UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Nayara de Novaes Rezende Villani

O número de Euler no Ensino Médio: propostas de abordagens com aplicações

São José do Rio Preto
2017

Nayara de Novaes Rezende Villani

O número de Euler no Ensino Médio: propostas de abordagens com aplicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva.

São José do Rio Preto
2017

Villani, Nayara de Novaes Rezende.
O número de Euler no Ensino Médio: propostas de abordagens com aplicações / Nayara de Novaes Rezende Villani. -- São José do Rio Preto, 2017
82 f. : il., tabs.

Orientador: Flávia Souza Machado da Silva
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio) 3. Funções (Matemática) 4. Números de Euler. 5. Matemática – Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Nayara de Novaes Rezende Villani

O número de Euler no Ensino Médio: propostas de abordagens com aplicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Ligia Laís Fêmina
UFU – Uberlândia

Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
06 de Setembro de 2017

Dedico este trabalho à minha família que sempre fez o possível para transformar os meus objetivos em realidade, acompanhar-me em momentos de grandes dificuldades e alegrias, e mesmo com a distância que nos cerca, fez-se presente a todo instante.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe Gláucia pela dedicação e empenho em cuidar de mim, socorrer, amparar e me dar todo o amor do mundo para continuar o caminho da vida. Sem ela, nada seria possível.

Aos meus irmãos Vinícius e Bianca, meus melhores amigos, companheiros. A fraternidade é a maior e mais valiosa herança que poderia ser deixada para mim. O amor que sentimos é muito mais forte do que tudo.

Agradeço minha avó Ângela Maria por ter sido a pessoa chave que transformou minha vida para que eu conseguisse seguir em frente.

Agradeço aos familiares, em especial às minhas primas Fabíola, Gleicy e Nathália pela preocupação e força dedicadas.

Ao meu namorado Adimar que acreditou em nós e que tanto admiro pelo ser humano que é. Obrigada pelo auxílio cedido no dia-a-dia, por ser meu companheiro e por me dar tanto carinho.

Aos professores do departamento de Matemática da Unesp / Ibilce/ *Campus* de São José do Rio Preto pelo apoio.

Aos colegas do PROFMAT que ingressaram comigo e fizeram parte dessa fase, em especial, Anderson, Marina, Marcos, Mayara, Jessé e Ândrea, com quem pude compartilhar momentos de descontração.

Aos meus alunos do IFMT *Campus* Sorriso, citando Mônica e Juliana como forma de representá-los. Tenho muito prazer em conviver e compartilhar um pouco de conhecimento e ao mesmo tempo aprender.

Agradeço a todos os meus colegas de trabalho que tornaram esse momento possível pelas trocas de aulas e palavras de incentivo.

Aos meus amigos Thaís, Águida, Rafael, Daiana, Juliana, Onilma, Arica, Leandro, Enzo, Rúbia, Marcelo, Gheysa e Gislaine que de alguma forma fizeram-se presentes em minha vida, deixando meus dias mais alegres e sempre se importando comigo.

Agradeço à minha orientadora Profª Drª Flávia Souza Machado da Silva pela paciência em me orientar, por respeitar os meus limites, pelo profissionalismo e dedicação. Agradeço a atenção e disposição.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido pela bolsa.

"É durante as fases de maior adversidade

que surgem as grandes oportunidades de se fazer

o bem a si mesmo e aos outros"

(Dalai Lama)

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas propostas de atividades para abordar o número de Euler no Ensino Médio, uma vez que existem muitas situações cotidianas em que a única maneira de descrevê-las convenientemente por meio de modelos matemáticos é utilizando a função exponencial com a base sendo o número de Euler. Por exemplo, o decaimento radioativo, a lei do resfriamento de Newton, o estudo de uma certa epidemia numa população e investimento de capital. Inicialmente, são apontados fatos históricos desde o surgimento do número de Euler até o momento de sua notação. Em seguida, são apresentadas uma abordagem sobre a função exponencial e propostas de atividades envolvendo as situações cotidianas mencionadas.

Palavras-chave: Número de Euler, Funções Exponenciais, Aplicações, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

In this work we present proposals of activities to approach the Euler number in High School, since there are many daily situations in which the only way to describe them conveniently by means of mathematical models is to use the exponential function with the base being the Euler number. For example, radioactive decay, Newton's law of cooling, the study of a certain epidemic in a population and capital investment. Initially, historical facts are pointed out from the appearance of the Euler number until the moment of its notation. Next, we present an approach on the exponential function and proposals of activities involving the daily situations mentioned.

Keywords: Euler Number, Exponential Functions, Applications, Mathematics Teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em cursos de graduação relacionados ao segmento da carreira da área de Ciências Exatas em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais, o uso do número de Euler "*e*" (que é um número irracional) é bastante comum em métodos de resolução de problemas. No entanto, pouco se comenta sobre este número no Ensino Médio acerca de sua aplicabilidade em diferentes situações.

A disciplina de Matemática tem por objetivo auxiliar no progresso de métodos de pensamento aumentando a capacidade na resolução de problemas que os indivíduos enfrentam ou possam vir a enfrentar. Uma das competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em Matemática, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, é a relação de fatos históricos ocorridos na Matemática que fazem parte da evolução da humanidade (BRASIL, 1999).

No primeiro capítulo do trabalho é apresentado o processo histórico de reconhecimento desse número, presente de forma implícita nos trabalhos de John Napier e no cálculo de juros compostos anterior ao século XVII. O estudo de matemáticos do século XVII sobre quadraturas, despertou o interesse sobre o cálculo da quadratura de uma hipérbole, possibilitando a visualização da relação existente entre a área da hipérbole e uma função logarítmica sem, inicialmente, uma base existente. Apenas nos trabalhos de Euler esta base foi estabelecida, a saber: o número e (número de Euler).

O segundo capítulo mostra a definição de função exponencial, bem como suas propriedades e caracterização, em razão de que as abordagens propostas no capítulo posterior são aplicações de funções exponenciais de base e.

Em aplicações de equações diferenciais ordinárias, modelagens matemáticas de assuntos diversos com referências da natureza, economia, aprendizado, entre outros assuntos, são sempre alvos de estudos e em muitas das fórmulas moldadas observam-se a presença deste incrível número.

Por isso, o terceiro capítulo aborda modelos matemáticos que resultam em funções exponenciais de base e obtidas através de equações diferenciais ordinárias. São eles: lei da desintegração radioativa, lei do resfriamento de Newton, epidemias e investimentos.

O quarto capítulo do trabalho tratará de aplicações que podem ser vistas no Ensino Médio utilizando-se de textos, discussão de opinião sobre os temas, análise de gráfico utilizando o *software* GeoGebra que facilita na compreensão e interpretação do problema sempre de forma contextualizada.

As considerações finais constam no último capítulo do trabalho e enfatiza a importância da não fragmentação de conteúdos e disciplinas na vida escolar.

Piaget (1971b, 1973a) destaca a conveniência da organização entre as disciplinas se complementarem para que sejam entendidas no mundo real. A fragmentação do conhecimento colabora para o enfraquecimento da relação entre o que é aprendido em sala de aula e o cotidiano do aluno. Dessa forma, ele não enxerga associação entre as matérias nem o motivo de se estudar os temas propostos por tudo ser isolado.

A importância dessa integração entre as múltiplas disciplinas deve-se ao fato de que é preciso preparar-se para situações do cotidiano em que, atualmente, encontram-se em constantes modificações através das tecnologias de comunicação que incorporam diferentes grupos do mundo inteiro de forma acelerada, conectando ideias, saberes e realidades distintas.

Estudantes da França e da Itália notaram a necessidade da interdisciplinaridade para a resolução de questões econômicas, sociais, políticas e educacionais na década de 1960. No Brasil, ela influenciou a elaboração da Lei de Diretrizes e Bases (LDB – Lei nº 9394/96) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s).

De acordo com os PCN’s de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias

> [...] o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social. [...]
> Uma concepção assim ambiciosa do aprendizado científico-tecnológico no Ensino Médio, diferente daquela hoje praticada na maioria de nossas escolas, não é uma utopia e pode ser posta em prática [...]. Contudo, toda a escola e sua comunidade, não só o professor e o sistema escolar, precisam se mobilizar e envolver para produzir as novas condições de trabalho [...]. (BRASIL, 1999, p. 7)

No entanto, a utilização de aplicações de temas relacionados ao cotidiano em sala de aula é pouco utilizada por diversos fatores, tais como, pouco tempo hábil dos professores para planejamento adequado dessas aulas, falta de recursos de algumas escolas e ausência de incentivos financeiros governamentais.

O presente trabalho pretende apresentar diferentes formas de abordagens de como o número irracional e está interligado no dia-a-dia e colabora com avanços sociais, econômicos, históricos e educacionais.

1 O NÚMERO DE EULER

O referencial teórico para o desenvolvimento deste primeiro capítulo é Maor (2008), o qual aponta que o decurso do número de Euler deve-se ao fato da utilização da matemática em cálculos envolvendo situações rotineiras.

Uma possibilidade para o surgimento do número e estaria associado ao cálculo de juros compostos, cujo autor e época de estudo sobre operações desse tipo são desconhecidos. Foi obtido que se inicialmente tivermos um capital inicial C_0, composto n vezes por ano, num certo período t de anos aplicado a uma taxa de juros anual r, o montante final será $C_t = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$. Se tomarmos $C_0 = 1$, $r = 1$ e $t = 1$, à medida que n aumenta C_1 tende ao valor 2,718, ou seja, há a aproximação para um limite.

O número de Euler é definido através deste limite, ou seja, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$. No entanto, o conceito de limite era desconhecido pelos matemáticos do século XVII, o que se faz pensar que o aparecimento de e está mais relacionado a experimentos.

No início do século XVII, foram desenvolvidas, por Napier, tábuas logarítmicas que facilitavam cálculos para este momento histórico já que não existiam calculadoras eletrônicas. O número de Euler aparece de maneira implícita em seus trabalhos, pois através de sua definição para logaritmos pode-se chegar à expressão $(1-\frac{1}{10^7})^{10^7}$. Mas Napier não o descobriu porque não se preocupava com o conceito de base de logaritmos.

Saint-Vincent estudou a quadratura da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ sem associar aos logaritmos. Essa relação ficou a cargo de seu discípulo, Alfonso de Sarasa.

Historicamente, o número de Euler esteve em consonância com o surgimento do cálculo integral e diferencial de uma certa forma, visto que na quadratura da hipérbole equilátera, Newton e Leibniz se defrontaram com este número, pois e é o único número positivo superior a 1 cuja área da hipérbole equilátera $y = \frac{1}{x}$ corresponde a uma unidade, para quando $x \geq 1$.

Neste capítulo serão apresentadas as possibilidades para o aparecimento deste número no desenvolvimento dos logaritmos feito por John Napier, nos cálculos de juros compostos, nas obras de Euler, na quadratura da hipérbole seguido da prova de sua irracionalidade.

1.1 Nos trabalhos de Napier

John Napier nasceu em 1550 na Escócia, estudou religião e foi dono de terras. Tinha interesse na melhoria das colheitas e da produção de gado, além de preocupações por questões militares induzido pelo medo de uma possível invasão da Espanha comandada por Felipe II, na Inglaterra. Dessa forma, Napier construiu e testou engenhosidades com a finalidade de defender suas predileções.

A ciência sofreu uma grande expansão em todos os ramos no final do século XVI e início do século XVII: a aceitação do sistema heliocêntrico de Copérnico, a publicação do novo mapa do mundo por Mercator, os fundamentos da Mecânica por Galileu, Johannes Kepler formulou as três leis do movimento planetário. Para que esses cientistas e tantos outros desenvolvessem seus trabalhos, os cálculos eram maçantes e passavam boa parte do tempo resolvendo-os. Métodos de resoluções mais práticas faziam-se necessárias e Napier se propôs a isto.

A ideia sobre como Napier chegou no resultado acerca de logaritmos não é registrada, mas ele era versátil em trigonometria e tinha como base transformar operações mais difíceis em outras mais simples, assim como as *regras prostafaréticas* (relações trigonométricas). É mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir.

Outra ideia básica para o desenvolvimento de sua invenção foi a progressão geométrica, que já era conhecida e as relações entre os termos foi formulada e publicada pelo matemático alemão Michael Stifel (1487 – 1567) em seu livro *Arithmetica integra* (1544).

O observado por Napier no trabalho de Stifel foi o seguinte:

Seja a progressão geométrica cujo primeiro termo é o elemento 1 e sua razão é q, pode-se considerar as propriedades a seguir:

i) $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$, com m e n $\in \mathbb{N}$;

ii) $q^m \div q^n = q^{m-n}$, com m e $n \in \mathbb{N}$.

Com essas regras, é possível denotar a progressão geométrica infinita em ambas as direções: $\ldots, q^{-2}, q^{-1}, q^0 = 1, q^1, q^2, \ldots$.

Note que os expoentes das potências de cada termo formam uma progressão aritmética de razão 1. Toda essa ideia foi o ponto central para o desenvolvimento dos logaritmos, mas que Stifel estendeu apenas para números inteiros. Napier desejava construir uma tabela com valores contínuos devido à sua complexidade de realizar os cálculos, pois para números inteiros, o esquema é desnecessário.

Escolheu então como base 0,9999999 ou $1 - 10^{-7}$, um número suficientemente pequeno, cujo valor está próximo de 1, em que suas potências cresçam lentamente. Sua escolha deve-se ao fato de que o público não tinha costume em utilizar frações decimais, pois há pouco haviam sido introduzidas na Europa.

Ele utilizou como primeiro termo da progressão geométrica de sua primeira tabela o elemento 10^7, com 101 elementos (Tabela 1). Napier nomeou os expoentes das potências de “número artificial”. Posteriormente, denominou esses expoentes de logaritmos, que significa “número proporcional” em latim. Por exemplo, se tivermos $\mathrm{N} = 10^7(1 - 10^{-7})^{\mathrm{L}}$, significa que L é o logaritmo de N. Assim, se $\mathrm{L} = 0$, então $\mathrm{N} = 10^7$, o que difere da notação atual (que para $\mathrm{L} = 0$ tem-se $\mathrm{N} = 1$).

N	L
$10^7 = 10.000.000$	0
$10^7(1 - 10^{-7}) = 9.999.999$	1
$10^7(1 - 10^{-7})^2 = 9.999.998$	2
$10^7(1 - 10^{-7})^3 = 9.999.997$	3
$10^7(1 - 10^{-7})^4 = 9.999.996$	4
$10^7(1 - 10^{-7})^5 = 9.999.995$	5
⋮	⋮
$10^7(1 - 10^{-7})^{97} = 9.999.903$	97
$10^7(1 - 10^{-7})^{98} = 9.999.902$	98
$10^7(1 - 10^{-7})^{99} = 9.999.901$	99
$10^7(1 - 10^{-7})^{100} = 9.999.900$	100

Tabela 1. Logaritmos de Napier (progressão geométrica de razão $\mathbf{1 - 10^{-7}}$ e primeiro termo $\mathbf{10^7}$).

Uma outra tabela foi feita utilizando como primeiro termo o número 10^7, mas agora a razão seria o último termo obtido da tabela anterior dividido pelo primeiro, o que dá 0,99999, ou seja, $1 - 10^{-5}$ (Tabela 2). Foram registrados 51 elementos. E por fim, Napier determinou uma terceira tábua com 21 elementos utilizando a proporção: $9.995.001 \div 10.000.000$ (Tabela 3).

N	L
$10^7 = 10.000.000$	0
$10^7(1 - 10^{-5}) = 9.999.900$	1
$10^7(1 - 10^{-5})^2 = 9.999.800$	2
$10^7(1 - 10^{-5})^3 = 9.999.700$	3
$10^7(1 - 10^{-5})^4 = 9.999.600$	4
$10^7(1 - 10^{-5})^5 = 9.999.500$	5
$\vdots$	$\vdots$
$10^7(1 - 10^{-5})^{47} = 9.995.301$	47
$10^7(1 - 10^{-5})^{48} = 9.995.201$	48
$10^7(1 - 10^{-5})^{49} = 9.995.101$	49
$10^7(1 - 10^{-5})^{50} = 9.995.001$	50

Tabela 2. Logaritmos de Napier (progressão geométrica de razão $1 - 10^{-5}$ e primeiro termo 10^7).

N	L
$10^7 = 10.000.000$	0
$10^7(0{,}9995001) = 9.995.001$	1
$10^7(0{,}9995001)^2 = 9.990.004$	2
$10^7(0{,}9995001)^3 = 9.985.010$	3
$10^7(0{,}9995001)^4 = 9.980.019$	4
$10^7(0{,}9995001)^5 = 9.975.030$	5
$\vdots$	$\vdots$
$10^7(0{,}9995001)^{17} = 9.915.356$	17
$10^7(0{,}9995001)^{18} = 9.910.399$	18
$10^7(0{,}9995001)^{19} = 9.905.445$	19
$10^7(0{,}9995001)^{20} = 9.900.493$	20

Tabela 3. Logaritmos de Napier (progressão geométrica de razão 0,9995001 e primeiro termo 10^7).

Essa invenção foi publicada por Napier em 1614 no tratado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* e mais tarde, em 1619, pelo seu filho no *Mirifici logarithmorum canonis constructio*.

(a) (b) (c)

Figura 1. (a) John Napier; (b) tratado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* e (c) tratado *Mirifici logarithmorum canonis constructio*.

Por causa da criação de Napier um professor de geometria de Londres, Henry Briggs, quis conhecê-lo e decidiu encontrá-lo na Escócia. No encontro, Briggs propôs algumas alterações nas tabelas tais como trocar logaritmo de 10^7 ser igual a zero por logaritmo de 1 ser igual a zero e logaritmo de 10 ser igual a 1. Ou seja, se $N = 10^L$, então L é o logaritmo de N (L é o briggsiano de N). Assim, $\mathrm{L} = \log_{10} \mathrm{N} = \log \mathrm{N}$. Inicia-se daí o conceito de base de um logaritmo.

Como Napier já estava idoso, Briggs encarregou-se de refazer as tábuas com as alterações e as publicou em 1624 no título *Arithmetica logarithmica*.

