

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

FACULDADE DE ENGENHARIA

CAMPUS DE BAURU

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**“UM MÉTODO PREVISOR-CORRETOR PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES BARREIRA
LOGARÍTMICA MODIFICADA, COM ESTRATÉGIAS DE CONVERGÊNCIA GLOBAL E DE AJUSTE CÚBICO,
PARA PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR E NÃO-CONVEXA.”**

Autor: Ricardo Bento Nogueira Pinheiro

Orientador: Antonio Roberto Balbo

**Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa
de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, FEB,
UNESP, Campus de Bauru, como parte dos
requisitos para obtenção do título de mestre em
Engenharia Elétrica.**

Bauru – SP 2012

Pinheiro, Ricardo Bento Nogueira.

Um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada, com estratégias de global e de ajuste cúbico, para problemas de programação não-linear e não-convexa / Ricardo Bento Nogueira Pinheiro, 2012

158 f.

Orientador: Antonio Roberto Balbo

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2012

1. Método Primal-Dual de Ponto Interior. 2. Função Barreira Logarítmica Modificada. 3. Ajuste Cúbico. 4. Levenberg-Marquardt. 5. Convergência Global. 6. Fluxo de Potência Ótimo Reativo. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE RICARDO BENTO NOGUEIRA PINHEIRO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

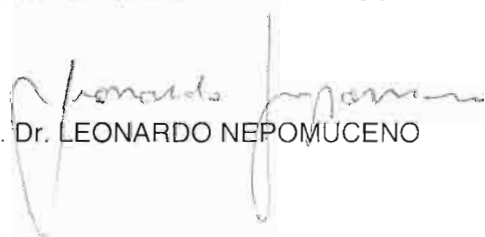
Aos 22 dias do mês de agosto do ano de 2012, às 14:00 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Profa. Dra. EDILAINE MARTINS SOLER do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de RICARDO BENTO NOGUEIRA PINHEIRO, intitulado "UM MÉTODO PREVISOR-CORRETOR PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES BARREIRA LOGARÍTMICA MODIFICADA, COM ESTRATÉGIAS DE CONVERGÊNCIA GLOBAL E DE AJUSTE CÚBICO, PARA PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR E NÃO-CONVEXA". Após a exposição, o discente foi argüido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO



Profa. Dra. EDILAINE MARTINS SOLER



Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO

“A música é muito mais que mínima e colcheias que dançam na pauta musical. Da mesma forma, os símbolos matemáticos ganham vida quando a matemática é tocada na mente.”

Marcus du Sautov.

Autor: Ricardo Bento Nogueira Pinheiro
Orientador: Antonio Roberto Balbo

Ao meu pai por todos os vivos ensinamentos que correm em meu sangue, à minha mãe por suas orações em prol do meu sucesso, aos meus irmãos pelos desentendimentos e apertos de mão.

Dedico este trabalho à minha família.

Autor: Ricardo Bento Nogueira Pinheiro
Orientador: Antonio Roberto Balbo

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida, pelas dúvidas, pelas curiosidades e pelas insatisfações.

Para tudo há um início. Por isso, agradeço a professora Mara Sueli Simão Moraes, pessoa que eu admiro e respeito, a me encorajar para pesquisa em matemática quando eu estava na graduação.

Agradeço a professora Edméa Cássia Baptista por sua orientação e contribuição em minha iniciação científica com métodos de ponto interior e exterior para funções não-lineares e não-convexas. Espero tê-los usado com sabedoria seus ensinamentos.

Agradeço às minhas amigas de trabalho: Amélia e a Camila. Juntos nesses dois anos e meio, compartilhamos a amizade, o respeito mútuo e o mais importante: a solidariedade acadêmica. Tudo isso num ambiente muito especial de trabalho cujo nome é “Labore” ou a sala do orientador (risos). Agradeço por ter convivido com vocês.

Agradeço ao professor Leonardo Nepomuceno e a professora Edilaine Martins Soler pela importante lapidação que deram a este trabalho com sugestões interessantes e correções de conceitos de matemática e de engenharia.

Em especial, agradeço a uma pessoa que foi mais que um orientador, foi mais que um profissional em matemática. Agradeço ao PROFESSOR Antonio Roberto Balbo, o Doctor. Agradecer ao senhor, meu mestre, por me confiar o desenvolvimento deste árduo trabalho é um mero detalhe perto do enorme respeito e admiração que eu tenho por sua integridade e legitimidade como ser humano e pelos seus conhecimentos e sabedoria. Perpetuo nesse texto que, mais alto do que tudo que há em conceito de amizade, confiança e companheirismo, te considero muito próximo daquele que me criou até os meus vinte e dois anos para o trem da vida, mas que Deus o recolheu para si. Meu eterno agradecimento e reconhecimento de seu valor.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada e estratégia de ajuste cúbico (MPIBLM-EX) e o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada, com estratégias de ajuste cúbico e de convergência global (MPIBLMCG-EX). Na definição do algoritmo proposto, a função barreira logarítmica modificada auxilia o método em sua inicialização com pontos inviáveis. Porém, a inviabilidade pode ocorrer em pontos tais que o logaritmo não está definido, consequentemente, isso implica na não existência da função barreira logarítmica modificada. Para suprir essa dificuldade um polinômio cúbico ajustado ao logaritmo, que preserva as derivadas de primeira e segunda do mesmo definido a partir de um ponto da região ampliada, é aplicado ao método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores com barreira logarítmica modificada (MPIBML); no processo previsor são realizadas atualizações do parâmetro de barreira nos resíduos das restrições de complementaridade, considerando aproximações de primeira ordem do sistema de direções de busca, enquanto que no procedimento corretor, incluímos os termos quadráticos não-lineares dos resíduos citados, que foram desprezados no procedimento previsor. Consideramos também a estratégia de convergência global para o MPIBLM-EX, a qual utiliza uma variante do método de Levenberg-Marquardt para ajustar a matriz dual normal da função lagrangiana, caso esta não seja definida positiva. A matriz dual normal é redefinida para as restrições primais de igualdade, de desigualdade e para as variáveis canalizadas, incorporando variáveis duais e matrizes diagonais relativas às restrições de complementaridade. Desse estudo, o MPIBLM-EX é transformado no MPIBLMCG-EX e mostramos que esses métodos pertencem à classe dos métodos de gradiente projetado. Uma implementação desses métodos, realizados em MATLAB 6.1, mostra-nos a eficiência desses para o exemplo matemático proposto e em problemas de FPO reativo, da área de Sistema Elétrico de Potência (SEP) em Engenharia Elétrica, para os sistemas elétricos de Dommel e Tinney, 9 barras, IEEE-14, IEEE-30, IEEE-57, IEEE-118 e IEEE-162. Os resultados são obtidos e as comparações desses são exploradas entre os dois métodos.

Palavras-chaves: Método Primal-Dual de Ponto Interior, Função Barreira Logarítmica Modificada, Ajuste Cúbico, Levenberg-Marquardt, Convergência Global, Fluxo de Potência Ótimo Reativo.

ABSTRACT

This work presents a predictor-corrector primal-dual interior point method with modified log-barrier and third order extrapolation strategy (IPMLBM-EX) and also an extension of this method with the inclusion of the global convergence strategy (IPMLBGCM-EX). In the definition of the proposed algorithm, the modified log-barrier function helps the method initialize with infeasible points. However, infeasibility may occur for some point where the logarithm is not defined. This implicates in non-existence of the modified log-barrier function. To cope with such a problem, a cubic polynomial function is adjusted to the logarithmic function. Such a polynomial function preserves first and second order derivatives in certain point defined in the extended region. This function is applied to the predictor-corrector primal-dual interior point method with modified log-barrier function. In the predictor procedure, the barrier parameter is updated in the residuals of the complementarity conditions considering first-order approximations of the search direction, while the corrector procedure includes the nonlinear quadratic terms of the mentioned residuals, which were neglected in the predictor procedure. We also consider the global convergence strategy for the method, which uses a variant of the Levenberg-Marquardt method to update the normal dual matrix of the Lagrangian function, should it fail to be positively defined. In this case, this matrix is redefined for equality primal constraints, bounded inequality primal constraints and bounded variables, incorporating dual variables and diagonal matrices of the complementarity constraints. From such studies, the IPMLBM-EX method is extended to include the global convergence strategy (IPMLBGCM-EX). We have shown that both methods are projected gradient methods. An implementation performed with Matlab 6.1 has shown the efficiency of these methods for solving a proposed mathematic example and also for solving optimal reactive power flow (ORPF) problems, involving the following electrical systems: Dommel & Tinney (3 bus-system), a 9 bus-system, IEEE 14-bus, IEEE 30-bus, IEEE 57-bus, IEEE 118-bus and IEEE-162 bus systems. The results are obtained and the comparisons between such methods are explored.

Keywords: Primal-Dual Interior-Point Method, Modified Log-Barrier Function, Adjuste Cubic, Levenberg-Marquardt, Global Convergence, Optimal Reactive Power Flow.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.	1-1
2	UMA REVISÃO SOBRE A OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR.	2-5
2.1	Um modelo geral de otimização não-linear.	2-6
2.2	O problema de programação não-linear irrestrita e suas propriedades.	2-7
2.2.1	Funções convexas e côncavas.	2-9
2.2.2	O vetor gradiente e a matriz hessiana de uma função.	2-11
2.2.3	Condições de otimalidade para problemas irrestritos.	2-16
2.2.4	Hipersuperfícies e Hiperplanos.	2-20
2.3	O modelo de otimização não-linear restrita e suas propriedades.	2-21
2.3.1	A função Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \lambda_0)$.	2-24
2.3.2	A função Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \lambda_0, \lambda_1)$.	2-35
2.3.3	O método Dual-Lagrangiano.	2-43
2.4	Métodos de penalidade externa e de penalidade interior.	2-48
2.5	Métodos de Barreira.	2-53
2.6	A função barreira modificada.	2-58
2.7	Uma proposta de cálculo para o estimador dos multiplicadores de Lagrange.	2-63
2.8	O método dos quadrados mínimos.	2-66
2.9	O método de Gauss-Newton e o método de Levenberg-Marquardt.	2-78
3	O MÉTODO PREVISOR-CORRETOR PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES, COM BARREIRA LOGARITMICA MODIFICADA, ESTRATÉGIAS DE CONVERGÊNCIA GLOBAL E DE AJUSTE CÚBICO.	3-85
3.1	O sistema de direções de busca do MPIBLM.	3-86
3.2	O procedimento predictor do MPIBLM.	3-98
3.2.1	O cálculo das direções de folga $\mathbf{d}_{z_i}^k, i = 1, \dots, 4$.	3-98
3.2.2	O cálculo das direções duais $\mathbf{d}_{\lambda_1}^k, \mathbf{d}_{\lambda_2}^k, \mathbf{d}_{\lambda_3}^k$ e $\mathbf{d}_{\lambda_4}^k$.	3-99

3.2.3	O vetor de direções duais $\mathbf{d}_{\lambda_0}^k$ e o vetor de direções primais $\mathbf{d}_x^k$.	3-100
3.3	O procedimento corretor do MPIBLM.	3-105
3.3.1	O cálculo das direções de folga $\tilde{\mathbf{d}}_{z_i}^k, i = 1, \dots, 4$.	3-105
3.3.2	O cálculo das direções duais $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k$ e $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k$	3-106
3.3.3	O vetor de direções duais $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k$ e o vetor de direções primais $\tilde{\mathbf{d}}_x^k$.	3-108
3.4	Uma estratégia de ajuste cúbico aplicado ao MPIBLM.	3-112
3.5	Cálculo do comprimento do passo primal $\bar{\alpha}_p$ e do passo dual $\bar{\alpha}_d$	3-123
3.6	A atualização do parâmetro de barreira μ	3-126
3.7	Inicialização do MPIBLM-EX.	3-126
3.8	O critério de parada e algoritmo para o método para o MPIBLM-EX.	3-128
3.9	Algoritmo do MPIBLM-EX.	3-129
3.10	Aplicação em exemplo matemático (parte 1).	3-131
3.11	O MPIBLM-EX como um método de gradiente projetado.	3-139
3.12	A estratégia de convergência global e o método MPIBLMCG-EX.	3-146
3.13	Algoritmo do MPIBLMCG-EX.	3-153
3.14	Aplicação em exemplo matemático (parte 2).	3-156
4	APLICAÇÃO DOS MÉTODOS PROPOSTOS PARA SOLUÇÃO DO FPO REATIVO.	4-165
4.1	Descrição do problema de FPO reativo.	4-165
4.2	Resultados numéricos.	4-168
4.2.1	O sistema elétrico de Dommel e Tinney (parte 1).	4-171
4.2.2	O sistema elétrico de Dommel e Tinney (parte 2).	4-182
4.2.3	O sistema elétrico de potência de 9 barras.	4-192
4.2.4	O sistema elétrico de potência de 14 barras.	4-204
4.2.5	O sistema elétrico de potência de 30 barras.	4-215
4.2.6	O sistema elétrico de 57 barras	4-226

4.2.7	O sistema elétrico de 118 barras	4-237
4.2.8	O sistema elétrico de 162 barras	4-249
5	CONCLUSÕES E PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS.	5-262
6	BIBLIOGRAFIA	6-265
7	ANEXO I.	7-268
8	ANEXO II.....	8-276
8.1	Soluções ótimas. Sistema Dommel e Tinney (parte 1)	8-276
8.1.1	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$	8-276
8.1.2	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta Q}$	8-276
8.1.3	Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$	8-276
8.1.4	Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$	8-276
8.2	Soluções ótimas. Sistema Dommel e Tinney (parte 2)	8-277
8.2.1	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$	8-277
8.2.2	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta Q}$	8-277
8.2.3	Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$	8-277
8.2.4	Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$	8-277
8.3	Soluções ótimas. Sistema elétrico 9 barras.	8-278
8.3.1	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$	8-278
8.3.2	Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$	8-278
8.3.3	Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$	8-278
8.4	Soluções ótimas. Sistema elétrico 14 barras.	8-279
8.4.1	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$	8-279
8.4.2	Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$	8-279

8.4.3	Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$	8-279
8.5	Soluções ótimas. Sistema elétrico 30 barras.	8-280
8.5.1	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$	8-280
8.5.2	Multiplicadores Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$	8-280
8.5.3	Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$	8-281
8.6	Soluções ótimas. Sistema elétrico 57 barras.	8-282
8.6.1	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$	8-282
8.6.2	Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$	8-283
8.6.3	Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$	8-284
8.7	Soluções ótimas. Sistema elétrico 118 barras.	8-285
8.7.1	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$	8-285
8.7.2	Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$	8-287
8.7.3	Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$	8-290
8.8	Soluções ótimas. Sistema elétrico 162 barras.	8-292
8.8.1	Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$	8-292
8.8.2	Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$	8-295
8.8.3	Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$	8-298
9	ANEXO III.....	9-299

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Mínimo local e Mínimo global.	2-8
Figura 2.2: Interpretação geométrica da definição 2.5.	2-9
Figura 2.3: Ilustração da proposição 2.4.	2-12
Figura 2.4: Ilustração de uma função que contém regiões localmente convexas e localmente côncavas.	2-16
Figura 2.5: Ilustração dos pontos mínimo e máximo do exemplo 2.1	2-29
Figura 2.6: Ilustração para o exemplo 2.2. Fonte: (Flemming, et al., 2007).	2-32
Figura 2.7: Ilustração da solução ótima para o exemplo 2.2.	2-34
Figura 2.8: Existência de um autovalor negativo tal que $\phi(v) = 0$ para o problema (2.15).	2-35
Figura 2.9: Região de viabilidade para o exemplo 2.3.	2-41
Figura 2.10: O vetor $w^\perp \in W^\perp$	2-67
Figura 2.11: O vetor v é resultante da soma de dois vetores: um $w_k \in W$ e outro $w_k^\perp \in W^\perp$	2-68
Figura 2.12: Ilustração da definição 2.26.	2-69
Figura 2.13: Ilustração para a proposição 2.27.	2-70
Figura 2.14: A reta r que está o mais próximo possível de passar pelos pontos de Y	2-71
Figura 3.1: A função $\psi(z)$ com polinômio cúbico ajustado ao logaritmo.	3-118
Figura 3.2: Curvas de nível da função objetivo $f(x)$ do problema (3.98).	3-132
Figura 3.3: Gráfico das restrições de igualdade e de desigualdade do problema (3.98).	3-133
Figura 3.4: O problema (3.98) apresenta dois pontos de mínimos: um local e outro global.	3-134
Figura 3.5: Trajetória dos pontos x^k sobre a região de viabilidade do problema (3.98) gerados pelo MPIBLM-EX.	3-135
Figura 3.6: Sequência dos pontos x^k gerados pelo MPIBLM-EX para o problema (3.98).	3-136
Figura 3.7: Sequência dos pontos λ_0^k gerados pelo MPIBLM-EX para o problema (3.98).	3-137
Figura 3.8: Sequencia dos pontos $\lambda_i^k, i = 1, \dots, 4$, gerados pelo MPIBLM-EX para o problema (3.98).	3-137
Figura 3.9: Efeito dos autovalores de $\theta_k^{-1/2}$ sobre $\nabla g_t(x^k)$	3-142
Figura 3.10: Projeção do vetor $-\hat{r}_\mu^k$ no espaço imagem de $D_k^{-1/2} \nabla g(x^k)^T$	3-143
Figura 3.11: Interpretação geométrica do vetor $\tilde{d}_x^k$	3-144
Figura 3.12: Construção do segmento $\overrightarrow{AD'}$	3-150
Figura 3.13: Esquema gráfico para a determinação da heurística (3.111).	3-152
Figura 3.14: Trajetória dos pontos x^k sobre a região de viabilidade do problema (3.98) gerados pelo MPIBLMCG-EX.	3-158
Figura 3.15: Sequência dos pontos x^k gerados pelo MPIBLM-EX para o problema (3.98).	3-159
Figura 3.16: Sequência dos pontos λ_0^k gerados pelo MPIBLMCG-EX para o problema (3.98).	3-160
Figura 3.17: Sequencia dos pontos $\lambda_i^k, i = 1, \dots, 4$, gerados pelo MPIBLMCG-EX para o problema (3.98).	3-161
Figura 3.18: Evolução do parâmetro β_k gerado pelo MPIBLMCG-EX para o problema (3.98).	3-162
Figura 3.19: Soluções x^k gerados pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (3.98).	3-164
Figura 4.1: Diagrama do sistema elétrico de 3 barras de Dommel e Tinney.	4-172

Figura 4.2: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.5).	4-177
Figura 4.3: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.5).	4-178
Figura 4.4: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.5).	4-179
Figura 4.5: Sequência dos pontos $\lambda_{Q_{\min}}$, $\lambda_{Q_{\max}}$, $\lambda_{V_{\min}}$ e $\lambda_{V_{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.5).	4-180
Figura 4.6: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o problema (4.5). 4-181	
Figura 4.7: Estratégia para resolução de Dommel e Tinney quando $1 \leq V_3 \leq 1$	4-182
Figura 4.8: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).	4-187
Figura 4.9: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).	4-188
Figura 4.10: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).	4-189
Figura 4.11: Sequência dos pontos $\lambda_{Q_{\min}}$, $\lambda_{Q_{\max}}$, $\lambda_{V_{\min}}$ e $\lambda_{V_{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).	4-190
Figura 4.12: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).	4-191
Figura 4.13: Topologia do sistema elétrico de potência de 9 barras.	4-192
Figura 4.14: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 9 barras.	4-198
Figura 4.15: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 9 barras.	4-199
Figura 4.16: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 9 barras.	4-200
Figura 4.17: Sequência dos pontos $\lambda_{Q_{\min}}$, $\lambda_{Q_{\max}}$, $\lambda_{V_{\min}}$ e $\lambda_{V_{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 9 barras.	4-201
Figura 4.18: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 9 barras.	4-202
Figura 4.19: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 9 barras.	4-203
Figura 4.20: Topologia do sistema IEEE-14. Fonte: (University Washington Electrical Engineering).	4-204
Figura 4.21: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 14 barras.	4-209
Figura 4.22: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 14 barras.	4-210
Figura 4.23: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 14 barras.	4-211

Figura 4.24: Sequência dos pontos $\lambda_{Q_{\min}}$, $\lambda_{Q_{\max}}$, $\lambda_{V_{\min}}$ e $\lambda_{V_{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 14 barras.....	4-212
Figura 4.25: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 14 barras.	4-213
Figura 4.26: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 14 barras.....	4-214
Figura 4.27: Topologia do sistema IEEE-30. Fonte: (University Washington Electrical Engineering).....	4-215
Figura 4.28: Sequência dos pontos V^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 30 barras.....	4-220
Figura 4.29: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 30 barras.....	4-221
Figura 4.30: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 30 barras.....	4-222
Figura 4.31: Sequência dos pontos $\lambda_{Q_{\min}}$, $\lambda_{Q_{\max}}$, $\lambda_{V_{\min}}$ e $\lambda_{V_{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 30 barras.....	4-223
Figura 4.32: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 30 barras.	4-224
Figura 4.33: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 30 barras.....	4-225
Figura 4.34: Topologia do sistema IEEE-57. Fonte: (University Washington Electrical Engineering).....	4-226
Figura 4.35: Sequência dos pontos V^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 57 barras.....	4-231
Figura 4.36: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 57 barras.....	4-232
Figura 4.37: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 57 barras.....	4-233
Figura 4.38: Sequência dos pontos $\lambda_{Q_{\min}}$, $\lambda_{Q_{\max}}$, $\lambda_{V_{\min}}$ e $\lambda_{V_{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 57 barras.....	4-234
Figura 4.39: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 57 barras.	4-235
Figura 4.40: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 57 barras.....	4-236
Figura 4.41: Topologia do sistema IEEE-118. Fonte: (University Washington Electrical Engineering).....	4-237
Figura 4.42: Sequência dos pontos V^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 118 barras.....	4-243
Figura 4.43: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 118 barras.....	4-244
Figura 4.44: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 118 barras.....	4-245
Figura 4.45: Sequência dos pontos $\lambda_{Q_{\min}}$, $\lambda_{Q_{\max}}$, $\lambda_{V_{\min}}$ e $\lambda_{V_{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 118 barras.....	4-246
Figura 4.46: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 118 barras.	4-247

