único elemento mônico $B \in \mathcal{G}$. □

O próximo resultado traz propriedades úteis de matrizes tridiagonais de índice -1 que possuem entradas não-nulas nas diagonais -1 e 1 .

Definimos $\mathcal{T}$ como sendo o conjunto das matrizes $(-1, 1)$ -banda que possuem todas as entradas nas diagonais -1 e 1 não-nulas. É claro que se $L \in \mathcal{T}$, então $\text{ind}(L) = -1$, L é tridiagonal e $L^\top \in \mathcal{T}$.

Definição 3.7. Dizemos que $A, B \in \mathcal{L}$ são diagonalmente semelhantes se existe uma matriz diagonal invertível T com $\text{ind}(T) = 0$ e tal que $B = T^{-1}AT$.

Proposição 3.2. Seja $L = [\ell_{j,k}]$ uma matriz infinita. Então,

1. Se $L \in \mathcal{T}$, então L é diagonalmente semelhante a um elemento mônico de $\mathcal{T}$.
2. Se $L \in \mathcal{T}$ é mônico, então existe um único $A \in \mathcal{G}$ mônico tal que $A^{-1}LA = X$.
3. Se $L, M \in \mathcal{T}$, então L e M são semelhantes, isto é, existe uma matriz infinita invertível S tal que $L = S^{-1}MS$.
4. Se $L \in \mathcal{T}$, então L é diagonalmente semelhante a $L^\top$.
5. Se $L \in \mathcal{T}$ é mônico e possui entradas positivas na diagonal 1 , então L é diagonalmente semelhante a um elemento simétrico de $\mathcal{T}$.

Demonstração. 1. Considere a sequência $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ onde $\rho_0 = 1$ e $\rho_n = \ell_{0,1}\ell_{1,2} \cdots \ell_{n-1,n}$ para $n \geq 1$. Seja Ω_ρ a matriz diagonal de índice 0 que possui a entrada na posição (n, n) igual a ρ_n para $n \geq 0$. Assim, $\Omega_\rho L \Omega_\rho^{-1}$ é um elemento mônico de $\mathcal{T}$.

2. Decorre do Teorema 3.1.

3. Pelo item 1, se $L, M \in \mathcal{T}$, existem Ω_1 e Ω_2 matrizes diagonais de índice 0 invertíveis tais que $\Omega_1 L \Omega_1^{-1}$ e $\Omega_2 M \Omega_2^{-1}$ são elementos mônicos de $\mathcal{T}$.

Pelo item 2, existem únicos $A_1, A_2 \in \mathcal{G}$ mônicos tais que $A_1^{-1}(\Omega_1 L \Omega_1^{-1})A_1 = X = A_2^{-1}(\Omega_2 M \Omega_2^{-1})A_2$. Logo,

$$L = (\Omega_1^{-1}A_1A_2^{-1}\Omega_2) M (\Omega_2^{-1}A_2A_1^{-1}\Omega_1) = (\Omega_2^{-1}A_2A_1^{-1}\Omega_1)^{-1} M (\Omega_2^{-1}A_2A_1^{-1}\Omega_1).$$

4. Tome a sequência $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ onde $\rho_0 = 1$ e

$$\rho_n = \frac{\ell_{0,1}\ell_{1,2} \cdots \ell_{n-1,n}}{\ell_{1,0}\ell_{2,1} \cdots \ell_{n,n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Se Ω_ρ é a matriz diagonal de índice 0 que possui a entrada na posição (n, n) igual a ρ_n para $n \geq 0$, então $\Omega_\rho L \Omega_\rho^{-1} = L^\top$.

5. Considere a sequência $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ onde $\rho_0 = 1$ e $\rho_n = \sqrt{\ell_{1,0}\ell_{2,1} \cdots \ell_{n,n-1}}$ para $n \geq 1$. Seja Ω_ρ a matriz diagonal de índice 0 que possui a entrada na posição (n, n) igual a ρ_n para $n \geq 0$. Assim, $\Omega_\rho^{-1}L\Omega_\rho$ é simétrico.

□

4 Sequências Polinomiais

Neste capítulo estudamos uma relação entre sequências polinomiais e matrizes infinitas do tipo Hessenberg inferior.

Conforme mostrado em Verde-Star [22], veremos que um elemento mônico de $\mathcal{L}$ de índice -1 gera uma sequência de polinômios que correspondem às linhas de uma matriz de $\mathcal{G}$. Alguns resultados importantes sobre estas sequências polinomiais são obtidos através de propriedades das suas matrizes associadas correspondentes. Um caso interessante surge quando a matriz de Hessenberg é uma matriz de Toeplitz.

Como um caso particular, os polinômios ortogonais são gerados quando a matriz de Hessenberg é tridiagonal, ou mais precisamente, é um elemento mônico de $\mathcal{T}$ e suas entradas são os coeficientes de uma relação de recorrência de três termos. Estudamos com detalhes na Seção 4.2 que esta é uma caracterização matricial da ortogonalidade de uma sequência polinomial, que corresponde a uma versão matricial do Teorema de Favard.

Por fim, neste contexto matricial, definimos uma matriz de polinômios ortogonais clássica e estudamos algumas caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos.

4.1 Sequências Polinomiais

Nesta seção estudamos sequências polinomiais geradas por elementos mônicos de $\mathcal{L}$ de índice -1 . Os resultados apresentados são encontrados em Verde-Star [22].

Seja $R = [r_{n,j}] \in \mathcal{L}$ mônico de índice -1 . Pelo Teorema 3.1, existe um único $B \in \mathcal{G}$ mônico tal que $BR = XB$, onde X é a matriz dada em (3.2). Assim, se considerarmos $B^{-1} = C = [c_{n,j}]$, garantimos a existência de um único $C \in \mathcal{G}$ mônico tal que

$$RC = CX. \quad (4.1)$$

Escrevemos

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c_{1,0} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ c_{2,0} & c_{2,1} & 1 & 0 & \dots \\ c_{3,0} & c_{3,1} & c_{3,2} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Considere a sequência de polinômios mônicos $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ dados por

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^n c_{n,j} x^j, \quad c_{n,n} = 1, \quad n \geq 0,$$

de maneira que as entradas na n -ésima linha de C são os coeficientes de $Q_n(x)$. Dizemos que $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ é a sequência polinomial determinada por C . Dizemos também que C é a matriz associada à sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$.

Observe que, dado $n \geq 0$, a n -ésima linha da matriz

$$CX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c_{1,0} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c_{2,0} & c_{2,1} & 1 & 0 & \dots \\ 0 & c_{3,0} & c_{3,1} & c_{3,2} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

corresponde ao polinômio mônico $xQ_n(x)$ de grau $n+1$.

Comparando a n -ésima linha em ambos os lados de $RC = CX$ obtemos a relação

$$\sum_{j=0}^n r_{n,j} Q_j(x) + Q_{n+1}(x) = xQ_n(x), \quad n \geq 1, \quad (4.2)$$

onde $Q_0(x) = 1$ e $Q_1(x) = x - r_{n,0}$.

Mostraremos no decorrer do trabalho que se R é um elemento mônico de $\mathcal{T}$, então (4.2) é a conhecida relação de recorrência de três termos satisfeita pelos polinômios ortogonais.

