



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Alexsander Andrey Gomes Tarcha

Um Estudo Introdutório da Teoria de Tranças

Rio Claro
2023



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Um Estudo Introdutório da Teoria de Tranças

Alexsander Andrey Gomes Tarcha

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

Rio Claro
2023

T179e Tarcha, Aleksander Andrey Gomes
Um Estudo Introdutório da Teoria de Tranças / Aleksander Andrey
Gomes Tarcha. -- Rio Claro, 2023
68 f.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi

1. Tranças. 2. Apresentação. 3. Grupo das Tranças.. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Alexsander Andrey Gomes Tarcha

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO DA TEORIA DE TRANÇAS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Prof. Dr. Marco Antonio de Freitas Contessoto
Universidade Mackenzie - Mogi Guaçu (SP)

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos - UFSCAR

Rio Claro, 13 de janeiro de 2023

Agradecimentos

E agora, José?
A festa acabou,
a luz apagou,
o povo sumiu,
a noite esfriou,
e agora, José?
e agora, você? [...]

Carlos Drummond de Andrade

O que dizer do final de um mestrado ? As vezes sopra em minha mente: Nossa! Você já é quase mestre que orgulho!! Outras vezes surge “Nossa!! Você nem deveria ser mestre já”, ou seja, uma certa insegurança também. Entretanto, analisando friamente acredito que as coisas aconteceram no tempo certo e com ajuda de muitas pessoas nessa caminhada. Vamos então a listagem...

Quero agradecer a minha família (Mãe, Pai, Esther, Kiki, Anne, Vó...) por todo apoio recebido no período de mestrado (e em toda vida também), pois acredito que sem eles nada disso seria possível. Agradeço também meus colegas de turma da UNESP. Enfrentamos uma pandemia e permanecemos firmes, em especial, agradeço o Gabriel e a Jéssica que estudamos juntos desde a graduação.

Agradeço também minha orientadora Alice por todo apoio durante o processo, você foi essencial, e por ter me apresentado essa teoria tão bonita que fiquei encantado de estudar e conhecer. Aproveito para agradecer a banca pela disponibilidade de avaliar o meu trabalho.

Além disso, sou grato a todos os meus amigos do Amenaide Maris, as Luhs, Cris, Lucas, Maicon, Yra (meu trabalho kk) e de outras escolas (Gustavo) por todo o auxílio e apoio que vocês me deram durante o processo de conclusão das disciplinas e de escrita da dissertação.

Por fim, sou grato por ter tido oportunidade de finalizar essa etapa e confirmar que a escolha que fiz em estudar Matemática foi a melhor que eu poderia fazer.

”Quanto ao lugar da matemática em relação a outras ciências, a matemática pode ser vista como um grande armazém cheio de prateleiras. Os matemáticos colocam as coisas nas prateleiras e garantem que elas são verdadeiras. Eles também explicam como usá-las e como reconstruí-las. As outras ciências chegam e usam-nas em proveito próprio, os matemáticos não estão preocupados com o que elas fazem com o que tiraram.”

Jean-Pierre Serre

Lista de Figuras

1	Exemplos de tranças	17
1.1	Diagrama Comutativo que representa $\theta = \theta' \circ i$	24
1.2	Associação biunívoca em um grupo livre F sobre X . [17]	26
1.3	Aberto do subespaço.	30
1.4	Deformação de uma superfície [20]	32
1.5	Homeomorfismo entre o círculo e o quadrado	32
1.6	Vizinhança de x e y na esfera $S(r, a)$ [6]	33
1.7	Representação caminhos justapostos adaptado de [10]	34
2.1	Representação da n -trança [13]	39
2.2	Exemplos de Tranças (adaptado de [16])	40
2.3	Exemplo de uma figura que não representa uma trança [16]	40
2.4	Movimentos Elementares [13]	41
2.5	Tranças Equivalentes adaptado de [5]	41
2.6	Tranças não Equivalentes adaptado de [5]	42
2.7	Trança e sua projeção	43
2.8	3-Trança	44
2.9	Trança Pura	45
2.10	Trança Trivial	45
2.11	Trança no toro $\mathbb{T}^2$ [5] e trança na esfera [22], respectivamente	46
2.12	Trança em um retângulo extraído de [22]	46
3.1	Projeção $p(\beta_1)$	47
3.2	Projeção $p(\beta_2)$	47
3.3	Produto $\beta_1 \cdot \beta_2$	48
3.4	β e α duas 3—tranças	48
3.5	Produtos a direita e a esquerda	49
3.6	Tranças β_1, β_2 e β_3	50
3.7	$\beta_1 \cdot (\beta_2 \cdot \beta_3)$	50
3.8	$(\beta_1 \cdot \beta_2) \cdot \beta_3$	51
3.9	Elemento Neutro do produto	52
3.10	Produto entre e e β	52
3.11	Produto entre β e e	52
3.12	Produtos entre β_1 e $-\beta_1$ a direita e a esquerda	53
3.13	Operação elemento inverso detalhada [5]	53
3.14	Partição de uma trança [13]	55
3.15	1º Conjunto de $n - 1$ tranças [13]	55

3.16	2º Conjunto de $n - 1$ tranças [13]	55
3.17	Relação em β_4 [13]	57
3.18	Diagramas C_{σ_i} e $C_{\sigma_i}^{-1}$, respectivamente.	58
3.19	Exemplo do produto $C_1^{-1}C_2C_3$	59
3.20	Movimentos elementares representados na partição [13]	59
3.21	Triângulos dos movimentos elementares. [13]	59
3.22	Caso 1 - extraído de [16].	60
3.23	Caso 2. [16]	60
3.24	Caso 3 - extraído de [16]	61
3.25	Caso 4 - extraído de [16]	61
3.26	Caso 5 - extraído de [16]	62
3.27	Representação da igualdade $\phi(\beta) = 1_n$ [13].	63
3.28	Produto de tranças em um cubo unitário [22]	64

Sumário

Introdução	17
1 Preliminares	21
1.1 Permutação de grupos	21
1.2 Grupos Livres e Apresentação de Grupos	22
1.2.1 Palavra	22
1.2.2 Grupos Livres	24
1.3 Tópicos de Topologia Geral	27
1.3.1 Espaços Métricos	28
1.3.2 Espaços Topológicos	29
1.3.3 Conexidade e Compacidade	31
1.3.4 Homeomorfismo	32
1.3.5 Superfícies	33
1.3.6 Grupo Fundamental	34
2 Noção intuitiva das tranças.	39
2.1 Definições Iniciais	39
2.1.1 Exemplo de uma figura que não representa uma trança	40
2.2 Movimentos elementares e Tranças Equivalentes	41
2.3 Projeção	43
2.4 Permutação de Tranças	44
2.4.1 Tranças Puras	45
2.4.2 Definição Geral para superfícies	46
3 Grupo das tranças	47
3.1 Operação entre tranças	47
3.2 Apresentação do grupo das tranças	54
3.2.1 Partição de uma trança	54
3.3 Apresentação do Grupo das tranças	57
3.4 Propriedades do grupo	62
3.5 Grupo das tranças em uma superfície compacta	63
Referências	67

Resumo

As tranças são objetos que comumente estão presentes no cotidiano, por exemplo a trança de cabelo ou a forma de laçar o cardarço. Visto a forma como a ideia de trança é encontrada na realidade, o Matemático Alemão Emil Artin (1898 - 1962) durante o século XX iniciou o desenvolvimento da teoria das tranças, que atualmente é uma das áreas da Matemática e que admite aplicações na Física e em outras áreas de conhecimento. Este trabalho tem como objetivo desenvolver um estudo introdutório da Teoria das Tranças, isto é, apresentar um trabalho que contenha a construção do grupo das tranças, sua apresentação e propriedades de maneira didática. Para isso, explicitaremos tópicos gerais de Teoria dos grupos, Topologia geral, Topologia Álgebraica e desenvolveremos alguns da Teoria das tranças.

Palavras-chave: Tranças, Apresentação, Grupo das Tranças.

Abstract

Braids are objects that are commonly present in everyday life, for example braiding hair or how to tie a shoelace. Considering the way in which the idea of braids are found in reality, the German mathematician Emil Artin (1898 - 1962) during the 20th century began the development of the theory of braids, which is currently one of the areas of Mathematics and which admits applications in Physics and in other areas of knowledge. This work aims to develop an introductory study of the Theory of Braids, that is, to present a work that contains the construction of the group of braids, its presentation and properties in a didactic way. For this, we will explain general topics of Group Theory, General Topology and Algebraic Topology and will develop some topics of braid theory.

Keywords: Braid, Presentation, Braid Group.

Introdução

Na Trama das Tranças existem os saberes ancestrais matemáticos, artísticos e filosóficos.

Antonilde Rosa

Comumente, a ideia de trança está diretamente associada a exemplos cotidianos, sendo os mais reconhecidos a trança de cabelo, a forma de laçar o cardarço no tênis e, até mesmo, a forma ilustrada de um DNA.

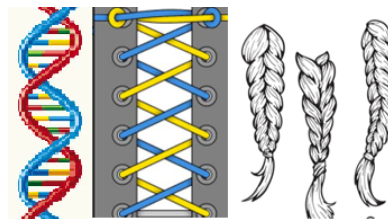


Figura 1: Exemplos de tranças

Nesta perspectiva, visto a forma que a ideia de trança é encontrada na realidade o matemático alemão Emil Artin (1898 - 1962) durante o Século XX, com o objetivo de estudar os nós, iniciou o desenvolvimento da teoria que hoje é conhecida como Teoria das Tranças, que atualmente é uma das áreas de estudo da Matemática amplamente próxima da Topologia, em especial da Topologia Algébrica. Do mais, existem aplicações das tranças em outras ciências tais como a Física, Mecânica, Estatística, Química e a Biologia([13]). Dentre as aplicações das tranças, [4] exemplifica que há aplicabilidade em teoria dos nós e entrelaçamento, topologia de baixa dimensão, em particular dimensões 2 e 3, “mapping class group”, geometria, equações algébricas e até em robótica e criptografia. Além disso, [4] ressalta que a teoria das tranças pode ser estudada em diversos pontos de vista (álgebra, geometria, topologia, sistemas dinâmicos...), pois aparecem em variados contextos o que justifica a vasta gama de aplicações. Ademais, a autora destaca que apesar da teoria das tranças ser um assunto muito estudado, há muito o que ser feito nesta área. Desta forma, elaborar trabalhos que se dediquem um texto introdutório do objeto é de grande valia, visto a incluir novos pesquisadores para explorar as diversas abordagens relacionadas ao tema.

Aliás, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) de 20 de dezembro de 1996 ([3]) destaca que o ensino superior tem por finalidade “estimular a criação cultural e o desenvolvimento do espírito científico e do pensamento reflexivo”. Tendo em vista essa

afirmação, o estudo das tranças pode ser trabalhado nas Disciplinas de “Estruturas Algébricas” dos cursos de Matemática como um exemplo de um grupo não usual, a fim de desenvolver a curiosidade no estudantes em relação as pesquisas na área.

Portanto, entendido a importância das tranças para a Matemática em geral, esta dissertação tem como finalidade realizar um estudo introdutório da Teoria das tranças, ou seja, temos como objetivos geral e específicos:

- **Objetivo Geral**

Desenvolver um trabalho introdutório da Teoria das Tranças, isto é, compor um estudo que contenha a construção do grupo das tranças, sua apresentação e propriedades de maneira didática.

- **Objetivos Específicos**

- (i) Explicitar as teorias de Permutação de Grupo, Grupos Livres e Apresentação de Grupos.
- (ii) Explicitar alguns Tópicos Topológicos, especificamente Espaços Topológicos Compactos e Conexos e o Grupo Fundamental.
- (iii) Apresentar as noções iniciais de tranças tais, como definição, movimentos elementares e equivalência em um cubo unitário.
- (iv) Explanar a definição de Trança em superfícies compactas.

Em relação a escrita, o termo “de maneira didática” foi utilizado pelo fato de que sempre que possível buscamos explicar de forma detalhada os conceitos expostos no trabalho. Entretanto, para uma melhor compreensão recomenda-se que o leitor possua conhecimentos básicos da Teoria de Grupos.

Assim sendo, tendo em vista a atingir os objetivos especificados denominamos esta pesquisa uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório na perspectiva de [1]. Logo, uma pesquisa é considerada bibliográfica quando é baseada em materiais já elaborados tais como livros, dissertações e artigos científicos e é exploratória, pois “tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema com vistas a torna-lo mais explícito ou a construir hipóteses” [1] (pag 41). Ademais, [15] ressalta que a “pesquisa bibliográfica não é uma mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sobre um novo enfoque ou abordagens, chegando a conclusões inovadoras” (pag 183). Nesse panorama de pesquisa, os capítulos desta dissertação foram organizados de forma a deixar explícito o capítulo de pré requisitos e os capítulos de desenvolvimento da temática principal do trabalho.

Desta forma, no Capítulo 1 denominado “Preliminares”, tem como objetivo apresentar o arcabouço teórico essencial para compreensão da Teoria das Tranças de forma que a leitura dos demais capítulos seja clara e compreensível ao leitor. Nesse sentido, o início de capítulo se encarrega de apresentar as noções algébricas necessárias para entendimento do objeto principal de estudo. São estas, permutação de grupos ([2] e [7]), palavra ([13]), grupos livres e apresentação de grupos ([7], [14] e [19]). Em seguida, ainda nesse capítulo, apresentaremos o marco teórico topológico do texto, isto é, Espaços Métricos ([8]), Espaços Topológicos, Conexidade e Compacidade ([9], [10] e [11]) Homeomorfismo, Grupo Fundamental ([21] e Superfícies ([4]).

O Capítulo 2 incumbe-se de introduzir as definições iniciais de tranças que primeiramente foram construídas em um cubo para posteriormente generalizar em uma superfície qualquer. Dentre as noções básicas consideram-se movimentos elementares, tranças equivalentes, projeção e permutação de tranças. A composição do texto, neste capítulo, foi baseada nos trabalhos de [13], para elaboração das definições no cubo, e em [19] para a definição em uma superfície qualquer.

Por sua vez, o Capítulo 3 pretende apresentar a construção do grupo das tranças, sua apresentação e algumas propriedades importantes, tais como o centro e seu subgrupo. Ademais, pretende-se nesse capítulo abordar o grupo das tranças em uma superfície compacta. Veja [5],[13], [16] para a construção do grupo de tranças e provas relacionadas, [13] e [16] para apresentações e [19] para grupo de tranças em uma superfície compacta.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os conceitos necessários para atingir os objetivos desta dissertação. Para compreensão do grupo das tranças faz-se necessário conhecer alguns tópicos específicos de Álgebra e Topologia. Portanto, neste ponto do trabalho, iremos explicitar os seguintes temas: grupos livres, apresentação de grupos e alguns tópicos de topologia geral. Para composição deste capítulo utilizamos as seguintes referências: [7], [8], [10], [11], [13], [14] [17], [18], [19] e [21].

1.1 Permutação de grupos

Definição 1.1. Se X é um conjunto não vazio então uma bijeção $\pi : X \rightarrow X$ é chamada permutação de X . O conjunto de todas as permutações de X é um grupo com operação composição de funções, grupo este que denominamos **grupo simétrico** de X e denotamos $SymX$. Se $X = \{1, \dots, n\}$ então denotamos $X = S_n$. Nesse caso, o grupo $SymX$ é chamado grupo simétrico de grau n .

Exemplo 1.2. Seja $X = \{1, 2\}$. As possíveis permutações são: $\pi_1(1) = 1$ e $\pi_1(2) = 2$; $\pi_2(1) = 2$ e $\pi_2(2) = 1$.

Para representar permutações finitas em que $SymX = S_n$ de um modo conciso e visual é conveniente utilizar a notação matricial, isto é:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Abaixo, as permutações apresentadas no Exemplo 1.2 na forma matricial:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observação 1.3. Por convenção, os números da primeira linha da matriz permutação estão em ordem numérica.

Definição 1.4. A operação composição entre duas permutações $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ é definida da seguinte forma:

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1(\pi_2(1)) & \pi_1(\pi_2(2)) & \cdots & \pi_1(\pi_2(n)) \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.5. Dadas as permutações

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a composição $\pi_1 \circ \pi_2$ pode ser representada da seguinte forma:

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi_1(\pi_2(1)) & \pi_1(\pi_2(2)) & \pi_1(\pi_2(3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi_1(3) & \pi_1(2) & \pi_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observação 1.6. Observe que a composição de permutações não é comutativa, visto que $\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \pi_1 \circ \pi_2$. Portanto, o grupo das permutações não é comutativo.

1.2 Grupos Livres e Apresentação de Grupos

Nesta seção apresentaremos as noções introdutórias de grupos livres que serão essenciais para a construção da apresentação do grupo de tranças (ver Cap. 3). Para composição desta seção, utilizamos os materiais de [13] (palavra), [7] e [14](grupos livres) e [18](conjunto gerado).

1.2.1 Palavra

Definição 1.7. Seja $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto com n elementos distintos. S pode ser um conjunto infinito, porém, por simplicidade, assumiremos que S é finito. De forma análoga, seja $S^{-1} = \{x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}\}$ um outro conjunto com n elementos distintos. Uma **palavra** W , formada pelos elementos $S \cup S^{-1}$, é a igualdade $W = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$ onde $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$ e $\epsilon_i = 1$ ou $\epsilon_i = -1$. Por convenção escrevemos $x_i = x_i^1$.

Observação 1.8. Uma palavra pode ser entendida como o produto finito ...pode ser entendida como o produto finito de elementos entre os $2n$ integrantes do conjunto... $S \cup S^{-1}$. O inteiro k é denominado comprimento da palavra W .