Figura 4.47: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 118 barras.....	4-248
Figura 4.48: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 162 barras.....	4-256
Figura 4.49: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 162 barras.....	4-257
Figura 4.50: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 162 barras.....	4-258
Figura 4.51: Sequência dos pontos $\lambda_{Q^{\min}}$, $\lambda_{Q^{\max}}$, $\lambda_{V^{\min}}$ e $\lambda_{V^{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 162 barras.....	4-259
Figura 4.52: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 162 barras.	4-260
Figura 4.53 : Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 162 barras.....	4-261

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o problema (3.98).</i>	3-138
<i>Tabela 2: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o problema (3.98).</i>	3-163
<i>Tabela 3: Natureza das barras e tipos de restrições nodais associadas do sistema 3 barras.</i>	4-172
<i>Tabela 4: Estado inicial do sistema elétrico de 3 barras.</i>	4-173
<i>Tabela 5: Limites de operação para o sistema elétrico de 3 barras do teste 1.</i>	4-173
<i>Tabela 6: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o problema (4.5).</i>	4-174
<i>Tabela 7: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o problema (4.5).</i>	4-175
<i>Tabela 8: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para o problema (4.5).</i>	4-176
<i>Tabela 9: Limites de operação para o sistema elétrico de 3 barras do teste 2.</i>	4-183
<i>Tabela 10: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o problema (4.6).</i>	4-184
<i>Tabela 11: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o problema (4.6).</i>	4-185
<i>Tabela 12: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para o problema (4.6).</i>	4-186
<i>Tabela 13: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de taps do sistema 9 barras.</i>	4-193
<i>Tabela 14: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 9 barras.</i>	4-194
<i>Tabela 15: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 9 barras.</i>	4-195
<i>Tabela 16: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 9 barras.</i>	4-196
<i>Tabela 17: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de taps do sistema 14 barras.</i>	4-204
<i>Tabela 18: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 14 barras.</i>	4-205
<i>Tabela 19: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 14 barras.</i>	4-207
<i>Tabela 20: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 14 barras.</i>	4-208
<i>Tabela 21: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de taps do sistema 30 barras.</i>	4-215
<i>Tabela 22: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 30 barras.</i>	4-216
<i>Tabela 23: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 30 barras.</i>	4-218
<i>Tabela 24: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 30 barras.</i>	4-219
<i>Tabela 25: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de taps do sistema 57 barras.</i>	4-227
<i>Tabela 26: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 57 barras.</i>	4-228
<i>Tabela 27: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 57 barras.</i>	4-229
<i>Tabela 28: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 57 barras.</i>	4-230
<i>Tabela 29: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de taps do sistema 118 barras.</i>	4-237
<i>Tabela 30: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 118 barras.</i>	4-239
<i>Tabela 31: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 118 barras.</i>	4-240
<i>Tabela 32: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 118 barras.</i>	4-241
<i>Tabela 33: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de taps do sistema 162 barras.</i>	4-249
<i>Tabela 34: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 162 barras.</i>	4-250
<i>Tabela 35: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 162 barras.</i>	4-252
<i>Tabela 36: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 162 barras.</i>	4-254

1 INTRODUÇÃO.

Em várias áreas do conhecimento relacionadas às Ciências Exatas, de Engenharia, Naturais e Sociais entre outras, são encontrados problemas que podem ser modelados matematicamente como um problema de otimização/programação matemática.

Os problemas de Programação Matemática são definidos em um contexto cujo objetivo é a investigação do que é o melhor possível; do que diz-se de grau, quantidade ou estado que se considera o mais favorável, em relação a um determinado critério, em outras palavras, esses estão definidos no contexto de **otimalidade**.

Alguns exemplos destes problemas são descritos a seguir. O princípio de Fermat estabelece que a luz se propaga entre dois pontos no **menor** tempo possível; segundo(Monteiro, et al., 2004), durante um período de exercício, o corpo humano sofre adaptações cardiovasculares e respiratórias a fim de atender às demandas aumentadas dos músculos ativos e, à medida que essas adaptações são repetidas, ocorrem modificações nesses músculos, permitindo que o organismo melhore o seu desempenho. Entram em ação processos fisiológicos e metabólicos, **otimizando** a distribuição de oxigênio pelos tecidos em atividade; (Steinhardt, et al., 1998) sugeriram que quase-cristais são estruturas em que agrupamentos de átomos compartilham átomos com seus vizinhos, em um padrão que é destinado a **maximizar** a densidade do agrupamento; os resultados da pesquisa de (Tucker, 2000) mostram que os falcões mantêm a cabeça em linha reta e seguem em uma espiral logarítmica. Devido à propriedade equiangular da espiral, esse caminho lhes permite manter seu alvo à vista enquanto **maximiza** a velocidade; as melhores evidências de que a filotaxia simplesmente representa um estado de **mínima** energia para um sistema de botões de flor que se repelem mutuamente não vieram da botânica, mas de experimentos de Física que foram executados por (Douady, et al., 1992) que utilizaram o campo magnético. No setor industrial,

modelos que **otimizam** o processo de fabricação do biscoito *cracker* podem ser encontrados nos trabalhos de (Melo, et al., 2004).

Em geral, esses problemas possuem escassez de recursos com ou sem limitações físicas do sistema ou vice-versa, isto é, o problema exige um conjunto de restrições com variáveis de decisão tais que respeitem e atendam todas as restrições. Essas restrições definem um espaço a qual é a denominada região de viabilidade e é justamente aí que as variáveis de decisão estão inseridas e serão avaliadas se são bons ou maus candidatos a ótimos.

Podemos dizer que temos um modelo matemático de otimização para o problema observado se esse pôde ser modelado com função objetivo de minimização ou de maximização dependente das variáveis de decisão e que apresente (ou não) restrições tais como: um conjunto de equações e inequações em função das variáveis de decisão reais, inteiras ou mistas, em que essas mesmas podem ou não ser limitadas. A programação matemática busca investigar esses modelos na busca de uma solução viável inserida numa região de viabilidade e que, se possível seja, a mais eficiente, isto é, a programação matemática desenvolve métodos através dos quais busca-se a determinação da solução e valor ótimo do modelo.

Devido aos mais diversos fenômenos das mais diversas naturezas, a programação matemática é muito diversificada. Em geral, essa é subdividida em programação linear, programação não-linear, programação inteira, programação combinatória, programação dinâmica, programação sequencial e programação mista, entre outras.

Um modelo matemático é definido como problema programação linear (PPL) quando tanto a função objetivo quanto as restrições de igualdade e de desigualdade são somente funções afins ou lineares e as variáveis de decisão são contínuas. Os principais métodos para resolver problemas dessa característica são: Método Simplex, proposto por (Dantzig, 1951);

Método dos Elipsóides, proposto por (Khachiyan, 1979); os métodos de pontos interiores de (Karmarkar, 1984), Primal-Afim, proposto por (Vanderbei, et al., 1984) e Dual-Afim, proposto por (Adler, et al., 1989), que são explorados no trabalho de (Fang, et al., 1993). Problemas que foram modelados matematicamente através de programação linear, programação inteira e programação mista podem ser encontrados em (Ramalhete, et al., 1985)

Um modelo matemático é definido como um problema de programação não-linear (PPNL) quando a função objetivo ou pelo menos uma equação ou inequação pertinente ao conjunto das restrições é não-linear e as variáveis de decisão são contínuas em seu domínio de definição. Estas funções podem ser convexas ou não-convexas, algébricas ou transcendentais. Neste trabalho, a função objetivo e os funcionais de igualdade e de desigualdade são considerados pelo menos de classe C^2 . Em (Luenberger, et al., 2008) encontramos alguns métodos para resolver problemas de PNL tais como: Método do Gradiente, Método do Gradiente Projetado, Método de Fletcher-Reeves, Método de Newton, os Quase-Newton: Método de Gauss-Newton, Método de Levenberg-Marquardt, Método de Davidon-Fletcher-Powell (DFP), Método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) e família de Broyden; Métodos de Penalidade, Métodos de Barreira, Método de Ponto Interior e Método Primal-Dual. Os métodos construídos e explorados neste trabalho relacionam-se diretamente com alguns daqueles, tais como: Método de Gradiente Projetado, Método de Gauss-Newton, Método de Levenberg-Marquardt, Métodos de Barreira, Método de Ponto Interior e Método Primal-Dual.

O problema de programação matemática investigado neste trabalho fluxo de potência ótimo reativo (FPO reativo) com variáveis contínuas em seu domínio de definição. Esse problema é definido no âmbito da Engenharia Elétrica em Sistemas Elétricos de Potência (SEP). O modelo de FPO reativo é definido com as seguintes características: função objetivo

não-linear, não-convexa e transcendental; conjunto de restrições não-lineares, não-convexas e transcendentais e variáveis de decisão canalizadas, logo, enquadra-se na programação não-linear. Por isso, dentre todos os tipos de programação matemática citadas, aquela que destacamos aqui é a de programação não-linear.

2 UMA REVISÃO SOBRE A OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR.

Neste capítulo apresentamos o modelo matemático geral de otimização não-linear, bem como as principais definições e proposições da teoria de programação não-linear que estabelecem em que condições estamos em um ponto ótimo (pelo menos localmente) na região de viabilidade. Os resultados iniciais apresentados relacionam-se ao estudo de funções (que admitem derivadas de primeira e de segunda ordem e que sejam contínuas em seu domínio de definição) convexas, em domínio convexo, e destacamos as principais consequências do desenvolvimento da teoria de otimização em conjuntos convexos.

Exploramos a função lagrangiana do modelo de otimização não-linear, destacando que essa função possibilita-nos a transformação de um problema de programação não-linear com restrições de igualdade e de desigualdade em um problema irrestrito, equivalente ao original e que auxilia-nos a investigar as condições de otimalidade de primeira ordem desse problema de uma forma simples e direta. Ao considerarmos essas condições, as quais são conhecidas como condições de otimalidade de KKT (apresentadas em (Kuhn, et al., 1951)). Embasados na teoria de geometria diferencial associados ao estudo sobre hiperplanos e hipersuperfícies tangentes, exploramos essas condições. É interessante observarmos que inseridas as condições de KKT, ocorre a condição de complementaridade do problema a qual relaciona as variáveis primais e duais desse. Essas condições nos auxiliam na investigação de soluções ótimas (pelo menos locais) do problema.

Apresentamos também estratégias que são utilizadas para a resolução de problemas de otimização não-linear relacionadas diretamente às restrições e às condições de fronteira tais como: a função penalidade, a função barreira clássica e a função barreira modificada.

Diferentemente da função barreira clássica, que necessariamente trabalha com pontos interiores à região viável do problema, destacamos a função barreira modificada. Em

especial, uma das vantagens da função barreira modificada é a possibilidade de podermos trabalhar com pontos inviáveis através de uma relaxação da região de viabilidade original e a de que os multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade (os quais são estimados) são inseridos na formulação dessa função.

Usufruímos da qualidade e das vantagens particulares da função lagrangiana e da função barreira modificada e apresentamos o estudo da função lagrangiana aumentada interior modificada, a qual é uma das funções inseridas na classe das funções primal-dual. Uma breve análise dessa função foi feita e, embasados nessa, apresentamos uma proposição para atualizar os estimadores dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade do problema.

Também apresentamos neste capítulo, um estudo sobre a teoria dos quadrados mínimos. Essa teoria é fundamental para a compreensão dos métodos de Gauss-Newton e o de Levenberg-Marquardt, os quais inserem-se no método primal-dual desenvolvido no capítulo 3. O estudo do método dos quadrados mínimos permitiu-nos a interpretação de como o método primal-dual determina as direções de busca através de projeção de vetores em subspaços vetoriais.

2.1 Um modelo geral de otimização não-linear.

Um modelo geral de otimização não-linear com restrições de igualdade e de desigualdade é apresentado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} & \\ & g_t(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{para } t = 1, \dots, m ; \\ & h_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, r \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (2.1)$$

onde:

- 1) $\mathbf{x}$ é um vetor de n coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ denominado vetor de decisão;
- 2) X é um subconjunto não-vazio do $\mathbb{R}^n$;
- 3) $f(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}), h_1(\mathbf{x}), \dots, h_r(\mathbf{x})$ são funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$;
- 4) $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo;
- 5) $g_t(\mathbf{x}) = 0$, para $t = 1, \dots, m$, são restrições de igualdade;
- 6) $h_i(\mathbf{x}) \leq 0$, para $i = 1, \dots, r$, são restrições de desigualdade;

Problemas semelhantes ao problema (2.1), os quais contém restrições, geralmente são de difícil resolução. As dificuldades em encontrarmos uma solução dependem da dimensão do vetor $\mathbf{x}$, do número de restrições de igualdade e de desigualdade. Definimos a seguir o que é um ponto viável e a região de viabilidade para o problema (2.1).

Definição 2.1: Denomina-se por ponto viável a todo ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ que satisfaça todas as restrições de igualdade e de desigualdade.

Definição 2.2: Denomina-se por região de viabilidade à coleção de todos os pontos viáveis.

Por simplicidade, vamos definir um problema de otimização não-linear irrestrito, que é mais simples de ser tratado, mas não menos importante, pois este servirá de grande ferramenta para os capítulos seguintes.

2.2 O problema de programação não-linear irrestrita e suas propriedades.

Considere um problema de otimização não-linear irrestrito o qual é definido por (2.2):

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases} . \quad (2.2)$$

No problema (2.2), queremos encontrar as componentes de um vetor denominado de vetor ótimo, $\mathbf{x}^*$, que minimiza a função objetivo. As definições a seguir nos dão suporte para dizermos quando um vetor $\mathbf{x}^*$ é um mínimo local ou mínimo global.

Definição 2.3: Um ponto $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo local de f sobre X se existe um $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ para todo $\mathbf{x} \in X$, sempre que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$. Se $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$ para todo $\mathbf{x} \in X$, então $\mathbf{x}^*$ é denominado ponto de mínimo local estrito.

Definição 2.4: Um ponto $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo global de f sobre X se $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ para todo $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, sendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$. Se $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$, então $\mathbf{x}^*$ é denominado ponto de mínimo global estrito.

Para ilustrarmos as definições 2.3 e 2.4, apresentamos na figura 2.1 na qual $(x_1; f(x_1))$ é um ponto de mínimo local e $(x_2; f(x_2))$ é o ponto de mínimo global para uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

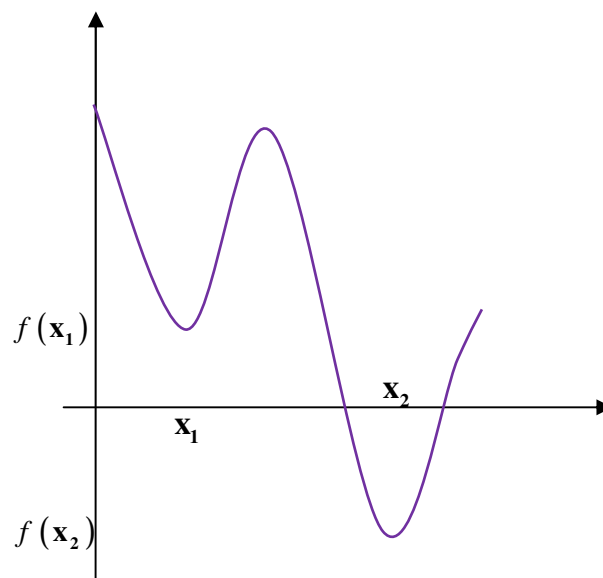


Figura 2.1: Mínimo local e Mínimo global.

O problema (2.2) pode admitir mais de uma solução $\mathbf{x}^* \in X$. Isso se dá pela

característica da função objetivo ser não-convexa ou não-côncava para $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$.

2.2.1 Funções convexas e côncavas.

Definição 2.5: Uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ é denominada convexa se, para cada $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2 \in X$ e para cada α , $0 \leq \alpha \leq 1$, tivermos $f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha) \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$. Se para cada α , $0 < \alpha < 1$, e $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ tivermos $f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha) \mathbf{x}_2) < \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$, então f é dita **estritamente convexa**.

A figura 2.2 ilustra a definição 2.5.

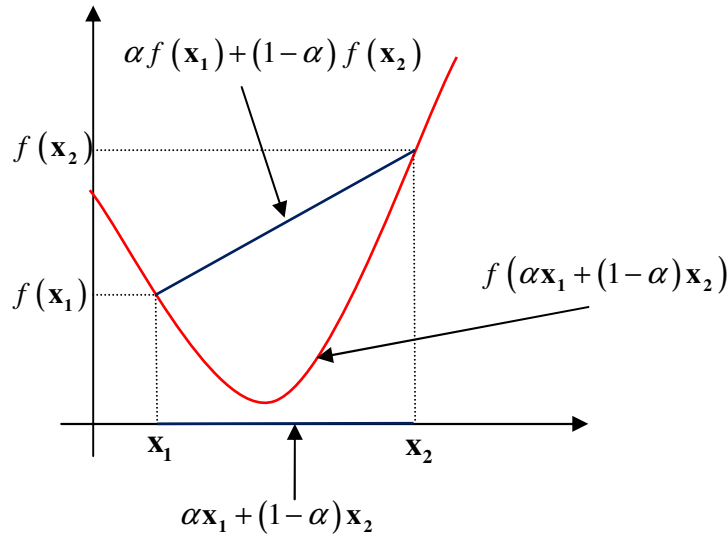


Figura 2.2: Interpretação geométrica da definição 2.5.

Definição 2.6: Uma função $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ é denominada côncava se a função $f = -q$ é convexa. A função q é estritamente côncava se $-q$ é estritamente convexa.

Com as definições 2.5 e 2.6 vamos mostrar que as funções convexas podem ser combinadas gerando novas funções convexas e que, quando essas são restrições, geram um conjunto convexo de restrições.

Proposição 2.1: Sejam $f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções convexas sobre um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, então a função $f_1 + f_2$ é convexa sobre X

Prova: Tome $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2 \in X \subset \mathbb{R}^n$, e $0 < \alpha < 1$, então, temos:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) &= f_1(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) + f_2(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq \\ &\leq \alpha f_1(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f_1(\mathbf{x}_2) + \alpha f_2(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f_2(\mathbf{x}_2) \leq \\ &\leq \alpha (f_1(\mathbf{x}_1) + f_2(\mathbf{x}_1)) + (1 - \alpha) (f_1(\mathbf{x}_2) + f_2(\mathbf{x}_2)) = \alpha (f_1 + f_2)(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) (f_1 + f_2)(\mathbf{x}_2) \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 2.2: Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa sobre um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, então a função βf é convexa para qualquer β .

Prova: Tome $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2 \in X \subset \mathbb{R}^n$, e $0 < \alpha < 1$, então, temos:

$$\begin{aligned} \beta f_1(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) &\leq \beta (\alpha f_1(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f_1(\mathbf{x}_2)) \leq \beta \alpha f_1(\mathbf{x}_1) + \beta (1 - \alpha) f_1(\mathbf{x}_2) = \\ &= \alpha (\beta f_1(\mathbf{x}_1)) + (1 - \alpha) (\beta f_1(\mathbf{x}_2)) \blacksquare \end{aligned}$$

Note que, se $f_1, \dots, f_r$ são funções convexas, então decorre das proposições 2.1 e 2.2 que a função F dada em (2.3) é convexa.

$$F = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_r f_r. \quad (2.3)$$

Vamos considerar agora conjuntos definidos por restrições convexas de desigualdades.

Proposição 2.3: Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa sobre um conjunto convexo

$X \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto $\Gamma_c = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X, f(\mathbf{x}) \leq c\}$ é convexo para cada número real c .

Prova: Tome $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Gamma_c$. Então $f(\mathbf{x}_1) \leq c$ e $f(\mathbf{x}_2) \leq c$ e para $0 < \alpha < 1$,
 $f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_2) \leq c \leq \alpha c + (1-\alpha)c = c$.

Assim $\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in \Gamma_c$. ■

Como a intersecção de conjuntos convexos também é um conjunto convexo, (Bazaraa, et al., 2006), o conjunto de pontos que satisfazem simultaneamente $f_1(\mathbf{x}) \leq c_1, f_2(\mathbf{x}) \leq c_2, \dots, f_r(\mathbf{x}) \leq c_r$ onde cada f_i é uma função convexa, é um conjunto convexo. Este é um resultado muito importante em programação matemática uma vez que o conjunto de restrições é muitas vezes definido desta forma, observe o modelo de programação matemática (2.1).

2.2.2 O vetor gradiente e a matriz hessiana de uma função.

Definição 2.7: Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que admite derivadas parciais de primeira ordem em todo ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$. Denomina-se por vetor gradiente, $\nabla f(\mathbf{x})$, ao vetor cujas componentes são as derivadas parciais de f em relação a variável $x_i, i = 1, \dots, n$.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^T. \quad (2.4)$$

Neste trabalho, utilizamos funções de classe C^2 , isto é, utilizamos funções contínuas e que admitem derivadas parciais de segunda ordem em todo ponto $\mathbf{x} \in X$.

A seguir, enunciamos uma proposição que trata de convexidade para funções diferenciáveis.

Proposição 2.4: *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função de classe C^2 , então f é uma função convexa em um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.*

Prova: Ver (Luenberger, et al., 2008) ■

A proposição 2.4 é ilustrada na figura 2.3. O vetor gradiente define um hiperplano suporte passando pelo ponto $\mathbf{x}$.