Definição 4.1. *Sejam $A \in \mathcal{L}$ e $k \geq 1$. Definimos a k -ésima seção de A como sendo a matriz finita $k \times k$ dada por $A_{(k)} = [a_{j,i}]$, onde $0 \leq j \leq k-1$ e $0 \leq i \leq k-1$.*

Proposição 4.1. *Seja $A \in \mathcal{G}$. Então, $(A_{(k)})^{-1} = (A^{-1})_{(k)}$ para $k \geq 1$.*

Demonstração. Sejam $A = [a_{j,i}] \in \mathcal{G}$ e $k \geq 1$. Segue da definição de $\mathcal{G}$ que

$$\det(A_{(k)}) = \prod_{j=0}^{k-1} a_{j,j} \neq 0,$$

logo $A_{(k)}$ é invertível.

Observe que podemos considerar

$$A = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} a_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{k-2,0} & a_{k-2,1} & a_{k-2,2} & \dots & a_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,k-2} & a_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots \\ \hline a_{k,0} & a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k-2} & a_{k,k-1} & a_{k,k} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{[k]} & A_{1,2}^{[k]} \\ A_{2,1}^{[k]} & A_{2,2}^{[k]} \end{bmatrix},$$

onde $A_{1,1}^{[k]} = A_{(k)}$ e $A_{1,2}^{[k]} = 0_{k \times \infty}$.

Desta maneira, podemos reescrever $I = AA^{-1} = A^{-1}A$ da forma

$$I = \begin{bmatrix} A_{(k)} & 0_{k \times \infty} \\ A_{2,1}^{[k]} & A_{2,2}^{[k]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A^{-1})_{(k)} & 0_{k \times \infty} \\ (A^{-1})_{2,1}^{[k]} & (A^{-1})_{2,2}^{[k]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^{-1})_{(k)} & 0_{k \times \infty} \\ (A^{-1})_{2,1}^{[k]} & (A^{-1})_{2,2}^{[k]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(k)} & 0_{k \times \infty} \\ A_{2,1}^{[k]} & A_{2,2}^{[k]} \end{bmatrix}.$$

Assim, $I_{(k)} = A_{(k)} (A^{-1})_{(k)} = (A^{-1})_{(k)} A_{(k)}$, consequentemente $(A^{-1})_{(k)} = (A_{(k)})^{-1}$. $\square$

Definição 4.2. Seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ um polinômio mônico com coeficientes reais. Denomina-se matriz companheira do polinômio $f(x)$ a matriz $n \times n$ dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Sabe-se que todo polinômio mônico é o polinômio minimal e o polinômio característico de sua matriz companheira (veja [10]). Este fato será útil na demonstração do próximo Teorema.

Teorema 4.1. Sejam $R \in \mathcal{L}$ mônico de índice -1 , $C \in \mathcal{G}$ mônico tal que $RC = CX$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ a sequência polinomial determinada por C . Então,

$$Q_k(x) = \det(xI_{(k)} - R_{(k)}), \quad k \geq 1,$$

isto é, Q_k é o polinômio característico de $R_{(k)}$.

Demonstração. Identificando $R_{(k)}$ e $C_{(k)}$, respectivamente, consideramos as partições de

$$R = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} r_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ r_{1,0} & r_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ r_{2,0} & r_{2,1} & r_{2,2} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ r_{k-3,0} & r_{k-3,1} & r_{k-3,2} & r_{k-3,3} & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ r_{k-2,0} & r_{k-2,1} & r_{k-2,2} & r_{k-2,3} & \dots & r_{k-2,k-2} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ r_{k-1,0} & r_{k-1,1} & r_{k-1,2} & r_{k-1,3} & \dots & r_{k-1,k-2} & r_{k-1,k-1} & 1 & 0 & \dots \\ \hline r_{k,0} & r_{k,1} & r_{k,2} & r_{k,3} & \dots & r_{k,k-2} & r_{k,k-1} & r_{k,k} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right]$$

e

$$C = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c_{1,0} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c_{2,0} & c_{2,1} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ c_{k-2,0} & c_{k-2,1} & c_{k-2,2} & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c_{k-1,0} & c_{k-1,1} & c_{k-1,2} & \dots & c_{k-1,k-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline c_{k,0} & c_{k,1} & c_{k,2} & \dots & c_{k,k-2} & c_{k,k-1} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right].$$

Podemos reescrever $RC = CX$ da forma

$$\begin{bmatrix} R_{(k)} & R_{1,2}^{[k]} \\ R_{2,1}^{[k]} & R_{2,2}^{[k]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{(k)} & 0_{k \times \infty} \\ C_{2,1}^{[k]} & C_{2,2}^{[k]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{(k)} & 0_{k \times \infty} \\ C_{2,1}^{[k]} & C_{2,2}^{[k]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(k)} & X_{1,2}^{[k]} \\ X_{2,1}^{[k]} & X_{2,2}^{[k]} \end{bmatrix}.$$

Logo, $R_{(k)}C_{(k)} = C_{(k)}X_{(k)} - R_{1,2}^{[k]}C_{2,1}^{[k]}$.

Observe que pela Proposição 4.1, $(C_{(k)})^{-1} = (C^{-1})_{(k)}$, então

$$\begin{aligned} (C_{(k)})^{-1} R_{(k)} C_{(k)} &= X_{(k)} - (C^{-1})_{(k)} R_{1,2}^{[k]} C_{2,1}^{[k]} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_{k,0} & -c_{k,1} & -c_{k,2} & -c_{k,3} & \dots & -c_{k,k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Esta é a matriz companheira do polinômio Q_k . Utilizando o fato de que matrizes semelhantes possuem mesmo polinômio característico, concluímos que Q_k é o polinômio característico da matriz $R_{(k)}$. $\square$

Mais adiante, usaremos o resultado anterior para mostrar que se $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais mônicos, então P_k é o polinômio característico de $L_{(k)}$, onde L é um elemento mônico de $\mathcal{T}$.

Agora, estudamos o caso em que R é uma matriz de Toeplitz.

Teorema 4.2. *Sejam $R \in \mathcal{L}$ mônico de índice -1 , $C \in \mathcal{G}$ mônico tal que $RC = CX$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ a sequência polinomial determinada por C . Se R é uma matriz de Toeplitz, então*

$$\frac{Q_{n+1}(x) - Q_{n+1}(y)}{x - y} = \sum_{j=0}^n Q_j(x) Q_{n-j}(y), \quad n \geq 0. \quad (4.4)$$

Demonstração. Dada uma sequência $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, sejam

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} t_k \hat{X}^k + X = \begin{bmatrix} t_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ t_1 & t_0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ t_2 & t_1 & t_0 & 1 & 0 & \dots \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

uma matriz de Toeplitz de índice -1 , $C \in \mathcal{G}$ mônico tal que $RC = CX$ e $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ a sequência polinomial determinada por C .

