



TM-01/89

FERNANDO PABLO DEVECCHI

23

QUANTIZAÇÃO VIA MÉTODO DE DIRAC DE BÓSONS QUIRAIS
EM DUAS DIMENSÕES

Dissertação de mestrado realizada
sob a orientação de Elcio Abdalla e
Maria Cristina Batoni Abdalla no Ins-
tituto de Física Teórica da UNESP.



SÃO PAULO

1989

AGRADECIMENTOS

Muito obrigado a todos os amigos do IFT, assim como à FAPESP.

Os agradecimentos "efusivos" vão para Ayrton Zadra , Antonio Amorim , Elcio Abdalla , Maria Cristina Abdalla , Paulo T. Sobrinho e Samuel Maier ;pelo conhecimento e pelo apoio.

RESUMO

O método de Dirac representa uma ferramenta fundamental para a quantização canônica de qualquer teoria que apresente simetrias locais . Neste trabalho fazemos uma descrição geral do método e o aplicamos para obter a quantização canônica da teoria de bósons quirais em duas dimensões , objetos que justificam sua importância devido à sua ligação com teorias de cordas.

ABSTRACT

Dirac Method is a fundamental tool in order to obtain canonical quantization of a theory which is invariant under local symmetry transformations. In this work we make a general description of the method and apply it to Two Dimensional Chiral Boson Theory , which are very important objects in the construction of string theories.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1:A ESTRUTURA BÁSICA DOS FORMALISMOS LAGRANGEANO E HAMILTONIANO	
1.1: O princípio variacional de Hamilton e equações de movimento no formalismo Lagrangeano	3
1.2: A passagem do formalismo Lagrangeano para o formalismo Hamiltoniano	6
1.3: A correspondência entre a presença de simetrias locais e Lagrangeanas singulares	8
CAPÍTULO 2:LAGRANGEANAS SINGULARES E MÉTODO DE DIRAC	
2.1: Descrição Lagrangeana de sistemas singulares	12
2.2: Sistemas singulares no formalismo Hamiltoniano:O método de Dirac	18
2.3: Método de Dirac e teorias de campos	31
CAPÍTULO 3:VÍNCULOS,TRANSFORMAÇÕES DE SIMETRIA E TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE	
3.1: Vínculos de segunda classe e parênteses de Dirac	34
3.2: Vínculos de primeira classe e transformações de gauge	37
3.3: Obtenção de simetrias no formalismo Hamiltoniano	41
3.4: A fixação de gauge	43
3.5: A quantização canônica	46

CAPÍTULO 4: QUANTIZAÇÃO VIA MÉTODO DE DIRAC DE BOSONS QUIRAIS EM DUAS DIMENSÕES

4.1: Preliminares	49
4.2: A Lagrangeana de Siegel	52
4.3: Utilização do método de Dirac na Lagrangeana de Siegel	55
4.4: A quantização canônica da Lagrangeana de Siegel	60
4.5: A quantização da Lagrangeana de Imbimbo-Schwimmer	62
4.6: QED escalar quiral via método de Dirac	66
4.7: Conclusões	73
Referências	74

INTRODUÇÃO

Quando queremos quantizar uma teoria temos como opção de método a chamada quantização canônica. Isto implica que classicamente a teoria deve ser descrita no formalismo Hamiltoniano. Por outro lado construir uma descrição inicial no formalismo Lagrangeano será de utilidade se quisermos uma formulação de acordo com a teoria da Relatividade. Com isto um roteiro geral rumo à quantização seria o seguinte: Construção de uma formulação clássica Lagrangeana, passagem para o formalismo Hamiltoniano e quantização canônica como último passo.

Na formulação Lagrangeana a condição que garante a existência e unicidade das soluções das equações de movimento é dada pelo fato de que o determinante da matriz Hessiana seja não nulo. Por outro lado Anderson e Bergmann ^{[1][2]} demonstraram que a presença de simetrias locais numa teoria implica necessariamente na nulidade do determinante da matriz citada, ficando as soluções não univocamente determinadas.

Na passagem para o formalismo Hamiltoniano existe um ponto fundamental que é a definição dos momentos. Para podermos fazer uma passagem unívoca do espaço de configurações para o espaço de fase devemos ter novamente que o determinante da Hessiana seja não nulo. Se esta condição não for satisfeita surgirão, a partir da definição dos momentos, relações entre as variáveis do espaço de fase conhecidas como vínculos e na presença destas expressões o processo de passagem para o formalismo Hamiltoniano fica truncado. Levando em conta estes fatos, Dirac ^[3] conseguiu construir um método que nos ensina como fazer uma passagem consistente para o formalismo Hamiltoniano no caso de teorias vinculadas, ou, pelo parágrafo anterior, teorias que apresentam simetrias locais. Este fato justifica a enorme importância do procedimento de Dirac.

O método apresenta um sistema de classificação especial para os vínculos que vão surgindo na medida em que vamos impondo condições de consistência à teoria. Esta classificação divide os vínculos em duas categorias: vínculos de primeira e segunda classe. O método mostra que os de primeira classe fazem parte dos geradores de transformações de gauge da teoria,

enquanto que os de segunda classe resultam representar graus de liberdade espúrios os quais são eliminados substituindo os parênteses de Poisson usuais por novos, conhecidos como parênteses de Dirac. Estes substituirão os parênteses de Poisson também na hora da quantização :

$$\{A, B\}_D \longrightarrow \frac{\hbar}{i}[A, B]$$

Estes assuntos são apresentados nos três primeiros capítulos deste trabalho.

No quarto capítulo aplicamos o método de Dirac na quantização de bósons quirais livres em duas dimensões^[8], isto é , campos escalares livres que se movem para a esquerda num espaço-tempo bidimensional. A utilização do método de Dirac nesta teoria se justifica devido ao fato dela ser invariante por um grupo de transformações locais conhecido com invariança de Siegel. Esta teoria, aparentemente simples ,é de grande importância na construção de teorias de cordas^[11]. A Lagrangeana de partida rumo à quantização é a chamada Lagrangeana de Siegel^[10] para a qual é possível obter uma formulação clássica consistente. Porém, na versão quântica , surgem algumas inconsistências fatais. Para evitar este problema, Imbimbo e Schwimmer^[11] propuseram uma nova Lagrangeana para a qual é possível uma teoria quântica consistente de bósons quirais livres^[8].

Uma outra aplicação do método de Dirac foi feita: Quantização de bósons quirais imersos num campo eletromagnético (também em duas dimensões). O resultado obtido é semelhante ao dos bósons livres, sendo que o único sinal de interação com o campo de gauge é um fator multiplicativo na Hamiltoniana final da teoria, que depende do parâmetro de massa correspondente ao campo eletromagnético. Estes assuntos são apresentados no capítulo 4.

CAPÍTULO 1

A ESTRUTURA BÁSICA DOS FORMALISMOS LAGRANGEANO E HAMILTONIANO

De acordo com o roteiro descrito na introdução apresentamos neste capítulo a estrutura básica do formalismo Lagrangeano e o processo de passagem para o formalismo Hamiltoniano. São estabelecidas aqui as condições que devem ser satisfeitas para que esta passagem seja unívoca. Veremos que nas situações em que estas condições não são satisfeitas há uma correspondência com o fato da teoria estudada apresentar simetrias locais.

A notação utilizada neste capítulo tenta abranger tanto casos de sistemas com infinitos graus de liberdade (teorias de campos) assim como sistemas discretos, com número finito de graus de liberdade.

•§1.1: O PRINCÍPIO VARIACIONAL DE HAMILTON E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO NO FORMALISMO LAGRANGEANO.

O princípio variacional de Hamilton estabelece que as equações de movimento do sistema físico estudado são obtidas a partir da Ação :

$$S[Q] = \int_{\omega} d\tau L(Q, \partial Q, \tau) \equiv \int_{\omega} d^P \tau . L(Q^A(\tau), \partial_{\mu} Q^A(\tau), \tau^{\mu}) \quad (1.1)$$

Onde L é a densidade de Lagrangeana e τ^{μ} , $\mu = 0, 1, \dots, (P - 1)$, os parâmetros de descrição. Os Q^A , $A = 1, 2, \dots, N$, são as coordenadas (campos). Para os nossos propósitos basta que a densidade de Lagrangeana dependa no máximo de derivadas a primeira nos τ^{μ} (∂Q). ω é o vo

lume de integração no espaço dos parâmetros, escolhido convenientemente de acordo com o sistema estudado (condições de contorno).

Descrevemos a seguir de maneira sucinta a estrutura matemática que nos leva às equações de movimento partindo da ação (1.1). Começamos considerando transformações nos parâmetros, da forma:

$$\tilde{\tau}^\mu = \tau^\mu + \delta\tau^\mu \quad (1.2)$$

Os $\delta\tau^\mu$ são funções infinitesimais arbitrárias que dependem dos parâmetros. Consideramos também tranformações nas coordenadas e suas derivadas:

$$\tilde{Q}^A(\tilde{\tau}) = Q^A(\tau) + \delta Q^A(\tau) \quad (1.3)$$

$$\partial\tilde{Q}^A(\tilde{\tau}) = \partial Q^A(\tau) + \delta\partial Q^A(\tau) \quad (1.4)$$

Com as novas variáveis podemos considerar a seguinte variação da ação :

$$\delta S = \int_{\tilde{\omega}} L(\tilde{\tau}, \tilde{Q}, \partial\tilde{Q}) d\tilde{\tau} - \int_{\omega} L(\tau, Q, \partial Q,) d\tau \quad (1.5)$$

Note que a forma funcional de L não é alterada. O que queremos é obter a variação da ação em função da dependência funcional de L nas suas variáveis.

Logo após algumas manipulações obtemos que a variação da ação ,em primeira ordem, se escreve:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{\omega} \left\{ \left(\frac{D}{D\tau^k} \right) \left[(L\delta_\mu^k - \left(\frac{\partial L}{\partial Q_k^A} \right) Q_\mu^A) \delta\tau^\mu + \left(\frac{\partial L}{\partial Q_k^A} \right) \delta Q^A \right] \right. \\ \left. + [L]_A (\delta Q^A - Q_m^A \delta\tau^m) \right\} d\tau \end{aligned} \quad (1.6)$$

Onde:

$$\frac{D}{D\tau^k} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\tau^k} \right) + Q_k^A \left(\frac{\partial}{\partial Q^A} \right) + Q_{kl}^A \frac{\partial}{\partial Q_l^A} \quad (1.7)$$

$$[L]_A \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial Q^A} \right) - \left(\frac{D}{D\tau^k} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial Q_k^A} \right) \quad (1.8)$$

$$\partial_k Q^A \equiv Q_k^A \equiv \frac{\partial Q^A}{\partial \tau^k} \quad k = 0, 1, \dots, (P - 1) \quad (1.9)$$

De acordo com as bases do princípio variacional restringimo-nos a variações especiais onde a região de integração não é alterada e a variação das coordenadas é identicamente nula na fronteira de ω , ou seja:

$$\delta \tau = 0 \quad \delta Q|_{C\omega} = 0 \quad (1.10)$$

No seu ponto fundamental, o princípio de Hamilton impõe que a variação da ação seja nula para qualquer escolha da região ω e para qualquer variação das coordenadas (sempre respeitando (1.10)). Com estas restrições a equação (1.6) fica:

$$\delta S = \int_{\omega} [L]_A \delta Q d\tau = 0 \implies [L]_A = 0 \quad (1.11)$$

que são as equações de movimento de Euler-Lagrange.

Que condições devem ser satisfeitas para existirem soluções únicas das equações de movimento? . Escrevemos as expressões de Euler na forma:

$$[L]_A \equiv V_A(Q, \partial Q, \tau) - W_{AB}^{\mu\nu}(Q, \partial Q, \tau) \partial_{\mu} \partial_{\nu} Q^B \quad (1.12)$$

onde:

$$V_A = \frac{\partial L}{\partial Q^A} - \frac{\partial^2 L}{\partial(\partial_{\mu} Q^A) \partial Q^B} \partial_{\mu} Q^B - \frac{\partial^2 L}{\partial(\partial_{\mu} Q^A) \partial \tau^{\mu}} \quad (1.13)$$

$$W_{AB}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial(\partial_{\mu} Q^A \partial_{\nu} Q^B)} \quad (1.14)$$

Assim, para as soluções das equações de movimento, temos:

$$V_A(Q, \partial Q, \tau) - W_{AB}^{\mu\nu}(Q, \partial Q, \tau) \partial_{\mu} \partial_{\nu} Q^B = 0 \quad (1.15)$$

Isolando os termos que contêm acelerações obtemos:

$$-W_{AB}^{00}(Q, \partial Q, \tau) \partial_0 \partial_0 Q^B + \dots = 0 \quad (1.16)$$

Este sistema de equações pode ser resolvido se a matriz dos elementos que multiplicam as acelerações (conhecida como matriz **Hessiana**) tiver determinante não nulo:

$$\det||W_{AB}^{00}|| \neq 0 \quad (1.17)$$

Invocando o teorema de Cauchy a equação acima garante a unicidade das soluções das equações de Euler-Lagrange ; Aqui todas elas são de segunda ordem e funcionalmente independentes, fornecendo 2N constantes de Integração .

É importante agora fazermos a seguinte definição : Dizemos que uma Lagrangeana é **regular** se o determinante da matriz Hessiana for não nulo, do contrário dizemos que a Lagrangeana é **singular**.

•§1.2: A PASSAGEM DO FORMALISMO LAGRANGEANO PARA O FORMALISMO HAMILTONIANO

Nesta seção apresentamos o processo de passagem para o formalismo Hamiltoniano e as condições que devem ser satisfeitas para que este processo seja unívoco, de modo que a descrição em ambos formalismos seja equivalente.

A notação utilizada abrange somente sistemas com número finito de graus de liberdade, afim de facilitar a apresentação .

A passagem para o formalismo Hamiltoniano esta baseada na definição dos momentos e da Hamiltoniana:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \quad H = p_k \dot{q}^k - L \quad (1.18)$$

Onde L é a lagrangeana, p são os momentos e H a Hamiltoniana. Este conjunto de equações tem como característica a não dependência de H nas velocidades $\dot{q}$, de maneira que as funções dinâmicas no formalismo Hamiltoniano dependem do conjunto (q,p,t) . Porém há o seguinte ponto : **A passagem só pode ser feita de maneira unívoca se a matriz Hessiana**

tiver determinante não nulo, ou seja, se:

$$\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} = W_{ki} \quad \det ||W_{ki}|| \neq 0 \quad (1.19)$$

neste caso o teorema da função inversa garante que existe uma única solução $\dot{q}^k = \dot{q}^k(q, p, t)$, permitindo a passagem de um conjunto de variáveis para o outro. Note que a condição (1.19) é exatamente a mesma necessária para a Lagrangeana ser regular (equação (1.17)).

Como sabemos, o conjunto de variáveis (q, p) define o chamado **espaço de fase**; No caso regular qualquer função definida neste espaço (podendo também depender explicitamente do tempo) tem sua evolução temporal dada por:

$$\frac{d}{dt} A(q, p, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \quad (1.20)$$

De onde surgem os **parênteses de Poisson**, definidos pela equação:

$$\{A(q, p, t), B(q, p, t)\} = \frac{\partial A}{\partial q^k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q^k} \quad (1.21)$$

Os parênteses de Poisson tem um papel fundamental dentro do formalismo Hamiltoniano. Eles possuem as seguintes propriedades importantes:

★ Antissimetria: $\{A, B\} = -\{B, A\}$

★ Linearidade: $\{cA + dB, C\} = c\{A, C\} + d\{B, C\}$. c e d constantes.

★ Elemento nulo: $\{c, A\} = 0$ c constante.

★ Identidade de Jacobi: $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$

★ Regra do produto: $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$ (1.22)

Os parênteses fundamentais são:

$$\{q^i, q^k\} = 0 = \{p_i, p_k\} \quad \{q^i, p_k\} = \delta_k^i \quad (1.23)$$

Voltemos agora para a formulação Lagrangeana (Com a notação da seção (1.1)) para caracterizarmos sistemas que apresentam simetrias,fato de importância fundamental em todas as teorias físicas atuais.