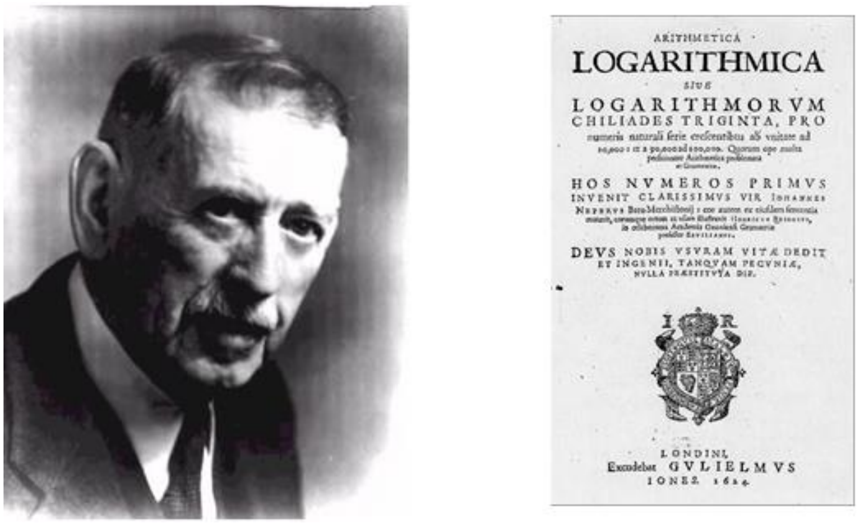

Figura 2. Henry Briggs à esquerda e a folha de rosto de seu trabalho *Arithmetica logarithmica* publicada em 1624 à direita.

Após o término das tabelas, rapidamente o seu uso foi propagado por cientistas europeus até chegar à China e Japão.

Outras ideias relativas ao assunto foram surgindo e a construção de uma régua logarítmica foi moldada primeiramente por Edmund Gunter (1581 – 1626), sacerdote inglês, subsequente professor de astronomia. William Oughtread (1574 – 1660), clero e matemático, inventou uma régua de cálculo linear e outra circular, em que as escalas logarítmicas giravam em torno de um eixo comum.

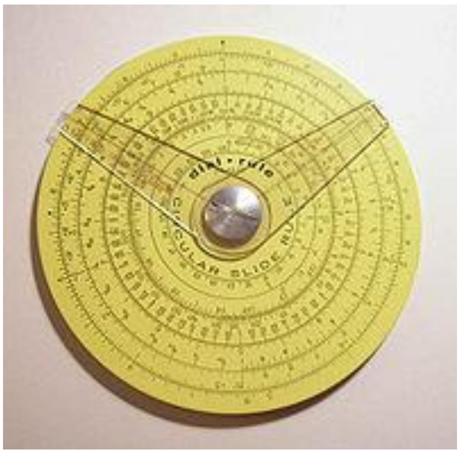

Figura 3. Régua de cálculo circular.

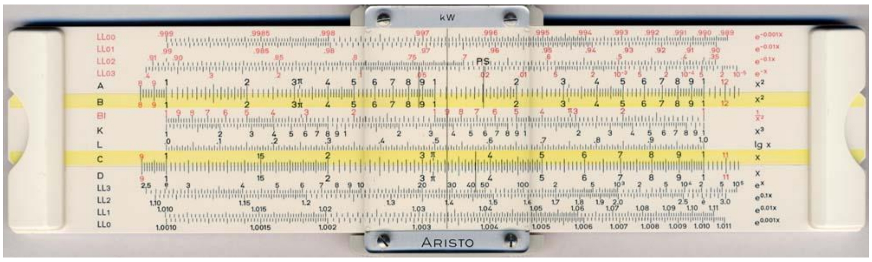

Figura 4. Régua de cálculo linear.

Com o passar do tempo, as tabelas foram sendo substituídas por calculadoras. Contudo, as funções logarítmicas são o centro de vários ramos da matemática pura ou aplicada com aplicações na química, biologia, física, arte, música e etc..

Eram comuns as demonstrações mais antigas partirem de ideias geométricas. Não obstante, para a mostra da descoberta de Napier sobre logaritmos, utilizou-se da mesma propriedade.

Para isso, sobre um segmento de reta $\overline{AB}$ toma-se um ponto C de tal forma que C move-se sobre o segmento com velocidade proporcional à medida do segmento $\overline{CB}$. Agora, tome um raio infinito de extremidade no ponto D paralelo a $\overline{AB}$. Seja E diferente de D um ponto que se move neste raio. E movimenta-se com velocidade constante igual à velocidade inicial de C. Se $CB = x$ e $DE = y$, então $y = \log Nep\ x$ (logaritmo Neperiano de x).

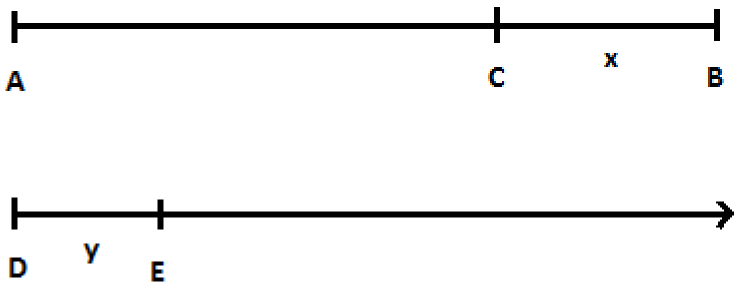

Figura 5. Representação de C movendo-se sobre $\overline{AB}$ com velocidade proporcional a CB e do raio infinito de extremidade D paralelo a $\overline{AB}$ com E movendo-se sobre este raio com velocidade constante igual à velocidade inicial de C.

Com as ferramentas de equações diferenciais, tomando $AB = 10^7$ e a velocidade inicial de C igual a 10^7, chega-se que $y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right)$.

De fato, é possível definir os movimentos de C e E, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 10^7 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Como $\frac{dy}{dt} = 10^7$, então $dt = \frac{dy}{10^7}$. Substituindo dt em $\frac{dx}{dt} = -x$,

$$\frac{dx}{\frac{dy}{10^7}} = -x \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-x}{10^7} \tag{1}$$

Em (1) temos uma Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem com variáveis separáveis. No APÊNDICE A será mostrado o método de solução para tal tipo de equação.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{10^7} \Longrightarrow \frac{1}{x}dx = -\frac{1}{10^7}dy \Longrightarrow y = -10^7 ln\left(\frac{x}{10^7}\right) = 10^7 ln\left(\frac{10^7}{x}\right) = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right).$$

Se retirarmos o fator 10^7, podemos perceber que os logaritmos de Napier possuem base $\frac{1}{e}$. No entanto, o estudioso não tinha ideia do conceito de base ainda.

Um outro lado da história aponta Joost Bürgi (1552 – 1632) como criador dos logaritmos em 1588, mas publicados anonimamente apenas no ano de 1620, em Praga. O raciocínio de Bürgi foi o mesmo de Napier, porém a razão comum utilizada foi $1+10^{-4}$. Neste caso, os logaritmos aumentam à medida que os números aumentam.

Definição de Bürgi. Seja N um inteiro positivo tal que $N = 10^8(1+10^{-4})^L$, então 10L é o chamado "número vermelho", logaritmo, e N é o "número preto", antilogaritmo.

1.2 No cálculo de juros compostos

Não se sabe certamente sobre a origem do número de Euler "e", mas uma possibilidade é de que tenha surgido através de cálculos financeiros sobre juros compostos.

As trocas comerciais tiveram início em civilizações primitivas quando a quantidade do produto que geravam era excedente e com a comunicação entre os grupos humanos as mercadorias eram permutadas, mas sem equivalência nos valores, caracterizada como escambo, com a finalidade de apenas suprir a necessidade dos grupos.

Ulteriormente, houve desenvolvimento do artesanato e da cultura e expansão na comunicação entre os povos, o que dificultou o escambo e promoveu a necessidade de uma forma mais estável para se avaliar as trocas de mercadorias com um sistema de unidades denominado de "moeda-mercadoria". Foram utilizados como padrões, boi, sal, colares de pérolas, concha, algodão, cacau, cerâmica, metais, etc., tudo dependendo da região.

O desenvolvimento do comércio intensificou-se e Fenícia, Cartago e Grécia deixam de ser o centro passando para Roma. Na Idade Média, Veneza, Gênova, Itália e Florença iniciam negociações com o Oriente. E a partir do século XV, Holanda, Espanha, Portugal e, posteriormente, Inglaterra (século XVII) apropriaram-se do poder comercial. Doravante, o comércio do dinheiro, nesta época ouro e prata, começa a ser realizado. O principal problema enfrentado neste tipo de transação era mensurar qual tipo de moeda valia mais quando os negócios eram feitos entre países diferentes. Foi estipulado então o "padrão-ouro", baseado na quantidade de ouro em poder de cada país. Dessa forma, foram surgindo pessoas interessadas em acumular moedas para troca, chamados de cambistas, que por vez realizaram empréstimos do que tinham e numa data estipulada, o valor emprestado deveria ser devolvido com a cobrança de uma soma adicional, ou seja, o juro.

Com o desenvolvimento dessa prática e do aparecimento dos bancos houve aprimoramento e avanço dos estudos da Matemática Comercial e Financeira e da Economia e os cálculos sobre juros, em especial juros compostos, faz parte desse contexto (GONÇALVES, 2005).

Com a Matemática Financeira mais popularizada, é provável que o número de Euler tenha aparecido pela primeira vez através da fórmula voltada ao cálculo de juros compostos, não se sabe por quem nem o período correto.

Comunidades bancárias utilizam a fórmula de capitalização

$$C_t = C_0(1+r)^t$$

em que C_t é o valor da soma do dinheiro, C_0 é o capital inicial, r é a taxa anual de juros e t é o tempo de investimento dado em anos. No entanto, sabemos que é possível trabalhar com taxas de juros semestrais, trimestrais, bimestrais, entre outras, além das anuais. Dessa forma, chamaremos de n o número de composições anuais. Logo, teremos $\frac{r}{n}$ a taxa de juros e nt períodos convertidos. Assim,

$$C_t = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{2}$$

Considerando um caso especial da equação (2) em que o capital inicial será de R$ 1,00, a uma taxa anual de 1% durante um ano composto n vezes, obtemos

$$C_1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \tag{3}$$

Na Tabela 4 podemos observar o comportamento da fórmula (3) à medida que n aumenta. Percebe-se que a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ converge para o valor 2,71828, em que os outros algarismos tornam-se cada vez menos significativos à medida que *n* aumenta. A dúvida era se esta sequência realmente convergia para um valor que ficou conhecido posteriormente como Número de Euler. Para a demonstração da convergência dessa sequência utiliza-se o Binômio de Newton e séries de potências e pode ser encontrada no APÊNDICE B.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	**Valor aproximado**
1	$1+1$	2
2	$1+1+\frac{1}{4}$	2,25
3	$1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{27}$	2,3703
4	$1+1+\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{256}$	2,4414
5	$1+1+\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{3125}$	2,4912
10	$\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^k$	2,5937
100	$\sum_{k=0}^{n}\binom{100}{k}\left(\frac{1}{100}\right)^k$	2,7048
1.000	$\sum_{k=0}^{n}\binom{1.000}{k}\left(\frac{1}{1.000}\right)^k$	2,7169
10.000	$\sum_{k=0}^{n}\binom{10.000}{k}\left(\frac{1}{10.000}\right)^k$	2,7181
100.000	$\sum_{k=0}^{n}\binom{100.000}{k}\left(\frac{1}{100.000}\right)^k$	2,7182

Tabela 4. Valor aproximado da sequência $(1+1/n)^n$ à medida que n aumenta.

1.3 Nos Trabalhos de Euler

Este número de valor constante 2,718281... com a representação dada por *e* teve sua primeira aparição em 1736 na publicação *Euler's Mechanica* realizada por Leonhard Euler.

Anterior a isso, Euler já menciona o número *e* em alguns trabalhos, mas eles não haviam sido publicados até então.

Em seu trabalho *Introductio*, Euler trata de frações contínuas provando que todo número racional pode ser escrito como fração contínua finita e o irracional como fração contínua infinita. Dessa forma, *e* pode ser reescrito como

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cdots}}}}}$$

1.4 Na quadratura da hipérbole

Determinar a área de formato plano fechado é denominado de quadratura. No início do século XVII, matemáticos dedicavam boa parte de seu tempo a encontrar quadraturas. Vamos nos limitar aqui à história da quadratura da hipérbole.

Sejam duas retas concorrentes num certo ponto e não perpendiculares, fixando uma das retas e girando a outra 360º em torno da reta fixa mantendo constante o ângulo formado entre elas a superfície gerada é chamada de seção cônica de duas folhas. Se tivermos um plano oblíquo à reta fixa que corta as duas folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma hipérbole (Figura 5).

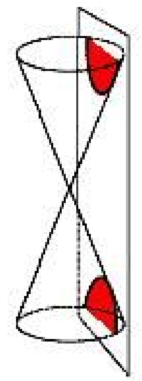

Figura 5. Hipérbole.

As hipérboles possuem um par de retas associadas chamadas de assíntotas.

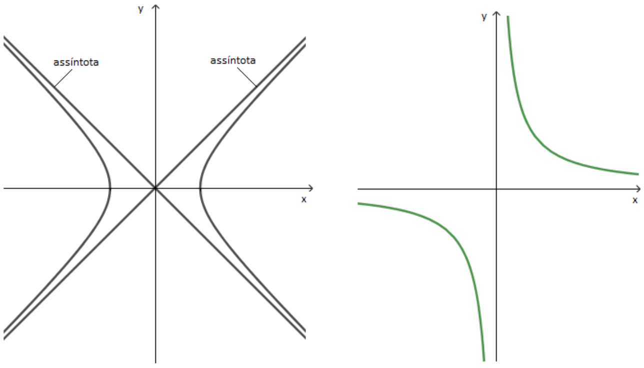

Figura 6. À esquerda hipérbole cujas assíntotas são as retas de equações: y = x e y = - x. À direita, a hipérbole de equação xy = 1 cujas assíntotas são o eixo x e o eixo y.

Anterior ao século XVII as tentativas para encontrar a quadratura da hipérbole foram isentas de sucesso, até que Cavalieri desenvolveu uma técnica baseada na decomposição de uma figura em tiras indivisíveis. Mas como calcular essa área se a hipérbole é uma curva infinita?

Pierre de Fermat (1601 – 1665) tinha interesse no estudo de quadraturas de equação geral $y = x^n$, com $n \in \mathbb{Z}_+$. Ele utilizou-se do método de aproximação da área de curvas pela série de retângulos cujas bases formam uma progressão geométrica decrescente.

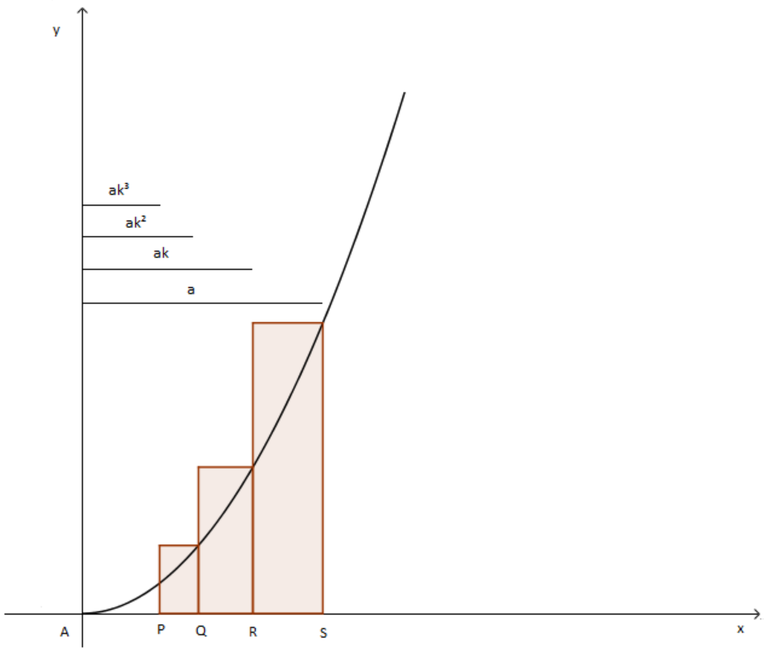

Figura 7. Método de aproximação da área da curva $y = x^n$ pela série de retângulos cujas bases formam uma progressão geométrica.

Ele determinou a área de cada retângulo e obtendo como área total a soma de todas as áreas desses retângulos. Considerando o intervalo de $x = 0$ a $x = a$ numa parábola generalizada, divide-se esse intervalo em infinitos subintervalos determinados pelos pontos ..., *P, Q, R, S*, em que $AS = a$. Para que se forme uma progressão geométrica (P.G.) decrescente, é empregado o sentido inverso com $AS = a, AR = ak, AQ = ak^2, AP = ak^3$, e assim sucessivamente, tal que $k < 1$. Dessa forma, as alturas correspondentes da curva nos pontos citados anteriormente são: $a^n, (ak)^n, (ak^2)^n, (ak^3)^n, \ldots$ Logo, a área de cada retângulo forma a progressão $a^n(a - ak) = a^{n+1}(1 - k), (ak)^n(ak - ak^2) = (ak)^{n+1}(1 - k), (ak^2)^n(ak^2 - ak^3) = (ak^2)^{n+1}(1 - k), \ldots$ Esta P.G. cujo primeiro termo é $a^{n+1}(1 - k)$, possui razão k^{n+1}. A soma de uma P.G. infinita é dada por $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, com a_1 primeiro termo da progressão, e q a sua razão, em que $|q| < 1$. Portanto, o somatório dessa P.G., ou seja, a área resultante dessa curva é:

$$A = \frac{a^{n+1}(1-k)}{1-k^{n+1}}.$$

Fermat deduziu que essa proporção k deve ser um valor próximo de 1 para que o encaixe dos retângulos seja adjunto à curva. Calculando o limite de A para quando k tende a 1, temos:

$$\lim_{k\to 1} A = \lim_{k\to 1} \frac{a^{n+1}(1-k)}{1-k^{n+1}} = \lim_{k\to 1} \frac{a^{n+1}(1-k)}{(1-k)(1+k+k^2+\cdots+k^n)}$$
$$= \lim_{k\to 1} \frac{a^{n+1}}{1+k+k^2+\cdots+k^n} = \frac{a^n}{n+1}.$$

Fermat não conseguiu mostrar então que para $n = -1$, $A = \frac{a^n}{n+1}$, ou seja, não alcançou a demonstração da área da hipérbole.

Grégoire de Saint-Vincent (1584 – 1667), jesuíta belga, ocupou-se de vários problemas sobre quadraturas. Ao que tudo indica, ele foi o primeiro a notar que para $n = -1$, os retângulos utilizados na aproximação da área sob a hipérbole têm áreas iguais. Se tomarmos um intervalo [*a*,*b*] da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e um outro intervalo [*c,d*] dessa mesma curva, tal que *c* = *am* e *d* = *bm*, com *m* > *0*, temos que *A(a,b) = A(c,d)*, sendo A(a,b) e A(c,d) as áreas da hipérbole nos intervalos [a,b] e [c,d], respectivamente.

Utilizando somas de Riemann para a demonstração, consideremos que existam n subintervalos do intervalo [a,b]. Cada subintervalo terá então comprimento $\frac{b-a}{n}$. Sendo $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$, uma partição de [a,b] de subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, cada retângulo possui base $\frac{b-a}{n}$ e alturas $\frac{1}{x_k}$ e $\frac{1}{x_{k-1}}$.