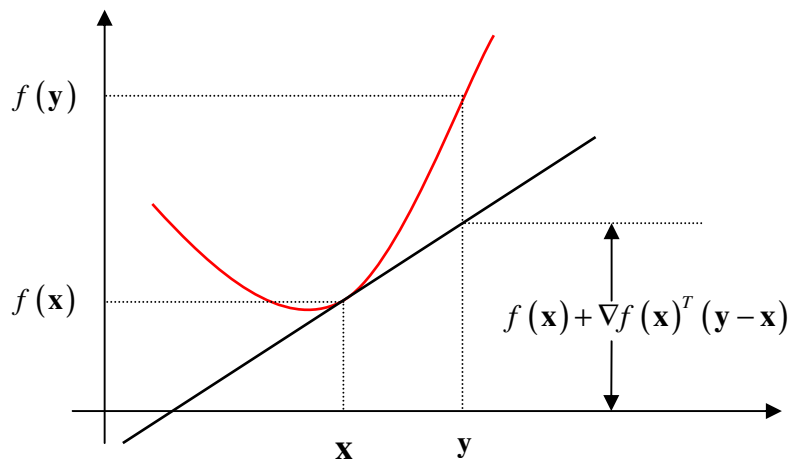


Figura 2.3: Ilustração da proposição 2.4.

Uma observação é a de que para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o hiperplano coincide com a equação de uma reta e para $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ coincide com a equação de um plano.

Definição 2.8: *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função de classe C^2 e $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$. Denomina-se por matriz Hessiana, $\nabla^2 f(\mathbf{x})$, à matriz simétrica, de ordem n cujas componentes são as derivadas parciais de segunda ordem de f em cada variável x_i , $i = 1, \dots, n$.*

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Proposição 2.5: Uma matriz $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ é definida positiva se seus autovalores são positivos.

Prova: Consideramos que a matriz $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ é simétrica e as proposições 2.5.1, 2.5.2 e 2.5.3 seguir:

Proposição 2.5.1: Os autovalores $v_i, i=1, \dots, n$ de uma matriz simétrica são números reais.

Prova: Ver (Callioli, et al., 1991) ■

Proposição 2.5.2: Seja $\mathbf{Q}$ um operador linear de um espaço euclidiano de dimensão finita. Então $\mathbf{Q}$ é uma isometria se, e somente se, a matriz de $\mathbf{Q}$ em relação a uma base ortonormal é uma matriz ortogonal (sua inversa é igual à sua transposta).

Prova: Ver (Callioli, et al., 1991) ■

Proposição 2.5.3: Um operador linear A de um espaço euclidiano V , de dimensão finita $n \geq 1$, é auto-adjunto se, e somente se, existe uma base ortonormal de V formada de autovetores de A .

Prova: Ver Callioli (1995) ■

Seja $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal definida por $\mathbf{Q}^{-1}\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{Q}$ onde $\mathbf{Q}$ é a matriz de autovetores de $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{D}$ é a matriz de autovalores **distintos** e **não-nulos** de $\nabla^2 f(\mathbf{x})$.

Pela proposição 2.5.3, a matriz $\mathbf{Q}$ é ortonormal em $\mathbb{R}^n$, pois os autovalores de $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ são distintos e não-nulos, logo, os versores que compõem as colunas da matriz $\mathbf{Q}$ formam uma base para o $\mathbb{R}^n$. Não apenas isso, $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ é também simétrica e toda matriz simétrica representa um certo operador auto-adjunto, com referência a uma base ortonormal, ver (Callioli, et al., 1991), portanto, os versores coluna de $\mathbf{Q}$ formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^n$.

Por ser simétrica também temos, pela proposição 2.5.1, que os autovalores $v_i, i=1, \dots, n$ de $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ são números reais. Como os versores colunas de $\mathbf{Q}$ são ortonormais dois a dois, então, pela proposição 2.5.2, temos que $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, portanto, $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{Q}$.

Tomemos $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}$, então $\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} =$

$$= \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & v_n \end{pmatrix} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n v_i |y_i|^2. \text{ Como } y_i \text{'s são arbitrários, pois é para todo}$$

$\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$, a matriz hessiana será definida positiva quando todos os autovalores são números reais estritamente positivos ■

Corolário 2.1: Uma matriz $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ simétrica é semidefinida positiva quando $\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{x} \geq 0$, semidefinida negativa quando $\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{x} \leq 0$ e definida negativa quando $\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{x} < 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in X \subset \mathbb{R}^n$.

Com as proposições 2.4 e 2.5, enunciamos uma importante proposição a qual é fundamental para as condições necessárias e suficientes de otimalidade.

Proposição 2.6: *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função de classe C^2 , então f é convexa sobre um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ que contém ponto interior se, e somente se, a matriz $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ é semidefinida positiva em todo X .*

Prova: Ver (Luenberger, et al., 2008) ■

Segundo (Luenberger, et al., 2008), a matriz hessiana é a generalização para o $\mathbb{R}^n$ do conceito de curvatura de uma função, e correspondentemente, $\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{x} > 0$ é uma generalização para curvaturas positivas e $\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{x} < 0$ é uma generalização para curvaturas negativas. Funções convexas possuem curvaturas positivas (ou pelo menos não-negativas) em todas as direções. Motivado por essas observações, se a matriz hessiana é semidefinida positiva em pequena região dizemos que ali a função é **localmente convexa**, essa será **localmente côncava** se a hessiana for semidefinida negativa, ver figura 2.4, e é estritamente convexa se a função é convexa em todo seu domínio de definição, ver figura 2.3.

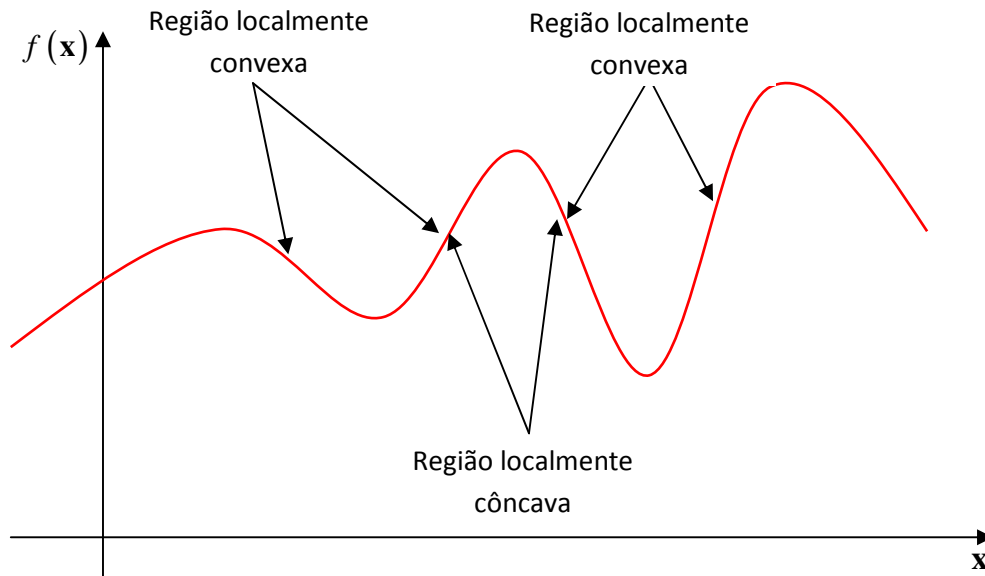


Figura 2.4: Ilustração de uma função que contém regiões localmente convexas e localmente côncavas.

Na próxima proposição apresentamos uma condição necessária e suficiente para um ponto $\mathbf{x}^*$ ser mínimo global.

Proposição 2.7: Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função de classe C^1 convexa sobre um conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Se há um ponto $\mathbf{x}^* \in X$ de tal modo que, para todo $\mathbf{y} \in X$, $\nabla f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \geq 0$, então $\mathbf{x}^*$ é um ponto de mínimo global de f sobre X .

Prova: A prova é imediata. Pela proposição 2.4, temos:

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \underbrace{\nabla f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*)}_{\geq 0} \geq f(\mathbf{x}^*) \quad \blacksquare$$

2.2.3 Condições de otimalidade para problemas irrestritos.

Nos problemas de otimização visamos encontrar um ponto de mínimo global, porém, muitas vezes a função objetivo possui regiões convexas e côncavas em seu domínio de definição, assim, nos damos por satisfeitos com a determinação de pelo menos um mínimo local inserido na região viável. Em geral, os métodos utilizados para encontrar um ponto

ótimo são iterativos, isto é, esses métodos geram sequências adequadas de pontos viáveis do tipo $(\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \dots)^T$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^*$.

Definição 2.9: Sejam $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq \bar{\alpha} \in \mathbb{R}$; $\mathbf{x}^k$, $\mathbf{x}^{k+1}$ e $\mathbf{d}_x^k \neq \mathbf{0} \in X \subset \mathbb{R}^n$. Então $\mathbf{d}_x^k$ é uma direção de descida se a seguinte condição for satisfeita: $f(\mathbf{x}^{k+1}) - f(\mathbf{x}^k) < 0$, onde $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}_x^k$ para algum $\alpha \in (0, \bar{\alpha}) \subset \mathbb{R}$.

Em geral, α é determinado por um método de busca unidimensional. Esses métodos podem ser encontrados em (Bazaraa, et al., 2006).

Proposição 2.8: Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função de classe C^1 e $\mathbf{x}^k \in X \subset \mathbb{R}^n$. O vetor $\mathbf{d}_x^k$ é uma direção de descida se, e somente se, $\nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_x^k < 0$.

Prova: ($\rightarrow$) Ao fazermos uma aproximação por um polinômio de Taylor de primeira ordem centrado em $\mathbf{x}^k$, temos que $f(\mathbf{x}^{k+1}) = f(\mathbf{x}^k + \bar{\alpha} \mathbf{d}_x^k) \approx f(\mathbf{x}^k) + \bar{\alpha} \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_x^k$.

Pela definição 2.9, existe $\bar{\alpha} > 0$, temos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^{k+1}) &= f(\mathbf{x}^k + \bar{\alpha} \mathbf{d}_x^k) \approx f(\mathbf{x}^k) + \bar{\alpha} \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_x^k < f(\mathbf{x}^k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{f(\mathbf{x}^k + \bar{\alpha} \mathbf{d}_x^k) - f(\mathbf{x}^k)}{\bar{\alpha}} &= \frac{f(\mathbf{x}^{k+1}) - f(\mathbf{x}^k)}{\bar{\alpha}} = \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_x^k < 0 \end{aligned}$$

portanto, temos:

$$\nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_x^k < 0 \blacksquare$$

($\leftarrow$) Como $\nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_x^k < 0$, então, por Taylor, temos:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}^{k+1}) &= f(\mathbf{x}^k + \bar{\alpha} \mathbf{d}_x^k) \approx f(\mathbf{x}^k) + \bar{\alpha} \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_x^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow f(\mathbf{x}^{k+1}) - f(\mathbf{x}^k) &= \underbrace{\bar{\alpha} \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_x^k}_{<0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow f(\mathbf{x}^{k+1}) - f(\mathbf{x}^k) &< 0 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

A próxima proposição nos dá a condição necessária de otimalidade de primeira ordem para um problema irrestrito.

Proposição 2.9: *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função de classe C^1 . Se $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo local, então $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.*

Prova: Suponha que $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$ e tomemos a direção de sentido contrário ao vetor gradiente, ou seja, $\mathbf{d}_x^k = -\nabla f(\mathbf{x}^*)$, então, pelo produto interno $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_x^k = -\|\nabla f(\mathbf{x}^*)\|^2 < 0$. Pela proposição 2.8, existe um $0 < \alpha < \bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^*)$ o que contradiz que $\mathbf{x}^*$ é um mínimo local, portanto, $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. ■

A proposição 2.9 apresenta uma condição necessária para que $\mathbf{x}^*$ seja um mínimo local, mas não suficiente, pois se $\mathbf{x}^*$ é um máximo local ou $\mathbf{x}^*$ é um ponto de sela, então a condição de que $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ também é válida. Para provar isso, basta supor que $f(\mathbf{x}^{k+1}) > f(\mathbf{x}^k)$ e tomar um vetor de direção e sentido $\mathbf{d}_x^k = \nabla f(\mathbf{x}^k)$ e enunciar a proposição 2.9 supondo que $\mathbf{x}^*$ é um máximo local. A proposição 2.10 nos dá as condições necessárias e suficientes de que $\mathbf{x}^*$ é um mínimo local.

Proposição 2.10: Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função de classe C^2 .

$\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo local se, e somente se :

$$i) \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0};$$

e

$$ii) \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \text{ é definida positiva.}$$

Prova: ($\rightarrow$) Desde que $\mathbf{x}^*$ seja um ponto de mínimo local, então, por Taylor, temos:

$$f(\mathbf{x}^* + \alpha \mathbf{d}_x^k) \approx f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_x^k + \frac{\alpha^2}{2!} (\mathbf{d}_x^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d}_x^k > f(\mathbf{x}^*), \text{ então, pela}$$

proposição 2.9, obtemos que $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$

$$\text{e, assim, } f(\mathbf{x}^* + \alpha \mathbf{d}_x^k) - f(\mathbf{x}^*) \approx \frac{\alpha^2}{2!} (\mathbf{d}_x^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d}_x^k > 0, \text{ isto é, } \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \text{ é}$$

definida positiva.

($\leftarrow$) Suponhamos que $\mathbf{x}^*$ não seja um ponto de mínimo local. Assim, para algum $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e $0 < \alpha < \bar{\alpha}$, temos a sequência $(\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{k+1}, \dots)$ com $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}^{k-1})$. Logo, por Taylor, temos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^{k+1}) &= f(\mathbf{x}^* + \alpha \mathbf{d}_x^k) \approx f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_x^k + \frac{\alpha^2}{2!} (\mathbf{d}_x^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d}_x^k < f(\mathbf{x}^*) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(\mathbf{x}^{k+1}) \approx \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_x^k + \frac{\alpha^2}{2!} (\mathbf{d}_x^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d}_x^k < 0; \end{aligned}$$

por hipótese, $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, portanto, $f(\mathbf{x}^{k+1}) \approx \frac{\alpha^2}{2!} (\mathbf{d}_x^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d}_x^k < 0$.

O produto $(\mathbf{d}_x^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d}_x^k < 0$ mostra que a matriz $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ é definida negativa em $\mathbf{x}^*$. Isso contradiz a hipótese ii), portanto, $\mathbf{x}^*$ é um ponto de mínimo local. ■

2.2.4 Hipersuperfícies e Hiperplanos.

Definição 2.10: Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função de classe C^1 , $\mathbf{x}_1 = (x_{1_1}, x_{1_2}, \dots, x_{1_n})^T \in X \subset \mathbb{R}^n$ e um escalar $k \in \mathbb{R}$. Uma hipersuperfície $\mathbf{S}_1$ de f é a coleção de todos os pontos regulares $\mathbf{A}_1 = \{\mathbf{x}_1 \in X : f(\mathbf{x}_1) - k = 0\}$.

Observação: Para $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a hipersuperfície $\mathbf{S}_1$ é relacionada à curva de nível de f em $\mathbf{x}_1$.

Definição 2.11: Sejam $t \in T \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_1: T \subset \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x}_1$ é uma função vetorial de classe C^1 e $\mathbf{C}_1$ é uma curva do $\mathbb{R}^n$ descrita pela função vetorial $\mathbf{x}_1(t) = (x_{1_1}(t), \dots, x_{1_n}(t))^T$. $\mathbf{C}_1$ é uma curva em $\mathbf{S}_1$ quando $f(\mathbf{x}_1(t)) - k = 0$.

Proposição 2.11: O vetor $\nabla f(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{0}$ é ortogonal à hipersuperfície $\mathbf{S}_1$ que passe pelos pontos de $\mathbf{A}_1$.

Prova: Como $\mathbf{C}_1$ pertence a $\mathbf{S}_1$ é necessário que a definição 2.11 seja satisfeita.

Como cada componente de $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{A}_1$ é diferenciável em t , então, pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_1(t))}{\partial x_{1_1}} \frac{dx_{1_1}}{dt} + \frac{\partial f(\mathbf{x}_1(t))}{\partial x_{1_2}} \frac{dx_{1_2}}{dt} + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x}_1(t))}{\partial x_{1_n}} \frac{dx_{1_n}}{dt} = 0;$$

portanto, desde que $\nabla f(\mathbf{x}_1(t)) \neq \mathbf{0}$, temos:

$$\nabla f(\mathbf{x}_1(t))^T \mathbf{x}_1'(t) = 0 \Leftrightarrow \|\nabla f(\mathbf{x}_1(t))^T\| \|\mathbf{x}_1'(t)\| \cos(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \blacksquare. \quad (2.6)$$

Com a proposição 2.11, agora podemos definir um hiperplano tangente em $\mathbf{S}_1$ que passa por $\mathbf{A}_1$.

Definição 2.12: Em particular, tomemos um ponto $\mathbf{x}_1^0 \in \mathbf{A}_1$ e o vetor ortogonal a $\mathbf{S}_1$

$\nabla f(\mathbf{x}_1^0)$, definimos o hiperplano $\mathbf{P}_1^0 : \nabla f(\mathbf{x}_1^0)^T \mathbf{d}_{\mathbf{x}_1^0} = 0$ tangente a $\mathbf{S}_1$ tal que $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_1^0} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^0)$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_1^0 \in X \subset \mathbb{R}^n$.

2.3 O modelo de otimização não-linear restrita e suas propriedades.

Um problema de otimização não-linear restrito apenas com restrições de igualdade é dado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a :} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. ; \quad (2.7)$$

onde: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que f e $\mathbf{g}$ são funções de classe C^2 . Vamos expandir o conceito de hipersuperfície e hiperplano e, a partir dessa expansão, extraíremos resultados interessantes para a teoria de otimização não-linear.

Definição 2.13: Sejam $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_t, \dots, g_m)^T$ é um funcional de classe C^1 . Denomina-se por matriz jacobiana de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})$, à matriz de ordem $m \times n$ cujas linhas $t=1, \dots, m$ são os vetores gradientes transpostos de cada $g_t(\mathbf{x})$, isto é, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (\nabla g_1(\mathbf{x})^T, \nabla g_2(\mathbf{x})^T, \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})^T)^T$.

Definição 2.14: Sejam $\mathbf{x}_2 = (x_{2_1}, \dots, x_{2_n})^T \in X \subset \mathbb{R}^n$. Uma hipersuperfície $\mathbf{S}_2$ de $\mathbf{g}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ é a coleção de todos os pontos regulares $\mathbf{A}_2 = \{\mathbf{x}_2 \in X : \mathbf{g}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}\}$.

Definição 2.15: Sejam $k \in K \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_2 : K \subset \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x}_2$ é uma função vetorial de classe C^1 e $\mathbf{C}_2$ é uma curva do $\mathbb{R}^n$ descrita pela função vetorial $\mathbf{x}_2(k) = (x_{2_1}(k), x_{2_2}(k), \dots, x_{2_n}(k))^T$. $\mathbf{C}_2$ é uma curva em $\mathbf{S}_2$ quando $\mathbf{g}(\mathbf{x}_2(k)) = \mathbf{0}$.

Em particular, dado um $t = 1, \dots, m$ temos que $\mathbf{A}_{2_t} = \{\mathbf{x}_2 \in X : g_t(\mathbf{x}_2) = 0\}$ e $\mathbf{C}_{2_t}$ é uma curva em $\mathbf{S}_{2_t}$ quando $g_t(\mathbf{x}_2(k)) = 0$, dessa maneira, $\mathbf{C}_2$ é definida pela intersecção de todas as hipersuperfícies $\mathbf{S}_{2_t}$.

Proposição 2.12: Sejam $k \in K \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_2 : K \subset \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x}_2$ é uma função vetorial de classe C^1 e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_t, \dots, g_m)^T$ é um funcional de classe C^1 , se existe $\mathbf{C}_2$ e $\nabla g_t(\mathbf{x}_2) \neq \mathbf{0}$, $t = 1, \dots, m$, então $\nabla g_t(\mathbf{x}_2)$ é ortogonal à sua respectiva hipersuperfície $\mathbf{S}_{2_t}$ que passa pelos pontos de $\mathbf{A}_2 = \{\mathbf{x}_2 \in X : \mathbf{g}(\mathbf{x}_2(k)) = \mathbf{0}\}$.

Prova: Como $\mathbf{C}_2$ pertence a $\mathbf{S}_2$ é necessário que a definição 2.15 seja satisfeita, isto é, cada curva $\mathbf{C}_{2_t}$ pertence à hipersuperfície $\mathbf{S}_{2_t}$ quando $g_t(\mathbf{x}_2(k)) = 0$ com $t = 1, \dots, m$.

