

UNESP
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**BÓSONS DE SPIN 0 E SPIN 1 EM UM DUPLO DEGRAU DE
POTENCIAL COM ACOPLAMENTO VETORIAL NÃO-MÍNIMO
NO FORMALISMO DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU**

Guaratinguetá
2012

LUIZ PAULO DE OLIVEIRA

BÓSONS DE SPIN 0 E SPIN 1 EM UM DUPLO DEGRAU DE
POTENCIAL COM ACOPLAMENTO VETORIAL NÃO-MÍNIMO NO
FORMALISMO DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU

Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia do
Campus de Guaratinguetá,
Universidade Estadual Paulista,
para obtenção do título de
Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

Guaratinguetá
2012

Oliveira, Luiz Paulo de
O482b Bósons de spin 0 e spin 1 em um duplo degrau de potencial com acoplamento vetorial não-mínimo no formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau / Luiz Paulo de Oliveira – Guaratinguetá : [s.n], 2012.
53 f : il.
Bibliografia: f. 49-50

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012.

Orientador: Dr. Antonio Soares de Castro

1. Mecânica quântica I. Título

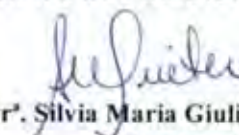
CDU 530.145(043)

LUIZ PAULO DE OLIVEIRA


ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

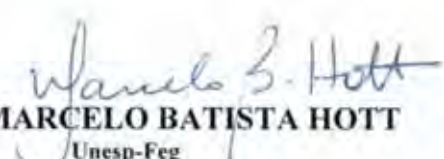
PROGRAMA: FÍSICA


APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ANTONIO SOARES DE CASTRO
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT
Unesp-Feg


Prof. Dr. MANUEL MÁXIMO BASTOS MALHEIRO DE OLIVEIRA
ITA

Agosto de 2012

DADOS CURRICULARES
LUIZ PAULO DE OLIVEIRA

NASCIMENTO	28.02.1988 – SÃO JOSÉ DOS CAMPOS / SP
FILIAÇÃO	Edson Celestino de Oliveira Durvalina Alves Guatura de Oliveira
2011/2012	Mestrado em Física Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” UNESP – Campus de Guaratinguetá
2006/2010	Bacharelado em Física Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” UNESP – Campus de Guaratinguetá
2003/2005	Curso Técnico/Profissionalizante em Química Colégio Técnico de Lorena Escola de Engenharia de Lorena- EEL/USP

Dedicado, com o mais profundo agradecimento, à memória de meu pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida, família e oportunidades.

Aos meus pais pelo amor, educação e formação moral e ética.

Ao meu pai pelo seu exemplo de vida, honestidade e honra.

Aos professores do Departamento de Física e Química, pela amizade e formação acadêmica, entre os quais destaco o Prof. Dr. Antonio Soares de Castro pela paciência e orientação deste trabalho.

À minha *alma mater*, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Aos colegas de pós-graduação pelas longas discussões sobre nosso futuro na ciência.

Por fim, agradeço a todos que estiveram ao meu lado nesta longa e emocionante jornada.

Este trabalho contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

“E aí, o tempo passou.
E, como todo mundo, o menino maluquinho cresceu.
Cresceu e virou um cara legal!
Aliás, virou o cara mais legal do mundo!
Mas, um cara legal, mesmo!
E foi aí que todo mundo descobriu que ele não tinha
sido um menino maluquinho.
Ele tinha sido era um menino feliz!”

(ZIRALDO, O. *O menino maluquinho*, Melhoramentos, São Paulo 1980)

OLIVEIRA, L. P. **Bósons de spin 0 e spin 1 em um duplo degrau de potencial com acoplamento vetorial não-mínimo no formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau.** 2012. 53 f. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

RESUMO

O problema relativístico de bósons de spin 0 e spin 1 em um duplo degrau de potencial é explorado no contexto da teoria de Duffin-Kemmer-Petiau com acoplamento vetorial não-mínimo. Os estados de espalhamento são analisados e um coeficiente de transmissão oscilatório é encontrado. Um aspecto interessante relacionado ao espalhamento de bósons de spin 0 é que o coeficiente de transmissão nunca desaparece, independentemente do tamanho do degrau de potencial. Surpreendentemente, nunca se pode ter uma onda incidente totalmente refletida, e a amplitude de transmissão tem polos complexos correspondentes a estados ligados. Mostra-se que tais estados ligados são intrinsecamente relativísticos.

Estendendo a análise de bósons de spin 0, o espalhamento de bósons de spin 1 é investigado em termos dos autoestados do operador helicidade. É mostrado que o coeficiente de transmissão, com a mesma forma que para bósons sem spin, é insensível à escolha da polarização do feixe incidente. O interessante caso especial de bósons sujeitos a um potencial sinal, com a sua única solução de estado ligado para bósons sem spin, é analisado como um caso limite. Mostra-se a inexistência de estados ligados de bósons de spin 1 em um potencial sinal.

PALAVRAS-CHAVE: equação de Duffin-Kemmer-Petiau, acoplamento não-mínimo, duplo degrau de potencial.

OLIVEIRA, L. P. **Spin-0 and spin-1 bosons in a double-step potential with nonminimal vector coupling in the Duffin-Kemmer-Petiau formalism.** 2012. 53 f. Master (Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

ABSTRACT

The relativistic problem of spin-0 and spin-1 bosons subject to a double-step potential is explored in the context of the Duffin-Kemmer-Petiau theory with nonminimal vector coupling. Scattering states are analyzed and an oscillatory transmission coefficient is found. An interesting point regarding the scattering of spin-0 bosons is that the transmission coefficient never vanishes, regardless of the size of the potential step. Surprisingly, one can never have an incident wave totally reflected, and the transmission amplitude has complex poles corresponding to bound states. It is shown that such bound states are intrinsically relativistic.

Extending the analysis of spin-0 bosons, the scattering of spin-1 bosons is investigated in terms of eigenstates of the helicity operator. It is shown that the transmission coefficient, with the same form as that for spinless bosons, is insensitive to the choice of polarization of the incident beam. The interesting special case of bosons subject to a sign potential, with its unique bound-state solution for spinless bosons, is analyzed as a limiting case. It is shown the inexistence of bound states of spin-1 bosons in a sign potential.

KEYWORDS: Duffin-Kemmer-Petiau equation, nonminimal coupling, double-step potential.

Sumário

1	Introdução	14
2	A equação de DKP	16
2.1	Origem e propriedades	16
2.2	Uma equação de continuidade para a teoria de DKP	18
2.3	Covariância de Lorentz da equação de DKP	19
2.4	Valores esperados e condição de normalização	21
2.5	O operador projeção na teoria de DKP	22
2.5.1	Setor escalar	23
2.5.2	Setor vetorial	24
2.6	Limite não-relativístico da equação de DKP livre	25
2.7	Interações no formalismo de DKP	26
2.8	A equação de DKP independente do tempo	27
2.9	Paridade, conjugação de carga e reversão temporal	27
3	Soluções da equação de DKP independente do tempo	30
3.1	Setor escalar	30
3.2	Setor vetorial	40
3.2.1	Espalhamento	42
3.2.2	Estados ligados	44
4	Conclusões	47
5	Apêndice A - Representações explícitas das matrizes β^μ	51

Lista de Figuras

3.1	Duplo degrau de potencial para $V_0 > 0$	32
3.2	Duplo degrau de potencial para $V_0 < 0$	32
3.3	Potencial efetivo para $V_0 > 0$. A altura do poço (região $ x > a$) é dada por $\frac{V_0^2}{2m}$	33
3.4	Potencial efetivo para $V_0 < 0$. A altura do poço (região $ x > a$) é dada por $\frac{V_0^2}{2m}$	33
3.5	Coefficiente de transmissão para $ v = 1$	38
3.6	Soluções de estados ligados para $ v = 5$	39
3.7	Espectro de energia.	40
3.8	Intervalos de energia.	40

Capítulo 1

Introdução

A equação de Duffin-Kemmer-Petiau [1]-[2], doravante equação de DKP, tem sido utilizada com sucesso na análise de interações relativísticas entre hádrons e núcleos. Esta equação de onda relativística de primeira ordem permite a descrição unificada de bósons de spin 0 e spin 1, tornando-se assim uma alternativa aos formalismos convencionais de segunda ordem de Klein-Gordon e Proca. A equação de DKP assemelha-se muito à equação fermiônica de Dirac, no entanto a álgebra das matrizes β^μ difere radicalmente das matrizes γ^μ . A equivalência entre a equação de DKP e as equações de Klein-Gordon e Proca foi mostrada recentemente para o caso das interações vetoriais minimamente acopladas [3]-[4], embora a equivalência entre a equação de DKP e a equação de Proca já tivesse um precedente, se não considerarmos correntes parcialmente conservadas nem interações escalares [5]-[6].

A grande variedade de acoplamentos, incapazes de serem expressos nas teorias de Klein-Gordon e Proca, garantem ao formalismo de DKP uma rica descrição dos sistemas físicos. Os acoplamentos são classificados de acordo com seus respectivos comportamentos perante transformações de Lorentz. Para o setor escalar (spin 0) as interações são constituídas por dois escalares, dois vetores e dois tensores [7]. Já para o setor vetorial (spin 1) as interações são constituídas por dois escalares, dois vetores, um pseudoescalar, dois pseudovetores e oito termos tensoriais [8]. Os acoplamentos escalar e vetorial, no formalismo de DKP, têm sido empregados no tratamento fenomenológico de espalhamentos elásticos méson-núcleo com melhores resultados experimentais quando comparados aos formalismos de Klein-Gordon e Proca [9]-[14]. A teoria de DKP tem sido aplicada em diversos ramos especializados da física, encontrados em [15].

No caso de partículas de spin 0, os acoplamentos vetoriais da teoria de DKP conduzem a uma equação de Klein-Gordon generalizada para um dos componentes do espinor de DKP [16]. Na ausência do potencial vetorial não-mínimo obtém-se a equação de Klein-Gordon na presença de um potencial minimamente acoplado. A forma dos dois distintos

acoplamentos vetoriais na equação de Klein-Gordon generalizada só se torna óbvio porque a interação opera sob a tutela da teoria de DKP. Caso contrário, somente o acoplamento mínimo poderia ser obtido pela aplicação da substituição mínima na equação de Klein-Gordon livre. Já no caso de partículas de spin 1, os acoplamentos vetoriais da teoria de DKP conduzem a uma equação de Klein-Gordon generalizada para um dos componentes do espinor de DKP e uma outra equação de Klein-Gordon generalizada para dois outros componentes do espinor de DKP [16]. As duas equações de Klein-Gordon generalizadas são acopladas, e isto pode restringir a classe de soluções para bósons vetoriais quando comparadas às soluções do caso escalar.

A adição de um acoplamento vetorial não-mínimo ao potencial minimamente acoplado afeta diretamente os processos de espalhamento, e o objetivo deste trabalho é a investigação das implicações desta adição com uma forma funcional unidimensional simples para o potencial de interação.

A descrição de férmions relativísticos de spin $1/2$, sob ação de duplo degrau de potencial com acoplamento pseudoescalar, foi objeto de investigação em [17] e deu origem a resultados surpreendentes: soluções de estados ligados são obtidas quando o potencial é suficientemente intenso. Destarte, o estudo de bósons de spin 0 e spin 1, submetidos a um duplo degrau de potencial com acoplamento vetorial não-mínimo, pode trazer luz para a descrição fenomenológica dos espalhamentos elásticos méson-núcleo.

O método desenvolvido neste trabalho permite abordar o problema de espalhamento e estados ligados de uma forma unificada [18]. A análise dos polos do coeficiente de transmissão surge como um caminho alternativo no estudo das soluções de estados ligados. Os resultados para um simples degrau, ou potencial sinal, são obtidos por meio de um processo limite.

Esta dissertação encontra-se dividida em três partes: o capítulo 2 aborda a origem e as propriedades da equação de DKP, o texto foi desenvolvido seguindo-se a estrutura encontrada nas referências [19]-[20]; no capítulo 3 são apresentadas as soluções e por fim no capítulo 4, as conclusões.

Os resultados obtidos nesta dissertação resultaram em dois artigos. Um deles, “Scattering and bound states of spin-0 particles in a nonminimal vector double-step potential” [21] já encontra-se publicado, e o outro “Transmission coefficient and two-fold degenerate discrete spectrum of spin-1 bosons in a double-step potential”, encontra-se submetido à publicação.