Em relação as palavras $x_i x_i \dots x_i$ (l vezes) e $x_i^{-1} x_i^{-1} \dots x_i^{-1}$ (l vezes) por facilidade na notação denotamos x_i^l e x_i^{-l} respectivamente. Do mais, seja W o conjunto formado por todas as palavras de $S \cup S^{-1}$. Em adição a W , assumiremos que existe um elemento denominado **palavra vazia** ou identidade denotado por 1.

Exemplo 1.9. Sejam $S = \{a, b, c\}$ e $S^{-1} = \{a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}\}$. $W_1 = bab^{-1}bcc^{-1}$ e $W_2 = ba$ são palavras em $S \cup S^{-1}$.

Definição 1.10. Sejam W um conjunto de palavras e $W_1 = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_p}^{\epsilon_p}$ e $W_2 = x_{j_1}^{\eta_1} x_{j_2}^{\eta_2} \dots x_{j_q}^{\eta_q}$ duas palavras arbitrárias em W , onde $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$ e $\epsilon_i, \eta_i = 1$ ou $\epsilon_i, \eta_i = -1$. Define-se o produto entre duas palavras W_1 e W_2 (simbolicamente $W_1 \cdot W_2$) da seguinte forma:

$$W_1 \cdot W_2 = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_p}^{\epsilon_p} x_{j_1}^{\eta_1} x_{j_2}^{\eta_2} \dots x_{j_q}^{\eta_q}.$$

Em particular definimos:

$$W_1 \cdot 1 = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_p}^{\epsilon_p} = 1 \cdot W_1.$$

A operação produto entre palavras é associativa. De fato, se tomarmos as palavras W_1, W_2 e $W_3 = x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_r}^{\alpha_r}$, nas mesmas condições da definição anterior, note que $(W_1 \cdot W_2) \cdot W_3 = (x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_p}^{\epsilon_p} x_{j_1}^{\eta_1} x_{j_2}^{\eta_2} \cdots x_{j_q}^{\eta_q}) x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_r}^{\alpha_r} = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_p}^{\epsilon_p} (x_{j_1}^{\eta_1} x_{j_2}^{\eta_2} \cdots x_{j_q}^{\eta_q} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_r}^{\alpha_r}) = W_1 \cdot (W_2 \cdot W_3)$. Por sua vez, mesmo essa operação admitindo um elemento neutro (1 ou palavra vazia), dada uma palavra em W , não temos um elemento inverso a ela bem definido, resultando que W não tem estrutura de grupo. Portanto, para que W constitua um grupo (grupos livres, posteriormente), é necessário que haja uma definição formal do elemento inverso de uma palavra e para isso, a seguir, definiremos a noção de equivalência entre palavras ([13], pag 232).

Definição 1.11. Sejam W_1 e W_2 duas palavras em W . Dizemos W_1 é equivalente a W_2 se for possível obter W_2 aplicando em W_1 , por um número finito de vezes, as seguintes operações:

$$T_1 : x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_j}^{\epsilon_j} x_{i_{1+j}}^{\epsilon_{1+j}} \cdots x_{i_m}^{\epsilon_m} \longrightarrow x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_j}^{\epsilon_j} (x_{i_p}^{\epsilon} x_{i_p}^{-\epsilon}) x_{i_{1+j}}^{\epsilon_{1+j}} \cdots x_{i_m}^{\epsilon_m}$$

onde $\epsilon = \pm 1$ e

$$T_2 : x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_j}^{\epsilon_j} (x_{i_p}^{\epsilon} x_{i_p}^{-\epsilon}) x_{i_{1+j}}^{\epsilon_{1+j}} \cdots x_{i_m}^{\epsilon_m} \longrightarrow T_1 : x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_j}^{\epsilon_j} x_{i_{1+j}}^{\epsilon_{1+j}} \cdots x_{i_m}^{\epsilon_m}.$$

A operação T_1 é denominada inserção e T_2 é denominada exclusão.

Observação 1.12. Se duas palavras W_1 e W_2 são equivalentes denotamos $W_1 \sim W_2$.

Exemplo 1.13. As palavras descritas no Exemplo 1.9 são equivalentes.

Proposição 1.14. A relação descrita acima é uma relação de equivalência.

Demonstração. Para verificar se uma relação é uma relação de equivalência, basta mostrar que valem as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva. Portanto, sejam W_1, W_2 e W_3 palavras pertencentes a W . Logo:

(i) $W_1 \sim W_1$

É imediato, basta aplicar a operação T_1 em W_1 e em seguida aplicar T_2 em W_1 obtendo assim a palavra original.

(ii) $W_1 \sim W_2$ então $W_2 \sim W_1$

Por hipótese, temos que $W_1 \sim W_2$, ou seja, é possível obter W_2 por meio das operações T_1 e T_2 aplicadas em $W_1 = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_j}^{\epsilon_j} x_{i_{1+j}}^{\epsilon_{1+j}} \cdots x_{i_m}^{\epsilon_m}$. Dessa forma, suponha W_1' após as aplicações das operações em W_1 e portanto, segue que $W_1' = W_2$. Logo, como as operações são inserções e exclusão tomemos $W_1' = W_2$ e aplicamos as operações T_1 e T_2 de forma a obter W_1 , isto é, considere $W_1' = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_j}^{\epsilon_j} (x_{i_p}^{\epsilon} x_{i_p}^{-\epsilon}) x_{i_{1+j}}^{\epsilon_{1+j}} \cdots x_{i_m}^{\epsilon_m}$ basta aplicar T_2 em W_1' o que resulta em W_1 . Por fim, concluímos que $W_2 \sim W_1$.

(iii) $W_1 \sim W_2$ e $W_2 \sim W_3$ então $W_1 \sim W_3$.

Seja $W_1 = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_j}^{\epsilon_j} x_{i_{1+j}}^{\epsilon_{1+j}} \cdots x_{i_m}^{\epsilon_m}$. Por pressuposto, temos que $W_1 \sim W_2$, logo é possível obter W_2 por meio das operações T_1 e T_2 em W_1 . Dessa forma, considere $W_2 = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_j}^{\epsilon_j} (x_{i_p}^{\epsilon} x_{i_p}^{-\epsilon}) x_{i_{1+j}}^{\epsilon_{1+j}} \cdots x_{i_m}^{\epsilon_m}$. De forma semelhante, seja $W_3 = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_j}^{\epsilon_j} (x_{i_p}^{\epsilon} x_{i_p}^{-\epsilon}) (x_{i_t}^{\epsilon} x_{i_t}^{-\epsilon}) x_{i_{1+j}}^{\epsilon_{1+j}} \cdots x_{i_m}^{\epsilon_m}$, pois $W_2 \sim W_3$. Logo, note que $W_3 = W_1 (x_{i_p}^{\epsilon} x_{i_p}^{-\epsilon}) (x_{i_t}^{\epsilon} x_{i_t}^{-\epsilon})$ e assim, concluímos que $W_1 \sim W_3$.

□

Como consequência do resultado, seja W' o conjunto de todas as classes de equivalência $[x]$ da relação entre palavras. Precisamente,

$$[x] = \{y \in W : y \sim x\}$$

Dessa forma, define-se o produto em W' . Sejam $[x], [y]$ elementos de W' , logo:

$$[x] \cdot [y] = [xy]$$

Vale ressaltar que $[x] \cdot [1] = [1] \cdot [x] = [x1] = [x]$ (**elemento neutro**) e que a operação em W' é associativa, visto que o produto entre palavras é associativo. Ademais, dada uma palavra $x = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_p}^{\epsilon_p}$ o elemento inverso de $[x]$ é definido por $[x]^{-1} = [x_{i_p}^{-\epsilon_p} \cdots x_{i_2}^{-\epsilon_2} x_{i_1}^{-\epsilon_1}]$, pois $[x] \cdot [x]^{-1} = [xx^{-1}] = [x^{-1}x] = [1]$. Portanto, W' constitui um grupo com a operação descrita acima.

1.2.2 Grupos Livres

Definição 1.15. Um grupo F é chamado **grupo livre** sobre um subconjunto $X \subset F$ ($i : X \rightarrow F$ a inclusão) se dado um grupo G e uma função $\theta : X \rightarrow G$ existe um único homomorfismo $\theta' : F \rightarrow G$ estendendo θ , isto é, satisfazendo a propriedade $\theta = \theta' \circ i$. Nessas condições, dizemos que X é uma base de F e a ordem $(|X|)$ de X é chamada rank de F , que escrevemos $rank(F)$.

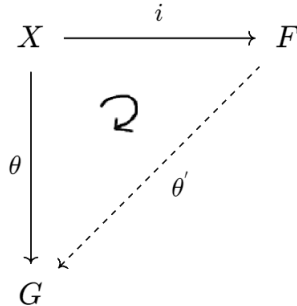


Figura 1.1: Diagrama Comutativo que representa $\theta = \theta' \circ i$

A definição de grupo livre não necessariamente garante a sua existência ([7]) sendo necessário, então, provar este fato para um conjunto não vazio X . Nesse sentido, o Teorema 1.20 cumpre essa função. Para tal demonstração utilizaremos o conceito de palavra e sua classe de equivalência.

Definição 1.16. Sejam M um subconjunto não vazio de um grupo F e C a coleção dos subgrupos de F que contém M . A coleção é não vazia, pois contém F . Nessas condições, a interseção dos subgrupos da coleção C é um subgrupo de F que denominamos o **conjunto gerado** por M e denotamos por $[M]$.

Proposição 1.17. O conjunto $[M]$, nas condições da definição anterior, satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $[M]$ é um subgrupo de F .
- (ii) $M \subset [M]$

(iii) Se H é algum subgrupo de F que contém M então $[M] \subset H$.

Demonstração. (i) Sejam C a coleção de subgrupos que contém M e $x, y^{-1} \in [M]$. Provaremos que $x \cdot y^{-1} \in [M]$. Se $x, y^{-1} \in [M]$ então x, y^{-1} pertencem aos subgrupos de F que contém M , por consequência $x \cdot y^{-1}$ também pertence. Segue então que $x \cdot y^{-1} \in [M]$.

(ii) Como $[M]$ é a interseção de todos os subgrupos que contém M é imediato que $M \subset [M]$.

(iii) Se H é algum subgrupo de F que contém M , então $M \subset H$. Como $[M]$ é a interseção de todos os subgrupos que contém M , segue que $[M] \subset H$. □

Observação 1.18. Note que se H é um subgrupo de F satisfazendo as condições da Proposição 1.17 para M . Segue que, $H \subset [M]$ e $[M] \subset H$ então $H = [M]$.

Por meio da observação anterior é possível definir uma caracterização para o grupo $[M]$.

Proposição 1.19. Um elemento $x \in [M]$ se, e somente se, $x = a_1 a_2 \cdots a_n$, onde $a_i \in M$ ou a_i é o inverso de um dos elementos da M .

Demonstração. Seja $x \in [M]$. Como $M \subset [M]$ e $[M]$ é um subgrupo do grupo F segue que $y = x \cdot a_1^{-1} \in [M]$ em que $a_1^{-1} \in M$. Da mesma forma, podemos tomar $y \cdot a_2 \in [M]$ tal que $a_2 \in M$. Portanto, de forma indutiva temos que $x = a_1 a_2 \cdots a_n \in [M]$. Já em relação a recíproca tomemos o conjunto $R \subset F$ no qual todos os seus elementos são da forma $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ nas condições do enunciado. Note que R é um subgrupo de F , pois dados $x, y \in R$ resulta que $x \cdot y^{-1} \in R$. Ademais, $M \subset R$, pois cada elemento é um produto finito então basta tomar $x = a_i \in M$. Agora, se considerarmos H um subgrupo de F que contém M temos que F contém cada elemento a_i e a_i^{-1} pertencentes a M , logo como H é um subgrupo resulta que $a_1 a_2 \cdots a_n \in H$ e portanto, $R \subset H$. Por fim, R satisfaz a Definição 1.16 e a Proposição 1.17 e assim $R = [M]$. □

Teorema 1.20. Se X é um conjunto não vazio, então existe um grupo F e uma função $i : X \rightarrow F$ tal que F é livre sobre X e $F = [Im(i)]$.

Demonstração. Seja σ uma função $\sigma : X \rightarrow F$ formada pela seguinte lei de formação $\sigma(x) = [x]$, tal que x é uma palavra. Vamos mostrar que F é livre sobre X . Inicialmente, considere a função $\beta' : X \rightarrow G$ contendo todas as palavras $x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_r^{\epsilon_r}$ de X , inclusive a palavra vazia, tal que para $g_1^{\epsilon_1} g_2^{\epsilon_2} \cdots g_r^{\epsilon_r}$ tem-se $g_i = \sigma(x_i)$. Dessa forma, note que dadas x, y duas palavras em X tais que $x \sim y$ implica que $\beta'(x) = \beta'(y)$, pois em um grupo G os produtos $g \cdot g^{-1}$ ou $g^{-1} \cdot g$ são iguais ao elemento 1_G . Portanto, é possível definir uma função $\beta : F \rightarrow G$ em que $\beta([w]) = \beta'(w)$. Logo, $\beta([w][v]) = \beta([wv]) = \beta'(wv)$. Agora, veja que se $w = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_r^{\epsilon_r}$ e $v = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_s^{\epsilon_s}$ segue que $\beta'(wv) = g_1 \cdots g_r g_1 \cdots g_s$ que consequentemente é igual $\beta'(w)\beta'(v)$. Logo, devido ao fato anterior, concluímos que β é um homomorfismo de F em G . E ainda, por sua vez, $\sigma(\beta([x])) = [\beta([x])] = [\beta'(x)] = g = \sigma(x)$ (diagrama comutativo) para todo $x \in X$. Por fim, se $\gamma : F \rightarrow G$ é um outro homomorfismo que $\sigma(\gamma(x)) = \sigma(x)$ então $\sigma(\gamma(x)) = \sigma(\beta(x))$. Da forma em que foram definidas, note que $\gamma(x)$ e $\beta(x)$ são elementos da imagem de σ , mas $F = \langle Im\sigma \rangle$ (em decorrência da definição de σ) o que resulta que $\beta = \gamma$. □

Exemplo 1.21. O grupo $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo livre de base $X = \{1\}$

Demonstração. Sejam G um grupo livre, $X = \{1\}$ e $\theta : X \rightarrow G$ uma função qualquer. Nessas condições, $\theta(1) = g \in G$ e seja $i : X \rightarrow \mathbb{Z}$ a inclusão. Vamos encontrar o único homomorfismo $\theta' : \mathbb{Z} \rightarrow G$ tal que $\theta = \theta' \circ i$. Tomemos $\theta' : \mathbb{Z} \rightarrow G$ dada por $\theta'(m) = m.g$, onde m é um inteiro. Note que, $\theta(1) = g = \theta'(1) = (\theta' \circ i)(1)$. Além disso se existir θ'' tal que $\theta'' \circ i = \theta' \circ i = \theta$, então $\theta'' = \theta'$. Portanto, $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo livre sobre $X = \{1\}$. $\square$

Podemos tomar também $X = \{-1\}$ como base. Para provar isso, basta considerar $\theta(1) = g^{-1}$.

Observe que, caso um grupo F seja livre sobre X é possível realizar a relação biunívoca abaixo para qualquer grupo G . ([17], pag 16).

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Homomorfismos} \\ \text{de } F \text{ em } G \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Aplicações} \\ \text{de } X \text{ em } G \end{array} \right\}$$

Figura 1.2: Associação biunívoca em um grupo livre F sobre X . [17]

Portanto, dado um homomorfismo de F em G é possível exibir a função de X em G como uma restrição da primeira. A recíproca é consequência direta da definição de grupos livres.

Proposição 1.22. Se F é um grupo livre sobre X então $F = [X]$.

Demonstração. Se F é livre sobre X , então considerando-se o grupo $[X]$ e a inclusão $\theta : X \rightarrow [X]$ temos por definição que existe um único homomorfismo (que no caso é uma inclusão) $\theta' : F \rightarrow [X]$ tal que $\theta' \circ i = \theta$, onde $i : X \rightarrow F$ é a inclusão natural. Tem-se então que $F \subset [X]$ e $[X] \subset X \subset F$. Portanto $F = [X]$ $\square$

Com o intuito de construir o que é entendido por apresentação de grupos, apresentaremos os dois seguintes resultados de grupos livres.

Proposição 1.23. Todo grupo G é imagem do homomorfismo formado pela extensão de uma função θ a um grupo livre.

Demonstração. Sejam F um grupo livre sobre X , $X \subset F$ e $G = [X]$. Considere as inclusões $i_F : X \rightarrow F$ e $i_G : X \rightarrow G$. Logo, como F é livre sobre X segue que $\theta' : F \rightarrow G$ é a extensão de i_G e a equação $\theta' \circ i_F = i_G$ é verdadeira. Nessas condições, mostraremos que θ' é sobrejetiva, isto é, $G = \text{Im}(\theta')$. Note que, é imediato que $\text{Im}(\theta') \subset G$, portanto, basta provar que $G \subset \text{Im}(\theta')$. Para atingir tal objetivo, dado $g \in G$, podemos escrever $g = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$, em que $a_i \in X$ ou a_i é inverso de algum elemento de X , pois $g \in [X]$. Logo, como $[X]$ é um subgrupo de F , por conseguinte $G \subset F$ então podemos aplicar θ' em g . Assim,

$$\theta'(g) = \theta'(i_F(a_1) \cdot i_F(a_2) \cdots i_F(a_n)) = \theta'(i_F(a_1)) \cdot \theta'(i_F(a_2)) \cdots \theta'(i_F(a_n)) =$$

$$\theta' \circ i_F(a_1) \cdot \theta' \circ i_F(a_2) \cdots \theta' \circ i_F(a_n) = i_G(a_1) \cdot i_G(a_2) \cdots i_G(a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = g$$

Concluimos então que θ' é sobrejetiva. $\square$

A demonstração do 1º Teorema do Isomorfismo pode ser encontrada na referência [2] (pag. 144).