Como cada componente de $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{A}_2$ é diferenciável em k , então, pela regra da cadeia, temos o seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x_{2_1}} \frac{dx_{2_1}}{dk} + \frac{\partial g_1}{\partial x_{2_2}} \frac{dx_{2_2}}{dk} + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_{2_n}} \frac{dx_{2_n}}{dk} = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{2_1}} \frac{dx_{2_1}}{dk} + \frac{\partial g_2}{\partial x_{2_2}} \frac{dx_{2_2}}{dk} + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial x_{2_n}} \frac{dx_{2_n}}{dk} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g_t}{\partial x_{2_1}} \frac{dx_{2_1}}{dk} + \frac{\partial g_t}{\partial x_{2_2}} \frac{dx_{2_2}}{dk} + \dots + \frac{\partial g_t}{\partial x_{2_n}} \frac{dx_{2_n}}{dk} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_{2_1}} \frac{dx_{2_1}}{dk} + \frac{\partial g_m}{\partial x_{2_2}} \frac{dx_{2_2}}{dk} + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_{2_n}} \frac{dx_{2_n}}{dk} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nabla g_1(\mathbf{x}_2)^T \\ \nabla g_2(\mathbf{x}_2)^T \\ \vdots \\ \nabla g_t(\mathbf{x}_2)^T \\ \vdots \\ \nabla g_m(\mathbf{x}_2)^T \end{pmatrix} \mathbf{x}_2'(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

O sistema homogêneo (2.8) pode ser reescrito, de acordo com a definição 2.13, da seguinte forma:

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_2) \mathbf{x}_2'(k) = \mathbf{0} \blacksquare. \quad (2.9)$$

Definição 2.16: Em particular, tomemos um ponto $\mathbf{x}_2^0 \in \mathbf{A}_2$, uma direção $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_2^0} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^0)$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_2^0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ e cada vetor $\nabla g_t(\mathbf{x}_2^0) \neq \mathbf{0}$ ortogonal à sua respectiva $\mathbf{S}_{2_t}$, $t=1, \dots, m$. Definimos por $\mathbf{P}_2^0 = \left\{ \mathbf{P}_{2_t}^0 : \nabla g_t(\mathbf{x}_2^0)^T \mathbf{d}_{\mathbf{x}_2^0} = 0 \right\}$ o conjunto de hiperplanos $\mathbf{P}_{2_t}^0$ tangentes a $\mathbf{S}_{2_t}$.

Notemos que, de acordo com a definição 2.16, o conjunto $\mathbf{P}_2^0$ pode ser redefinido apenas pela expressão $\mathbf{P}_2^0 : \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_2^0) \mathbf{d}_{\mathbf{x}_2^0} = \mathbf{0}$. Isso implica que a direção $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_2^0}$ pertence ao núcleo da matriz $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_2^0)$, isto é, $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_2^0} \in \ker(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_2^0))$.

2.3.1 A função Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \lambda_0)$.

O objetivo do problema (2.7) é encontrar, segundo a definição 2.2, um ponto de mínimo $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ para $f(\mathbf{x})$ e que satisfaça as restrições de igualdade $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Ao fazermos uso da definição 2.10, podemos gerar hipersuperfícies $\mathbf{S}_1 : f(\mathbf{x}) - k = 0$ em $\mathbb{R}^n$ desde que f exista em $\mathbf{x} \in X$. Assim, como $f(\mathbf{x})$ está condicionada a $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, deve existir algum ponto crítico $\mathbf{x}^* \in X$ tal que a hipersuperfície $\mathbf{S}_1^* = \{\mathbf{x}^* \in X : f(\mathbf{x}^*) - k^* = 0\}$ interseccione a curva $\mathbf{C}_2^*$ de $\mathbf{S}_2^* = \{\mathbf{x}^* \in X : \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}\}$, isto é, $\mathbf{x}^*$ é um ponto crítico (ponto de máximo, de mínimo ou de sela) quando $\mathbf{S}_1^* = \mathbf{C}_2^*$.

A proposição a seguir é uma condição necessária de otimalidade para o problema de otimização não-linear com restrições de igualdade.

Proposição 2.13: *Seja o problema de otimização não-linear tal como foi apresentado em (2.7). Se $\mathbf{x}^* \in X$ e $\mathbf{S}_1^* = \mathbf{C}_2^*$, então as condições necessárias de otimalidade para o problema (2.7) são:*

$$i) \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0};$$

$$ii) \nabla f(\mathbf{x}^*) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \lambda_0^* = \mathbf{0},$$

onde $\lambda_0^* = (\lambda_{0_1}^*, \dots, \lambda_{0_t}^*, \dots, \lambda_{0_m}^*)^T \in \mathbb{R}_{**}^m$, isto é, os elementos do conjunto $\mathbb{R}_{**}^m$ são vetores não-nulos com todas componentes não-nulas.

Prova: A condição i) está satisfeita pela hipótese de que $S_1^* = C_2^*$.

Pela proposição 2.11, temos que $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ é ortogonal a S_1^* , portanto, $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ é ortogonal à curva C_2^* , porém, pela proposição 2.15, obtemos que cada $\nabla g_t(\mathbf{x}^*)$, $t = 1, \dots, m$, também é ortogonal a C_2^* , assim, temos que $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ pertence ao hiperplano determinado pelos vetores gradientes $\nabla g_t(\mathbf{x}^*)$. Logo, existem escalares não-nulos $\alpha \in \mathbb{R}_*$ e $\alpha_1^*, \dots, \alpha_t^*, \dots, \alpha_m^* \in \mathbb{R}_{**}^m$ tais que:

$$\begin{aligned} \alpha \nabla f(\mathbf{x}^*) &= \alpha_1^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + \dots + \alpha_t^* \nabla g_t(\mathbf{x}^*) + \dots + \alpha_m^* \nabla g_m(\mathbf{x}^*) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha \nabla f(\mathbf{x}^*) - \alpha_1^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) - \dots - \alpha_t^* \nabla g_t(\mathbf{x}^*) - \dots - \alpha_m^* \nabla g_m(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0}; \end{aligned}$$

como $\alpha \neq 0$, temos:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \frac{\alpha_1^*}{\alpha} \nabla g_1(\mathbf{x}^*) - \dots - \frac{\alpha_t^*}{\alpha} \nabla g_t(\mathbf{x}^*) - \dots - \frac{\alpha_m^*}{\alpha} \nabla g_m(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0};$$

definindo-se por $\lambda_{0_t}^* = -\frac{\alpha_t^*}{\alpha}$, segue-se:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda_{0_1}^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + \dots + \lambda_{0_t}^* \nabla g_t(\mathbf{x}^*) + \dots + \lambda_{0_m}^* \nabla g_m(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}; \quad (2.10)$$

assim, desde que definamos $\lambda_0^* = (\lambda_{0_1}^*, \dots, \lambda_{0_t}^*, \dots, \lambda_{0_m}^*)^T$, temos:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \lambda_0^* = \mathbf{0}. \blacksquare$$

Agora, podemos pensar em uma função $L(\mathbf{x}, \lambda_0)$ de classe C^1 que, de alguma maneira, recupere as condições necessárias de otimalidade da proposição 2.13. Se essa função existe, então ela é uma alternativa equivalente para o problema (2.7).

As condições da proposição 2.13 podem ser pensadas como derivadas parciais da função $L(\mathbf{x}, \lambda_0)$ em relação a $\mathbf{x}$ e a λ_0 , ou seja:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \lambda_0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{cases} = \nabla L(\mathbf{x}, \lambda_0); \quad (2.11)$$

portanto, temos uma função $L(\mathbf{x}, \lambda_0)$, denominada função Lagrangiana, e essa é definida por:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{t=1}^m \lambda_{0_t} g_t(\mathbf{x});$$

em que cada λ_{0_t} é denominado multiplicador de Lagrange. Resolver o problema de otimização não-linear com restrições de igualdade semelhante ao problema (2.7) é equivalente a resolver um problema de otimização não-linear e irrestrito a seguir:

$$\begin{cases} \text{Min} & L(\mathbf{x}, \lambda_0) = L(\omega) = f(\mathbf{x}) + \sum_{t=1}^m \lambda_{0_t} g_t(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \\ & \lambda_0 \in \Lambda_0 \subset \mathbb{R}_{**}^m \end{cases} \quad (2.12)$$

Sobre o problema (2.12) podemos fazer algumas proposições com provas imediatas a partir das proposições apresentadas para problemas irrestritos.

1) convexidade da função $L(\mathbf{x}, \lambda_0)$:

Proposição 2.14: *Seja o problema de otimização não-linear tal como é em (2.7). Se*

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são convexas sobre um convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, então $L(\mathbf{x}, \lambda_0)$ é uma função convexa sobre X .

Prova: Após transformar o problema (2.7) em um problema irrestrito equivalente, tal como em (2.12), basta aplicar sucessivamente as proposições 2.1 e 2.3 e considerar a proposição 2.2. ■

2) Condições Necessárias e Suficientes de Otimalidade para o problema (2.12)

Proposição 2.15: Sejam $L : (X \times \Lambda_0) \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que L é uma função de classe C^2 e $\omega^* \in (X \times \Lambda_0)$. Suponha que :

$$i) \nabla L(\omega^*) = \mathbf{0};$$

$$ii) \nabla^2 L(\omega^*) \text{ é definida positiva.}$$

então ω^* é um ponto de mínimo local para o problema (2.12).

Prova: Análoga à proposição 2.10. ■

O exemplo a seguir, que pode ser encontrado em (Stewart, 2006), mostra o que pode acontecer quando $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Exemplo 2.1: Considere o problema de minimizar a função $f(x, y) = x$ na curva $g(x, y) : y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (uma piriforme), $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$, mas que a condição $\nabla f(0, 0) = \lambda_0 \nabla g(0, 0)$ não é satisfeita para nenhum valor de λ_0 .

Solução: O modelo de programação não-linear para o exemplo 1 é definido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(x, y) = x \\ \text{s.a :} \\ \quad y^2 + x^4 - x^3 = 0 \\ \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Transformamos o problema restrito (2.13) em um problema irrestrito equivalente através da função Lagrangiana a seguir:

$$\begin{cases} \text{Min} & L(x, y, \lambda_0) = L(\omega) = x + \lambda_0 (y^2 + x^4 - x^3) \\ & (x, y, \lambda_0)^T \in \mathbb{R}^3 \end{cases} . \quad (2.14)$$

Sobre o problema (2.14), aplicamos as condições necessárias de otimalidade, isto é, $\nabla L(\omega) = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda_0 (4x^3 - 3x^2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 + 2\lambda_0 y = 0. \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = y^2 + x^4 - x^3 = 0 \end{cases}$$

Na equação $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, temos necessariamente que $y = 0$, pois

$\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e, pela proposição 2.13, obtemos necessariamente que $\lambda_0 \neq 0$.

Com isso, temos condições de determinar x através da equação $\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = 0$, logo, temos que

$$x^4 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Analisemos os dois pontos candidatos a ótimos $\mathbf{x}_1 = (0, 0)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (1, 0)^T$ aplicando-os na função objetivo.

$f(\mathbf{x}_1) = f(0, 0) = 0$, $f(\mathbf{x}_2) = f(1, 0) = 1$, portanto, temos que $f(0, 0)$ é o mínimo que procuramos.

Podemos determinar λ_0 através da equação $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$. Desde que $x = 0$, temos $1 + \lambda_0 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \cdot 0 = -1$. Como $\lambda_0 \neq 0$, então não existe λ_0 que satisfaça a equação. Isso nos mostra que não existe o vetor gradiente da Lagrangiana no ponto ótimo. A figura 2.5 ilustra o problema proposto e pontos de máximo e mínimo detectados pelo método.

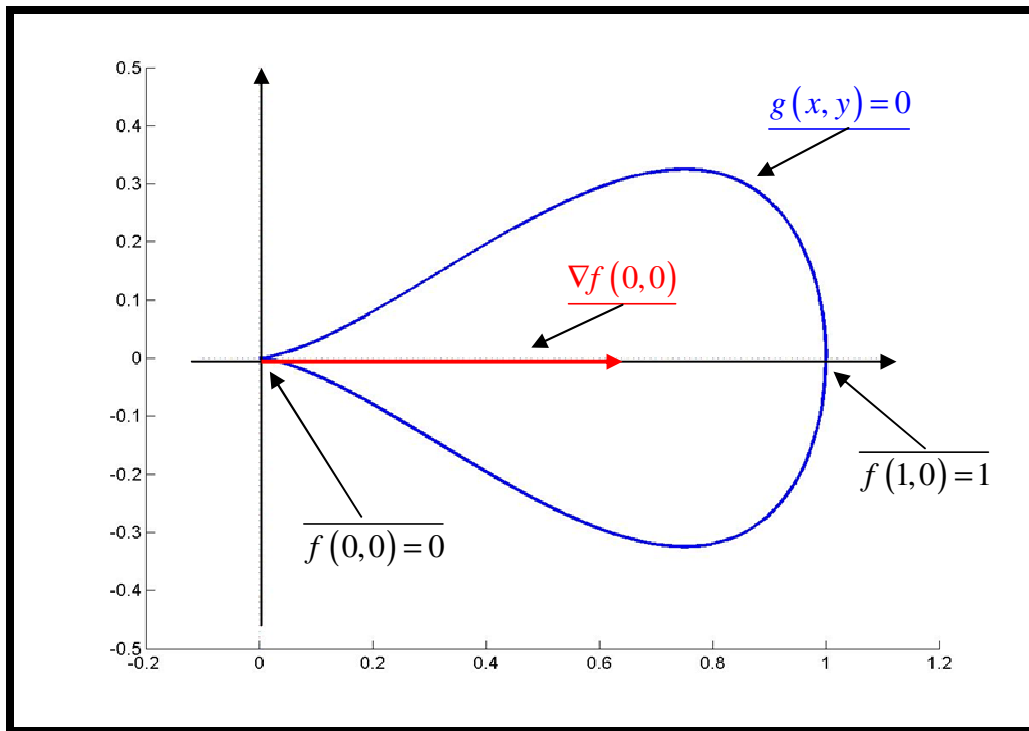


Figura 2.5: Ilustração dos pontos mínimo e máximo do exemplo 2.1

A condição ii) da proposição 2.13 pode ser observada no exemplo dado pelo sistema a seguir:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) + \lambda_0 \nabla g(x, y) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 4x^3 - 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix} &= \mathbf{0} . \end{aligned}$$

Ao aplicarmos a solução ótima na matriz jacobiana $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})$ obtemos a matriz nula, (neste caso, é o vetor nulo). Essa ocorrência nos gerou um sistema impossível e implicou na inexistência do vetor gradiente da função Lagrangiana no ótimo, portanto, uma qualificação sobre a restrição $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ é necessária para que possamos ter garantias de que exista $\nabla L(\mathbf{w}^*)$. Para isso, lembremos que o vetor $\nabla f(\mathbf{x})$ é escrito como combinação linear dos vetores gradientes das restrições de igualdade $g_t(\mathbf{x}) = 0, t = 1, \dots, m$. É sobre essa combinação linear que extraíremos uma condição de qualificação de restrição. A seguir, apresentamos

alguns resultados de dependência e independência linear que podem ser encontrados em (Callioli, et al., 1991) já aplicados aos propósitos desse trabalho.

Seja U um espaço vetorial sobre o $\mathbb{R}^m$

Definição 2.17: Dizemos que $U_{\nabla} = \{\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})\} \subset U$ é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, uma igualdade do tipo:

$$\lambda_{0_1} \nabla g_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_{0_t} \nabla g_t(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_{0_m} \nabla g_m(\mathbf{x}) = \mathbf{0};$$

com os $\lambda_{0_i} \in \mathbb{R}$, só for possível para $\lambda_{0_1} = \dots = \lambda_{0_t} = \dots = \lambda_{0_m} = 0$.

Definição 2.18: Dizemos que $U_{\nabla} = \{\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})\} \subset U$ é linearmente dependente (L.D.) se, e somente se, U_{∇} não é L.I., ou seja, é possível uma igualdade do tipo:

$$\lambda_{0_1} \nabla g_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_{0_t} \nabla g_t(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_{0_m} \nabla g_m(\mathbf{x}) = \mathbf{0};$$

sem que os escalares $\lambda_{0_m} \in \mathbb{R}$ sejam todos iguais a zero.

Da definição 2.18, extraímos um resultado muito importante.

Definição 2.19: O conjunto que contém o vetor nulo $U_o = \{\mathbf{0}\} \subset U$ é linearmente dependente para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Aplicando-se a definição de dependência linear, temos que $\lambda_0 \mathbf{0} = \mathbf{0}$ e essa equação é satisfeita para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, portanto, o vetor nulo é L.D.

Proposição 2.16: Se um conjunto $U_{\nabla} \subset U$ contém o vetor nulo, então esse conjunto é L.D.

Prova: Seja $S = \{\mathbf{0}, \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})\}$. Então temos: $\lambda_0 \mathbf{0} + \dots + 0 \nabla g_t(\mathbf{x}) + \dots + 0 \nabla g_m(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

para todo $\lambda_0 \neq 0$. Isso é suficiente para concluir que S é L.D. ■

Proposição 2.17: Se $U_\nabla = \{\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_t(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})\} \subset U$ é L.D., então um de seus vetores é combinação linear dos outros.

Prova: Por hipótese, existem números $\lambda_{0_1}, \dots, \lambda_{0_t}, \dots, \lambda_{0_m}$ não todos nulos de modo que $\lambda_{0_1} \nabla g_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_{0_t} \nabla g_t(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_{0_m} \nabla g_m(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Suponhamos que $\lambda_{0_t} \neq 0$, então existe o inverso de λ_{0_t} , de modo que:

$$\frac{\lambda_{0_1}}{\lambda_{0_t}} \nabla g_1(\mathbf{x}) + \dots + \nabla g_t(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\lambda_{0_m}}{\lambda_{0_t}} \nabla g_m(\mathbf{x}) = \mathbf{0};$$

daí

$$\nabla g_t(\mathbf{x}) = -\frac{\lambda_{0_1}}{\lambda_{0_t}} \nabla g_1(\mathbf{x}) - \dots - \frac{\lambda_{0_m}}{\lambda_{0_t}} \nabla g_m(\mathbf{x});$$

o que mostra que $\nabla g_t(\mathbf{x})$ é uma combinação linear de $\nabla g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$ e $i \neq t$, portanto, U_∇ é L.D. ■

Mais propriedades sobre dependência e independência linear também podem ser encontradas em (Callioli, et al., 1991). Com as definições e proposições apresentadas acima, definimos uma qualificação de restrição a qual passamos a usar neste trabalho. Enunciamos a qualificação de restrição de (Mangasarian, et al., 1976), segundo (Schuverdty, 2006), a qual é estendida para problemas de otimização não-linear com restrição de igualdade e de desigualdade conforme definida em (2.1).

Definição 2.20: Dizemos que $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz se os vetores do conjunto $U_{\nabla} = \{\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_t(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})\}, t=1, \dots, m$ são linearmente independentes e existe uma direção $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} = \mathbf{0}$ e $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} \leq 0, \forall i \in I(\mathbf{x}^*) = \{h_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$.

Note que a definição 2.20 exige que a proposição 2.12 seja satisfeita. Como o conjunto U_{∇} é L.I., então ele é capaz de gerar o espaço U , isto é, U_{∇} é uma base pra U . Portanto, na solução ótima para problemas de otimização não-linear com restrições de igualdade e de desigualdade o vetor $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ deve pertencer ao espaço U . O próximo exemplo pode ser encontrado em (Flemming, et al., 2007) e este é apresentado a seguir:

Exemplo 2.2: Um galpão retangular deve ser construído em um terreno com a forma de um triângulo, conforme a figura 2.6. Determinar a área máxima para o galpão.

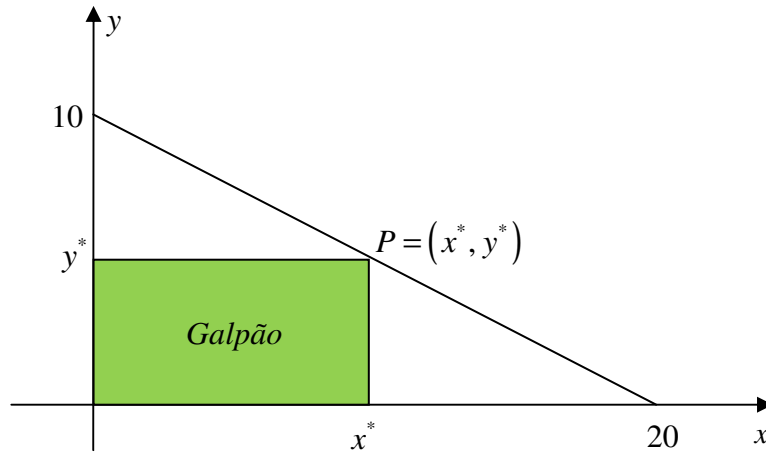


Figura 2.6: Ilustração para o exemplo 2.2. Fonte: (Flemming, et al., 2007).

Solução: O modelo de programação não-linear, conforme (Flemming, et al., 2007), é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad f(x, y) = xy \\ \text{s.a:} \\ \quad x + 2y - 20 = 0 \\ \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right. .$$

Note que esse modelo não restringe a $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como positivas, porém a função objetivo é estritamente côncava no primeiro quadrante e no terceiro quadrante e é estritamente convexa no segundo e quarto quadrante, portanto, o modelo está *aceitável* para determinarmos o máximo local. Convertemos o problema para a forma padrão (2.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad -f(x, y) = -xy \\ \text{s.a:} \\ \quad x + 2y - 20 = 0 \\ \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right. . \quad (2.15)$$

Transformamos o problema restrito (2.15) em um problema irrestrito equivalente através da função Lagrangiana a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad L(x, y, \lambda_0) = L(\omega) = -xy + \lambda_0(x + 2y - 20) \\ \\ \quad \omega \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*) \subset \mathbb{R}^3 \end{array} \right. . \quad (2.16)$$

Sobre o problema (2.16), aplicamos as condições necessárias de otimalidade, isto é, $\nabla L(\omega) = \mathbf{0}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = -y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -x + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = x + 2y - 20 = 0 \end{array} \right. = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = x + 2y - 20 = 0 \end{array} \right. .$$

Da equação $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ temos imediatamente que $y = \lambda_0$, da equação $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ temos que

$x = 2\lambda_0$, portanto, determinamos o valor de λ_0 através da equação $\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = 0$, isto é,

$2\lambda_0 + 2\lambda_0 = 20 \Leftrightarrow \lambda_0 = 5$. Assim, é imediato que $x = 10$ e $y = 5$ e que a área máxima do galpão é de $-(-f(x, y)) = 50$ unidades de área.