Capítulo 2

A equação de DKP

2.1 Origem e propriedades

A equação de Duffin-Kemmer-Petiau foi desenvolvida independentemente por Petiau, Kemmer e Duffin [1]-[2], numa série de trabalhos publicados na década 1930. A equação é muito semelhante a equação de Dirac, no entanto descreve bósons de spin 0 e spin 1, além de β^μ obedecer a álgebra de DKP. As matrizes β^μ são quadradas de ordem 16, enquanto o espinor de DKP possui 16 componentes. Devemos salientar que cada componente do espinor de DKP satisfaz automaticamente a equação de Klein-Gordon, como esperado para uma equação relativística [4]. Mais detalhes sobre o desenvolvimento histórico da equação da equação de DKP podem ser encontrados nas referências [22]-[23].

A equação de DKP livre pode ser escrita como:

$$(i\beta^\mu\partial_\mu - m)\psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1)$$

onde $\hbar = c = 1$ e as matrizes β^μ obedecem à seguinte álgebra:

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = g^{\lambda\nu}\beta^\mu + g^{\mu\nu}\beta^\lambda \quad (2.2)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski com assinatura $(1, -1, -1, -1)$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$. É importante notar que, diferentemente das matrizes γ^μ pertencentes a álgebra de Clifford e presentes na equação de Dirac, as matrizes β^μ não possuem inversa. Algumas propriedades úteis da álgebra de DKP são apresentadas abaixo.

Fazendo-se $\mu = \nu = \lambda$ em (2.2), obtemos

$$(\beta^\mu)^3 = \beta^\mu g^{\mu\mu} \quad (2.3)$$

Definindo

$$\eta^\mu \equiv 2(\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu} \quad (2.4)$$

observamos que

$$(\eta^\mu)^2 = 1 = (g^{\mu\mu})^2 \quad (2.5)$$

A relação de anticomutatividade entre as matrizes β^μ e as matrizes η^μ pode ser obtida a partir do seguinte processo: a) multiplica-se a relação (2.4) por β^λ à direita, obtendo-se

$$\eta^\mu \beta^\lambda = 2(\beta^\mu)^2 \beta^\lambda - g^{\mu\mu} \beta^\lambda \quad (2.6)$$

b) fazendo-se $\mu = \nu$ em (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} (\beta^\mu)^2 \beta^\lambda + \beta^\lambda (\beta^\mu)^2 &= \beta^\mu g^{\lambda\mu} + \beta^\lambda g^{\mu\mu} \\ (\beta^\mu)^2 \beta^\lambda &= \beta^\mu g^{\lambda\mu} + \beta^\lambda g^{\mu\mu} - \beta^\lambda (\beta^\mu)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo-se (2.7) em (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} \eta^\mu \beta^\lambda &= 2\beta^\mu g^{\lambda\mu} + 2\beta^\lambda g^{\mu\mu} - 2\beta^\lambda (\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu} \beta^\lambda \\ &= 2\beta^\mu g^{\lambda\mu} + \beta^\lambda g^{\mu\mu} - 2\beta^\lambda (\beta^\mu)^2 \\ &= 2\beta^\mu g^{\lambda\mu} + \beta^\lambda (g^{\mu\mu} - 2(\beta^\mu)^2) \\ &= 2\beta^\mu g^{\lambda\mu} - \beta^\lambda \eta^\mu \end{aligned}$$

portanto

$$\{\eta^\mu, \beta^\lambda\} = 2\beta^\mu g^{\lambda\mu} \quad (2.8)$$

ou seja,

$$\{\eta^\mu, \beta^\lambda\} = 0, \quad \mu \neq \lambda \quad (2.9)$$

$$\{\eta^\mu, \beta^\lambda\} = 2g^{\mu\mu} \beta^\mu \quad \mu = \lambda$$

Para obtermos agora o comutador entre as matrizes η^μ e β^μ , devemos multiplicar (2.4) por β^μ à direita

$$\begin{aligned} \eta^\mu \beta^\mu &= 2(\beta^\mu)^3 - g^{\mu\mu} \beta^\mu \\ \eta^\mu \beta^\mu &= \beta^\mu g^{\mu\mu} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Simili modo, multiplicando (2.4) por β^μ pela esquerda obtemos

$$\begin{aligned} \beta^\mu \eta^\mu &= 2(\beta^\mu)^3 - \beta^\mu g^{\mu\mu} \\ \beta^\mu \eta^\mu &= \beta^\mu g^{\mu\mu} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pela diferença entre (2.10) e (2.11), obtemos

$$[\eta^\mu, \beta^\mu] = 0 \quad (2.12)$$

Fazendo-se $\mu = \lambda$ em (2.4) obtemos

$$\eta^\lambda = 2 (\beta^\lambda)^2 - g^{\lambda\lambda} \quad (2.13)$$

Podemos concluir que

$$[\eta^\mu, \eta^\lambda] = [(\beta^\mu)^2, (\beta^\lambda)^2] \quad (2.14)$$

Fazendo-se $\mu \neq \lambda$ em (2.7), podemos obter

$$(\beta^\mu)^2 (\beta^\lambda)^2 = (\beta^\lambda)^2 (\beta^\mu)^2, \quad \text{para } \mu \neq \lambda \quad (2.15)$$

Logo

$$[\eta^\mu, \eta^\lambda] = 0 \quad (2.16)$$

2.2 Uma equação de continuidade para a teoria de DKP

Uma equação de continuidade pode ser obtida para a teoria de DKP. Podemos definir um campo $\bar{\psi}$ correspondente ao conjugado de ψ da seguinte maneira

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger C \quad (2.17)$$

onde C é uma matriz constante inversível. Aplicando o conjugado hermitiano da equação de DKP, obtemos

$$\begin{aligned} [(i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi]^\dagger &= 0 \\ -i\partial_\mu \psi^\dagger \beta^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger &= 0 \\ i\partial_\mu \psi^\dagger C C^{-1} \beta^{\mu\dagger} + m\psi^\dagger &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Multiplicado (2.18) por C pela direita, temos

$$\begin{aligned} i\partial_\mu \psi^\dagger C C^{-1} \beta^{\mu\dagger} C + m\psi^\dagger C &= 0 \\ i\partial_\mu \bar{\psi} C^{-1} \beta^{\mu\dagger} C + m\bar{\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Multiplicado (2.19) por ψ pela direita, temos

$$i (\partial_\mu \bar{\psi}) C^{-1} \beta^{\mu\dagger} C \psi + m\bar{\psi} \psi = 0 \quad (2.20)$$

Multiplicando-se a equação de DKP por $\bar{\psi}$ pela esquerda, obtemos

$$i\bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi = 0 \quad (2.21)$$

Somando-se (2.20) e (2.21) temos

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu \bar{\psi}) C^{-1} \beta^{\mu\dagger} C \psi + \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi &= 0 \\
\partial_\mu (\bar{\psi} \beta^\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} C^{-1} \beta^{\mu\dagger} C \psi &= 0 \\
\partial_\mu (\bar{\psi} \beta^\mu \psi) &= (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) C \beta^{\mu\dagger} C \psi \\
\partial_\mu J^\mu &= 0 \iff \beta^\mu = C^{-1} \beta^{\mu\dagger} C \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Portanto podemos definir uma densidade de quadricorrente

$$J^\mu \equiv \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi \quad (2.23)$$

se e somente se $\beta^\mu = C^{-1} \beta^{\mu\dagger} C$. O fator $\frac{1}{2}$ é necessário para que se obtenha uma densidade de quadricorrente similar àquela utilizada na equação de Klein-Gordon [24]. No entanto, o componente temporal de J^μ não é positivo-definido, o que elimina a possibilidade de interpretarmos J^0 como uma densidade de probabilidade.

Podemos concluir de (2.22) que a matriz β^μ é hermitiana com respeito a matriz C , de maneira que

$$(\beta^\mu)^\dagger = C \beta^\mu C^{-1} \quad (2.24)$$

Uma representação adotada na literatura [4],[6],[7],[16]-[18] para a matriz C é

$$C = \eta^0 \quad (2.25)$$

Portanto, $\bar{\psi}$ é definido como

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \eta^0 \quad (2.26)$$

A equação de DKP livre pode ser obtida através da densidade de lagrangiana [4]

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (2.27)$$

que ao satisfazer a equação de Euler-Lagrange, fornece a equação de movimento dos bósons.

2.3 Covariância de Lorentz da equação de DKP

Uma teoria relativística adequada deve ser covariante de Lorentz, ou seja, sua forma deve ser invariante por uma transição de um sistema inercial para o outro [25]. Dois observadores, X e X' , em diferentes sistemas inerciais descrevem o mesmo evento físico com suas particulares coordenadas espaço-temporais. A lei de transformação das coordenadas e suas respectivas derivadas, são definidas como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \partial'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu \quad (2.28)$$

A distância entre dois pontos espaço-temporais é invariante sob transformações de Lorentz

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = dx'^\mu dx'_\mu \quad (2.29)$$

e conseqüentemente

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho = \delta^\mu_\rho \quad (2.30)$$

chamada de relação de ortogonalidade para transformações de Lorentz. Da relação (2.30), segue-se que

$$\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = \pm 1 \quad (2.31)$$

onde sinal superior representa uma transformação de Lorentz própria e o inferior uma transformação imprópria. As transformações de Lorentz próprias finitas podem ser obtidas por um número infinito de transformações infinitesimais sucessivas a partir da identidade.

Definindo as seguintes transformações

$$\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x), \quad m' = m \quad (2.32)$$

exigimos que a equação de DKP permaneça invariante, isto é

$$(i\beta'^\mu \partial'_\mu - m') \psi'(x') = 0 \quad (2.33)$$

Devemos exigir, também, que as matrizes β'^μ satisfaçam a álgebra DKP, i.e

$$\beta'^\mu \beta'^\nu \beta'^\lambda + \beta'^\lambda \beta'^\nu \beta'^\mu = g^{\mu\nu} \beta'^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta'^\mu \quad (2.34)$$

A fim de conectar os dois referenciais inerciais, devemos obter a forma explícita das transformações β'^μ e $U(\Lambda)$. Lembrando que deve haver também uma transformação inversa U^{-1} , que possibilita o retorno ao sistema de referência inicial. Substituindo as transformações (2.28) e (2.32) em (2.33), obtemos

$$[i\beta'^\mu \Lambda^\nu{}_\mu U(\Lambda) \partial_\nu - mU(\Lambda)] \psi(x) = 0 \quad (2.35)$$

Multiplicando (2.35) por U^{-1} à esquerda temos

$$[iU^{-1}\beta'^\mu U \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] \psi(x) = 0 \quad (2.36)$$

Comparando (2.36) com a forma da equação de DKP, observamos que as matrizes β^μ devem-se transformar como

$$U^{-1}(\Lambda)\beta'^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \beta^\nu \quad (2.37)$$

Desta forma, construamos o operador $U(\Lambda)$ para as transformações de Lorentz próprias infinitesimais, dadas por

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu + O(\Delta\omega^2) \quad (2.38)$$

Visando a relação de ortogonalidade (2.30), podemos concluir que

$$\Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu} \quad (2.39)$$

Expandindo $U(\Lambda)$ em potências de $\Delta\omega^{\mu\nu}$

$$U(\Lambda) = 1 + i\alpha\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + O(\Delta\omega^2) \quad (2.40)$$

substituindo em (2.37) e desprezando os termos de segunda ordem em $\Delta\omega^2$, obtemos

$$\beta'^{\mu} + i\alpha\Delta\omega_{\rho\sigma}\beta'^{\mu}S^{\rho\sigma} - i\alpha\Delta\omega_{\gamma\delta}S^{\gamma\delta}\beta'^{\mu} = \beta^{\mu} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\rho}\beta^{\rho} \quad (2.41)$$

Igualando os coeficientes dos polinômios (em $\Delta\omega$) de ambos termos de (2.41), obtemos que

$$\beta'^{\mu} = \beta^{\mu} \quad (2.42)$$

$$i\alpha\Delta\omega_{\rho\sigma}[\beta^{\mu}, S^{\rho\sigma}] = \Delta\omega^{\mu}{}_{\rho}\beta^{\rho} \quad (2.43)$$

Ou seja, a relação (2.43) é uma consequência do fato de exigirmos que as matrizes β^{μ} sejam independentes das coordenadas escolhidas no espaço de Minkowski. A forma explícita do gerador infinitesimal $S^{\rho\sigma}$ e o valor do coeficiente α , são dados por

$$S^{\rho\sigma} = i[\beta^{\rho}, \beta^{\sigma}] \quad \text{e} \quad \alpha = -\frac{1}{2}, \quad (2.44)$$

Logo, a transformação de Lorentz própria finita fica completamente determinada por

$$U(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\Delta\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right). \quad (2.45)$$

Como consequência da covariância sob rotações, a matriz definida como

$$S_k = i\varepsilon_{ijk}\beta^i\beta^j = i[\beta^i, \beta^j] \quad (2.46)$$

satisfaz a álgebra do momento angular $[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k$ e o spin é automaticamente incorporado à teoria de DKP como um ingrediente necessário para descrever a mistura de vários componentes do espinor.