Teorema 1.24. (1º Teorema o Isomorfismo) *Seja $f : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos então o grupo quociente $G/\text{Ker}(f)$ é um isomorfo a imagem $\text{Im}(f)$.*

Teorema 1.25. *Todo grupo G é isomorfo ao grupo quociente F/N , onde F é um grupo livre sobre X e N é o núcleo do epimorfismo $\theta' : F \rightarrow G$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que F é um grupo livre e G é um grupo, portanto, da, Proposição 1.23, a extensão $\theta' : F \rightarrow G$ é um epimorfismo, isto é, um homomorfismo sobrejetivo, logo $G = \text{Im}(\theta')$. Do 1º Teorema do Isomorfismo segue que $F/\text{Ker}(\theta')$ é isomorfo a $\text{Im}(\theta') = G$. Ademais, como $\text{Ker}(\theta')$ é um subgrupo normal, consideremos R um conjunto de geradores para $\text{Ker}(\theta')$, ou melhor, $[R] = \text{Ker}(\theta')$ e $\overline{[R]}$ o fecho normal de $[R]$, ou seja, $\overline{[R]}$ é a interseção de todos os subgrupos normais de F que contém $[R]$. Observe que $\text{Ker}(\theta')$ é subgrupo normal de F que contém $[R]$ e assim, pela Observação 1.18, temos que $\text{Ker}(\theta') = \overline{[R]}$. Por fim, $F/\overline{[R]}$ é isomorfo a G . $\square$

O grupo quociente obtido ao final da prova do Teorema anterior é chamado **apresentação do grupo G** , tópico que abordaremos com mais cuidado a seguir.

Definição 1.26. Suponha que F seja um grupo livre sobre X , R um subconjunto de F , $N = \overline{[R]}$ o fecho normal de R em F e $G = F/N$. Por meio desta notação, escrevemos $G = \langle X \mid R \rangle$ e dizemos que é uma apresentação livre, ou simplesmente uma **apresentação** de G . Os elementos de X são chamados geradores e os elementos de R são chamados relatores.

Definição 1.27. Um grupo G é dito **finitamente apresentado** se admite uma apresentação em que X e R são finitos.

Observação 1.28. Note que o Teorema 1.25 garante que todo grupo é isomorfo a uma apresentação e portanto, garante a existência das apresentações para todo grupo G .

O grupo G pode ser entendido como o maior grupo com as propriedades estabelecidas pelos relatores, sendo importante então, entender de que forma os relatores são definidos. Logo, em consequência do Teorema 1.25, obtemos que $R = \text{Ker}(\theta')$ dada uma extensão θ' de um grupo livre F sobre X . Portanto, podemos escrever $R = \{r = e \mid r \in R\}$ em que e é o elemento neutro do grupo G . Essa definição para R é conveniente para encontrar os elementos de uma apresentação, tais como no exemplo a seguir.

Exemplo 1.29. O grupo $G = \langle x, y \mid x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$ é uma apresentação de um grupo cíclico gerado por e de ordem 6.

$G = \langle x, y \mid x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$ é uma apresentação de um grupo de ordem 6, gerado por x, y , isto é, $G = \{x^3, y^2, x^3y^2, x^{-1}y^{-1}xy, x^3y^{-2}, x^{-3}y^2\}$.

1.3 Tópicos de Topologia Geral

A seguir apresentaremos alguns tópicos principais de Topologia Geral, tais como espaços métricos ([8], [9]), espaços topológicos, conexidade, compacidade ([11]), homeomorfismos e superfícies ([6]). A compreensão destes conceitos será essencial para a compreensão das tranças em superfícies.

1.3.1 Espaços Métricos

Definição 1.30. Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- (i) $d(x, x) = 0$
- (ii) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definição 1.31. Um espaço métrico é um par (d, M) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M . Logo, um espaço métrico é um conjunto que admite uma métrica.

Exemplo 1.32. Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$. De fato, note que as condições *i*, *ii*, *iii* e *iv* são satisfeitas do seguinte modo:

- (i) $d(x, x) = |x - x| = 0$
- (ii) Se $x \neq y$ temos que $|x - y| > 0$ e assim, portanto, $d(x, y) > 0$.
- (iii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.
- (iv) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

Portanto, $d(x, y)$ é uma métrica em $\mathbb{R}$.

Definição 1.33. Seja a um ponto no espaço métrico M . Dado um número real $r > 0$, definimos a bola aberta de centro a e raio r como o conjunto $B(a, r)$ dos pontos de M cuja a distância é menor do que r . Ou seja,

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) < r\}$$

Analogamente, definimos a bola fechada $B[a, r]$:

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) \leq r\}$$

E por fim, definimos a esfera $S(a, r)$ de centro a e raio r :

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) = r\}$$

Exemplo 1.34. Sejam $a, r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a, r)$ dos pontos de $\mathbb{R}$ cuja distância ao ponto a é menor do que r . Ou seja,

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$$

Proposição 1.35. Se M é um espaço métrico então M é uma reunião de bolas abertas.

Demonstração. Mostraremos que $M = \bigcup_{a \in M} B(a, r_a)$. Temos $a \in B(a, r_a) \subset M$. Tomando a reunião de todos os a em M , obtemos:

$$\bigcup_{a \in M} \{a\} \subset \bigcup_{a \in M} B(a, r_a) \subset M$$

Entretanto, $M = \bigcup_{a \in M} \{a\}$, logo $M \subset \bigcup_{a \in M} B(a, r_a) \subset M$. Portanto, concluímos que $M = \bigcup_{a \in M} B(a, r_a)$. $\square$

1.3.2 Espaços Topológicos

Definição 1.36. Seja X um conjunto não vazio. Uma coleção de subconjuntos de X denotada por τ , satisfazendo,

- (i) $X, \emptyset \in \tau$.
 - (ii) A união qualquer dos elementos de qualquer subcoleção de τ , pertence a τ (união finita ou infinita).
 - (iii) A interseção de uma subcoleção finita de τ , pertence a τ .
- (X, τ) é chamado espaço topológico. Ademais, cada elemento A de τ é denominado conjunto aberto de X .

A definição anterior também pode ser reescrita por meio da noção de abertos obtendo a seguinte alteração nos itens *i*, *ii* e *iii* :

- (i) X e $\emptyset$ são abertos.
- (ii) A união qualquer de abertos é um aberto
- (iii) A interseção finita de abertos é um aberto.

Exemplo 1.37. $\tau = \{\emptyset, X\}$ é a topologia trivial em X .

Exemplo 1.38. Em qualquer espaço métrico M uma bola aberta $B(a, r)$ é um conjunto aberto de M .

Note que, pela Proposição 1.35. em um espaço métrico, podemos caracterizar um conjunto aberto da seguinte forma:

Dado um subconjunto A de um espaço métrico M , dizemos que A é aberto em M se para cada $x \in A$ existe raio $r > 0$ obtemos que $B(x; r) \subset A$, isto é, existe uma bola aberta com centro em um elemento de A está contida em A . Portanto, com esta noção em mente, provaremos a próxima proposição.

Proposição 1.39. *Todo espaço métrico M é um espaço topológico.*

Demonstração. Vamos verificar que o conjunto de todas as bolas $B(a_i, r_i)$ constitui uma topologia de M . Para isso, é necessário provar as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 1.36. Da Proposição 1.35 temos que $M = \bigcup_{a \in M} B(a, r_a)$ e assim por consequência $M \in \tau$. Por vacuidade, temos $\emptyset \in \tau$, pois não há bola aberta com elementos do vazio. A condição (ii) é imediata da igualdade $\bigcup_{a \in M} B(a, r_a)$, pois M é uma topologia. Já em relação ao item (iii) considere a interseção finita $\bigcap_{a \in M} B(a, r_a) = (B(a, r_a) \cap B(a_1, r_{a_1})) \cup \dots \cup (B(a, r_a) \cap B(a_n, r_{a_n}))$. Observe que, a igualdade anterior é um união de abertos e assim, portanto, essa união é um aberto de M . Por fim, concluímos que todo espaço métrico admite uma Topologia, ou seja, M é um espaço topológico. $\square$

Exemplo 1.40. Seja X um espaço topológico. O conjunto $\tau_Y = \{Y \cap U\}$, em que Y é um subconjunto de X e U um aberto de X , é um aberto de Y .

Vamos verificar que τ_Y é uma topologia de Y . Para isso, as três condições da Definição 1.36 devem ser satisfeitas.

- (i) Note que $\emptyset \in \tau_Y$, basta tomar $U = \emptyset$. Em contrapartida, se tomarmos $U = X$ temos que $\tau_Y = Y \cap X$ o que resulta que $Y = Y \cap X \in \tau_Y$, pois $Y \subset X$.
- (ii) Veja que $\bigcup_{\lambda \in L} (Y \cap U_\lambda) = Y \cap (U_1 \cup U_2 \cdots)$ tal que $L = 1, 2, \dots$. Portanto, como cada U_λ é um aberto de X , segue que $\bigcup_{\lambda \in L} (Y \cap U_\lambda)$ é um aberto de Y .
- (iii) De forma semelhante ao item (ii) temos que $\bigcap_{\lambda \in L} (Y \cap U_\lambda) = (Y \cap U_1) \cap (Y \cap U_2) \cdots \cap (Y \cap U_n) = Y \cap (U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n)$ tal que $L = 1, 2, \dots, n$. Logo, como cada U_λ é um aberto de X , concluí-se que $\bigcap_{\lambda \in L} (Y \cap U_\lambda)$ é um aberto de Y .

Por fim, τ_Y é uma topologia de Y .

Por meio da topologia τ_Y , demonstrada no exemplo anterior, é possível definir a noção de subespaço topológico, essa que definiremos a seguir.

Definição 1.41. Seja Y um subconjunto de um espaço topológico (X, τ) . Nessas condições denominamos Y um subespaço topológico cujos abertos são os elementos do conjunto $\tau_Y = \{Y \cap U\}$ em que U é um aberto de X . Dizemos que a topologia de Y é induzida por X , pois é constituída por abertos de X .

Exemplo 1.42. Vamos considerar $X = \mathbb{R}^3$ e $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$. Observe que os abertos de $\mathbb{R}^3$ são as bolas abertas deste conjunto, isto é:

$$B(a, r) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} < r \right\}$$

tal que $r \in \mathbb{R}$ positivo e $a = (x_1, y_1, z_1)$. Portanto, os abertos de Y são os elementos de X no qual $z = 0$.

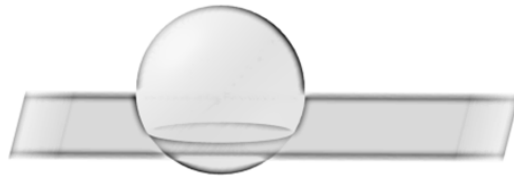


Figura 1.3: Aberto do subespaço.

Definição 1.43. Um subconjunto F de um espaço topológico X é fechado se o seu complementar é aberto.

Exemplo 1.44. Todo conjunto finito de números reais $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é fechado. De fato, consideremos F em ordem crescente $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Então $\mathbb{R} - F = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, \infty)$. Como cada intervalo do complementar é aberto, concluímos que $\mathbb{R} - F$ é aberto e assim F é fechado.

1.3.3 Conexidade e Compacidade

Definição 1.45. Um espaço topológico X é dito conexo se $X = A \cup B$, A e B abertos de X tal que $A \cap B = \emptyset$ implica $A = \emptyset$ ou $A = X$.

Observação 1.46. A noção de conexo, intuitivamente, se dá quando o espaço não pode se decompor em dois abertos disjuntos, a não ser que um deles é o $\emptyset$ ou o espaço todo.

Exemplo 1.47. O intervalo fechado $[0, 1]$ é conexo. De fato, suponha que $[0, 1]$ não seja conexo, então existem abertos disjuntos A e B tais que $[0, 1] = A \cup B$ em que $A, B \neq \emptyset$. Assim, sejam $a \in A$ e $b \in B$ tal que $0 < a < b < 1$. Logo, considere o conjunto $A_b = \{x \in A | x < b\}$. Como A é um conjunto não vazio e que admite uma cota superior segue que existe c tal que $c = \sup A_b$ que é a menor cota superior de A resulta, portanto, $c \leq b$ e por consequência $c \in A \cup B$. Dessa forma, se $c \in A$ e A é aberto temos que $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A$ (bola aberta em $\mathbb{R}$), isto é, $c - \epsilon < c < c + \epsilon$. Logo, como ϵ é pequeno segue que $c < c + \frac{\epsilon}{2} \in A$ e por esse fato $c + \frac{\epsilon}{2} < b$ o que implica que $c + \frac{\epsilon}{2} \in A_b$ que é uma contradição, pois c é a menor das cotas superiores de A_b .

Em contrapartida se $c \in B$ temos que $c - \epsilon < c < c + \epsilon \subset B$ e por consequência, $c - \epsilon < c \in B$. Note que $c - \epsilon < b$ e assim $c - \epsilon < b \in A_b$ o que resulta que $c - \epsilon < b$ é menor de que o supremo que é uma contradição.

Definição 1.48. Seja X um espaço topológico. Um caminho em X é uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow X$.

Definição 1.49. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é conexo por caminhos se dados quaisquer dois elementos a e b , existe um caminho $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

Proposição 1.50. *Todo espaço conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração. Seja X um espaço conexo por caminhos. Suponhamos que X não seja conexo, ou seja, $X = A \cup B$, onde A e B são abertos e disjuntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$ e $A, B \neq \emptyset$ e $A, B \neq X$. Tomemos $a \in A$ e $b \in B$. Como X é conexo por caminhos, existe um caminho f tal que $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$. Portanto, observe que $[0, 1] = f^{-1}(X) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Assim, como $[0, 1]$ é conexo, segue $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B) = \emptyset$. Entretanto, $0 \in f^{-1}(A)$ e $1 \in f^{-1}(B)$ que é uma contradição. $\square$

Definição 1.51. Dado um espaço topológico X , uma cobertura aberta de X é uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de abertos de X tal que $X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Uma cobertura aberta é finita se existe um número finito de abertos $A_1 \cdots A_n$ tal que

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Definição 1.52. Dizemos que X é um espaço compacto se toda cobertura aberta de X possui uma subcoleção finita que ainda cobre X .

Exemplo 1.53. $\mathbb{R}$ não é um espaço compacto.

De fato, considere a cobertura $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$. Note que se considerarmos a união de um número finito de intervalos o resultado será o intervalo aberto com o maior valor de n e essa cobertura é diferente de $\mathbb{R}$.

1.3.4 Homeomorfismo

Definição 1.54. Uma função $f : M \rightarrow N$ entre espaços topológicos é contínua se a imagem inversa de qualquer aberto (fechado) U de N , denotada por $f^{-1}(U)$, é aberto (fechado) em M . Dizemos que f é um homeomorfismo se f é contínua, bijetiva e sua inversa é contínua.

Observação 1.55. Dois espaços são homeomorfos quando existe um homeomorfismo entre eles. Intuitivamente, considerar duas superfícies homeomorfas, é dizer que suas propriedades topológicas não se alteram após uma deformação, como por exemplo “esticar a superfície, ou parte dela; encolher a superfície, ou parte dela; entortar a superfície, ou partes dela”[...] [20]. A ideia de homeomorfismo para a topologia se assemelha aos homomorfismos para a Álgebra.

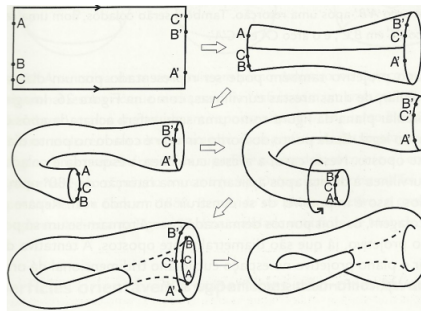


Figura 1.4: Deformação de uma superfície [20]

Exemplo 1.56. Sejam

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\},$$

o círculo unitário e o quadrado, respectivamente. As funções $f : S^1 \rightarrow T$ e sua inversa $f' : T \rightarrow S^1$ apresentadas abaixo definem um homeomorfismo entre o círculo e o quadrado.

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|} \right), \quad f'(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

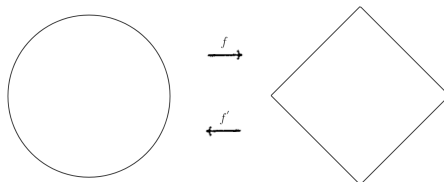


Figura 1.5: Homeomorfismo entre o círculo e o quadrado

1.3.5 Superfícies

Na subseção anterior, utilizamos da ideia de superfície de modo intuitivo, porém a seguir verificaremos uma noção mais rigorosa desta ideia.

Definição 1.57. Uma variedade n -dimensional é um espaço topológico em que cada ponto admite uma vizinhança homeomorfa a bola aberta n dimensional. Quando $n = 2$ é dita uma superfície de dimensão 2, ou seja, as vizinhanças são subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

Observação 1.58. Uma superfície pode ser fechada (compacta, sem bordo), conexa, a depender da característica do espaço em questão.

A seguir exibiremos alguns exemplos de superfícies, em especial, superfícies fechadas, que são importantes para o estudo de tranças.

Exemplo 1.59. Consideraremos a esfera $S(a, r)$ de centro a e raio r que é uma superfície onde cada vizinhança é da forma:

$$N = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|x - y\| < r, x \in S(a, r)\}.$$

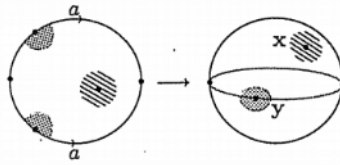


Figura 1.6: Vizinhança de x e y na esfera $S(r, a)$ [6]

Observação 1.60. Neste trabalho, iremos considerar as superfícies fechadas, i.e. compactas e sem bordo.