A figura 2.7 mostra que o vetor $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda_0 \nabla g(\mathbf{x}^*)$.

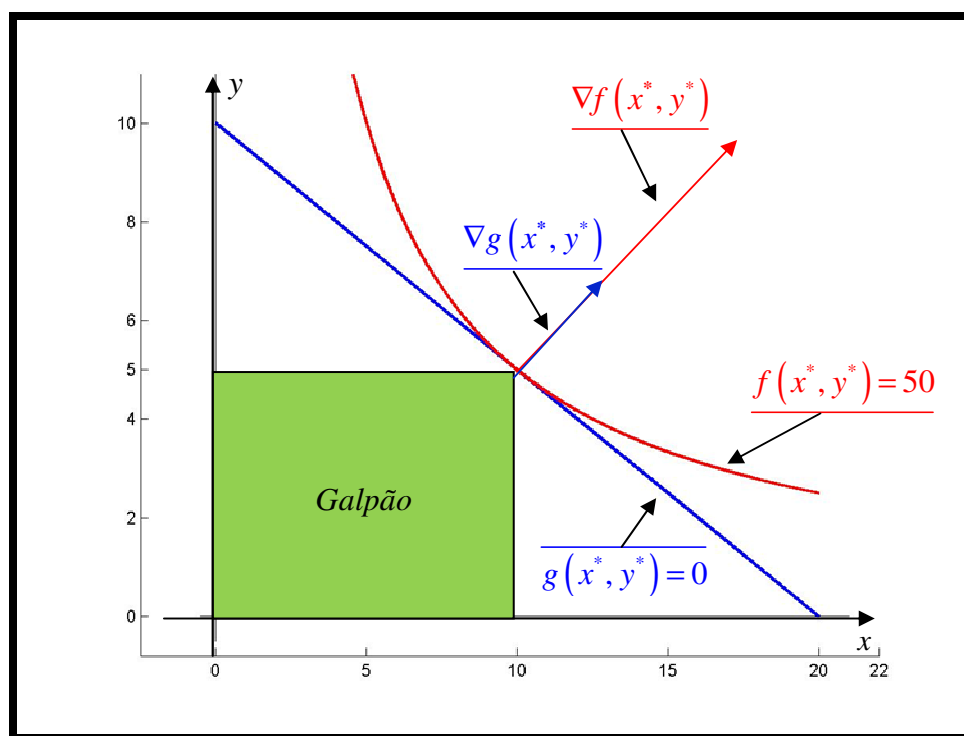


Figura 2.7: Ilustração da solução ótima para o exemplo 2.2.

Mostremos que os autovalores da matriz hessiana $\nabla^2 L(\omega)$ não são todos positivos .

Isso implica que $\nabla^2 L(\omega)$ não é definida positiva para todo $\omega \in \mathbb{R}^3$. Segundo (Callioli, et al., 1991), os autovalores da matriz hessiana são as raízes do polinômio definido por $\det(\nabla^2 f(\omega) - \nu I) = 0$ em que I é a matriz identidade de ordem $n+m$. Portanto, temos:

$$\det(\nabla^2 L(\omega) - vI) = \begin{vmatrix} -v & -1 & 1 \\ -1 & -v & 2 \\ 1 & 2 & -v \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -v^3 + 6v - 4 = 0.$$

A figura 2.8 mostra o gráfico da função $\phi(v) = -v^3 + 6v - 4$ na qual podemos observar que existe um autovalor $v < 0$; $\phi(v) = 0$ em que ω^* é um mínimo local para o problema (2.15).

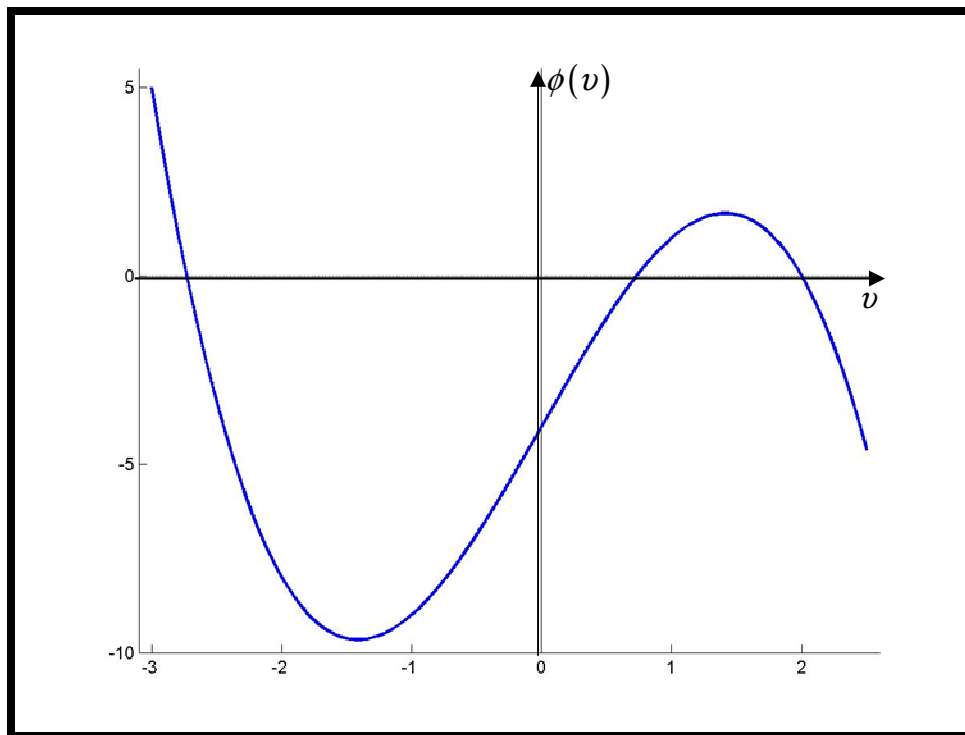


Figura 2.8: Existência de um autovalor negativo tal que $\phi(v) = 0$ para o problema (2.15).

2.3.2 A função Lagrangiana $L(x, \lambda_0, \lambda_1)$.

Nesta seção será proposto a generalização da função Lagrangiana para problemas de otimização não-linear com restrições de igualdade e de desigualdade conforme o modelo (2.1).

Definição 2.21: Seja $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$. O cone de direções viáveis de X em $\mathbf{x}^*$ é o conjunto $D = \{\mathbf{d}_x \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d}_x \neq \mathbf{0}; (\mathbf{x}^* + \alpha \mathbf{d}_x) \in X, \forall 0 < \alpha < \bar{\alpha}, \text{ para algum } \bar{\alpha}\}$.

A partir da definição 2.21, podemos definir um cone de direções de descida para o problema irrestrito (2.2). Esse cone é definido pelo conjunto $F_o = \{\mathbf{d}_x \in D : \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_x < 0\}$.

Proposição 2.18: Sejam o problema (2.2) e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Se $\mathbf{x}^*$ é um ponto ótimo, então $F_o \cap D = \emptyset$.

Prova: Suponha que $F_o \cap D \neq \emptyset$, então existe $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ tal que $f(\mathbf{x}^* + \bar{\alpha} \mathbf{d}_x) < f(\mathbf{x}^*)$ com $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$. Isso contradiz que $\mathbf{x}^*$ é um mínimo local, portanto, $F_o \cap D = \emptyset$. ■.

Um problema de otimização não-linear restrito apenas com restrições de desigualdade é dado a seguir:

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} & \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases} ; \quad (2.17)$$

onde: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ tais que f e $\mathbf{h}$ são funções de classe C^2 .

Definição 2.22: Seja $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$ um ponto ótimo para o problema (2.17). Denomina-se por conjunto de restrições ativas ao conjunto $I(\mathbf{x}^*) = \{i; h_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$. Se para algum $i = 1, \dots, m$ obtivermos $h_i(\mathbf{x}^*) < 0$, então essa restrição é denominado restrição inativa.

Proposição 2.19: Se $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto ótimo para o problema (2.17), então o conjunto $H_o = \left\{ \mathbf{d}_x : \nabla h_i(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_x \leq 0, i=1, \dots, r \right\}$ define um cone de direções viáveis de X em $\mathbf{x}^*$.

Prova: Suponhamos que para algum i tenhamos $h_i(\mathbf{x}^*) = 0$, isto é, $i \in I(\mathbf{x}^*)$. Então, pela proposição 2.11, o vetor $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$ é ortogonal ou, se $i \geq 2$, vetores $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$ são ortogonais à curva C_3^* de $S_3^* = \left\{ \mathbf{x}^* \in X : h_i(\mathbf{x}^*) = 0, \forall i \in I(\mathbf{x}^*) \right\}$, para $i \geq 2$ temos que C_3^* é definida pela intersecção das hipersuperfícies $h_i(\mathbf{x}^*) = 0$. Assim, pelo menos temos uma direção $\mathbf{d}_x$ não-nula tal que $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_x = 0$.

Agora suponhamos que para algum i tenhamos $h_i(\mathbf{x}^*) < 0$, isto é, $i \notin I(\mathbf{x}^*)$. Assim, a partir da fronteira dessa restrição inativa deve existir uma direção não nula $\mathbf{d}_x$ tal que $h_i(\mathbf{x}^*) < 0$, portanto, pela proposição 2.8, isso ocorre quando $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_x < 0$.

Portanto, H_o define um cone de direções viáveis de X em $\mathbf{x}^*$ ■.

A proposição 2.19 nos dá a condição de trabalharmos com restrições de desigualdade desde que estejamos em um cone de regiões viáveis. Note que se os vetores gradientes $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$, $\forall i \in I(\mathbf{x}^*)$, forem linearmente independentes, então estamos trabalhando com a condição de qualificação de restrição de Mangasarian-Fromovitz (definição 2.20).

As proposições de hipersuperfícies e hiperplano para as restrições de desigualdades são análogas às apresentadas para as restrições de igualdade e também mostra-se que o

$\nabla f(\mathbf{x}^*)$ é definido pela combinação linear de cada $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$, $\forall i \in I(\mathbf{x}^*)$, pois $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ também é ortogonal à $\mathbf{C}_3^*$ em que cada $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$ é ortogonal essa curva. Quanto às restrições inativas, apresentamos a condição para os multiplicadores de Lagrange sobre essas restrições.

A seguir, reapresentamos o modelo geral de otimização não-linear com restrições de igualdade e de desigualdade. O objetivo é transformá-lo em um modelo de otimização não-linear irrestrito equivalente através de uma função Lagrangiana e, portanto, apresentarmos as condições necessárias de otimalidade de (Kuhn, et al., 1951), conhecidas como as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Reescrevendo o problema (2.1), temos:

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} & \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad ; \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

em que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ são funções de classe C^2 . Pela teoria de hipersuperfície e de hiperplano, pode-se mostrar que se os vetores gradientes $\nabla g_t(\mathbf{x}^*)$, $t=1, \dots, m$ e $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$, $\forall i \in I(\mathbf{x}^*)$, são linearmente independentes devem existir os vetores cujas componentes são não-nulas $\lambda_0^* = (\lambda_{0_1}^*, \dots, \lambda_{0_t}^*, \dots, \lambda_{0_m}^*)^T$ e $\lambda_1^* = (\lambda_{1_1}^*, \dots, \lambda_{1_r}^*)^T$, tais que,

$\nabla f(\mathbf{x}^*) \in U$, onde U é finitamente gerado pela base

$U_\nabla = \{\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}^*), \nabla h_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla h_r(\mathbf{x}^*)\}$, isto é:

$$\begin{aligned} & \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda_{0_1}^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + \dots + \lambda_{0_t}^* \nabla g_t(\mathbf{x}^*) + \dots + \lambda_{0_m}^* \nabla g_m(\mathbf{x}^*) + \\ & + \lambda_{1_1}^* \nabla h_1(\mathbf{x}^*) + \dots + \lambda_{1_i}^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) + \dots + \lambda_{1_r}^* \nabla h_r(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Em (Bazaraa, et al., 2006), são encontradas as condições necessárias de otimalidade de KKT. Nessas condições estão previstas que $\lambda_{l_i}^* > 0 \Leftrightarrow i \in I(\mathbf{x}^*)$ e $\lambda_{l_i}^* = 0 \Leftrightarrow i \notin I(\mathbf{x}^*)$ e que, definindo-se por $G_o = \{\mathbf{d}_x : \nabla g_t(\mathbf{x}^*) \mathbf{d}_x = 0\}$ o conjunto de cones de direções viáveis de $\mathbf{x}^*$ em X , então $F_o \cap G_o \cap H_o = \emptyset$. Note que o conjunto G_o mostra que todas as restrições de igualdade são ativas, isto é, os multiplicadores correspondentes às restrições de igualdade são todos não-nulos.

Proposição 2.20: *Uma condição necessária (KKT) para que $\mathbf{x}^*$ seja mínimo local para o problema (2.1) sob a qualificação de restrição de Mangasarian-Fromovitz é que exista um vetor $\lambda_0^* = (\lambda_{0_1}^*, \dots, \lambda_{0_m}^*)^T \in \mathbb{R}_{**}^m$ e outro vetor $\lambda_1^* = (\lambda_{1_1}^*, \dots, \lambda_{1_m}^*)^T \in \mathbb{R}_+^r$, tais que:*

$$i) \nabla f(\mathbf{x}^*) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \lambda_0^* + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^T \lambda_1^* = \mathbf{0}$$

$$ii) \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

$$iii) \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}$$

$$iv) \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^T \lambda_1^* = \mathbf{0}$$

$$v) \lambda_1^* \geq \mathbf{0}$$

em que $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = (\nabla h_1(\mathbf{x}^*)^T, \dots, \nabla h_l(\mathbf{x}^*)^T, \dots, \nabla h_r(\mathbf{x}^*)^T)^T \in \mathbb{R}^{r \times n}$ é a matriz jacobiana das

restrições de desigualdades $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}$ e

$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = (\nabla g_1(\mathbf{x}^*)^T, \dots, \nabla g_t(\mathbf{x}^*)^T, \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}^*)^T)^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz jacobiana das restrições

de igualdade $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Prova: Ver (Kuhn, et al., 1951) ■

Agora, podemos pensar em uma função $L(\mathbf{x}, \lambda_0, \lambda_1)$ de classe C^1 que, de alguma maneira, recupere as condições necessárias de otimalidade da proposição 2.20. Se essa função existe, então ela é uma alternativa equivalente para o problema (2.1).

As condições da proposição 2.20 podem ser pensadas como derivadas parciais da função $L(\mathbf{x}, \lambda_0, \lambda_1)$ em relação a $\mathbf{x}$, a λ_0 e a λ_1 , gerando o seguinte sistemas de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \lambda_0 + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \lambda_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \forall i \in I(\mathbf{x}) \end{cases} = \nabla L(\mathbf{x}, \lambda_0, \lambda_1); \quad (2.18)$$

portanto, temos uma função $L(\mathbf{x}, \lambda_0, \lambda_1)$, denominada função Lagrangiana, e essa é definida por:

$$L(\mathbf{x}, \lambda_0, \lambda_1) = f(\mathbf{x}) + \sum_{t=1}^m \lambda_{0_t} g_t(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r \lambda_{1_i} h_i(\mathbf{x});$$

em que λ_{0_t} são denominados por multiplicadores de Lagrange referentes às restrições de igualdade $g_t(\mathbf{x})=0$, λ_{1_i} são os multiplicadores de Lagrange referentes às restrições de desigualdade $h_i(\mathbf{x}) \leq 0$. Resolver o problema de otimização não-linear com restrições semelhante ao problema (2.1) é equivalente a resolver um problema de otimização não-linear e irrestrito a seguir:

$$\begin{cases} \text{Min} & L(\mathbf{x}, \lambda_0, \lambda_1) = L(\omega) = f(\mathbf{x}) + \sum_{t=1}^m \lambda_{0_t} g_t(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r \lambda_{1_i} h_i(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \\ & \lambda_0 \in \Lambda_0 \subset \mathbb{R}_{**}^m \\ & \lambda_1 \in \Lambda_1 \subset \mathbb{R}_+^r \end{cases} ; \quad (2.19)$$

onde Λ_0 é um subconjunto não-vazio do $\mathbb{R}_{**}^m$ e Λ_1 é um subconjunto não-vazio do $\mathbb{R}_+^r$. Sobre o problema (2.19) podemos fazer as proposições 2.14 (convexidade) e 2.15 (condições necessárias e suficientes de otimalidade).

O exemplo a seguir é idêntico ao exemplo 2.2, apenas alteramos o modelo:

Exemplo 2.3: *Determine a solução ótima para o problema de otimização não-linear com restrição de igualdade e de desigualdade a seguir:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad f(x, y) = xy \\ \text{s.a:} \\ \quad x + 2y - 20 = 0 \\ \quad x \geq 0 \\ \quad y \geq 0 \\ \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right. .$$

Solução: A figura 2.9 mostra a região de viabilidade definido pelas restrições do problema cujos elementos são os pontos $P(x, y)$.

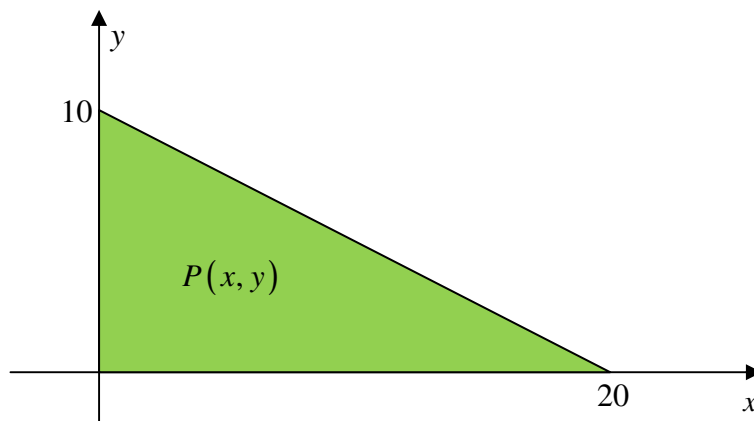


Figura 2.9: Região de viabilidade para o exemplo 2.3.

Primeiramente, convertemos o problema proposto para a forma padrão, conforme (2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad -f(x, y) = -xy \\ \text{s.a:} \\ \quad x + 2y - 20 = 0 \\ \quad -x \leq 0 \\ \quad -y \leq 0 \\ \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Transformamos o problema restrito (2.20) em um problema irrestrito equivalente através da função Lagrangiana a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad L(x, y, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = L(\omega) = -xy + \lambda_0(x + 2y - 20) + \lambda_1(-x) + \lambda_2(-y) \\ \\ \quad (x, y, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)^T \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_* \times \mathbb{R}_+^2) \subset \mathbb{R}^5 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Sobre o problema (2.21), aplicamos as condições necessárias de otimalidade, isto é,

$$\nabla L(\omega) = \mathbf{0}:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = -y + \lambda_0 - \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -x + 2\lambda_0 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = x + 2y - 20 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (\lambda_1 \quad \lambda_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = x + 2y - 20 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Note que $(x, y) = (0, 0)$, não satisfaz a restrição ativa definida pela restrição de igualdade em (2.20), portanto, não há solução para o problema (2.21) para $(x, y) = (0, 0)$; por outro lado, se $x = 0$ e $y = 10$, então $h_2(x, y): -10 \leq 0$ é uma restrição inativa, portanto, pela condição iv da proposição 2.20, temos que $\lambda_2 = 0$. Pela equação $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, concluímos que

$\lambda_0 = 0$ o que não pode ocorrer, pois sendo $g(x, y): x - 2y - 20 = 0$ uma restrição ativa é necessário que $\lambda_0 \neq 0$. Analogamente, mostra-se que $\lambda_0 = 0$ se $x = 20$ e $y = 0$.

Uma solução para o problema (2.21) é obtida considerando-se que $(x, y) \neq (0, 0)$. Ao fazermos isso, temos que as restrições de desigualdade são inativas, portanto $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Assim, a solução ótima encontrada é a mesma que a do exemplo 2.2, isto é, $\omega^* = (10, 5, 5, 0, 0)$, ou seja, $f(x, y) = 50$.

2.3.3 O método Dual-Lagrangiano.

Através das condições necessárias de KKT, definimos um método não muito utilizado na prática, mas de grande importância à teoria de otimização não-linear. Esse método é chamado de Dual-Lagrangiano. Para mais detalhes, pode-se consultar (Bazaraa, et al., 2006) ou (Luenberger, et al., 2008). Basicamente temos que, dado o problema de otimização não-linear (2.1) define-se outro problema, equivalente a este, o qual é resolvido em outro espaço de região de viabilidade. Assim, define-se como problema PRIMAL ao problema original definido em (2.1) e por problema DUAL ao problema equivalente a ser definido.

Segundo (Luenberger, et al., 2008), a teoria prevê uma simetria entre os problemas primal e dual e que essa simetria pode ser considerada perfeita quando o problema primal é convexo. No caso em que se trata de problemas não-convexos uma *imperfeição* pode ser causada por um *gap* de dualidade, isto é, uma distância entre os espaços primal e dual na solução ótima primal e dual.