2.4 Valores esperados e condição de normalização

Após a tentativa de obtermos uma densidade de probabilidade positiva definida, J^0 pode ser interpretada como uma densidade de carga. A condição de normalização $\int d\tau J^0 = \pm 1$ é expressa na teoria de DKP como

$$\int d\tau \bar{\psi}\beta^0\psi = \pm 2 \quad (2.47)$$

em que o sinal positivo (negativo) deve ser usado para uma carga positiva (negativa). O valor esperado de qualquer observável \mathcal{O} é dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int d\tau \bar{\psi} (\beta^0 \mathcal{O}) \psi}{\int d\tau \bar{\psi} \beta^0 \psi} \quad (2.48)$$

onde $\beta^0 \mathcal{O}$ deve ser hermitiano com respeito a η^0 , ou seja, $[\eta^0 (\beta^0 \mathcal{O})]^\dagger = \eta^0 (\beta^0 \mathcal{O})$, para assegurar que $\langle \mathcal{O} \rangle$ seja uma quantidade real.

2.5 O operador projeção na teoria de DKP

As matrizes β^μ formam uma base constituída por 256 matrizes linearmente independentes. No entanto as representações da teoria de DKP são redutíveis e podem ser divididas em três representações irredutíveis, contabilizando um conjunto de 126 matrizes independentes: uma representação de primeira ordem sem significado físico, uma representação de quinta ordem (25 matrizes) que descreve o setor escalar e uma representação de décima ordem (100 matrizes) que descreve o setor vetorial. Desta feita, o espinor de DKP apresenta um excesso de componentes e a teoria deve ser complementada por uma equação que possa eliminar os componentes redundantes. Multiplicando a equação de DKP por $(1 - \beta^0 \beta^0)$ pela esquerda, temos

$$\begin{aligned} (1 - \beta^0 \beta^0) (i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi &= 0 \\ i\beta^0 \partial_0 \psi + i\beta^i \partial_i \psi - m\psi - i(\beta^0)^3 \partial_0 \psi - i(\beta^0)^2 \beta^i \partial_i \psi + m(\beta^0)^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Da equação (2.3) temos, para o caso em que $\mu = 0$

$$(\beta^0)^3 = \beta^0 \quad (2.50)$$

Simili modo, da relação (2.2), temos para $\mu = \nu = 0$ e $\lambda = i$

$$(\beta^0)^2 \beta^i = \beta^i - \beta^i (\beta^0)^2 \quad (2.51)$$

Podemos reescrever (2.49) como

$$\begin{aligned} i\beta^0 \partial_0 \psi + i\beta^i \partial_i \psi - m\psi - i\beta^0 \partial_0 \psi - i \left[\beta^i - \beta^i (\beta^0)^2 \right] \partial_i \psi + m(\beta^0)^2 \psi &= 0 \\ i\beta^i (\beta^0)^2 \partial_i \psi + m(\beta^0)^2 \psi - m\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

isto é,

$$i\beta^i \beta^0 \beta^0 \partial_i \psi = m(1 - \beta^0 \beta^0) \psi \quad (2.53)$$

2.5.1 Setor escalar

Da referência [7], define-se os operadores projeção para o setor escalar como

$$P \equiv \frac{1}{3} (\beta^\mu \beta_\mu - 1), \quad P^\mu \equiv P \beta^\mu \quad (2.54)$$

que obedecem às seguintes relações algébricas

$$P^2 = P \quad (2.55)$$

$$P^\mu \beta^\nu = P \beta^\mu \beta^\nu = P g^{\mu\nu} \quad (2.56)$$

$$P S^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} P = 0 \quad (2.57)$$

$$P^\mu S^{\nu\lambda} = i (g^{\mu\nu} P^\lambda - g^{\mu\lambda} P^\nu) \quad (2.58)$$

Dadas as transformações de Lorentz, $(\beta^\mu)' = \beta^\mu$, $P' = P$, $(P^\mu)' = (P \beta^\mu)' = P^\mu$ e usando a relação (2.57) pode-se mostrar que

$$(P\psi)' = P'\psi' = PU\psi = P \left(1 + \frac{1}{2} \Delta\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + O(\Delta\omega^2) \right) \psi = P\psi \quad (2.59)$$

onde $U = (1 + \frac{1}{2} \Delta\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + O(\Delta\omega^2))$. Similarmente, para o projetor P^μ , temos que

$$(P^\mu\psi)' = P^\mu U\psi = P^\mu \left(1 + \frac{1}{2} \Delta\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + O(\Delta\omega^2) \right) \psi \quad (2.60)$$

usando a relação (2.58) obtemos que

$$(P^\mu\psi)' = (\delta_\nu^\mu + \Delta\omega_\lambda^\mu + O(\Delta\omega^2)) P^\lambda\psi = \Lambda^\mu{}_\lambda P^\lambda\psi \quad (2.61)$$

Desta maneira, podemos concluir que $P^\mu\psi$ transforma-se como um vetor de Lorentz. Destarte, esses operadores que foram definidos de forma independente da representação, são chamados de projetores do setor escalar da teoria DKP. Esses operadores selecionam as componentes do espinor ψ que se transformam como um campo escalar e como o seu vetor gradiente associado.

Por outro lado, aplicando o operador P à equação de DKP, obtemos

$$\begin{aligned} iP\beta^\mu \partial_\mu \psi - mP\psi &= 0 \\ i\partial_\mu P^\mu \psi &= mP\psi \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde $P\beta^\mu = P^\mu$. Aplicando-se P^ν à equação de DKP

$$\begin{aligned} iP^\nu \beta^\mu \partial_\mu \psi - mP^\nu \psi &= 0 \\ P^\nu \psi &= \frac{i}{m} \partial^\nu P\psi \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde $P^\nu \beta^\mu = P g^{\mu\nu}$. Substituindo (2.63) em (2.62)

$$i\partial_\mu \left(\frac{i}{m} \partial^\mu P\psi \right) - mP\psi = 0 \quad (2.64)$$

e portanto

$$\partial_\mu \partial^\mu (P\psi) + m^2 (P\psi) = 0 \quad (2.65)$$

que é a equação de Klein-Gordon para um bóson livre. Portanto, quando o operador projeção P é aplicado à equação de DKP, o setor de escalar da teoria é então selecionado, fornecendo apenas o componente físico do espinor que obedece à equação de Klein-Gordon livre.

2.5.2 Setor vetorial

Simili modo ao caso escalar, definimos os projetores [26]

$$R^\mu = (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\mu \beta^0 - g^{\mu 0}), \quad R^{\mu\nu} = R^\mu \beta^\nu \quad (2.66)$$

com as seguintes propriedades

$$R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu} \quad (2.67)$$

$$R^{\mu\nu} \beta^\alpha = R^\mu g^{\nu\alpha} - R^\nu g^{\mu\alpha} \quad (2.68)$$

$$R^\mu S^{\nu\lambda} = i (g^{\mu\nu} R^\lambda - g^{\mu\lambda} R^\nu) \quad (2.69)$$

$$R^{\mu\nu} S^{\alpha\beta} = i (g^{\nu\alpha} R^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} - g^{\nu\beta} R^{\mu\alpha} + g^{\mu\beta} R^{\nu\alpha}) \quad (2.70)$$

Aplicando os projetores do setor vetorial à equação DKP, obtemos

$$\partial_\nu R^{\mu\nu} \psi = -imR^\mu \psi \quad (2.71)$$

e aplicando $R^{\mu\nu}$ à equação de DKP e usando (2.68) obtemos

$$R^{\mu\nu} \psi = \frac{i}{m} U^{\nu\mu} \quad (2.72)$$

onde

$$U^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu \psi - \partial^\nu R^\mu \psi \quad (2.73)$$

Substituindo-se (2.72) em (2.71), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left(\frac{i}{m} U^{\nu\mu} \right) &= -imR^\mu \psi \\ \partial_\nu U^{\nu\mu} &= -m^2 R^\mu \psi \end{aligned} \quad (2.74)$$

e portanto

$$\begin{cases} U^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu \psi - \partial^\nu R^\mu \psi \\ \partial_\nu U^{\nu\mu} = -m^2 R^\mu \psi \end{cases} \quad (2.75)$$

que é a equação de Proca livre. Combinando as equações acima temos que

$$\begin{aligned}\partial_\nu (\partial^\nu R^\mu \psi - \partial^\mu R^\nu \psi) &= -m^2 R^\mu \psi \\ \partial_\nu \partial^\nu R^\mu \psi - \partial_\nu \partial^\mu R^\nu \psi + m^2 R^\mu \psi &= 0\end{aligned}\quad (2.76)$$

diferenciando (2.76) obtemos

$$\begin{aligned}\partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu R^\mu \psi - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu R^\nu \psi + m^2 \partial_\mu R^\mu \psi &= 0 \\ \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu R^\mu \psi - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu R^\nu \psi + m^2 \partial_\mu R^\mu \psi &= 0 \\ m^2 \partial_\mu R^\mu \psi &= 0\end{aligned}\quad (2.77)$$

e portanto

$$\partial_\mu R^\mu \psi = 0 \quad (2.78)$$

aplicando (2.78) em (2.76)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) R^\mu \psi = 0. \quad (2.79)$$

Portanto (2.79), mais o vínculo dado por (2.78), correspondem a equação de Proca para $R^\mu \psi$.

2.6 Limite não-relativístico da equação de DKP livre

Os componentes do espinor de DKP, bem como os componentes do espinor projetado, obedecem a equação de Klein-Gordon para o setor escalar. Conseqüentemente o limite não-relativístico da equação de Klein-Gordon resultará no limite não-relativístico da equação de DKP para o setor escalar. Enquanto que para o setor vetorial, o espinor obedece à equação de Proca. Esta por sua vez, resulta em uma equação de Schrödinger livre mais os seus vínculos quando levada ao limite não-relativístico.

Para analisarmos o limite não-relativístico da equação de Klein-Gordon, introduzimos o *ansatz*

$$\Phi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) \exp(-imt) \quad (2.80)$$

onde $\varphi(\vec{r}, t)$ é uma função de onda não-relativística. Diferenciando a equação acima com respeito ao tempo até segunda ordem e utilizando o limite $E - m \ll m \rightarrow i \frac{\partial \varphi}{\partial t} \ll m \varphi$, obtemos

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = - \left(2im \frac{\partial \varphi}{\partial t} + m^2 \varphi \right) \exp(-imt) \quad (2.81)$$

Substituindo (2.81) na equação

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi = 0 \quad (2.82)$$

obtemos a equação de Schrödinger livre

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.83)$$

2.7 Interações no formalismo de DKP

A equação de DKP (2.1) com interações pode ser escrita como

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m - V)\psi = 0 \quad (2.84)$$

onde o potencial de interação V possui uma estrutura matricial, a qual é escrita em termos de 25 (100) matrizes linearmente independentes que pertencem à representação irredutível associada ao setor escalar (vetorial) da teoria.