Assim, a soma inferior das áreas dos retângulos é dada por $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) \frac{1}{x_k} = A_{inferior}$ e a superior $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) \frac{1}{x_{k-1}} = A_{superior}$. Logo, $A_{inferior} \leq A(a,b) \leq A_{superior}$.

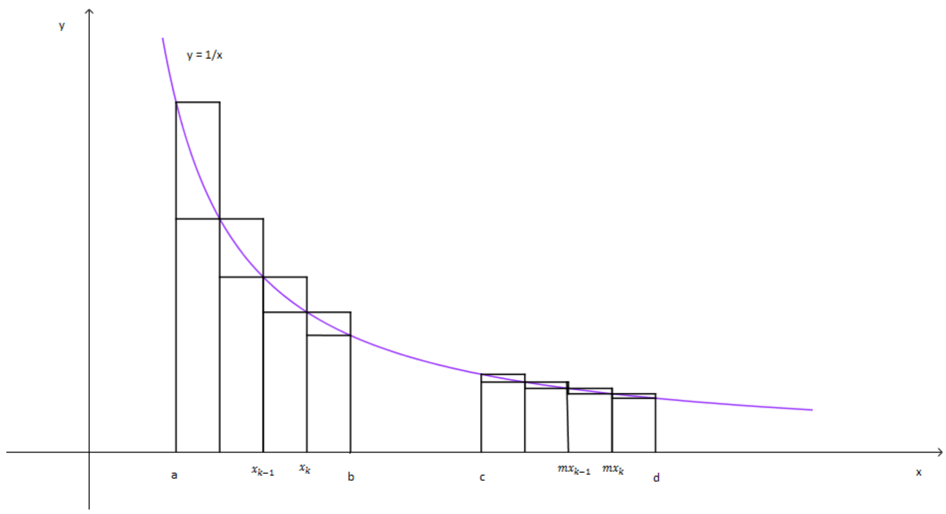

Figura 8. Partições dos intervalos [a,b] e [c,d] sobre a hipérbole em comprimentos iguais.

Seja a partição $c = am = mx_0 < mx_1 < \cdots < mx_{k-1} < mx_k < \cdots < mx_n = bm = d$ do intervalo [c,d]. Neste caso, cada subintervalo terá comprimento $\frac{d-c}{n} = \frac{mb-ma}{n} = \frac{m(b-a)}{n} = m\left(\frac{b-a}{n}\right)$. As alturas de cada retângulo serão então $\frac{1}{mx_k}$ e $\frac{1}{mx_{k-1}}$. Dessa forma, as somas inferior e superior das áreas dos retângulos para esse intervalo são, respectivamente:

$\sum_{k=1}^{n} m\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{1}{mx_k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{1}{x_k} = A_{inferior}$ e $\sum_{k=1}^{n} m\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{1}{mx_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{1}{x_{k-1}} = A_{superior}$.

Concluímos daí que $A_{inferior} \leq A(c,d) \leq A_{superior}$.

Fazendo, $A(a,b) - A(c,d)$ temos:

$$A_{inferior} - A_{inferior} \leq A(a,b) - A(c,d) \leq A_{superior} - A_{superior}$$

$$\Rightarrow 0 \leq A(a,b) - A(c,d) \leq 0$$

Portanto,

$$A(a,b) = A(c,d). \tag{4}$$

Um dos alunos de Saint-Vincent, Alfonso Anton de Sarasa (1618 – 1667), percebeu que essa descoberta determinava a propriedade de adição entre logaritmos e escreveu a relação entre a área *A(t)* sob a hipérbole à partir de um ponto fixo *x > 0* até um ponto variável *x = t*, sendo *A(t) = log t* sem uma base definida. Este foi um dos primeiros registros em que se fez o uso de função logarítmica, observando a aditividade característica de logaritmo.

Definindo $\log x = \begin{cases} A(1,x), & para \quad x \geq 1 \\ -A(x,1), & para \quad 0 < x < 1 \end{cases}$.

Daí, $\log(xy) = A(1,xy)$ para *x*, *y* >1. Assim,

$\log(xy) = A(1,xy) = A(1,x) + A(x,xy) = A(1,x) + A(1.x, x.y)$.

Mas, por (4), $A(1.x, x.y) = A(1,y)$.

Logo, $\log(xy) = A(1,x) + A(1,y) = \log x + \log y$.

Em suma, Alfonso de Sarasa percebeu que e é o único número positivo superior a 1 cuja área da hipérbole equilátera $y = \frac{1}{x}$ corresponde a uma unidade, para quando $x \geq 1$.

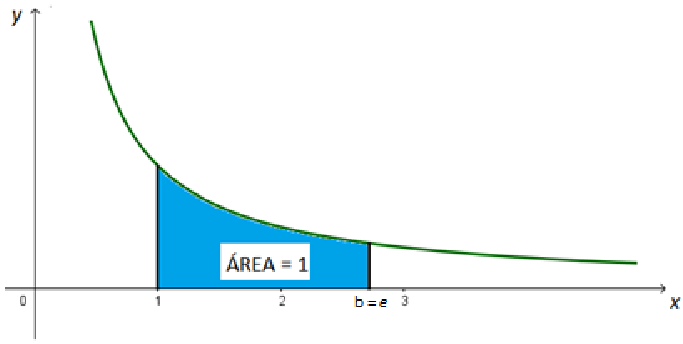

Figura 9. Área que corresponde a uma unidade delimitada pelas retas verticais x = 1, x = b = e, pelo eixo x e pela hipérbole equilátera.

Essa função $\log\ x$ definida por Sarasa comporta-se como $\log_e x = \ln x$.

Apenas nos trabalhos de Euler, ou seja, século XVIII, essa base foi estabelecida dando completude ao assunto.

Seja a função $\log x$, vamos mostrar que a função $\log\ x$ tem comportamento igual a $\log_e x = \ln x$.

Para isso, vamos aplicar a definição de derivada.

$$\begin{aligned} \log' x \quad &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) - \log 1\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Multiplicando e dividindo (5) por *x*:

$$\frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{x}{h}\left[\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right]. \tag{6}$$

Tome $\frac{h}{x} = t$. Então, $\frac{x}{h} = \frac{1}{t}$. Substituindo as relações em (6),

$$\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\log(1+t)] = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\log(1+t)-\log 1] = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{[\log(1+t)-\log 1]}{t} = \frac{1}{x}\log'(1).$$

Basta provar que $\log'(1) = 1$.

Por definição de derivada, $\log' 1 = \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{A(1,1+h)}{h}$. Mas, as áreas do retângulo maior e do retângulo menor para *A(1,1+h)* são, respectivamente, *h* e $\frac{h}{1+h}$. Logo,

$$\frac{h}{1+h} \le A(1,1+h) \le h.$$

Dividindo todos os membros por *h,*

$$\frac{1}{1+h} \le \frac{A(1,1+h)}{h} \le 1.$$

Assim, $\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+h} \le \lim_{h\to 0}\frac{A(1,1+h)}{h} \le \lim_{h\to 0} 1$.

Portanto, $\log' 1 = \lim_{h\to 0}\frac{A(1,1+h)}{h} = 1$.

Conclui-se assim que $\log' x = \frac{1}{x}$, ou seja, para que essa sentença seja verdadeira a base desse logaritmo é o número *e*.

1.5 Irracionalidade de *e*

Nesta seção trataremos da demonstração da irracionalidade do número de Euler. Os argumentos utilizados na demonstração são simples e acessíveis a alunos do ensino básico, sendo eles: desigualdades numéricas envolvendo frações, fatorial; sequências; progressão geométrica e manipulações algébricas básicas.

Teorema 1.5.1. O número de Euler é um número irracional.

***Demonstração*:** Denotemos o número de Euler por e. Vamos supor, por absurdo, que e é um número racional. Então, existem $m, k \in \mathbb{Z}$ tais que $e = \frac{m}{k}$ com k diferente de zero.

Por outro lado, o número e pode ser escrito do seguinte modo:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

A diferença $e - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ e também é um número racional (pois é a diferença entre dois números racionais).

Para cada $n \geq k+1$, temos

$$(k + 1).(k + 2).(k + 3)\ldots n \geq (k+1)(k+1)(k+1)\ldots(k+1) = (k+1)^{n-k}$$

e, consequentemente, $\frac{1}{(k+1)\ldots n} \leq \frac{1}{(k+1)^{n-k}}$.

Logo,

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{k!}\frac{1}{(k+1)\ldots n} \leq \frac{1}{k!}\frac{1}{(k+1)^{n-k}}. \quad (7)$$

De (7), denotando $n - k$ por t, obtemos

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{k!}\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^t} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\frac{1}{k+1}}{1 - \frac{1}{k+1}}\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k}{k+1}}\right) = \frac{1}{k!}.\frac{1}{k}. \quad (8)$$

De (8), segue que

$$0 < e - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{k!}.\frac{1}{k}$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $k!$, obtemos

$$0 < k!\left(e - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}\right) \leq \frac{1}{k} < 1.$$

Para cada $0 \leq n \leq k$, $k!\frac{1}{n!} = \frac{k!}{n!} = \frac{k.(k-1).\cdots.(k-(k-n-1)).n!}{n!} = k.(k-1).\cdots.(k-(k-n-1))$ é um número inteiro. Assim, $k!\left(e - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}\right)$ também é um número inteiro. Mas isso é um absurdo, pois entre 0 e 1 não existe nenhum número inteiro.

Portanto, *e* é um número irracional.

2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para o estudo de função exponencial e sua caracterização, potências com expoente natural, inteiro, racional, irracional e real e suas propriedades são de extrema importância. Primeiramente, será apresentada neste capítulo uma revisão de potências e, em seguida, a definição e caracterização das funções exponenciais. Destacamos como referências Iezzi (1993), Lima (2012) e Dante (2010).

2.1 Potências com expoente natural

Definição 2.1.1: Dado um número real *a* e um número natural *n*, chamamos potência de base *a* e expoente *n* o número real, denotado por a^n, e definido do seguinte modo:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1}.a, \ \ para\ todo\ n \geq 1 \end{cases}$$

Da definição segue que

$$\begin{aligned} &a^0 = 1 \\ &a^1 = a^{1-1}.a = a^0.a = 1.a = a \\ &a^2 = a^{2-1}.a = a^1.a = a.a \\ &a^3 = a^{3-1}.a = a^2.a = (a.a).a = a.a.a \end{aligned}$$

Logo, para $n \geq 2, a^n$ é igual ao produto de *n* fatores iguais a *a*:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.\cdots a}_{n\ fatores}$$

Exemplos 2.1.1:

(1) $5^0 = 1$

(2) $(-7)^0 = 1$

(3) $3^1 = 3$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

(5) $2^4 = 2.2.2.2 = 16$

(6) $(-6)^3 = (-6)(-6)(-6) = 216$

(7) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}$

(8) $0^0 = 1$

(9) $0^1 = 1$

Observação 2.1.1: Segue da definição que toda potência cuja base é um número real *positivo* e o expoente é um número natural, também é um número real positivo.

Proposição 2.1.1: Sejam a e b números reais e m e n números naturais, então as seguintes propriedades são válidas:

$\boldsymbol{P_1}$. $a^m . a^n = a^{m+n}$

Demonstração: Por indução sobre n. Assumindo m um valor fixo, para $n = 0$, temos

$$a^{m+0} = a^m = a^m . 1 = a^m . a^0.$$

Logo, a propriedade é verdadeira para $n = 0$.

Suponhamos $a^m . a^k = a^{m+k}$, para todo k.

Devemos mostrar que a propriedade também é válida para $n = k + 1$. De fato,

$$a^m . a^{k+1} = a^m . \left(a^{(k+1)-1}\right) = a^m (a^k . a) = (a^m . a^k) . a \overset{H.I.}{\cong} a^{m+k} . a \overset{\text{def}}{=} a^{m+k+1}.$$

Portanto, $a^m . a^n = a^{m+n}$.

$\boldsymbol{P_2}$. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0 \quad e \quad m \geq n.$

Demonstração: Por indução sobre *n*. Assumindo m um valor fixo, para n = 0,

$$a^{m-0} = a^m = \frac{a^m}{1} = \frac{a^m}{a^0}.$$

Por hipótese de indução, suponhamos que $\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$, para todo k.

Para n = k + 1, temos

$$\frac{a^m}{a^{k+1}} = \frac{a^m}{a^{(k+1)-1}.a} = \frac{a^m}{a^k.a} = \frac{a^m}{a^k} \cdot \frac{1}{a} \overset{H.I.}{\cong} a^{m-k} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a^{m-k}}{a} \overset{\text{def}}{=} \frac{a^{m-k-1} \cdot a}{a} = a^{m-k-1} = a^{m-(k+1)}.$$

Portanto, $a^m . a^n = a^{m+n}$.

$\boldsymbol{P_3}$. $(a.b)^n = a^n . b^n$

Demonstração: Por indução sobre *n*. Para n = 0, $(a.b)^0 = 1 = 1.1 = a^0 . b^0$

Suponhamos $(a.b)^k = a^k . b^k$, para todo k.

Para n = k + 1:

$$(a.b)^{k+1} \overset{\text{def}}{=} (a.b)^{k+1-1} \cdot (a.b) \overset{H.I.}{=} a^k \cdot b^k \cdot (a \cdot b) = (a^k.a)(b^k.b) = a^{k+1} \cdot b^{k+1}.$$

Portanto, $(a.b)^n = a^n.b^n$.

$\boldsymbol{P_4}$. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \ \ b \neq 0$.

Demonstração: Por indução sobre *n*. Para $n = 0$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}.$$

Por hipótese de indução, $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$, para todo k.

Para n = k + 1,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \frac{a}{b} \overset{H.I.}{=} \frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^k \cdot a}{b^k \cdot b} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}.$$

Portanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \ \ b \neq 0$.

$\boldsymbol{P_5}$. $(a^m)^n = a^{m.n}$.

***Demonstração*:** Por indução sobre n. Para $n = 0$ e m um valor fixo,

$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m.0}$.

Suponhamos que $(a^m)^k = a^{m.k}$, para todo k.

Para $n = k + 1$,

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot a^m \overset{H.I.}{=} a^{m \cdot k} \cdot a^m = a^{m \cdot k + m} = a^{m(k+1)}.$$

Logo, $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Observação 2.1.2: Se a é um número real com $a > 1$, então $a^n > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Potências com expoente inteiro

Sejam $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{Z}$. Potência de base *a* e expoente *n* é o número real a^n definido por:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^n = a^{n-1}.a, \quad se\ n > 1 \\ a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}, \quad se\ n < 0 \end{cases}$$

O significado dado acima para a potência a^n, quando n é um número inteiro, é feito de modo que seja mantida a relação: $a^m.a^n = a^{m+n}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. O mesmo ocorre quando se definem potências cujos expoentes são números racionais ou irracionais.

Exemplos 2.2.1:

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$

(2) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$

(3) $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}.$

(4) $(-\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Proposição 2.2.1: Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, então as seguintes propriedades são válidas:

$\boldsymbol{P_1}.$ $a^m.a^n = a^{m+n}.$

$\boldsymbol{P_2}.$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$

$\boldsymbol{P_3}.$ $(a.b)^n = a^n.b^n.$

$\boldsymbol{P_4}.$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$

$\boldsymbol{P_5}.$ $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Demonstração: Para $m, n \geq 0$, segue da proposição 2.1.1. Sendo assim, podemos nos limitar às demonstrações no caso em que *n < 0* e *m < 0* e, daí, *– n e – m* são números inteiros positivos. Temos

$P_1.$ $a^m.a^n = \frac{1}{a^{-m}}.\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m+(-n)}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$

$P_2.$ $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^{-m}}}{\frac{1}{a^{-n}}} = \frac{1}{a^{-m}}.\frac{a^{-n}}{1} = \frac{a^{-n}}{a^{-m}} = a^{-n-(-m)} = a^{m-n}.$

P_3. $(a.b)^n = \frac{1}{(a.b)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}.b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}}.\frac{1}{b^{-n}} = a^n.b^n$.

P_4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}} = \frac{1}{\frac{a^{-n}}{b^{-n}}} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \frac{\frac{1}{b^n}}{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{b^n}.\frac{a^n}{1} = \frac{a^n}{b^n}$.

P_5. $(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{-m.(-n)}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m.n}}} = a^{m.n}$.

Proposição 2.2.2: Seja a um número real com $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então:

$$a^n > 1 \text{ se, e somente se, } n > 0.$$

***Demonstração*:** Por hipótese, $n > 0$. Provemos, por indução sobre n, que $a^n > 1$.

Para $n = 1$, $a^1 = a > 1$.

Suponha que $a^k > 1$ para todo $k > 0$. Então $a^{k+1} = a^k.a > 1.a = a > 1$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, $a^n > 1$, para todo $n > 0$.

Reciprocamente, $a^n > 1$ por hipótese. Suponha, por absurdo, que $n \leq 0$.

Se $n = 0$, $a^0 = 1$ (por definição). Mas isso contradiz a hipótese.

Agora, se $n < 0$, então $-n > 0$ e $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. Então, pelo que foi provado acima, $a^{-n} > 1$. Logo, $a^n = \frac{1}{a^{-n}} < 1$, o que contradiz a hipótese.

Portanto, $n > 0$.

2.3 Potências com expoente racional

Definição 2.3.1: Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, denota-se por $\sqrt[n]{a}$ o número real positivo b tal que $b^n = a$.

Exemplos 2.3.1:

(1) $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$.

(2) $\sqrt[6]{0} = 0$, pois $0^6 = 0$.

(3) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$, $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$. Potência de base a e expoente $r = \frac{m}{n}$ é definida por

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

Proposição 2.3.1: Sejam a, b números reais positivos, m, p números inteiros e n, q números inteiros positivos, então são válidas as seguintes propriedades de potências com expoente racional:

$\boldsymbol{P_1}$. $a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

$\boldsymbol{P_2}$. $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

$\boldsymbol{P_3}$. $(a.b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}}$.

$\boldsymbol{P_4}$. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

$\boldsymbol{P_5}$. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$.

Demonstração:

P_1. $a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}.\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n.q]{a^{m.q}}.\sqrt[n.q]{a^{n.p}} = \sqrt[n.q]{a^{m.q}.a^{n.p}} = \sqrt[n.q]{a^{m.q+n.p}} = a^{\frac{m.q+n.p}{n.q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

P_2. $\dfrac{\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}}{\boldsymbol{a^{\frac{p}{q}}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \dfrac{\sqrt[n.q]{a^{m.q}}}{\sqrt[n.q]{a^{n.p}}} = \sqrt[n.q]{\dfrac{a^{m.q}}{a^{n.p}}} = \sqrt[n.q]{a^{m.q-n.p}} = a^{\frac{m.q-n.p}{n.q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

P_3. $(a.b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a.b)^m} = \sqrt[n]{a^m.b^m} = \sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}}$.