•§1.3 A CORRESPONDÊNCIA ENTRE A PRESENÇA DE SIMETRIAS LOCAIS E LAGRANGEANAS SINGULARES

Queremos saber que condições deve satisfazer a ação de modo a possuir simetrias.Para isto partimos de transformações bem gerais,que englobam os sistemas físicos de interesse para este trabalho:

$$\begin{aligned}\tau^\mu &\longrightarrow \tilde{\tau}^\mu(\tau) & \mu = 0, 1, \dots, (P-1) \\ Q^A(\tau) &\longrightarrow \tilde{Q}^A(\tilde{\tau}) = \tilde{Q}^A(Q(\tau), \tau) & A = 1, \dots, N\end{aligned}\quad (1.24)$$

Com elas construímos a ação correspondente as novas variáveis:

$$\tilde{S}[\tilde{Q}] = S[Q] = \int_{\omega} d\tilde{\tau} \tilde{L}(\tilde{Q}, \tilde{\partial}\tilde{Q}, \tilde{\tau}) \quad (1.25)$$

o que define o caráter tensorial de $\tilde{L}$:

$$\tilde{L}(\tilde{Q}, \tilde{\partial}\tilde{Q}, \tilde{\tau}) = \frac{\partial(\tau)}{\partial(\tilde{\tau})} L(Q, \partial Q, \tau) \quad (1.26)$$

onde $\frac{\partial(\tau)}{\partial(\tilde{\tau})} = J$ é o Jacobiano da transformação nos parâmetros.

Para que as expressões (1.24) representem transformações de simetria elas devem preservar a forma funcional das equações de movimento. Esta condição em termos da ação se escreve:

$$A[\tilde{Q}] = A[Q] \quad (1.27)$$

ou

$$\int_{\tilde{\omega}} d\tilde{\tau} L(\tilde{Q}, \tilde{\partial}\tilde{Q}, \tilde{\tau}) = \int_{\omega} d\tau L(Q, \partial Q, \tau) \quad (1.28)$$

que fazendo uma mudança de variáveis nos fornece:

$$\int_{\omega} d\tau \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau} L(\tilde{Q}, \tilde{\partial}\tilde{Q}, \tilde{\tau}) - L(Q, \partial Q, \tau) = 0 \quad (1.29)$$

Para que esta condição seja satisfeita basta que o integrando seja uma divergência:

$$JL(\tilde{Q}, \tilde{\partial}\tilde{Q}, \tilde{\tau}) - L(Q, \partial Q, \tau) = \partial^{\mu} \Lambda_{\mu} \quad (1.30)$$

onde Λ é uma função das coordenadas e dos parâmetros.

Com o auxílio de (1.25) esta expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{L}(Q, \partial Q, \tau) - L(Q, \partial Q, \tau) = \partial^{\mu} \Lambda_{\mu} \quad (1.31)$$

Se o processo (1.24) respeitar (1.31) então representará uma transformação de simetria.

Levando em conta o alcance do nosso estudo vamos considerar a partir de agora somente transformações infinitesimais:

$$\tau^{\mu} \rightarrow \tilde{\tau}^{\mu} = \tau^{\mu} + \delta\tau^{\mu}$$

$$Q^A(\tau) \rightarrow \tilde{Q}^A(\tilde{\tau}) = Q^A(\tau) + \delta Q^A(\tau) \quad (1.32)$$

Partindo destas expressões e seguindo a estrutura descrita a partir da equação (1.24), podemos chegar a condição que as equações (1.32) devem satisfazer para representarem transformações de simetria (em primeira ordem):

$$[L]_A \delta^* Q^A + \partial_{\mu} (L \delta\tau^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu} Q^A)} \delta^* Q^A) = \partial_{\mu} \delta\Lambda^{\mu} \quad (1.33)$$

onde:

δ^* representa “variação de forma”, $\delta^* Q^A = \tilde{Q}^A(\tau) - Q^A(\tau)$

$\delta\Lambda^\mu$ são as funções equivalentes as presentes na expressão (1.30), para o caso infinitesimal.

Em palavras: Para as equações (1.32) representarem uma transformação de simetria infinitesimal é necessário e suficiente que existam P funções, $\delta\Lambda$, tais que a equação (1.33) seja satisfeita. Uma divisão importante separa dois grupos de simetrias : As globais e as Locais. Vamos nos concentrar nas tranformações locais.

Dentro do alcance do nosso trabalho, as transformações (1.32) no caso local podem tomar a forma :

$$\begin{aligned}\delta\tau^\mu &= \epsilon^k(\tau)\Upsilon_k^\mu \quad \mu = 0, 1, \dots, (P-1) \\ \delta Q^A &= \epsilon^k(\tau)\Theta_k^A + (\partial_\nu \epsilon^k(\tau))\Psi_k^{A\nu} \quad A = 1, \dots, N \\ \delta\Lambda &= \epsilon^k(\tau)\eta_k^\mu + (\partial_\nu \epsilon^k(\tau))\varphi_k^{\mu\nu} \\ \delta C^\mu &= \epsilon^k(\tau)\gamma_k^\mu + (\partial_\nu \epsilon^k(\tau))\beta_k^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{1.34}$$

onde: $\delta C^\mu \equiv L\delta\tau^\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu Q^A)}\delta^*Q^A - \delta\Lambda^\mu$

O fato das transformações serem locais refletem apenas que as funções arbitrárias ϵ^k dependem dos parâmetros. $\Psi, \eta, \Upsilon, \Theta, \varphi, \gamma, \beta$ são funções das coordenadas, parâmetros, e sua derivadas. Substituindo estas expressões em (1.33) obten-se as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}\Theta_k^A[L]_A + \partial_\mu \gamma_k^\mu &\equiv 0 \\ \Psi_k^{A\mu}[L]_A + \gamma_k^\mu + \partial_\nu \beta_k^{\mu\nu} &\equiv 0 \\ \beta_k^{[\mu\nu]} &\equiv 0\end{aligned}\tag{1.35}$$

com:

$$\gamma_k^\mu \equiv \Upsilon_k^\mu L + \Theta_k^A \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu Q^A)} - \eta_k^\mu$$

$$\beta_k^{\mu\nu} \equiv \Psi_k^{A\nu} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu Q^A)} - \varphi_k^{\mu\nu}$$

As identidades (1.35) implicam em:

$$\Theta_k^A[L]_A - \partial_\mu(\Psi_k^{A\mu}[L]_A) \equiv 0 \quad (1.36)$$

Estas relações , conhecidas como identidades de Bianchi , são consequência da existência de simetrias locais.É importante notar haverá tantas identidades de Bianchi quantas funções arbitrárias ϵ .

Chegamos aqui ao ponto mais importante deste capítulo:Anderson e Bergmann ^{[1][2]} demonstraram que a presença de identidades de Bianchi implica necessariamente na singularidade da Lagrangeana; Ou melhor:**Uma Lagrangeana que possui simetrias locais é necessariamente singular**.Teremos como consequência que para Lagrangeanas singulares haverá arbitrariedades nas soluções das equações de movimento.O mais importante é que a passagem para o formalismo Hamiltoniano fica comprometida,pois, como vimos na equação (1.19),a condição de regularidade da Lagrangeana era fundamental para passarmos de um formalismo a outro de uma maneira unívoca.

A partir destes fatos muitos autores ([1],[2],[3],etc) se dedicaram a construir uma formulação que possibilitasse a passagem para o formalismo Hamiltoniano no caso singular visando, entre outras coisas,a quantização canônica.Faremos uma descrição geral deste procedimento nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 2

LAGRANGEANAS SINGULARES E O MÉTODO DE DIRAC

Neste capítulo estudamos o formalismo Lagrangeano para sistemas que partem de uma Lagrangeana singular. Apresentamos também o procedimento que nos permite obter um processo consistente de passagem para o formalismo Hamiltoniano, o método de Dirac. A descrição geral é feita para sistemas com número finito de graus de liberdade. Os resultados correspondentes a teorias de campos são apresentados no fim do capítulo.

•§2.1: DESCRIÇÃO LAGRANGEANA DE SISTEMAS SINGULARES

Nesta seção apresentamos o procedimento que nos leva as soluções das equações de Euler-Lagrange no caso singular.

Como vimos no capítulo anterior, a singularidade da Lagrangeana está ligada ao fato da matriz Hessiana ter determinante nulo. Se esta matriz possui N linhas e colunas seu posto R deve ser tal que:

$$R < N \quad (2.1)$$

o que implica na existência de $(N-R)$ autovetores nulos $Y_s(q, \dot{q})$:

$$Y_s^i W_{ij} \equiv 0 \quad s = 1, \dots, (N - R) \quad (2.2)$$

Se nos lembrarmos como se escreviam as equações de movimento em termos da matriz Hessiana (equação (1.12)), teremos em consequência:

$$Y_s^i(q, \dot{q}) V_i(q, \dot{q}) = 0 \quad (2.3)$$

observe que estas relações não contêm acelerações . Elas podem ser satisfeitas de duas maneiras: Em primeiro lugar consideremos a situação que elas sejam satisfeitas identicamente. Neste caso as equações de movimento podem ser resolvidas para R combinações lineares das acelerações ,em termos de todas as acelerações restantes e de todas as coordenadas e velocidades:

$$\ddot{q}^a = \ddot{q}^a(q^1, \dots, q^R, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^R, q^{R+1}, \dots, q^N, \dot{q}^{R+1}, \dots, \dot{q}^N, \ddot{q}^{R+1}, \dots, \ddot{q}^N) \quad a = 1, 2, \dots, R \quad (2.4)$$

Estas são R equações diferenciais de segunda ordem para as quais aparecem (N-R) funções arbitrárias q. Somente depois de fixa-las podemos obter soluções para as equações de movimento (2.4) ,dadas as condições iniciais. Isto nos lembra o visto no capítulo anterior: Lagrangeanas singulares estão relacionadas com certa arbitrariedade das soluções das equações de movimento.

No caso geral as equações (2.3) não são identicamente satisfeitas . Consideremos então a seguinte situação : Das (N-R) relações (2.3) , r são funcionalmente independentes de outras s funcionalmente dependentes. l relações são identicamente satisfeitas. Desta situação geral surgem expressões da forma:

$$C_\rho(q, \dot{q}) = 0 \quad 0 \leq \rho \leq r \leq (N - R) \quad (2.5)$$

que são chamados de **vínculos Lagrangeanos**. Lembremos que quando calculamos o posto da matriz Hessiana não consideramos a presença de vínculos. Agora ,levando em conta as relações (2.5),devemos recalcular o posto da matriz Hessiana e repetir o processo a partir de (2.2).

Antes de continuar lembramos que nos cálculos acima não surge nenhuma inconsistência. Por exemplo: a Lagrangeana $L = \dot{q} - q$ implica na equação de movimento $1=0$. Estes casos simplesmente estão nos dizendo que a ação correspondente não possui um ponto estacionário e nós estamos deixando esta possibilidade de lado dentro dos nossos propósitos .

Logo após ter esgotado o processo descrito a partir da equação (2.2) devemos impor que todos os vínculos que surgirem sejam preservados no

tempo, como condição de consistência da teoria. Afim de descrevermos esta análise catalogamos antes os vínculos da seguinte maneira:

★ tipo A: Os vínculos são de tipo A se dependem somente de coordenadas , $A_\alpha(q) = 0$.

★ tipo B: Os vínculos dependem também das velocidades , $B_\lambda(q, \dot{q}) = 0$.

Impondo a preservação dos vínculos de tipo A no tempo , devemos ter que a sua derivada ou seja nula pelos próprios vínculos ou nos leve a novos vínculos. Estes novos vínculos por sua vez podem ser do tipo A ou B para os quais devemos repetir o procedimento de consistência. O processo finaliza quando as relações $\dot{A} = 0$ são identicamente satisfeitas.

Devemos testar agora a consistência temporal dos vínculos do tipo B. Isto pode implicar em novos vínculos do tipo B ou em relações envolvendo acelerações .Devemos juntar as relações envolvendo acelerações às equações (2.4). Manipulando este novo conjunto ,vínculos tanto do tipo A como do tipo B podem surgir para os quais devemos reiniciar o processo a partir da verificação da consistência temporal.

Consideramos que os sistemas estudados partam de uma Lagrangeana admissível, ou seja, todo o procedimento acima se esgota depois de um número finito de passos.

A situação final encontrada é a que segue:

o Existem as equações que envolvem acelerações :

$$\hat{W}_{ri}(q, \dot{q}) \ddot{q}^i = V_r(q, \dot{q}) \quad r = 1, \dots, k \quad (2.6)$$

o Existem vínculos do tipo A e B:

$$A_\alpha(q) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k' \quad (2.7)$$

$$B_\lambda(q, \dot{q}) = 0 \quad \lambda = 1, \dots, k'' \quad (2.8)$$

As equações $\dot{A} = 0$ são identicamente satisfeitas através de (2.7)

As equações $\ddot{A}_\alpha = 0$ através de (2.6)

As equações $\dot{B}_\lambda = 0$ através de (2.6) e (2.7)

Utilizando as equações (2.6) e (2.8) podemos resolver as equações de movimento para $(k-k')$ acelerações :

$$\ddot{q}^n = \ddot{q}^n(q^n, \dot{q}^n, q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^A) \quad n = 1, \dots, (k - k') \quad (2.9)$$

onde o número de q^A é $(N-k)$ e são arbitrárias.

Temos assim que a obtenção de soluções para as equações (2.9) depende da fixação destes q^A e dos valores iniciais $q^n(0)$ e $\dot{q}^n(0)$. Note que estes resultados confirmam as afirmações do fim do capítulo 1: A Lagrangeana singular implica em ambiguidades nas soluções das equações de movimento.

Como vemos, a formulação Lagrangeana para sistemas singulares é bastante complicada. Porém, na prática todo o processo descrito acima é esgotado em poucos passos. Vejamos um exemplo simples afim de esclarece-lo.

Consideremos a Lagrangeana:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q_2\dot{q}_1 + (1 - \alpha)q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \quad (2.10)$$

que contém duas constantes arbitrárias α e β .

A Hessiana de L é:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

ou seja, L é singular para qualquer valor de α ou β , o motivo é que não há termo cinético para q_2 . As equações de Euler-Lagrange ficam:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \rightarrow \beta(q_1 - q_2) - \alpha \dot{q}_2 - \ddot{q}_1 = 0 \quad (2.12)$$

$$\alpha \dot{q}_1 - \beta(q_1 - q_2) = 0 \quad (2.13)$$

A equação (2.12) é uma equação de movimento válida, envolvendo acelerações. (2.13) é um vínculo a não ser que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Separemos cada caso:

o CASO A $\alpha = 0$ e $\beta = 0$

Aqui a equação (2.12) se resume em $\ddot{q}_1 = 0$, não há equação de movimento para q_2 que permanece completamente arbitrária. Obviamente neste caso a Lagrangeana é $L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{d}{dt}(q_1 q_2)$ onde q_2 aparece dentro de uma derivada total, irrelevante para as equações de movimento. Porém, lembrando o que vimos no capítulo 1, podemos interpretar a arbitrariedade de q_2 como uma invariância de L sob transformações δq_2 arbitrárias, levando-nos as identidades de Bianchi (equação (1.36)) ;no caso:

$$\alpha \dot{q}_1 - \beta(q_1 - q_2) \equiv 0 \quad (2.14)$$

o CASO B $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$

Neste caso a equação (2.13) toma a forma:

$$A = q_2 - q_1 = 0 \quad (2.15)$$

que por consistência nos leva em $\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 = 0$. A equação de movimento é simplesmente $\ddot{q}_1 = 0$ junto da condição anterior.

o CASO C $\alpha \neq 0$

O vínculo (2.13) fica:

$$B_1 = \alpha \dot{q}_1 - \beta(q_1 - q_2) = 0 \quad (2.16)$$

que é de tipo B. De acordo com o processo descrito anteriormente devemos calcular sua derivada temporal e impor consistência:

$$\frac{d}{dt}B_1 = \alpha \ddot{q}_1 - \beta(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = \alpha \ddot{q}_1 + \beta \dot{q}_2 - \frac{\beta^2}{\alpha}(q_1 - q_2) - \frac{\beta}{\alpha}B_1 \quad (2.17)$$

onde usamos a equação (2.16). Juntamos agora esta equação com (2.12), o que nos leva a nova condição :

$$(\beta - \alpha^2)(\alpha \dot{q}_2 - \beta(q_1 - q_2)) = 0 \quad (2.18)$$

Neste ponto surgem duas possibilidades: $\beta = \alpha^2$ ou $\beta \neq \alpha^2$.