Podemos obter uma equação de continuidade para a equação de DKP analogamente à seção (2.2). Aplicando o conjugado hermitiano da equação de DKP com interações, obtemos

$$\begin{aligned} [(i\beta^\mu \partial_\mu - m - V)\psi]^\dagger &= 0 \\ i\partial_\mu \psi^\dagger \beta^{\mu\dagger} + m\psi^\dagger + \psi^\dagger V^\dagger &= 0 \\ i\partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \eta^0 + m\psi^\dagger \eta^0 + \psi^\dagger \eta^0 \eta^0 V^\dagger \eta^0 &= 0 \\ i\partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu + m\psi^\dagger \eta^0 + \psi^\dagger \eta^0 \eta^0 V^\dagger \eta^0 &= 0 \\ i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu + m\bar{\psi} + \bar{\psi} \eta^0 V^\dagger \eta^0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Multiplicando (2.85) por ψ pela direita, temos

$$i(\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi + \bar{\psi} \eta^0 V^\dagger \eta^0 \psi + m\bar{\psi} \psi = 0 \quad (2.86)$$

Multiplicando-se a equação de DKP por $\bar{\psi}$ pela esquerda, obtemos

$$i\bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi - \bar{\psi} V \psi = 0 \quad (2.87)$$

Somando-se (2.86) e (2.87) temos

$$\begin{aligned} i(\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi + i\bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} (\eta^0 V^\dagger \eta^0 - V) \psi &= 0 \\ i\partial_\mu (\bar{\psi} \beta^\mu \psi) + \bar{\psi} (\eta^0 V^\dagger \eta^0 - V) \psi &= 0 \\ \partial_\mu J^\mu + \frac{i}{2} \bar{\psi} (V - \eta^0 V^\dagger \eta^0) \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.88)$$

Portanto a quadricorrente (2.23) só será conservada apenas quando V for hermitiano com respeito a η^0 . O potencial de interação V pode ser escrito em termos de estruturas de Lorentz bem definidas, e estas são classificadas de acordo com seu comportamento com respeito às transformações de Lorentz.

Neste trabalho será abordada uma interação vetorial não-mínima com a seguinte estrutura

$$V = i[P, \beta^\mu] A_\mu \quad (2.89)$$

onde P é o operador projeção definido por (2.54) no setor escalar, e definido por

$$P = (\beta^\mu \beta_\mu - 2) \quad (2.90)$$

para o setor vetorial, A_μ é a função quadripotencial. Desta maneira $\bar{\psi}P\psi$ comporta-se como um escalar e $\bar{\psi}[P, \beta^\mu]\psi$ um vetor perante transformações de Lorentz. Substituindo (2.89) na equação de DKP não livre, obtemos

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m - i[P, \beta^\mu]A_\mu)\psi = 0 \quad (2.91)$$

Na seção (2.9) veremos que A_μ é invariante sob conjugação de carga, i.e., o potencial não distingue partículas de antipartículas.

2.8 A equação de DKP independente do tempo

Sendo o potencial de interação independente do tempo, o *Ansatz*

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \exp(-iEt) \quad (2.92)$$

pode ser aplicado à equação de DKP (2.1), resultando

$$\beta^0 E\phi + i\beta^i \partial_i \phi - m\phi - V\phi = 0 \quad (2.93)$$

Com o acoplamento vetorial não-mínimo a equação de DKP se torna

$$(\beta^0 E + i\beta^i \partial_i - m - i[P, \beta^\mu]A_\mu)\phi = 0 \quad (2.94)$$

com a densidade de quadricorrente dada por

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi \\ &= \frac{1}{2} \bar{\phi} \exp(iEt) \beta^\mu \phi \exp(-iEt) \\ &= \frac{1}{2} \bar{\phi} \beta^\mu \phi \end{aligned} \quad (2.95)$$

Logo ϕ descreve um estado estacionário.

2.9 Paridade, conjugação de carga e reversão temporal

A fim de auxiliar a interpretação das soluções da equação de DKP com acoplamento vetorial não-mínimo, estudaremos a simetria PCT da referida equação.

A transformação de paridade é definida pela atuação do operador

$$\hat{P} = P_m P_f \quad (2.96)$$

onde P_f atua sobre funções, efetuando a transformação $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, e $P_m = \eta^0 \exp(i\theta_p)$, tal que $P_m^2 = I$ ($\theta_p = 0$ ou π). Desta maneira, a atuação do operador de paridade sobre matrizes funcionais, é dada por

$$\hat{P}[\alpha f(\vec{r}, t) + \beta g(\vec{r}, t)]\hat{P}^{-1} = \alpha f(-\vec{r}, t) + \beta g(-\vec{r}, t) \quad (2.97)$$

Definindo a atuação do operador paridade sobre o espinor de DKP como

$$\hat{P}\psi(\vec{r}, t) \equiv \psi_p(\vec{r}, t) \quad (2.98)$$

e aplicando o mesmo operador sobre a equação de DKP com interação vetorial não-mínima, temos

$$\{iP_m\beta^0 P_m^{-1}\partial_0 - iP_m\beta^k P_m^{-1}\partial_k - m - iP_m[P, \beta^\mu]P_m^{-1}P_f A_\mu(\vec{r}, t)P_f^{-1}\} \psi_p(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.99)$$

Para mantermos a covariância da equação de DKP sobre paridade, podemos concluir que

$$\begin{aligned} P_m\beta^0 P_m^{-1} &= \beta^0 \\ P_m\beta^k P_m^{-1} &= -\beta^k \\ P_m P P_m^{-1} &= P \\ P_m[P, \beta^k]P_m^{-1} &= -[P, \beta^k] \\ P_f A_k(\vec{r}, t)P_f^{-1} &= -A_k(-\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.100)$$

A conjugação de carga é definida pela atuação do operador

$$\hat{C} = C_m C_f \quad (2.101)$$

onde C_f atua sobre funções, efetuando o complexo conjugado e a conjugação de carga, e $C_m = \eta^0 \eta^1 \exp(i\theta_c)$, tal que $C_m^2 = I$ ($\theta_c = 0$ ou π). Desta maneira, a atuação do operador conjugação de carga sobre matrizes funcionais, é dada por

$$\hat{C}[\alpha f(\vec{r}, t) + \beta g(\vec{r}, t)]\hat{C}^{-1} = \alpha^* f_c(\vec{r}, t) + \beta^* g_c(\vec{r}, t) \quad (2.102)$$

Definindo a atuação do operador conjugação de carga sobre o espinor de DKP como

$$\hat{C}\psi(\vec{r}, t) \equiv \psi_c(\vec{r}, t) \quad (2.103)$$

e aplicando o mesmo operador sobre a equação de DKP com interação vetorial não-mínima, temos

$$\{iC_m\beta^0 C_m^{-1}\partial_0 - iC_m\beta^k C_m^{-1}\partial_k - m - iC_m[P, \beta^\mu]C_m^{-1}C_f A_\mu(\vec{r}, t)C_f^{-1}\} \psi_c(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.104)$$

Para mantermos a covariância da equação de DKP sobre conjugação de carga, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
C_m \beta^0 C_m^{-1} &= -\beta^0 \\
C_m \beta^k C_m^{-1} &= -\beta^k \\
C_m P C_m^{-1} &= P \\
C_m [P, \beta^k] C_m^{-1} &= -[P, \beta^k] \\
C_f A_k(\vec{r}, t) C_f^{-1} &= A_k(\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{2.105}$$

A reversão temporal é definida pela atuação do operador

$$\hat{T} = T_m T_f \tag{2.106}$$

onde T_f atua sobre funções, efetuando o complexo conjugado e a transformação $t \rightarrow -t$, e $T_m = \eta^0 \exp(i\theta_t)$, tal que $T_m^2 = I$ ($\theta_t = 0$ ou π). Desta maneira, a atuação do operador reversão temporal sobre matrizes funcionais, é dada por

$$\hat{T}[\alpha f(\vec{r}, t) + \beta g(\vec{r}, t)]\hat{T}^{-1} = \alpha^* f_T(\vec{r}, -t) + \beta^* g_T(\vec{r}, -t) \tag{2.107}$$

Definindo a atuação do operador paridade sobre o espinor de DKP como

$$\hat{T}\psi(\vec{r}, t) \equiv \psi_T(\vec{r}, t) \tag{2.108}$$

e aplicando o mesmo operador sobre a equação de DKP com interação vetorial não-mínima, temos

$$\{-iT_m \beta^0 T_m^{-1} \partial_0 - iT_m \beta^k T_m^{-1} \partial_k - m - iT_m [P, \beta^\mu] T_m^{-1} T_f A_\mu(\vec{r}, t) T_f^{-1}\} \psi_T(\vec{r}, t) = 0 \tag{2.109}$$

Para mantermos a covariância da equação de DKP sobre reversão temporal, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
T_m \beta^0 T_m^{-1} &= \beta^0 \\
T_m \beta^k T_m^{-1} &= -\beta^k \\
T_m P T_m^{-1} &= P \\
T_m [P, \beta^k] T_m^{-1} &= -[P, \beta^k] \\
T_f A_k(\vec{r}, t) T_f^{-1} &= A_k(\vec{r}, -t)
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Capítulo 3

Soluções da equação de DKP independente do tempo

3.1 Setor escalar

Para o setor escalar da teoria DKP (spin 0) usaremos a representação dada por [27]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho_i \\ -\rho_i^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rho_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que $\bar{\mathbf{0}}$, $\tilde{0}$ e $\mathbf{0}$ são matrizes nulas 2×3 , 2×2 e 3×3 , respectivamente, enquanto o sobrescrito T designa a matriz transposta. Nessa representação temos que

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

em que $\bar{\mathbf{I}}$ e \mathbf{I} são matrizes identidade 2×2 e 3×3 , respectivamente. A matriz de spin é dada, então, por

$$S_i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & s_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

onde s_i são matrizes 3×3 , tais que $(s_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}$. Uma consequência direta de $\beta^0 S_i = 0$ é que

$$\langle S_i \rangle = 0 \quad (3.5)$$

e

$$\langle S^2 \rangle = 0 \quad (3.6)$$

Aqui o operador projeção pode ser escrito como [7] $P = (\beta^\mu \beta_\mu - 1)/3 = \text{diag}(1, 0, 0, 0, 0)$, e neste caso seleciona o primeiro componente do espinor de DKP. O espinor pode ser escrito como $\psi^T = (\psi_1, \dots, \psi_5)$ de tal maneira que a equação de DKP independente do tempo para um bóson submetido a um potencial unidimensional (eixo X) decompõe-se em

$$\begin{aligned} (\partial_0^2 - D_1^{(-)} D_1^{(+)} + m^2) \psi_1 &= 0 \\ \partial_0 \psi_1 &= -im\psi_2, \quad D_1^{(+)} \psi_1 = -im\psi_3 \\ \psi_4 &= \psi_5 = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$D_1^{(\pm)} = \partial_1 \pm A_1 \quad (3.8)$$

Observamos que na ausência de um potencial não-mínimo, a primeira linha de (3.7) se reduz à equação de Klein-Gordon e ψ_3 , ψ_4 e ψ_5 são componentes supérfluos do espinor de DKP ($\psi_4 = \psi_5 = 0$ é uma consequência do movimento unidimensional). Para o caso independente do tempo, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + E^2 - m^2 + A_0^2 - A_1^2 + \frac{dA_1}{dx} \right) \phi_1 &= 0 \\ \phi_2 &= \frac{1}{m} (E + iA_0) \phi_1 \\ \phi_3 &= \frac{i}{m} \left(\frac{d}{dx} + A_1 \right) \phi_1, \quad \phi_4 = \phi_5 = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

com

$$J^0 = \frac{E}{m} |\phi_1|^2, \quad J^1 = \frac{1}{m} \text{Im} \left(\phi_1^* \frac{d\phi_1}{dx} \right), \quad J^2 = J^3 = 0 \quad (3.10)$$

Podemos escrever (3.9) como

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \phi_1 &= 0 \\ \phi_2 &= \frac{E}{m} \phi_1 \\ \phi_3 &= \frac{i}{m} \left(\frac{d}{dx} + A_1 \right) \phi_1, \quad \phi_4 = \phi_5 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$k^2 = E^2 - m^2 - A_1^2 + \frac{dA_1}{dx} \quad (3.12)$$

Dado um potencial de interação que satisfaça a certas condições, temos então um problema de Sturm-Liouville bem definido para determinar os possíveis autovalores discretos ou contínuos do sistema. Observamos que há apenas um componente independente no

espinor de DKP para o setor escalar. Segue-se que a paridade de ϕ_3 é oposta à paridade de ϕ_1 e ϕ_2 de tal maneira que o espinor de DKP tem paridade definida. Além disso, a mudança $A_\mu \rightarrow A_\mu + \text{constante}$ altera drasticamente o espectro. Concentramos nossa atenção para o componente espacial do potencial não-minimo com $A_1(-x) = -A_1(x)$. Consideramos o duplo degrau de potencial (figuras 3.1 e 3.2)

$$A_1(x) = V_0 [\theta(x - a) - \theta(-x - a)] \quad (3.13)$$

com V_0 e a definidos como números reais ($a > 0$) e $\theta(x)$ é a função passo de Heaviside.