Exemplo 1.61. O disco $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a| \leq r\}$ com centro em a e raio r é uma superfície compacta, conexa e com bordo $\mathbb{S}^1$.

De fato, para que um conjunto seja compacto em um espaço métrico, deve ser fechado e limitado e o disco $\mathbb{D}^2$ satisfaz as duas condições.

O disco é conexo por caminhos, portanto conexo e seu bordo é a esfera de centro a e raio r .

Observação 1.62. As superfícies compactas sem bordo foram classificadas através do uso de invariantes topológicos. São elas: esferas, toro, plano projetivo, garrafa de Klein e somas conexas das mesmas. Para mais informações sobre a temática invariantes topológicos consulte [20].

1.3.6 Grupo Fundamental

Nesta subseção construiremos o grupo fundamental, noção esta que será importante para compreensão do grupo de tranças em uma superfície compacta, conexa e sem bordo. Para mais informações sobre este tópico consulte [21].

Definição 1.63. Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto fixado de X . Um laço em x_0 é uma função contínua $h : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $h(1) = h(0) = x_0$.

Definição 1.64. Sejam X um espaço topológico e $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ laços em X , com $f(1) = g(0)$. Nessas condições, definimos o laço justaposto $h = f * g : [0, 1] \rightarrow X$ considerando:

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Neste caso, denominamos h como a justaposição de f e g .

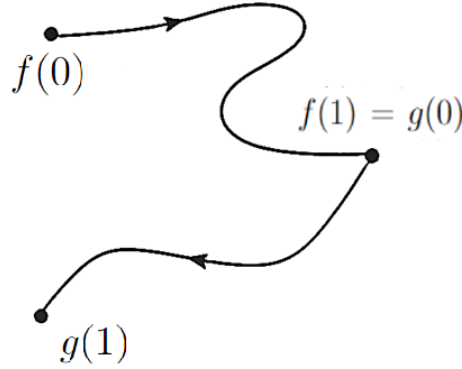


Figura 1.7: Representação caminhos justapostos adaptado de [10]

Observação 1.65. Denotaremos por $\Omega(X, x_0)$ o conjunto $\{h : I \rightarrow X : h \text{ é laço em } x_0\}$ em que $I = [0, 1]$.

Definição 1.66. Seja X um espaço topológico. Dizemos que h e f são homotópicos e denotamos $h \sim f$ se existe uma função $H : I \times I \rightarrow X$ contínua tal que:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= h(t), \forall t \in I & H(0, s) &= H(1, s) = x_0, \forall s \in I \\ H(t, 1) &= f(t), \forall t \in I \end{aligned}$$

O parâmetro s é dito nível de homotopia.

Note que a relação de homotopia é uma relação de equivalência, isto é, reflexiva, simétrica e transitiva. Uma das ferramentas utilizadas para demonstrar que é uma relação de equivalência é o Lema da Colagem.

Lema 1.67. (*Lema da Colagem*) Sejam M e N espaços topológicos e A e B subconjuntos fechados de M tais que $A \cup B = M$. Sejam $f : A \rightarrow N$ e $g : B \rightarrow N$ funções contínuas satisfazendo a condição: $f(x) = g(x)$ para $x \in A \cap B$. Então a função $h : M \rightarrow N$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Vamos mostrar que se F é um subconjunto fechado de N então $h^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de M , ou seja, h é contínua.

Seja F um subconjunto fechado de N . Como f e g são contínuas, então $g^{-1}(F)$ é um fechado de B e $f^{-1}(F)$ é um fechado de A . Sendo assim, uma vez que por hipótese A e B são fechados de M e $M = A \cup B$, segue que $f^{-1}(F)$ e $g^{-1}(F)$ são fechados de M . Agora, como $h^{-1}(F)$ é formado por todos os elementos de M cuja a imagem pertence a F e $M = A \cup B$, é fácil ver que $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$ e portanto $h^{-1}(F)$ é um fechado de M , pois é a reunião de dois fechados de M $\square$

Proposição 1.68. *A relação de homotopia é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Sejam $h, f, \lambda \in \Omega(X, x_0)$.

(i) $h \sim h$. (reflexiva)

Para todo h , definimos:

$$\begin{array}{ccc} H : I \times I & \rightarrow & X \\ (t, s) & \rightarrow & h(t) \end{array}$$

Como h é um laço segue que H é contínua e pela definição de H segue que $H(t, 0) = h(t) = H(t, 1)$. Por fim, note que $h(1) = h(0) = x_0$, logo $H(0, s) = x_0 = H(1, s)$ e portanto, concluímos que $h \sim h$.

(ii) $h \sim f \Rightarrow f \sim h$. (simétrica)

Considere $h \sim f$ por uma homotopia H de parâmetro $1 - s$. Definindo-se

$$\begin{array}{ccc} G : I \times I & \rightarrow & X \\ (t, s) & \rightarrow & H(t, 1 - s) \end{array}$$

Note que G é contínua, pois H é contínua, $G(t, 0) = H(t, 1) = f(t)$ e $G(t, 1) = H(t, 0) = h(t)$ por definição. Ademais, $G(0, s) = H(0, 1 - s) = H(1, 1 - s) = G(1, s) = x_0$. Logo, segue que $f \sim h$.

(iii) $h \sim f$ e $h \sim \lambda \Rightarrow h \sim \lambda$ (transitiva).

Considere $h \sim f$ e $f \sim \lambda$ por homotopias H_0 e H_1 , respectivamente, e com parâmetros $2s$ e $2s - 1$, respectivamente. Definindo-se

$$\begin{array}{ccc} H : I \times I & \rightarrow & X \\ (t, s) & \rightarrow & \begin{cases} H_0(t, 2s), & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_1(t, 2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \end{array}$$

Note que, do fato de H_1 e H_0 serem homotopias, segue que ambas são contínuas e definidas em um intervalo fechado e assim, portanto, pelo Lema da Colagem 1.67 temos que H é

contínua. Além disso, $H(t, 0) = H_0(t, 0) = f_t$, $H(t, 1) = H_1(t, 1) = \lambda(t)$. Ademais, segue que,

$$H(0, s) = \begin{cases} H_0(0, 2s) = x_0, & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_1(0, 2s - 1) = x_1, & s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

e

$$H(1, s) = \begin{cases} H_0(1, 2s) = x_0, & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_1(1, 2s - 1) = x_1, & s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

Portanto, $f \sim \lambda$. □

Denotamos por $\pi_1(X, x_0)$ o conjunto quociente $\Omega(X, x_0)/\sim$ e definimos a seguinte operação neste conjunto:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) &\rightarrow [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]. \end{aligned}$$

A operação $*$ é a justaposição das funções α e β .

Vamos verificar que a operação em $\pi_1(X, x_0)$ está bem definida.

Primeiramente observemos que: para quaisquer $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \pi_1(X, x_0)$ tais que $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$, por homotopias H e G , respectivamente. Assim, podemos definir $F : I \times I \rightarrow X$ por:

$$(t, s) \rightarrow \begin{cases} H(2t, s), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2t - 1, s), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

Como para $t = \frac{1}{2}$, $H(1, s) = x_0 = G(0, s)$, pois H e G são laços justapostos. De mais, ambas são funções contínuas definidas em intervalos fechados, segue pelo Lema da Colagem 1.67 que F é contínua. Além disso,

$$F(t, 0) = \begin{cases} H(2t, 0), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2t - 1, 0), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = (\alpha * \beta)(t)$$

$$F(t, 1) = \begin{cases} H(2t, 1), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2t - 1, 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = \begin{cases} \alpha'(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta'(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = (\alpha' * \beta')(t)$$

E também $F(0, s) = H(0, s) = x_0 = G(1, s) = F(1, s)$, pois α e β são laços justapostos. Logo, temos que $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$.

Teorema 1.69. *O par $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ é um grupo, chamado grupo fundamental de X com ponto base x_0 .*

Demonstração. Para quaisquer $[\alpha], [\beta], [\gamma]$ em $\pi_1(X, x_0)$, mostremos que

$([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$, isto é, vale a propriedade associativa. De fato,

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

E assim,

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por sua vez,

$$(\alpha * \beta)(2t) = \begin{cases} \alpha(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t - 1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t - 1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

De maneira análoga temos,

$$(\alpha * (\beta * \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t - 2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t - 3), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

Dessa forma, basta mostrar que 1.1 e 1.2 são laços homotópicos. Assim, consideremos os segmentos determinados pelas retas $r : t = \frac{s+1}{4}$ e $m : t = \frac{s+2}{4}$. Observe que para $s = 0$ temos $t = \frac{1}{4}$ na reta r e $t = \frac{1}{2}$ na reta m . Por outro lado, para $s = 1$ temos $t = \frac{1}{2}$ na reta r e $t = \frac{3}{4}$ na reta m . Portanto, para um dado valor de s , usamos α no intervalo $[0, \frac{s+1}{4}]$, β no intervalo $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$ e γ no intervalo $[\frac{s+2}{4}, 1]$.

Definimos então a seguinte homotopia

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{s+1}), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \beta(4t - s - 1), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \gamma(4t - 3), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Temos que H é contínua, pois é composta por funções contínuas e de mais,

$$H(t, 0) = ((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = H(t, 1) = (\alpha * (\beta * \gamma))(t)$$

Por fim, se $H(0, s) = \alpha(0) = x_0$ e $H(1, s) = \gamma(1)$, resulta que $H(0, s) = H(1, s)$, pois $\gamma(0) = \gamma(1)$ (γ é um laço) o que mostra que $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.

Mostraremos agora que $e_{x_0} = [c_{x_0}]$ é o elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$, onde $c_{x_0} : I \rightarrow X$ é definida por $c_{x_0}(t) = x_0, \forall t$. Tomemos $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ qualquer. Então

$$(\alpha * c_{x_0})(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Assim, para mostrar que $[\alpha * c_{x_0}] = [\alpha]$ basta encontrar uma homotopia entre elas. Tomemos então,

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{s+1}), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Note que H é contínua e $H(t, 0) = ((\alpha * c_{x_0})(t))$ e $H(t, 1) = \alpha(t)$. Além disso, $H(0, s) = \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 = H(1, s)$.

Para mostrar o elemento neutro a direita $[c_{x_0} * \alpha] = [\alpha]$, basta tomar provar que a função $G(t, s)$ é um homotopia entre os laços c_{x_0} e α .

$$G(t, s) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha(\frac{2t-1+s}{s+1}), & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

De fato, note que $G(H, s)$ é contínua e $G(t, 0) = c_{x_0} * \alpha$ e $G(t, 1) = \alpha(t)$. E ainda, por sua vez, $G(0, s) = x_0 = \alpha(1) = G(1, s)$.

Finalmente, dado $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, se tomarmos $\alpha' : I \rightarrow X$ o laço definido por $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$, então $[\alpha] \cdot [\alpha'] = [c_{x_0}]$ e $[\alpha'] \cdot [\alpha] = [c_{x_0}]$, bastando considerar as homotopias $H(t, s)$ para α' a direita e $K(t, s)$ para a esquerda.

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(s), & \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2} \\ \alpha'(2t-1), & \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$K(t, s) = \begin{cases} \alpha'(2t), & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha'(s), & \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2} \\ \alpha(2t-1), & \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

De fato, note que,

$$(\alpha * \alpha')(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Assim, $H(t, 0) = x_0 = C_{x_0}$ e $H(t, 1) = (\alpha * \alpha')$ e $H(1, s) = \alpha'(1) = \alpha(0) = x_0 = H(0, s)$.

Analogamente para lado esquerdo temos:

$$(\alpha' * \alpha)(t) = \begin{cases} \alpha'(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Logo, $K(t, 0) = x_0 = \alpha'(0) = \alpha(1)$ e $K(t, 1) = (\alpha' * \alpha)(t)$. Ademais, $K(1, s) = \alpha(1) = x_0 = K(0, s) = \alpha'(0)$. Portanto, concluímos que o par $(\pi(X, x_0), \cdot)$ é um grupo. $\square$

2 Noção intuitiva das tranças.

2.1 Definições Iniciais

Neste capítulo vamos explorar a definição geométrica de trança e suas principais propriedades, tais como equivalência, projeção e sua permutação. Ademais, também exploraremos a definição geral de tranças para superfícies. Para composição deste capítulo utilizamos as seguintes referências: [5], [13],[16], [19].

Definição 2.1. Seja $\mathbb{D}$ um cubo unitário, ou seja, $\mathbb{D} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$. Tome os pontos, $A_1, \dots, A_n$ na face de cima do cubo e da mesma forma na face de baixo tome os pontos $B_1, \dots, B_n$. Por conveniência sejam $A_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 1)$, $A_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{n+1}, 1), \dots$, $A_n = (\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 1)$ e $B_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 0)$, $B_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{n+1}, 0), \dots$, $B_n = (\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 0)$. Agora ligue os n pontos $A_1, A_2, \dots, A_n$ com os n pontos $B_1, B_2, \dots, B_n$ por meio dos segmentos/arcs $d_1, \dots, d_n$ (esses arcs podem ser poligonais, mas para visualizar as tranças de uma forma mais simples os exemplos serão apresentados por meio de curvas/segmentos). Portanto, para analisarmos será necessário que três condições sejam satisfeitas:

- (i) $d_1, \dots, d_n$ devem ser disjuntos.
- (ii) Cada d_i conecta somente um A_j a um B_k , em que k e j podem ou não serem iguais. Ademais, não é permitido conectar um A_j a um A_k (ou um B_j a um B_k).
- (iii) Cada plano E_s (denominado curva de nível) tal que $z = s$ e $0 \leq s \leq 1$ (em outras palavras paralelo ao eixo xy) intersecta cada arco d_i em um e somente um ponto.

Essa configuração, com n arcs $d_1, d_2, \dots, d_n$ e os pontos $A_1, \dots, A_n$ e $B_1, \dots, B_n$ pertencentes as faces superior e inferior de $\mathbf{D}$, respectivamente é chamada **n -trança** ou uma trança com n cordas. Os arcs d_i são chamados **cordas** da n -trança.

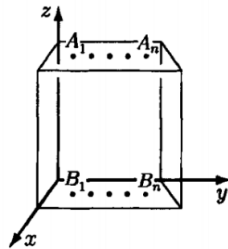


Figura 2.1: Representação da n -trança [13]

A seguir vamos apresentar alguns exemplos para que a noção de trança em termos matemáticos se torne clara.

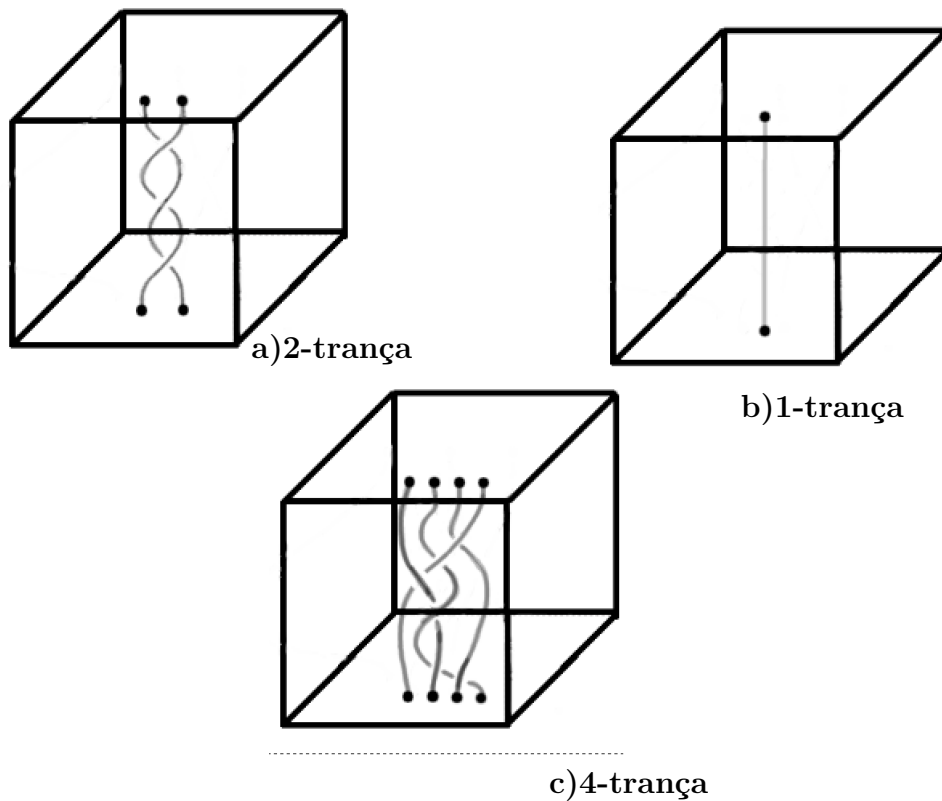


Figura 2.2: Exemplos de Tranças (adaptado de [16])

2.1.1 Exemplo de uma figura que não representa uma trança

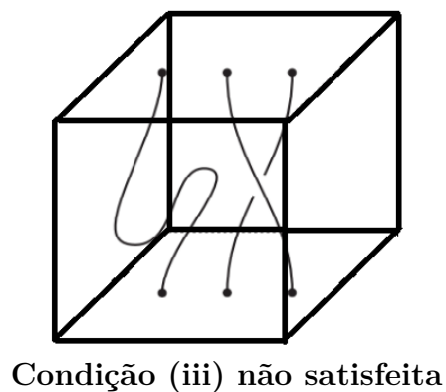


Figura 2.3: Exemplo de uma figura que não representa uma trança [16]

2.2 Movimentos elementares e Tranças Equivalentes

Definição 2.2. (Movimento Elementar) Seja $\mathbb{D}$ um cubo unitário com o mesmo número de cordas da Definição 2.1. Tome AB em uma corda d e seja C um ponto em $\mathbb{D}$. Sendo assim, seja o triângulo ABC (em $\mathbb{D}$) que não intersecta nenhuma outra corda com exceção de d por meio de AB . Portanto i e ii representam um movimento elementar e iii a operação inversa.