★ Caso C1 $\beta = \alpha^2$

A equação (2.18) é identicamente satisfeita e $B_1 = 0$ é uma primeira integração para (2.12). Novamente q_2 é arbitrária mas está presente na dinâmica de q_1 .

★ Caso C2 $\beta \neq \alpha^2$

Temos um vínculo do tipo B, $B_2 = \alpha \dot{q}_2 - \beta(q_1 - q_2)$, que combinada com o vínculo anterior B_1 nos dá as seguintes equações :

$$\alpha \dot{q}_1 - \beta(q_1 - q_2) = 0 \quad (2.19)$$

$$\dot{q}_1 - \dot{q}_2 = 0 \quad (2.20)$$

Impondo consistência para (2.19) obtemos:

$$\beta(q_1 - q_2) - \alpha \dot{q}_2 - \beta \frac{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha - \frac{\beta}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)) = 0 \quad (2.21)$$

que é identicamente satisfeita por (2.20). assim as soluções correspondentes para as equações (2.19) e (2.20) são :

$$q_1(t) = \frac{\beta}{\alpha}(c_1 - c_2)t + c_2 \quad (2.22)$$

$$q_2(t) = \frac{\beta}{\alpha}(c_1 - c_2)t + c_2 \quad (2.23)$$

onde os c são constantes deteminadas pelas condições de contorno.

Finalizamos aqui esta discussão sobre formalismo Lagrangeano singular. A importância desta seção esta no fato de podermos comparar seus resultados com os obtidos no Formalismo Hamiltoniano, via método de Dirac, que é o assunto a seguir.

•§2.2:SISTEMAS SINGULARES NO FORMALISMO HAMILTONIANO: O METODO DE DIRAC

Para começar a passagem para o formalismo Hamiltoniano definimos os momentos:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i(q, \dot{q})} \quad i = 1, \dots, N \quad (2.24)$$

No caso regular estas relações podem ser invertidas, obtendo $q^i = q^i(q, p)$ como tínhamos visto na equação (1.19). Porém No caso de Lagrangeanas singulares temos que o posto R é menor que N, o que implica que há somente uma matriz (R x R) , $W_{\alpha a} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{q}^a}$ para a qual poderemos resolver as relações (2.24) para as velocidades $\dot{q}^a$ e expressa-las como funções das coordenadas, dos momentos e do resto das velocidades $\dot{q}^\rho$:

$$\dot{q}^a = f^a(q, p_\alpha, \dot{q}^\rho) \quad (2.25)$$

denotamos que a vai de 1 a R e ρ de $(R+1)$ a N ; o índice α pode assumir R valores. Substituindo (2.25) em (2.24) obtemos:

$$p_i = \tilde{g}_i(q, \dot{q}^a, \dot{q}^\rho) = \tilde{g}_i(q_i, f^a(q, p_\alpha, \dot{q}^\rho) = g_i(q, p_\alpha, \dot{q}^\rho) \quad (2.26)$$

do que concluímos que $g_\alpha \equiv p_\alpha$. As outras $(N-R)$ funções g não podem depender de $\dot{q}^\rho$ pois senão poderíamos resolver as relações (2.24) para mais velocidades. Temos então:

$$p_r = g_r(q, p_\alpha) \quad (2.27)$$

Estas relações recebem o nome de **vínculos primários** do formalismo Hamiltoniano. Eles confirmam o que tínhamos comentado no capítulo 1: O fato da Lagrangeana ser singular compromete a passagem para o formalismo Hamiltoniano pois as variáveis do espaço de fase não são completamente independentes.

No caso singular a Hamiltoniana passa a depender, a princípio também das velocidades indeterminadas $\dot{q}^\rho$:

$$H_c(q, p_\alpha, \dot{q}^\rho) = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}) \quad (2.28)$$

O índice c denota Hamiltoniana canônica. Fica subentendido que quando o índice i toma os valores r , p_r deve ser substituído por $g_r(q, p_\alpha)$, e quando assume os valores a $\dot{q}^a$ deve ser substituído por f^a (eq. 2.25)).

Estudamos agora como H_c depende nas suas variáveis. Após simples manipulações obtemos:

$$\frac{\partial H_c}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{q}_v \frac{\partial g_v}{\partial q_i} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial p_\alpha} = \dot{q}^\alpha + \frac{\partial g_v}{\partial p_\alpha} \dot{q}^v \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial \dot{q}^\rho} = 0 \quad (2.31)$$

ou seja, H_c não depende das velocidades mesmo no caso da Lagrangeana ser singular. A Hamiltoniana é função exclusiva das variáveis do espaço de fase.

A segunda destas equações pode ser posta em correspondência com (2.25) pois determina as velocidades $\dot{q}^\alpha$. Devido a este fato podemos fazer a seguinte identificação: O índice α junto do α variam de 1 a R , ρ e v vão de $(R+1)$ a N . Com isto as equações de movimento ($\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \dot{p}^k$) ficam:

$$\begin{aligned}\dot{q}^a &= \frac{\partial H_c}{\partial p_a} - \dot{q}^v \frac{\partial g_v}{\partial p_a} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \dot{q}^v \frac{\partial g_v}{\partial q^i}\end{aligned}\quad (2.32)$$

Estas equações tem um certo parentesco com as equações de movimento para sistemas regulares, porém as modificações são fundamentais: Existem termos extras no lado direito das equações (2.32) que dependem de funções arbitrárias $\dot{q}^v$ fato que é análogo à presença deste tipo de funções no formalismo Lagrangeano singular. É importante notarmos que devido a presença de vínculos o movimento se passa num subespaço de dimensão $(N+R)$ do espaço de fase total.

As equações de movimento (2.32) podem ser colocadas de uma forma mais conveniente. No caso regular os parênteses de Poisson representam uma ferramenta poderosa. Vamos fazer algumas definições visando poder colocar as equações de movimento (2.32) em termos daqueles parênteses.

Seja $F(q, p)$ uma função do espaço de fase, e calculemo-la na região que os vínculos (2.27) definem (chamada superfície vincular):

$$F(q, p)|_{\Gamma_p} = F(q, p_a, g_v(q, p_a)) \quad (2.33)$$

se F é identicamente nula após esta operação, dizemos que F é **fracamente nula** para o qual adotamos a notação $F \approx 0$. Por outro lado se além disto o

gradiente de F é zero na superfície vincular $|\Gamma$ dizemos que F é **fortemente nula**, denotada por $F \simeq 0$:

$$F|_{\Gamma_p} = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}, \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) |_{\Gamma_p} = 0 \quad \implies F \simeq 0 \quad (2.34)$$

Usando estas definições pode-se mostrar facilmente que há a seguinte correspondência: Uma função do espaço de fase fracamente nula é fortemente igual a uma combinação linear dos vínculos:

$$F \approx 0 \quad \iff \quad F \simeq G_v \frac{\partial F}{\partial p_v} \quad (2.35)$$

É importante notar que funções identicamente nulas em todo o espaço de fase são fortemente nulas, pela própria definição (2.34).

A correspondência (2.35) implica em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(F - G_v \frac{\partial F}{\partial p_v} \right) &\approx 0 \\ \frac{\partial}{\partial p^i} \left(F - G_v \frac{\partial F}{\partial p_v} \right) &\approx 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Vamos agora usar estas definições nas equações de movimento (2.32). A Hamiltoniana está definida num espaço de fase reduzido, a superfície vincular, de maneira que podemos considerar H_c como sendo a restrição para o espaço de fase reduzido de uma função H' definida no espaço todo, isto é:

$$H_c - H' \approx 0 \quad (2.37)$$

substituímos agora (2.37) no lugar de F em (2.36), obtendo:

$$\frac{\partial H_c}{\partial q^i} \approx \frac{\partial}{\partial q^i} \left(H' - G_v \frac{\partial H'}{\partial p_v} \right) \approx 0$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial p^i} \approx \frac{\partial}{\partial p_i} \left(H' - G_v \frac{\partial H'}{\partial p_v} \right) \approx 0 \quad (2.38)$$

definindo $H = H' - G_v \frac{\partial H'}{\partial p_v}$ e usando as expressões (2.38) podemos obter facilmente:

$$\dot{q}^a \approx \frac{\partial H}{\partial p_a} + \dot{q}^v \frac{\partial G_v}{\partial p_a} \approx \{q_i, H + \dot{q}^v G_v\} \quad (2.39)$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \dot{q}^v \frac{\partial G_v}{\partial q^i} \approx \{p_i, H + \dot{q}^v G_v\} \quad (2.40)$$

que podem ser resumidas na forma:

$$\dot{A}(q, p) \approx \{A, H_T\} \quad (2.41)$$

$$H_T = H_c + \dot{q}^v G_v \quad (2.42)$$

para qualquer função A do espaço de fase.

H_T é a chamada **Hamiltoniana total**. As expressões (2.40) e (2.41) nos mostram o importante fato de que a definição de igualdades fracas nos permite escrever as equações de movimento em termos dos parênteses de Poisson.

A forma dos vínculos definida em (2.27) às vezes não é muito conveniente. Devido a este fato vamos expressar os vínculos de uma forma implícita:

$$\phi_v(q, p) \approx 0 \quad v = (R+1), \dots, N \quad (2.43)$$

Devemos ter cuidado também com outro detalhe: se surgir como vínculo uma relação do tipo $\phi^2 \approx 0$ ela deve ser linearizada, pois ela representa na realidade uma quantidade fortemente nula. Levando em conta este detalhe as equações de movimento podem ser escritas da forma :

$$\dot{A} \approx \{A, H_T\} \approx \{A, H_c\} + \mu^v \{A, \phi_v\} \quad (2.44)$$

onde os μ são funções arbitrárias que estão relacionadas com as velocidades indeterminadas.

A partir deste ponto devemos verificar que a dinâmica do sistema , condensada na equação (2.44), preserva os vínculos no decorrer do tempo. Isto é necessário para garantirmos a consistência da teoria:

$$0 \approx \dot{\phi}_r \approx \{\phi_r, H_c\} + \mu^s \{\phi_r, \phi_s\} \quad (2.45)$$

Consideramos também no formalismo Hamiltoniano que não surgirão inconsistências no tratamento, correspondentes a Lagrangeanas não admissíveis.

Para discutirmos claramente as consequências de (2.45) usaremos a seguinte notação :

$$h_r = \{\phi_r, H_c\} \quad P_{rs} = \{\phi_r, \phi_s\} \quad (2.46)$$

Podemos nos deparar com 4 tipos de situações :

o CASO 1A $h \neq 0 \quad \det P \neq 0$

Neste caso (2.45) é um sistema inhomogêneo de equações lineares, com soluções :

$$\mu_s \approx -P_{sr}^{-1} h_r \quad (2.47)$$

os μ ficam fracamente determinados. As equações de movimento para qualquer função do espaço de fase tomam a forma:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} - \{A, \phi_r\} P_{rs}^{-1} \{\phi_s, H_c\} \quad (2.48)$$

depois de especificarmos as condições iniciais para as coordenadas e momentos (sujeitas as restrições $\phi = 0$) podemos resolver estas equações sem ambiguidade.

o CASO 1B $h \neq 0 \quad \det P \approx 0$

Para as equações (2.45) terem solução, h deve satisfazer algumas condições. Seja R o posto de P . Como P é uma matriz $(N-R) \times (N-R)$ ela deve possuir neste caso $(N-R-M)$ autovetores nulos:

$$e_s^\alpha(q, p) P_{sr} \approx 0 \quad \alpha = 1, \dots, (N - R - M) \quad (2.49)$$

Multiplicando os autovetores e^α na equação (2.45) obtemos:

$$0 \approx e_r^\alpha h_r \quad (2.50)$$

onde estas equações podem ser satisfeitas identicamente ou nos levam a um número l' de novos vínculos. Chamamos estes novos vínculos de **secundários**. Eles restringem o espaço de fase a uma nova superfície vincular Γ'_p .

o CASO 2A $h \approx 0 \quad \det P \neq 0$

A solução é trivial, $\mu_r \approx 0$ ou $H_T = H_c$. Pode ocorrer que $h \approx 0$ surja de $H_c \equiv 0$ que está relacionado com o fato da teoria ser invariante por reparametrizações [5]. Não nos aprofundaremos no estudo desta situação.

o CASO 2B $h \approx 0 \quad \det P \approx 0$

Neste caso temos um sistema de equações homogêneo para os μ . Se M é o posto de P então $(N-R-M)$ multiplicadores ficam fracamente determinados.

Como conclusão geral destes 4 casos vemos que há situações em novos vínculos surgem, definindo uma nova superfície vincular Γ' :

$$\phi_r \approx 0|_{\Gamma'} \quad (r = (R + 1), \dots, N) \quad (2.51)$$

$$\chi_{\rho'} \approx 0|_{\Gamma'} \quad (\rho' = 1, \dots, l') \quad (2.52)$$

onde os χ são os vínculos secundários que surgem das relações (2.50). A notação $|_{\Gamma'}$ é um ponto muito importante: ela indica que as igualdades fracas estão agora relacionadas com a nova superfície vincular Γ' .

Temos que testar também a consistência dos vínculos secundários. Com isto a matriz P sofre uma alteração fazendo com que seu posto diminua. Assim, novos vínculos podem surgir para os quais devemos repetir o processo, que deve se esgotar num número finito de passos. A situação final é a seguinte:

Existe um subespaço Γ_f do espaço de fase $2N$ dimensional definido por:

$$\phi_r \approx 0|_{\Gamma_f} \quad (r = (R+1), \dots, N) \quad (2.53)$$

$$\chi_{\rho} \approx 0|_{\Gamma_f} \quad (\rho' = 1, \dots, l') \quad (2.54)$$

e para todos os autovetores nulos da matriz:

$$D = \begin{pmatrix} \{\phi_r, \phi_s\} \\ \{\chi_{\rho}, \phi_s\} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

as condições :

$$e_r^{(i)} \{\phi_r, H\} + e_{\rho}^{(i)} \{\chi_{\rho}, H_c\} \approx 0|_{\Gamma_f} \quad (2.56)$$

são satisfeitas identicamente. Para os multiplicadores arbitrários temos:

$$\{\phi_r, H\} + \{\phi_r, \phi_s\} \mu^s \approx 0|_{\Gamma_f} \quad (2.57)$$

$$\{\chi_{\rho}, H\} + \{\chi_{\rho}, \phi_s\} \mu^s \approx 0|_{\Gamma_f} \quad (2.58)$$

Um ponto importante que veremos agora e que está relacionado com a liberdade de escolha das funções arbitrárias, é saber quantos dos μ^s são determinados.