Substituindo $r_{n,j} = t_{n-j}$ em (4.2) segue que

$$t_n Q_0(x) + t_{n-1} Q_1(x) + \dots + t_0 Q_n(x) + Q_{n+1}(x) = x Q_n(x), \quad n \geq 0. \quad (4.5)$$

Considere a série de potências formal

$$f(z) = 1 + t_0 z + t_1 z^2 + t_2 z^3 + \dots,$$

e a função geradora da sequência $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$

$$G(z, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x) z^k.$$

Usando (4.5), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 1 + xzG(z, x) &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k t_{k-j} Q_j(x) + Q_{k+1} \right) z^{k+1} \\
 &= G(z, x) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k z t_{k-j} Q_j(x) \right) z^k \\
 &= G(z, x) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} t_j z^{j+1} \right) G(z, x) \\
 &= f(z)G(z, x).
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$G(z, x) = \frac{1}{f(z) - xz}.$$

Assim,

$$\frac{G(z, x) - G(z, y)}{x - y} = \frac{z}{(f(z) - xz)(f(z) - yz)} = zG(z, x)G(z, y). \quad (4.6)$$

Comparando os coeficientes de z^{n+1} no primeiro e no último termo de (4.6) obtemos (4.4). $\square$

4.2 Sequências de Polinômios Ortogonais

Nesta seção estudamos sequências de polinômios ortogonais. O primeiro Teorema aqui apresentado fornece uma caracterização em termos de matrizes para a ortogonalidade de uma sequência de polinômios, e é uma versão matricial do Teorema de Favard. Como referência utilizamos Verde-Star [21].

Seja $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios mônicos com coeficientes reais tal que P_n é de grau exatamente n . Expressamos

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} x^j, \text{ onde } a_{n,n} = 1.$$

Consideramos a matriz infinita $A = [a_{n,j}]$ de maneira que as entradas na n -ésima linha de A são os coeficientes de $P_n(x)$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{1,0} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & 1 & 0 & \dots \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Dizemos que A é a matriz associada à sequência de polinômios mônicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ e que n -ésima linha de A corresponde ao polinômio $P_n(x)$.

Observe que A é um elemento mônico de $\mathcal{G}$, logo A^{-1} existe.

A n -ésima linha da matriz

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{1,0} & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a_{2,0} & a_{2,1} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

corresponde a $xP_n(x)$ e a n -ésima linha da matriz

$$XA = \begin{bmatrix} a_{1,0} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & 1 & 0 & \dots \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

corresponde a $P_{n+1}(x)$.

Observe ainda que a n -ésima linha de

$$AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,1} & 2 & 0 & 0 & \dots \\ a_{3,1} & 2a_{3,2} & 3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

corresponde a $P'_n(x)$, onde D é a matriz definida em (3.3) que representa o operador de derivada com respeito à base $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$.

Sejam $\mathcal{F}$ um funcional de momentos associado à sequência de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $v = [\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots]^{\top}$ o vetor de momentos. Então,

$$(a) \quad \mathcal{F}(P_n(x)) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} \mu_j \quad \text{é a } n\text{-ésima coordenada do vetor coluna infinito } Av.$$

$$(b) \quad \text{Dado } m \geq 0, \quad \mathcal{F}(x^m P_n(x)) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} \mu_{j+m} \quad \text{é a } n\text{-ésima coordenada do vetor coluna infinito } AX^m v.$$

Dizemos que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, com P_n de grau exatamente n , é ortogonal com respeito a um funcional de momentos $\mathcal{F}$ se

$$\mathcal{F}(P_m(x)P_n(x)) = \gamma_n \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

onde $\gamma_n \neq 0$ e $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker.

Pelo Teorema 2.1, a sequência de polinômios mônicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal com respeito ao funcional de momentos $\mathcal{F}$ se, e somente se,

$$\mathcal{F}(x^j P_n(x)) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq j \leq n-1, \\ \gamma_n = \mathcal{F}(P_n^2(x)) \neq 0, & \text{se } j = n. \end{cases}$$

Assim, dado $m \geq 0$, como $\mathcal{F}(x^m P_n(x))$ é a n -ésima coordenada do vetor coluna $AX^m v$, onde v é o vetor de momentos, obtemos que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal com respeito

ao funcional de momentos $\mathcal{F}$ se, e somente se,

$$AX^m v = \begin{bmatrix} \mathcal{F}(x^m P_0(x)) \\ \mathcal{F}(x^m P_1(x)) \\ \mathcal{F}(x^m P_2(x)) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(x^m P_{m-1}(x)) \\ \gamma_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

onde $\gamma_m = \mathcal{F}(P_m^2(x)) \neq 0$.

Observação 4.1. Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios mônicos qualquer e A sua matriz associada. Como A e A^{-1} são mônicos de índice 0 e X é mônico de índice -1 , é fácil ver que $L = AXA^{-1}$ é mônico de índice -1 . Isso garante que todas as entradas de L na diagonal -1 são não-nulas. Este fato será útil na prova do próximo resultado.

Agora, estudamos uma versão matricial do Teorema de Favard (Teorema 2.4).

Teorema 4.3. *Sejam $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios mônicos e A sua matriz associada. Então, $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal com respeito a algum funcional de momentos se, e somente se, $L = AXA^{-1} \in \mathcal{T}$, isto é, L é $(-1, 1)$ -banda e todas as suas entradas nas diagonais -1 e 1 são não-nulas.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal com respeito ao funcional de momentos $\mathcal{F}$ associado à sequência de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ e considere $v = [\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots]^\top$ como sendo o vetor de momentos. De $L = AXA^{-1}$, segue que $L^m A = AX^m$, logo $L^m Av = AX^m v$ para $m \geq 0$.

Para $j \geq 0$, tomemos e_j como sendo o vetor coluna infinito que possui a j -ésima coordenada igual 1 e todas as outras coordenadas iguais a 0.

Por (4.7), $Av = \gamma_0 e_0$ e $AX^m v \in \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$ para $m \geq 0$, onde $\text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$ denota o espaço gerado por $\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$. Ou seja, existem escalares $c_{m,j}$ para $j = 0, 1, \dots, m-1$, e $c_{m+1,j}$ para $j = 0, 1, \dots, m$, tais que

$$AX^m v = L^m Av = \gamma_0 L^m e_0 = \gamma_m e_m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{m,j} e_j \quad \text{e}$$

$$AX^{m+1} v = L^{m+1} Av = \gamma_0 L^{m+1} e_0 = \gamma_{m+1} e_{m+1} + \sum_{j=0}^m c_{m+1,j} e_j.$$

Multiplicando a primeira equação por L obtemos

$$\gamma_0 L^{m+1} e_0 = \gamma_m L e_m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{m,j} L e_j = \gamma_{m+1} e_{m+1} + \sum_{j=0}^m c_{m+1,j} e_j.$$

Assim,

$$L e_m = \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} e_{m+1} + \sum_{j=0}^m \frac{c_{m+1,j}}{\gamma_m} e_j - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_{m,j}}{\gamma_m} L e_j.$$

Note que $\gamma_0 Le_0 = \gamma_1 e_1 + c_{1,0} e_0$. Com $g_{0,0} = c_{1,0}/\gamma_0$, segue que

$$Le_0 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} e_1 + g_{0,0} e_0 \in \text{span}\{e_0, e_1\}.$$

Suponha que para $k = 0, 1, \dots, m-1$, existem escalares $g_{k,j}$ para $j = 0, 1, \dots, k$, tais que

$$Le_k = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} e_{k+1} + \sum_{j=0}^k g_{k,j} e_j \in \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_{k+1}\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} Le_m &= \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} e_{m+1} + \sum_{j=0}^m \frac{c_{m+1,j}}{\gamma_m} e_j - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_{m,j}}{\gamma_m} Le_j \\ &= \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} e_{m+1} + \sum_{j=0}^m \frac{c_{m+1,j}}{\gamma_m} e_j - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_{m,j}}{\gamma_m} \left(\frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j} e_{j+1} + \sum_{i=0}^j g_{j,i} e_i \right) \\ &= \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} e_{m+1} + \sum_{j=0}^m g_{m,j} e_j. \end{aligned}$$

para alguns $g_{m,j}$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Portanto, segue por indução que $Le_m \in \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_{m+1}\}$ para todo $m \geq 0$.