- (i) $AC \cup CB$ intersecta cada plano de nível E_s para $0 \leq s \leq 1$ no máximo em um ponto.
- (ii) Substitua AB pelos segmentos $AC \cup CB$. Se as condições acima forem satisfeitas, denotaremos por Ω a operação efetuada.
- (iii) Se $AC \cup CB$ é parte de uma corda e AB intersecta cada plano de nível E_s para $0 \leq s \leq 1$ no máximo em um ponto, podemos definir o movimento inverso Ω^{-1} que consiste em substituir $AC \cup CB$ por AB .

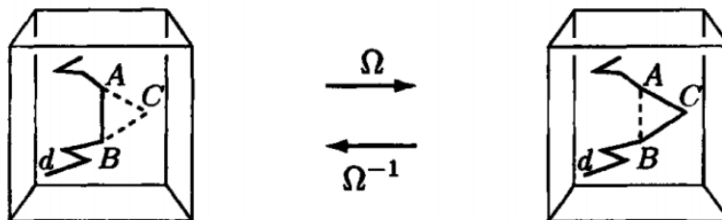


Figura 2.4: Movimentos Elementares [13]

Definição 2.3. Duas n -tranças, β e α , são ditas **equivalentes** se podemos deformar continuamente uma na outra por meio de um número finito de movimentos elementares. De modo geral, se for possível obter o seguinte:

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^\pm} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^\pm} \cdots \xrightarrow{\Omega^\pm} \beta_m = \alpha.$$

Exemplo 2.4. As duas tranças abaixo são equivalentes:

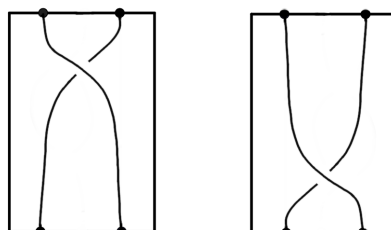


Figura 2.5: Tranças Equivalentes adaptado de [5]

Exemplo 2.5. As duas tranças abaixo não são equivalentes:

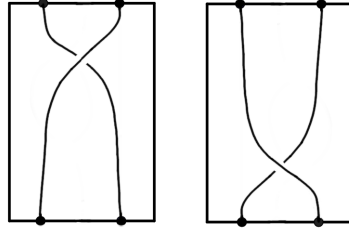


Figura 2.6: Tranças não Equivalentes adaptado de [5]

Veja que as tranças da figura acima não são equivalentes, pois a corda A_1 da primeira está “atrás” de B_1 , em contrapartida à corda da segunda que é configurada ao contrário.

Observação 2.6. Note que por meio dos exemplos é possível perceber que se dadas duas tranças equivalentes β e α , no qual um A_i é ligado em um B_j em β , então em α serão ligados os mesmos índices para i e j , ou seja, a permutação é a mesma.

Proposição 2.7. *A relação acima entre tranças é uma relação de equivalência*

Demonstração. Uma relação R é uma relação de equivalência, caso esta seja reflexiva, simétrica e transitiva. Mostraremos que a equivalência entre tranças satisfaz essas propriedades. Sejam, β , α e γ n -tranças então:

(i) $\beta \sim \beta$

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{-1}} \beta$$

(ii) $\beta \sim \alpha \implies \alpha \sim \beta$

Se $\beta \sim \alpha$ então existem movimentos tais que $\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^\pm} \dots \xrightarrow{\Omega^\pm} \beta_m = \alpha$. Logo, aplicando os movimentos inversos nas tranças equivalentes temos:

$$\alpha = \beta_m \xrightarrow{\Omega^{-1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{-1}} \beta_0 = \beta, \text{ logo } \alpha \sim \beta$$

(iii) $\beta \sim \alpha \text{ e } \alpha \sim \gamma \implies \beta \sim \gamma$

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^\pm} \dots \xrightarrow{\Omega^\pm} \beta_m = \alpha = \alpha_0 \xrightarrow{\Omega^\pm} \dots \xrightarrow{\Omega^\pm} \alpha_m = \gamma \implies \beta \sim \gamma$$

Portanto, a relação entre tranças é uma relação de equivalência e assim considerando B_n o conjunto de todas as tranças podemos representar o conjunto das n -tranças equivalentes $[B_n] = B_n / \sim$. □

Observação 2.8. Uma n -trança nunca é equivalente a uma m -trança se $m \neq n$.

Proposição 2.9. *Toda 1-trança β_1 é equivalente a uma 1- trança β_0 representada pela união dos pontos A_1 e B_1 por um segmento de reta.*

Demonstração. Para a demonstração da proposição, basta considerar o segmento $AB = d$, do triângulo $\triangle$, em que d é igual ao segmento A_1 e B_1 da trança β_1 . Em seguida aplicar o movimento elementar $\Omega^{\pm 1}$ para obter β_0 . □

2.3 Projeção

Nesta seção vamos abordar uma maneira alternativa de visualizar as tranças. Os exemplos apresentados até o momento eram de visualização em três dimensões. Agora, de forma a podermos construir tranças mais complexas, consideraremos a projeção de tranças de três para duas dimensões, de modo que a visualização geométrica seja mais simples.

Definição 2.10. Sejam $\mathbb{D}$ um cubo nas condições da Definição 2.1 e (x, y, z) pontos na face de cima/baixo de $\mathbb{D}$. Assim é denominada projeção no plano yz a função $p(x, y, z) = (0, y, z)$.

Exemplo 2.11. O efeito de aplicar p nas cordas $d_1, \dots, d_n$ pode ser visualizado no exemplo abaixo:

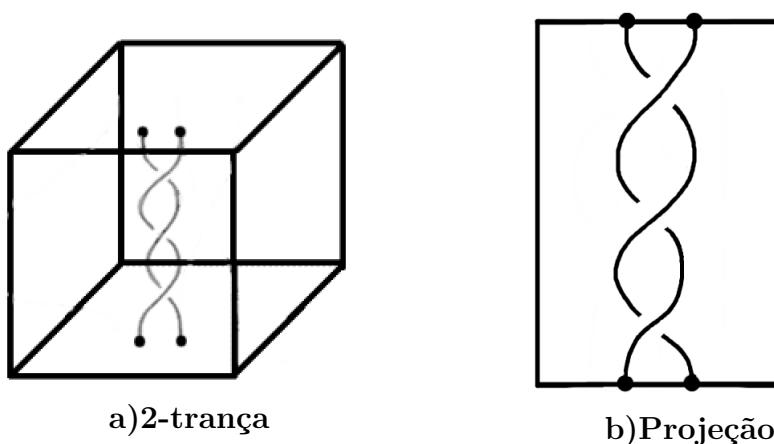


Figura 2.7: Trança e sua projeção

Observação 2.12. Dada uma n -trança β em $\mathbb{D}$ denotaremos a projeção de β por $p(\beta)$ ou β .

Note que ao projetar as cordas no plano yz , pelo fato de todas estarem em um mesmo plano, resulta que em todos os casos haverá pontos de interseção entre as d_j . Essa noção motiva a definição de projeção regular.

Definição 2.13. (Projeção Regular) Sejam β uma n -trança e $p(\beta)$ a projeção de β . Denominamos $p(\beta)$ como uma projeção regular se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i) $p(\beta)$ tenha um número finito de interseções.
- (ii) Se Q é um ponto de interseção de $p(\beta)$ então a imagem inversa $p^{-1}(Q) \cap \beta$ de Q em β tem exatamente dois pontos.
- (iii) Os vértices $A_1, \dots, A_n$ e $B_1, \dots, B_n$ nunca são projetados para um mesmo ponto em $p(\beta)$.

Observação 2.14. Note que a condição (ii) garante que, em uma projeção regular, dois pontos distintos na superfície são projetados ao mesmo ponto.

Exemplo 2.15. O exemplo 2.11 -b) é uma projeção regular.

Observação 2.16. Devido a fácil visualização, as tranças a seguir serão representadas por meio de sua projeção regular.

2.4 Permutação de Tranças

Nesta seção vamos apresentar uma maneira mais rigorosa de visualizar tranças equivalentes por meio da noção de tranças invariantes e, a partir desta, definir as permutações de tranças.

Definição 2.17. Sejam β e α duas n -tranças equivalentes. Seja $f : \beta \rightarrow \alpha$ com a seguinte propriedade:

$$\beta \sim \alpha \implies f(\beta) = f(\alpha)$$

Nessas condições f é chamada uma invariante de β ou simplesmente trança invariante.

Observação 2.18. Note que se $f(\beta) \neq f(\alpha)$ então β não é equivalente a α

Exemplo 2.19. Seja α uma n -trança e $f : \beta \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(\beta)$ é o número de cordas de β . Note que f é um invariante de β , pois dada duas tranças α e β se $f(\beta) \neq f(\alpha)$ então da Proposição 2.8 segue $\beta \not\sim \alpha$.

Consideremos agora β uma n -trança e suponha que a i -ésima corda d_i de β liga A_i a $B_{j(i)}$ para $i = 1, \dots, n$. Defina a função $\pi : \beta_n \rightarrow S_n$, tal que S_n é o conjunto de todas as permutações do conjunto $\{1, \dots, n\}$, logo:

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j(1) & j(2) & \dots & j(n) \end{pmatrix}$$

Nessas condições π é um invariante de β . De fato, se $\beta \sim \alpha$ então para cada i as i -ésimas cordas de β e α são ligadas aos mesmos vértices A_i e $B_{j(i)}$, pois estes não mudam com as operações elementares, dessa forma obtendo as mesmas permutações. Portanto, $f(\beta) = f(\alpha)$.

Definição 2.20. A função π apresentada acima é denominada uma permutação da trança β e denotada por $\pi(\beta)$.

Exemplo 2.21. Considere β a 3-trança abaixo:

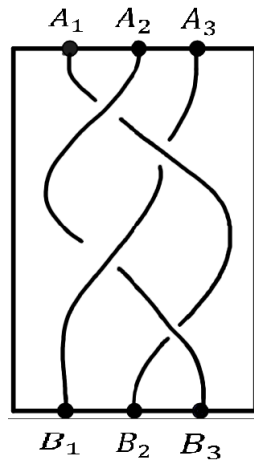


Figura 2.8: 3-Trança

Observe que a função permutação π_β é dada pela matriz:

$$\pi_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ B_j(1) & B_j(2) & B_j(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.1 Tranças Puras

Definição 2.22. Uma n -trança β é chamada **trança pura** se:

$$\pi_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.23. Considere a trança α abaixo:

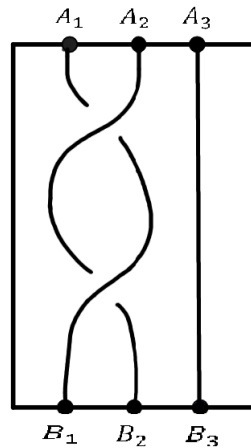


Figura 2.9: Trança Pura

Veja que A_1 é “ligado” em B_1 , A_2 em B_2 e A_3 em B_3 , logo a permutação α é da forma da definição anterior. Portanto, é uma trança pura.

Exemplo 2.24. A trança trivial é uma trança pura.

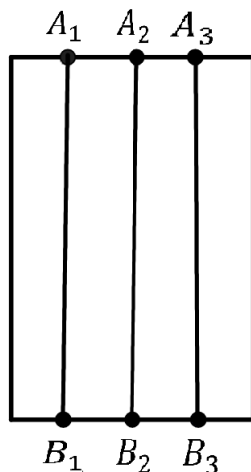


Figura 2.10: Trança Trivial

Observação 2.25. Note que nem toda trança pura é uma trança trivial (Exemplo 2.23), porém a trança trivial é uma trança pura.

2.4.2 Definição Geral para superfícies

Nesta subseção, iremos apresentar uma definição mais geral de tranças, isto é, construída em qualquer superfície compacta, conexa e sem bordo e mostraremos que a Definição 2.1 é um dos casos particulares desta definição. O objetivo dessa definição é para que possamos reconhecer as tranças em outras superfícies.

Definição 2.26. Sejam M uma superfície compacta e n um número inteiro positivo. Considere $\{P_1, \dots, P_n\}$ um conjunto de pontos dois a dois distintos de M . Defina $A_i = P_i \times \{1\}$ em $M \times \{1\}$ e $B_i = P_i \times \{0\}$ em $M \times \{0\}$ para $i = 1, \dots, n$. Então uma n -trança sobre M baseada em $\{P_1, \dots, P_n\}$ é uma n -upla $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ de caminhos $b_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ que satisfazem as seguintes condições:

- (i) Para todo $1 \leq i \leq n$, temos que $b_i(0) = A_i$ e $b_i(1) = B_j$, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$;
- (ii) Para qualquer superfície de nível $M \times \{t\}$ com $1 \leq t \leq n$ existem exatamente n pontos de interseção entre o conjunto $\{b_1(t) \dots b_n(t)\}$ e cada superfície de nível.

Cada caminho b_i é chamado i -ésima corda da trança β ou, simplesmente, uma corda da trança β .

Note que por meio da definição anterior o conceito de trança é expandido para diferentes superfícies.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de tranças em diferentes superfícies.

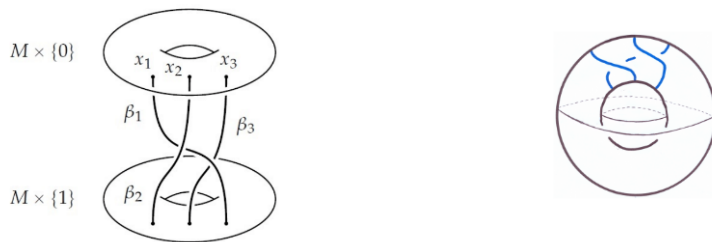


Figura 2.11: Trança no toro $\mathbb{T}^2$ [5] e trança na esfera [22], respectivamente



Figura 2.12: Trança em um retângulo extraído de [22]

3 Grupo das tranças

Neste capítulo, vamos apresentar a construção do grupo das tranças e suas principais propriedades. Para tal objetivo definiremos a operação entre duas tranças, as provas das condições de grupo, sua apresentação e por fim as principais propriedades desse grupo. Para a composição deste capítulo utilizamos as seguintes referências: [5], [13], [16] e [19].

3.1 Operação entre tranças

Vamos definir uma operação entre duas tranças e, para uma melhor visualização, vamos apresentar para 3-tranças.

Considere β_1 e β_2 duas 3-tranças. Construiremos o produto $\beta_1 \cdot \beta_2$ da seguinte forma: Tomemos as duas projeções das tranças $p(\beta_1)$ e $p(\beta_2)$ a qual denominaremos U_1 e U_2 .

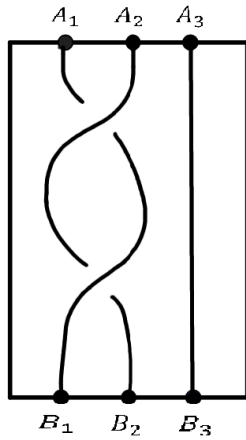


Figura 3.1: Projeção $p(\beta_1)$

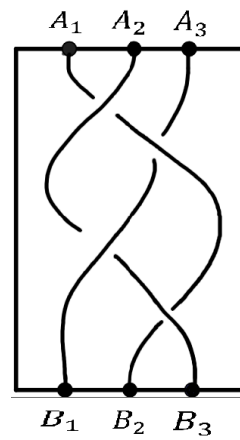


Figura 3.2: Projeção $p(\beta_2)$

A trança produto $(\beta_1 \cdot \beta_2)$ é resultado da substituição dos pontos inferiores de β_1 pelos pontos superiores de β_2 assim, criando uma única trança cujas cordas “iniciam” em β_1 e “terminam” em β_2 , assim como ilustra a imagem abaixo.

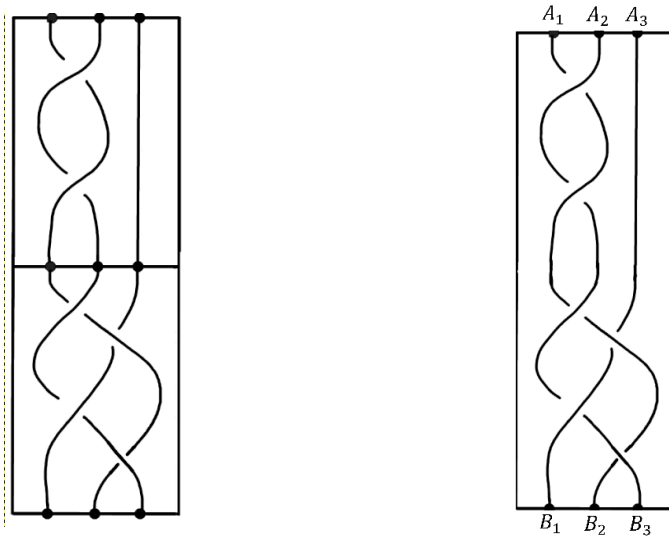


Figura 3.3: Produto $\beta_1 \cdot \beta_2$

A nova trança é denominada produto entre β_1 e β_2 .