A resposta depende do posto da matriz D (equação (2.55)). Se o posto de D for $(N-R)$ então todos os μ são determinados. Por outro lado se o posto for um certo K menor que $(N-R)$ somente K funções são fixas, deixando $(N-R-K)$ completamente arbitrárias. Neste caso a matriz D possui $(N-R-K)$ autovetores nulos :

$$\{\phi_r, \phi_s\} e_s^{(J)} \approx 0 \quad (2.59)$$

$$\{\chi_\rho, \phi_s\} e_s^{(J)} \approx 0 \quad J = 1, \dots, (N - R - K) \quad (2.60)$$

Como qualquer combinação linear dos vínculos é também um vínculo definimos:

$$\phi^J = e_r^J \phi_r \quad (2.61)$$

Desta forma as duas últimas expressões implicam que os parênteses de Poisson entre os ϕ^J e todos os vínculos são fracamente nulos, ou seja:

$$\{\phi^J, \phi_r\} \approx 0 \quad (2.62)$$

$$\{\phi^J, \chi_\rho\} \approx 0 \quad (2.63)$$

De acordo com Dirac uma quantidade é chamada de **primeira classe** se seu parênteses de Poisson com todos os vínculos for fracamente nulo. Chamemos por outro lado de $\phi_\mu^i = ((N - R - K + 1), \dots, N - R)$ todos os vínculos primários que não surgem de (2.61). Temos em consequência que eles não são de primeira classe e são chamados de **segunda classe**. Os vínculos secundários também são separados em duas classes. Com esta classificação escrevemos a soma $\phi_s \mu^s$ em termos de quantidades de primeira e segunda classe:

$$\phi_s \mu^s = \phi^J v_J + \phi^i \mu_i \quad (2.64)$$

com isto as equações (2.57) e (2.58) ficam:

$$\{\phi^J, H_c\} \approx 0 \quad (2.65)$$

$$\{\chi^A, H_c\} \approx 0 \quad (2.66)$$

$$\{\phi^i, H_c\} + \{\phi^i, \phi^j\} \mu_j \approx 0 \quad (2.67)$$

$$\{\chi^a, H_c\} + \{\chi^a, \phi^j\} \mu_j \approx 0 \quad (2.68)$$

É possível demonstrar que todos os multiplicadores μ_j destas equações são determinados[5]. Juntando este fato ao desaparecimento das funções v^j chegamos a importante conclusão que **existem tantas funções indeterminadas quantos vínculos primários de primeira classe**.

Adotemos agora a seguinte notação :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\phi^i, \phi^j\} & \{\phi^i, \chi^b\} \\ \{\chi^a, \phi^j\} & \{\chi^a, \chi^b\} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Δ é a matriz de todos os vínculos de segunda classe. Denotemos os elementos de Δ na forma:

$$\Delta^{\lambda u} = \{\zeta^\lambda, \zeta^u\} \quad (2.70)$$

com isto as equações (2.67) e (2.68) ficam:

$$\{\zeta^u, H_c\} + \Delta^{uj} \mu_j \approx 0 \quad (2.71)$$

pelo fato de Δ ser não singular [3] podemos fazer as operações :

$$\mu_j \approx -\Delta_{ju}^{-1} \{\zeta^u, H_c\} \quad (2.72)$$

$$\Delta_{au}^{-1} \{\zeta^u, H_c\} \approx 0 \quad (2.73)$$

A primeira destas equações fixa todas as funções arbitrárias possíveis. Com isto as equações de movimento para uma teoria que apresenta vínculos podem ser escritas da forma:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + v_J \{A, \phi^J\} - \{A, \phi^j\} \Delta_{ju}^{-1} \{\zeta^u, H_c\} \quad (2.74)$$

utilizando a equação (2.73) esta expressão se escreve finalmente:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + v_J \{A, \phi^J\} - \{A, \zeta^v\} \Delta_{vu}^{-1} \{\zeta^u, H_c\} \quad (2.75)$$

Para familiarizarnos um pouco com o método de Dirac vamos utiliza-lo para analisar o exemplo visto na seção anterior e comparar os resultados.

Consideramos então a Lagrangeana:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + (1 - \alpha)q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2$$

Determinamos os momentos (equação (2.24)):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \equiv p_1 = \dot{q}_1 + q_2 \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \equiv p_2 = (1 - \alpha)q_1 \quad (2.77)$$

onde a segunda equação representa um vínculo primário (equação (2.27)):

$$\phi = p_2 + (\alpha - 1)q_1 \approx 0 \quad (2.78)$$

A Hamiltoniana canônica é obtida como segue:

$$H_c = p_i\dot{q}_i - L = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \quad (2.79)$$

$$H_T = H_c + \mu[p_2 + (\alpha - 1)q_1] \quad (2.80)$$

Consistência do vínculo primário (equação (2.45)):

$$0 \approx \dot{\phi} \approx \{\phi, H_p\} = \chi = \alpha(p_1 - q_2) - \beta(q_1 - q_2) \quad (2.81)$$

CASO A $\alpha = 0 = \beta$

Aqui temos que o vínculo primário ϕ se preserva no tempo identicamente; assim não surgem novos vínculos e ϕ é de primeira classe. As equações de Hamilton (2.75) se escrevem:

$$\dot{q}_1 = p_1 - q_2 \approx 0 \quad \dot{q}_2 \approx \mu \quad (2.82)$$

$$\dot{p}_1 \approx \mu \quad \dot{p}_2 = p_1 - q_2 \approx 0 \quad \Rightarrow \ddot{q}_1 = 0 \quad (2.83)$$

com μ arbitrário, que implica em q_2 arbitrário. Estes são também os resultados da análise Lagrangeana (na seção anterior).

CASO B $\alpha = 0 \quad \beta \neq 0$

Neste caso surge um vínculo secundário:

$$\chi = q_1 - q_2 \approx 0 \quad (2.84)$$

que é exatamente o vínculo encontrado no tratamento Lagrangeano (equação (2.15)). Impondo consistência temporal em χ obtemos:

$$0 \approx \dot{\chi} \approx \{q_1 - q_2, H_T\} = (p_1 - q_2) - \mu \quad (2.85)$$

que impõe a condição que determina o multiplicador μ (caso 1A). Com isto a Hamiltoniana fica:

$$H_p = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - q_2)(p_2 - q_1) \quad (2.86)$$

Vemos também que os vínculos são de segunda classe. Com isto as equações de movimento se escrevem:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = \dot{q}_2 \quad \dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \mu = p_1 - q_1 \approx 0 \Rightarrow \\ \ddot{q}_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.87)$$

que são consistentes com o que foi visto no tratamento Lagrangeano.

CASO C $\alpha \neq 0$

A consistência temporal de χ implica em:

$$\dot{\chi} = \{\chi, H_T\} = -\beta[(p_1 - q_2) - \alpha(q_1 - q_2)] + (\beta - \alpha^2)\mu \quad (2.88)$$

daqui temos as seguintes possibilidades:

Caso (C1) $\beta = \alpha^2$

A expressão anterior se transforma em:

$$0 \approx \dot{\chi} = -\alpha\chi \quad (2.89)$$

que é identicamente satisfeita, de modo que não surgem novos vínculos .
Analisamos suas classes:

$$\{\phi, \chi\} \approx 0 \quad (2.90)$$

o que mostra que são de primeira classe.

Caso (C2) $\beta \neq \alpha^2$

A condição de consistência de χ implica na determinação do multiplicador μ :

$$\mu \approx \frac{\beta}{\beta - \alpha^2} [(p_1 - q_2) - \alpha(q_1 - q_2)] \implies \quad (2.91)$$

$$\mu \approx \frac{\beta}{\alpha} (q_1 - q_2) \quad (2.92)$$

com isto as equações de movimento ficam:

$$\dot{q}_1 = p_1 - q_2 = \mu \quad (2.93)$$

$$\dot{q}_2 = \mu \quad (2.94)$$

$$\dot{p}_1 = -(q_1 - q_2)\beta + (\alpha - 1)\mu = \mu \quad (2.95)$$

$$\dot{p}_2 = (1 - \alpha)\mu \quad (2.96)$$

cujas soluções são exatamente as encontradas nas equações (2.19) e (2.20).

Isto finaliza a discussão sobre o primeiro passo do método de Dirac: conseguir passar do Formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano consistentemente, no caso singular. Veremos no próximo capítulo a importância da classificação dos vínculos em classes : Os de primeira classe se relacionando com a liberdade de gauge da teoria , enquanto que os de segunda classe são eliminados pois representam graus de liberdade desnecessários. Veremos também que estes fatos são ferramentas fundamentais para se construir uma quantização canônica consistente.

Para finalizar este capítulo apresentamos os conceitos básicos para utilizar o método de Dirac no caso de Teorias de Campos.

•§2.3: MÉTODO DE DIRAC E TEORIAS DE CAMPOS

Nesta seção vamos apresentar resumidamente como o método de Dirac se adapta para infinitos graus de liberdade.

Em teorias de campos a Lagrangeana é um funcional nos campos e suas derivadas temporais. Por isto ao invés de trabalharmos com a Lagrangeana é mais conveniente usar a densidade de Lagrangeana:

$$l = \int d\vec{x} L \quad (2.97)$$

Em termos da densidade de Lagrangeana as equações de movimento se escrevem:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_a} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu Q_a)} = 0 \quad (2.98)$$

Os momentos e a Hamiltoniana são definidos como segue:

$$\Pi^a(x) = \frac{\delta l}{\delta \dot{Q}_a(x)} \quad (2.99)$$

$$h = \int d\vec{x} \Pi(x) \dot{Q}(x) - l = \int d\vec{x} H \quad (2.100)$$

onde o simbolo “ δ ” representa derivadas funcionais. H representa a **densidade de Hamiltoniana**.

Os parênteses de Poisson (a tempos iguais) fundamentais se escrevem:

$$\begin{aligned} \{Q_a(x), Q_b(y)\}_{x_0 y_0} &= 0 = \{\Pi^a(x), \Pi^a(y)\}_{x_0 y_0} \\ \{Q_a(x), \Pi^b(y)\}_{x_0 y_0} &= \delta_a^b \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Onde os parenteses de Poisson são dados pela expressão:

$$\{A, B\}_{x_0=Y_0} = \int d\vec{z} \left(\frac{\delta A}{\delta Q_a(z)} \frac{\delta B}{\delta \Pi_a(z)} - \frac{\delta A}{\delta \Pi_a(z)} \frac{\delta B}{\delta Q_a(z)} \right) \quad (2.102)$$

Vemos que no caso de infinitos graus de liberdade temos algumas mudanças no parênteses de Poisson: Obviamente a soma sobre os índices foi substituída por uma integral sobre cada ponto do espaço de configurações, e as derivadas parciais por derivadas funcionais nas variáveis do espaço de fase.

No caso singular devemos lidar com os vínculos. Para teorias de campos eles não são mais equações algébricas entre variáveis do espaço de fase mas relações funcionais que podem envolver derivadas espaciais:

$$\phi_v = \phi_v[Q, \Pi, \partial Q, \partial \Pi] \quad (2.103)$$

Outra característica presente em teorias de campos é que junto do fato dos vínculos serem fracamente nulos, tanto suas derivadas como integrais espaciais o são. Além disto não é mais verdade de que uma função fracamente nula é uma combinação linear de vínculos, ela se transforma em relações integrais. Com isto a Hamiltoniana total se escreve:

$$h_T = h_c + \int d\vec{x} \mu^v(x) \phi_v(x) = \int d\vec{x} H_T \quad (2.104)$$

onde os $\mu(x)$ são os multiplicadores arbitrários. A condição de consistência temporal se escreve:

$$0 \approx \dot{\phi}_s \approx \{\phi_s(x), h_T\} = \{\phi_s, h_c\} + \int d\vec{y} \mu^v(y) \{\phi_s(x), \phi_v(y)\} \quad (2.105)$$

com os ϕ_v sendo os vínculos primários de primeira classe. Finalmente as equações de movimento adotam a forma:

$$\dot{Q}_a(x) \approx \{Q_a(x), h_t(x^0)\} \quad (2.106)$$

$$\dot{\Pi}^a(x) \approx \{\Pi^a(x), h_T(x^0)\} \quad (2.107)$$

As considerações apresentadas nesta seção são apenas básicas para o uso do método de Dirac em teorias de campos. Existem várias peculiaridades que são característica de estarmos trabalhando com infinitos graus de liberdade. Algumas características adicionais relacionadas com teorias de campos serão apresentadas no próximo capítulo.

Em função dos nossos propósitos não nos aprofundaremos nestes assuntos, mas uma vasta literatura pode ser sugerida [5,16]. De qualquer forma existe uma série de problemas a serem resolvidos nesta formulação que a tornaram objeto de estudo de vários autores [17,18].

CAPÍTULO 3

VÍNCULOS, TRANSFORMAÇÕES DE SIMETRIA E TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE

No capítulo anterior classificamos os vínculos em primeira e segunda classes. Justificaremos neste capítulo esta classificação: Veremos que os vínculos de primeira classe estão relacionados com as transformações de gauge da teoria. Por outro lado veremos que os vínculos de segunda classe representam graus de liberdade espúrios, e como o método nos ensina a eliminá-los. Consideraremos dois casos em separado: quando existem somente vínculos de primeira classe e quando só existem de segunda classe, o caso híbrido será uma consequência destes dois.

A notação utilizada nesta seção corresponde a teorias com número finito de graus de liberdade.

•§3.1: VÍNCULOS DE SEGUNDA CLASSE E PARÊNTESES DE DIRAC

Quando na teoria estudada estiverem presentes somente vínculos de segunda classe as equações de movimento tomarão a forma:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} - \{A, \zeta^\nu\} \Delta_{\nu\mu}^{-1} \{\zeta^\mu, H_c\} \quad (3.1)$$

onde Δ é a matriz dos vínculos de segunda classe, conhecida também como **matriz de Dirac**:

$$\Delta = \{\zeta^\mu, \zeta^\nu\} \quad (3.2)$$

Lembramos que Δ é não singular e antisimétrica[3], para sistemas com número finito de graus de liberdade. Isto implica que Δ é de dimensão par, ou

melhor, o número de vínculos de segunda classe é par, $2M$. Neste caso não há presença de funções arbitrárias e a dinâmica do sistema está bem determinada, definida num sub-espço, de dimensão $2(N-M)$, do espaço de fase total (a superfície vincular). Com isto o número de graus de liberdade é exatamente $2(N-M)$.

Como dissemos na introdução desta seção os vínculos de segunda classe implicam na existência de graus de liberdade espúrios da teoria (comprovaremos isto na próxima seção). Tendo em vista este fato Dirac definiu um equivalente aos parênteses de Poisson que eliminam esses graus de liberdade irrelevantes. Eles são chamados de **parênteses de Dirac**:

$$\{A_1, A_2\}_D = \{A_1, A_2\} - \{A_1, \zeta^\lambda\} \Delta_{\lambda\mu}^{-1} \{\zeta^\mu, A_2\} \quad (3.3)$$

onde os A são funções quaisquer do espaço de fase.

Os parênteses de Dirac gozam das mesmas propriedades (equações (1.22)) que os de Poisson, menos as relações correspondentes aos parênteses fundamentais (num caso geral).

No capítulo 2 vimos a importância de definirmos os vínculos usando o conceito de igualdade fraca. Porém fazendo uso dos parênteses de Dirac não precisamos mais fazer essa diferenciação :

$$\begin{aligned} \{A, \zeta^\lambda\}_D &= \{A, \zeta^\lambda\} - \{A, \zeta^\nu\} \Delta_{\nu\mu}^{-1} \{\zeta^\mu, \zeta^\lambda\} \\ &= \{A, \zeta^\lambda\} - \{A, \zeta^\nu\} \delta_{\nu\lambda} \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

ou seja, se trabalharmos com os parênteses de Dirac não há mais necessidade de se distinguir igualdades fracas de igualdades fortes. Em outras palavras: **para sistemas de segunda classe o uso de parênteses de Dirac permite que possamos impor fortemente os vínculos.** Por outro lado os novos parênteses não alteram as equações de movimento:

$$\{A, H_T\}_D = \{A, H_T\} - \{A, \zeta^\alpha\} \Delta_{\alpha\beta}^{-1} \{\zeta^\beta, H_T\} \approx \{A, H_T\} \approx \dot{A} \quad (3.5)$$

em suma: Para sistemas de segunda classe **podemos substituir os parênteses de Poisson pelos parênteses de Dirac.**

O uso de Parênteses de Dirac nos permite eliminar os graus de liberdade desnecessários da teoria, o que nos sugere a seguinte pergunta: É possível isolar os graus de liberdade que permanecem, como pares canônicos? Isto significa que no caso afirmativo o sistema é descrito num sub-espaço de fase, com cada coordenada q_i tendo seu correspondente momento p_i . Vamos agora tentar responder a esta pergunta.