Lembramos que estamos trabalhando com a condição de qualificação de restrições conforme (Mangasarian, et al., 1976), assim evitamos problemas de mau condicionamento ou a inviabilidade do método, tal como são encontrados nas condições de Fritz-John, (Mangasarian, et al., 1976), nas quais o vetor gradiente, neste caso, pode ser resultado de uma

combinação linearmente dependente dos vetores gradientes das restrições ativas. Assim, se $\mathbf{x}^*$ é um ponto de mínimo local para o problema primal, então $\mathbf{x}^*$ é um ponto regular à curva

$\mathbf{C}_4^* = \mathbf{S}_1^* \cap \mathbf{C}_2^* \cap \mathbf{C}_3^*$, ou seja, $\nabla L(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ e que, pela condição suficiente de que o ponto

ótimo é de mínimo local, a matriz hessiana

$\nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{w}^*) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) + \sum_{t=1}^m \lambda_{0_t}^* \nabla^2 g_t(\mathbf{x}^*) + \sum_{r=1}^r \lambda_{1_r}^* \nabla^2 h_r(\mathbf{x}^*)$ do problema é definida positiva onde o

hiperplano $\mathbf{P}_4^* = \{\mathbf{d}_{\mathbf{x}^*} : \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_{\mathbf{x}^*} = 0\}$ está definido, em que $\mathbf{d}_{\mathbf{x}^*} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ para todo

$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* \in X$. Além do mais, para qualquer vetor $\lambda_0 = (\lambda_{0_m}, \dots, \lambda_{0_m})^T \in \Lambda_0 \subset \mathbb{R}_{**}^m$ e

$\lambda_1 = (\lambda_{1_1}, \dots, \lambda_{1_r})^T \in \Lambda_1 \subset \mathbb{R}_+^r$ suficientemente perto de λ_0^* e λ_1^* a função Lagrangiana

$f(\mathbf{x}) + \lambda_0^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda_1^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$ terá um ponto de mínimo local $\mathbf{x}$ próximo a $\mathbf{x}^*$. Isso implica que

$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$ tem solução $\mathbf{x}$ próxima de $\mathbf{x}^*$ quando λ_0 e λ_1 estão próximos de λ_0^* e λ_1^* , porque

$\nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{w}^*)$ é não-singular e definida positiva. Assim, há uma correspondência biunívoca

entre $\mathbf{x}$ com λ_0 e λ_1 na região localmente convexa através da solução do problema

continuamente diferenciável definido a seguir:

$$\inf \{f(\mathbf{x}) + \lambda_0^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda_1^T \mathbf{h}(\mathbf{x}), \lambda_0 \in \Lambda_0 \text{ e } \lambda_1 \in \Lambda_1\}; \quad (2.22)$$

próximo ao par $(\lambda_0^*, \lambda_1^*)$, definimos a seguir a função dual $\eta: (\Lambda_0 \times \Lambda_1) \subset (\mathbb{R}_{**}^m \times \mathbb{R}_+^r) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\eta(\lambda_0, \lambda_1) = \inf \{f(\mathbf{x}) + \lambda_0^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda_1^T \mathbf{h}(\mathbf{x}), \lambda_0 \in \Lambda_0 \text{ e } \lambda_1 \in \Lambda_1\}. \quad (2.23)$$

Dado o problema de otimização não-linear, definido em (2.1), de acordo com (Luenberger, et al., 2008), o problema dual é definido a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad \eta(\lambda_0, \lambda_1) = \inf \left\{ f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_{0_i} g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r \lambda_{1_i} h_i(\mathbf{x}) \right\} \\ \text{s.a:} \\ \lambda_0 \in \Lambda_0 \subset \mathbb{R}_{**}^m \\ \lambda_1 \in \Lambda_1 \subset \mathbb{R}_+^r \end{array} \right. . \quad (2.24)$$

Note que os multiplicadores de Lagrange agora são variáveis e essas são definidas como variáveis duais em relação ao problema primal. A próxima proposição nos dá a condição de dualidade fraca, conforme (Luenberger, et al., 2008).

Proposição 2.21: Sejam: $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$ a solução viável definida para o problema primal (2.1) tal que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ funções de classe C^1 sobre X e $\lambda_0^* = (\lambda_{0_1}^*, \dots, \lambda_{0_m}^*)^T \in \Lambda_1 \subset \mathbb{R}_{**}^m$ e $\lambda_1^* = (\lambda_{1_1}^*, \dots, \lambda_{1_i}^*, \dots, \lambda_{1_r}^*)^T \in \Lambda_1 \subset \mathbb{R}_+^r$ soluções viáveis para o problema dual (2.24), então $\eta(\lambda_0^*, \lambda_1^*) \leq f(\mathbf{x}^*)$.

Prova: Pela definição da função dual, temos que:

$$\eta(\lambda_0^*, \lambda_1^*) = \inf \left\{ f(\mathbf{x}^*) + \lambda_0^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) + \lambda_1^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*), \lambda_0^* \in \Lambda_1 \text{ e } \lambda_1^* \in \Lambda_1 \right\}. \quad \text{Sabemos que}$$

$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ e $\lambda_{1_i}^* = 0, \forall i \notin I(\mathbf{x}^*)$, então:

$$\eta(\lambda_0^*, \lambda_1^*) = \inf \left\{ f(\mathbf{x}^*) + \lambda_0^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) + \lambda_1^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \right\} \leq \inf \left\{ f(\mathbf{x}^*) \right\} \Leftrightarrow \eta(\lambda_0^*, \lambda_1^*) \leq f(\mathbf{x}^*) \blacksquare.$$

Com a proposição 2.21, explicitamos seus principais corolários:

Corolário 2.2:

$$\inf \left\{ f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}; \mathbf{x} \in X \right\} \geq \sup \left\{ \eta(\lambda_0, \lambda_1); \lambda_0 \in \Lambda_0 \text{ e } \lambda_1 \in \Lambda_1 \right\}.$$

Corolário 2.3: Se $f(\mathbf{x}^*) = \eta(\lambda_0^*, \lambda_1^*)$, então $\mathbf{x}^*$ e $(\lambda_0^*, \lambda_1^*)$ resolvem o problema primal e dual respectivamente.

Corolário 2.4: Se $\inf \left\{ f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}; \mathbf{x} \in X \right\} = -\infty$, então $\eta(\lambda_0, \lambda_1) = -\infty$ para todo $\lambda_0 \in \Lambda_0$ e $\lambda_1 \in \Lambda_1$.

Corolário 2.5: Se $\sup\{\eta(\lambda_0, \lambda_1); \lambda_0 \in \Lambda_0 \text{ e } \lambda_1 \in \Lambda_1\} = \infty$, então o problema primal não possui solução viável.

Através da proposição 2.21 e do corolário 2.2, definimos a condição de existência de *gap* de dualidade.

Definição 2.23: Um “*gap*” de dualidade ocorre quando $\eta(\lambda_0^*, \lambda_1^*) < f(\mathbf{x}^*)$.

A próxima proposição nos dá a condição de dualidade forte. Essa condição nos fornece a condição de complementaridade entre as variáveis primais e duais.

Proposição 2.22: Sejam $\mathbf{x}^*$ uma solução finita para o problema $\inf\{f(\mathbf{x}); \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}; \mathbf{x} \in X\}$ e $\lambda_0^* \in \Lambda_0$ e $\lambda_1^* \in \Lambda_1$ uma solução para o problema $\sup\{\eta(\lambda_0, \lambda_1); \lambda_0 \in \Lambda_0 \text{ e } \lambda_1 \in \Lambda_1\}$, então a condição de complementaridade é $\lambda_1^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Prova: Ver (Bazaraa, et al., 2006) ■.

Definição 2.24: Seja o problema Lagrangiano definido em (2.19). Uma solução $\omega^* = (\mathbf{x}^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*) \in (X \times \Lambda_0 \times \Lambda_1) \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^m \times \mathbb{R}_+^r)$ é chamada de ponto de sela se ocorrer a seguinte desigualdade: $L(\mathbf{x}^*, \lambda_0, \lambda_1) \leq L(\mathbf{x}^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*) \leq L(\mathbf{x}, \lambda_0^*, \lambda_1^*)$.

Assim, enunciamos uma proposição que define as condições suficientes de otimalidade para o problema primal-dual.

Proposição 2.23: Uma solução $\omega^* = (\mathbf{x}^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*) \in (X \times \Lambda_0 \times \Lambda_1) \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^m \times \mathbb{R}_+^r)$ é um ponto de sela para a função Lagrangiana $L(\omega)$ se, e somente se:

$$i) L(\mathbf{x}^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*) = \inf\{L(\mathbf{x}, \lambda_0^*, \lambda_1^*), \mathbf{x} \in X\};$$

$$ii) \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0};$$

$$iii) \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0};$$

$$iv) \lambda_0^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0.$$

isto é, não existe gap de dualidade.

Prova: Ver (Bazaraa, et al., 2006) ■.

As condições de otimalidade de KKT, conforme a proposição 2.20, diferem-se da proposição 2.23 em relação à condição de ponto de sela e de inexistência de gap de dualidade conforme a proposição anterior e que se as condições de ponto de sela estão satisfeitas, então as condições KKT também estão satisfeitas.

Para a demonstração da próxima proposição relativa à concavidade da função dual, combinamos as variáveis duais λ_0 e λ_1 em uma única variável dual λ e os funcionais $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ em um único funcional $\chi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r+m}$. Essas combinações nos facilitam o desenvolvimento da proposição a seguir:

Proposição 2.24: Sejam $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\chi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r+m}$ funções de classe C^1 , então η definida por $\eta(\lambda) = \inf \{ f(\mathbf{x}) + \lambda^T \chi(\mathbf{x}) \}$ é côncava.

Prova: Como f e χ são contínuas e diferenciáveis e X é compacto, então η possui valor finito em todo $\Lambda_0 \times \Lambda_1$. Sejam λ_a e λ_b elementos do $\Lambda_0 \times \Lambda_1$ e $0 < \alpha < 1$, então nós temos, pela definição 2.6, que:

$$\begin{aligned} \eta(\alpha \lambda_a + (1-\alpha) \lambda_b) &= \inf \left\{ f(\mathbf{x}) + (\alpha \lambda_a + (1-\alpha) \lambda_b)^T \chi(\mathbf{x}) \right\} = \\ &= \inf \left\{ \alpha \left[f(\mathbf{x}) + \lambda_a^T \chi(\mathbf{x}) \right] + (1-\alpha) \left[f(\mathbf{x}) + \lambda_b^T \chi(\mathbf{x}) \right] \right\} \geq \\ &\geq \alpha \inf \left\{ f(\mathbf{x}) + \lambda_a^T \chi(\mathbf{x}) \right\} + (1-\alpha) \inf \left\{ f(\mathbf{x}) + \lambda_b^T \chi(\mathbf{x}) \right\} \geq \\ &\geq \alpha \eta(\lambda_a) + (1-\alpha) \eta(\lambda_b). \\ \therefore \eta(\lambda) &\text{ é côncava. } \blacksquare \end{aligned}$$

2.4 Métodos de penalidade externa e de penalidade interior.

Nesta seção definimos métodos que transformam o problema primal, definido em (2.1), em um problema irrestrito equivalente. Um dos métodos é definido de modo a gerar uma sequência de pontos inviáveis cujo limite é a solução do problema original. O outro método é definido de modo a gerar uma sequência de pontos viáveis necessariamente a partir de pontos viáveis, ou seja, é um método de ponto interior cujo limite da sequência gerada é a solução ótima do problema original.

Considere o problema de otimização não-linear restrito, definido em (2.1), a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ \quad \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. .$$

A abordagem da função penalidade aplicada a problemas restritos é geralmente atribuída a (Courant, 1957). Para mais detalhes dos resultados que serão apresentados a seguir, indicamos os trabalhos de (Butler, et al., 1962) e (Zangwill, 1967).

O método de penalidades é definido conforme o seguinte problema de otimização não-linear irrestrito:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad FAPen(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + cPen(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \quad \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. ; \quad (2.25)$$

em que $FAPen(\mathbf{x})$ é denominada função auxiliar penalidade; $c \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ é o parâmetro de penalidade e $Pen(\mathbf{x})$ é a função penalidade definida por:

$$Pen(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \varphi(g_i(\mathbf{x})) + \sum_{i=1}^r \gamma(h_i(\mathbf{x})); \quad (2.26)$$

onde $\varphi(g_i(\mathbf{x}))$ e $\gamma(h_i(\mathbf{x}))$ são funções de classe C^2 tais que devem satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \varphi(g_i(\mathbf{x})) = 0, & \text{se } g_i(\mathbf{x}) = 0 \\ \varphi(g_i(\mathbf{x})) > 0, & \text{se } g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \\ \gamma(h_i(\mathbf{x})) = 0, & \text{se } h_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \gamma(h_i(\mathbf{x})) > 0, & \text{se } h_i(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}. \quad (2.27)$$

Note que, (2.27) penaliza os pontos inviáveis ao problema original, isto é, $\mathbf{x} \notin X$, portanto, o ponto ótimo $\mathbf{x}^*$ é determinado por uma sequência de pontos exteriores à região de viabilidade. Afim de que (2.27) seja satisfeita, seguem as definições para $\varphi(g_i(\mathbf{x}))$ e $\gamma(h_i(\mathbf{x}))$:

$$\begin{cases} \varphi(g_i(\mathbf{x})) = |g_i(\mathbf{x})|^p \\ \gamma(h_i(\mathbf{x})) = [\max\{0, h_i(\mathbf{x})\}]^p \end{cases}; \quad (2.28)$$

em que p é um número. Particularmente, se $p=2$ a função $Pen(\mathbf{x})$ é denominada penalidade quadrática. A seguir, apresentamos as condições necessárias e suficientes de otimalidade para (2.26) utilizando as penalizações (2.28).

Ao observarmos os modelos (2.25) e (2.1) podemos estabelecer uma condição para o parâmetro de penalidade c . Supondo que $\mathbf{x}^*$ é um ponto ótimo para o problema, então devemos ter que $cPen(\mathbf{x}^*) = 0$. Segundo (Luenberger, et al., 2008), para um valor grande c

é evidente que o mínimo para o problema (2.25) estará em uma região onde $Pen(\mathbf{x})$ é pequena, ou seja, $Pen(\mathbf{x}) \rightarrow 0$. Assim, aumentando-se o valor de c espera-se que os pontos $\mathbf{x} \notin X$ se aproximem da região de viabilidade onde $\mathbf{x}^*$ está, portanto, $c \rightarrow \infty$ ao passo que $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$. Então, para garantirmos que $cPen(\mathbf{x}^*) = 0$, devemos necessariamente ter que $c \rightarrow \infty$ mais lentamente que $Pen(\mathbf{x}) \rightarrow 0$.

As condições de otimalidade são definidas conforme as condições de KKT (proposição 2.20). Definindo-se por $h_i(\mathbf{x})^+ \equiv \max\{0, h_i(\mathbf{x})\}$, $i = 1, \dots, r$, então devemos ter que:

$$\begin{aligned} i) \nabla FAPen(\mathbf{x}^*) &= \nabla f(\mathbf{x}^*) + c \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \nabla \varphi(\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)) + c \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^+{}^T \nabla \gamma(\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^+) = \mathbf{0} \\ ii) c \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^+{}^T \nabla \gamma(\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^+) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Note que, ao compararmos a condição i) de (2.29) com a condição i) da proposição 2.20, se $\mathbf{x}^*$ é um ponto ótimo, então devemos ter, pela condição de dualidade, que os multiplicadores ótimos são:

$$\begin{cases} \lambda_0^* = c \nabla \varphi(\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)) \\ \lambda_1^* = c \nabla \gamma(\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^+) \end{cases}, c \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

A condição necessária e suficiente de otimalidade local ocorre quando as condições i) e ii) de (2.29) estão satisfeitas e que $\nabla^2 FAPen(\mathbf{x}^*)$ é definida positiva, conforme a proposição 2.15.

Exemplo 2.4: Resolver o exemplo 2.2 utilizando a função penalidade quadrática:

Solução: O modelo de otimização não-linear a ser resolvido é apresentado na forma padrão conforme (2.15) e este é reapresentado a seguir:

$$\begin{cases} \text{Min} & -f(x, y) = -xy \\ \text{s.a:} & \\ & x + 2y - 20 = 0 \\ & (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \end{cases}.$$

Transformando o problema (2.15) em um problema de otimização não-linear irrestrito equivalente conforme (2.25) com $p = 2$, temos:

$$\begin{cases} \text{Min} & FAPen(\mathbf{x}) = -xy + c(x + 2y - 20)^2 \\ \text{s.a:} & \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2, c > 0 \end{cases}. \quad (2.31)$$

Aplicando-se às condições necessárias de otimalidade de KKT sobre o problema (2.31), isto é, $\nabla FAPen(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, obtemos as seguintes equações a serem investigadas

$$\begin{cases} \frac{\partial FAPen(x, y)}{\partial x} = -y + 2c(x + 2y - 20) = 0 \\ \frac{\partial FAPen(x, y)}{\partial y} = -x + 4c(x + 2y - 20) = 0 \end{cases}. \quad (2.32)$$

Operando-se sobre o sistema (2.32), obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} (4c-1)x + (8c)y = 80c \\ (2c)x + (4c-1)y = 40c \end{cases}. \quad (2.33)$$

Assim, temos:

$$x(c) = \frac{(80c)(4c-1) - 320c^2}{(4c-1)^2 - 16c^2}. \quad (2.34)$$

$$y(c) = \frac{(40c)(4c-1) - 160c^2}{(4c-1)^2 - 16c^2}. \quad (2.35)$$

Observemos que, se existe solução ótima primal, então os limites $\lim_{c \rightarrow \infty} x(c)$ e $\lim_{c \rightarrow \infty} y(c)$ existem e são, pela teoria de função penalidade, as soluções ótimas para o problema original. Assim, calculamos x^* aplicando-se o limite para $c \rightarrow \infty$ em (2.34), obtemos que:

$$\begin{aligned} x^* &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{(80c)(4c-1) - 320c^2}{(4c-1)^2 - 16c^2} \right] = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{320c^2 - 80c - 320c^2}{16c^2 - 8c + 1 - 16c^2} \right] = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{-80c}{-8c + 1} \right) = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{-80c}{c \left(-8 + \frac{1}{c} \right)} \right] = 10. \end{aligned}$$

O mesmo fazemos para calcularmos a solução y^* , portanto, aplicando-se o limite para $c \rightarrow \infty$ em (2.35), obtemos que:

$$\begin{aligned} y^* &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{(40c)(4c-1) - 160c^2}{(4c-1)^2 - 16c^2} \right] = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{160c^2 - 40c - 160c^2}{16c^2 - 8c + 1 - 16c^2} \right] = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{-40c}{-8c + 1} \right) = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{-40c}{c \left(-8 + \frac{1}{c} \right)} \right] = 5. \end{aligned}$$

Portanto, a área máxima do galpão é $f(x^*, y^*) = 50$ unidades de área. Mostremos que esse ponto é um ponto de mínimo para o problema (2.15) através da $\nabla^2 FAPen(\mathbf{x}^*)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{*T} \nabla^2 FAPen(\mathbf{x}^*) \mathbf{x}^* > 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial FAPen}{\partial x \partial x} & \frac{\partial FAPen}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial FAPen}{\partial x \partial y} & \frac{\partial FAPen}{\partial y \partial y} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c & -1+4c \\ -1+4c & 8c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow 800c - 100 > 0 \Leftrightarrow 800 - \frac{100}{c} > 0. \end{aligned}$$

Considerando-se o limite quando $c \rightarrow \infty$, o resultado obtido é 800.

2.5 Métodos de Barreira.

Assim, como as funções penalidade, as funções barreira também transformam um problema restrito em um problema irrestrito ou em uma seqüência de problemas irrestritos. Estas funções criam uma barreira impedindo que os pontos viáveis saiam da região de viabilidade, isto é, a função barreira é uma técnica de ponto interior.

Seja o seguinte problema de otimização não-linear, conforme (2.17), com a condição de que se a solução ótima $\mathbf{x}^*$ torna alguma restrição $h_i(\mathbf{x}^*)$ ativa, então, é necessário que $\mathbf{x}^* \in \Phi_\mu = \sup \left\{ \mathbf{x}^* : h_i(\mathbf{x}^*) = 0; \forall i \in I(\mathbf{x}^*) \right\}$. Isso é facilmente notado pelo modelo (2.36):

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a. :} & \mathbf{h}(\mathbf{x}) < 0 \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.36)$$

O método de barreira é definido segundo o problema de otimização não-linear irrestrito expresso por:

$$\begin{cases} \text{Min} & F\text{Bar}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mu \text{Bar}(\mathbf{x}) \\ \text{s.a. :} & \\ & \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases} ; \quad (2.37)$$

em que $FABar(\mathbf{x})$ é denominada função auxiliar barreira; $\mu \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ é o parâmetro de barreira e $Bar(\mathbf{x})$ é a função barreira definida por:

$$Bar(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \Psi(h_i(\mathbf{x})); \quad (2.38)$$

onde $\Psi(h_i(\mathbf{x}))$ é uma função de classe C^2 estritamente convexa tal que, deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \Psi(h_i(\mathbf{x})) > 0, \text{ se } h_i(\mathbf{x}) < 0 \\ \lim_{h_i(\mathbf{x}) \rightarrow 0^-} \Psi(h_i(\mathbf{x})) = \infty \end{cases}. \quad (2.39)$$

Note que, (2.39) penaliza os pontos viáveis ao problema original, isto é, $\mathbf{x} \in X$, portanto, o ponto $\mathbf{x}^*$ é determinado por pontos interiores à região de viabilidade. Afim de que (2.39) seja satisfeita, seguem as definições para $\Psi(h_i(\mathbf{x}))$:

$$\Psi(h_i(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^r -\frac{1}{h_i(\mathbf{x})}; \quad (2.40)$$

ou

$$\Psi(h_i(\mathbf{x})) = -\sum_{i=1}^r \ln(-h_i(\mathbf{x})). \quad (2.41)$$

A sugestão (2.40) é denominada função barreira clássica e essa foi proposta por (Carroll, 1961) e a sugestão (2.41) é denominada função barreira logarítmica e essa foi proposta por (Frisch, 1955).