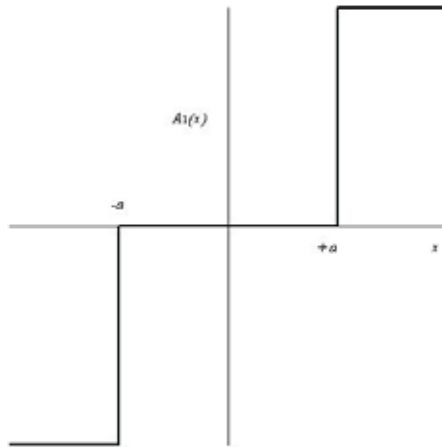


Figura 3.1: Duplo degrau de potencial para $V_0 > 0$.

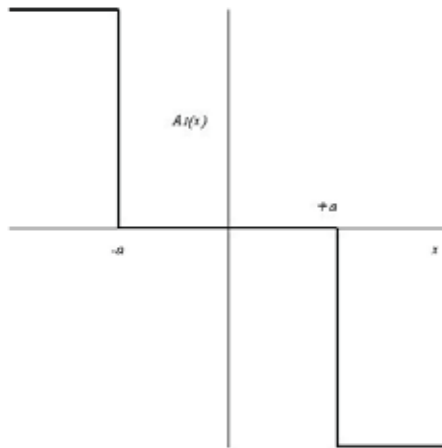


Figura 3.2: Duplo degrau de potencial para $V_0 < 0$.

É interessante notar que no limite $a \rightarrow 0$ a função duplo passo se reduz a $2V_0 \text{sgn}(x)$, onde $\text{sgn}(x) = x/|x|$. Nosso problema é resolver (3.11) para ϕ_1 e determinar as energias permitidas. Neste caso a primeira linha de (3.11) pode ser escrita como

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \left\{ \frac{V_0^2}{2m} [\theta(x - a) + \theta(-x - a)] - \frac{V_0}{2m} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \right\} \phi_1 = \frac{E^2 - m^2}{2m} \phi_1 \quad (3.14)$$

onde $\delta(x) = d\theta(x)/dx$ é a função delta de Dirac. Observamos, a partir da equação (3.14), que ϕ_1 obedece a uma equação de Schrödinger efetiva com os potenciais efetivos ilustrados nas figuras 3.3 e 3.4, e energia efetiva dada por $(E^2 - m^2)/2m$.

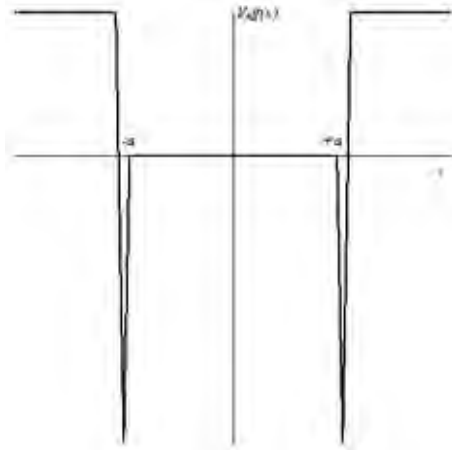


Figura 3.3: Potencial efetivo para $V_0 > 0$. A altura do poço (região $|x| > a$) é dada por $\frac{V_0^2}{2m}$.

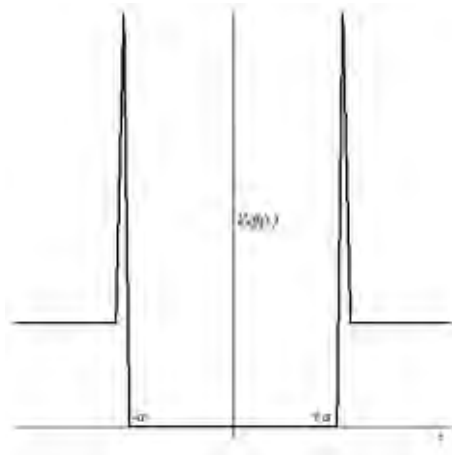


Figura 3.4: Potencial efetivo para $V_0 < 0$. A altura do poço (região $|x| > a$) é dada por $\frac{V_0^2}{2m}$.

Concentramos nossa atenção para os estados de espalhamento de modo que a solução descreva um bóson de spin 0 movendo-se da esquerda para direita e pode ser escrita como

$$\phi_1(x) = \begin{cases} Ae^{+i\eta\frac{x}{a}} + Be^{-i\eta\frac{x}{a}} & \text{para } x < -a \\ Ce^{+i\xi\frac{x}{a}} + De^{-i\xi\frac{x}{a}} & \text{para } |x| < a \\ Fe^{+i\eta\frac{x}{a}} & \text{para } x > a \end{cases} \quad (3.15)$$

onde

$$\xi = a\sqrt{E^2 - m^2}, \quad \eta = \sqrt{\xi^2 - v^2}, \quad v = aV_0 \quad (3.16)$$

Para $|E| > \sqrt{m^2 + V_0^2}$, a solução referente ao intervalo ($x < -a$) reverte-se em ondas planas propagando-se com velocidade de grupo dada por

$$v_g = \frac{dE}{d\eta}, \quad (3.17)$$

igual à velocidade clássica da partícula. Se escolhermos partículas incidindo sobre o poço de potencial efetivo teremos que $Ae^{+i\eta\frac{x}{a}}$ descreve partículas incidentes ($v_g = \eta/Ea^2 > 0$), enquanto $Be^{-i\eta\frac{x}{a}}$ descreve partículas refletidas ($v_g = -\eta/Ea^2 < 0$). Portanto, nesta região, a densidade de corrente de uma onda refletida movendo-se para a esquerda e uma onda incidente movendo-se para a direita é dada por

$$J^1(x < -a) = \frac{\eta}{am}(|A|^2 - |B|^2), \quad (3.18)$$

enquanto uma onda transmitida move-se para a direita com

$$J^1(x > a) = \frac{\eta}{am}|F|^2. \quad (3.19)$$

Exigimos que ϕ_1 seja contínua em $x = \pm a$, *i.e.*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_1 \Big|_{x=\pm a-\varepsilon}^{x=\pm a+\varepsilon} = 0. \quad (3.20)$$

Caso contrário, (3.14) conteria uma derivada da função delta. Efeitos devido ao potencial em $d\phi_1/dx$ na vizinhança de $x = \pm a$ podem ser calculados pela integração de (3.14) de $\pm a - \varepsilon$ a $\pm a + \varepsilon$ e tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$. A conexão entre $d\phi_1/dx$ pelo lado direito e $d\phi_1/dx$ pelo lado esquerdo pode ser resumida como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d\phi_1}{dx} \Big|_{x=\pm a-\varepsilon}^{x=\pm a+\varepsilon} = -\frac{v}{a} \phi_1(\pm a) \quad (3.21)$$

Com ϕ_1 dado por (3.15), as condições (3.20) e (3.21) implicam que

$$e^{i\eta}F = e^{i\xi}C + e^{-i\xi}D$$

$$e^{-i\eta}A + e^{i\eta}B = e^{-i\xi}C + e^{i\xi}D$$

(3.22)

$$e^{i\eta}F(\eta - iv) = \xi(e^{i\xi}C - e^{-i\xi}D)$$

$$\xi(e^{-i\xi}C - e^{i\xi}D) = (\eta + iv)e^{-i\eta}A - (\eta - iv)e^{i\eta}B$$

Omitindo os detalhes algébricos, temos as seguintes amplitudes relativas

$$\begin{aligned}\frac{B}{A} &= \frac{2ie^{-2i\eta}\xi v \cos 2\xi}{d} \\ \frac{C}{A} &= \frac{e^{-i\xi}e^{-i\eta}\eta(\xi + \eta - iv)}{d}\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{D}{A} &= \frac{e^{i\xi}e^{-i\eta}\eta(\xi - \eta + iv)}{d} \\ \frac{F}{A} &= \frac{2e^{-2i\eta}\xi\eta}{d}\end{aligned}$$

onde definimos

$$d \equiv 2(\eta - iv)(\xi \cos 2\xi - i\eta \sin 2\xi)\tag{3.24}$$

Podemos identificar as amplitudes de reflexão (r) e transmissão (t) como

$$r = \frac{B}{A}\tag{3.25}$$

$$t = \frac{F}{A}\tag{3.26}$$

A fim de determinar os coeficientes de reflexão e transmissão usamos as densidades de corrente $J^1(x < -a)$ e $J^1(x > a)$, obtendo

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2, \quad T = \left|\frac{F}{A}\right|^2\tag{3.27}$$

com $R+T = 1$. A última amplitude relativa de (3.23) permitem-nos escrever o coeficiente de transmissão como

$$T = |t|^2 = \left[1 + \left(\frac{v}{\eta} \cos 2\xi\right)^2\right]^{-1}\tag{3.28}$$

independente do sinal de v (Figura 3.5). Note que $T \rightarrow 1$ com $\eta \rightarrow \infty$ e que há transmissão ressonante ($T = 1$) sempre que $\xi = (2n + 1)\pi/4$ com $n = 0, 1, 2, \dots$

A possibilidade de estados ligados (com $|E| < \sqrt{m^2 + V_0^2}$) exige uma solução dada por (3.15) com $\eta = i|\eta|$ ($\xi < |v|$) e $t \rightarrow \infty$, a fim de obtermos ϕ_1 de quadrado integrável. Portanto, se considerarmos a amplitude de transmissão como uma função da variável complexa η , observamos que os polos situados ao longo do eixo real positivo, correspondem aos estados de espalhamento. *Simili modo*, os estados ligados são obtidos pelos polos situados ao longo do eixo imaginário positivo do plano η complexo. Denotando $|\eta| = \sqrt{v^2 - \xi^2}$ e expandindo t em série de potências em ξ , em torno de $\xi = 0$, obtemos

$$t = \frac{e^{2|v|}|v|}{(|v| - v)(1 + 2|v|)} + O(\xi)\tag{3.29}$$

onde $O(\xi)$ denota termos de mais alta ordem. Observamos que $\xi = 0$ é um polo único para $v > 0$. Os outros polos são soluções da equação transcendental

$$\tan 2\xi = -\frac{\xi}{|\eta|}, \quad \xi \neq 0,\tag{3.30}$$

a qual é obtida do segundo termo entre parênteses de (3.24).