Exemplo 3.1. Considere as tranças β e α abaixo, respectivamente:

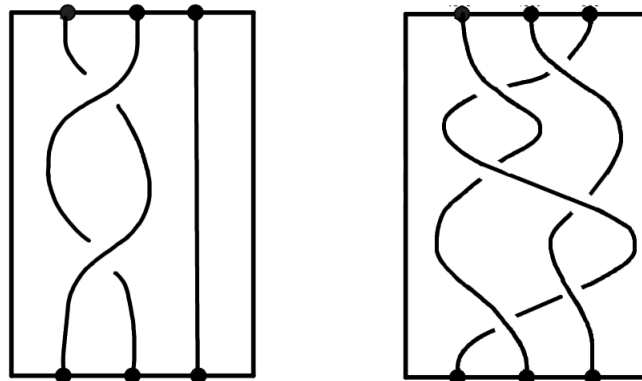


Figura 3.4: β e α duas 3–tranças

Os produtos $\beta \cdot \alpha$ e $\alpha \cdot \beta$ são, nessa ordem:

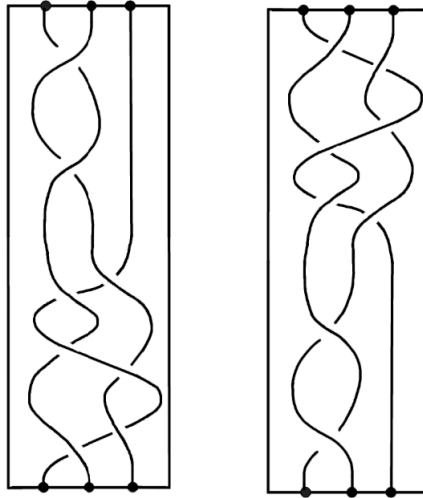


Figura 3.5: Produtos a direita e a esquerda

Observação 3.2. Veja que o produto entre tranças não é comutativo e, portanto, o grupo não será comutativo.

Proposição 3.3. Sejam $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, n -tranças em $[B_n]$ tais que $\beta_1 \sim \beta_2$ e $\beta_3 \sim \beta_4$ então:

$$\beta_1 \cdot \beta_3 \sim \beta_2 \cdot \beta_4.$$

Demonstração. Por hipótese, temos que:

$$\beta_1 = \xrightarrow{\Omega'^{\pm}} \dots \xrightarrow{\Omega'^{\pm}} \beta_2 \text{ e } \beta_3 = \xrightarrow{\Omega''^{\pm}} \dots \xrightarrow{\Omega''^{\pm}} \beta_4.$$

Portanto, em consequência disso, por substituição direta segue que:

$$\beta_1 \cdot \beta_3 \xrightarrow{\Omega^{\pm}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm}} \beta_2 \cdot \beta_4 \Rightarrow \beta_1 \cdot \beta_3 \sim \beta_2 \cdot \beta_4.$$

□

Observação 3.4. Note que a demonstração acima garante que a operação produto é bem definida, independente do representante da classe de equivalência.

Proposição 3.5. *O produto entre tranças é associativo.*

Demonstração. Mostraremos de forma geométrica que o produto é associativo. Sejam β_1, β_2 e β_3 n -tranças em $[B_n]$. Provaremos que $\beta_1 \cdot (\beta_2 \cdot \beta_3) = (\beta_1 \cdot \beta_2) \cdot \beta_3$.

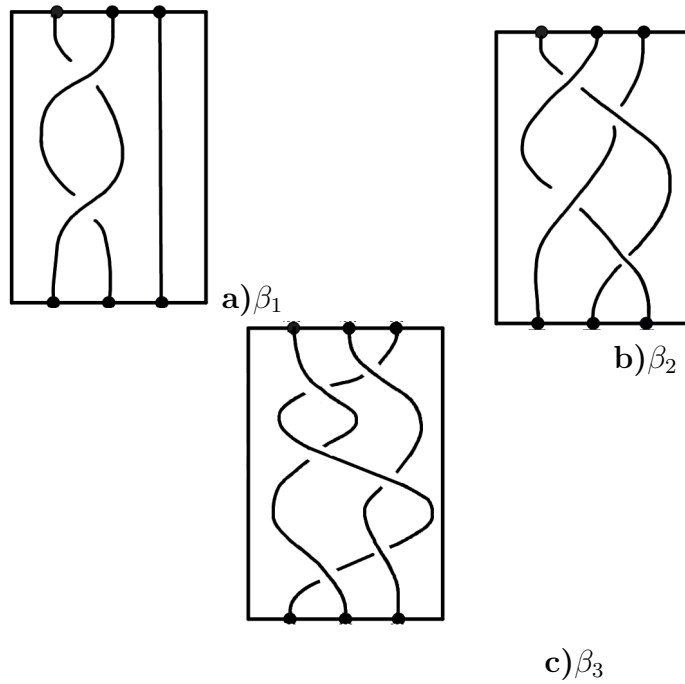


Figura 3.6: Tranças β_1, β_2 e β_3

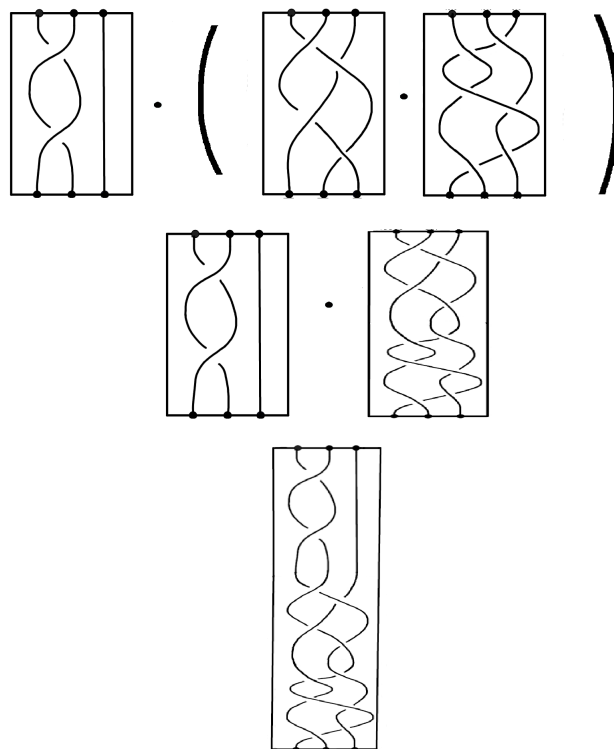


Figura 3.7: $\beta_1 \cdot (\beta_2 \cdot \beta_3)$

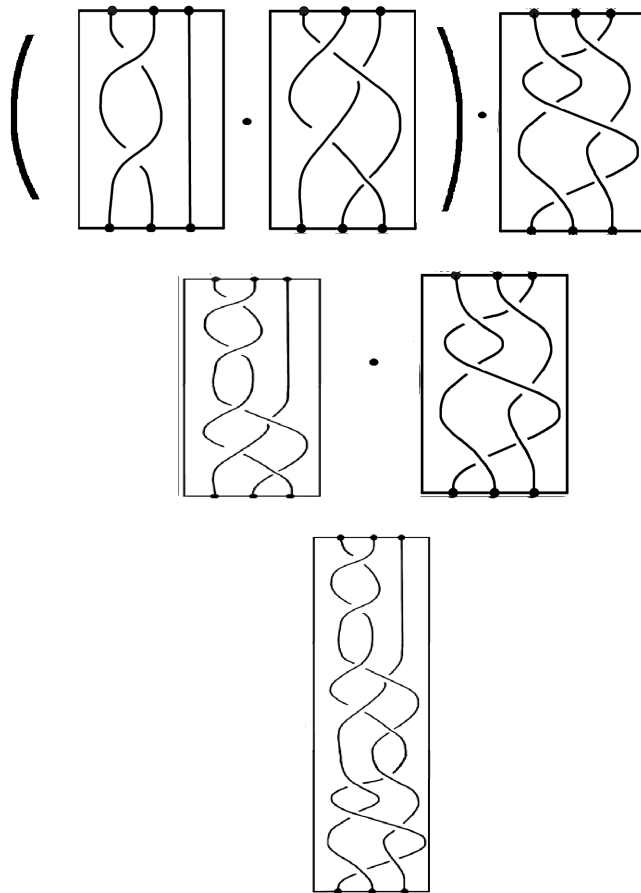


Figura 3.8: $(\beta_1 \cdot \beta_2) \cdot \beta_3$

Portanto, o produto entre tranças é associativo.

□

Proposição 3.6. *A operação produto entre tranças admite elemento neutro.*

Demonstração. O elemento neutro e para a operação em questão é a seguinte trança:

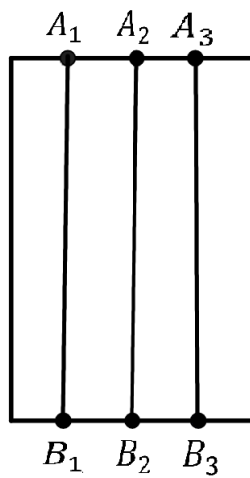


Figura 3.9: Elemento Neutro do produto

De fato, o produto entre uma trança β com e é igual a β .

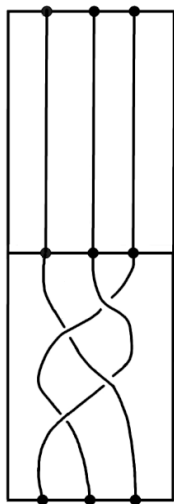


Figura 3.10: Produto entre e e β

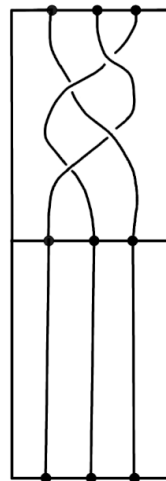


Figura 3.11: Produto entre β e e

Note que $\beta = e \cdot \beta$ e $\beta = \beta \cdot e$, o que comprova a proposição. □

Proposição 3.7. *Dado um elemento $\alpha \in [B_n]$ existe um elemento $-\alpha \in [B_n]$ tal que $\alpha \cdot (-\alpha) = (-\alpha) \cdot \alpha = e$. O elemento $-\alpha$ é chamado simétrico de α .*

Dadas as tranças $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ as tranças simétricas correspondentes são os “espelhos” das tranças originais, isto é, ao observarmos a trança simétrica de “baixo para cima” obtemos como resultado exatamente a trança original como demonstra as imagens abaixo:

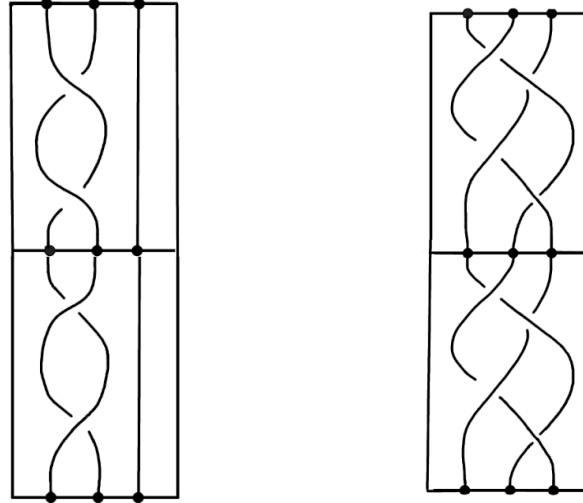


Figura 3.12: Produtos entre β_1 e $-\beta_1$ a direita e a esquerda

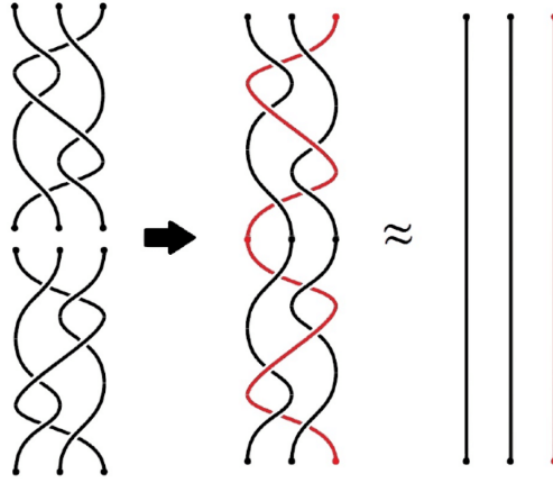


Figura 3.13: Operação elemento inverso detalhada [5]

Note que o produto das tranças originais com as simétricas são equivalentes à trança trivial, que é o elemento neutro para o produto.

Observe que para as provas geométricas das propriedades fez-se necessário a utilização da noção de equivalência entre tranças. Vistas essas informações, para os próximos resultados de forma analítica, vamos definir uma operação referente a classe de equivalência entre tranças $[B_n]$.

Definição 3.8. Sejam $[\beta_1], [\beta_2] \in [B_n]$. A operação entre classes de tranças é definida da seguinte forma:

$$[\beta_1] \cdot [\beta_2] = [\beta_1 \cdot \beta_2]$$

onde $\beta_1 \cdot \beta_2$ é o produto das tranças β_1 e β_2 .

Teorema 3.9. *O conjunto das tranças $[B_n]$ com a operação definida acima, é um grupo.*

Demonstração. Sejam $[\beta_1], [\beta_2]$ e $[\beta_3]$ tranças em $[B_n]$. Para que o conjunto em questão seja um grupo é necessário que este seja associativo, possua elemento neutro e elemento simétrico. Para as provas a seguir utilizaremos os resultados demonstrados geometricamente nesta seção.

(i) A operação é associativa

$$[\beta_1] \cdot ([\beta_2] \cdot [\beta_3]) = [\beta_1] \cdot ([\beta_2 \cdot \beta_3]) = [\beta_1 \cdot (\beta_2 \cdot \beta_3)] = [(\beta_1 \cdot \beta_2) \cdot \beta_3] = ([\beta_1 \cdot \beta_2]) \cdot [\beta_3].$$

(ii) Admite elemento neutro

Seja 1_n a trança trivial. É imediato que $[1_n] \cdot [\beta_1] = [1_n \cdot \beta_1] = [\beta_1 \cdot 1_n] = [\beta_1] = [\beta_1] \cdot [1_n]$.

(iii) Admite elemento simétrico

Seja $-\beta_1$ o elemento simétrico de β_1 . Assim, $[\beta_1] \cdot [-\beta_1] = [\beta_1 \cdot -\beta_1] = [1_n] = [-\beta_1 \cdot \beta_1]$. Em relação a notação consideraremos $[-\beta_1] = -[\beta_1]$.

□

Observação 3.10. O conjunto $[B_n]$ munido da operação definida nessa seção é um grupo, pois $[B_n]$ é uma classe de equivalência. Caso contrário, a operação não seria associativa visto, que na demonstração da Proposição 3.5, as tranças resultantes podem não ser iguais, porém são equivalentes. Logo, a partir deste momento, consideraremos igualdade $B_n = [B_n]$

3.2 Apresentação do grupo das tranças

Nesta seção apresentaremos a construção de uma apresentação para o grupo das tranças. Para isso, definiremos as partições de uma trança de forma a construir os geradores de Artin. Para composição desta seção utilizamos as referências [13] [16].

3.2.1 Partição de uma trança

Dada uma projeção de uma trança é possível particionar, isto é, dividir a trança por meio de curvas de nível, em outras tranças de tal forma que entre dois planos admita somente um ponto de interseção entre as cordas como ilustra a imagem a seguir:

Cada n -trança é particionada em $2n - 2$ possíveis n -trança, por exemplo em uma trança de 3 cordas obtem- se 4 tranças diferentes, de 4 cordas é gerado 6 tranças e assim por diante. De mais, observando a expressão $2n - 2$ vale a igualdade $2n - 2 = 2 \cdot (n - 1)$, ou seja, existem dois conjuntos de $n - 1$, n -tranças. O primeiro conjunto de $n - 1$, n -tranças é representado da seguinte forma:



Figura 3.14: Partição de uma trança [13]

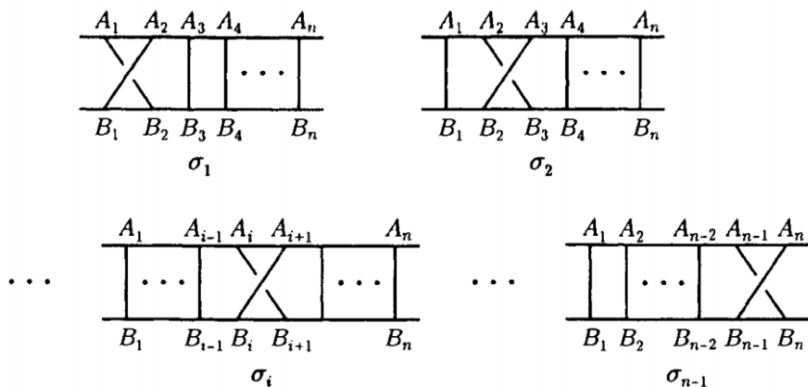


Figura 3.15: 1º Conjunto de $n - 1$ tranças [13]

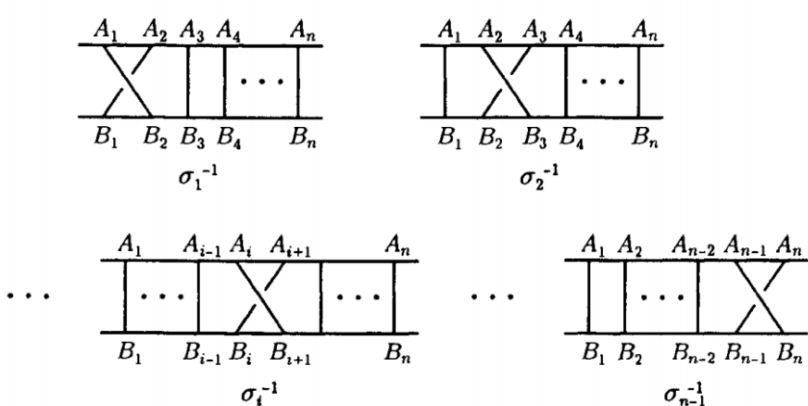


Figura 3.16: 2º Conjunto de $n - 1$ tranças [13]

Em símbolos denotamos essas n -tranças por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. Por outro lado, o segundo conjunto é obtido alternando as cordas “atrás” e da “frente” na imagem anterior.