Note que Le_m resulta na m -ésima coluna de L . Então, dado $m \geq 0$ temos que $\ell_{m+1,m} = \gamma_{m+1}/\gamma_m \neq 0$ e $\ell_{m+j,m} = 0$ para $j \geq 2$, isto é, todas as entradas de L na diagonal 1 são não-nulas e todas as entradas abaixo da diagonal 1 são nulas.

Sabemos que L é mônico de índice -1 . Portanto, L é $(-1, 1)$ -banda e todas as suas entradas nas diagonais -1 e 1 são não-nulas.

($\Leftarrow$) Suponha que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência polinomial com matriz associada $A \in \mathcal{G}$ tal que $L = AXA^{-1} \in \mathcal{T}$. Considere $\ell_{k+1,k} = \alpha_{k+1}$ para $k \geq 0$. Note que $L \in \mathcal{T}$, então $\alpha_j \neq 0$ para todo $j \geq 1$.

Seja v a coluna 0 da matriz A^{-1} , então $Av = e_0$.

Como L é $(-1, 1)$ -banda, dado $m \geq 2$, segue que $L^m = [\ell_{j,k}^{(m)}]$ é $(-m, m)$ -banda e suas entradas na m -ésima diagonal são $\ell_{m+k,k}^{(m)} = \alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\cdots\alpha_{k+m} \neq 0$ para $k \geq 0$.

Logo $AX^m v = L^m Av = L^m e_0$, ou seja, $AX^m v$ é como em (4.7) e consequentemente $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal com respeito ao funcional de momentos $\mathcal{F}$ cujos momentos são as entradas da coluna 0 de A^{-1} . Observe que $\gamma_0 = \mu_0 = 1$ e $\gamma_m = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ para $m \geq 1$.

Note que $L^m e_0 = AX^m v$, então $\ell_{0,0}^{(m)} = e_0^\top L^m e_0 = (e_0^\top A) X^m v = e_0^\top X^m v = \mu_m$. Isso garante que a sequência de momentos pode ser obtida de L . $\square$

Provamos que a matriz L no Teorema anterior é da forma

$$L = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

onde $\alpha_n = \gamma_n/\gamma_{n-1} \neq 0$ para $n \geq 1$. Tais matrizes são conhecidas como matrizes de Jacobi e desempenham papel importante no estudo dos polinômios ortogonais, como veremos mais adiante.

4.2.1 Relação de Recorrência de Três Termos

Com $L = AXA^{-1} \in \mathcal{T}$, igualando a n -ésima linha em ambos os lados da equação $LA = AX$, obtemos que a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz a relação de recorrência de três termos

$$\alpha_n P_{n-1}(x) + \beta_n P_n(x) + P_{n+1}(x) = x P_n(x), \quad n \geq 1, \quad (4.9)$$

onde $\alpha_n \neq 0$, $n \geq 1$, $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - \beta_0$.

Observe que a volta do Teorema 4.3 mostra que os polinômios ortogonais mônicos são gerados por elementos mônicos de $\mathcal{T}$, isto é, qualquer sequência de polinômios que satisfaça uma relação de recorrência da forma (4.9) é uma sequência de polinômios ortogonais com respeito a algum funcional linear.

Da relação de recorrência de três termos é possível obter facilmente a fórmula

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) &= [P_n(x)]^2 + \alpha_n [P'_n(x)P_{n-1}(x) - P'_{n-1}(x)P_n(x)] \\ &= [P_n(x)]^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} \alpha_{j+2} \cdots \alpha_n [P_j(x)]^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.2 Zeros

Através desta abordagem matricial é possível mostrar as propriedades dos zeros dos polinômios ortogonais.

Sejam $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com matriz associada A e $L = AXA^{-1}$ como em (4.8). Pelo Teorema 4.1, segue que, para $k \geq 1$, $P_k(x)$ é o polinômio característico de

$$L_{(k)} = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{k-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k-2} & \beta_{k-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, os zeros de $P_k(x)$ são os autovalores de $L_{(k)}$.

Podemos agora estudar as propriedades dos zeros de P_n .

Teorema 4.4. *Sejam $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos e A sua matriz associada tal que $L = AXA^{-1} \in \mathcal{T}$ possui entradas reais na diagonal 0 e entradas positivas na diagonal 1. Então, os zeros de P_n são reais, simples e entre dois zeros consecutivos de P_n existe somente um zero de P_{n-1} .*

Demonstração. Seja

$$L = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Por hipótese $\beta_k \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{k+1} > 0$ para $k \geq 0$, logo $L_{(k)}$ é semelhante a uma matriz simétrica (veja o item 5 da proposição 3.2). Ou seja, todos os autovalores de $L_{(k)}$ são reais e, em outras palavras, todos os zeros de P_k são reais.

Faremos a prova de que os zeros de P_n são simples e se entrelaçam com os zeros de P_{n-1} por indução.

O zero de $P_1(x) = x - \beta_0$ é $x_{1,1} = \beta_0 \in \mathbb{R}$. Como $\alpha_1 > 0$, $P_2(x) = (x - \beta_0)(x - \beta_1) - \alpha_1$ tem um zero em $(\max\{\beta_0, \beta_1\}, +\infty)$ e um zero em $(-\infty, \min\{\beta_0, \beta_1\})$. Portanto, P_2 possui dois zeros simples $x_{2,1} < x_{2,2}$ tais que $x_{2,1} < x_{1,1} < x_{2,2}$ e o resultado é válido para $n = 2$.

Suponhamos que o resultado é válido para $n = k - 1$.

Sejam $x_{k-1,1} < x_{k-1,2} < \dots < x_{k-1,k-1}$ os zeros de P_{k-1} em ordem crescente e $x_{k-2,1} < x_{k-2,2} < \dots < x_{k-2,k-2}$ os zeros de P_{k-2} em ordem crescente, onde

$$x_{k-1,j} < x_{k-2,j} < x_{k-1,j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-2.$$

Observe que $(-1)^j P_{k-2}(x) > 0$ em $(x_{k-2,k-2-j}, x_{k-2,k-1-j})$, $0 \leq j \leq k-2$, com $x_{k-2,0} = -\infty$ e $x_{k-2,k-1} = +\infty$. Como $x_{k-1,k-1-j} \in (x_{k-2,k-2-j}, x_{k-2,k-1-j})$, obtemos que $(-1)^j P_{k-2}(x_{k-1,k-1-j}) > 0$ para $0 \leq j \leq k-2$.