Com as amplitudes dadas por (3.23), obtemos as relações

$$\frac{C}{D} = \frac{\xi + \eta - iv}{\xi - \eta + iv} e^{-2i\xi} \quad (3.31)$$

$$\frac{B}{F} = i \frac{v}{\eta} \cos 2\xi \quad (3.32)$$

que podem ser reescritas como

$$\frac{C}{D} = e^{-i(2\xi + \arctan \frac{\xi}{|\eta|})} \quad (3.33)$$

$$\frac{B}{F} = \frac{v}{|\eta|} \cos 2\xi \quad (3.34)$$

para $\eta = i|\eta|$. Para estados ligados, a densidade de corrente J^1 desaparece nas regiões $|x| > a$, enquanto que assume a forma

$$J^1 = \begin{cases} \frac{\xi}{am} (|C|^2 - |D|^2) & \text{para } \xi \text{ real} \\ \frac{2|\xi|}{am} \text{Im}(C^*D) & \text{para } \xi \text{ imaginário} \end{cases} \quad (3.35)$$

para a região $|x| < a$. Desta feita, concluimos que há estados ligados unicamente se $\xi = 0$ ou $|C| = |D|$. Até o momento, os argumentos de simetria não entraram em nosso desenvolvimento. Desde que $A_1(x)$ é ímpar com respeito a x , segue-se que ϕ_1 pode ser par ou ímpar. Portanto,

$$\frac{C}{D} = \frac{B}{F} = \pm 1 \quad (3.36)$$

de modo que

$$\phi_1(x) = \begin{cases} +F e^{+|\eta|\frac{x}{a}} & \text{para } x < -a \\ 2C \cos(\xi\frac{x}{a}) & \text{para } |x| < a \\ +F e^{-|\eta|\frac{x}{a}} & \text{para } x > a \end{cases} \quad (3.37)$$

para $\phi_1(-x) = +\phi_1(x)$, e

$$\phi_1(x) = \begin{cases} -F e^{+|\eta|\frac{x}{a}} & \text{para } x < -a \\ 2iC \text{sen}(\xi\frac{x}{a}) & \text{para } |x| < a \\ +F e^{-|\eta|\frac{x}{a}} & \text{para } x > a \end{cases} \quad (3.38)$$

para $\phi_1(-x) = -\phi_1(x)$. A condição $C/D = \pm 1$ demanda

$$\tan 2\xi = -\frac{\xi}{|\eta|}, \quad \xi \geq 0 \quad (3.39)$$

Usando a identidade $\tan 2z = 2\tan z/(1-\tan^2 z)$, podemos escrever esta última relação como

$$\xi \tan \xi = |\eta| - \lambda |v|, \quad \lambda = \pm 1, \quad (3.40)$$

com a ressalva de que a raiz $\xi = 0$ é válida unicamente para $\lambda = +1$ (de (3.33) vemos que $C/D = +1$ para $\xi = 0$). Além disso, em virtude da identidade $\cos(2z) = (1-\tan^2 z)/(1+\tan^2 z)$, podemos verificar que (3.34) implica em

$$\frac{B}{F} = \lambda \operatorname{sgn}(v) \quad (3.41)$$

Agora vemos que $\lambda \operatorname{sgn}(v)$ é o autovalor paridade e que $\xi = 0$ fornece uma legítima solução de estado ligado par para $v > 0$ (qualquer que seja a intensidade de v , a solução $\xi = 0$ implica J^0 independente de x para $|x| < a$). É instrutivo notar que, exceto para $\xi = 0$, a equação para soluções de paridade par é mapeada nas que possuem soluções de paridade ímpar sob a mudança de v para $-v$, e vice-versa. Além disso, pois $|\eta| = \sqrt{v^2 - \xi^2}$, (3.40) pode então ser escrita como

$$-\xi \cot \xi = |\eta| + \lambda |v|, \quad \lambda = \pm 1 \quad (3.42)$$

Com base em $\tanh z = -i \tan iz$, a equação (3.40) é transformada em

$$-|\xi| \tanh |\xi| = |\eta| - \lambda |v|, \quad \lambda = \pm 1 \quad (3.43)$$

para $\xi = i|\xi|$ ($|\eta| = \sqrt{v^2 + |\xi|^2}$). A equação (3.43) é a condição de quantização correspondente a $|E| < m$. As soluções desta equação transcendental são encontradas por métodos numéricos ou gráficos.

Abordando (3.43) primeiro, vemos que exceto para $\xi = 0$ para $v > 0$ e ϕ_1 par, ou $v < 0$ e ϕ_1 ímpar, o lado esquerdo de (3.43) é sempre negativo enquanto o lado direito é sempre positivo. Portanto, a equação (3.43) não fornece soluções, exceto $\xi = 0$ para ϕ_1 par com $v > 0$. O método gráfico para $\xi \in \mathbb{R}$ é ilustrado na Figura (3.6). As soluções para estados ligados são dadas pela interseção da curva representada por $\xi \tan \xi$ com as curvas representadas por $|\eta| - \lambda |v|$. Podemos ver imediatamente que, exceto para $\xi = 0$ para $\lambda = +1$, necessitamos de valores críticos, correspondentes a $|v_c| = -\arctan \lambda$, para obtermos estados ligados. Se v é maior quanto os valores críticos teremos uma sequência finita de estados ligados com paridades alternadas. Como comentado antes, a solução de paridade ímpar com $\lambda = +1$ é espúria. Quando v tende ao infinito as interseções ocorrerão nas assíntotas de $\xi \tan \xi$ (exceto para $\xi = 0$) de modo que as soluções serão dadas por

$$\xi_n^{(\infty)} = (2n + 2)\frac{\pi}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.44)$$

Então, se

$$\frac{\pi}{4} \leq |v| < (2N + 1)\frac{\pi}{4} \quad (3.45)$$

haverá N estados ligados, exceto para $\xi = 0$ para $v > 0$, com autovalores dados por

$$(2N - 1)\frac{\pi}{4} \leq \xi_N < N\frac{\pi}{2} \quad (3.46)$$

Os níveis de energia estão apresentados na Figura (3.7).

Finalmente, no limite $a \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$) temos

$$T \xrightarrow{a \rightarrow 0} \left(1 + \frac{V_0^2}{E^2 - m^2 - V_0^2}\right)^{-1} \quad (3.47)$$

e a amplitude de transmissão tem um e unicamente um polo ($|E| = m$ para $V_0 > 0$) correspondente a uma solução par de estado ligado com

$$\phi_1(x) \xrightarrow{a \rightarrow 0} F e^{-V_0|x|} \quad (3.48)$$

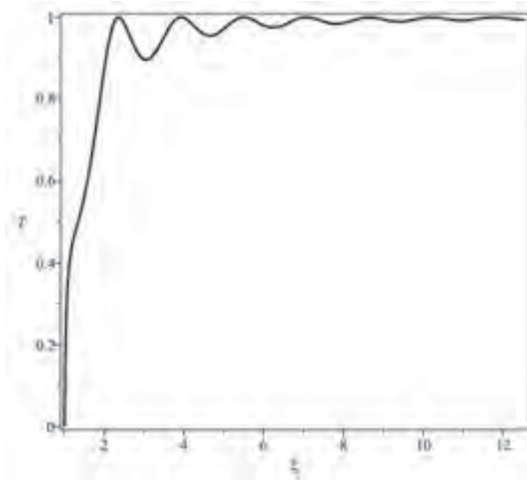


Figura 3.5: Coeficiente de transmissão para $|v| = 1$.

A figura (3.8) esquematiza os intervalos de energias pertencentes as soluções de estados ligados e estados de espalhamento para $|E| > m$ (devido a simetria, analisamos só o eixo positivo). Observamos que o intervalo correspondente aos estados ligados estão limitados à região $m < |E| < \sqrt{m^2 + V_0^2}$ visto que $\xi \in R$. Da figura (3.7), observamos que o valor mínimo de $|v|$ para termos estados ligados é $\pi/4$. Podemos concluir que $|V_{0\min}| = (\pi/4a)$, ou seja, possivelmente há limite não-relativístico para estados ligados ($|E| \simeq m$) com potencial fraco e em regiões de interação muito maior que o comprimento de onda Compton do bóson ($1/m$). No entanto observamos que $\xi_{\min} = (\pi/4a)$, ou seja, as energias correspondentes às soluções de estados ligados não-relativísticos encontrariam-se na região $|E| \ll m$, contradizendo nossa observação anterior que os possíveis estados ligados devem possuir $|E| \geq m$. Logo, não há limite não-relativístico para estados ligados.

As energias correspondentes aos estados de espalhamento estão localizadas no intervalo $|E| > \sqrt{m^2 + V_0^2}$, possibilitando o limite não-relativístico para o processo de espalhamento para um potencial fraco.

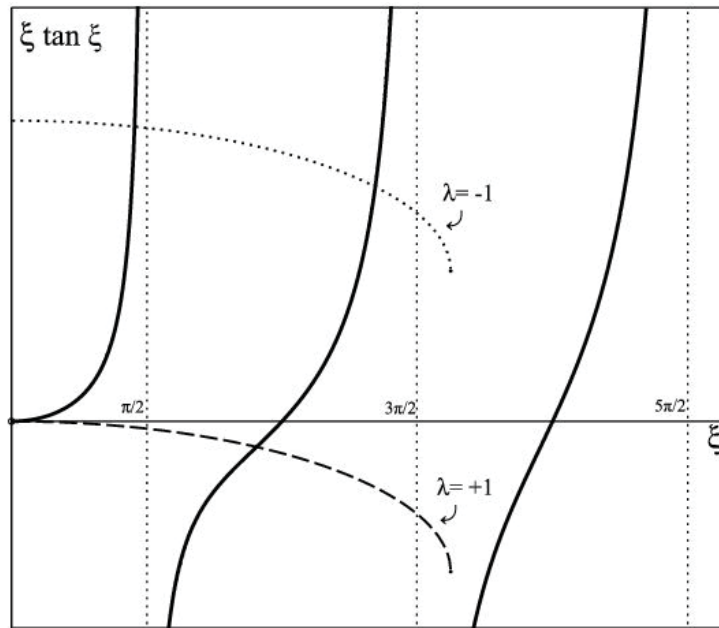


Figura 3.6: Soluções de estados ligados para $|v| = 5$.

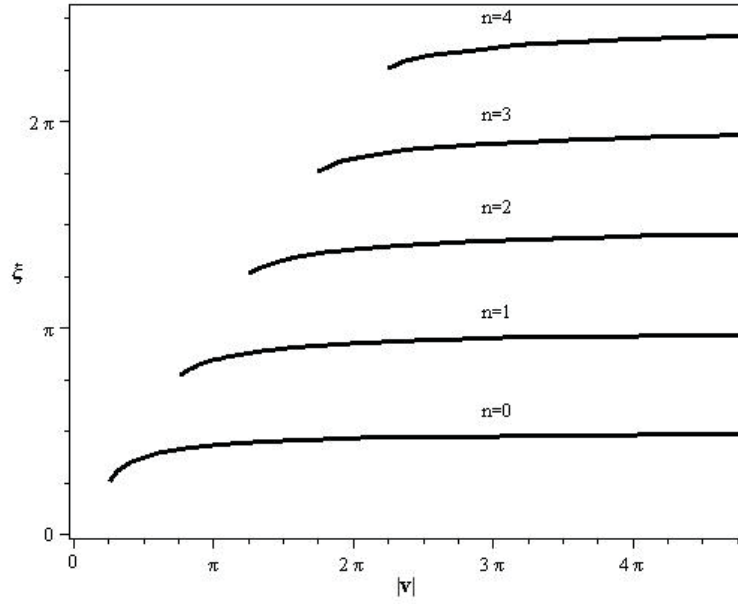


Figura 3.7: Espectro de energia.

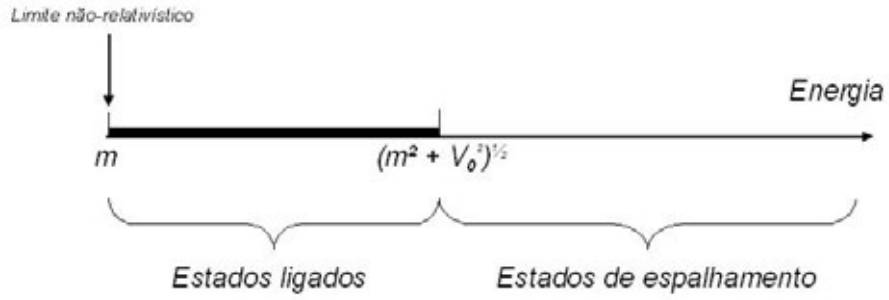


Figura 3.8: Intervalos de energia.