P_4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\dfrac{a^m}{b^m}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

P_5. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{m.p}}} = \sqrt[q]{a^{\frac{m.p}{n}}} = a^{\frac{\frac{m.p}{n}}{q}} = a^{\frac{m.p}{n}.\frac{1}{q}} = a^{\frac{m}{n}.\frac{p}{q}}$.

Proposição 2.3.2: Seja a um número real com $a > 1$ e $n \in \mathbb{Q}$. Então:

$a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$.

Demonstração: Por hipótese, suponha $n > 0$. Então existem $b, c \in \mathbb{N}^*$ tais que $n = \frac{b}{c}$.

Temos $a = \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^c > 1$ e $c > 0$. Assim, pela proposição 2.2.2, $a^{\frac{1}{c}} > 1$.

Como $a^{\frac{1}{c}} > 1$ e $b > 0$, novamente pela observação 2.1.2, $\left(a^{\frac{1}{c}}\right)^b > 1$.

Portanto, $a^n = a^{\frac{b}{c}} = \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^b > 1$.

Reciprocamente, suponha $a^n > 1$.

Como $n \in \mathbb{Q}$, existem $b \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{N}^*$ tais que $n = \frac{b}{c}$. Então $1 < a^n = a^{\frac{b}{c}} = \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^b$.

Temos, conforme foi provado acima, $a^{\frac{1}{c}} > 1$. Como $a^{\frac{1}{c}} > 1$ e $\left(a^{\frac{1}{c}}\right)^b > 1$, segue pela proposição 2.2.2, que $b > 0$.

Logo, conclui-se que $n > 0$, pois $b > 0$ e $c > 0$.

Proposição 2.3.3: Se a é um número real com $a > 1$ e m, n são números racionais, então

$$a^m > a^n \Leftrightarrow m > n.$$

Demonstração: Temos

$$a^m > a^n \Leftrightarrow a^m.a^{-n} > a^n.a^{-n} \Leftrightarrow a^{m-n} > 1 \Leftrightarrow m - n > 0 \Leftrightarrow m > n.$$

Lema 2.3.1: Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração: Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, ou seja, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoentes natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \qquad \text{e} \qquad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \qquad \text{e} \qquad 0 < a^M \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha.$$

Logo,

$$\frac{m}{n} \leq M \Longrightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha \;\; \Leftrightarrow \;\; 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha \; .$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1, \quad a^{1/n}, \quad a^{2/n}, \qquad \cdots, \qquad a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo$[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo$[\alpha, \beta]$.

2.4 Potências com expoente irracional

Potências com expoente irracional são definidas através de aproximações racionais do expoente irracional. Por exemplo, para definir $2^{\sqrt{2}}$, utiliza-se as potências de base 2 cujos expoentes são os números racionais próximos de $\sqrt{2}$ por falta e excesso. Por falta são: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 e as potências de base 2 correspondentes são 2^1; $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; $2^{1,4142}$. Os números por excesso são: 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 e as potências de base 2 correspondentes são 2^2; $2^{1,5}$; $2^{1,42}$; $2^{1,415}$; $2^{1,414}$. À medida que os valores listados se aproximam de $\sqrt{2}$, a potência de base 2 elevada a esses números racionais aproxima-se de $2^{\sqrt{2}}$.

Sejam a um número real com $a > 0$ e λ um número irracional.

Se $a > 1$, definimos a^λ como o número real que tem a seguinte propriedade:

$$m < \lambda < n \text{ com } m, n \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^m < a^\lambda < a^n,$$

ou seja, a^λ é o número real cujas aproximações por falta são as potências a^m, com $m < \lambda$, $m \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são as potências a^n, com $n > \lambda$, $n \in \mathbb{Q}$. Não podem existir dois números reais diferentes, digamos A e B, com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos

$$m < \lambda < n \text{ com } m, n \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^m < A < B < a^n,$$

e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o lema 2.3.1.

Se $0 < a < 1$, tudo acontece de forma análoga.

Portanto, quando λ é um número irracional, a potência a^λ é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^m, com m racional menor do que λ e cujas aproximações por excesso são as potências a^n, com n racional maior do que λ.

Observação 2.4.1: Se $a = 1$ então $1^\lambda = 1, \forall\, \lambda$ irracional.

Observação 2.4.2: Se $a < 0$ e λ é irracional e positivo então a^λ não tem significado.

Observação 2.4.3: Se λ é irracional e negativo então 0^λ não tem significado.

Observação 2.4.4: Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$ e α, β irracionais, então as seguintes propriedades são válidas:

$\boldsymbol{P_1}$. $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

$\boldsymbol{P_2}$. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$.

$\boldsymbol{P_3}$. $(a.b)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha$.

$\boldsymbol{P_4}$. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

$\boldsymbol{P_5}$. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta}$.

Proposição 2.4.1: Seja a um número real com $a > 1$ e λ um número irracional. Então:

$$\lambda > 0 \text{ se, e somente se, } a^\lambda > 1.$$

Demonstração: Por hipótese, $\lambda > 0$. Como λ é irracional, existem $m \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{Q}$ de tal modo que $0 < m < \lambda < n$.

Como $n > m > 0$ segue, pela proposição 2.3.3, que $a^n > a^m > a^0 = 1$.

Temos $a^\lambda > a^m$, pela definição de a^λ.

Logo, $a^\lambda > 1$.

Reciprocamente, por hipótese, $a^\lambda > 1$. Suponhamos que $\lambda < 0$. Então $-\lambda > 0$. Assim, pelo que foi provado acima, $a^{-\lambda} > 1$. Como $a^\lambda > 0$, segue que $a^{-\lambda}.a^\lambda > 1 . a^\lambda$, ou seja, $1 > a^\lambda$. Mas isso contradiz a hipótese.

Portanto, $\lambda > 0$.

2.5 Potências com expoente real

O conjunto dos números reais é a união entre os conjuntos dos racionais e irracionais. Desse modo, potência cuja base é $a > 0$ com $a \in \mathbb{R}$ e expoente $b \in \mathbb{R}$, ou seja, a^b, já está definida e são válidas as propriedades apresentadas nas seções anteriores.

Proposição 2.5.1: Seja a um número real com $a > 1$ e x um número real. Então

$$a^x > 1 \text{ se, e somente se, } x > 0.$$

***Demonstração*:** Segue das proposições 2.3.2 e 2.4.1.

Proposição 2.5.2: Seja a um número real com $a > 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Então

$$a^{x_1} > a^{x_2} \text{ se, e somente se, } x_1 > x_2.$$

***Demonstração*:** Temos

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow a^{x_1}a^{-x_2} > a^{x_2}a^{-x_2} \Leftrightarrow a^{x_1}a^{-x_2} > 1 \xrightarrow{Prop.\ 2.5.1} x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Proposição 2.5.3: Seja a um número real com $0 < a < 1$ e x um número real. Então

$$a^x > 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Demonstração: Como $0 < a < 1$ segue que $\frac{1}{a} > 1$.

Seja $b = \frac{1}{a}$. Então, pela proposição 2.5.1,

$$b^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Mas $b^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = a^x$.

Portanto, $a^x > 1$ se, e somente se, $x < 0$.

Proposição 2.5.4: Seja a um número real com $0 < a < 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Então

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

Demonstração: Temos

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow a^{x_1}a^{-x_2} > a^{x_2}a^{-x_2} \Leftrightarrow a^{x_1-x_2} > 1 \xrightarrow{Prop.\ 2.5.3} x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

2.6 Função Exponencial

Definição 2.6.1: Dado $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, denomina-se função exponencial de base a a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$.

Observação 2.6.1: As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ são necessárias, pois:

Se $a = 1$, então $f(x) = 1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e portanto, f é uma função constante.

Se $a = 0$, para $x < 0$ não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$.

Se $a < 0$ e x é um número da forma $\frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z}\ e\ n \in \mathbb{N}^*$ com $m \neq n$ de tal forma que $mdc(m, n) = 1$ e n é múltiplo de 2, a função não seria definida em $\mathbb{R}$. Por exemplo, para $a = -3$ e $x = \frac{1}{2}$, temos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$.

Proposição 2.6.1: Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. Então a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+}^{*}$ definida por $f(x) = a^x$ satisfaz as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{E_1}$. A função f é crescente quando $a > 1$.

$\boldsymbol{E_2}$. A função f é decrescente quando $0 < a < 1$.

$\boldsymbol{E_3}$. A função f é injetora.

$\boldsymbol{E_4}$. A função f é ilimitada superiormente, ou seja, dado $M > 0$ qualquer, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer $x \geq x_0$ implica que $f(x) > M$.

$\boldsymbol{E_5}$. A função f é contínua, ou seja, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$\boldsymbol{E_6}$. A função f é sobrejetora.

Demonstrações: As propriedades $\boldsymbol{E_1}$ e $\boldsymbol{E_2}$ são consequências da definição da função f e das proposições 2.5.2 e 2.5.4.

$\boldsymbol{E_3}$. De E_1 e E_2 temos que a função exponencial ou é crescente ou decrescente.

Logo, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, *f* é injetora.

$\boldsymbol{E_4}$. Vamos separar em dois casos para mostrar que *f* é ilimitada superiormente.

i) Para $a > 1$:

Vamos mostrar que $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. Para isso, mostremos que $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$ para n natural.

Tomando $a = 1 + h; h > 0$, aplicando a fórmula do Binômio de Newton em $(1+h)^n$, obtemos

$$(1+h)^n = 1 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n \geq 1 + \binom{n}{1}h = 1 + nh,\ n \geq 1.$$

Como $a^n = (1+h)^n$, consequentemente,

$$a^n \geq 1 + nh,\ n \geq 1.$$

Assim, $\lim_{n \to +\infty} a^n \geq \lim_{n \to +\infty} 1 + nh = +\infty$.

Logo, $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

Dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $a^n > M$.

Mas a^x é crescente para $a > 1$. Assim, $x > n_0$ implica $a^x > M$.

Portanto, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

ii) Para $0 < a < 1$:

Temos $\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} a^{-x} = \lim_{x \to +\infty} (a^{-1})^x = +\infty$.

De i) e ii), concluímos que *f* é ilimitada superiormente.

$\boldsymbol{E_5}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, queremos mostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) \\ &= \lim_{h \to 0} a^{x_0 + h} - a^{x_0} \\ &= \lim_{h \to 0} a^{x_0}(a^h - 1) \\ &= a^{x_0}.0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou seja, *f* é contínua.

$\boldsymbol{E_6}$. Mostrar que $f(x)$ é sobrejetora significa dizer que para qualquer $b \in \mathbb{R}_+^*$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. Usando o lema 2.3.1, podemos escolher, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{y_n}, com $y_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ de tal forma que $|b - a^{y_n}| < \frac{1}{n}$, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^{y_n} = b$. Para fixar as ideias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{y_n} sucessivamente, tais que

$$a^{y_1} < a^{y_2} < a^{y_3} < \cdots < a^{y_n} < \cdots < b.$$

Com certeza, podemos fixar $z \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^z$. Como *f* é uma função crescente, temos que

$$y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_n < \cdots < z.$$

Deste modo, a sequência (y_n) é crescente e limitada superiormente. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os y_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{x \to x_0} y_n = x$. Como *f* é contínua, $a^x = \lim_{x \to x_0} a^{y_n} = b$.

Portanto, *f* é sobrejetora.

Observação 2.6.2: Das propriedades E_3 e E_6, segue que *f* é bijetora e, portanto, admite inversa.

<u>Gráfico da função exponencial</u>

O gráfico cartesiano de uma função exponencial apresenta as seguintes características:

(I) $f(x) = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, isto é, a curva representativa está acima do eixo x para qualquer valor real de x.

(II) Corta o eixo y na ordenada 1, pois para $x = 0$, tem-se $f(0) = a^0 = 1$.

(III) Se $a > 1$ é o de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o de uma função decrescente.

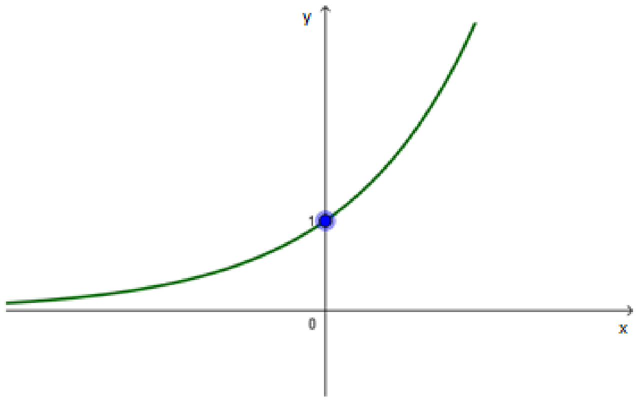

Figura 9. Gráfico de $f(x) = a^x$, com $a > 1$.

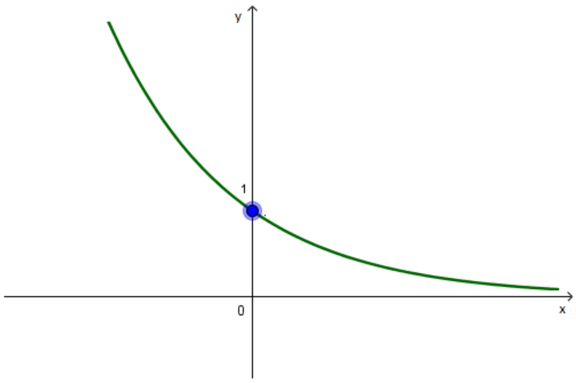

Figura 10. Gráfico de $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$.

2.7 Caracterização da Função Exponencial

Os modelos matemáticos, no estudo de funções, mais utilizados para a resolução de problemas são funções afim, quadrática e exponencial. Para a escolha de qual função deve ser utilizada corretamente, é necessário saber as propriedades características de cada uma delas. Aqui, faremos a caracterização de função exponencial e de função tipo exponencial.

Proposição 2.7.1: (Caracterização da função exponencial) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetora. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = [f(x)]^n, \ \forall n \in \mathbb{Z} \ \ e \ \ \forall x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x, \ \forall x \in \ \mathbb{R}$, em que $f(1) = a$;

(3) $f(x+y) = f(x).f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Para provarmos as equivalências dessas afirmações, mostraremos as implicações: $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$.

$(\mathbf{1}) \Longrightarrow (\mathbf{2})$**:** Por hipótese, $f(nx) = [f(x)]^n, \ \forall n \in \mathbb{Z} \ \ e \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Afirmamos que para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$) tem-se $f(rx) = [f(x)]^r$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, como $m = nr$ segue, pela hipótese, que $[f(rx)]^n = f(nrx) = f(mx) = [f(x)]^m$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$.

Assim, colocando $f(1) = a,$ teremos $f(r) = f(r.1) = [f(1)]^r = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$, ou seja, $f(x) = a^x, \ \forall x \in \ \mathbb{Q}$.

Agora, a fim de fixar as ideias, vamos admitir que f é crescente (a função f é monótona). Assim, $1 = f(0) < f(1) = a$.

Suponhamos, por absurdo, que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Então ou $f(x) < a^x$ ou $f(x) > a^x$. Vamos tomar o caso $f(x) < a^x$ (o outro caso é análogo). Pelo lema 2.3.1, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente e $f(x) < f(r)$, concluímos $x < r$. Por outro lado, $a^r < a^x$ e daí, pela proposição 2.5.2, $r < x$, mas isto nos dá uma contradição.

Portanto, $f(x) = a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$(\mathbf{2}) \Longrightarrow (\mathbf{3})$: Por hipótese, $f(x) = a^x, \ \forall x \in \ \mathbb{R}$, em que $f(1) = a$. Usando propriedades de potências, segue que

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$(\mathbf{3}) \Longrightarrow (\mathbf{1})$ Por hipótese, $f(x+y) = f(x).f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Inicialmente, notemos que $f(0) = 1$. De fato, $f(0) = f(0+0) = f(0).f(0) = [f(0)]^2$ e, daí, concluímos que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Se $f(0) = 0$, teremos $f(x) = f(0+x) = f(0)f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, mas isto não é possível pois f é injetora.

Para $n \geq 0$, mostremos, por indução sobre n, que $f(nx) = [f(x)]^n, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $n = 0$, $[f(x)]^0 = 1$. Mas, $f(0x) = f(0) = 1$. Logo, $f(0x) = \ [f(x)]^0$.

Suponhamos que $f(kx) = [f(x)]^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, para todo $k \geq 0$. Então

$$[f(x)]^{k+1} = [f(x)]^k . f(x) = f(kx)f(x) = f(kx + x) = f\big((k+1)x\big), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pelo princípio de indução finita, $f(nx) = [f(x)]^n,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ e\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Agora, se $n < 0$, então $-n > 0$. Assim, $f(-nx) = [f(x)]^{-n},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Temos $f(-x)f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1$, ou seja, $f(-x) = (f(x))^{-1}$.

Logo, $f(nx) = f((-n)(-x)) = [f(-x)]^{-n} = (\,(f(x))^{-1})^{-n} = [f(x)]^n,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.7.1: Uma função $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de tipo exponencial se $g(x) = b.a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, em que a e b são constantes reais positivas.

Notemos que se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Proposição 2.7.2: Se a função $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1$ e $\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$ dependem apenas de h, mas não de x.

Demonstração: Temos

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \frac{b.a^{x+h}-b.a^x}{b.a^x} = \frac{a^{x+h}-a^x}{a^x} = \frac{a^x(a^h-1)}{a^x} = a^h - 1 \qquad \text{e}$$

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{b.a^{x+h}}{b.a^x} = \frac{a^{x+h}}{a^x} = \frac{a^x.a^h}{a^x} = a^h.$$

Proposição 2.7.3: (Caracterização das funções de tipo exponencial) Seja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetora tal que para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa de h, mas não de x. Se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$ então, $g(x) = b.a^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: A hipótese equivale a supor que $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ não depende x.

Tome $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, com $b = g(0)$. Desse modo, $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função monótona injetora tal que $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ é independente de x e $f(0) = \frac{g(0)}{b} = \frac{b}{b} = 1$.

Substituindo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$ obtemos $\varphi(h) = \frac{f(h)}{f(0)} = f(h),\ \forall h \in \mathbb{R}$.

Como $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)} = f(h)$, segue que $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x).f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Daí, da proposição anterior, $f(x) = a^x$. No entanto, $f(x) = \frac{g(x)}{b}$. Logo,

$$g(x) = b.a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

A proposição da caracterização das funções de tipo exponencial oferece um critério para estabelecer quando uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, bijetora crescente ou decrescente, é da forma $f(x) = b.a^x$, isto é, $f(x) = b.e^{\alpha x}$.

A verificação deste critério depende do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que será citado abaixo e sua demonstração pode ser encontrada em Lima (2012) nas páginas 110 e 111.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade. ξ é uma função linear de y, se e somente se, $\forall y \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se a implicação $y' = n.y \Longrightarrow \xi(y') = n.\xi(y)$.