Pela relação de recorrência (4.9) temos que

$$P_k(x) = (x - \beta_{k-1})P_{k-1}(x) - \alpha_{k-1}P_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Como $\alpha_{k-1} > 0$, podemos escrever

$$(-1)^j P_k(x_{k-1,k-1-j}) = -\alpha_{k-1}(-1)^j P_{k-2}(x_{k-1,k-1-j}) < 0,$$

para $0 \leq j \leq k-2$. Ou seja, P_k muda de sinal entre dois zeros consecutivos de P_{k-1} .

Note que P_k é mônico e $P_k(x_{k-1,k-1}) < 0$, então P_k muda de sinal em $(x_{k-1,k-1}, +\infty)$. De maneira análoga prova-se que P_k troca de sinal em $(-\infty, x_{k-1,1})$.

Portanto, se considerarmos $x_{k,1} < x_{k,2} < \dots < x_{k,k}$ como sendo os zeros de P_k , provamos que $x_{k,1} \in (-\infty, x_{k-1,1})$, $x_{k,j} \in (x_{k-1,j-1}, x_{k-1,j})$, para $2 \leq j \leq k-2$ e $x_{k,k} \in (x_{k-1,k-1}, +\infty)$. □

4.3 Sequências de Polinômios Ortogonais Clássicos

Utilizando esta abordagem matricial é possível obter algumas caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos descritas na Seção 2.2. A referência aqui utilizada é Verde-Star [21].

Definição 4.3. *Sejam $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos e A sua matriz associada. Dizemos que A é uma matriz de polinômios ortogonais (MPO).*

Considere A uma MPO associada à sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n\}_{n=0}^\infty$. Note que AD é de índice 1 e a sua n -ésima linha é o vetor

$$[a_{n,1}, 2a_{n,2}, 3a_{n,3}, \dots, na_{n,n}, 0, \dots]$$

que corresponde a $P'_n(x)$.

Assim,

$$\hat{D}AD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,1}/2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{3,1}/3 & 2a_{3,2}/3 & 1 & 0 & \dots \\ a_{4,1}/4 & 2a_{4,2}/4 & 3a_{4,3}/4 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

é um elemento mônico de $\mathcal{G}$, logo é invertível, e sua n -ésima linha corresponde ao polinômio mônico $P'_{n+1}(x)/(n+1)$, $n \geq 0$. Isto é, $\tilde{A} = \hat{D}AD$ é a matriz associada à sequência $\{\tilde{P}_n\}_{n=0}^\infty$, onde $\tilde{P}_n(x) = P'_{n+1}(x)/(n+1)$.

Apresentamos agora a definição de MPO clássica.

Definição 4.4. *Seja A uma MPO associada à sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n\}_{n=0}^\infty$. Dizemos que A é clássica se $\tilde{A} = \hat{D}AD$ é também uma MPO, isto é, $\{P'_{n+1}/(n+1)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com respeito a um funcional de momentos.*

Esta definição se deve a Sonin [18] que mostrou que os únicos polinômios ortogonais P_n cujas derivadas P'_n também eram ortogonais, eram os polinômios de Jacobi, de Laguerre e de Hermite. Posteriormente, este fato foi redescoberto por Hahn [8] que o estendeu aos polinômios de Bessel.

É imediato pelo Teorema 4.3 que A é clássica se, e somente se, $M = \tilde{A}X\tilde{A}^{-1}$ é um elemento mônico de $\mathcal{T}$. Neste caso, consideramos

$$M = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\beta}_2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

onde $\tilde{\alpha}_n \neq 0$ para $n \geq 1$. De $M\tilde{A} = \tilde{A}X$, obtemos que

$$\tilde{\alpha}_n \tilde{P}_{n-1}(x) + \tilde{\beta}_n \tilde{P}_n(x) + \tilde{P}_{n+1}(x) = x \tilde{P}_n(x), \quad n \geq 1, \quad (4.11)$$

onde $\tilde{P}_0(x) = 1$ e $\tilde{P}_1(x) = x - \tilde{\beta}_0$.

Antes de estudarmos caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos, apresentamos um resultado que fornece uma condição necessária e suficiente para que uma MPO seja clássica. Este resultado será bastante utilizado no restante do trabalho.

Teorema 4.5. *Seja A uma MPO. A é clássica se, e somente se, $A\tilde{A}^{-1}$ é um elemento $(0, 2)$ -banda de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Sejam A uma MPO e $L = AXA^{-1} \in \mathcal{T}$. Definamos $U = A\tilde{A}^{-1}$ e $M = U^{-1}LU$. Note que U é um elemento mônico de $\mathcal{G}$ e M é mônico de índice -1 .

Assim,

$$M\tilde{A} = (U^{-1}LU)\tilde{A} = U^{-1}LA\tilde{A}^{-1}\tilde{A} = U^{-1}AX = \tilde{A}X.$$

Pelo Lema 3.2,

$$A^{-1}DU^{-1}A = A^{-1}D\tilde{A} = A^{-1}D\hat{D}AD = A^{-1}JAD = D, \quad (4.12)$$

ou seja, $D(U^{-1}A) = D\tilde{A} = AD$, logo

$$DU^{-1} = ADA^{-1}.$$

Pela fórmula (3.4), $I = XD - DX$, então

$$A = AXD - ADX = LAD - AD(A^{-1}A)X = LAD - ADA^{-1}LA.$$

Multiplicando por A^{-1} em ambos os lados da equação acima obtemos

$$I = LADA^{-1} - ADA^{-1}L.$$

De $ADA^{-1} = DU^{-1}$, segue que

$$I = LDU^{-1} - DU^{-1}L.$$

Portanto,

$$U = LD - DU^{-1}LU = LD - DM. \quad (4.13)$$

($\Rightarrow$) Se A é uma MPO clássica, isto é, M é um elemento mônico de $\mathcal{T}$, por (4.13) U é um elemento $(0, 2)$ -banda de $\mathcal{G}$.

($\Leftarrow$) Se U é um elemento $(0, 2)$ -banda de $\mathcal{G}$, por (4.13) temos que M é $(-1, 1)$ -banda. Vamos mostrar que M possui entradas não-nulas na diagonal 1.

Dado $k \geq 0$, comparando as entradas na posição $(k+3, k)$ em ambos os lados de $LU = UM$ segue que

$$\alpha_{k+3} [(k+1)\alpha_{k+2} - (k+2)m_{k+1,k}] = m_{k+1,k} [(k+2)\alpha_{k+3} - (k+3)m_{k+2,k+1}].$$

Logo, $m_{k+1,k} [2(k+2)\alpha_{k+3} - (k+3)m_{k+2,k+1}] = (k+1)\alpha_{k+2}\alpha_{k+3} \neq 0$, $k \geq 0$.

Assim, $m_{k+1,k} \neq 0$ para $k \geq 0$.

Portanto, $M \in \mathcal{T}$ e A é uma MPO clássica. $\square$

4.3.1 Caracterização de Al-Salam e Chihara

Estudamos agora a caracterização de Al-Salam e Chihara (2.8) provada em [1] e apresentamos uma demonstração deste resultado em termos matriciais encontrada em Verde-Star [21].