Queremos encontrar $2(N-M)$ variáveis $\hat{x} = (\hat{q}^a, \hat{p}_a)$, $a = 1, \dots, (N-M)$ formando $(N-M)$ pares canônicos, $\{\hat{x}_a, \hat{x}_b\} = \Gamma_{ab}$ onde :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

I sendo a matriz identidade. Queremos também vínculos que sejam identicamente nulos, como funções das novas variáveis $\hat{x}$: $\zeta_\mu(x) = \zeta_\mu(x(\hat{x})) \equiv 0$. Então, para uma grandeza do espaço de fase temos:

$$\hat{A}(x) = A(x)|_{\zeta=0} = A(x(\hat{x})) \quad (3.7)$$

Os parênteses de Dirac se transformam em:

$$\{A, B\}_D|_{\zeta=0} = \sum_{a=1}^{N-M} \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{q}^a} \frac{\partial \hat{B}}{\partial \hat{p}_a} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{p}_a} \frac{\partial \hat{B}}{\partial \hat{q}^a} \quad (3.8)$$

Que acaba se tornando um parênteses de Poisson do espaço de fase reduzido, onde se passa a dinâmica do sistema, não havendo mais vínculos. **Para um caso geral é difícil dizer se realmente podemos achar estas novas variáveis**[5]. No exemplo que vimos no capítulo 2 o procedimento é possível:

Tomemos para simplificar o caso B (equação (2.84)). O espaço de fase como um todo tem uma base (q_1, q_2, p_1, p_2) . Existem por sua vez os vínculos $\zeta_1 = p_2 - q_1$, $\zeta_2 = q_2 - q_1$, então:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (3.9)$$

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \zeta_1\}\{\zeta_2, B\} + \{A, \zeta_2\}\{\zeta_1, B\} \quad (3.10)$$

Agora é simples encontrar uma transformação de variáveis a qual transforme os vínculos em variáveis canônicas:

$$Q_1 = q_1 \quad Q_2 = q_2 - q_1 = \zeta_2 \quad (3.11)$$

$$P_1 = p_1 + p_2 - q_2 \quad P_2 = p_2 - q_1 = \zeta_1 \quad (3.12)$$

com o que obtemos facilmente:

$$\{Q_1, P_1\}_D = 1 \quad (3.13)$$

$$\{Q_2, X\}_D = 0 \quad \{P_2, X\}_D = 0 \quad (3.14)$$

onde X representa qualquer uma das novas variáveis canônicas.

Resumindo o visto nesta seção podemos dizer que os parênteses de Dirac são um instrumento muito eficaz na identificação dos verdadeiros graus de liberdade de uma teoria vinculada. Eles representam também um passo fundamental rumo a quantização canônica, como veremos mais para frente.

• §3.2: VÍNCULOS DE PRIMEIRA CLASSE E TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE

A outra situação especial que estudamos a seguir é quando todos os vínculos presentes na teoria estudada são de primeira classe. Com isto as equações de movimento tomam a forma:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + v_j \{A, \phi^j\} \quad (3.15)$$

onde os v^j são os multiplicadores arbitrários. A existência destes multiplicadores tem implicações muito importantes, como vemos a seguir. Suponhamos que o sistema se encontra no estado (q_0, p_0) no instante inicial $(t =$

t_0). Podemos ver que ele poderá evoluir para pontos diferentes do espaço de fase, dependendo da escolha que fizermos dos v^j . Isto significa que cada estado físico não está associado a um único ponto do espaço de fase, mas a um conjunto de pontos determinando uma região no mesmo. As transformações que nos levam de um ponto a outro destas regiões são chamadas de transformações de gauge. Uma primeira questão importante é saber quais são os geradores destas transformações :

Para isto estudamos a seguinte situação : Sejam A_λ e $A_{\lambda'}$ duas funções do espaço de fase que evoluem a partir de um mesmo estado inicial A_0 mas com multiplicadores arbitrários diferentes, respectivamente, λ e λ' . As duas representam o mesmo estado físico.

Em primeira ordem podemos escrever:

$$A_\lambda(t) = A_0 + \frac{dA_\lambda}{dt} \delta t =$$

$$A_0 + \{A_0, H_c\} + \lambda_j \{A_0, \phi^j\}$$

$$A_{\lambda'}(t) = A_0 + \{A_0, H_c\} + \lambda'_j \{A_0, \phi^j\} \quad (3.16)$$

onde os ϕ^j são os vínculos primários de primeira classe. Calculamos a diferença entre as duas trajetórias:

$$A_\lambda(t) - A_{\lambda'}(t) = \delta t (\lambda_j(0) - \lambda'_j(0)) \{A_0, \phi^j\} \quad (3.17)$$

o que está nos mostrando que os **vínculos primários de primeira classe são geradores de transformações de gauge**. podemos escrever a equação (3.17) da seguinte maneira:

$$\delta A = \epsilon_j \{A, \phi^j\} \quad (3.18)$$

onde $\epsilon_j = \delta t (\lambda_j - \lambda'_j)$. Um ponto fundamental que torna estas transformações consistentes com a teoria é que elas não nos levam fora da superfície vincular. De fato, os ϕ^j comutam com todos os vínculos (são de primeira classe!) de maneira que não geram transformações sobre a superfície acima. Estes

argumentos explicam por que os vínculos de segunda classe não são considerados como geradores de transformações de gauge: eles nos levam fora da superfície vincular.

Uma pergunta importante que surge também é se os vínculos primários de primeira classe são **todos** os geradores possíveis das transformações de gauge. Aplicando o método de Dirac a exemplos simples é possível confirmar que eles realmente não esgotam todas as possibilidades. Devido a estes fatos Dirac[3] postulou que os vínculos secundários de primeira classe também contribuiriam para os geradores de transformações de gauge. Fazemos a seguir uma discussão a respeito deste fato.

Começamos considerando duas trajetórias físicas, ou seja, duas soluções das equações de movimento ; $(q_s(t), p_s(t))$ e $(q_s(t) + \eta_s(t), p_s(t) + \zeta_s(t))$. A trajetória variada deve satisfazer as equações de movimento (2.30) e as condições de vínculo (2.27); assim:

$$\begin{aligned} \dot{q}_\alpha + \dot{\eta}_\alpha &= \frac{\partial H_c}{\partial p_\alpha}(q_r + \eta_r, p_\beta + \zeta_\beta) \\ &- (\dot{q}_\rho + \dot{\eta}_\rho) \frac{\partial g_\rho}{\partial p_\alpha}(q_r + \eta_r, p_\beta + \zeta_\beta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_s + \dot{\zeta}_s &= \frac{\partial H_c}{\partial q_s}(q_r + \eta_r, p_\beta + \zeta_\beta) \\ &- (\dot{q}_\rho + \dot{\eta}_\rho) \frac{\partial g_\rho}{\partial p_\alpha}(q_r + \eta_r, p_\beta + \zeta_\beta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$p_\rho + \zeta_\rho = g_\rho(q_r + \eta_r, p_\beta + \zeta_\beta) \quad (3.21)$$

Expandindo os lados direito das equações acima em primeira ordem de $\eta, \zeta, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ e usando as equações de movimento não variadas, ((2.29) e (2.30)) obtemos:

$$\frac{\partial H_T^2}{\partial q_r \partial p_\alpha} \eta_r + \frac{\partial H_T^2}{\partial p_\beta \partial p_\alpha} \zeta_\beta - \frac{\partial g_\rho}{\partial p_\alpha} \dot{\eta}_\rho - \dot{\eta}_\alpha = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial H_T^2}{\partial q_r \partial q_s} \eta_r + \frac{\partial H_T^2}{\partial p_\beta \partial q_s} \zeta_\beta - \frac{\partial g_\rho}{\partial q_s} \dot{\eta}_\rho - \dot{\zeta}_s = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial g_\rho}{\partial q_s} \eta_s + \frac{\partial g_\rho}{\partial p_\alpha} \eta_\alpha - \zeta_\rho = 0 \quad (3.24)$$

que representam as condições para a trajetória variada ser física.

Um gerador de transformações de gauge geral deve nos levar de soluções das equações de movimento em outras soluções, de modo que ele deve satisfazer:

$$\eta_r(t) = \{q_r, G\} \quad \zeta_r(t) = \{p_r, G\} \quad (3.25)$$

Castellani [4] propôs a seguinte forma para o gerador G :

$$G = \sum_{n=0}^k \epsilon^{(n)} G_n \quad (3.26)$$

$\epsilon^{(n)}$ denota derivada temporal enésima. Substituindo estas expressões em (3.22) (3.23) e (3.24) obtemos, após algumas passagens:

$$\{G_0, H_T\} = c.l.p$$

$$G_0 + \{G_1, H_T\} = c.l.p$$

$$G_1 + \{G_2, H_T\} = c.l.p$$

$$G_{k-1} + \{G_k, H_T\} = c.l.p$$

$$G_k = c.l.p \quad (3.27)$$

$$\{G_n, \phi\} = c.l.v \quad (3.28)$$

onde (c.l.p) e (c.l.v) significam “combinações lineares de vínculos primários” e “combinações lineares de vínculos” respectivamente. ϕ é um vínculo qualquer.

As equações acima estão nos dizendo que para os G_n formarem o gerador de transformações de gauge eles devem ser de primeira classe e seu parenteses de Poisson com a Hamiltoniana total deve ser uma combinação linear de vínculos primários, sendo que o último membro da cadeia deve ser primário. No método de Dirac estas relações representam as condições de consistência dos vínculos que vão surgindo na teoria de maneira que os elementos que fazem parte do gerador (3.26) são combinações lineares de vínculos de primeira classe. Concluimos esta discussão com uma afirmação

muito importante: A cadeia possui todos os vínculos de primeira classe com exceção daqueles que surgem como potências (χ^n), de fato verificamos que se um destes vínculos surgir, a cadeia acaba (usando as equações de movimento). Isto implica que χ não faz parte do gerador de transformações de gauge. Se lembrarmos também do apresentado na seção (2.2), devemos linearizar o vínculo para o tratamento ser consistente. De forma que, **concluindo, todos os vínculos de primeira classe estão relacionados com transformações de gauge com exceção daqueles que surgem como potências.**

•§3.3: OBTENÇÃO DE SIMETRIAS NO FORMALISMO HAMILTONIANO

Na seção anterior vimos como os vínculos se relacionam com as transformações de gauge, ou seja transformações que nos levam de uma solução a outra das equações de movimento. Porém na obtenção de transformações de **simetria** as equações de movimento não são utilizadas. Desta maneira, para acharmos os geradores de transformações de simetria no formalismo Hamiltoniano devemos impor que eles deixem quase-invariante a ação sem uso das equações de movimento. Veremos que o gerador de transformações de simetria esta novamente ligado com os vínculos de primeira classe, porém de uma maneira um pouco diferente da existente no caso de transformações de gauge.

Apos uma análise das transformações de simetria locais no formalismo Lagrangeano (equação (1.33)), Anderson e Bergmann[1,2] sugeriram que o gerador de simetrias locais no formalismo Hamiltoniano se escrevesse na forma:

$$G = \epsilon^i A_i^0 + \dot{\epsilon} A_i^1 + \dots + \epsilon^{(k)} A_i^k + \epsilon^{(n)} A_i^n \quad (3.29)$$

onde $\epsilon^{(k)}$ representa a k-ésima derivada temporal dos coeficientes arbitrários ϵ . Anderson e Bergmann também demonstraram que os ϵ são os coeficientes presentes nas transformações de simetria no formalismo Lagrangeano, das quais estamos partindo. É importante notar que a soma (3.29) tem um número de termos igual a ordem máxima de derivação temporal dos ϵ .

Sabemos que no formalismo Hamiltoniano as transformações que não mudam a forma das equações de movimento são as chamadas transformações canônicas . O gerador de uma transformação canônica atuando sobre a Hamiltoniana deve satisfazer, por definição :

$$H(q', p', t') - H(q, p, t) \equiv \delta H = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad (3.30)$$

No caso da Hamiltoniana corresponder a um sistema singular ela deve possuir uma indefinição que é uma combinação linear de vínculos primários de primeira classe. De maneira que a equação (3.30) deve mudar para:

$$\delta H = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} = c^\mu \delta_\mu \phi \quad (3.31)$$

onde ϕ representa os vínculos primários. Substituindo (3.29) em (3.31) obtemos, após algumas passagens:

$$\begin{aligned} \{A_i^0, H\} &= c.l.p \\ A_i^{k-1} + \{A_i^k, H\} &= c.l.p \\ A_i^n &= c.l.p \end{aligned} \quad (3.32)$$

Onde (c.l.p) significa novamente “ combinação linear de vínculos primários”. Note que neste algoritmo não fazemos nenhuma restrição em relação a vínculos que surgem como potências, pois não estamos utilizando as equações de movimento. Se nos lembrarmos do algoritmo de Dirac para geração de vínculos vemos que todos eles estão sendo gerados em (3.32) . Por outro lado, como consequência da própria estrutura do algoritmo acima, os elementos A^k devem satisfazer a álgebra $\{A^j, A^k\} = c_l^{jk} A^l$ [2], de maneira que representam vínculos de primeira classe. Assim podemos concluir que **conhecendo as simetrias locais no formalismo Lagrangeano podemos recupera-las no formalismo Hamiltoniano construindo o Gerador (3.29).**

•§3.4: A FIXAÇÃO DE GAUGE

Como vimos no capítulo 2 , A presença de vínculos primários de primeira classe implica que as funções arbitrárias que os multiplicam na Hamiltoniana total ficam completamente indeterminadas. Por outro lado na seção anterior vimos que os vínculos de primeira classe estão associados aos geradores de transformações de gauge, de maneira que um processo de fixação de gauge consistente deve ser tal que consiga determinar aquelas funções , como também deve tornar o conjunto de vínculos de segunda classe.

Começamos esta discussão considerando a seguinte situação :suponhamos que existem $2M'$ vínculos de segunda classe da forma:

$$q^\alpha \approx 0 \quad p_\alpha \approx 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, M' \quad (3.33)$$

e M vínculos de primeira classe,

$$p_a \approx 0 \quad a = (M' + 1), \dots, (M + M') \quad (3.34)$$

Para facilitar vamos considerar que todos estes vínculos são primários, estes definem a superfície vincular Γ_c .

Vimos anteriormente que os vínculos de segunda classe podem ser eliminados usando os parênteses de Dirac no lugar dos de Poisson. No exemplo acima os parênteses de Dirac são parênteses de Poisson truncados para os graus de liberdade indicados pelas equações (3.33). Com isto temos:

$$\{A_i, q^\alpha\}_D = 0 \quad \{A_i, p_\alpha\}_D = 0 \quad (3.35)$$

onde os A são funções quaisquer do espaço de fase. Logicamente , neste caso, a Hamiltoniana total tem a forma:

$$H_T = H_c + \dot{q}^a p_a \quad (3.36)$$

com as velocidades $\dot{q}$ indeterminadas.

As quantidades físicas que podem ser medidas na experiência não devem variar por transformações de gauge, por isso sua representação no

espaço de fase deve ser completamente determinada pelas equações de movimento, ou melhor, deve ter parênteses de Poisson nulo com os vínculos de primeira classe. Estas quantidades são chamadas de **observáveis***. No nosso exemplo, para uma função F ser um observável devemos ter necessariamente:

$$\{F, p_a\} \approx 0 \quad (3.37)$$

No exemplo acima todos os observáveis devem ser então funções exclusivas do espaço de fase reduzido especificado por (q^A, p^A) , $A = (M + M' + 1), \dots, N$. As coordenadas neste espaço reduzido são completamente desvinculadas, independentes, e se apresentam como pares canônicos.