Para a aplicação deste critério é necessário saber verificar se $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, para h constante, independe de x ou não em cada situação específica.

Queremos verificar se para h, um número fixo constante, $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ é constante, ou seja, $f(x+h) = cf(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Tomando $y = f(x), y' = f(x'), f(x+h) = \xi(y)$ e $f(x'+h) = \xi(y')$, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos$f(x') = n.f(x) \Longrightarrow f(x'+h) = n.f(x+h)$ e desse modo, $f(x+h)$ é uma função linear de $f(x)$ e esta implicação é o critério que permite decidir se f é de tipo exponencial.

Outra ferramenta utilizada para se determinar que a função exponencial é o modelo adequado para um certo problema é a equação diferencial ordinária, tema abordado no capítulo 3.

Utilizaremos o critério apresentado para se modelar a função relativa à lei da desintegração radioativa, tema este que será visto como abordagem proposta para atividade em sala de aula.

A lei do decaimento radioativo

A velocidade de desintegração radioativa de uma substância é proporcional à quantidade radioativa existente. Seja $M(t)$ a massa, no instante t, de uma substância radioativa que no início da contagem do tempo era $M_0 = M(0)$. Então, $M(t+h)$ é o que resta da massa $M(t)$ da substância radioativa depois de decorrido o intervalo de tempo h a partir do instante t. Observando a massa $M(t') = n\,M(t), n \in \mathbb{N}$, após o mesmo tempo h, veremos que restou $M(t'+h) = n\,M(t+h)$. Portanto, $M(t) = M_0.e^{\alpha t}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, com α uma constante que é chamada de constante de decaimento radioativo (característica de acordo com o núcleo). Neste caso, como $M(t)$ é função decrescente de t, temos $\alpha < 0$.

3 ALGUNS MODELOS MATEMÁTICOS OBTIDOS ATRAVÉS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Frequentemente, para se resolver determinados problemas de situações reais, utiliza-se da linguagem matemática para descrever ou modelar o problema. Para isso é necessário identificar as variáveis responsáveis por alterações e ter um conjunto razoável de hipóteses. Para se escolher o modelo matemático adequado ao problema, se faz necessário conhecer as propriedades características de cada tipo de função. No capítulo 2, fizemos isso para a função exponencial e depois no capítulo 4 veremos algumas situações em que o modelo matemático adequado para se resolver é a função exponencial cuja base é o número de Euler. Essas mesmas situações também podem ser resolvidas utilizando equações diferenciais ordinárias. Esse é o objetivo dessa seção. Abordaremos aqui A lei do decaimento radioativo, A lei de resfriamento de Newton, Epidemias e Investimentos (juros compostos), por meio de equações diferenciais ordinárias. Para isso, iremos admitir conhecidas certas terminologias, definições (equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, problema de valor inicial, entre outras), métodos de resolução de algumas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (separáveis, lineares e não-lineares), que podem ser encontrados em Zill (2001) e Lopes (2015).

A lei do decaimento radioativo

A velocidade de desintegração radioativa de uma substância é proporcional à quantidade radioativa existente.

Sejam M e ΔM as quantidades de matéria radioativa nos instantes t e Δt, respectivamente. Temos que $\frac{dM}{dt}$ é a velocidade instantânea de desintegração e $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ a velocidade média dessa desintegração da substância.

Note que M e t são grandezas inversamente proporcionais e $\frac{dM}{dt}$ tem valor proporcional a M. Chamando $\lambda > 0$ o coeficiente de proporcionalidade:

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M.$$

A equação acima é uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem separável que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{M} dM = -\lambda dt.$$

Resolvendo a equação acima,

$$\int \frac{1}{M} dM = \int -\lambda dt \Rightarrow \ln|M| = -\lambda t + c.$$

Mas $M > 0$ e c é um número real constante. Daí,

$$e^{\ln M} = e^{-\lambda t + c} \Rightarrow M(t) = e^{-\lambda t}.e^{c} \quad (9)$$

Vamos determinar a constante c tomando $M(0) = M_0$. Substituindo em (9),

$$M_0 = e^{-\lambda.0}.e^{c} \Rightarrow \ln M_0 = \ln e^{c}.$$

Logo, $c = \ln M_0$ (10).

Substituindo (10) em (9),

$$M(t) = e^{-\lambda t}.e^{\ln M_0}.$$

Portanto, $M(t) = M_0.e^{-\lambda t}$ é a solução geral para o modelo matemático da Lei do decaimento radioativo.

A lei do resfriamento de Newton

A lei do resfriamento de Newton nos diz que a taxa de variação da temperatura de um corpo em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura de um corpo e do meio ambiente.

Denotando a temperatura de um corpo por $T(t)$, em um instante t, a temperatura do meio ambiente por T_m e o coeficiente de proporcionalidade de α, esta lei pode ser escrita, matematicamente, como

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_m), \quad (11)$$

com $\alpha > 0$.

Resolvendo a equação (11) (que é uma EDO de variáveis separáveis), obtemos

$$\int \frac{1}{T - T_m} dT = -\int \alpha dt + c \Rightarrow \ln|T - T_m| = -\alpha t + c.$$

Como $T > T_m$, daí $\ln(T - T_m) = -\alpha t + c$.

Aplicando exponencial em ambos os lados da igualdade,

$$e^{\ln(T - T_m)} = e^{-\alpha t + c} \Rightarrow T - T_m = e^{-\alpha t}.e^{c} \quad (12)$$

Tomando $D(t) = T - T_m$, e o problema de valor inicial para $D(0) = D_0$, substituindo em (12), temos

$$D(0) = e^{-\alpha.0}.e^{c} \Rightarrow D_0 = e^{c}.$$

Portanto, $D(t) = D_0.e^{-\alpha t}$.

Epidemias

Um certo tipo de doença está infectando uma certa população de P indivíduos. Essa população pode ser dividida em duas partes: indivíduos infectados e indivíduos não infectados. Denotando por $y(t)$ o número de indivíduos da população, que no instante t, estão infectados e por $x(t)$ o número de indivíduos da população que, no mesmo instante t, não estão infectados, temos

$$P = x(t) + y(t).$$

A doença espalha-se por contato sendo que xy é o número de contatos. A taxa de espalhamento da doença, $\frac{dy}{dt}$, é proporcional ao número de contatos. Chamando de *k* o coeficiente de proporcionalidade, o número de infectados no instante *t*, é obtido pela equação

$$\frac{dy}{dt} = kxy = k(P-y)y.$$

A equação acima é uma EDO cuja solução pode ser obtida através da equação

$$\int \frac{1}{(P-y)y}\,dy = \int k\,dt. \tag{13}$$

Colocando

$$\int \frac{1}{(P-y)y}\,dy = \int \frac{A}{(P-y)}\,dy + \int \frac{B}{y}\,dy, \tag{14}$$

vamos determinar A e B:

$$\frac{1}{(P-y)y} = \frac{A}{P-y} + \frac{B}{y} \Leftrightarrow 1 = Ay + B(P-y) \Leftrightarrow 1 = (A-B)y + PB \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ B = \dfrac{1}{P} \end{cases}$$

Substituindo os valores de A e B em (18),

$$\int \frac{1}{(P-y)y}\,dy = \frac{1}{P}\int \frac{1}{(P-y)}\,dy + \frac{1}{P}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{P}[-\ln|P-y| + \ln|y|] + \frac{c_1}{P}$$

Logo, $\int \frac{1}{(P-y)y}\,dy = \frac{1}{P}\ln\left|\frac{y}{P-y}\right| + \frac{c_1}{P}$. (15)

Substituindo o encontrado em (15) na equação (13)

$$\frac{1}{P}\ln\left|\frac{y}{P-y}\right| + \frac{c_1}{P} = \int k\,dt \Leftrightarrow \frac{1}{P}\ln\left|\frac{y}{P-y}\right| = kt + c_2 - \frac{c_1}{P} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P}\ln\left|\frac{y}{P-y}\right| = kt + c_3, \text{ (com } c_3 = c_2 - \tfrac{c_1}{P}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{P-y}\right| = Pkt + Pc_3 \Leftrightarrow \left|\frac{y}{P-y}\right| = e^{Pkt}.e^{Pc_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{P-y} = \pm e^{Pc_3}.e^{Pkt}$$

Tome $\pm e^{Pc_3} = \lambda$. Assim,

$$y = \lambda e^{Pkt}(P-y) \Leftrightarrow y + \lambda e^{Pkt}y = P\lambda e^{Pkt}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{P\lambda e^{Pkt}}{1+\lambda e^{Pkt}} \Leftrightarrow y = \frac{P}{1+Me^{-Pkt}}.$$

Como $y(0) = 1$, então $M = P - 1$.

Portanto,

$$y(t) = \frac{P}{1+(P-1)e^{-Pkt}}$$

é a solução geral da equação diferencial ordinária de primeira ordem que modela a disseminação de epidemias numa certa população.

Investimentos (Juros Compostos)

Uma aplicação de valor inicial P_o num banco cuja taxa de variação do investimento $\frac{dP}{dt}$, é proporcional ao saldo $P(t)$.

O problema pode ser estabelecido através do seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = nP \\ P(0) = P_0 \end{cases},$$

sendo *n* a constante de proporcionalidade.

Suponhamos agora que além do valor inicial P_0 depósitos contínuos sejam realizados a uma taxa *D* constante. Dessa forma, o PVI será

$$\frac{dP}{dt} = nP + D \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} - nP = D. \qquad (16)$$

Para resolver (16) devemos determinar o fator integrante. Assim,

$$\mu(t) = e^{\int -ndt} = e^{-nt}$$

Vamos multiplicar (16) pelo fator integrante.

$$e^{-nt}\frac{dP}{dt} - e^{-nt}nP = e^{-nt}D \Leftrightarrow \frac{dP}{dt}.e^{-nt} + (-nPe^{-nt}) = e^{-nt}D \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(P.e^{-nt}) = e^{-nt}D.$$

Integrando ambos os lados

$$P(t)e^{-nt} = -\frac{D}{n}e^{-nt} + c \Leftrightarrow P(t) = -\frac{D}{n} + c.e^{nt}. \tag{17}$$

Como $P(0) = P_0$,

$$P_0 = P(0) = -\frac{D}{n} + c.e^0 = -\frac{D}{n} + c \Leftrightarrow c = P_0 + \frac{D}{n}. \tag{18}$$

Substituindo (18) em (17),

$$P(t) = -\frac{D}{n} + \left(P_0 + \frac{D}{n}\right)e^{nt} = -\frac{D}{n} + P_0.e^{nt} + \frac{D}{n}e^{nt} = P_0e^{nt} + \frac{D}{n}(e^{nt} - 1).$$

Portanto, para aplicações com valor inicial P_0, o montante $P(t)$ final após o tempo t decorrido, fazendo depósitos constantes *D* sobre uma taxa de juros *n* será

$$P(t) = P_0e^{nt} + \frac{D}{n}(e^{nt} - 1).$$

4 APLICAÇÕES PROPOSTAS PARA O ENSINO MÉDIO

Buscar abordagens interdisciplinares relacionadas a atividades é fundamental para estabelecer uma estruturação do real significado dos assuntos estudados em sala de aula.

Ao considerar a história da Matemática e interligá-la a um ramo do conhecimento, o objetivo é de produzir momentos mais adequados para o estudo dessa disciplina auxiliar a outras áreas com a finalidade de tornar a base informativa em saber amplificado.

O Currículo do Estado de São Paulo, Matemática e suas Tecnologias (2012), leva em consideração que a Matemática é utilizada em tarefas cotidianas de adultos por serem consumidores e cidadãos, lidando com números, medidas, formas e operações. Além disso, em muitos meios de comunicação observamos a leitura e interpretação de gráficos para concluir proposições, validando-as ou não, ou seja, há a busca por decisões plausíveis a partir de análises matemáticas.

Esta disciplina nos currículos deve ser adjacente com a língua materna para uma forma expressiva mais elaborada, com melhores argumentos e com contextualização significativa sobre os diversos temas. O seu distanciamento com a realidade dos conteúdos contribui para o fenômeno da mediocrização.

É importante o professor embasar os assuntos disciplinares com referências que retratam situações reais ou próximas delas para facilitar na compreensão do objetivo daquele estudo. Todavia, é considerável laborar com contextos ficcionais, problemas inventados para suposições de casos e elaboração de soluções novas de problemas já existentes ou que, futuramente, possam existir. A não abertura a novas hipóteses abre sentença a apenas reprodução daquilo que já existe.

No quadro sobre conteúdos e habilidades de Matemática presente no Currículo do Estado de São Paulo, Matemática e suas Tecnologias (2012, p. 66 e p.70), o estudo de funções exponenciais deve ser apresentado na 1ª série do Ensino Médio abordando conteúdos referentes ao crescimento e decrescimento exponencial, função exponencial no que diz respeito a equações e inequações e como habilidade específica conhecer uma função exponencial e suas propriedades com relação ao crescimento ou decrescimento. O mesmo tema é revisto na 3ª série do Ensino Médio com ênfase em gráficos. As habilidades são: reconhecimento das várias funções, saber utilizar funções para caracterização das relações de interdependência, construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples e conhecer o significado do crescimento e decaimento exponencial, incluindo reconhecer tais fatos de funções de base e.

Neste capítulo são apresentadas propostas de algumas atividades para se abordar o número de Euler no Ensino Médio, por meio de quatro aplicações clássicas que envolvem a função exponencial com a base sendo o número de Euler. Sabemos que as funções exponenciais são muito utilizadas em modelos matemáticos para se resolver problemas de situações concretas. A proposição de caracterização das funções de tipo exponencial (Proposição 2.7.3) fornece um critério para decidir se o modelo matemático adequado a um determinado problema é uma função exponencial.

As aplicações abordadas aqui propiciam ao aluno ver a importância da matemática em problemas reais e também a interdisciplinaridade entre a matemática e outras áreas (tais como química, arqueologia, física).

As atividades das aplicações que serão propostas têm como objetivo atingir alunos das 1ª e 3ª séries do Ensino Médio sobre abordagens contextualizadas de funções de tipo exponencial que apresentam base e utilizando calculadoras científicas no auxílio de cálculos e o *software* GeoGebra como recurso para melhor compreensão visual do comportamento de algumas funções modeladas.

O *software* GeoGebra é um programa de fácil acessibilidade, simples de ser utilizado e gratuito. Ele pode ser baixado ou utilizado *online*. Esta ferramenta abrange tópicos de geometria, álgebra, planilha eletrônica, gráficos, estatística e cálculo, colaborando para um ambiente de aprendizagem mais dinâmico. Sua interface gráfica é simples e funcional com disponibilidade em português.

Para que este programa seja utilizado, é necessária a disponibilização de computadores com o arquivo instalado ou com conexão à internet podendo ser baixado o programa ou ter acesso *online* através do site www.geogebra.org.

Seguem as propostas de abordagens como sugestão para aplicabilidade: lei do decaimento radioativo a partir do critério que estabelece que funções de tipo exponencial podem ser expressas por funções exponenciais de base e; lei do resfriamento de Newton, o surto de epidemias e investimentos com juros através de funções modeladas a partir de equações diferenciais apresentadas no capítulo 3.

4.1 Primeira aplicação: a lei do decaimento radioativo

A radioatividade é definida pelo fenômeno ao qual o núcleo de um átomo que se encontra instável emite, em geral, partículas ou ondas espontaneamente, convertendo-se em outro mais estável, como ilustrado na Figura 9. Fala-se que o núcleo sofre decaimento radioativo.

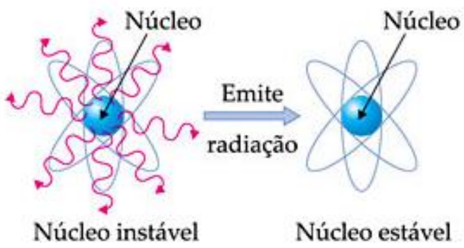

Figura 11. Representação de um núcleo instável à esquerda que ao emitir radiação torna-se estável como mostrado no núcleo da direita.
Fonte: CESAR, P. 2010. Radioatividade. Acesso em 03/04/2017. profpc.com.br/radioatividade.htm.

Alguns radioisótopos, isótopos que emitem radiação, são encontrados na natureza e outros não. Isso se deve ao fato de diferentes núcleos possuírem decaimento radioativo com velocidades diferentes. Essas velocidades são abordadas em termos de meia-vida característica e cada elemento possui sua meia-vida. A meia-vida é o tempo que determinada amostra de um certo elemento leva para reduzir à metade sua massa. Na tabela a seguir, é apresentada a meia-vida de alguns elementos.

Radioisótopos	**Meia-vida**
Oxigênio-13	$8{,}7.10^{-3}\ s$
Carbono-15	$2{,}4\ s$
Cobalto-60	$5{,}26\ anos$
Estrôncio-90	$28{,}1\ anos$
Urânio-235	$4{,}5.10^{9}\ anos$

Tabela 5. O tempo de meia-vida de alguns radioisótopos.

No capítulo 2, obtemos que $M(t) = M_0 \cdot e^{\alpha t}$, sendo $M(t)$ a massa no instante t, M_0 a massa inicial e α a constante de decaimento radioativo.

Existe uma relação entre a meia-vida (que será designada por $T_{1/2}$) e a constante α. Para que o elemento decaia até sua metade em determinado tempo, o número restante de núcleos após completar a primeira meia-vida será $M_0/2$. Assim,

$$\frac{1}{2}M_0 = M\left(T_{\frac{1}{2}}\right) = M_0.e^{\alpha\, T_{1/2}} \Longrightarrow \frac{1}{2} = e^{\alpha\, T_{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha\, T_{\frac{1}{2}} \Longrightarrow\ T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\alpha} \approx \frac{-0{,}693}{\alpha}.$$

Usando a relação acima obtemos que a massa $M(t)$, no instante t, de uma substância radioativa que no início da contagem do tempo era M_0 é dada por:

$$M(t) = M_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T_{1/2}}t}$$

sendo $T_{\frac{1}{2}}$ o valor da meia-vida do material radioativo considerado.

<u>Atividade 4.1.1:</u> O carbono-11 possui meia-vida de 20,4 minutos e é usado em imagem médica. Os nuclídeos do carbono-11 são formados e, posteriormente, incorporados dentro de um composto desejado. A amostra resultante é injetada no paciente e a imagem médica é obtida. O processo descrito leva 5 meias-vidas.

a) Determine a massa restante de carbono-11 ao final do processo, para uma massa inicial $\mathrm{M}_0 = 1000$ g.

b) A massa restante $M(t)$ de carbono-11 após t números de meias-vidas, para uma massa inicial $\mathrm{M}_0 = 1000$ g é modelada pela função $M(t) = \frac{1000}{2^t} = 1000.e^{(\ln 1/2)t}$, $t \in \mathbb{R}$. Com o auxílio do *software* GeoGebra represente o gráfico da função $M(t)$.

c) Qual o motivo de se utilizar o carbono-11 para efetuar tal procedimento?

d) A partir do gráfico feito no item b, identifique as massas restantes para quando $t = 0, t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ e $t = 5$.