3.2 Setor vetorial

Para o setor vetorial da teoria DKP (spin 1) usaremos a representação dada por [29]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

onde s_i são matrizes 3×3 em que $(s_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$, e_i são matrizes 1×3 em que $(e_i)_{1j} = \delta_{ij}$ e $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, enquanto $\mathbf{0}$ designa uma matriz nula de 3×3 . Nesta representação temos que

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} -1 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

A matriz de spin é dada, então, por

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & s_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & s_i & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & s_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.51)$$

Temos que \vec{S}^2 é uma quantidade conservada com $\langle \vec{S}^2 \rangle = 2$, como esperado para bósons de spin 1, decorrente do fato que $\beta^0 \vec{S}^2 = 2\beta^0$. Na representação utilizada, $P = \beta^\mu \beta_\mu - 2 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. O espinor pode ser escrito como $\psi^T = (\psi_1, \dots, \psi_{10})$, e particionado como

$$\begin{aligned} \psi_I^{(+)} &= \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, & \psi_I^{(-)} &= \psi_5 \\ \psi_{II}^{(+)} &= \begin{pmatrix} \psi_6 \\ \psi_7 \end{pmatrix}, & \psi_{II}^{(-)} &= \psi_2 \\ \psi_{III}^{(+)} &= \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ -\psi_9 \end{pmatrix}, & \psi_{III}^{(-)} &= \psi_1 \end{aligned} \quad (3.52)$$

A equação de DKP pode ser expressa de forma compacta

$$\begin{aligned} (\partial_0^2 - D_1^{(-\sigma)} D_1^{(\sigma)} + m^2) \psi_I^{(\sigma)} &= 0 \\ \partial_0 \psi_I^{(\sigma)} &= -im \psi_{II}^{(\sigma)}, \quad D_1^{(\sigma)} \psi_I^{(\sigma)} = -im \psi_{III}^{(\sigma)} \\ \psi_8 &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde σ é igual a + ou -, e $D_1^{(\sigma)}$ é novamente dado por (3.8). Observamos que a terceira linha mais a segunda equação da linha do meio de (3.53) são equações de vínculo que permitem eliminar os componentes supérfluos (ψ_1, ψ_8, ψ_9 e ψ_{10}) do espinor de DKP.

Como consequência das relações

$$\begin{aligned} [S_1, \beta^0] &= 0 \\ [S_1, \beta^1] &= 0 \\ [S_1, [P, \beta^1]] &= 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

pode-se prever uma outra quantidade conservada, além de \vec{S}^2 : a projeção do spin na direção do movimento, chamado operador helicidade. De fato,

$$\langle S_1 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \text{Re}(\psi_4^* \partial_0 \psi_3 - \psi_3^* \partial_0 \psi_4)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \text{Im}(\sum_{\sigma} \phi_I^{(\sigma)\dagger} \partial_0 \phi_I^{(\sigma)})}$$

mede o grau e a direção da polarização de tal maneira que $\psi_I^{(-)}$ está relacionado a um auto-estado do operador helicidade com valor esperado 0 ($\psi_3 = \psi_4 = 0$), e $\psi_I^{(+)}$ com autovalores ± 1 ($\psi_4 = \pm i\psi_3$ e $\psi_5 = 0$). Portanto, σ desempenha um papel importante para especificar o estado de polarização: $\sigma = -$ para transversal e $\sigma = +$ para longitudinal. A constância de $\langle S_1 \rangle$ implica que o grau de polarização de um feixe de bósons incidentes em uma região com um potencial não é afetado, não importando a forma do componente espacial do potencial vetorial não-mínimo.

A equação de DKP independente do tempo decompõe-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_\sigma^2 \right) \phi_I^\sigma &= 0 \\ \phi_{II}^{(\sigma)} &= \frac{E}{m} \phi_I^{(\sigma)} \\ \phi_{III}^{(\sigma)} &= \frac{i}{m} \left(\frac{d}{dx} + \sigma A_1 \right) \phi_I^{(\sigma)}, \quad \phi_8 = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde

$$k_\sigma^2 = E^2 - m^2 - A_1^2 + \sigma \frac{dA_1}{dx} \quad (3.56)$$

Agora os componentes da quadricorrente são

$$J^0 = \frac{E}{m} \sum_\sigma |\phi_I^{(\sigma)}|^2, \quad J^1 = \frac{1}{m} \text{Im} \sum_\sigma \phi_I^{(\sigma)\dagger} \frac{d\phi_I^{(\sigma)}}{dx}, \quad J^2 = J^3 = 0 \quad (3.57)$$

Interessante notar que $\phi_I^{(+)}$ (no setor vetorial) obedece a mesma equação para o primeiro componente do espinor de DKP no setor escalar e, além disso ϕ_1 e $\phi_I^{(\sigma)}$ são funções de quadrado integrável.

Com o potencial dado por (3.13), a primeira linha de (3.55) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m} \frac{d^2 \phi_I^{(\sigma)}}{dx^2} + \left\{ \frac{V_0^2}{2m} [\theta(x-a) + \theta(-x-a)] \right. \\ \left. - \sigma \frac{V_0}{2m} [\delta(x-a) + \delta(x+a)] \right\} \phi_I^{(\sigma)} = \frac{E^2 - m^2}{2m} \phi_I^{(\sigma)} \end{aligned} \quad (3.58)$$

3.2.1 Espalhamento

As soluções que descrevem bósons de spin 1, com energias pertencentes ao espectro contínuo ($E^2 > m^2 + V_0^2$), movendo-se para a esquerda podem ser escritas como

$$\phi_I^{(\sigma)}(x) = \begin{cases} A^{(\sigma)} e^{+i\eta \frac{x}{a}} + B^{(\sigma)} e^{-i\eta \frac{x}{a}} & \text{para } x < -a \\ C^{(\sigma)} e^{+i\xi \frac{x}{a}} + D^{(\sigma)} e^{-i\xi \frac{x}{a}} & \text{para } |x| < a \\ F^{(\sigma)} e^{+i\eta \frac{x}{a}} & \text{para } x > a \end{cases} \quad (3.59)$$

onde

$$\xi = a\sqrt{E^2 - m^2}, \quad \eta = \sqrt{\xi^2 - v^2}, \quad v = aV_0 \quad (3.60)$$

Como discutido anteriormente, σ está relacionado a um estado de polarização longitudinal ($\sigma = +$) ou transversal ($\sigma = -$). O espinor $\phi_I^{(\sigma)}$ descreve uma onda incidente movendo-se para a direita (η é um número real) e uma onda refletida movendo-se para esquerda com

$$J^1(x < -a) = \frac{\eta}{am} \sum_{\sigma} (|A^{(\sigma)}|^2 - |B^{(\sigma)}|^2) \quad (3.61)$$

e uma onda transmitida movendo-se para a direita com

$$J^1(x > a) = \frac{\eta}{am} \sum_{\sigma} |F^{(\sigma)}|^2 \quad (3.62)$$

Exigimos que $\phi_I^{(\sigma)}$ seja contínua $x = \pm a$. Efeitos devido ao potencial em $d\phi_I^{(\sigma)}/dx$ na vizinhança de $x = \pm a$ podem ser calculados pela integração de (3.58) de $\pm a - \varepsilon$ à $\pm a + \varepsilon$ e tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$. A conexão entre $d\phi_I^{(\sigma)}/dx$ pelo lado direito e $d\phi_I^{(\sigma)}/dx$ pelo lado esquerdo pode ser resumida como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d\phi_I^{(\sigma)}}{dx} \Bigg|_{x=\pm a-\varepsilon}^{x=\pm a+\varepsilon} = -\frac{\sigma v}{a} \phi_I^{(\sigma)}(\pm a) \quad (3.63)$$

Desta maneira, obtemos as seguintes amplitudes relativas

$$\begin{aligned} \frac{B^{(\sigma)}}{A^{(\sigma)}} &= \frac{2ie^{-2i\eta} \xi \sigma v \cos 2\xi}{d^{(\sigma)}} \\ \frac{C^{(\sigma)}}{A^{(\sigma)}} &= \frac{e^{-i\xi} e^{-i\eta} \eta (\xi + \eta - i\sigma v)}{d^{(\sigma)}} \\ \frac{D^{(\sigma)}}{A^{(\sigma)}} &= \frac{e^{i\xi} e^{-i\eta} \eta (\xi - \eta + i\sigma v)}{d^{(\sigma)}} \\ \frac{F^{(\sigma)}}{A^{(\sigma)}} &= \frac{2e^{-2i\eta} \xi \eta}{d^{(\sigma)}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde

$$d^{(\sigma)} \equiv 2(\eta - i\sigma v) (\xi \cos 2\xi - i\eta \sin 2\xi) \quad (3.65)$$

A fim de determinarmos os coeficientes de reflexão e transmissão, usamos as densidades de corrente $J^1(x < -a)$ e $J^1(x > a)$ que fornecem

$$T = \frac{\sum_{\sigma} |F^{(\sigma)}|^2}{\sum_{\sigma} |A^{(\sigma)}|^2} \quad (3.66)$$

A última amplitude relativa de (3.64) permite-nos escrever

$$T = \left[1 + \left(\frac{v}{\eta} \cos 2\xi \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.67)$$

independente do sinal de σv . Observamos que $T \rightarrow 1$ quando $\eta \rightarrow \infty$ e que há transmissão ressonante ($T = 1$) sempre que $\xi = (2n + 1)\pi/4$ com $n = 0, 1, 2, \dots$

Observamos que é possível construir estados iniciais representando bósons polarizados em qualquer direção antes do espalhamento ($A^{(+)} = 0$ ou $A^{(-)} = 0$), entretanto o coeficiente de transmissão não é sensível à escolha da direção de polarização.

3.2.2 Estados ligados

Diferentemente do caso escalar, a determinação dos estados ligados de bósons de spin 1 não pode ser realizada em conexão aos estados de espalhamento. Para estados ligados ($E^2 < m^2 + V_0^2$), nosso problema é solucionar (3.58) para $\phi^{(\sigma)}$ e determinar o espectro de energias permitidas. A possibilidade de estados ligados exige uma solução dada por (3.59) com $\eta = i|\eta|$ ($\xi < |\nu|$) e $A^{(\sigma)} = 0$ para obtermos um espinor de quadrado integrável. Portanto, se consideramos a amplitude de transmissão

$$t^{(\sigma)} = \frac{2e^{-2i\eta} \xi \eta}{d^{(\sigma)}} \quad (3.68)$$

observamos que para η real e positivo podemos obter os estados de espalhamento, enquanto os estados ligados seriam obtidos pelos polos situados ao longo do eixo imaginário positivo do plano complexo η . As equações para $\phi_I^{(\sigma)}$ e $\phi_I^{(-\sigma)}$ não são independentes visto que E aparece em ambas as equações. Por conseguinte, devemos procurar por soluções de estados ligados para $\phi_I^{(\sigma)}$ e $\phi_I^{(-\sigma)}$ com o mesmo valor de E . Isto significa que o espectro para bósons de spin 1 é duplamente degenerado com respeito à σ .

Fixando $|\eta| = \sqrt{\nu^2 - \xi^2}$, observa-se que $t^{(\sigma)}$ tem um polo em $\xi = 0$ quando $\sigma v > 0$, e $t^{(-\sigma)}$ quando $\sigma v < 0$. Polos independentes do sinal de σ são soluções da equação transcendental

$$\tan 2\xi = -\frac{\xi}{|\eta|} \quad (3.69)$$

Com as amplitudes dadas por (3.64) obtemos as razões

$$\frac{C^{(\sigma)}}{D^{(\sigma)}} = e^{-i(2\xi + \arctan \frac{\xi}{|\eta|})} \quad (3.70)$$

$$\frac{B^{(\sigma)}}{F^{(\sigma)}} = \frac{\sigma v}{|\eta|} \cos 2\xi$$

para $\eta = i|\eta|$. Para estados ligados, a densidade de corrente J^1 desaparece nas regiões $|x| > a$, enquanto que assume a forma

$$J^1 = \begin{cases} \frac{\xi}{am} \sum_{\sigma} (|C^{(\sigma)}|^2 - |D^{(\sigma)}|^2) & \text{para } \xi \text{ real} \\ \frac{2|\xi|}{am} \sum_{\sigma} \text{Im} (C^{(\sigma)*} D^{(\sigma)}) & \text{para } \xi \text{ imaginário} \end{cases} \quad (3.71)$$

para a região $|x| < a$. Assim, conclui-se que estados ligados só são possíveis se $|C^{(\sigma)}| = |D^{(\sigma)}|$. Desde que $A_1(x)$ seja ímpar com respeito a x , segue-se que $\phi_I^{(\sigma)}$ pode ser ímpar ou par. Assim,

$$\frac{C^{(\sigma)}}{D^{(\sigma)}} = \frac{B^{(\sigma)}}{F^{(\sigma)}} = \pm 1 \quad (3.72)$$

de modo que

$$\phi_I^{(\sigma)}(x) = \begin{cases} +F^{(\sigma)} e^{+|\eta|\frac{x}{a}} & \text{para } x < -a \\ 2C^{(\sigma)} \cos\left(\xi\frac{x}{a}\right) & \text{para } |x| < a \\ +F^{(\sigma)} e^{-|\eta|\frac{x}{a}} & \text{para } x > +a \end{cases} \quad (3.73)$$

para $\phi_I^{(\sigma)}(-x) = +\phi_I^{(\sigma)}(x)$, e

$$\phi_I^{(\sigma)}(x) = \begin{cases} -F^{(\sigma)} e^{+|\eta|\frac{x}{a}} & \text{for } x < -a \\ 2iC^{(\sigma)} \text{sen}\left(\xi\frac{x}{a}\right) & \text{for } |x| < a \\ +F^{(\sigma)} e^{-|\eta|\frac{x}{a}} & \text{for } x > +a \end{cases} \quad (3.74)$$

para $\phi_I^{(\sigma)}(-x) = -\phi_I^{(\sigma)}(x)$. A condição $C^{(\sigma)}/D^{(\sigma)} = \pm 1$ demanda

$$\tan 2\xi = -\frac{\xi}{|\eta|} \quad (3.75)$$

Podemos escrever esta última relação como

$$\xi \tan \xi = |\eta| - \lambda|\nu|, \quad \lambda = \pm 1 \quad (3.76)$$

Além disso, podemos checar que (3.76) implica em

$$\frac{B^{(\sigma)}}{F^{(\sigma)}} = \lambda \text{sgn}(\sigma\nu) \quad (3.77)$$