Este exemplo é bastante ideal. Num caso geral não há um procedimento que nos permita identificar as coordenadas deste espaço reduzido. Pelo menos, a contagem de verdadeiros graus de liberdade é sempre possível, além do fato de que o observável deve, como dissemos anteriormente, ter parênteses de Poisson fracamente nulo com todos os vínculos de primeira classe:

$$\{F, \phi^\alpha\} \approx 0 \quad (3.38)$$

ou em termos dos parênteses de Dirac:

$$\{F, \phi^\alpha\}_D = f_\beta^\alpha \phi^\beta \quad (3.39)$$

*

Como dissemos anteriormente muitas vezes não podemos obter o espaço de fase reduzido. Com isto os não observáveis permanecem na teoria. Eles não tem parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os vínculos de primeira classe, de maneira que devemos especificar sua dependência temporal dando valores para as velocidades indeterminadas. Esta escolha não deve influenciar os observáveis.

Uma maneira de se fixar gauge é introduzindo vínculos adiconais (“externos”). Para exemplificar um caso de escolha de gauge através de vínculos

* Em termos do formalismo Lagrangeano podemos definir um observável como sendo aquela quantidade que é invariante por transformações de simetria.

externos consideramos que existem M vínculos de primeira classe ϕ^α como únicos vínculos da teoria definindo a superfície vincular Γ_{fc} de dimensão $(2N-M)$. Com isto a equação (3.38) se transforma em equações diferenciais para as funções F em Γ_{fc} . Para entendermos esta interpretação vamos passar das variáveis originais do espaço de fase $x=(q,p)$ para um conjunto transformado $x' = \{\phi^\alpha, Y^I\}$ onde I vai de $(M+1)$ a $2N$. Em geral podemos escrever:

$$\{A, B\}_x = \{x_{i'}, x^{j'}\}_x \frac{\partial A}{\partial x_{i'}} \frac{\partial B}{\partial x^{j'}} \quad (3.40)$$

podemos escrever para este caso:

$$\{F, \phi^\alpha\} = \{Y^I, \phi^\alpha\}_x \frac{\partial F}{\partial Y^I} \quad (3.41)$$

Os termos que incluem $\frac{\partial F}{\partial \phi^\alpha}$ somem devido as quantidades ϕ serem de primeira classe. Com isto o conjunto de M equações diferenciais :

$$g^{\alpha I} \frac{\partial F}{\partial Y^I} = 0 \quad g^{\alpha I} = \{\phi^\alpha, Y^I\} \quad (3.42)$$

determina completamente F se são especificados M valores iniciais. Em outras palavras, F tem que estar especificada em uma superfície de dimensão $(2N-M)-M$. Esta superfície pode ser definida por

$$\omega^\alpha(q, p) = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (3.43)$$

$$\det|\{\omega^\alpha, \phi^\beta\}| = \det \tilde{G}_{\alpha\beta} \neq 0 \quad (3.44)$$

ω representa o vínculo externo.

Os vínculos externos devem satisfazer esta condição necessariamente. Por outro lado eles devem ser compatíveis com as equações de movimento, de maneira que devemos testar sua consistência temporal equação (2.44)). O sistema final de vínculos deve ser de segunda classe pois assim teremos garantido que o gauge estará completamente fixado.

Num caso geral, teremos a presença de vínculos de primeira e segunda classe. Com o procedimento acima a fixação de gauge torna de segunda

classe o sistema total de vínculos , para o qual devemos adotar o procedimento descrito na seção 3.1.

• §3.5: A QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

Dentro do método de Dirac, a quantização canônica representa o último passo. Um ponto básico deste processo é a substituição dos parênteses de Poisson pelos comutadores:

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (3.45)$$

onde as variáveis dinâmicas A e B do espaço de fase se transformam em operadores que atuam no espaço de Hilbert das funções de onda. Por outro lado a Hamiltoniana H se transforma num operador que rege a dinâmica do sistema através da equação de Schrodinger:

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi \quad (3.46)$$

No caso singular devemos adotar certos procedimentos adicionais. Como devemos trabalhar com os vínculos a nível quântico? ; Vamos separar dois casos fundamentais: Na presença única de vínculos de primeira classe e no outro caso na de vínculos de segunda classe. Começamos pelo primeiro caso. Como dissemos antes todas as funções do espaço de fase se transformam em operadores a nível quântico, de maneira que os vínculos também o fazem. Desta forma, quando atuando na função de onda, eles devem satisfazer:

$$\phi_j \Psi = 0 \quad (3.47)$$

ou seja os vínculos impõem restrições sobre a função de onda. Este fato deve ser válido para todos os vínculos, de modo que tomando dois quaisquer:

$$\phi_j \Psi = 0 \quad \phi_{j'} \Psi = 0 \quad (3.48)$$

multiplicando a primeira equação por $\phi_{j'}$ e a segunda por ϕ_j e subtraindo podemos obter facilmente:

$$[\phi_j, \phi_{j'}]\Psi = 0 \quad (3.49)$$

de modo que devemos satisfazer esta condição para a formulação ser consistente. Por outro lado não queremos impôr novas restrições sobre a função de onda fora as equações (3.47) de maneira que o comutador presente em (3.49) deve ser no máximo uma combinação linear de vínculos:

$$[\phi_j, \phi_{j'}] = c_{jj'k}\phi_k \quad (3.50)$$

lembramos que neste caso estamos considerando a presença única de vínculos de primeira classe, de modo que eles ,classicamente satisfazem:

$$\{\phi_j, \phi_{j'}\} = c_{jj'k}\phi_k \quad (3.51)$$

ou seja: No caso da presença única de vínculos de primeira classe a algebra de parênteses de Poisson deve ser preservada após sua transformação em comutadores.

Há aqui um ponto muito importante a ser notado: a nível quântico os multiplicadores c_j se transformam em operadores de maneira que para a algebra (3.51) ser satisfeita eles devem estar **a esquerda** dos ϕ_j . Se esta condição for satisfeita poderemos obter uma quantização canônica consistente.

O outro caso que estudamos é o de presença única de vínculos de segunda classe ζ . Aqui a situação é um pouco diferente. Se quisermos impor os vínculos da mesma forma que o fizemos no caso anterior obteremos algumas contradições , $[\zeta_j, \zeta_{j'}] \neq 0$ pois classicamente $\det\{\zeta_j, \zeta_{j'}\} \neq 0$. Isto representa uma situação delicada, pois como vimos na seção (3.4), após a fixação de gauge o sistema de vínculos se torna de segunda classe. A saída para este problema é impor os vínculos a nível quântico como operadores identicamente nulos:

$$\hat{\zeta}_j = 0 \quad (3.52)$$

Esta medida torna a versão quântica consistente ,devido ao fato de que podemos adotar os vínculos identicamente nulos usando os parênteses de

Dirac. Assim no caso do sistema de vínculos ser de segunda classe a regra de quantização (3.45) se torna:

$$\{A, B\}_D \longrightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (3.53)$$

para duas variáveis dinâmicas A e B quaisquer do espaço de fase. Esta é a situação encontrada depois de termos feito a fixação de gauge num caso em que temos a presença tanto de vínculos de primeira como de segunda classe.

Estas são as regras básicas para a quantização canônica no caso singular. Na verdade não existe até hoje uma metodologia que permita a quantização canônica num caso geral, pois na prática surgem varios inconvenientes, entre os mais importantes os problemas de ordenamento que mencionamos anteriormente.

Isto finaliza a descrição geral do método de Dirac. Pelo que vimos ela não representa uma teoria "fechada", sendo ate hoje objeto de estudo por ela mesma [15,17,18]. No próximo capítulo aplicamos o método num modelo muito estudado em teorias de cordas: Os bósons quirais.

CAPÍTULO 4

QUANTIZAÇÃO VIA MÉTODO DE DIRAC DE BÓSONS QUIRAIS EM DUAS DIMENSÕES

Em duas dimensões espaço-temporais é possível construir teorias que descrevam bósons quirais, isto é, campos escalares que se movem para uma direção preferencial (como por exemplo para a esquerda).

O estudo destas teorias, aparentemente simples, é de fundamental importância na construção de teorias de cordas[11]. Neste capítulo tentaremos obter uma teoria quântica consistente de bósons quirais em duas dimensões, aplicando os procedimentos descritos nos capítulos anteriores. Duas situações em particular são estudadas: bósons quirais livres e bósons quirais imersos num campo eletromagnético.

•§4.1: PRELIMINARES

Uma primeira formulação consistente para bósons quirais livres pode ser obtida da seguinte forma: Partir da densidade de Lagrangeana de um campo escalar livre e impor a condição de quiralidade (movimento só para a esquerda) como um vínculo externo.

Partimos então da densidade de Lagrangeana livre:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2) \equiv \partial_+ \varphi \partial_- \varphi \quad (4.1)$$

com:

$$\dot{\varphi} \equiv \partial_0 \varphi \quad \varphi' \equiv \partial_1 \varphi$$

$x_0 \longrightarrow$ parâmetro temporal

$x_1 \longrightarrow$ parâmetro espacial

$$x_{\pm} = \frac{x_0 \pm x_1}{\sqrt{2}} \quad \partial_{\pm} = \frac{\partial_0 \pm \partial_1}{\sqrt{2}}$$

Seguindo o método de Dirac calculamos os momentos:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \quad (4.2)$$

Esta equação nos mostra que não há presença de vínculos, e portanto, a densidade de Lagrangeana (4.1) não é singular. O seguinte passo é a construção da densidade de Hamiltoniana canônica

$$h_c = \int dx H_c$$

$$H_c = \pi \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}(\pi^2 + \varphi'^2) \quad (4.3)$$

que descreve a dinâmica do sistema unívocamente:

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, h_c\} \quad \dot{\pi} = \{\pi, h_c\} \quad (4.4)$$

Para que esta teoria descreva bósons quirais devemos implementar a condição :

$$\dot{\varphi} - \varphi' = 0 \leftrightarrow \partial_- \varphi = 0 \quad (4.5)$$

que elimina a componente de φ que se move para a direita.

Na linguagem Hamiltoniana, (4.5) representa um vínculo:

$$\phi = \pi - \varphi' \approx 0 \quad (4.6)$$

devemos testar agora sua consistência temporal:

$$\dot{\phi} \approx \{\phi(x), h(y)\} = \int dy \left\{ \pi(x) - \varphi'(x), \frac{1}{2}(\pi^2(y) + \varphi'^2(y)) \right\} =$$

$$\int dy (-\varphi'(y) \partial'(y-x) - \pi(y) \partial'(x-y)) \approx 0$$

após uma integração por partes obtemos:

$$(\varphi' - \pi)' \approx 0 \quad (4.7)$$

que é identicamente satisfeita usando a equação (4.6).

Com isto a teoria só possui um vínculo, que é de segunda classe:

$$\{(\pi - \varphi')(x), (\pi - \varphi')(y)\} = -2\partial'(x - y) = C_{11}$$

que representa a matriz de Dirac (equação (3.2)).

Calculamos agora a sua inversa:

$$\int dy C_{11}^{-1} C_{11} = \delta(x - y) = - \int dy C^{-1} 2\partial'(x - y) \Rightarrow$$

$$C_{11}^{-1} = \frac{1}{2}\epsilon(x - y) \quad (4.8)$$

com isto podemos calcular os parênteses de Dirac (equação (3.5)):

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\}_D = -\frac{1}{2}\epsilon(x - y) \quad (4.9)$$

$$\{\varphi(x), \pi(y)\}_D = \frac{1}{2}\delta(x - y) \quad (4.10)$$

$$\{\pi(x), \pi(y)\}_D = \frac{1}{2}\delta'(x - y) \quad (4.11)$$

Finalmente podemos impor o vínculo ϕ fortemente e obter as equações de movimento (3.5):

$$h = \int dx H$$

$$H(x) = \varphi'^2(x) \quad (4.12)$$

$$\dot{\varphi} = \{\varphi(x), h(y)\}_D = \int dy \{\varphi(x), \varphi'^2(y)\} = \varphi' \quad (4.13)$$

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\}_D = -\frac{1}{4}\epsilon(x-y) \quad (4.14)$$

Estas equações nos mostram que a teoria é correta para a descrição clássica de bósons quirais livres.

• §4.2: A LAGRANGEANA DE SIEGEL

A formulação Hamiltoniana para bósons quirais livres obtida na seção anterior é consistente e podemos construir sua versão quântica via quantização canônica. Porém se quiséssemos obter uma quantização via integral funcional, como vários autores tentaram [19], precisamos de uma ação que inclua a condição de quiralidade (4.5).

Uma Lagrangeana que satisfaz esta condição é a Lagrangeana de Siegel [10]. É possível chegar a ela partindo da Lagrangeana que descreve um campo bosônico num espaço tempo curvo, ou seja, imerso num campo gravitacional, em duas dimensões:

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \quad \beta, \alpha = 0, 1 \quad (4.15)$$

esta lagrangeana possui tanto invariância por reparametrizações como por transformações de Weyl [12]:

$$x^i \longrightarrow x^i - \epsilon^i \quad i = -, +$$

$$\varphi \longrightarrow \varphi + \epsilon^+ \partial_+ \varphi + \epsilon^- \partial_- \varphi$$

$$g^{\alpha\beta} \longrightarrow g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \epsilon^\beta - g^{\gamma\beta} \partial_\gamma \epsilon^\alpha + \epsilon^\gamma \partial_\gamma g^{\alpha\beta} \quad (4.16)$$

$$g^{\alpha\beta} \longrightarrow g^{\alpha\beta} (1 + \Lambda) g^{\alpha\beta} \quad (4.17)$$

onde ϵ e Λ são parâmetros infinitesimais arbitrários. Estas simetrias da Lagrangeana (4.15) nos permitem fazer a seguinte escolha para o tensor métrico:

$$g^{\gamma\beta} = \begin{pmatrix} -4\lambda & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Com esta fixação, a Lagrangeana (4.15) se torna a **Lagrangeana de Siegel**:

$$L = \partial_- \varphi \partial_+ \varphi + \lambda (\partial_- \varphi)^2 \quad (4.19)$$

Após a escolha (4.18), restam ainda simetrias residuais conhecidas como **Invariância de Siegel**[11]:

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow \varphi + \epsilon^- \partial_- \varphi \equiv \varphi + \delta \varphi \\ \lambda &\longrightarrow \lambda - \partial_+ \epsilon^- + \epsilon_- \partial_- \varphi - \lambda \partial_- \epsilon^- \equiv \lambda + \delta \lambda \end{aligned} \quad (4.20)$$

Um primeiro sinal de que (4.20) representam simetrias é o fato de que a Lagrangeana de Siegel ser singular:

$$\begin{aligned} L &= \partial_- \varphi \partial_+ \varphi + \lambda (\partial_- \varphi)^2 \equiv \frac{1}{2} \lambda [\dot{\varphi}^2 + \varphi'^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2) - \lambda \dot{\varphi} \varphi' \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial L^2}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\varphi}} &= \lambda + 1 & \frac{\partial L^2}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\lambda}} &= 0 \\ \frac{\partial L^2}{\partial \dot{\lambda} \partial \dot{\lambda}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

com o que construímos a matriz Hessiana (equação (1.14)):

$$W = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Que possui determinante nulo.