Resolução:

a) Observemos que:

Número de meia--vida transcorridos	0	1	2	3	4	5	...	t
Massa correspondente	M_0	$\frac{\mathrm{M}_0}{2^1}$	$\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{M}_0}{2^1} = \frac{\mathrm{M}_0}{2^2}$	$\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{M}_0}{2^2} = \frac{\mathrm{M}_0}{2^3}$	$\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{M}_0}{2^3} = \frac{\mathrm{M}_0}{2^4}$	$\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{M}_0}{2^4} = \frac{\mathrm{M}_0}{2^5}$	...	$\frac{M_0}{2^t}$

Tabela 6. A massa restante do carbono-11 de acordo com o número de meias-vidas transcorrido.

Após 5 meias-vidas, ou seja, $5 \times 20{,}4\, min\ =\ 102\, min\ =\ 1h\ 42min$, para uma amostra contendo inicialmente $\mathrm{M}_0 = 1000\ \mathrm{g}$ de carbono-11, restam apenas $\frac{\mathrm{M}_0}{2^5} = = \frac{1000}{2^5} =\ 31{,}25\ \mathrm{g}$ da substância.

b) Podemos observar que a massa restante $M(t)$ de carbono-11 após t números de meia-vida, para uma massa inicial $\mathrm{M}_0 = 1000$ g será obtida:

$$M(t) = \frac{1000}{2^t} = 1000.\, e^{(\ln 1/2)t}.$$

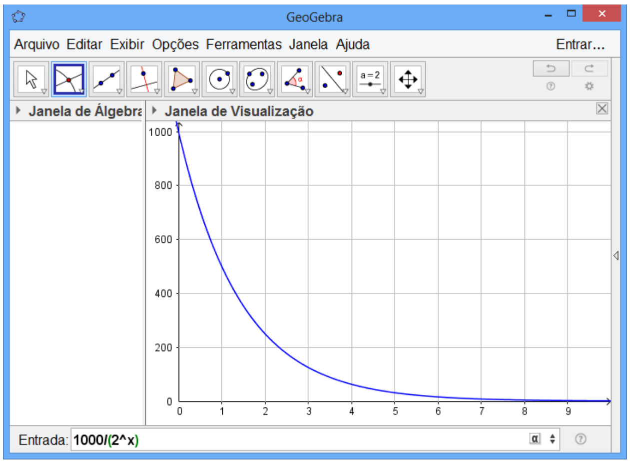

Figura 12. Tela do GeoGebra com a representação do gráfico da função $M(t) = \frac{1000}{2^t}$.

c) O motivo de se utilizar o carbono-11 para imagens médicas deve-se ao fato do seu tempo de meia-vida ser curto e rapidamente sair do organismo do indivíduo submetido ao exame.

d) A plotagem das retas $t = 0, t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ e $t = 5$ ($x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ e $x = 5$) no gráfico da função $M(t)$ ($f(x)$) conforme mostra a Figura 11, é importante ser mostrada para se obter a intersecção da curva com essas retas. Essas interseções originarão os pontos A, B, C, D e F, vistos na figura 14, cujas coordenadas correspondem à massa restante da substância, representada pela ordenada y, após decorridas, 0, 1, 2, 3, 4 e 5 meias-vidas. Na “Janela de Álgebra” são vistas as coordenadas desses pontos. Deste modo, o ponto A significa que no início, a amostra continha 1000g, B representa que após uma meia-vida a massa restante da amostra é de 500g, o ponto C indica que a massa restante do carbono-11 é de 250g quando passadas 2 meias-vidas, D significa que a massa restante de carbono-11 será de 125g após 3 meias-vidas, E representa que depois de decorridas 4 meias-vidas a massa da amostra é de 62,5 g e por fim, F indica que decorridas 5 meias-vidas, a quantidade de carbono-11 restantes é de 31,25g de acordo com o apresentado na figura 14.

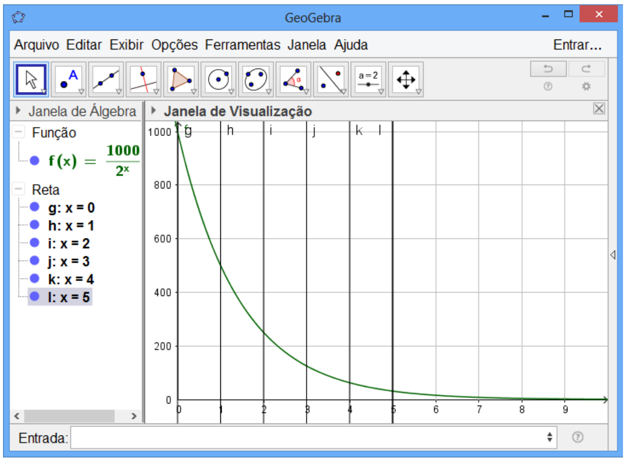

Figura 13. Tela do GeoGebra com a representação das retas perpendiculares ao eixo x cujas equações são $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ e $x = 5$.

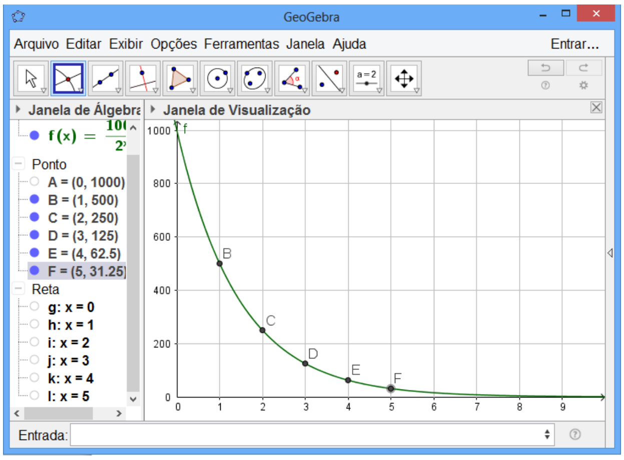

Figura 14. Tela do GeoGebra com a representação dos pontos de intersecção das retas perpendiculares ao eixo x e o gráfico da função $M(t)$.

Observação: Utilizando no GeoGebra a ferramenta "**Controle deslizante**", pode-se explorar o gráfico da função $M(t) = \frac{M_0}{2^t} = M_0 . e^{(\ln 1/2)t}$ que fornece a massa restante $M(t)$ de carbono-11 após t números de meia-vida, para outros valores de massa inicial M_0.

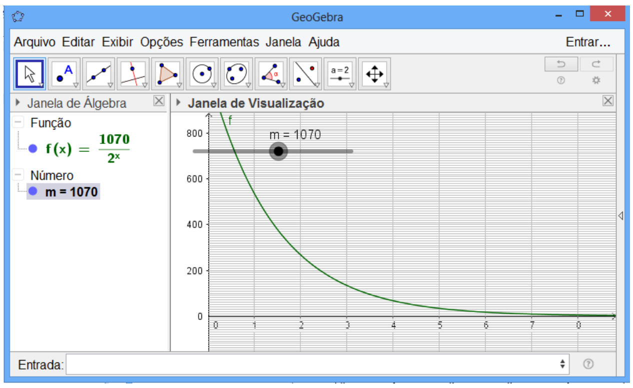

Figura 15. Tela do GeoGebra com o gráfico da função $M(t)$ usando a ferramenta Controle Deslizante para variar o valor M_0.

<u>Atividade 4.1.2</u>: A meia-vida pode servir como um relógio nuclear para determinar as idades de diferentes objetos. A técnica do radiocarbono tem sido utilizada na arqueologia e antropologia para datação aproximada de materiais orgânicos, pois o carbono-14 decai e não é mais reposto. Um osso encontrado em uma caverna apresenta uma taxa de carbono-14 igual a 6,25 % da taxa existente em um animal vivo e na atmosfera. Sabendo que o tempo de meia-vida do carbono-14 é de 5730 anos.

a) Quantos anos que se decorreram após a morte do indivíduo? Justifique

b) Com o auxílio do software GeoGebra represente o gráfico da função $M(t)$ que fornece a massa, no instante t, de carbono-14 presente no osso, que inicialmente era de $M_0 = 100$.

Resolução: Vimos que a massa $M(t)$, no instante t, de uma substância radioativa que no início da contagem do tempo era M_0, é dada por $M(t) = M_0 . e^{\alpha t}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Também vimos que existe uma relação entre a meia-vida $T_{1/2}$ e a constante α de decaimento radioativo, que é dada por $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\alpha} \approx \frac{-0{,}693}{\alpha}$.

a) A meia-vida do carbono-14 é de 5730 anos. Assim, substituindo esse valor na expressão acima obtemos

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5730} \approx \frac{-0{,}693}{5730}.$$

A quantidade restante de núcleos do osso após decorrido um tempo t (que queremos encontrar) é de 6,25% de M_0, ou seja, $M(t) = 0{,}0625M_0$. Assim,

$$0{,}0625M_0 = M_0 . e^{\alpha t} \Longrightarrow e^{\alpha t} = 0{,}0625 \Longrightarrow \alpha t = \ln(0{,}0625) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow t = \frac{\ln(0{,}0625)}{\alpha} \approx -2{,}773\left(-\frac{5730}{0{,}693}\right) \approx 22.920 \text{ anos.}$$

b) Utilizando o *software* GeoGebra o gráfico da função $M(t) = M_0 . e^{\alpha t}$ com $\alpha \approx \frac{-0{,}693}{5730}$ e $M_0 = 100$ é:

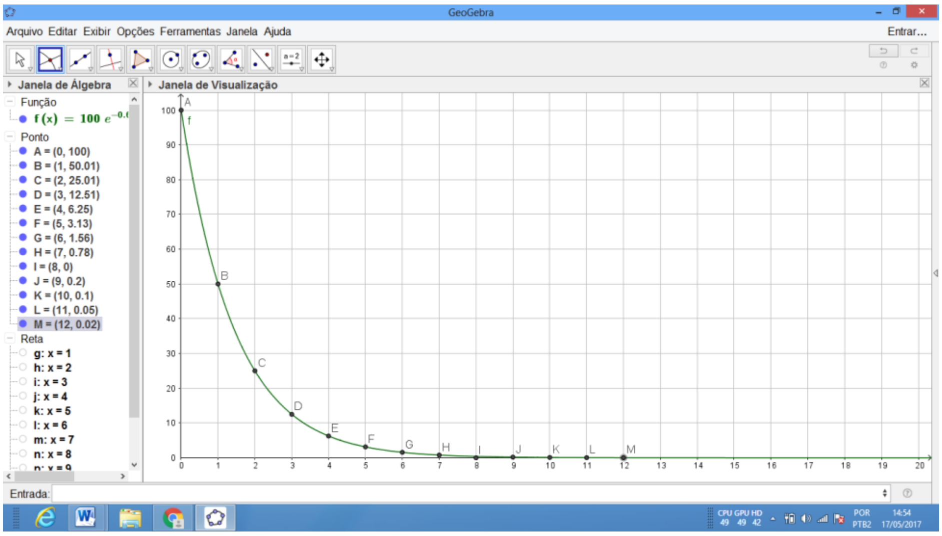

Figura 16. Tela do GeoGebra com a representação do gráfico da função M(t) - comportamento de uma amostra contendo o carbono-14, após o período t.

Neste caso, a massa inicial M_0 está representada na forma de porcentagem, ou seja, no início, t = 0, a amostra estava completa (a massa total representava 100%).

No gráfico obtido, o eixo x indica a quantidade de meias-vidas decorridas e o eixo y representa a porcentagem de radionuclídeos presentes ainda na amostra.

Ao final da atividade propor aos alunos que resolvam os seguintes exercícios:

Exercícios propostos:

1) A partir de quantas meias-vidas a emissão radioativa de carbono-14 é menor do que 1%? O que acontece à medida que o tempo de meia-vida aumenta?

2) Na zona rural de Caruaru, comunidade Riacho Doce, numa área chamada “Serra do medo”, moradores encontraram fósseis enquanto realizavam a limpeza de um “tanque” – espaços entre as pedras que acumulam água da chuva. Severino da Silva, proprietário, disse que esses ossos só foram encontrados (Figura 17), pois o “tanque” onde estavam soterrados estava inteiramente seco pela falta de chuvas na região. Pesquisadores do Laboratório de Arqueologia da UFRPE fizeram análises com os fósseis e a estimativa é de que tenham mais de 70 mil anos. Os ossos apresentam-se quase que inteiramente intactos devido às condições do local encontrado.

Figura 17. Imagem do “tanque” e de um fóssil encontrado na Comunidade Riacho Doce, zona rural de Caruaru.
Fonte: BARBOSA, D. Seca revela fósseis de mais de 70 mil anos em Caruaru. Disponível em: <https://noticias.uol.com.br/ciencia/album/2013/05/07/seca-revela-fosseis-e-pinturas-rupestres-de-mais-de-70-mil-anos-em-caruaru.htm#fotoNav=5>. Acesso em 18/04/2017.

É provável que esses pesquisadores tenham utilizado o método da datação do carbono-14 para concluir a idade dos fósseis? Justifique.

3) Para fósseis remotos (por exemplo, com cem anos) pode-se utilizar o método de dataçãodo carbono-14 para concluir a idade dos fósseis? Nesse caso, existe limitação para esse método? Justifique.

Resposta desejável ao exercício 1: A partir de 7 meias-vidas, ou seja, aproximadamente 28.650 anos BP(*before present*). À medida que o tempo de meia-vida aumenta, a porcentagem da emissão de carbono-14 tende a zero.

Resposta desejável ao exercício 2: Provavelmente não. A emissão radioativa transmitida pelo carbono-14 por um fóssil com mais de 8 meias-vidas passadas (45.840 anos BP) é praticamente nula, o que dificulta determinar a idade aproximada.

Resposta desejável ao exercício 3: Também há limitação, pois a quantidade emitida de radiação não terá sido reduzida o suficiente para que seja detectada alguma diferença.

Com as atividades propostas, pode-se trabalhar com o aluno de modo que ele consiga transportar essa aplicação para a vida real e verifique a importância da matemática em outras áreas.

4.2 Segunda aplicação: a Lei do Resfriamento de Newton

Newton, conhecido pelas contribuições grandiosas na Física, em 1701 publicou "*Scala Graduum Caloris*", um artigo que descreve um método de medição para temperaturas de no máximo 1000°C. Hoje, este método é conhecido como a Lei do Resfriamento de Newton, que diz que a taxa de resfriamento (diminuição da temperatura) de um objeto é proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do meio que o contém. Em linguagem matemática, se D_0 é a diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura no instante $t = 0$, $D(t)$ é a diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura num instante *t* qualquer, e α é a constante que depende do material de que é constituída a superfície do objeto, fazendo a modelagem matemática e resolvendo a equação que aparece no capítulo 3, obtemos

$$D(t) = D_0 . e^{-\alpha t}$$

Atividade 4.2.1. Em um dia cuja temperatura ambiente era de 30°C, uma água fervia numa panela e cinco minutos depois de apagado o fogo tem a temperatura de 65°C. Depois de quanto tempo após apagar o fogo, a água atingirá a temperatura de 35°C?

Resolução: Ao desligar o fogo, a temperatura da água é de 100°C e a temperatura ambiente é de 30°C. Assim, $D_0 = 100 - 30 = 70°C$.

Após $t = 5$ minutos, a temperatura da água passa a ser de 65°C, ou seja, $D(5) = 65 - 30 = 35°C$.

Com esses dados, conseguimos determinar o valor da constante α. Temos

$$35 = 70. e^{-\alpha .5} \Longrightarrow \frac{35}{70} = e^{-\alpha .5} \Longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\alpha .5} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln \tfrac{1}{2} = \ln e^{-\alpha .5} \Longrightarrow -\alpha . 5 \approx -0{,}693 \Longrightarrow \alpha \approx \tfrac{0{,}693}{5}.$$

Portanto, $\alpha = 0{,}1386$.

Como foi determinada a constante, é possível determinar o tempo para se alcançar a temperatura de 35°C. Neste caso, a diferença de temperatura após o instante t será $D(t) = 35 - 30 = 5°C$. Assim,

$$5 = 70.e^{-0{,}1386.t} \Rightarrow \frac{5}{70} = e^{-0{,}1386.t} \Rightarrow \frac{1}{14} = e^{-0{,}1386.t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{14} = \ln e^{-0{,}1386.t} \Rightarrow -2{,}639 = -0{,}1386.t \Rightarrow t = \frac{2{,}639}{0{,}1386}.$$

Portanto, $t = 19$ minutos.

A atividade 4.2.1 foi adaptada de um exemplo retirado de Nascimento (2011).

<u>Atividade 4.2.2.</u> O corpo de uma vítima, de assassinato, foi descoberto às 23h. O médico da polícia chegou às 23h30min e, imediatamente, tomou a temperatura do cadáver, que era de 34,8 graus centígrados. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou 34,1 graus centígrados. A temperatura do quarto era mantida constante a 20 graus centígrados. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é 36,5 graus centígrados.

Resolução: No momento da morte a temperatura do corpo é de 36,5 graus centígrados e a temperatura do quarto é de 20 graus centígrados. Logo, a diferença de temperatura do corpo e do meio será $36{,}5 - 20$, ou seja, $D_0 = 16{,}5$ graus centígrados.

Após t minutos, a diferença da temperatura do corpo e da temperatura do quarto é $D(t) = D_0.e^{-\alpha t}$.

O enunciado fornece o dado de que 1 hora após a morte da vítima, a temperatura deste corpo já havia baixado para 34,1 graus centígrados. Como a temperatura do quarto mantém-se constante, $D(1) = 34{,}1 - 20 = 14{,}1$.

Por outro lado, $D(1) = 16{,}5.e^{-\alpha.1}$.

Assim, $e^{-\alpha} = \frac{14{,}1}{16{,}5} = 0{,}8545$.

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da igualdade,

$$\ln e^{-\alpha} = \ln 0{,}854545 \Leftrightarrow -\alpha = -0{,}157186.$$

E portanto, $\alpha = 0{,}157186$.

A temperatura do corpo no momento de chegada do médico era de 34,8 graus centígrados e sabemos, pelo exercício, que a temperatura de uma pessoa viva é de 36,5 graus centígrados. Nesse sentido, a diferença entre essas duas temperaturas é $36{,}5 - 34{,}8 = 1{,}7$ graus centígrados, após transcorridos um intervalo de tempo t que ainda não conhecemos.