Note que este conjunto de n -tranças representa exatamente o inverso de cada σ_i . Portanto, denota-se $\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$.

O conjunto $\{\sigma_i^{\pm}\}$, devido ao trabalho de Artin, é chamado Tranças de Artin ou geradores de Artin. Mais precisamente σ_i é uma classe de equivalência da n -trança representada na Figura 3.16. A importância dessas tranças mencionadas anteriormente é demonstrada no Teorema a seguir. [13].

Teorema 3.11. *Qualquer n -trança β ($\beta \in \beta_n$) pode ser escrita como um produto dos elementos do conjunto $\{\sigma_i^{\pm}\}$ com $i = 1, \dots, n - 1$, isto é:*

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \cdot \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \cdot \sigma_{i_3}^{\epsilon_3} \cdots \sigma_{i_n}^{\epsilon_n}$$

onde $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n - 1$ e $\epsilon_i = +1$ ou $\epsilon_i = -1$ para $i = 1, \dots, k$.

Demonstração. Seja β uma n -trança particionada tal qual a Figura 3.14. Dessa forma, β está dividida em “seções”, isto é, em partes, e por meio de operações elementares é possível determinar que as cordas adjacentes sejam inteiramente verticais (Figuras 3.15 e 3.16). Logo, a trança β foi particionada por um produto de σ_i e seus inversos. Por fim, utilizando um número finito de planos de nível obtemos que cada partição de β é equivalente a um $\sigma_{i_1}^{\epsilon_1}$ onde $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n-1$ e $\epsilon_i = +1$ ou $\epsilon_i = -1$ para $i = 1, \dots, k$. $\square$

A seguir apresentaremos alguns resultados que são consequências do Teorema 3.11.

Proposição 3.12. *Dada uma n - trança temos que $\sigma_i^p \cdot \sigma_i^q = \sigma_i^{p+q}$ para um par de inteiros arbitrários p, q e $1 \leq i \leq n-1$*

Demonstração. Inicialmente, considere $q \geq 0$. Assim, fixando p podemos aplicar indução sobre q . Observe que, o caso em que q é fixo a demonstração é análoga. Para $q = 0$, temos $\sigma_i^p \cdot \sigma_i^0 = \sigma_i^p \cdot 1 = \sigma_i^p = \sigma_i^{p+0}$.

Portanto, supondo que a propriedade seja válida para $q = n \in \mathbb{N}$ provemos que a mesma é válida para $n+1$. Logo, como a proposição é válida para n e 1 segue que:

$$\sigma_i^p \cdot \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^p \cdot \sigma_i^n \cdot \sigma_i^1 = \sigma_i^{p+n} \cdot \sigma_i = \sigma_i^{p+n+1}$$

Por fim, para o caso $q < 0$ basta considerar $\sigma_i^p \cdot \sigma_i^{-q}$ que a demonstração é análoga ao caso $q \geq 0$. Portanto, $\sigma_i^p \cdot \sigma_i^q = \sigma_i^{p+q}$. $\square$

Proposição 3.13. *Toda 2- trança pode ser escrita na forma σ_1^m para algum inteiro m*

Demonstração. Do Teorema 3.11 temos que uma 2 - trança β pode ser escrita da seguinte forma:

$$\beta = \sigma_1$$

Logo, da Proposição anterior temos:

$$\beta \cdot \sigma_1 = \sigma_1 \cdot \sigma_1 = \sigma_1^2$$

...

$$\beta \cdot \sigma_1^{m-1} = \sigma_1^m$$

Como $\beta \cdot \sigma_1^{m-1}$ é uma 2-trança (pela forma em que o produto é definido) segue então que a proposição é verdadeira. $\square$

Proposição 3.14. *Toda 3- trança pode ser escrita, para algum inteiro m na forma:*

$$\sigma_1^{a_1} \cdot \sigma_2^{b_1} \cdot \sigma_1^{a_2} \cdot \sigma_2^{b_2} \cdots \sigma_1^{a_m} \cdot \sigma_2^{b_m}$$

onde $a_2, a_3, \dots, a_m, b_2, b_3, \dots, b_{m-1}$ são diferentes de zero, mas a_1 ou b_m podem ser zero. Ademais, esse tipo de expressão para uma 3 - trança não é única, então segue $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 = \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$

Demonstração. Do Teorema 3.11 temos que cada 3 - trança pode ser escrita da forma:

$$\beta = \sigma_1^{a_1} \cdot \sigma_2^{b_1} \text{ com } a_1 \text{ e } b_1 \text{ nas condições do teorema e do enunciado da proposição.}$$

Logo, temos:

$$\beta \cdot \sigma_1^{a_2} \cdot \sigma_2^{b_2} = \sigma_1^{a_1} \cdot \sigma_2^{b_1} \cdot \sigma_1^{a_2} \cdot \sigma_2^{b_2}$$

...

$$\beta \cdot \sigma_1^{a_2} \cdot \sigma_2^{b_2} \cdots \sigma_1^{a_m} \cdot \sigma_2^{b_m} = \sigma_1^{a_1} \cdot \sigma_2^{b_1} \cdot \sigma_1^{a_2} \cdot \sigma_2^{b_2} \cdots \sigma_1^{a_m}$$

Como $\beta \cdot \sigma_2^m = \beta_3$ é uma 3- trança (pela forma em que o produto é definido) segue que:

$$\beta_3 = \sigma_1^{a_1} \cdot \sigma_2^{b_1} \cdot \sigma_1^{a_2} \cdot \sigma_2^{b_2} \cdots \sigma_1^{a_m} \cdot \sigma_2^{b_m}.$$

Como a expressão anterior não é única tomemos β_3 das formas: □

$$\beta_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 \text{ e } \beta_3 = \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

Portanto, $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 = \beta_3 = \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$

De forma, geral para $n > 2$ uma n -trança admite a igualdade $\sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} = \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i$ tal que $i = 1 \cdots n-2$. Portanto, uma n -trança pode ser escrita em função dessa igualdade, tal como a proposição anterior. Ademais, [13] destaca a relação $\sigma_i \cdot \sigma_k = \sigma_k \cdot \sigma_i$ para $i = 1, \cdots, n-1$ e $|i-k| \geq 2$, cuja demonstração para o grupo de n -tranças requer um grande esforço quando se trata de operações elementares. Dessa forma, o autor acentua o caso particular para 4- tranças ($\sigma_1 \cdot \sigma_3 = \sigma_3 \cdot \sigma_1$) da seguinte forma:

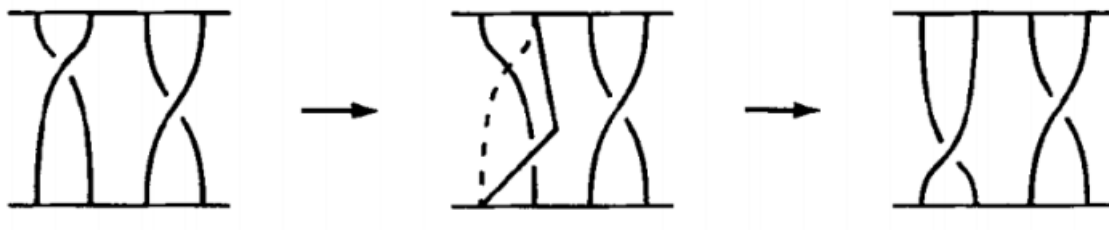


Figura 3.17: Relação em β_4 [13]

O conhecimento desta forma é de extrema importância para a construção da apresentação na próxima seção.

3.3 Apresentação do Grupo das tranças

Nesta subseção apresentaremos a construção da apresentação do grupo das tranças. Para composição desta seção utilizamos as referências de [13] e [16].

Teorema 3.15. Para $n \geq 1$ o grupo das tranças β_n admite a seguinte apresentação

$$\beta_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i \text{ para } 1 \leq i < j < n-1 \text{ e } |j-i| \geq 2 \\ \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_{i+1} = \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \text{ para } i = 1, \cdots, n-2. \rangle$$

Demonstração. Seja G um grupo definido por:

$$G := \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \mid x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i \text{ para } 1 \leq i < j < n-1 \text{ e } |j-i| \geq 2$$

$$x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+1} = x_i \cdot x_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, n-2 \rangle.$$

O Teorema 3.11 demonstra que o produto das tranças de Artin geram o grupo das tranças B_n . Dessa forma, define-se a função $\phi' : \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow B_n$ com a lei de formação $\phi'(x_i) = [\sigma_i]$.

Em consequência da definição de G podemos considerar a função $\phi : G \rightarrow B_n$ com a mesma lei de formação que $\phi'(x_i)$. Dessa forma, veja que ϕ é um homomorfismo. De fato, note que $\phi(x_i)\phi(x_j) = [\sigma_i][\sigma_j] = [\sigma_i\sigma_j] = \phi(\sigma_i\sigma_j)$. Além disso, por sua vez, devido aos resultados discutidos anteriormente nessa seção segue que:

(i) Se $|i-j| \geq 2$ resulta:

$$\phi(x_i x_j) = [\sigma_i \sigma_j] = [\sigma_j \sigma_i] = \phi(x_j x_i).$$

(ii) Para todo $1 \leq i < n-1$ temos:

$$\phi(x_i x_{i+1} x_i) = [\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i] = [\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}] = \phi(x_{i+1} x_i x_{i+1})$$

Agora mostraremos que ϕ é um isomorfismo, isto é, um homomorfismo bijetivo. É imediato que ϕ é sobrejetiva, pois o conjunto das classes $[\phi_1 \cdots \phi_n] = [\beta_n] = \beta_n$ em consequência do Teorema 3.11. Sendo assim, basta mostrar que ϕ é injetiva. Para provar tal resultado, vamos demonstrar que $\text{Ker}(\phi) = \{e\}$ em que e é o elemento neutro de G . Logo, fixando um elemento $g \in \text{Ker}(\phi)$ e uma palavra $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_k}^{\epsilon_k}$ representando g . Portanto, $\phi(g) = \phi([w]) = [\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}] = [1_{B_n}]$, pois $g \in \text{Ker}(\phi)$. Vamos definir um diagrama que represente a trança $\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ por meio dos seguintes passos:

Sejam os diagramas C_{σ_i} para cada σ_i e, de forma semelhante, $C_{\sigma_i}^{-1}$ para cada σ_i^{-1} . Os diagramas estão representados na Figura 3.18.



Figura 3.18: Diagramas C_{σ_i} e $C_{\sigma_i}^{-1}$, respectivamente.

Nesse momento, consideraremos o diagrama D^w formado pelo produto das tranças $C_{i_1}^{\epsilon_1} C_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots C_{i_k}^{\epsilon_k}$, assim como ilustra o Exemplo na Figura 3.19.

Note que os diagramas descritos são estendidos para qualquer palavra w no domínio de ϕ .

Seja β^w a trança representada pelo diagrama D^w . Logo, β^w representa $\phi(g)$, desde que $[\beta^w] = [\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}]$. Ademais, se dois diagramas são idênticos, isto é $D^{w_1} = D^{w_2}$, não somente equivalentes, resulta que as palavras associadas a esses são idênticas. Sendo assim, se $\phi(g) = 1_{\beta_n}$, segue que $[\beta^w] = 1_{\beta_n}$, ou seja, $\beta^w \sim 1_{\beta_n}$.

Portanto, nesse sentido temos como resultado a seguinte sequência:

$$\beta^w = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^\pm} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^\pm} \cdots \xrightarrow{\Omega^\pm} 1_{\beta_n}$$

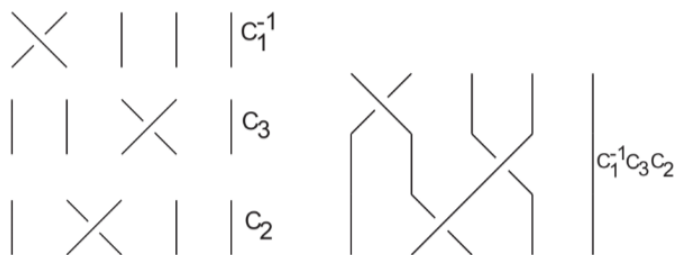


Figura 3.19: Exemplo do produto $C_1^{-1}C_2C_3$

De forma semelhante, podemos considerar a sequência dos diagramas associados a β^w .

$$D^w = D^{w_0} \xrightarrow{\Omega^\pm} D^{w_1} \xrightarrow{\Omega^\pm} \dots \xrightarrow{\Omega^\pm} D^1$$

D^1 é o diagrama associado a trança trivial. Contudo, para demonstrar a injetividade da função ϕ , faz-se necessário demonstrar o resultado que "Se $D^{w_1} \xrightarrow{\Omega^\pm} D^{w_2}$ então $[w_1] = [w_2]$ ". Portanto, se os diagramas se diferem somente por um número finito de movimentos elementares resulta que as palavras associadas por meio da função ϕ são equivalentes.

Antes desta fase da prova, vale destacar que pela definição de movimentos elementares, dado um triângulo $\triangle ABC$ no plano, a operação consiste em substituir o segmento AB pela união dos segmentos AC e BC ou o inverso que é substituir $AC \cup BC$ por AB . Assim, se $\beta^{w_1} \sim \beta^{w_2}$ que são representados pelas tranças de Artin é possível verificar esse movimento por meio do diagrama ilustrado através da Figura 3.20.

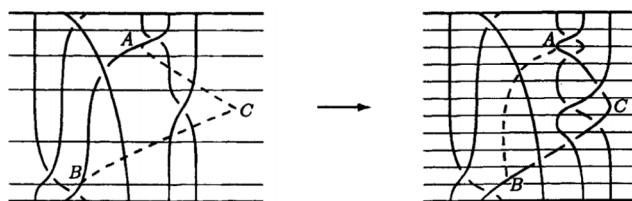


Figura 3.20: Movimentos elementares representados na partição [13]

Observe pela Figura 3.20 que, em geral, após a aplicação de um movimento elementar a nova corda formada gerará novas interseções com outras cordas, enquanto as interseções anteriores não necessariamente se manterão. Vale destacar que em cada partição σ_i admite somente um ponto de interseção.

Tendo em vista as informações destacadas no parágrafo anterior, [13] acentua que quando uma corda entra sobre (atrás) um lado do triângulo ABC então esta corda, sempre, irá sair sobre (atrás) um outro lado ou até talvez o mesmo lado do triângulo tal qual a Figura 3.21.



Figura 3.21: Triângulos dos movimentos elementares. [13]

Logo, considerando as informações explicitadas, o trabalho desta etapa da demonstração, cabe em encontrar cada expressão das palavras w_1 e w_2 (concluir que $[w_1] = [w_2]$)

após aplicados os movimentos elementares evidenciados em cada caso no diagrama D^{w_1} de forma a obter D^{w_2} . Para isso, sejam $w_1 = x_{\tau_1}^{\alpha_1} x_{\tau_2}^{\alpha_2} \cdots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$ e $w_2 = x_{\rho_1}^{\gamma_1} x_{\rho_2}^{\gamma_2} \cdots x_{\rho_z}^{\gamma_z}$. Assim, considerando como d' uma corda que passa pelo triângulo $\triangle ABC$ vamos aos casos.

Note que os casos desenvolvidos abaixo consideramos, sem perda de generalidade o ponto C do movimento elementar a direita do segmento AB , sendo o caso a esquerda análogo.

Caso 1 - Triângulo $\triangle ABC$ é vazio (3.22).

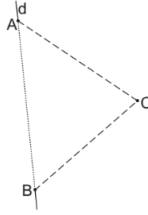


Figura 3.22: Caso 1 - extraído de [16].

Neste caso a palavra w_1 possui exatamente o mesmo diagrama da palavra w_2 , pois não foram criadas e nem mesmo destruídas nenhuma corda. Portanto, $[w_1] = [w_2]$.

Caso 2 - O triângulo $\triangle ABC$ contém parte de uma corda d' que entra sobre AB e volta sobre AB (3.23)

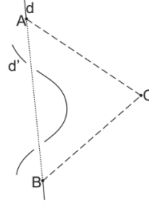


Figura 3.23: Caso 2. [16]

Diante disso, vamos considerar de forma individual o movimento direto (Ω^1) e o movimento inverso (Ω^{-1}). Logo, para o caso Ω^1 temos que substituir AB por $AC \cup BC$, com d' na configuração representada na Figura 3.23, de forma a exibir a palavra que representa esse movimento. Sendo assim, note que a forma que as cordas AB e d' estão postas se assemelha com o diagrama $C_i C_i^{-1}$, isto é, as tranças $\sigma_i \cdot \sigma_i^{-1}$. Dessa forma, basta remover o diagrama $C_i C_i^{-1}$ para que o movimento seja representado. Contudo, por meio da função ϕ , basta representar uma palavra em que um elemento é removido, a vista disso temos a palavra $x_{\tau_1}^{\alpha_1} x_{\tau_2}^{\alpha_2} \cdots x_{\tau_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_{\tau_j}^{\alpha_j} x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} \cdots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$ em que $x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} = x_i^{-1}$ e $x_{\tau_j}^{\alpha_j} = x_i$ que é equivalente a palavra w_2 (palavra resultante após o movimento). Por sua vez, o caso inverso é semelhante, basta adicionar o diagrama $C_1 C_1^{-1}$ e os elementos que retiramos na palavra w_1 , logo temos $x_{\tau_1}^{\alpha_1} x_{\tau_2}^{\alpha_2} \cdots x_{\tau_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_i x_i^{-1} x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} x_{\tau_{j+2}}^{\alpha_{j+2}} \cdots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$ que é equivalente a palavra w_2 . Portanto, $[w_1] = [w_2]$.