Sejam A uma MPO clássica e $L, M \in \mathcal{T}$ mônicos tais que $LA = AX$ e $M\tilde{A} = \tilde{A}X$. Provamos que $A\tilde{A}^{-1} = U = LD - DM$ é $(0, 2)$ -banda de $\mathcal{G}$ e $LU = UM$.

Logo,

$$L^2D + DM^2 = 2LDM. \quad (4.14)$$

Pelo item 4 da Proposição 3.2, existem matrizes diagonais de índice 0 invertíveis Ω_ρ e Ω_σ tais que $\Omega_\rho L \Omega_\rho^{-1} = L^\top$ e $\Omega_\sigma M \Omega_\sigma^{-1} = M^\top$. De (4.13) segue que

$$U^\top = D^\top L^\top - M^\top D^\top = D^\top \Omega_\rho L \Omega_\rho^{-1} - \Omega_\sigma M \Omega_\sigma^{-1} D^\top,$$

então,

$$\Omega_\sigma^{-1} U^\top \Omega_\rho = \Omega_\sigma^{-1} D^\top \Omega_\rho L - M \Omega_\sigma^{-1} D^\top \Omega_\rho.$$

Considere

$$V = \Omega_\sigma^{-1} U^\top \Omega_\rho \quad (4.15)$$

e

$$E = \Omega_\sigma^{-1} D^\top \Omega_\rho. \quad (4.16)$$

Logo,

$$V = EL - ME. \quad (4.17)$$

Note que V é uma matriz $(-2, 0)$ -banda e possui entradas não-nulas na diagonal 0 e E é uma matriz diagonal de índice -1 com entradas não-nulas na diagonal -1 .

Por (4.15), segue que $U^\top = \Omega_\sigma V \Omega_\rho^{-1}$. Como $LU = UM$, temos $U^\top L^\top = M^\top U^\top$, logo $(\Omega_\sigma V \Omega_\rho^{-1}) (\Omega_\rho L \Omega_\sigma^{-1}) = (\Omega_\sigma M \Omega_\sigma^{-1}) (\Omega_\sigma V \Omega_\rho^{-1})$. Daí,

$$VL = MV.$$

Observe que $UVL = UMV = LUV$, isto é, UV comuta com L . Analogamente, $VUM = VLU = MVU$ e VU comuta com M . Pelo Lema 3.1 $\text{ind}(UV) = \text{ind}(V)$, onde $-2 \leq \text{ind}(V) \leq 0$, então pelo Corolário 3.1

$$UV = g(L),$$

onde g é um polinômio de grau no máximo 2.

Assim, $VU = U^{-1}(UV)U = U^{-1}g(L)U = g(U^{-1}LU) = g(M)$.

Então, como $A = U\tilde{A}$ e $M = \tilde{A}X\tilde{A}^{-1}$ segue que

$$VA = VU\tilde{A} = g(M)\tilde{A} = \tilde{A}g(X). \quad (4.18)$$

Igualando a n -ésima linha do primeiro e do último termo da equação acima obtemos

$$\tilde{P}_n(x)g(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1}g(x) = v_{n,n}P_n(x) + v_{n,n+1}P_{n+1}(x) + v_{n,n+2}P_{n+2}(x), \quad (4.19)$$

onde g é um polinômio de grau no máximo 2. Ou seja, provamos que se A é clássica, então (4.19) é válida. Note que (4.19) e (2.8) são equivalentes.

Podemos agora enunciar o próximo Teorema que estabelece uma versão matricial de (2.8). Lembramos que este resultado foi provado inicialmente em [1] utilizando uma abordagem diferente.

Teorema 4.6. *Seja A uma MPO. A é clássica se, e somente se, existem uma matriz W $(-2, 0)$ -banda com entradas não-nulas na diagonal 0 e um polinômio $q(x)$ de grau no máximo 2 tais que*

$$WA = \tilde{A}q(X). \quad (4.20)$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Já mostramos em (4.18) que se A é clássica, o Teorema segue com $W = V$ e $q = g$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que A é MPO, $L = AXA^{-1} \in \mathcal{T}$ e existem uma matriz W $(-2, 0)$ -banda com entradas não-nulas na diagonal 0 e um polinômio $q(x)$ de grau no máximo 2 tais que $WA = \tilde{A}q(X)$. Mostremos que $U = A\tilde{A}^{-1} \in \mathcal{G}$ é $(0, 2)$ -banda.

Note que

$$UW = A\tilde{A}^{-1}W = Aq(X)A^{-1} = q(L).$$

Como L é $(-1, 1)$ -banda e q é de grau no máximo 2, a igualdade acima garante que UW é $(-2, 2)$ -banda. Assim, para $k \geq 3$, a entrada $(k, 0)$ de UW é igual a 0, ou seja, $u_{k,0}w_{0,0} = 0$. Por hipótese $w_{0,0} \neq 0$, logo $u_{k,0} = 0$ para $k \geq 3$.

Da mesma forma, para $k \geq 4$, a entrada $(k, 1)$ de UW é igual a 0, isto é, $u_{k,0}w_{0,1} + u_{k,1}w_{1,1} = 0$. Portanto, $u_{k,1} = 0$ para $k \geq 4$.

Repetindo o mesmo raciocínio para as próximas colunas, é possível provar que todas as entradas de U abaixo da diagonal 2 são nulas, consequentemente U é um elemento $(0, 2)$ -banda de $\mathcal{G}$ e pelo Teorema 4.5 concluímos que A é uma MPO clássica. $\square$

4.3.2 Equação Diferencial de Bochner

Aqui, apresentamos um estudo sobre a equação diferencial de Bochner e uma prova matricial do Teorema 2.5 que é devido a Bochner [4]. Os resultados aqui apresentados são encontrados em Verde-Star [21].

Seja A uma MPO clássica. Provamos que L e M são elementos mônicos de $\mathcal{T}$ tais que $LA = AX$ e $M\tilde{A} = \tilde{A}X$, $U = LD - DM = A\tilde{A}^{-1}$ é $(0, 2)$ -banda de $\mathcal{G}$, $V = EL - ME$, $LU = UM$, $VL = MV$ e $UV = g(L)$, onde g é um polinômio de grau no máximo 2.

Assim,

$$UV = U(EL - ME) = UEL - UME = UEL - LUE$$

e

$$UV = (LD - DM)V = LDV - DMV = LDV - DVL.$$

Logo, $(UE + DV)L = L(UE + DV)$. Como $\text{ind}(UE + DV) = -1$, pelo Corolário 3.1, $UE + DV = h(L)$ onde h é um polinômio de grau 1.

Também podemos escrever

$$VU = (EL - ME)U = ELU - MEU = EUM - MEU$$

e

$$VU = V(LD - DM) = VLD - VDM = MVD - VDM.$$

Analogamente, $(EU + VD)M = M(EU + VD)$, $\text{ind}(EU + VD) = -1$, então $EU + VD = f(M)$, onde f é um polinômio de grau 1.

Observe que de (4.13) e (4.17), respectivamente, segue que $UE = LDE - DME$ e $DV = DEL - DME$, logo

$$UE - DV = LDE - DEL. \quad (4.21)$$

Agora, definimos a aplicação $T_A : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ dada por $T_A(Z) = A^{-1}ZA$ para $Z \in \mathcal{L}$. Como $A \in \mathcal{G}$, T_A é um isomorfismo e preserva índices. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathcal{L}$, é fácil ver que $T_A(\alpha X + Y) = \alpha T_A(X) + T_A(Y)$ e $T_A(XY) = T_A(X)T_A(Y)$. Além disso, $T_A(L) = X$ e $T_A(UV) = g(T_A(L)) = g(X)$.