Calculemos t:

$$D(t) = 16{,}5.e^{-0{,}157186.t} = 1{,}7.$$

Daí,

$$e^{-0{,}157186t} = \frac{1{,}7}{16{,}5}.$$

Aplicando logaritmo natural a ambos os membros,

$\ln e^{-0{,}157186t} = \ln 0{,}10303 \Leftrightarrow -0{,}157186t = -2{,}272735 \Leftrightarrow t = 14{,}459$ horas.

Temos que 14,459 horas equivale a 14h + 0,459h. Para transformar 0,459 h em min, basta efetuar uma simples regra de três, concluindo que 0,459 h é aproximadamente 28 min.

Este resultado para t nos diz que o corpo foi morto 14h28min antes de ter sido encontrado. Como foi encontrado às 23h30min, 23h30min – 14h28min = 9h02min.

Portanto, a morte ocorreu por volta das 9h02min.

A atividade 4.2.2 foi retirada de um problema presente na referência Nascimento (2011).

4.3 Terceira aplicação: epidemias

Um certo tipo de doença está infectando uma certa população de P indivíduos. Ela pode ser dividida em indivíduos infectados e não infectados. Denotando por $y(t)$ o número de pessoas infectadas da população, que no instante t estão infectadas e por $x(t)$ o número de pessoas da população que, no mesmo instante t, não estão infectadas, temos $P = x(t) + y(t)$.

Vimos no capítulo 3 que $y(t) = \frac{P}{1+(P-1)e^{Pkt}}$, onde k é um valor constante.

Atividade 4.3.1.: Leia o texto adaptado "*Grandes epidemias na história da humanidade*" retirado do site do Jornal da Orla.

Grandes epidemias na história da humanidade

Figura 18. Grandes epidemias na história da humanidade
Fonte: Grandes epidemias da humanidade, 2016. Disponível em: <http://www.jornaldaorla.com.br/noticias/23814-grandes-epidemias-na-historia-da-humanidade/> Acesso em 29/07/2017.

Peste negra, cólera, tuberculose, gripe espanhola, Aids ... Ao longo da história foram muitas as epidemias que mataram milhões de pessoas. Algumas doenças foram combatidas e até erradicadas graças ao desenvolvimento de medicamentos e vacinas; outras, embora ainda sem cura, podem ser mantidas sob controle.

Peste Negra - Também conhecida como peste bubônica, a epidemia matou boa parte da população do planeta no século XIV, principalmente de países da Europa e Ásia. A doença foi sendo combatida à medida que foi se melhorando a higiene e o saneamento das cidades, diminuindo a população de ratos urbanos.

Cólera - Conhecida desde a Antiguidade, teve sua primeira epidemia global em 1817. O vibrião colérico é transmitido por meio de água ou alimentos contaminados. A cólera é uma doença que surgiu na Índia e se espalhou pelos demais países durante o século XIX, se disseminando através da contaminação de comida e água.

Tuberculose - O combate foi acelerado em 1882, depois da identificação do bacilo de Koch, causador da doença. Hoje, à base de antibióticos, a tuberculose pode ser curada com um tratamento intensivo, mas durante o século XIX, na Europa, a epidemia matou aproximadamente um quarto da população adulta do continente.

Varíola - A doença atormentou a humanidade por mais de 3 mil anos. Até celebridades da história como o faraó egípcio Ramsés II, a rainha Maria II da Inglaterra e o rei Luís XV da França tiveram a temida "bexiga". Uma vacina foi inventada em 1796 para combater a doença, mas ela voltou em 1960. É considerada erradicada do planeta desde 1980, após campanha de vacinação em massa.

Gripe espanhola - Em 1918, uma mutação do vírus da gripe se espalhou rapidamente pelo mundo e, em questão de um ano, matou pelo menos 50 milhões de pessoas. Foi batizada de gripe espanhola, embora tenha feito vítimas no mundo todo. No Brasil, matou até o presidente Rodrigues Alves.

Ebola - No ano de 2014 o mundo viveu o maior surto de ebola da história. O vírus, que mata entre 50% e 90% das pessoas que o contraem em questão de dias, ameaçou deixar a África e atacar outros continentes.

Sarampo - Altamente contagioso, era uma das causas principais de mortalidade infantil até a descoberta da primeira vacina, em 1963. Com o passar dos anos, a vacina foi aperfeiçoada, e a doença foi erradicada em vários países.

Malária - A Organização Mundial de Saúde considera a malária a pior doença tropical da atualidade. Em 1880, foi descoberto o protozoário Plasmodium que causa a doença, transmitida por picada de mosquito contaminado. As maiores epidemias de malária aconteceram durante a Primeira e Segunda Guerra Mundial, matando milhões de pessoas.

Febre amarela - A doença se espalha de indivíduo para indivíduo por meio da picada do Aedes aegypti (ele mesmo) infectado. Matou milhões de pessoas no passado e hoje, apesar da vacina e dos programas de prevenção, a febre amarela ainda assola regiões da América do Sul e da África.

Poliomielite - A doença é causada pelo poliovírus, que ataca o sistema nervoso humano. Não existe cura efetiva para a poliomielite, mas a vacina, aperfeiçoada na década de 1950, garantiu o controle e extinção da doença em boa parte do mundo.

AIDS - Para terror da geração do "amor livre", a doença foi identificada em 1981, nos Estados Unidos, e logo ganhou o status de epidemia pela Organização Mundial de Saúde. Destrói o sistema imunológico, deixando o organismo frágil a doenças causadas por outros vírus, bactérias, parasitas e células cancerígenas.

Os registros revelam que *t* semanas após o primeiro surto de um certo tipo de gripe, aproximadamente $y(t) = \frac{20}{(1+19e^{-1,2t})}$ milhares de indivíduos contraíram a doença. Faça o que se pede:

(a) Utilize o software GeoGebra para fazer o gráfico da função $y(\ t\ )$.

(b) Quantas pessoas estavam doentes quando o surto foi detectado? Quantas pessoas estavam doentes duas semanas depois? Responda, inicialmente, usando lápis e papel (ou seja, fazendo todos os cálculos necessários utilizando a função $y(\ t\ )$), e depois, analisando o gráfico obtido no item anterior.

(c) Se a tendência continuar, qual será o número total de pessoas infectadas?

Resolução:

(a) Para fazer o gráfico da função $y(\ t\ )$ no *software* GeoGebra basta digitar no campo "Entrada" a lei da função $y(\ t\ )$.

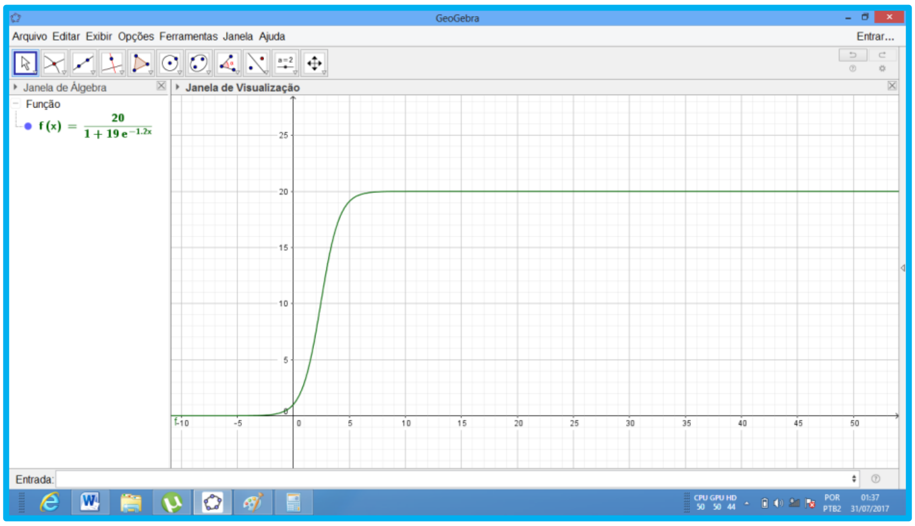

Figura 19. Tela do GeoGebra com o gráfico da função $y(t) = 20/(1 + 19e^{-1,2t})$.

(b) *Fazendo os cálculos:*

Ao ser detectado o surto ainda não foi transcorrida nenhuma semana, ou seja, $t = 0$. Substituindo o valor na função $y(t)$ dada, obtemos

$$y(0) = \frac{20}{(1+19e^{-1,2.0})} = \frac{20}{1+19} = \frac{20}{20} = 1.$$

Como $y(t)$ fornece o número em milhares de indivíduos infectados, então 1000 pessoas estavam doentes quando o surto foi detectado.

Após duas semanas, ou seja, para $t = 2$ teremos

$$y(2) = \frac{20}{(1+19e^{-1,2.2})} \approx \frac{20}{2,7236} \approx 7,343$$

Portanto, 7343 pessoas estavam doentes após duas semanas de constatado o surto.

Analisando o gráfico:

Para saber o número de pessoas (em milhares) que estavam doentes quando o surto foi detectado é necessário representar a reta vertical de equação $x = 0$ (ou seja, o eixo y) e depois obter o ponto A de intersecção dessa reta com o gráfico da função $y(t)$. A ordenada desse ponto é o número de milhares de indivíduos infectados no surto, a qual é $1 \times 1000 = 1000$ pessoas.

O número de pessoas (em milhares) que estavam doentes após duas semanas de constatado o surto, é a ordenada do ponto B de intersecção da reta vertical de equação $x = 2$ com o gráfico da função $y(t)$, que é $7,34 \times 1000 = 7340$ pessoas.

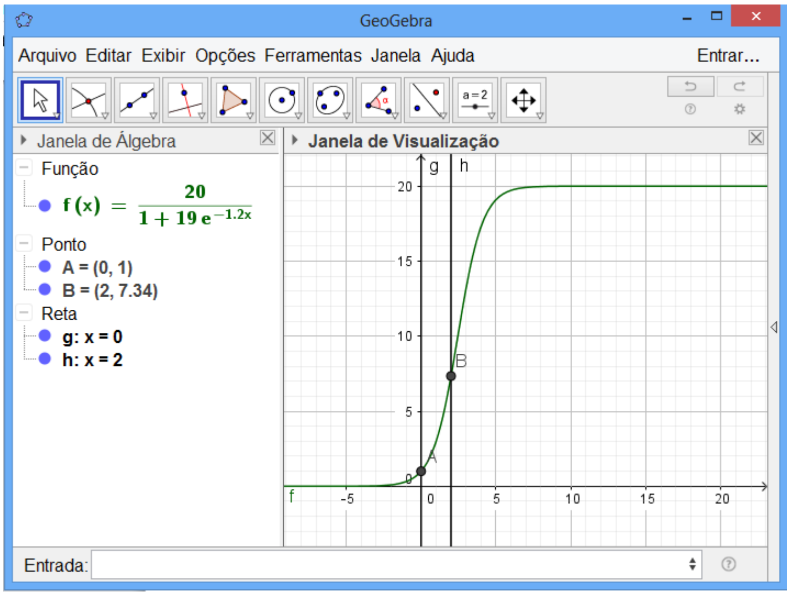

Figura 20. Tela do GeoGebra com a representação das intersecções de das retas verticais x = 0 e x = 2 com a função $y(t)$.

(c) Analisando o gráfico da função $y(t)$ (Figura 19) observa-se que à medida que t aumenta (ou seja, que o tempo passa), o valor $y(t)$ "tende" a ser 20 milhares de pessoas, nunca ultrapassando este valor. Podemos concluir daí que o número total de pessoas infectadas pela gripe é de aproximadamente 20.000 pessoas.

Esta atividade foi adaptada de um exemplo de Hoffmann (2014, p. 270).

Observação: O GeoGebra utiliza a variável x ao invés de t, e $f(x)$ ao invés de $y(t)$, sendo diferente de como foi expressa a função na atividade. Do lado esquerdo da figura 20 (na "Janela de Álgebra"), as ordenadas dos pontos A e B representam a quantidade de pessoas infectadas pela doença após um período em questão (este período está representado pela abcissa dos pontos). Nota-se que a ordenada do ponto B é um número decimal, que pode ser o seu valor aproximado. Se clicarmos com o botão direito em cima das coordenadas de B na "Janela de Álgebra", clicando em "Propriedades" uma aproximação melhor para essa ordenada poderá ser vista, como mostra a figura 21. Ao analisar o gráfico para responder o que foi solicitado no item (c) o aluno tem contato com a noção intuitiva de limite de uma função, que é um conceito muito importante e que para alunos de Ensino Médio é pouco trabalhado.

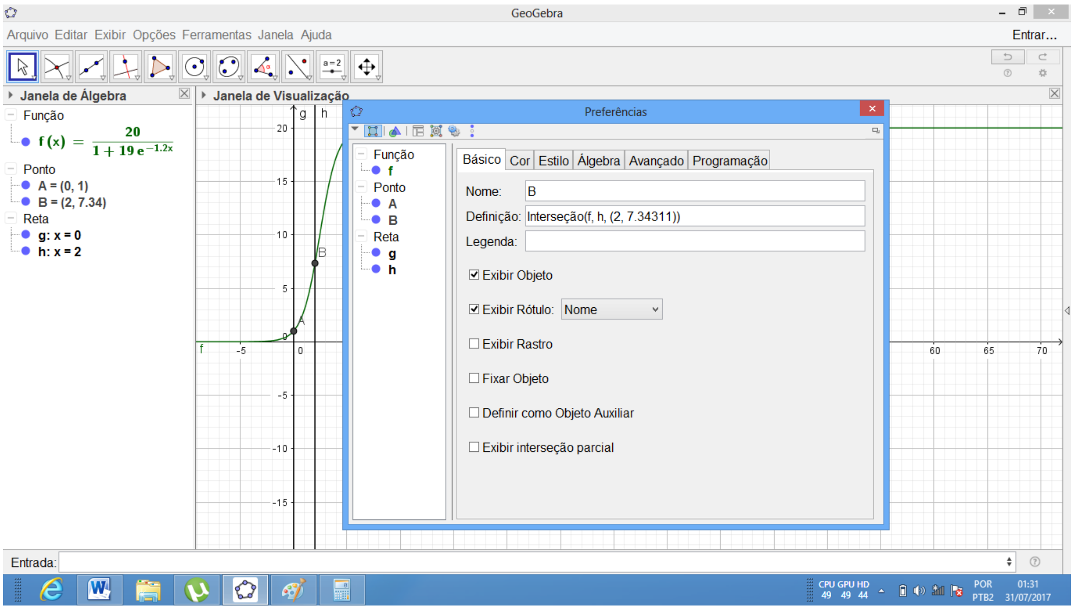

Figura 21. Tela do GeoGebra que será reproduzida ao clicar com o botão direito sobre o ponto B ou em cima de B na "Janela de Álgebra" e selecionar a opção "Propriedades".

Ao final da atividade pode-se propor aos alunos o seguinte exercício:

Exercício Proposto: Um certo tipo de gripe foi considerada uma epidemia. Após x semanas dessa gripe ter sido considerada um surto, a função dada por $f(x) = \frac{2}{1+3e^{-0,8x}}$, é o número aproximado de pessoas que contraíram a doença, dada em milhares de pessoas.

a) Plote o gráfico de $f(x)$ no GeoGebra;
b) Quantas pessoas estavam doentes quando o surto foi detectado?
c) Quantas pessoas estavam doentes 3 semanas depois?
d) Se a tendência continuar, qual será o número total de pessoas infectadas?

Este exercício proposto foi retirado de Hoffmann (2014, p 273).

Além desse exercício pode-se propor outros exercícios e também solicitar que os alunos façam uma pesquisa sobre outros tipos de epidemias mais recentes que houveram no mundo.

4.4 Quarta aplicação: investimentos

Uma das maiores preocupações dos brasileiros atualmente é o que diz respeito à aposentadoria, pois em 2016 foi anunciada pelo governo uma proposta para a reforma da previdência. Com isso, organizar a vida financeira tornou-se assunto muito comentado na mídia já que essas mudanças seriam aplicadas e a idade para se aposentar aumentaria consideravelmente.

A proposição da atividade a seguir enfatiza alternativas de investimentos para que se tenha um futuro mais confortável visto que o brasileiro, no geral, não possui o hábito de poupar dinheiro. Para isso primeiramente, o professor junto com os alunos analisa as regras atuais da aposentadoria (Figura 20). Depois, será apresentado o texto “Riqueza e Poupança” para debate entre o mediador e os estudantes e, por fim, exercícios sobre juros compostos.

A educação financeira é de extrema importância e com maior frequência deve ser inserida no ensino desde os anos iniciais escolares afim de adquirir o hábito de utilizar melhor o seu dinheiro.

Atividade 4.4.1:

• <u>*Parte I*</u>:

Leia o quadro abaixo (que fornece algumas informações a respeito das regras atuais da aposentadoria) e também o texto adaptado intitulado "*Riqueza e Poupança*" retirado de **Alves.**

REGRAS ATUAIS DA APOSENTADORIA

Veja os principais pontos da reforma

	COMO É HOJE	COMO PODE FICAR
Idade de aposentadoria	A soma da idade e tempo de contribuição deve ser de 85 para mulheres e 95 para homens	**65 anos** (com regra de transição para homens com mais de 50 anos e para mulheres com mais de 45 anos atualmente)
Tempo mínimo de contribuição	15 anos de contribuição	Passa a ser de **25 anos**
Aposentadoria rural	O trabalhador rural se aposenta com 55 anos (mulheres) e 60 (homens) e precisa comprovar 15 anos de trabalho no campo. O produtor contribui com um percentual sobre a receita bruta de sua produção	Trabalhadores rurais passarão a contribuir para o INSS, e se aposentam a partir dos **65 anos, com 25 de contribuição**
Servidores públicos	Há um regime próprio e separado da Previdência dos trabalhadores privados. Parte das aposentadorias vem das contribuições dos próprios servidores, e outra parte do governo	**Projeto prevê fim das diferenças** entre o regime de previdência geral e o público
Militares	Quando param de servir, os militares ficam inativos. As pensões integrais para filhas solteiras de militares foram extintas em 2000, mas ainda são pagas para quem recebia antes, até o fim da vida	**Nada muda** por enquanto. Um projeto de lei será enviado separadamente

Figura 22. Regras atuais da aposentadoria.
Fonte: MARTELLO,A.; AMARAL, L. Veja as propostas do governo Temer para a reforma da previdência. Disponível em <http://g1.globo.com/economia/noticia/veja-as-mudancas-que-o-governo-propoe-com-a-reforma-da-previdencia.ghtml>. Acesso em 01/08/2017.

Riqueza e Poupança

Cada pessoa tem uma ideia diferente de riqueza, que depende dos valores e da visão de mundo de cada um. Há pessoas que valorizam atividades de lazer, outros valorizam felicidade e educação. Uma mãe pode ver riqueza na saúde e felicidade dos seus filhos, um chefe pode enxergar a riqueza no poder do cargo que ocupa, um negociante pode reconhecer riqueza no lucro que acumula, um jovem pode perceber riqueza no grupo de amigos, nas baladas de fim de semana ou no diploma que consegue ao final de um curso. Como você vê, não há um único conceito para riqueza, ele varia de pessoa para pessoa.