Para verificarmos que as tranformações (4.18) são realmente simetrias locais da Lagrangeana de Siegel elas devem satisfazer a condição (1.30):

$$\begin{aligned}
\delta L &= L(\varphi + \delta\varphi, \lambda + \delta\lambda) - L(\varphi, \lambda) = \delta^\mu \Lambda_\mu \Rightarrow \\
\delta L &= \delta(\partial_+\varphi)\partial_-\varphi + \delta(\partial_-\varphi)\partial_+\varphi + \lambda\partial_-\varphi\delta(\partial_-\varphi) \\
&\quad + (\partial_-\varphi)^2\delta\lambda \\
&= \epsilon\partial_-^2\varphi\partial_+\varphi + \partial_-\varphi\partial_-(\epsilon\partial_+\varphi) + 2\epsilon\partial_-^2\varphi\lambda\partial_-\varphi \\
&\quad + \partial_-(\epsilon\lambda)(\partial_-\varphi)^2 \\
&= \partial_-(\epsilon\partial_+\varphi\partial_-\varphi) + \partial_-(\epsilon\lambda(\partial_-\varphi)^2) = \partial_-(\epsilon L) = \partial^\mu \Lambda_\mu
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Equivalentemente ,podemos achar as identidades de Bianchi coorespondentes (1.36),no caso uma única identidade pois as transformações (4.20) dependem de um único parâmetro.As equações (1.34) ficam neste caso :

$$\begin{aligned}
\delta\tau &= 0 \\
\delta\varphi &= \epsilon\partial_-\varphi \\
\delta\lambda &= -\partial_+\epsilon + \epsilon\partial_-\lambda - \lambda\partial_-\epsilon \\
\delta\Lambda &= \epsilon L
\end{aligned} \tag{4.25}$$

As derivadas de Euler tem a forma:

$$\begin{aligned}
[L]_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \partial_+ \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_+\varphi)} \right) - \partial_- \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_-\varphi)} \right) \\
&= -2\partial_-(\lambda\partial_-\varphi) - 2\partial_-\partial_+\varphi
\end{aligned}$$

$$[L]_\lambda = \frac{\partial L}{\partial\lambda} - \partial_+ \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_+\lambda)} \right) - \partial_- \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_-\lambda)} \right) = (\partial_-\varphi)^2 \tag{4.26}$$

Assim as identidades de Bianchi (equações (1.36)) se escrevem neste caso:

$$\begin{aligned}
& [-\partial_-(\partial_+\varphi + \lambda\partial_-\varphi)]2\partial_-\varphi \\
& +(\partial_-\varphi)^2(\partial_-\lambda) - \partial_-(-\lambda(\partial_-\varphi)^2 - \partial_+(-(\partial_-\varphi)^2)) \\
& = -2(\partial_-\partial_+)\varphi\partial_-\varphi - 2\partial_-\lambda(\partial_-\varphi)^2 - 2\lambda\partial_-^2\varphi\partial_-\varphi \\
& +(\partial_-\varphi)^2(\partial_-\lambda) + (\partial_-\lambda)(\partial_-\varphi)^2 + 2\lambda\partial_-\varphi\partial_-^2\varphi \\
& 2\partial_-\varphi(\partial_+\partial_-\varphi) \equiv 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

como queriamos.

Assim confirmamos a correspondência entre simetrias locais (neste caso a invariância de Siegel) e a singularidade da Lagrangeana. Procedemos então ao uso do método de Dirac para obtermos a versão Hamiltoniana que nos permita chegar até a quantização canônica.

•§4.3 : UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE DIRAC NA LAGRANGEANA DE SIEGEL

Como vimos na seção anterior a Lagrangeana de Siegel é singular, de modo que se quisermos obter uma teoria quântica correspondente devemos construir uma formulação Hamiltoniana desta teoria via método de Dirac.

Começamos como sempre definindo os momentos:

$$L = \frac{1}{2}\lambda(\dot{\varphi}^2 + \varphi'^2) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2) - \lambda\dot{\varphi}\varphi' \tag{4.29}$$

$$\pi_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (\lambda + 1)\dot{\varphi} - \lambda\varphi' \implies$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\lambda + 1}(\varphi'\lambda + \pi_\varphi) \tag{4.30}$$

$$\pi_\lambda \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 = \phi_1 \quad (4.31)$$

onde ϕ_1 representa um vínculo primário. Vamos considerar por enquanto que $\lambda \neq -1$. Construímos agora a Hamiltoniana canônica:

$$H_c = \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_\lambda \dot{\lambda} - L = \pi_\varphi \varphi' + \frac{1}{2(\lambda + 1)} (\pi_\varphi - \varphi')^2 \quad (4.32)$$

$$h_c = \int dx H_c$$

e a correspondente Hamiltoniana total:

$$H_T = \pi_\varphi \varphi' + \frac{1}{2(\lambda + 1)} (\pi_\varphi - \varphi')^2 + \mu \pi_\lambda \quad (4.33)$$

Devemos agora testar a consistência do vínculo primário

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_\lambda \approx \{ \pi_\lambda, h_T \} &= \int dy \{ \pi_\lambda(x), h_c(y) \} + \{ \pi_\lambda(x), \mu \pi_\lambda(y) \} = \\ &= \frac{(\pi_\varphi - \varphi')^2}{2(\lambda + 1)^2} \xrightarrow{\lambda \neq -1} \phi_2 = (\pi_\varphi - \varphi')^2 \approx 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

que representa um vínculo secundário. Testamos sua consistência temporal:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} \approx \int dy \{ (\pi_\varphi - \varphi')^2(x), H_c(y) \} &+ \{ (\pi_\varphi - \varphi')^2(x), \mu \pi_\lambda(y) \} = \\ &= -\frac{\lambda}{\lambda + 1} (\pi_\varphi - \varphi')^2 = -\frac{\lambda}{\lambda + 1} \phi_2^2 \approx 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

o que indica que não há mais vínculos.

Vemos que ϕ_1 e ϕ_2 são de primeira classe :

$$\{ \phi_1(x), \phi_1(y) \} \approx 0$$

$$\begin{aligned}\{\phi_1(x), \phi_2(x)\} &= \{\pi_\lambda(x), (\pi_\varphi - \varphi')^2(y)\} \approx 0 \\ \{\phi_2(x), \phi_2(y)\} &= 8((\pi_\varphi - \varphi')^2)\delta'(x-y) + 4((\pi_\varphi - \varphi')^2)'\delta(x-y) \approx 0\end{aligned}\quad (4.36)$$

Apesar de que ambos os vínculos são de primeira classe ϕ_2 é de forma quadrática. Lembrando o que apresentamos na seção (2.2) sabemos que ϕ_2 não entra na construção do gerador de transformações de gauge. Assim a equação (3.26) se escreve neste caso:

$$g = \int dy \epsilon(y) \pi_\lambda(y) \quad (4.37)$$

que gera somente transformações sobre os campos λ :

$$\{g, \lambda\} = \int dy \epsilon \{\pi_\lambda, \lambda\} \approx \epsilon \quad (4.38)$$

O que não representa a invariância de Siegel, pois g é o gerador de transformações de gauge. Se lembrarmos porém o discutido na seção (3.3), vamos tentar recuperar a simetria de Siegel com uma escolha conveniente de G_k , o gerador de transformações de simetria. De acordo com o que vimos naquela seção o número de termos presente no gerador é igual à máxima ordem de derivação dos parâmetros arbitrários (ϵ) mais um. Então no caso da simetria de Siegel devemos ter dois termos. Uma escolha conveniente de A^k é:

$$A^k = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \lambda)\pi_\lambda \quad (4.39)$$

Seguindo o algoritmo da equação (3.32) obtemos para A^{k-1} :

$$\begin{aligned}A^{k-1} &= \sqrt{2} \frac{(\pi_\varphi - \varphi')^2}{\lambda + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda' \pi_\lambda + \lambda \pi'_\lambda) \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}(\dot{\lambda} - \lambda')\pi_\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi'_\lambda\end{aligned}$$

Que geram exatamente a simetria de Siegel:

$$\{G, \varphi\} = \epsilon \partial_- \varphi$$

$$\{G, \lambda\} = \epsilon \partial_- \lambda - \lambda \partial_- \epsilon - \partial_+ \epsilon$$

Voltando a discussão anterior devemos linearizar o vínculo ϕ_2 :

$$\tilde{\phi}_2 \equiv \pi_\varphi - \varphi' \approx 0 \quad (4.40)$$

com a presença deste novo vínculo devemos reclassificar o conjunto completo:

$$\begin{aligned} \{\phi_1(x), \phi_1(y)\} &\approx 0 \\ \{\phi_1(x), \phi_2'(y)\} &\approx 0 \\ \{\tilde{\phi}_2(x), \tilde{\phi}_2(y)\} &\approx -2\delta'(x-y) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Deveríamos ter testado antes a consistência de $\tilde{\phi}_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2 &\approx \int dy \{(\pi_\varphi - \varphi')(x), H_c(y)\} + \{(\pi_\varphi - \varphi')(x), \mu\pi(y)\} = \\ &= (\pi_\varphi - \varphi')' = \tilde{\phi}_2' \approx 0 \end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{\phi}_2$ não gera mais vínculos.

Apesar da linearização de ϕ_2 , ϕ_1 continua sendo de primeira classe, gerando as transformações de gauge (4.38) sobre λ .

Com isto de acordo com o que vimos na seção (3.3) podemos fazer uma fixação de gauge impondo um vínculo externo (uma fixação implícita):

$$\phi_e = \lambda - f(x) \approx 0 \quad (4.42)$$

que não gera mais vínculos :

$$\dot{\phi}_e \approx \int dy \{(\lambda - f)(x), H_T(y)\} \approx 0$$

De modo que todos os vínculos da teoria acabam sendo:

$$\phi_1 = \pi_\lambda \quad \phi_2 = \pi_\varphi - \varphi' \quad \phi_3 = \lambda - f \quad (4.43)$$

que formam um sistema de segunda classe:

$$\begin{aligned} \{\phi_1(x), \phi_1(y)\} &= 0 \\ \{\phi_1(x), \phi_2(y)\} &= 0 \\ \{\phi_1(x), \phi_3(y)\} &= -\delta(x-y) \\ \{\phi_2(x), \phi_2(y)\} &= -2\delta'(x-y) \\ \{\phi_2(x), \phi_3(y)\} &= 0 \\ \{\phi_3(x), \phi_3(y)\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

que confirma a fixação de gauge. Seguindo o método calculamos agora a matriz e os parênteses de Dirac:

$$\Delta_{\mu\nu} = \{\phi_\mu, \phi_\nu\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta \\ 0 & -2\delta' & 0 \\ \delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 0 & -\frac{1}{4}\epsilon & 0 \\ -\delta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\}_D = - \int dz dw \{\varphi(x), \phi_2(z)\} \Delta_{22}^{-1} \{\phi_2(w), \varphi(y)\} = -\frac{1}{4}\epsilon(x-y)$$

$$\{\varphi(x), \pi_\varphi(y)\}_D = \frac{1}{2}\delta(x-y)$$

$$\{\varphi(x), \pi_\lambda(y)\}_D = 0$$

$$\{\varphi(x), \pi_\lambda(y)\}_D = -\frac{1}{2}\delta'(x-y)$$

$$\{\pi_\varphi(x), \lambda(y)\}_D = 0$$

$$\begin{aligned}
\{\pi_\varphi(x), \pi_\lambda(y)\}_D &= 0 \\
\{\lambda(x), \pi_\lambda(y)\}_D &= \delta(x-y) - \int dzdw \{\lambda(x), \phi_1(y)\} \Delta_{13}^{-1} \{\phi_3(w), \pi_\lambda(y)\} = 0 \\
\{\pi_\lambda(x), \pi_\lambda(y)\}_D &= 0 \\
\{\lambda(x), \lambda(y)\}_D &= 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Impondo os vínculos fortemente , a Hamiltoniana e as equações de movimento (3.5) ficam:

$$\begin{aligned}
h &= \int dx H \\
H &= \varphi'^2
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\dot{\varphi} = \{\varphi(x), h(y)\}_D = \varphi' \tag{4.48}$$

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\}_D = -\frac{1}{4}\epsilon(x-y) \tag{4.49}$$

que é exatamente o resultado obtido em (4.12). De modo que, classicamente, a Lagrangeana de Siegel é consistente para a descrição de bósons quirais livres. É fácil verificar que este mesmo resultado é encontrado no caso em que $\lambda = -1$.

Tendo a versão clássica Hamiltoniana da teoria vamos tentar obter a versão quântica via quantização canônica

•§4.4: QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DA LAGRANGEANA DE SIEGEL

De acordo com o apresentado na seção (3.5) os vínculos de primeira classe devem permanecer de primeira classe após a quantização . Tomemos por exemplo o tensor de momento-energia:

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \right) - \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial_\alpha g^{\mu\nu}} \right) \quad (4.50)$$

cujas componentes $(-)$ se escreve:

$$\Theta_{--} = \frac{1}{2}(\partial_- \varphi)^2 \quad (4.51)$$

que escrito em termos de variáveis do espaço de fase toma a forma:

$$\Theta_{--} = \frac{1}{4(\lambda + 1)^2}(\pi_\varphi - \varphi')^2 \quad (4.52)$$

e adotando $\lambda = 0$ podemos escrever:

$$\Theta_{--} = \frac{1}{4}\phi_2 \approx 0 \quad (4.53)$$

que consequentemente satisfaz a álgebra (4.36):

$$\{\Theta_{--}(x), \Theta_{--}(y)\} = (\Theta_{--}(x) + \Theta_{--}(y))\delta'(x - y) \quad (4.54)$$

Porém quando passamos para a versão quântica surge o seguinte problema: Imbimbo e Schwimmer[11] mostraram que a nível quântico esta expressão se escreve:

$$[\Theta_{--}(x), \Theta_{--}(y)] = (\Theta_{--}(x) + \Theta_{--}(y))\delta'(x - y) + \frac{1}{12\pi}\delta'''(x - y) \quad (4.55)$$

ou

$$[\hat{\phi}_2(x), \hat{\phi}_2(y)] = -4(\hat{\phi}_2(x) + \hat{\phi}_2(y))\delta'(x - y) + \frac{2}{3\pi}\delta'''(x - y) \quad (4.56)$$

Em palavras: A nível quântico, ϕ_2 não é de primeira classe de modo que lembrando o que foi apresentado na seção (3.5), a versão quântica do modelo de bósons quirais livres, partindo da Lagrangeana de Siegel, é inconsistente.

Em função destes fatos foi proposta[11] uma nova Lagrangeana, que não apresenta a anomalia presente em (4.55):

$$L = \partial_- \varphi \partial_+ \varphi + \lambda (\partial_- \varphi)^2 + A + B \quad (4.57)$$

$$A = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{6\pi}} \lambda \partial_-^2 \varphi \quad \text{termo de Wess-Zumino}$$

$$B = b \partial_+ \bar{b} + \lambda \left[\frac{3}{2} \partial_- (b \bar{b}) - \frac{1}{2} \partial_- b \bar{b} - b \partial_- \bar{b} \right] \quad \text{termo de ghosts.}$$

Imbimbo e Schwimmer [11] mostraram também que usando o processo de quantização via integral funcional a anomalia era efetivamente cancelada.

Outro ponto da nova Lagrangeana é o seguinte: determinando-se a ação efetiva (integrando sobre os campos de matéria e os ghosts) para (4.57) verifica-se que apesar desta última não possuir a simetria de Siegel a nível clássico, **a possui a nível quântico**. O conhecimento deste fato faz com que devamos ter cuidado ao utilizar o método de Dirac na Lagrangeana de Imbimbo-Schwimmer. Fazemos este tratamento na próxima seção .

•§4.5: QUANTIZAÇÃO DA LAGRANGEANA DE IMBIMBO SCHWIMMER VIA MÉTODO DE DIRAC.

Partimos de (4.57), classicamente:

$$\begin{aligned} L &= \partial_- \varphi \partial_+ \varphi + \lambda (\partial_- \varphi)^2 + \alpha \lambda \partial_-^2 \varphi \\ &\equiv \frac{1}{2} (\lambda + 1) (\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2) - \frac{\alpha}{2} (\dot{\lambda} - \lambda') (\dot{\varphi} - \varphi') \end{aligned} \quad (4.58)$$

seguindo o método de Dirac devemos calcular os momentos:

$$\pi_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} + (\dot{\varphi} - \varphi') \lambda - \frac{\alpha}{2} (\dot{\lambda} - \lambda') \quad (4.59)$$

$$\pi_\lambda \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = -\frac{\alpha}{2}(\dot{\varphi} - \varphi') \quad (4.60)$$

De onde vemos que não há presença de vínculos primários. De fato, a Lagrangeana de Imbimbo-Schwimmer não é singular:

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}(\lambda + 1) \quad \frac{\partial L^2}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\lambda}} = -\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{\lambda} \partial \dot{\lambda}} = 0$$

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda + 1) & \frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix} \implies \det W \neq 0$$

Devemos agora construir a Hamiltoniana canônica do sistema:

$$\begin{aligned} H_c &= \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_\lambda \dot{\lambda} - L = \pi_\lambda \left(\frac{2}{\alpha} \varphi' - \frac{2}{\alpha} \pi_\varphi \right) \\ &\quad + \pi_\varphi \varphi' + \pi_\lambda \lambda' + \frac{2}{\alpha^2} (1 + \lambda) \pi_\lambda^2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$h_c = \int dx H_c$$

De acordo com o que apresentamos na seção anterior, a lagrangeana de Imbimbo-Schwimmer possui a simetria de Siegel para λ a nível quântico. Levando isto em consideração podemos pre-fixar um valor para λ . Fazemos isto colocando um vínculo externo implicitamente :

$$\phi_e = \lambda - f \approx 0 \quad (4.62)$$

Testamos agora sua consistência temporal:

$$\dot{\phi}_e = \{ \phi_e, h_c \} + \partial_0 \phi_e \approx 0 \quad (4.63)$$

onde adicionamos o termo $\partial_0\phi_e$ devido a possível dependência explícita de f em x^0 .