Ao observarmos os modelos (2.37) e (2.17) podemos estabelecer uma condição para o parâmetro de barreira μ . Supondo que $\mathbf{x}^*$ é um ponto ótimo para o problema, então devemos

ter que $\mu \text{Bar}(\mathbf{x}^*) = 0$. Segundo (Luenberger, et al., 2008), para um valor positivo pequeno μ , ou seja, $\mu \rightarrow 0$, é evidente que o mínimo para o problema (2.37) estará em uma região onde $\text{Bar}(\mathbf{x})$ é grande, ou seja, $\text{Bar}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, principalmente se $h_i(\mathbf{x}^*) \rightarrow 0^-$, então, no ponto ótimo $\mathbf{x}^*$ deve ocorrer que $\text{Bar}(\mathbf{x}^*) \rightarrow \infty$. Assim, diminuindo-se o valor de μ espera-se que os pontos $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$ se aproximem da fronteira da região de viabilidade onde $\mathbf{x}^*$ está, portanto, $\mu \rightarrow 0$ ao passo que $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$. Então, para garantirmos que $\mu \text{Bar}(\mathbf{x}^*) = 0$, devemos necessariamente ter que $\mu \rightarrow 0$ mais rapidamente que $\text{Bar}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$.

As condições necessárias de otimalidade são definidas conforme as condições de KKT (proposição 2.20). Ao adotarmos $\Psi(h_i(\mathbf{x})) = -\sum_{i=1}^r \ln(-h_i(\mathbf{x}))$, então devemos ter que:

$$\nabla F\text{Bar}(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \mu \sum_{i=1}^r \frac{-1}{h_i(\mathbf{x}^*)} \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \quad (2.42)$$

Note que ao compararmos (2.42) com a condição i) da proposição 2.20, se $\mathbf{x}^*$ é um ponto ótimo, então devemos ter, pela condição de dualidade, que os multiplicadores de Lagrange ótimos são:

$$\left\{ \lambda_{\mu_i}^* = \mu \frac{-1}{h_i(\mathbf{x}^*)} \right. \quad (2.43)$$

Assim, esperamos que $\lambda_{1_\mu} \rightarrow \lambda_1^*$ com $\mu \rightarrow 0$. Portanto, a condição de complementaridade é definida por:

$$\lambda_{1_\mu}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (2.44)$$

Definimos a matriz hessiana $\nabla^2 F\bar{A}Bar(\mathbf{x})$, conforme (Luenberger, et al., 2008), a seguir:

$$\nabla^2 F\bar{A}Bar(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r \lambda_{\mu_i} \nabla^2 h_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r -\frac{\lambda_{\mu_i}}{h_i(\mathbf{x})} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (2.45)$$

Exemplo 2.5: Resolver o exemplo 2.2 utilizando a função barreira logarítmica:

Solução:

Considerando que o método de barreira é um método de ponto interior, a interpretação geométrica do problema é dada pela figura 2.9. O respectivo modelo matemático é definido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad f(x, y) = xy \\ \text{s.a:} \\ \quad x + 2y - 20 < 0 \\ \quad x > 0 \\ \quad y > 0 \\ \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}_+^2 \end{array} \right. . \quad (2.46)$$

Convertendo problema (2.46) para a forma padrão, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad -f(x, y) = -xy \\ \text{s.a:} \\ \quad x + 2y - 20 < 0 \\ \quad -x < 0 \\ \quad -y < 0 \\ \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}_+^2 \end{array} \right. . \quad (2.47)$$

Convertemos o problema restrito (2.47) para o problema irrestrito barreira logarítmica conforme (2.37), da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Min} & F\bar{A}Bar(\mathbf{x}) = -xy - \mu \ln(-(x+2y-20)) - \mu \ln(-(-x)) - \mu \ln(-(-y)) \\ \text{s.a:} & \\ & (x, y)^T \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases} ;$$

ou

$$\begin{cases} \text{Min} & F\bar{A}Bar(\mathbf{x}) = -xy - \mu \ln(-x^2y - 2xy^2 + 20xy) \\ \text{s.a:} & \\ & (x, y)^T \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases} . \quad (2.48)$$

Aplicando-se as condições necessárias de otimalidade de KKT sobre o problema (2.48), isto é, $\nabla F\bar{A}Bar(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, obtemos as seguintes equações a serem investigadas:

$$\begin{cases} \frac{\partial F\bar{A}Bar(x, y)}{\partial x} = -y - \mu \left(\frac{-2xy - 2y^2 + 20y}{-x^2y - 2xy^2 + 20xy} \right) = 0 \\ \frac{\partial F\bar{A}Bar(x, y)}{\partial y} = -x - \mu \left(\frac{-x^2 - 4xy + 20x}{-x^2y - 2xy^2 + 20xy} \right) = 0 \end{cases} . \quad (2.49)$$

Operando-se sobre o sistema (2.49) algumas operações aritméticas, obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} -y(-x^2y - 2xy^2 + 20xy) - \mu(-2xy - 2y^2 + 20y) = 0 \\ -x(-x^2y - 2xy^2 + 20xy) - \mu(x^2 - 4xy + 20x) = 0 \end{cases} ;$$

ou

$$\begin{cases} -yx(-x^2y - 2xy^2 + 20xy) - \mu x(-2xy - 2y^2 + 20y) = 0 \\ x = 2y \end{cases} ; \quad (2.50)$$

portanto, temos a função implícita $FI(y, \mu) = 0$ definida por:

$$FI(y, \mu) = -y(2y) \left[-(2y)^2 y - 2(2y)y^2 + 20(2y)y \right] + \mu(2y) \left[-2(2y) - 2y^2 + 20y \right] = 0;$$

logo, a solução ótima existe e será $y = y^*$ se o $\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ y = y^*}} FI(y^*, \mu) = 0$.

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ y = y^*}} \left\{ -y(2y) \left[-(2y)^2 y - 2(2y)y^2 + 20(2y)y \right] + \mu(2y) \left[-2(2y) - 2y^2 + 20y \right] \right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ y = y^*}} FI(y, \mu) = -y^*(2y^*) \left[-(2y^*)^2 y^* - 2(2y^*)y^{*2} + 20(2y^*)y^* \right] = 0.$$

Reorganizando a equação, temos:

$$\begin{aligned} -2(y^*)^2 \left(-8(y^*)^3 + 40(y^*)^2 \right) &= 0 \\ -2(y^*)^4 \left(-8(y^*) + 40 \right) &= 0 \\ -8y^* + 40 &= 0 \\ y^* &= 5. \end{aligned}$$

Como $\begin{cases} x^* = 2y^* \\ y^* = 5 \end{cases}$, então $x^* = 10$. Assim, a área máxima do galpão é $f(x^*, y^*) = 50$

unidades de área.

2.6 A função barreira modificada.

Foi desenvolvido por (Polyak, 1992) uma teoria de métodos da função barreira modificada. Estes métodos combinam a função Lagrangiana e a função barreira buscando explorar as melhores propriedades de cada uma dessas funções. A função barreira modificada pode ser considerada como uma função Lagrangiana aumentada interior e, assim como as técnicas de penalizações, é utilizada na resolução de problemas restritos. O método de barreira modificada transforma o problema restrito (2.36) em um irrestrito equivalente, e

resolve uma sequência de problemas irrestritos até convergir para o ponto ótimo $\mathbf{x}^*$, o qual pode convergir pelo interior do conjunto $H = \{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \mathbf{h}(\mathbf{x}) < 0\}$ ou pelo interior do conjunto expandido $H_\mu = \{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) < \mu\}$. Para um melhor entendimento do método e de suas propriedades descrevemos um método de barreira modificada geral para o problema (2.17), segundo (Nash, et al., 1994).

Seja o seguinte problema de otimização não-linear cujas restrições de desigualdades foram perturbadas em μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \quad h_i(\mathbf{x}) < \mu \quad i = 1, \dots, r; \\ \quad \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (2.51)$$

as restrições de desigualdades podem ser escritas da seguinte maneira:

$$h_i(\mathbf{x}) - \mu < 0 \Leftrightarrow \mu \left(\frac{h_i(\mathbf{x})}{\mu} - 1 \right) < 0 \Leftrightarrow h_i^\diamond(\mathbf{x}) = \frac{h_i(\mathbf{x})}{\mu} - 1 < 0;$$

assim, o problema (2.51) é redefinido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \quad h_i^\diamond(\mathbf{x}) < 0 \quad i = 1, \dots, r \\ \quad \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (2.52)$$

O método de barreira modificada é definido pelo seguinte problema de otimização não-linear irrestrito:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad FABarmod(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mu Barmod(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \quad \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. ; \quad (2.53)$$

em que $FABarmod(\mathbf{x})$ é denominada função auxiliar barreira modificada; $\mu > 0$ é o parâmetro de barreira e $Barmod(\mathbf{x})$ é a função barreira modificada definida por:

$$Barmod(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \delta_{l_i} \Psi(h_i^\diamond(\mathbf{x})); \quad (2.54)$$

onde: a componente do vetor $\delta_1 = (\delta_{l_1}, \dots, \delta_{l_i}, \dots, \delta_{l_r})^T \in \Lambda_2 \subset \mathbb{R}_+^r$ é denominado estimador do multiplicador de Lagrange referente à restrição $h_i^\diamond(\mathbf{x})$, $\Psi(h_i^\diamond(\mathbf{x}))$ é uma função de classe C^2 estritamente convexa tal que deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \Psi(h_i^\diamond(\mathbf{x})) > 0, \text{ se } h_i^\diamond(\mathbf{x}) < 0 \\ \lim_{h_i^\diamond \rightarrow \mu^-} \Psi(h_i^\diamond) = \infty \end{cases}. \quad (2.55)$$

Note que (2.55) penaliza os pontos viáveis ao problema original mais os pontos que não pertencem à região de viabilidade original, os quais pertencem ao conjunto expandido e delimitado por μ , isto é, H_μ , portanto, o ponto $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$ é determinado pelo interior da região de viabilidade expandida $H \cup H_\mu$. Afim de que (2.55) seja satisfeita, seguem as definições para $\Psi(h_i^\diamond(\mathbf{x}))$:

$$\Psi(h_i^\diamond(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^r -\frac{1}{h_i^\diamond(\mathbf{x})}; \quad (2.56)$$

ou

$$\Psi(h_i^\diamond(\mathbf{x})) = -\sum_{i=1}^r \ln(-h_i^\diamond(\mathbf{x})). \quad (2.57)$$

A função (2.56) é denominada função barreira clássica modificada e a função (2.57) é denominada função barreira logarítmica modificada. Essas mesmas funções também são apresentadas em (Polyak, 1992). Diferente da função barreira logarítmica apresentada em (2.41), a função barreira modificada é contínua e admite derivadas parciais em $h_i(\mathbf{x}^*) = 0, \forall i \in I(\mathbf{x}^*)$ para qualquer $\mu > 0$. Em particular, seja $\delta_1^* \in \Lambda_2 \subset \mathbb{R}_+^r$ o vetor ótimo dos multiplicadores de Lagrange correspondente ao ponto ótimo $\mathbf{x}^*$ e $\Psi(.) = \ln(.)$, então a função barreira modificada tem as seguintes condições necessárias e suficientes de otimalidade para $\mu \rightarrow 0^+$:

$$i) FABarmod(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*);$$

$$ii) \nabla FABarmod(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^r \delta_{l_i}^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0};$$

$$iii) \nabla^2 FABarmod(\mathbf{x}^*) = \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^r \delta_{l_i}^* \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^r -\frac{\delta_{l_i}^*}{h_i(\mathbf{x}^*) - \mu} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)$$
 é

definida positiva.

Ao observarmos os elementos do conjunto $H \cup H_\mu = \{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : (\mathbf{h}(\mathbf{x}) < \mathbf{0}) \text{ ou } (\mathbf{0} \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) < \mu)\}$, a hipótese de que $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ é um funcional de classe C^2 e que $\mathbf{x}^* \in X$ temos, para todo $\varepsilon_1 > 0$, uma bola $B_h(\mathbf{h}(\mathbf{x}^*), \varepsilon_1) = \{\mathbf{x} \in H \cup H_\mu : d(\mathbf{h}(\mathbf{x}^*), \mathbf{h}(\mathbf{x})) < \varepsilon_1\}$ inteiramente contida em $H \cup H_\mu$ sempre que, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ e $\varepsilon_2 > 0$, a bola $B_x(\mathbf{x}^*, \varepsilon_2) = \{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : 0 < d(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) < \varepsilon_2\}$ está totalmente contida em X . Isto significa que se a solução ótima $\mathbf{x}^*$, encontrada pelo método da função barreira modificada, é uma restrição de desigualdade ativa, então agora

$\mathbf{x}^* \in \max \Phi_\mu$ e também temos que as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem da respectiva restrição ativa existem em $\mathbf{x}^*$ para qualquer μ suficientemente pequeno. Portanto a $\nabla^2 FABarmod(\mathbf{x})$ é mais robusta e estável numericamente quando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$ do que a $\nabla^2 FABar(\mathbf{x})$.

Neste trabalho utilizamos a função barreira Frisch modificada (2.57), isto é, a barreira logarítmica modificada. A seguir, apresentamos a estratégia para a atualização dos multiplicadores de Lagrange.

Primeiramente, diferenciamos o problema (2.53) em relação a $\mathbf{x}$ e aplicamos uma condição necessária de otimalidade sobre essa condição:

$$\begin{aligned} \nabla FABarmod(\mathbf{x}) &= \nabla f(\mathbf{x}) + \mu \sum_{i=1}^r \frac{\delta_{l_i}}{\mu} \Psi'(h_i^\diamond(\mathbf{x})) \nabla h_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla FABarmod(\mathbf{x}) &= \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r \delta_{l_i} \Psi'(h_i^\diamond(\mathbf{x})) \nabla h_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Assim, se $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^*$ dentro de uma região convexa devemos ter também, pela condição de dualidade, que $\delta_1^k \rightarrow \delta_1^* = \lambda_1^*$, portanto, cada componente do vetor estimador dos multiplicadores de Lagrange deve ser atualizado de acordo com a regra a seguir:

$$\delta_{l_i}^{k+1} = \delta_{l_i}^k \Psi'(h_i^\diamond(\mathbf{x}^k)). \quad (2.58)$$

Resumidamente temos: dado o problema de otimização não-linear, conforme (2.17), o transformamos no seguinte problema irrestrito:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad FABarmod(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^r \delta_{i_i} \ln \left(1 - \frac{h_i(\mathbf{x})}{\mu} \right) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{\delta}_1 \in \Lambda_1 \subset \mathbb{R}_+^r \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Para a atualização dos multiplicadores de Lagrange temos que $\Psi'(h_i^\diamond(\mathbf{x}^k)) = \frac{\mu_k}{\mu_k - h_i(\mathbf{x}^k)}$,

portanto, ao compararmos com a expressão (2.58) temos:

$$\delta_{i_i}^{k+1} = \frac{\delta_{i_i}^k \mu_k}{\mu_k - h_i(\mathbf{x}^k)}. \quad (2.60)$$

2.7 Uma proposta de cálculo para o estimador dos multiplicadores de Lagrange.

Nesta seção, apresentamos uma proposta de atualização dos estimadores de multiplicadores de Lagrange. Para isso, construímos uma função a qual é resultante da associação do método da função barreira modificada com o método da função lagrangiana apresentada na seção 2.3.1. Seja o problema de otimização não-linear segundo (2.51).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) < \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. . \quad (2.61)$$

Seja $\mathbf{z}_1 = (z_{1_1}, \dots, z_{1_r})^T \in Z_1 \subset \mathbb{R}_+^r$ o vetor cujas componentes são variáveis de folga estritamente positivas para cada $h_i(\mathbf{x}) < 0, i = 1, \dots, r$. Ao adicionarmos $\mathbf{z}_1$ em ambos os lados da desigualdade $\mathbf{h}(\mathbf{x}) < \boldsymbol{\mu}$ de (2.61), temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{z}_1 < \boldsymbol{\mu} + \mathbf{z}_1 \quad ; \\ \mathbf{z}_1 \in Z_1 \subset \mathbb{R}_+^r \\ \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Portanto, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \\ -\mathbf{z}_1 < \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{z}_1 \in Z_1 \subset \mathbb{R}_+^r \\ \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. . \quad (2.63)$$

Agora, penalizamos função objetivo com a função barreira logarítmica modificada apresentada em (2.59). Então, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^r \delta_{l_i} \ln \left(1 - \frac{(-z_{l_i})}{\mu} \right) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_1 \in Z_1 \subset \mathbb{R}_+^r \\ \boldsymbol{\delta}_1 \in \Lambda_1 \subset \mathbb{R}_+^r \\ \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. . \quad (2.64)$$

À restrição de igualdade do problema (2.64), aplicamos a função Lagrangiana de acordo com (2.12). Portanto, temos um problema de otimização não-linear irrestrito e equivalente ao problema (2.61):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad L(\omega) = f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^r \delta_{l_i} \ln \left(\frac{\mu + z_{l_i}}{\mu} \right) + \sum_{i=1}^r \lambda_{l_i} (h_i(\mathbf{x}) + z_{l_i}) \\ \omega = (\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \lambda_1)^T \in (X \times Z_1 \times \Lambda_1) \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R}_+^r) \end{array} \right. . \quad (2.65)$$

A função $L(\omega)$ apresentada em (2.65) é denominada função lagrangiana aumentada interior barreira logarítmica modificada e essa função é apresentada em (Sousa, 2006). Com essa função, enunciamos a seguinte proposição que nos simplificará o cálculo dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ_{l_i} , $i = 1, \dots, r$:

Proposição 2.25: *Seja o problema de otimização não-linear apresentado em (2.61), o qual foi transformado em um problema de otimização irrestrito e equivalente pela função lagrangiana aumentada interior barreira logarítmica modificada apresentada em (2.65). O vetor $\delta_1^{k+1} = (\delta_{l_1}^{k+1}, \dots, \delta_{l_r}^{k+1})^T$ é atualizado pelo vetor $\lambda_1^k = (\lambda_{l_1}^k, \dots, \lambda_{l_r}^k)^T$.*

Prova: Sobre a expressão (2.65) numa iteração k , calculamos $\frac{\partial L(\omega^k)}{\partial \mathbf{z}_1^k}$ e aplicamos a condição necessária de otimalidade, isto é, aplicamos a condição de que $\frac{\partial L(\omega^k)}{\partial \mathbf{z}_1^k} = \mathbf{0}$:

$$\frac{\partial L(\omega^k)}{\partial \mathbf{z}_1^k} = \lambda_1^k - \mu^k \text{diag} \left(\frac{1}{z_{l_1}^k + \mu^k}, \dots, \frac{1}{z_{l_i}^k + \mu^k}, \dots, \frac{1}{z_{l_r}^k + \mu^k} \right) \delta_1^k = \mathbf{0};$$

Assim, para cada componente $i = 1, \dots, r$ do vetor λ_1^k temos:

$$\lambda_{l_i}^k = \frac{\mu^k \delta_{l_i}^k}{\mu^k + z_{l_i}^k}, \quad i = 1, \dots, r; \quad (2.66)$$

ao compararmos (2.66) com (2.60) concluímos que

$$\delta_1^{k+1} = \lambda_1^k. \blacksquare \quad (2.67)$$

As vantagens da proposição 2.25 são:

i) não precisamos necessariamente da heurística apresentada em (2.60) para atualizarmos os estimadores dos multiplicadores de Lagrange;

ii) para uma iteração $k-1$, λ_1^k é calculado por $\lambda_1^k = \lambda_1^{k-1} + \alpha \mathbf{d}_{\lambda_1}^{k-1}$, onde $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ é o tamanho do passo. Dessa forma, δ_1^{k+1} é robusto desde que a direção $\mathbf{d}_{\lambda_1}^{k-1}$ seja calculada por um método robusto, como o método de Newton por exemplo, e a viabilidade de δ_1^{k+1} é garantida pelo tamanho do passo α ;

iii) baixo custo computacional, pois cada componente de δ_1^{k+1} recebe o valor da respectiva componente de λ_1^k , portanto, não há procedimento aritmético algum, há apenas a substituição de componentes.

Neste trabalho, utilizamos o procedimento (2.67) para o cálculo dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange.

2.8 O método dos quadrados mínimos.

Nesta seção, apresentamos e construímos o método dos quadrados mínimos a partir das definições e proposições de complementos ortogonais, que é uma extensão da noção de vetor normal a um hiperplano; e de projeção ortogonal sobre um subespaço, que é uma extensão de projeção de um vetor sobre o outro, em espaços vetoriais com produto interno euclidiano. Os resultados desta seção nos ajudam a compreender os resultados da técnica prima-dual que será apresentada no capítulo 3.

A definição de complemento ortogonal é enunciada segundo (Poole, 2009):

Definição 2.25: Seja W um subespaço do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que um vetor $\mathbf{w}^\perp = (w_1^\perp, \dots, w_n^\perp)^T$ em $\mathbb{R}^n$ é ortogonal a W se $\mathbf{w}^\perp$ for ortogonal a todo vetor $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ em W . O conjunto de todos os vetores ortogonais a W é chamado de complemento ortogonal de W , denotado por $W^\perp$ (lê-se “ W ortogonal”). Isto é, $W^\perp = \left\{ \mathbf{w}^\perp \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{w}^\perp)^T \mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{w} \in W \right\}$.

A figura 2.10 ilustra a definição 2.25:

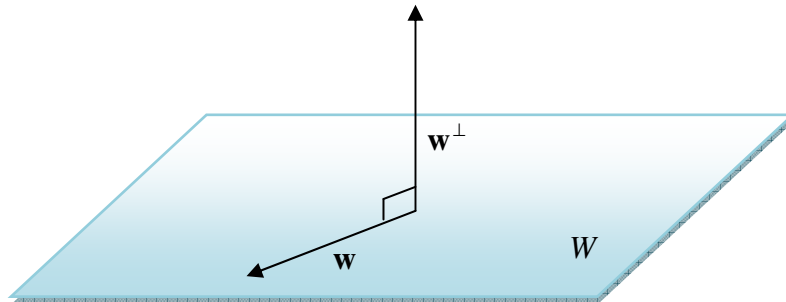


Figura 2.10: O vetor $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$.