De maneira geral, as pessoas pensam que riqueza é acumular bens. Os bens e o dinheiro nos dão a sensação de segurança. Precisamos de alimentação, moradia, saúde, educação, lazer e descanso e tudo isso tem um valor que é expresso em dinheiro. No entanto, o dinheiro não é suficiente para garantir bem-estar. Uma pessoa pode ter boas comidas e não ter uma boa saúde, alguns têm uma boa casa, mas não têm um bom ambiente familiar, outros estudam em uma boa escola e não têm boas notas nem valorizam a educação que recebem. Tão importante quanto ter bens é a felicidade e o bem-estar.

Todos nós sabemos o que é poupança – poupar é guardar dinheiro, poupar é não gastar todo o dinheiro que temos ou ganhamos.

O conceito de poupança tem a ver com renda. A renda é aquilo que se obtém com o trabalho – salário, venda de produtos ou serviços, aluguel, pensão ou aposentadoria. Com essa renda a pessoa compra e paga por casa, comida, roupa, estudo, lazer, ou seja, tudo de que necessita ou deseja. Quando a pessoa não consome toda a sua renda, essa sobra poderá ser transformada em poupança.

Poupar é deixar de consumir agora para consumir no futuro. Por exemplo, se uma pessoa pretende comprar uma geladeira nova e não tem todo o dinheiro nesse momento, poderá guardar um pouco de sua renda mensal e, ao final de alguns meses, terá o valor suficiente para fazer a compra. Assim, a pessoa deixou de consumir outras coisas que ela poderia comprar hoje para fazer a compra de um bem de valor maior no futuro.

Para se sentir motivada a poupar, a pessoa deve saber qual a sua ideia de riqueza, quais os seus sonhos, quais os seus desejos. Quem valoriza a educação quer juntar dinheiro para garantir seus estudos. Quem gosta de viajar, junta dinheiro para conhecer outros lugares. Para quem gosta de cozinhar, é esse prazer que vai levar a poupar para comprar um novo fogão. Por isso, poupar é importante para a realização de alguns sonhos.

Outra razão para poupar é a necessidade de segurança. Há pessoas que estabelecem uma forte relação entre poupança e segurança. Precisam ter algum dinheiro guardado para imprevistos, geralmente relacionados a doenças, necessidades dos filhos ou emergências. Nem sempre os imprevistos são negativos. Viagens de passeio não programadas, festas de casamento de amigos ou parentes, boas oportunidades de compras que precisam de alguma poupança.

Importante também poupar para se ter uma vida mais segura e continuar no mesmo padrão de vida após a aposentadoria, já que cortes no salário podem ser realizados. Além disso, em idades mais avançadas o gasto com a saúde aumenta em grande escala e ter dinheiro neste momento ajuda na qualidade de vida.

.

Parte II:

Segundo informações contidas no texto “Rendimento da Poupança: hoje (atual), mensal e anual”, publicado em 04 de abril de 2017, disponível em <https://www.btgpactualdigital.com/blog/investimentos/poupanca/rendimento-da-poupanca.>, a poupança é o tipo de investimento mais comum no Brasil. A modalidade oferece baixo risco, fácil de realizar aplicação e resgate através dela e os retornos financeiros são livres de impostos. Para quem pensa no longo prazo e quer ver o seu dinheiro render mais, investir na poupança não é muito atraente, pois o rendimento da poupança é baixo, cerca de 0,5% ao mês.

Uma outra opção de investimento mais rentável é o CDB (Certificado de Depósito Bancário), título emitido pelo próprio banco, com o intuito de captar dinheiro das pessoas para a realização de empréstimos. Existem CDBs pré-fixados e pós-fixados. A diferença é que o primeiro possui taxa fixa para a rentabilização e o outro é variado. É possível encontrar CDBs com rentabilidade de até 1,27% ao mês.

O Tesouro Direto é outra opção de investimento bem interessante. É um programa de negociação de títulos públicos a pessoas físicas através da internet. Por meio dele, você estará “emprestando” suas economias ao governo para obter bons rendimentos com segurança. É possível encontrar Títulos do Tesouro com rentabilidade de até 1,18% ao mês.

A partir do texto “*Riqueza e Poupança*” e das informações contidas acima, faça o que se pede:

(a) Como observado, com a reforma na previdência para receber aposentadoria integral o tempo de contribuição deve ser de no mínimo 25 anos. Além disso, a idade mínima para conseguir se aposentar aumenta na maioria dos casos. Vamos supor que uma pessoa queira guardar dinheiro para garantir uma vida melhor depois de aposentado. Essa pessoa decidiu poupar 10% de seu salário mensalmente e investir em alguma aplicação. Suponha que essa pessoa receba um salário de R$ 3.000,00. Determine quanto essa pessoa conseguiria poupar num período de 15 anos poupando nos investimentos citados inicialmente, investindo inicialmente R$ 1.000,00. Sabe-se que o montante final $P(t)$, após t meses de aplicação, realizando depósitos constantes no valor *D*, a uma taxa de juros *n*, com valor inicial P_0 aplicado inicialmente é dado por:

$$P(t) = P_0 e^{nt} + \frac{D}{n}(e^{nt} - 1).$$

(b) Agora, determine, nas mesmas condições do item (a), quanto a pessoa conseguiria poupar num período de 25 anos.

(c) Defina o que é riqueza para você.

(d) Qual o seu sonho de consumo? Qual o valor desse bem material? Quanto você conseguiria economizar mensalmente para obter esse bem? Verifique o montante que você pode adquirir utilizando a função $P(t)$ dada no item **(a)**, para realizar esse desejo supondo que você irá poupar esse dinheiro na poupança e atribuindo valores para t.

Resolução: Os cálculos devem ser realizados em calculadoras científicas.

(a) Temos que transformar 15 anos em meses, pois todas as taxas de juros estão relatadas em meses. Daí, 15 anos = 15×12 meses = 180 meses, ou seja, $t = 180$ meses. O valor D será 10% de R$ 3.000,00. Assim, D = R$ 300,00.

A quantia que a pessoa conseguirá poupar é obtida calculando-se $P(180)$. Vamos obter esse valor em cada um dos investimentos citados (Poupança, CDB e Tesouro Direto), visto que cada um possui uma taxa de juro.

Investindo na poupança

A taxa de juros da poupança conforme mencionado é de 0,52%. Então $n = 0{,}0052$. Substituindo todos os valores, obtemos

$$P(180) = 1000.e^{(0{,}0052)\times(180)} + \frac{300}{0{,}0052}\left(e^{(0{,}0052)\times(180)} - 1\right) =$$

$$= 1000.e^{0{,}936} + 57692{,}3(e^{0{,}936} - 1) =$$

$$= 2549{,}76 + 89409{,}33 = 1959{,}09.$$

Investindo em CDB

Segundo as informações fornecidas a taxa de juros do CDB é de 1,27%, ou seja, $n = 0{,}0127$. Assim,

$$P(180) = 1000.e^{0{,}0127.180} + \frac{300}{0{,}0127}(e^{0{,}0127.180} - 1) =$$

$$= 1000.e^{2{,}286} + 23622{,}05(e^{2{,}286} - 1) =$$

$$= 9835{,}52 + 208713{,}02 = 218548{,}54.$$

Investindo no Tesouro Direto

No Tesouro Direto a taxa de juros, mencionada nas informações dadas, é de 1,18%. Logo, $n = 0{,}0118$ e, portanto,

$$P(180) = 1000.e^{0{,}0118.180} + \frac{300}{0{,}0118}(e^{0{,}0118.180} - 1) =$$

$$= 1000.e^{2{,}124} + 25423{,}73(e^{2{,}124} - 1) =$$

$$= 8364{,}53 + 187233{,}79 =$$

$$= 195598{,}32.$$

(b) Um período de 25 anos é igual a $t = 300$ meses. Agora, devemos calcular $P(300)$. Procedemos de maneira análoga e obtemos que:

-Investindo na poupança: $P(300) = 1000.e^{0{,}0052.300} + \frac{300}{0{,}0052}(e^{0{,}0052.300} - 1) =$

$$= 1000.e^{1{,}56} + 57692{,}3(e^{1{,}56} - 1) =$$

$$= 4758{,}82 + 216855{,}04 = 221613{,}86.$$

-Investindo em CDB: $P(300) = 1000.e^{0{,}0127.300} + \frac{300}{0{,}0127}(e^{0{,}0127.300} - 1) =$

$$= 1000.e^{3{,}81} + 23622{,}05(e^{3{,}81} - 1) =$$

$$= 45150{,}44 + 1042923{,}88 = 1088074{,}32.$$

-Investindo no Tesouro Direto: $P(300) = 1000.e^{0{,}0118.300} + \frac{300}{0{,}0118}(e^{0{,}0118.300} - 1)$

$$= 1000.e^{3{,}54} + 25423{,}73(e^{3{,}54} - 1) =$$

$$= 34466{,}91 + 850853{,}92 = 885320{,}83.$$

(c) Resposta pessoal.

(d) Esta resposta é pessoal. No entanto, será utilizado um exemplo fictício para a resolução do problema. Suponhamos que o desejo do jovem seja um novo celular no valor de R$ 1.500,00 e fosse possível economizar R$ 100,00 por mês. Para ver se será possível realizar esse desejo, vamos calcular para $t = 10, 11, 12, 13, 14\ e\ 15$ meses, quais seriam os montantes finais $P(\ t\ )$ obtidos pelo jovem se ele realizasse depósitos constantes na poupança (Tabela 7). Para isso consideraremos $P_0 = 0$ (que não há investimento inicial), $n = 0{,}0052$ (taxa de juros mensal da poupança) e D = R$ 100,00 (valor mensal possível de se economizar).

t (meses)	**P(t)**	**Valor final (R$)**
10	$\frac{100}{0{,}0052}(e^{0{,}0052.10} - 1)$	1.026,46
11	$\frac{100}{0{,}0052}(e^{0{,}0052.11} - 1)$	1.132,07
12	$\frac{100}{0{,}0052}(e^{0{,}0052.12} - 1)$	1.238,23
13	$\frac{100}{0{,}0052}(e^{0{,}0052.13} - 1)$	1.344,95
14	$\frac{100}{0{,}0052}(e^{0{,}0052.14} - 1)$	1.452,22
15	$\frac{100}{0{,}0052}(e^{0{,}0052.15} - 1)$	1.560,05

Tabela 7. Montante adquirido ao final de 10, 11, 12, 13, 14 e 15 meses.

Observação: A abordagem dessa atividade é contextualizada com a realidade deste período no que diz respeito à parte financeira de cada indivíduo, além de abordar um texto que faz refletir sobre conceitos diferentes de riqueza e a importância de se poupar dinheiro.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizar este tipo de trabalho com abordagens de aplicações próximas da realidade com os alunos busca incluir a matemática no cotidiano dos estudantes e torná-los mais interessados na disciplina. Os discentes devem enxergar a ciência como um todo e não de forma fragmentada como vem sendo explorado com as separações das matérias. Muitas vezes essa conexão não é alcançada. Além disso, trabalhar com textos é de grande importância para que melhorem na leitura e interpretação de situações-problema.

O uso do número *e* é pouco abordado no Ensino Médio e então, o professor deve a todo momento orientar seus alunos sobre a forma de como utilizá-lo para cálculo. Entretanto, ao ingressar no Ensino Superior o estudante já terá uma noção do seu uso e que é uma importante ferramenta de cálculo em questões contextualizadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, C. R.; FILHO, A. F. S. ***Saúde financeira não tem preço!*** Projeto Educação Financeira. Instituto Cooperforte e Fundação Banco do Brasil.

BARBOSA, D. ***Seca revela fósseis de mais de 70 mil anos em Caruaru***. Disponível em: <https://noticias.uol.com.br/ciencia/album/2013/05/07/seca-revela-fosseis-e-pinturas-rupestres-de-mais-de-70-mil-anos-em-caruaru.htm>. Acesso em 18 de abril de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. ***Parâmetros Curriculares Nacionais****: Ensino Médio* – Parte III, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 06 jun. 2017.

CESAR, P. ***Radioatividade.*** Profpc.com.br. 09 de julho de 2010. Disponível em <http://profpc.com.br/radioatividade.htm>. Acesso em 03 de Abril de 2017.

DANTE, L. R. ***Matemática: contexto & aplicações***. Vol.1. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

GEOGEBRA. Disponível em <http://www.geogebra.org/about>. Acesso em 18 de Julho de 2017.

GONÇALVES, J. P. ***A história da matemática comercial e financeira****,* 2005.

GUIDORIZZI, L. H. ***Um curso de cálculo.*** Vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HOFFMANN, L. D., BRADLEY, G. L. ***Cálculo: um curso moderno e suas aplicações***. Revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. ***Fundamentos de Matemática Elementar 2: logaritmos*****.** São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. ***Matemática.*** Vol. Único. Ensino Médio. São Paulo: Atual, 2011.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, C. A. ***A Matemática do Ensino Médio.*** Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LOPES, V. C. ***Equações Diferenciais Ordinárias na Graduação.*** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2015.

MAOR, E. ***e: a história de um número***. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARTELLO, A.; AMARAL, L. ***Veja as propostas do governo Temer para a reforma da previdência.*** 06 de Dezembro de 2016. Disponível em <http://g1.globo.com/economia/noticia/veja-as-mudancas-que-o-governo-propoe-com-a-reforma-da-previdencia.ghtml>. Acesso em 01 de Agosto de 2017.

NASCIMENTO, S. V do. ***A Matemática do Ensino Fundamental e Médio Aplicada à Vida***. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2011.

PIAGET, J. ***Problemas gerais da investigação interdisciplinar e mecanismos comuns.*** Lisboa: Livraria Bertrand, 1973a.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. ***Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.*** Secretaria da Educação; Coordenação Geral, Maria Inês Fini; Coordenação de Área, Nilson José Machado. São Paulo: SEE, 2010.

SITE BTGPACTUALDIGITAL.COM. ***Rendimento da poupança: hoje (atual), mensal e anual.*** 04 de Abril de 2017. Disponível em: <https://www.btgpactualdigital.com/blog/investimentos/poupanca/rendimento-da-poupanca.>. Acesso em 01 de Agosto de 2017.

SITE JORNALDAORLA.COM.BR. ***Grandes epidemias na história da humanidade.*** 20 de fevereiro de 2016. Disponível em: <http://www.jornaldaorla.com.br/noticias/23814-grandes-epidemias-na-historia-da-humanidade/> Acesso em 29 de Julho de 2017.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. ***Equações Diferenciais, volume 1***. Tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antonio Pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

APÊNDICE A

Na seção 1.1 foi apresentada a ideia geométrica para demonstração da descoberta de Jonh Napier sobre logaritmos.

Foi estabelecida a EDO

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{10^7}.$$

Essa EDO possui variáveis separáveis. Daí,

$$\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{10^7}dy.$$

Aplicando integral em ambos os membros da igualdade,

$$\int \frac{1}{x}dx = -\frac{1}{10^7}\int dy \Leftrightarrow \ln|x| = -\frac{y}{10^7} + c$$

$$\Leftrightarrow 10^7 \ln|x| = -y + 10^7$$

$$\Leftrightarrow y = 10^7 c - 10^7 \ln|x|.$$

O problema de valor inicial diz que quando y = 0, $x = 10^7$. Substituindo os valores em $= 10^7 c - 10^7 \ln|x|$,

$$0 = 10^7 c - 10^7 \ln 10^7 \Leftrightarrow 10^7 c = 10^7 \ln 10^7 \ \Leftrightarrow c = \ln 10^7$$

E então,

$$y = 10^7 \ln 10^7 - 10^7 \ln|x| \Leftrightarrow y = 10^7(\ln 10^7 - \ln|x|).$$

Sabemos que *x* é medida de segmento, ou seja, $x > 0$. Então,

$$y = 10^7(\ln 10^7 - \ln x) \Leftrightarrow y = 10^7(\ln 10^7 - \ln x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right) \Leftrightarrow y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right).$$

APÊNDICE B

Na seção 1.2 foi apresentada a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e que seu limite converge para o número de Euler. Segue abaixo a demonstração de que o limite da sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe.

Proposição. Se (a_n) é uma sequência crescente e limitada superiormente, então (a_n) converge.

Utilizaremos essa proposição para mostrarmos que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Dessa forma, devemos provar que a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada superiormente.

Empregando o Binômio de Newton nessa sequência, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

(i) Primeiramente, verifiquemos que a sequencia é crescente.

Sejam $s(n_1) = \left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1}$ e $s(n_2) = \left(1+\frac{1}{n_2}\right)^{n_2}$ tal que $n_1 < n_2$. Temos

$$\begin{aligned} s(n_1) &= \left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1} \\ &= \sum_{k=0}^{n_1}\binom{n_1}{k}\left(\frac{1}{n_1}\right)^{n_1} \\ &= \binom{n_1}{0}\left(\frac{1}{n_1}\right)^0 + \binom{n_1}{1}\left(\frac{1}{n_1}\right)^1 + \binom{n_1}{2}\left(\frac{1}{n_1}\right)^2 + \binom{n_1}{3}\left(\frac{1}{n_1}\right)^3 + \cdots + \binom{n_1}{n_1}\left(\frac{1}{n_1}\right)^{n_1} \\ &= 1 + 1 + \frac{n_1(n_1-1)}{n_1^2}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)}{n_1^3}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n_1!}{n_1^{n_1}}\cdot\frac{1}{n_1!} \end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$s(n_2) = 1 + 1 + \frac{n_2(n_2-1)}{n_2^2}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{n_2(n_2-1)(n_2-2)}{n_2^3}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n_2!}{n_2^{n_1}}\cdot\frac{1}{n_2!}$$

Como $n_1 < n_2$, $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{n_2}$então $-\frac{1}{n_1} < -\frac{1}{n_2}$.

Assim,

$$1-\frac{1}{n_1}<1-\frac{1}{n_2}\Rightarrow\frac{n_1-1}{n_1}<\frac{n_2-1}{n_2}\Rightarrow\frac{n_1(n_1-1)}{n_1^2}<\frac{n_2(n_2-1)}{n_2^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)}{n_1^3}<\frac{n_2(n_2-1)(n_2-2)}{n_2^3}$$

e assim por diante.

Portanto, $s(n_1)<s(n_2)$.

Logo, a sequência é crescente.

(ii) Demonstraremos que essa sequência é limitada superiormente.

De fato,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k k!}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{n^k k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=$$

$$=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots=$$

$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdots<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=1+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^n=3-\left(\frac{1}{2}\right)^n<3$$

Ou seja, a sequência é limitada superiormente.

Podemos concluir de (i) e (ii) que o limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe.

Vamos denotar que $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.