A equação (4.63) nos fornece um vínculo ϕ_1 :

$$0 \approx \phi_1 = (\pi_\varphi - \varphi') + \frac{2}{\alpha}(f+1)\pi_\lambda + \frac{\alpha}{2}(\dot{f} - f') \quad (4.64)$$

Sua consistência temporal nos fornece mais um vínculo:

$$\dot{\phi}_1 \approx \{\phi_1, h_c\} + \partial_0\phi_1 \approx 0$$

$$0 \approx \phi_2 = \frac{\alpha^2}{2}(\dot{f} - f')\pi_\lambda + \frac{\alpha^4}{8}(\ddot{f} - 2\dot{f}' + \varphi'' + \alpha^2\pi'_\lambda) \quad (4.65)$$

assim, mais uma vez, testamos consistência:

$$\dot{\phi}_2 \approx \{\phi_2, h_c\} + \partial_0\phi_2 \approx 0$$

$$0 \approx \ddot{f} + (3\dot{f}'' - \ddot{f}') - f''' \implies$$

$$\partial_-^3 f \approx 0 \rightarrow \partial_-^3 f = 0 \quad (4.66)$$

que representa apenas uma condição sobre f não havendo mais vínculos. Vamos escolher agora um f conveniente:

$$f = -1 \quad (4.67)$$

Esta escolha implica em:

$$\phi_e = \lambda + 1 \approx 0 \quad \phi_1 = \pi_\varphi - \varphi' \approx 0 \quad \phi_2 = \pi_\lambda \approx 0 \quad (4.68)$$

que formam um sistema de vínculos de segunda classe:

$$\begin{aligned} \{\phi_e(x), \phi_e(y)\} &\approx 0 & \{\phi_e(x), \phi_2(y)\} &\approx \delta(x-y) \\ \{\phi_e(x), \phi_1(y)\} &\approx 0 & \{\phi_1(x), \phi_1(y)\} &\approx -2\delta'(x-y) \\ \{\phi_1(x), \phi_2(y)\} &\approx 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Com o que a matriz e os parênteses de Dirac ficam:

$$\Delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 0 & -2\delta' & 0 \\ -\delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (4.70)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta \\ 0 & -\frac{1}{4}\epsilon & 0 \\ \delta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\}_D = \frac{1}{4}\epsilon(x-y)$$

$$\{\varphi(x), \pi_\varphi(y)\}_D = \frac{1}{2}\delta(x-y)$$

$$\{\pi_\varphi(x), \pi_\varphi(y)\}_D = \frac{1}{2}\delta(x-y)$$

$$\{\varphi(x), \lambda(y)\}_D = 0$$

$$\{\varphi(x), \pi_\lambda(y)\}_D = 0$$

$$\{\pi_\varphi(x), \lambda(y)\}_D = 0$$

$$\{\pi_\varphi(x), \pi_\lambda(y)\}_D = 0$$

$$\{\lambda(x), \lambda(y)\}_D = 0$$

$$\{\lambda(x), \pi_\lambda(y)\}_D = 0$$

$$\{\pi_\lambda(x), \pi_\lambda(y)\}_D = 0 \quad (4.71)$$

Impondo agora os vínculos fortemente a Hamiltoniana e as equações de movimento ficam :

$$h = \int dx H$$

$$H = \varphi'^2 \quad (4.72)$$

$$\dot{\varphi} = \{\varphi(x), h(y)\}_D = \varphi' \quad \{\varphi(x), \varphi(y)\}_D = -\frac{1}{4}\epsilon(x-y) \quad (4.73)$$

Ou seja ,uma descrição clássica consistente para bósons quirais livres. Neste caso,ao contario do que acontece com a Lagrangeana de Siegel, existe uma versão quântica consistente,livre de anomalias,como vimos na na seção anterior ,Assim:

$$\hat{H} = \hat{\varphi}'^2 \quad (4.74)$$

$$\{\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)\} = -\frac{1}{4}\epsilon(x-y) \quad (4.74)$$

Onde o símbolo $\wedge$ indica operadores.

Este resultado é exatamente o encontrado por Floreanini-Jackiw [14] onde eles partiram de uma Lagrangeana diferente da proposta por Imbimbo-Schwimmer que não depende de outros campos a nao ser dos próprios bósons:

$$L = \dot{\varphi}' - \varphi'^2 \quad (4.76)$$

Bernstein e Sonnenschein[19] demonstraram que esta Lagrangeana resulta ser a Lagrangeana efetiva (integrando sobre o campo auxiliar λ)correspondente a Lagrangeana de Siegel.

Um passo natural no estudo da teoria de bósons quirais pode ser analisa-los na presença de um campo de gauge abeliano.Isto é apresentado na próxima seção .

•§4.6:QUANTIZAÇÃO DA QED ESCALAR QUIRAL VIA MÉTODO DE DIRAC

Nesta seção vamos quantizar via método de Dirac a teoria correspondente a bósons quirais imersos num campo eletromagnético,em duas dimensões. .Labastida[13] propôs como Lagrangeana :

$$L = \partial_+ \varphi \partial_- \varphi + A_- \partial_+ \varphi - A_+ \partial_- \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}
+\frac{1}{2}aA_\mu A^\mu \equiv \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2) + \frac{1}{2}[(\dot{A}_1 - A'_0)^2 + a(A_1^2 - A_0^2)] \\
-A_1\dot{\varphi} + A_0\varphi'
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Esta Lagrangeana não contém a condição de quiralidade dos bósons, de maneira que ela será implementada como um vínculo externo implícito, da mesma forma que fizemos na seção (4.1), no caso de bósons quirais livres. Usaremos as seguintes convenções :

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu a} g^{b\nu} F_{ab} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Podemos verificar que a Lagrangeana (4.77) é singular:

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\varphi}} = 1$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{A}_0} = 0$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{A}_1} = 0$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{A}_0 \partial \dot{A}_1} = 0$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{A}_0 \partial \dot{A}_0} = 0$$

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{A}_1 \partial \dot{A}_1} = 1 \tag{4.78}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det W = 0$$

De modo que adotaremos o método de Dirac.

O primeiro passo é o cálculo dos momentos:

$$\pi_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} - A_1 \quad (4.79)$$

$$\pi_0 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_1} = 0 = \phi_1 \quad \text{vínculo primário} \quad (4.80)$$

$$\pi_1 = -\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_1} = A'_0 - \dot{A}_1 \quad (4.81)$$

Calculamos agora a Hamiltoniana total:

$$\begin{aligned} H_c &= \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^1 - L \\ &= \frac{1}{2}[\varphi'^2 + \pi_1^2 + (\pi + A_1)^2 - a(A_0^2 - A_1^2)] + A_0(\pi'_1 - \varphi') \\ h_t &= \int dx H_T \quad H_T = H + \mu \pi_0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Impomos agora a consistência temporal para o vínculo (4.80):

$$\begin{aligned} 0 \approx \dot{\phi}_1 &\approx \{\phi_1(x), h_T(y)\} = \int dy \{\pi_0(x), H_T(y)\} \\ &= \pi'_1 - \varphi' - aA_0 = \phi_2 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Sua consistência temporal nos fornece:

$$0 \approx \dot{\phi}_2 \approx \{\phi_2(x), h_T(y)\} = \mu - A'_1$$

com o que podemos determinar μ (equação (2.47)).

Isto implica que não há mais vínculos na teoria. Analisamos a classe de ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\{\phi_1(x), \phi_1(y)\} \approx 0 \quad \{\phi_1(x), \phi_2(y)\} \approx 0 \quad \{\phi_2(x), \phi_2(y)\} \approx -a\delta(x - y)$$

o sistema é de segunda classe. Construímos a seguir a matriz e os parênteses de Dirac:

$$\Delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -a\delta \\ a\delta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (4.85)$$

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a}\delta \\ -\frac{1}{a}\delta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\varphi(x), \pi_\varphi(y)\}_D = \delta(x - y)$$

$$\{A_1(x), \pi_1(y)\}_d = -\delta(x - y)$$

$$\{A_0(x), A_1(y)\}_D = \frac{1}{a}\delta'(x - y)$$

$$\{\pi_\varphi(x), A_0(y)\}_D = -\frac{1}{a}\delta'(x - y) \quad (4.86)$$

sendo o resto deles todos nulos.

Impondo fortemente os vínculos, a Hamiltoniana e as equações de movimento ficam:

$$H = \frac{1}{2}(\varphi''^2 + (\pi_\varphi + A_1)^2 + \pi_1^2)$$

$$\frac{1}{2a}(\pi_1' - \varphi')^2 + \frac{a}{2}A_1^2 \quad (4.87)$$

$$\dot{\varphi} = \pi_\varphi + A_1 \quad \dot{A}_1 = \frac{1}{2a}(\pi_1' - \varphi')' - \pi_1$$

$$\dot{\pi} = \varphi'' - \frac{1}{a}(\pi_1' - \varphi')' \quad \dot{\pi}_1 = \pi_\varphi + A_1 + aA_1 \quad (4.88)$$

Lembramos que queremos que esta teoria descreva bósons quirais, de maneira que impomos o vínculo implícito:

$$\dot{\varphi} - \varphi' \approx 0 \quad (4.89)$$

Usando a equação (4.88) esta relação se escreve, em termos de variáveis de espaço de Fase:

$$\phi_3 = \pi_\varphi + a_1 - \varphi' \approx 0 \quad (4.90)$$

Testamos sua consistência temporal:

$$\dot{\phi}_3 \approx \{\phi_3(x), h_T(y)\} \approx \pi_1 \quad (4.91)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}_4 \approx \{\phi_4(x), h_T(y)\} = \pi + (a+1)a_1 = \phi_5 \approx 0 \quad (4.92)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}_5 \approx \{\phi_5(x), h_T(y)\} = \pi_1'' - (1+a)\pi_1 \approx 0 \quad (4.93)$$

Não surgem mais vínculos. Vamos recombinar os três vínculos gerados de uma maneira mais conveniente, afim de facilitar os cálculos:

$$\bar{\phi}_1 = \frac{1+a}{a}\phi_3 - \frac{1}{a}\phi_5 = \pi - \frac{(1+a)}{a}\varphi' \quad (4.94)$$

$$\bar{\phi}_2 = \phi_3 \quad (4.95)$$

$$\bar{\phi}_3 = \phi_5 \quad (4.96)$$

Passamos então a calcular a matriz e os parênteses de Dirac pois o sistema é de segunda classe:

$$\{\bar{\phi}_1(x), \bar{\phi}_1(y)\} \approx -2\frac{(1+a)}{a}\delta'(x-y)$$

$$\{\bar{\phi}_1(x), \bar{\phi}_3(y)\} \approx -\frac{(1+a)}{a}\delta'(x-y)$$

$$\{\bar{\phi}_1(x), \bar{\phi}_2(y)\} \approx 0$$

$$\{\bar{\phi}_2(x), \bar{\phi}_3(y)\} \approx (1+a)\delta(x-y)$$

$$\{\bar{\phi}_3(x), \bar{\phi}_3(y)\} \approx 0 \quad (4.97)$$

$$\Delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a}(1+a)\delta' & 0 & -\frac{1}{a}(1+a)\delta' \\ 0 & 0 & (1+a)\delta \\ -\frac{1}{a}(1+a) & -(1+a)\delta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (4.98)$$

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4(1+a)}\epsilon & \frac{-1}{2(1+a)}\delta & 0 \\ \frac{1}{2(1+a)}\delta & \frac{1}{2a(1+a)}\delta' & \frac{1}{(1+a)}\delta \\ 0 & \frac{1}{1+a}\delta & 0 \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\}_D = -\frac{a}{4(1+a)}\epsilon(x-y)$$

$$\{\varphi(x), \pi_\varphi(y)\}_D = \frac{1}{2}\delta(x-y)$$

$$\{\varphi(x), a_1(y)\}_D = -\frac{1}{2(1+a)}\delta(x-y)$$

$$\{\pi_\varphi(x), \pi_\varphi(y)\}_D = \frac{(1+a)}{2a}\delta'(x-y)$$

$$\{\pi_\varphi(x), a_1(y)\}_D = -\frac{1}{2a}\delta'(x-y)$$

$$\{A_1(x), A_1(y)\}_D = \frac{1}{2a(1+a)}\delta'(x-y) \quad (4.100)$$

Sendo o resto todos nulos . Impondo os vínculos fortemente, a Hamiltoniana e as equações de movimento ficam :

$$h = \int dx H$$

$$H = \frac{(1+a)}{a}\varphi'^2 \quad (4.101)$$

$$\dot{\varphi} = \{\varphi(x), h(y)\}_D = \varphi' \quad \{\varphi(x), \varphi(y)\}_D = -\frac{a}{a+1}\epsilon(x-y) \quad (4.102)$$

Com isto obtemos a versão quântica diretamente:

$$\hat{H} = \frac{(1+a)}{a}\hat{\varphi}'^2 \quad (4.103)$$

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)] = -\frac{ia}{4(1+a)}\epsilon(x-y) \quad (4.104)$$

Vemos que o sistema final representa algo semelhante a um bóson quiral livre (seção 4.1). O único resquício de interação com o campo eletromagnético é a presença do parâmetro correspondente ao termo de massa do próprio campo eletromagnético. No caso particular de $a=0$ é simples verificar que obtemos uma teoria trivial, com o campo eletromagnético nulo e os bósons representados por um campo constante.

REFERÊNCIAS :

- [1]P. Bergmann, Phys.Rev. 75,(1949) 680.
- [2]J. Anderson e P. Bergmann, Phys.Rev. 83,(1951) 1018
- [3]P. Dirac, "Lectures in Quantum Mechanics" ,Yeshiva University Press , N.Y.C. ,1964.
- [4]L. Castellani, Ann.Phys. (N.Y.C.) 143,(1982) 357.
- [5]K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics" ,Springer-Verlag, Heidelberg , 1982.
- [6]M. Costa, Tese de Doutorado,UFRGS,1988.
- [7]E. Hill, Rev.Mod.Phys. 23,(1951) 253.
- [8]E. Abdalla,M.C.B. Abdalla,F.P. Devecchi e A. Zadra, Phys.Lett . B 215 , (1988) 564.
- [9]E. Abdalla,M.C.B. Abdalla,F.P. Devecchi e A. Zadra, IFT Preprint
- [10]W. Siegel, Nucl.Phys. B238,(1984) 307.
- [11]C. Imbimbo e A. Schwimmer, Phys.Lett. 193B,(1987) 455.
- [12]E. Hull, Imperial College Preprint,(1988)
- [13]J. Labastida e M.Pernici, Phys.Rev.Lett. 59,(1987) 2511
- [14]R. Floreanini e R. Jackiw, Phys.Lett. 175B,(1986) 428.
- [15]N. Mukunda, Phys.Script. 21,(1980) 801.
- [16]E. Sudarshan e N. Mukunda, "Classical Dynamics a modern perspective" ,Wiley,N.Y.C. 1974
- [17]R. Benguria,P. Cordero e C. Teitelboim, Nucl.Phys. B112,(1977) 63
- [18]T. Regge C. Teitelboim, Phys.Lett B53, (1974) 101
- [19]M. Berstein e J. Sonnenschein, Phys.Rev.Lett. 60,(1988) 1772