Caso 3 - O triângulo $\triangle ABC$ contém parte de uma corda d' , onde d' entra no triângulo $\triangle ABC$ por AC e sai sobre BC (3.24).

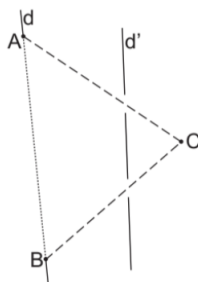


Figura 3.24: Caso 3 - extraído de [16]

Diante de tal caso, o raciocínio é semelhante ao Caso 2 sendo a principal diferença que quando o movimento for direto, adiciona-se o diagrama $C_i^{-1}C_i$ de algum lugar no nosso diagrama obtendo a mesma palavra do caso anterior. Já em relação ao caso inverso removemos o diagrama $C_i^{-1}C_i$. Portanto, $[w_1] = [w_2]$.

Caso 4 - O triângulo $\triangle ABC$ contém parte de uma corda d' , onde d' entra por AB ou $AB \cup AC$ e sai por outra (3.25).

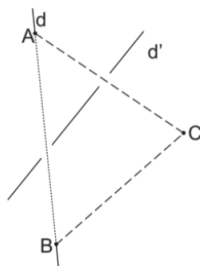


Figura 3.25: Caso 4 - extraído de [16]

Independente da operação Ω (direta ou inversa) para representar a palavra, basta deslocar o diagrama $C_i^{\pm 1}$ por cima ou por baixo, no esquema representado na Figura 3.25, através de um algum número r de outros diagramas $C_r^{\pm 1}$ com $r \neq i-1, i, i+1$, ou seja, não sendo antecessor, consecutivo, ou igual a i . Assim, se deslocado por cima temos a palavra $x_{\tau_1}^{\alpha_1} x_{\tau_2}^{\alpha_2} \dots x_{\tau_j}^{\alpha_j} x_i x_i^{\pm 1} x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} \dots x_{\tau_{v-1}}^{\alpha_{v-1}} x_{\tau_v}^{\alpha_v} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$, onde $x_{\tau_v}^{\alpha_v} = x_i^{\pm 1}$ e $|\tau_q - 1| \geq 2$ para todo $j+1 \leq q \leq v-1$. Por sua vez, se deslocado para baixo temos a palavra $x_{\tau_1}^{\alpha_1} x_{\tau_2}^{\alpha_2} \dots x_{\tau_j}^{\alpha_j} x_{\tau_{v-1}}^{\alpha_{v-1}} x_{\tau_v}^{\alpha_v} x_i x_i^{\pm 1} x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$, onde $x_{\tau_v}^{\alpha_v} = x_i^{\pm 1}$ e $|\tau_q - 1| \geq 2$ para todo $v+1 \leq q \leq j$. Portanto, de qualquer forma a palavra resultante w_2 é equivalente a w_1 , pois a diferença entre as duas é somente o comuto dos termos $x_i^{\pm 1} x_j^{\pm 1}$ e $x_j^{\pm 1} x_i^{\pm 1} x_j$ para $|i-j| \geq 2$ algum número de vezes em w_1 . Logo, $[w_1] = [w_2]$.

Caso 5 - O triângulo $\triangle ABC$ contém parte de duas cordas d' e d'' que se cruzam entre elas, onde as cordas entram por AC e saem por BC (3.26).

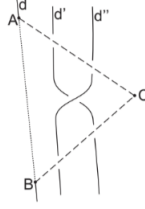


Figura 3.26: Caso 5 - extraído de [16]

Se o movimento for direto (Ω) então basta substituir o diagrama, para algum i , $C_i^{\pm 1}$ pelo diagrama $C_i^{-1}C_{i+1}^{-1}C_iC_{i+1}C_i$ que é representado pela palavra $x_{\tau_1}^{\alpha_1}x_{\tau_2}^{\alpha_2}\cdots x_{\tau_j}^{\alpha_j}x_i^{-1}x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1}x_ix_{\tau_{j+2}}^{\alpha_{j+2}}\cdots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$ (tal que $x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} = x_i$). Assim, pelo resultado $\sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} = \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i$ temos que as palavras w_1 e w_2 são equivalentes. Agora, se o movimento for inverso basta substituir $C_i^{-1}C_{i+1}^{-1}C_i^{-1}C_{i+1}C_i$ pelo diagrama $C_i^{\pm 1}$. Logo, temos a palavra $x_{\tau_1}^{\alpha_1}x_{\tau_2}^{\alpha_2}\cdots x_{\tau_j}^{\alpha_j}x_{i+1}^{-1}x_{\tau_{j+2}}^{\alpha_{j+2}}\cdots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$ em que $x_i^{-1}x_{i+1}^{-1}x_i^{-1}x_{i+1}^{-1}x_ix_i$ resulta em x_{i+1}^{-1} desde que $\sigma_i^{-1} \cdot \sigma_{i+1}^{-1} = \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \cdot \sigma_i^{-1}$. Portanto, nesse caso as palavras w_1 e w_2 são equivalentes, ou seja, $[w_1] = [w_2]$.

$\triangle ABC$ contém parte de muitas cordas que tenham arbitrariamente interseções entre elas.

Nesse caso, podemos reduzir os movimentos em uma série finita dos casos anteriores, onde em cada estagio intermediário da sequência as palavras são equivalentes em G . Dessa forma, $[w_1] = [w_2]$.

Por fim, para finalizar a demonstração que ϕ é injetiva temos que hipótese que $D^W \sim D^1$, logo $[w] = [1_n]$. Por fim, como $g = [w]$ é um elemento arbitrário do $\text{Ker}(\phi)$, resulta que ϕ é injetiva e por sua vez também é sobrejetiva. Logo, concluímos que ϕ é um isomorfismo e β_n admite uma apresentação idêntica a G . □

3.4 Propriedades do grupo

Proposição 3.16. *Para $1 \leq i \leq n-1$*

$$(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n\sigma_i = \sigma_i(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$$

Além disso, $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$ pertence ao centro de β_n .

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n . Para $n = 2$ o resultado é imediato, pois $\sigma^2 = \sigma_1\sigma_1$.

Agora, supondo que o a proposição seja válida para $n-1$. Demonstraremos que a mesma é válida para n utilizando a Proposição 3.12.

$$(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n\sigma_i = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^2(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^{n-2}\sigma_i = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})\sigma_i(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^{n-2} =$$

$$= \sigma_i(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^{n-2} = \sigma_i(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$$

□

Proposição 3.17. Para $1 \leq m \leq n$, a função $\phi : \beta_m \rightarrow \beta_n$ definida por $\phi(\sigma_i) = \sigma_i$ para $i = 1, 2, \dots, m-1$ é um homomorfismo de $\beta_m \rightarrow \beta_n$. Além disso, ϕ é injetiva e por isso é possível considerar β_m um subgrupo de β_n .

Demonstração. Vamos provar que a função ϕ é um homomorfismo injetor. De fato, ϕ é um homomorfismo, pois dados $\sigma_i\sigma_j \in B_m$ temos que $\phi(\sigma_i\sigma_j) = \sigma_i\sigma_j = \phi(\sigma_i)\phi(\sigma_j)$. Agora, basta demonstrar a injetividade. Suponha que para algum $\beta \in B_m$, temos que $\phi(\beta) = 1_n$. A intenção nesta etapa é de verificar que o único elemento pertencente ao núcleo de ϕ é o elemento neutro de B_m , ou seja, $\beta \sim 1_m$. Por enquanto temos a seguinte sequência:

$$\phi(\beta) = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^\pm} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^\pm} \cdots \beta_k \xrightarrow{\Omega^\pm} 1_n$$

Em que β_{i+1} é obtido aplicando um número finito de movimentos elementares em β_i . Ademais a igualdade $\phi(\beta) = 1_n$ pode ser representada pela Figura 3.27. □

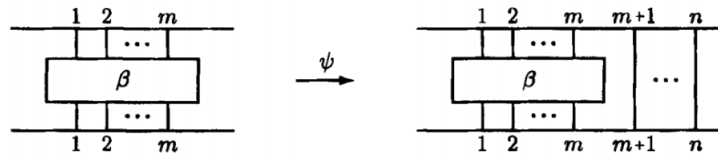


Figura 3.27: Representação da igualdade $\phi(\beta) = 1_n$ [13].

Observe que, pela figura anterior, é possível perceber que a função ϕ adiciona $n - m$ cordas nos elementos de B_m , ou seja, β adicionado de $n - m$ cordas é equivalente ao elemento neutro 1_n . Portanto, se removermos as $n - m$ cordas finais de cada β_i , não necessariamente na ordem, isto é, remover de β_1 e logo em seguida de β_2 em forma de obter um β'_i onde:

$$\beta = \beta'_0 \xrightarrow{\Omega^\pm} \beta'_1 \xrightarrow{\Omega^\pm} \cdots \beta'_k \xrightarrow{\Omega^\pm} 1_m$$

Note que esta sequência acontece, pois $\alpha_m = 1_n$ a trança trivial de n cordas. Em que β'_{i+1} é obtido aplicando um número finito de movimentos elementares em β'_i ou β'_{i+1} é idêntico a β'_i . O último ocorre se um movimento elementar for aplicado na corda na posição l de β_i tal que $m < l \leq n$.

Contudo, concluímos que $\beta \sim 1_m$.

3.5 Grupo das tranças em uma superfície compacta

Por meio da definição de tranças em superfícies é possível compreender o produto de forma mais rigorosa, isto é, por meio de uma justaposição de caminhos. Para esta seção, considere a trança $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ definida na superfície compacta M e $\Pi_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ e assim Π_M a n -upla de caminhos $\Pi_M(\beta) = (\Pi_M \circ b_1, \dots, \Pi_M \circ b_n)$. Salientamos que os resultados demonstrados até o momento também são válidos para o grupo das tranças em superfícies de modo geral.

Definição 3.18. Sejam $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ duas n - tranças em uma superfície compacta M . Considere a n - trança $(\alpha \cdot \beta) = ((ab)_1, (ab)_2, \dots, (ab)_n)$ sendo,

$$\begin{aligned} (ab)_i & \quad [0, 1] & \rightarrow & \quad M \times [0, 1] \\ & \quad t & \rightarrow & \quad ((\Pi_M \circ a_i) * ((\Pi_M \circ b_{\pi(\alpha)(i)}))(t), t), \end{aligned}$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$, onde $\pi(\alpha)(i) = j(i)$ é o invariante permutação e $*$ denota a justaposição de caminhos.

Observação 3.19. A representação geométrica do produto das tranças em uma superfície é semelhante a apresentada no Capítulo 2. De fato, a imagem a seguir 3.28 corrobora esse argumento.

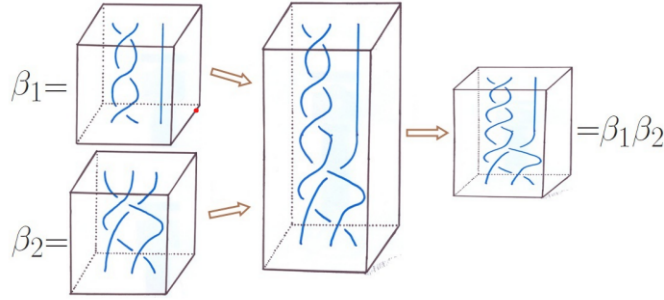


Figura 3.28: Produto de tranças em um cubo unitário [22]

Exemplo 3.20. Sejam $\alpha = (a_1, a_2)$ e $\beta = (b_1, b_2)$ duas 2- tranças em uma superfície compacta M . Dessa forma os caminhos $(ab)_i$ são definidos $(ab)_1 = ((\Pi_M \circ a_1) * (\Pi_M \circ b_{\pi(\alpha)(1)}))(t), t)$ e $(ab)_2 = ((\Pi_M \circ a_2) * (\Pi_M \circ b_{\pi(\alpha)(2)}))(t), t)$ e então $\alpha \cdot \beta = ((ab)_1, (ab)_2)$. Lembrando que,

$$(ab)_1 = ((\Pi_M \circ a_1) * (\Pi_M \circ b_{\pi(\alpha)(1)}))(t) = \begin{cases} (\Pi_M \circ a_1)(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Pi_M \circ (b_{\pi(\alpha)(1)})(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$(ab)_2 = ((\Pi_M \circ a_2) * (\Pi_M \circ b_{\pi(\alpha)(2)}))(t) = \begin{cases} (\Pi_M \circ a_2)(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Pi_M \circ (b_{\pi(\alpha)(2)})(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Teorema 3.21. O conjunto $B_n(M) = \{[\beta] : \beta \text{ é uma } n\text{- trança em } M\}$ em que M é uma superfície compacta, munido da operação induzida pelo produto das tranças (3.18), é um grupo, intitulado grupo das n - tranças de M .

A demonstração do Teorema 3.21 é análoga a prova que o conjunto das classes de homotopia de laços com ponto base fixado de um espaço topológico (ver Capítulo 1) é um grupo. De fato, considerando $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ a autora [12] ressalta o resultado " Duas tranças baseadas em P são ditas equivalentes se existe uma homotopia que deforma uma na outra obtendo outra trança baseada em P "(pag.6). Sendo assim, é possível enxergar a relação de equivalência entre tranças como uma relação de homotopia de entre laços, logo como o Grupo fundamental é um grupo munido da operação justaposição, resulta na comprovação que o grupo das tranças é um grupo na superfície M de modo análogo.

Observação 3.22. Vale ressaltar que o elemento neutro de B_n é a classe de equivalência da n - trança $1 = (k_1 \cdot k_n$, com $k_i(t) = (P_i, t)$ para todo $t \in [0, 1]$. De mais, se $\beta = (b_1, \dots b_n)$ é um n - trança de M então o elemento simétrico de β é uma n - trança $\beta^{-1} = (b_1^{-1}, \dots b_n^{-1})$, sendo

$$\begin{array}{ccc} (b)_i^{-1} & [0, 1] & \rightarrow \\ t & \rightarrow & M \times [0, 1] \\ & & ((\Pi_M \circ a_i) * ((\Pi_M \circ b_{\pi(\beta^{-1})(i))})(1-t), t), \end{array}$$

Ademais, para $1 \leq i \leq n$ satisfaz $[\beta^{-1}] = [\beta]^{-1}$

Por fim, os objetivos desta dissertação foram atingidos. Por sua vez, a pesquisa não se encerra, tendo muito o que ser estudado neste campo. Uma sugestão para continuidade desta pesquisa se baseia na seguinte pergunta “Quais são as relações e implicações da teoria de Homotopia e os grupos das tranças ?”

Referências

- [1] GIL A.C. *Como Elaborar projetos de pesquisa*. Atlas, São Paulo, 4 edition, 2002.
- [2] GONÇALVES Adilson. *Introdução à Álgebra*. IMPA, Rio de Janeiro, 4 edition, 1999.
- [3] BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, 1996.
- [4] MIRANDA P. Carolina. *Os grupos de tranças do toro e da garrafa de Klein*. Doutorado em matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.
- [5] MIRANDA P. Carolina. Mini curso- grupo das tranças - ii jornada baiana de topologia algébrica (slides). <https://www.dropbox.com/s/y2yp3v3wqaop988/mini2017>. Acesso: 30/01/2022.
- [6] KINSEY Cristine. *Topology of Surfaces*. springer verlag, EUA, 1993.
- [7] ROBINSON J. S. Derek. *A Course in the Theory of Groups*. Springer, USA, 2 edition, 1996.
- [8] LIMA L. Elon. *Espaços Métricos*. IMPA, Rio de Janeiro, 5 edition, 2017.
- [9] LIMA L. Elon. *Um curso de análise vol 1*. IMPA, Rio de Janeiro, 15 edition, 2019.
- [10] LIMA L. Elon. *Um curso de análise vol 2*. IMPA, Rio de Janeiro, 12 edition, 2020.
- [11] MUNKRES James R. *Topology*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, Inc, New Jersey, 2 edition, 2000.
- [12] LIMA Juliana Roberta T. *Ordering homotopy string links over surfaces and a presentation for the homotopy generalized string links over surfaces*. Doutorado em matemática, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- [13] MURASUGI Kunio and KURUPITA I. Bohdan. *A Study of Braids*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1 edition, 1999.
- [14] JOHNSON D. L. *Presentations of Groups*. Cambridge University Press, New York, 2 edition, 1997.
- [15] MARCONI M.A and LAKATOS E.M. *Fundamentos de Metodologia Científica*. Atlas, São Paulo, 5 edition, 2003.
- [16] CHIODO Maurice. An introduction of braid theory. *Honours thesis. University of Melbourne*, 2005.

- [17] DIAS L. Michell. Existência de subgrupos livres em grupos finitamente apresentados com mais geradores do que relações. Mestrado em matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2016.
- [18] JACOBSON Nathan. *Lectures in abstract algebra - Basic Concepts*. D Van Nostrand Company Inc, USA, 1 edition, 1951.
- [19] CRUZ A. M Raquel. Grupos de tranças de superfície e espaços de recobrimento. Mestrado em matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2021.
- [20] LOURENÇO B. Regina. Classificação das superfícies compactas sem bordo. Licenciatura em matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.
- [21] LIBARDI Alice; VIEIRA João. P, MELO Thiago de. *Invariantes Topológicos*. Cultura Acadêmica, São Paulo, 1 edition, 2012.
- [22] LASS.C Vinicius. Grupos de tranças do espaço projetivo. Mestrado em matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.