Por (4.12) obtemos

$$T_A(DU^{-1}) = A^{-1}DU^{-1}A = D.$$

De $DV = DU^{-1}UV$ podemos escrever

$$T_A(DV) = T_A(DU^{-1})T_A(UV) = Dg(X).$$

Note que $UE = h(L) - DV$, logo

$$DE = DU^{-1}UE = DU^{-1}(h(L) - DV).$$

Então, utilizando o fato de que $T_A(h(L)) = h(X)$, obtemos

$$T_A(DE) = T_A(DU^{-1})T_A(h(L) - DV) = D(h(X) - Dg(X)). \quad (4.22)$$

Ou seja, obtemos a equação diferencial de Bochner

$$\Lambda A = A(Dh(X) - D^2g(X)), \quad (4.23)$$

onde $\Lambda = DE$ é uma matriz diagonal de índice 0.

Observe que a n -ésima linha de AD^2 corresponde a $P_n''(x)$. Comparando a n -ésima linha em ambos de (4.23) obtemos

$$\lambda_n P_n(x) = h(x)P_n'(x) - g(x)P_n''(x), \quad n \geq 0, \quad (4.24)$$

onde h é um polinômio de grau 1, g é um polinômio de grau no máximo 2 e λ_n é a entrada na posição (n, n) da matriz DE . Do fato de que E é uma matriz diagonal de índice -1 com entradas não-nulas na diagonal -1 , segue que $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_n \neq 0$ para $n \geq 1$. Note que (4.24) e (2.5) são equivalentes.

Aqui, $Dh(X) - D^2g(X)$ é $(0, 2)$ -banda e sua entrada na posição $(0, 0)$ é 0.

Teorema 4.7. *Seja A uma MPO. A é clássica se, e somente se, existem ψ polinômio de grau 1, ϕ polinômio de grau no máximo 2 e uma matriz diagonal Δ de índice 0 tal que se δ_k é a sua entrada na posição (k, k) , então $\delta_0 = 0$ e $\delta_k \neq 0$ para $k \geq 1$, que satisfazem*

$$\Delta A = A(D\psi(X) - D^2\phi(X)). \quad (4.25)$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Provamos em (4.23) que se A é clássica, então (4.25) é satisfeita com $\Delta = \Lambda$, $\psi = h$ e $\phi = g$.

($\Leftarrow$) Defina $U = A\tilde{A}^{-1} \in \mathcal{G}$ e $B = D\psi(X) - D^2\phi(X)$. Assim, $\Delta A = AB$ e $T_A(\Delta) = B$.

Podemos escrever $\Delta = DE$, onde $E = [e_{k,j}]$ é uma matriz diagonal de índice -1 tal que $e_{k,k+1} = \delta_{k+1}/(k+1) \neq 0$ para $k \geq 0$. Logo, $T_A(DE) = T_A(\Delta) = B$ e

$$T_A(DE) = T_A(DU^{-1}UE) = T_A(DU^{-1})T_A(UE) = DT_A(UE).$$

Ou seja, $T_A(UE) = \hat{D}B = \psi(X) - D\phi(X)$.

Considere $V = \hat{D}(\psi(L) - UE)$. Utilizando o fato de que $T_A(\psi(L)) = \psi(X)$ e o Lema 3.2, segue que $T_A(DV) = T_A(J(\psi(L) - UE)) = D\phi(X)$. Assim,

$$T_A(UE - DV) = \psi(X) - 2D\phi(X) \quad \text{e} \quad T_A(UE + DV) = \psi(X).$$

Tome $\psi(X) = \eta_0 I + \eta_1 X$ com $\eta_1 \neq 0$ e $\phi(X) = \xi_0 I + \xi_1 X + \xi_2 X^2$. Consequentemente,

$$B = \eta_0 D - \xi_0 D^2 + (\eta_1 D - \xi_1 D^2)X - \xi_2 D^2 X^2.$$

Utilizando a igualdade $XD - DX = I$ obtemos

$$\begin{aligned} XB - BX &= \eta_0 (XD - DX) + \eta_1 (XDX - DX^2) \\ &\quad - \xi_0 (XD^2 - D^2X) - \xi_1 (XD^2X - D^2X^2) - \xi_2 (XD^2X^2 - D^2X^3) \\ &= \psi(X) - 2D\phi(X). \end{aligned}$$

Por outro lado, $T_A(UE - DV) = XB - BX = T_A(L\Delta - \Delta L)$, e como T_A é um isomorfismo, logo é injetiva, concluímos que $UE - DV = L\Delta - \Delta L$. Analogamente,

$$T_A(UE + DV) = \psi(X) = T_A(\psi(L)),$$

então $UE + DV = \psi(L)$. Portanto,

$$2UE = \psi(L) + L\Delta - \Delta L,$$

e assim, obtemos que UE é $(-1, 1)$ -banda. Como E é uma matriz diagonal de índice -1 , segue que U é $(0, 2)$ -banda de $\mathcal{G}$ e pelo Teorema 4.5 concluímos que A é clássica. $\square$

4.3.3 Teorema de Hahn

O próximo Teorema fornece uma caracterização na abordagem matricial equivalente ao Teorema de Hahn (Teorema 2.6). Lembramos que $\tilde{A} = \hat{D}AD$ é a matriz associada à sequência $\{\tilde{P}_n\}_{n=0}^\infty$, onde $\tilde{P}_n(x) = P'_{n+1}(x)/(n+1)$.

Teorema 4.8. *Seja A uma MPO. Se A é clássica, então $\tilde{A}$ é clássica.*

Demonstração. Se A é clássica, pelo Teorema 4.7 podemos escrever

$$\Lambda A = AB,$$

onde $B = (Dh(X) - D^2g(X))$, h é um polinômio de grau 1, g é um polinômio de grau no máximo 2 e Λ é uma matriz diagonal de índice 0 tal que se λ_k é a sua entrada na posição (k, k) , então $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_k \neq 0$ para $k \geq 1$. Assim,

$$\hat{D}\Lambda AD = \hat{D}ABD = \tilde{A}(h(X) - Dg(X))D = \tilde{A}\tilde{B}, \quad (4.26)$$

onde $\tilde{B} = \hat{D}BD$.

Sejam $h(X) = h_0I + h_1X$ com $h_1 \neq 0$ e $g(X) = g_0I + g_1X + g_2X^2$. Utilizando a igualdade $XD - DX = I$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= h_0D + h_1XD - h_1DX + h_1DX - g_0D^2 - g_1DXD - g_2DX^2D \\ &= h_1I + Dh(X) - g_0D^2 - g_1(D + D^2X) - g_2(D^2X^2 + 2DX) \\ &= h_1I + D[h(X) - (g_1I + 2g_2X) - Dg(X)]. \end{aligned}$$

Substituindo $J = D\hat{D}$ em $A^{-1}JAD = D$ segue que $D\tilde{A} = AD$. Consequentemente, por (4.26) podemos escrever

$$\hat{D}\Lambda D\tilde{A} = \hat{D}\Lambda AD = \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{A}(h_1I + D[h^{(1)}(X) - Dg(X)]),$$

onde $h^{(1)}(X) = h(X) - (g_1I + 2g_2X)$. Portanto,

$$(\hat{D}\Lambda D - h_1I)\tilde{A} = \tilde{A}(Dh^{(1)}(X) - D^2g(X)). \quad (4.27)$$

Nos resta mostrar que (4.27) satisfaz as hipóteses do Teorema 4.7.