Observamos que $\lambda \text{sgn}(\sigma\nu)$ é o autovalor paridade e que a equação para soluções de paridade par é mapeada nas que possuem paridade ímpar sob a mudança de $\sigma\nu$ para $-\sigma\nu$, e vice-versa. Além disso, pois $|\eta| = \sqrt{\nu^2 - \xi^2}$, (3.76) pode ser escrita como

$$-\xi \cot \xi = |\eta| + \lambda|\nu|, \quad \lambda = \pm 1 \quad (3.78)$$

Para $\xi = i|\xi|$ ($|\eta| = \sqrt{v^2 + |\xi|^2}$), a equação (3.76) é transformada em

$$-|\xi| \tanh |\xi| = |\eta| - \lambda|v|, \quad \lambda = \pm 1 \quad (3.79)$$

Para $\xi \in \mathbb{R}$ as soluções para estados ligados são dadas pela interseção da curva representada por $\xi \tan \xi$ com as curvas representadas por $|\eta| - \lambda|v|$. Pode-se observar que são necessários valores críticos, correspondentes a $|v_c| = -\arctan \lambda$, para obtermos estados ligados. Se $|v|$ é maior que os valores críticos, haverá uma sequência finita de estados ligados com paridades alternadas. Por outro lado, o lado esquerdo de (3.79) é sempre negativo enquanto o lado direito é sempre positivo e assim (3.79) não fornece soluções.

Finalmente, no limite $a \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$) obtemos

$$T \xrightarrow{a \rightarrow 0} \left(1 + \frac{V_0^2}{E^2 - m^2 - V_0^2} \right)^{-1} \quad (3.80)$$

e a amplitude de transmissão não possui nenhum polo comum para os casos $\sigma = +$ e $\sigma = -$.

Capítulo 4

Conclusões

Os estados estacionários de bósons de spin 0 e spin 1, interagindo via acoplamento vetorial não-mínimo, foram investigados por uma técnica que mapeia a equação de DKP num problema de Sturm-Liouville. Os estados de espalhamento em um duplo degrau potencial foram analisados e um coeficiente de transmissão oscilatório foi encontrado. Uma interessante característica do espalhamento é que o coeficiente de transmissão nunca desaparece, não importa quão grande seja $|V_0|$. Isto mostrou que, para um potencial suficientemente intenso, a amplitude de transmissão exibe polos complexos correspondentes às soluções de estados ligados. As autoenergias para estados ligados são soluções de equações transcendentais classificadas como autovalores do operador paridade. Mostramos que tais estados ligados são intrinsecamente relativísticos.

O caso de um potencial sinal foi analisado como um caso limite. Neste último caso obtemos um coeficiente de transmissão não oscilatório e um único estado ligado para bósons de spin 0. O mesmo não foi possível para bósons de spin 1, pois a amplitude de transmissão não possui nenhum polo comum para os dois possíveis sinais de σ . Como o potencial é um duplo degrau, ou um potencial sinal em um caso limite, não esperávamos a existência de estados ligados, e segue-se que estados ligados são consequência de um acoplamento peculiar na equação de DKP.

As equações (3.14) e (3.58) mais $\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\phi_I^{(\sigma)}|^2 < \infty$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\phi_1|^2 < \infty$, correspondem à descrição não-relativística de uma partícula de massa m com energia E_{eff} sujeita a potencial V_{eff} . Como o potencial efetivo tem uma estrutura mais complicada, com termos quadráticos e derivadas, o sucesso da estratégia deste mapeamento depende crucialmente da escolha de $A_\mu(x)$. Examinando o duplo degrau de potencial dado por (3.13) mostramos que

$$V_{\text{eff}}^{(\sigma)}(x) = \frac{V_0^2}{2m} [\theta(x-a) + \theta(-x-a)] - \frac{\sigma V_0}{2m} [\delta(x-a) + \delta(x+a)] \quad (4.1)$$

Portanto, procuramos por soluções da equação de Schrödinger para uma partícula sob a influência de um poço de potencial quadrado finito com funções delta atrativas (repulsivas)

quando $V_0 > 0$ ($V_0 < 0$) situadas nas bordas. Seja V_0 positivo ou negativo, o potencial efetivo $V_{\text{eff}}(x)$ também tem uma forma que permite soluções de estados ligados com $E_{\text{eff}} < V_0^2/(2m)$, e $E_{\text{eff}} > 0$ se $V_0 < 0$.

Para $a \rightarrow 0$, o caso do potencial sinal, o potencial efetivo torna-se o potencial delta deslocado:

$$V_{\text{eff}}(x) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{V_0^2}{2m} - \frac{V_0}{m} \delta(x) \quad (4.2)$$

o qual nos leva a um coeficiente de transmissão não oscilatório independente do sinal de V_0 , e para $V_0 > 0$ exatamente uma solução de estado ligado independente do valor de V_0 .

Obtivemos que o espectro de bósons de spin 1 é duplamente degenerado devido ao vínculo existente entre os espinores $\phi_I^{(\sigma)}$ e $\phi_I^{(-\sigma)}$. Obtivemos um coeficiente de transmissão que não distingue o spin dos bósons, bem como o sinal de V_0 .

Os resultados encontrados nesta dissertação podem auxiliar o entendimento do espalhamento elástico entre mésons e núcleos. A classe de potenciais com estrutura vetorial não-mínima, reserva novas aplicações já comentadas na introdução deste trabalho. As implicações de um acoplamento vetorial não-mínimo em alguns processos eletromagnéticos, envolvendo bósons vetoriais, podem trazer resultados surpreendentes para a fenomenologia de partículas.

Referências Bibliográficas

- [1] G. Petiau, Acad. R. Belg., A. Sci. Mém. Collect. **16**, No. 2 (1936); R. J. Duffin, Phys. Rev. **54**, 1114 (1938); N. Kemmer, Proc. R. Soc. A **166**, 127 (1938).
- [2] N. Kemmer, Proc. R. Soc. A **173**, 91 (1939).
- [3] M. Nowakowski, Phys. Lett. A **244**, 329 (1998).
- [4] J. T. Lunardi *et al.*, Phys. Lett. A **268**, 165 (2000).
- [5] M. Riedel, *Relativistische Gleichungen fuer Spin-1 Teilchen*, Diplomarbeit, Institute for Theoretical Physics, Johann Wolfgang Goethe-University, Frankfurt/Main (1979).
- [6] E. Fischbach, M. M. Nieto e C. K. Scott, J. Math. Phys. **14**, 1760 (1973).
- [7] R. F. Guertin e T. L. Wilson, Phys. Rev. D **15**, 1518 (1977).
- [8] B. Vijayalakshmi, M. Seetharaman e P. M. Mathews, J. Phys. A **12**, 665 (1979).
- [9] B. C. Clarck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **55**, 592 (1985).
- [10] G. Kälbermann, Phys. Rev. C **34**, 2240 (1986); R. E. Kozack *et al.*, Phys. Rev. C **37**, 2898 (1988); R. E. Kozack, Phys. Rev. C **40**, 2181 (1989).
- [11] V. K. Mishra *et al.*, Phys. Rev. C **43**, 801 (1991).
- [12] L. J. Kurth *et al.*, Phys. Rev. C **50**, 2624 (1994); R. C. Barret e Y. Nedjadi, Nucl. Phys. A **585**, 311c (1995); L. J. Kurth *et al.*, Nucl. Phys. A **585**, 335c (1995).
- [13] S. Ait-Tahar, J. S. Al-Khalili e Y. Nedjadi, Nucl. Phys. A **589**, 307 (1995).
- [14] B. C. Clark *et al.*, Phys. Lett. B **427**, 231 (1998).
- [15] B. M. Pimentel e R. G. Teixeira, Gen. Rel. Grav. **34**, 491 (2002); R. Casana *et al.*, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 4197 (2002); R. Casana *et al.*, Class. Quantum Grav. **20**, 2457 (2003); P. Ghose e M. K. Samal, Phys. Rev. E **64**, 036620 (2001); P. Ghose, Phys. Lett. A **191**, 362 (1994); B. M. Pimentel e V. Ya. Fainberg, Theor. Math.

- Phys. **124**, 1234 (2000); V. Ya. Fainberg e B. M. Pimentel, Phys. Lett. A **271**, 16 (2000); M. de Montigny *et al.*, J. Phys. A **34**, 8901 (2001); M. C. B. Fernandes, A. E. Santana e J. D. M. Vianna, J. Phys. A **36**, 3841 (2003); J. D. M. Vianna, M. C. B. Fernandes e A. E. Santana, Found. Phys. **35**, 109 (2005); E. S. Santos e L. M. Abreu, J. Phys. A **41**, 075407 (2008); R. Casana *et al.*, hep-th/0506193; R. Casana *et al.*, Phys. Lett. A **316**, 33 (2003); A. Boumali, Can. J. Phys. **85**, 1417 (2007); L. B. Castro e A. S. de Castro, J. Math. Phys. **51**, 034101 (2010); N. Debergh, J. Ndimubandi e D. Strivay, Z. Phys. C **56**, 421 (1992); Y. Nedjadi e R. C. Barret, J. Phys. A **27**, 4301 (1994); Y. Kasrie e L. Chetouani, Int. J. Theor. Phys. **47**, 2249 (2008); A. Boumali, Phys. Scr. **76**, 669 (2007).
- [16] T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, J. Phys. A **43**, 055306 (2010).
- [17] A. S. de Castro e W. G. Pereira, Phys. Lett. A **308**, 131 (2003).
- [18] A. S. de Castro, Rev. Bras. Ens. Fís. **33**, 4312 (2011).
- [19] Castro, L. R. B., **Soluções Analíticas da Equação de Duffin-Kemmer-Petiau**. 2011. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista. Guaratinguetá - SP, 2011.
- [20] Cardoso, T. R., **Sobre interações escalares e vetoriais na teoria de Duffin-Kemmer-Petiau**. 2011. Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista. Guaratinguetá - SP, 2011.
- [21] L. P. de Oliveira e A. S. de Castro, Can. J. Phys. **90**, 481 (2012).
- [22] R. A. Krajcik e M. M. Nieto, Am. J. Phys. **45**, 818 (1977).
- [23] H. J. Bhabha, Rev. Mod. Phys. **17**, 200 (1945).
- [24] H. M. Pilkuhn, Relativistic Quantum Mechanics. Berlin, Springer (2003).
- [25] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics. Berlin, Springer (2000)
- [26] H. Umezawa, Quantum Field Theory. North-Holland, Amsterdam, 1956.
- [27] Y. Nedjadi e R. C. Barret, J. Phys. G **19**, 87 (1993).
- [28] N. Debergh, J. Ndimubandi e D. Strivay, Z. Phys. C **56**, 421 (1992).
- [29] Y. Nedjadi e R. C. Barret, J. Math. Phys. **35**, 4517 (1994).

Capítulo 5

Apêndice A - Representações explícitas das matrizes β^μ

As representações explícitas das matrizes β^μ , utilizadas neste trabalho, estão apresentadas abaixo

A.1) Setor escalar

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$$\beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$\beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$