Note que $\hat{D}\Lambda D - h_1I$ é uma matriz diagonal de índice 0 e a sua entrada na posição (k, k) é $\lambda_{k+1} - h_1$ para $k \geq 0$.

Comparando as entradas na posição $(k+1, k+1)$ em ambos os lados de $\Lambda A = AB$ obtemos que $(k+1)(h_1 - kg_2) = \lambda_{k+1} \neq 0$ para $k \geq 0$. Assim, $h_1 = \lambda_1$ e $\lambda_{k+1} - h_1 = k\lambda_{k+2}/(k+2) \neq 0$ para $k \geq 1$. Ou seja, $\hat{D}\Lambda D - h_1I$ é uma matriz diagonal de índice 0, a sua entrada na posição $(0, 0)$ é 0, e para $k \geq 1$, a sua entrada na posição (k, k) é não-nula. Além disso, $h_1 - 2g_2 = \lambda_3/3 \neq 0$, logo $h^{(1)}$ é um polinômio de grau 1.

Pelo Teorema 4.7 concluímos que $\tilde{A}$ é clássica. $\square$

Também podemos considerar $A^{(1)} = \tilde{A}$ e $A^{(k)} = \hat{D}A^{(k-1)}D = \hat{D}^k A D^k$ para $k \geq 2$. Note que, dado $k \geq 1$, a n -ésima linha de $A^{(k)}$ corresponde ao polinômio mônico

$$\frac{P_{n+k}^{(k)}(x)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \quad n \geq 0.$$

Além disso, pelo Teorema 4.8, se A é clássica, então $A^{(k)}$ é clássica para $k \geq 1$, isto é, se $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais clássica, então a sequência das k -ésimas derivadas $\{P_n^{(k)}\}_{n=k}^\infty$ é ortogonal com respeito a algum funcional de momentos.

Por (4.27) é possível obter a equação diferencial de Bochner para $A^{(k)}$

$$\Lambda^{(k)} A^{(k)} = A^{(k)} D(h^{(k)}(X) - Dg(X)), \quad k \geq 1, \quad (4.28)$$

onde $\Lambda^{(k)}$, $h^{(k)}$ e g satisfazem as hipóteses do Teorema 4.7.

É possível obter $\Lambda^{(k)}$ e $h^{(k)}$ explicitamente. Veja [15].

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos uma construção dos polinômios ortogonais utilizando uma abordagem matricial, observando a relação entre sequências polinomiais e certas matrizes infinitas. Tomando como base os trabalhos [21] e [22], vimos que, de fato, resultados clássicos dos polinômios ortogonais podem ser obtidos por meio do estudo de propriedades das matrizes associadas a estes polinômios. O Teorema 4.3, talvez o mais importante destes resultados, fornece uma caracterização matricial da ortogonalidade de uma sequência polinomial e corresponde a uma versão em termos de matrizes do conhecido Teorema de Favard.

Com relação aos polinômios ortogonais clássicos, estudamos uma condição necessária e suficiente para que uma matriz infinita determine uma sequência clássica, e demonstramos algumas caracterizações destas famílias de polinômios ortogonais, tais como o Teorema de Bochner e uma versão Teorema de Hahn.

Referências

- [1] AL-SALAM, W. A.; CHIHARA, T. S. Another characterization of the classical orthogonal polynomials. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, v. 3, p. 65–70, 1972.
- [2] ÁLVAREZ-NODARSE, R. On characterizations of classical polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 196, p. 320–337, 2006.
- [3] ÁLVAREZ-NODARSE, R. *Polinomios hipergeométricos clásicos y q -polinomios*. Zaragoza: Monografías del Seminario Matemático “García de Galdeano”, v. 26, Prensas Universitarias de Zaragoza, 2003.
- [4] BOCHNER, S. Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. *Mathematische Zeitschrift*, v. 29, p. 730–736, 1929.
- [5] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach, 1978.
- [6] CRYER, C. W. Rodrigues’ formula and the classical orthogonal polynomials. *Bollettino della Unione Matematica Italiana (4)*, v. 3, p. 1–11, 1970.
- [7] HAHN, W. Über die Jacobischen polynome und zwei verwandte polynomklassen. *Mathematische Zeitschrift*, v. 39, p. 634–638, 1935.
- [8] HAHN, W. Über höhere ableitungen von orthogonalpolynomen. *Mathematische Zeitschrift*, v. 43, p. 101–101, 1937.
- [9] HILDEBRANDT, E. H. Systems of polynomials connected with the Charlier expansions and the Pearson differential and difference equations. *The Annals of Mathematical Statistics*, The Institute of Mathematical Statistics, v. 2, n. 4, p. 379–439, 1931.
- [10] HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press, 1986.
- [11] ISMAIL, M. E. H. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications 98. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [12] KRALL, H. L.; FRINK, O. A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 65, p. 100–115, 1949.

-
- [13] KULKARNI, D.; SCHMIDT, D.; TSUI, S.-K. Eigenvalues of tridiagonal pseudo-Toeplitz matrices. *Linear Algebra and its Applications*, v. 297, p. 63–80, 1999.
 - [14] KWON, K. H.; LEE, J. K.; YOO, B. H. Characterizations of classical orthogonal polynomials. *Results in Mathematics*, v. 24, p. 119–128, 1993.
 - [15] LOUREIRO, A. F.; MARONI, P.; ROCHA, Z. da. The generalized Bochner condition about classical orthogonal polynomials revisited. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 322, p. 645–667, 2006.
 - [16] MARCELLÁN, F.; BRANQUINHO, A.; PETRONILHO, J. Classical orthogonal polynomials: a functional approach. *Acta Applicandae Mathematicae*, v. 34, p. 283–303, 1994.
 - [17] MARONI, P. Variations around classical orthogonal polynomials. Connected problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 48, p. 133–155, 1993.
 - [18] SONIN, N. J. Über die angenäherte Berechnung der bestimmten Integrale und über die dabei vorkommenden ganzen Functionen. *Warsaw University Izvestiya*, v. 18, p. 1–76, 1887.
 - [19] SZEGŐ, G. *Orthogonal Polynomials*. In: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, 4. ed. Providence: American Mathematical Society, 1975.
 - [20] TRICOMI, F. G. *Vorlesungen über Orthogonalreihen*. In: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 76. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1955.
 - [21] VERDE-STAR, L. Characterization and construction of classical orthogonal polynomials using a matrix approach. *Linear Algebra and its Applications*, v. 438, p. 3635–3648, 2013.
 - [22] VERDE-STAR, L. Polynomial sequences generated by infinite Hessenberg matrices. *Special Matrices*, v. 5, p. 64–72, 2017.