Agora, suponhamos que o subespaço W fosse gerado por uma base ortogonal $U = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, $k = 1, \dots, n-1$ e um vetor $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, assim, para um vetor $\mathbf{u}_k \in W$ e um ângulo γ definido pelos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}_k$ temos o vetor $\mathbf{w}_k \in W$ que é definido pela projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}_k$, isto é, $\mathbf{w}_k = \text{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{v})$ e temos o vetor $\mathbf{w}_k^\perp \in W^\perp$ que é definido por $\mathbf{w}_k^\perp = \text{perp}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{v})$, como mostra a figura 2.11:

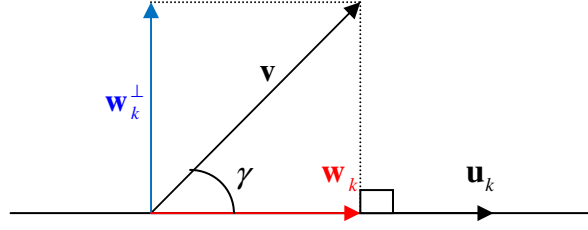


Figura 2.11: O vetor $\mathbf{v}$ é resultante da soma de dois vetores: um $\mathbf{w}_k \in W$ e outro $\mathbf{w}_k^\perp \in W^\perp$.

Conforme (Poole, 2009), $\mathbf{w}_k = \|\mathbf{w}_k\| \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}$. Temos ainda que

$$\|\mathbf{w}_k\| = \|\mathbf{v}\| \cos(\gamma) \Rightarrow \|\mathbf{w}_k\| = \|\mathbf{v}\| \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}_k\|}, \text{ portanto, temos:}$$

$$\mathbf{w}_k = \text{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{u}_k}{(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{u}_k} \right) \mathbf{u}_k. \quad (2.68)$$

O conceito de projeção de vetor sobre vetor agora é estendido para projeção de vetor sobre subespaço.

Definição 2.26: Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e seja $U = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, $k = 1, \dots, n-1$ uma base ortogonal para W . Para um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, a **projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ em W** é definida por:

$$\mathbf{w} = \text{proj}_W(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 + \dots + \left(\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k} \right) \mathbf{u}_k; \quad (2.69)$$

e a **componente ortogonal de $\mathbf{v}$ em relação a W** é o vetor:

$$\mathbf{w}^\perp = \text{perp}_W(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v}). \quad (2.70)$$

A figura 2.12 ilustra a definição 2.26 para $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

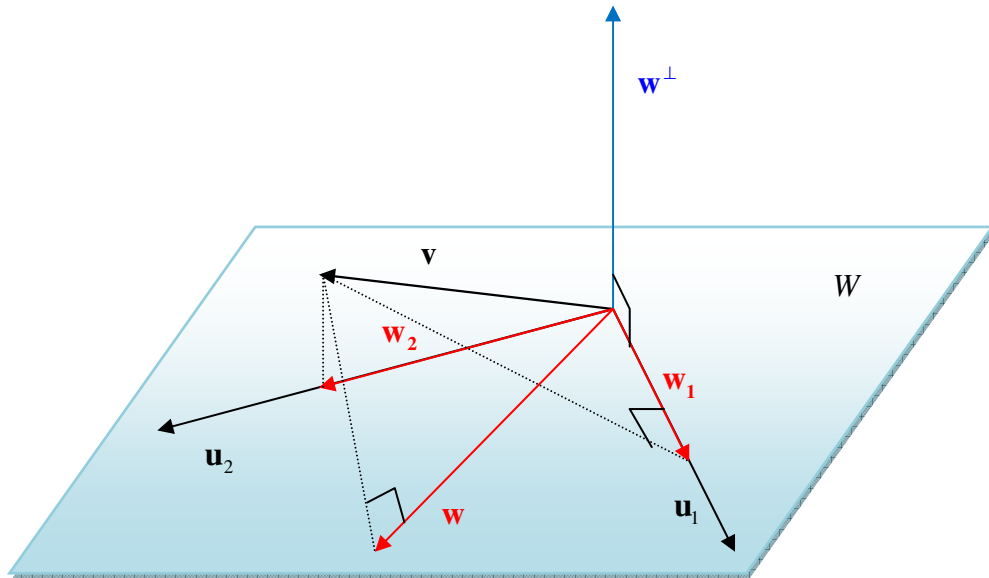


Figura 2.12: Ilustração da definição 2.26.

A seguir, enunciamos uma proposição que expressa um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ através de vetores definidos nos subespaços W e $W^\perp$.

Proposição 2.26: *Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathbf{v}$ um vetor em $\mathbb{R}^n$. Existem vetores únicos $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$ tais que $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$.*

Prova: Ver (Poole, 2009) ■.

Segundo (Poole, 2009), a expressão “menor distância” está relacionada com a noção de projeção ortogonal: se W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, então $\mathbf{w} = \text{proj}_W(\mathbf{v})$ é o vetor em W que está mais próximo de $\mathbf{v}$ ou, em outras palavras, $\mathbf{w}$ é a melhor aproximação para $\mathbf{v}$ em W . Consideramos que $\mathbf{w}_a$ seja um vetor em W tal que $\mathbf{w}_a \neq \mathbf{w}$, então $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_a\|$. A figura 2.13 ilustra esse resultado o qual é formalizado pela proposição 2.27, vista a seguir:

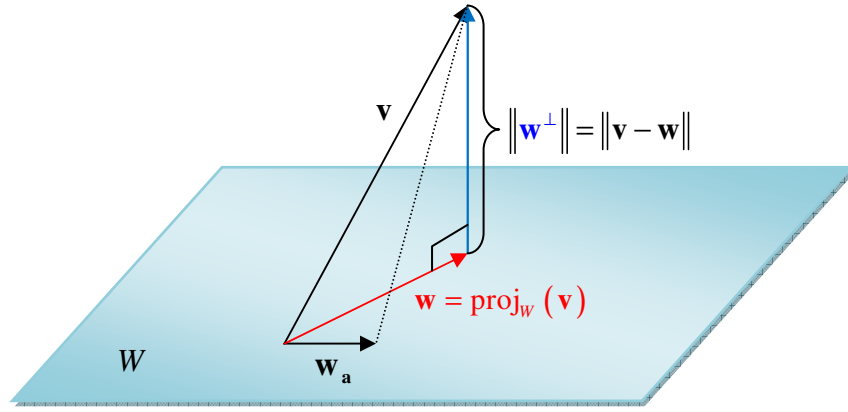


Figura 2.13: Ilustração para a proposição 2.27.

Proposição 2.27: Se W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e se $\mathbf{v}$ é um vetor em $\mathbb{R}^n$, então $\mathbf{w} = \text{proj}_W(\mathbf{v})$ é a melhor aproximação para $\mathbf{v}$ em W .

Prova: Seja $\mathbf{w}_a$ um vetor em W tal que $\mathbf{w}_a \neq \mathbf{w}$. Então, $\mathbf{w}_b = \mathbf{w} - \mathbf{w}_a$ também está em W , e $\mathbf{w}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ é ortogonal a $\mathbf{w}_b$. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{w}^\perp\|^2 + \|\mathbf{w}_b\|^2 &= \|\mathbf{w}^\perp + \mathbf{w}_b\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_a\|^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \|\mathbf{w}^\perp\|^2 + \underbrace{\|\mathbf{w}_b\|^2}_{>0} = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_a\|^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \|\mathbf{w}^\perp\|^2 < \|\mathbf{w}^\perp\|^2 + \|\mathbf{w}_b\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_a\|^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \|\mathbf{w}^\perp\|^2 < \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_a\|^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 < \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_a\|^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \|\mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v})\|^2 < \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_a\|^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \|\mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v})\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_a\| \blacksquare
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que temos uma sequência finita de pontos não todos colineares quando tomados três a três do $\mathbb{R}^2$. Esses pontos definem o conjunto $Y = \{(x_{1_1}, x_{2_1}), \dots, (x_{1_t}, x_{2_t}), \dots, (x_{1_m}, x_{2_m})\} \subset \mathbb{R}^2$. Por não serem colineares, não existe uma reta r que contém todos esses pontos, mas podemos pensar em uma reta r que esteja “o mais próximo possível” de passar pelos pontos de Y . Segundo (Poole, 2009), para qualquer reta r ,

medimos a distância vertical de cada ponto dado até r , ou seja, consideramos que ε_t é a distância do ponto (x_{1_t}, x_{2_t}) , $t=1, \dots, m$, à reta r definida na direção x_2 . E então determinamos r que minimize o *erro total* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_m)^T$. A figura 2.14 apresenta a disposição desses pontos no plano cartesiano.

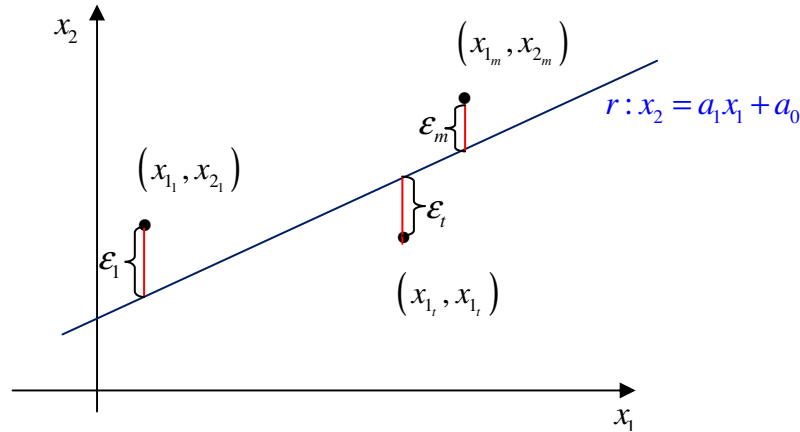


Figura 2.14: A reta r que está o mais próximo possível de passar pelos pontos de Y .

O objetivo é determinar r tal que ε seja o menor possível. A minimização do erro ε será feita na norma euclidiana, pois essa norma nos permite evitar o cálculo com módulos, o que ocorrem na $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$, e também porque a escolha da norma euclidiana possibilita resolver o problema através de uma função diferenciável, o que não ocorre para $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$, de acordo com o problema de minimização a seguir:

$$\begin{cases} \text{Min } \varepsilon^T \varepsilon \\ \varepsilon \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (2.72)$$

Segundo (Poole, 2009), o termo “quadrados mínimos” relaciona-se diretamente ao problema (2.72) pois: precisamos achar a menor soma de quadrados, definido pela expressão $\varepsilon^T \varepsilon = \|\varepsilon\|^2$. O número $\|\varepsilon\|^2$ é chamado de erro quadrático mínimo da aproximação, a reta r é

chamada de reta de quadrados mínimos (ou reta de melhor ajuste). Assim, se r é a reta de quadrados mínimos para os pontos de Y , temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 x_{1_1} + a_0 = x_{2_1} \\ \vdots \\ a_1 x_{1_i} + a_0 = x_{2_i} \\ \vdots \\ a_1 x_{1_m} + a_0 = x_{2_m} \end{cases};$$

ou, na forma matricial, temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{1_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1_i} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1_m} & 1 \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{m \times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{2_1} \\ \vdots \\ x_{2_i} \\ \vdots \\ x_{2_m} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}. \quad (2.73)$$

Assim, se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, temos, por analogia, que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e que $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Para a resolução do sistema (2.73), consideramos que A tem n colunas linearmente independentes, isto é, $\text{posto}(A) = n$ e que $m > n$. Portanto, a definição de reta de quadrados mínimos passa ser a de hiperplano de quadrados mínimos.

Desde que $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$, o problema (2.72) é redefinido de forma equivalente em (2.74) :

$$\begin{cases} \text{Min } G(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|^2 \\ \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.74)$$

O problema (2.74) é um problema de programação quadrática e $G(\mathbf{x})$ é uma função estritamente convexa. Assim, se $\mathbf{x}^*$ é um ponto de mínimo global para o problema (2.74) devemos ter que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*\|^2 &\leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*\| &\leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Notemos a semelhança das estruturas (2.75) e (2.71). Qualquer que seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, o vetor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, definido por $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, pertence ao espaço-coluna ou espaço-imagem de A (denotado por $\text{Im}(A)$). O conjunto $\text{Im}(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m; \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{y} = A\mathbf{x}\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^m$, ou seja, $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$. Segundo (Ruggiero, et al., 1996), resolver o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, implica em se obter os escalares $x_1, \dots, x_n$ que permitem escrever o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ como combinação linear das n colunas de A . Portanto, o problema (2.75) é reescrito por:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{y}^*\| \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\| \quad (2.76)$$

Então, a solução por quadrados mínimos para o problema (2.74) é encontrarmos um $\mathbf{y} \in \text{Im}(A)$ que esteja mais próximo de $\mathbf{b}$ de acordo com o problema (2.76). Pela proposição 2.27, o vetor $\mathbf{y}^*$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ em $\text{Im}(A)$, logo, temos:

$$A\mathbf{x}^* = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\mathbf{b}) \quad (2.77)$$

Desde que $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^*$, então devemos ter que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{b} - A\mathbf{x}^* \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{b} - \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\mathbf{b}) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*) \in (\text{Im}(A))^\perp; \end{aligned} \quad (2.78)$$

Como $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*)$ pertence ao complemento ortogonal de $\text{Im}(A)$, temos que $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*)$ é ortogonal a todos os n vetores colunas de A . Portanto, ao definirmos $A = (A_1, \dots, A_t, \dots, A_n)$, onde A_t é uma coluna de A , temos o sistema homogêneo (2.79):

$$\begin{cases} A_1^T \mathbf{x}^* = 0 \\ \vdots \\ A_l^T \mathbf{x}^* = 0; \\ \vdots \\ A_n^T \mathbf{x}^* = 0 \end{cases}$$

que é expresso em sua forma matricial por:

$$A^T \mathbf{x}^* = \mathbf{0}. \quad (2.79)$$

Ao compararmos (2.79) com (2.78) temos um importante resultado:

$$(\text{Im}(A))^\perp = \ker(A^T). \quad (2.80)$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} A^T \mathbf{x}^* = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A^T \mathbf{b} - A^T A\mathbf{x}^* = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A^T A\mathbf{x}^* = A^T \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

A matriz $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem a propriedade de ser simétrica, pois $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, bem como a de ser definida positiva, pois para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ temos: $\underbrace{\mathbf{x}^T A^T}_{\mathbf{y}^T \in \text{Im}(A)} \underbrace{A \mathbf{x}}_{\mathbf{y} \in \text{Im}(A)} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} > 0$. Como $\text{posto}(A) = n$, então $A^T A$ possui inversa e a solução

por quadrados mínimos é única e dada por:

$$\mathbf{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}. \quad (2.82)$$

Com as informações obtidas em (2.77) e em (2.82), enunciamos a proposição 2.28 a seguir, de acordo com (Poole, 2009), uma expressão para a projeção ortogonal de vetor sobre um subespaço:

Proposição 2.28: Sejam $\text{Im}(A)$ um subespaço de $\mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ cujas colunas formam uma base para $\text{Im}(A)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, então a projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ em $\text{Im}(A)$ é o vetor $\mathbf{y}^* = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\mathbf{b}) = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$. A transformação linear $P_{\text{Im}(A)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que projeta $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ em $\text{Im}(A)$ tem $A(A^T A)^{-1} A^T$ como sua matriz canônica.

Prova: Como o posto $(A) = n$ e $\text{Im}(A)$ é um subespaço do $\mathbb{R}^m$, temos uma única solução determinada por quadrados mínimos para o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dada por $\mathbf{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$. Da expressão (2.77),

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^* = A\mathbf{x}^* &= \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\mathbf{b}) = A \left((A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{y}^* = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\mathbf{b}). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Como a equação (2.83) é verdadeira para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, então a verificação de $P_{\text{Im}(A)} = A(A^T A)^{-1} A^T$ é imediata. ■

A matriz $P_{\text{Im}(A)}$ possui propriedades importantes tais como: de idempotência, de simetria e de ser definida positiva. Essas propriedades são apresentadas pela proposição a seguir:

Proposição 2.29: Sejam $\text{Im}(A)$ o subespaço do $\mathbb{R}^m$ definido por n colunas linearmente independentes de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $P_{\text{Im}(A)} = A(A^T A)^{-1} A^T$ a matriz que projeta um vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ em $\text{Im}(A)$. $P_{\text{Im}(A)}$ é: i) simétrica; ii) idempotente; iii) definida positiva.

Prova: i) Inicialmente mostramos que $P_{\text{Im}(A)}$ é simétrica, ou seja, $P_{\text{Im}(A)} = (P_{\text{Im}(A)})^T$.

Logo: $(P_{\text{Im}(A)})^T = (A(A^T A)^{-1} A^T)^T = (A^T)^T (A^T A)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = P_{\text{Im}(A)}.$

ii) Mostramos que $P_{\text{Im}(A)}$ é idempotente, isto é, $P_{\text{Im}(A)} = (P_{\text{Im}(A)})^2$. Logo:

$$\begin{aligned} (P_{\text{Im}(A)})^2 &= (A(A^T A)^{-1} A^T)(A(A^T A)^{-1} A^T) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (P_{\text{Im}(A)})^2 = A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T A(A^T A)^{-1} A^T}_{\text{Identidade}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (P_{\text{Im}(A)})^2 = A(A^T A)^{-1} A^T = P_{\text{Im}(A)}. \end{aligned}$$

iii) Mostramos que $P_{\text{Im}(A)}$ é definida positiva. Logo, para qualquer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, temos:

$$\mathbf{b}^T P_{\text{Im}(A)} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T (P_{\text{Im}(A)})^2 \mathbf{b} = \mathbf{b}^T P_{\text{Im}(A)} P_{\text{Im}(A)} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \underbrace{P_{\text{Im}(A)}}_{\mathbf{y}^T \in \text{Im}(A)}^T \underbrace{P_{\text{Im}(A)} \mathbf{b}}_{\mathbf{y} \in \text{Im}(A)} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} > 0.$$

Portanto, $P_{\text{Im}(A)}$ é idempotente, simétrica e definida positiva. ■

A seguir, enunciamos e provamos a proposição 2.30. Essa proposição apresenta uma matriz que projeta $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ em um único vetor $\mathbf{y}^\perp \in \ker(A^T)$.

Proposição 2.30: Sejam $\text{Im}(A)$ o subespaço do $\mathbb{R}^m$ definido pelas n colunas linearmente independentes de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Se $P_{\text{Im}(A)} = A(A^T A)^{-1} A^T$ a matriz que projeta um vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ em $\text{Im}(A)$, então: i) a matriz $P_{\ker(A^T)} = I_m - A(A^T A)^{-1} A^T$, em que I_m é a matriz identidade de ordem m , é a transformação

linear que projeta $\mathbf{b}$ em $\mathbf{y}^\perp \in \ker(A^T)$; ii) $P_{\ker(A^T)}$ é simétrica, idempotente e definida positiva.

Prova: Para provarmos a condição i), partimos da equação (2.78). Consideramos que $\mathbf{z} \in (\text{Im}(A))^\perp$, bem como, da equação (2.80), que $(\text{Im}(A))^\perp = \ker(A^T)$. Pela equação (2.70), temos uma matriz que projeta $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ em um único vetor $\mathbf{y}^\perp \in \ker(A^T)$, pois $\text{posto}(A) = n$. Assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^\perp &= \mathbf{b} - \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} - A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \underbrace{\left(I_m - A(A^T A)^{-1} A^T \right)}_{P_{\ker(A^T)}} \mathbf{b} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{y}^\perp = P_{\ker(A^T)} \mathbf{b}; \end{aligned} \quad (2.84)$$

portanto, $P_{\ker(A^T)} = I_m - A(A^T A)^{-1} A^T$ é a matriz que projeta $\mathbf{b}$ em $\mathbf{y}^\perp \in \ker(A^T)$.

A prova de ii) é feita a seguir:

ii₁) $P_{\ker(A^T)}$ é simétrica, se $P_{\ker(A^T)} = \left(P_{\ker(A^T)} \right)^T$. Logo:

$$\begin{aligned} \left(P_{\ker(A^T)} \right)^T &= \left(I_m - A(A^T A)^{-1} A^T \right)^T = I_m^T - (A^T)^T (A^T A)^{-1} A^T \Rightarrow \\ &= I_m - A(A^T A)^{-1} A^T = P_{\ker(A^T)}. \end{aligned} :$$

ii₂) $P_{\ker(A^T)}$ é idempotente se $P_{\ker(A^T)} = \left(P_{\ker(A^T)} \right)^2$. Assim:

$$\begin{aligned}
 \left(P_{\ker(A^T)} \right)^2 &= \left(I_m - A(A^T A)^{-1} A^T \right) \left(I_m - A(A^T A)^{-1} A^T \right) = \\
 &= I_m - A(A^T A)^{-1} A^T - A(A^T A)^{-1} A^T + A(A^T A)^{-1} A^T A(A^T A)^{-1} A^T = \\
 &= I_m - 2A(A^T A)^{-1} A^T + A(A^T A)^{-1} A^T = \\
 &= I_m - A(A^T A)^{-1} A^T = P_{\ker(A^T)}.
 \end{aligned}$$

ii_3) Mostramos que $P_{\ker(A^T)}$ é definida positiva. Logo, para qualquer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, temos:

$$\mathbf{b}^T P_{\ker(A^T)} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \left(P_{\ker(A^T)} \right)^2 \mathbf{b} = \mathbf{b}^T P_{\ker(A^T)} P_{\ker(A^T)} \mathbf{b} = \underbrace{\mathbf{b}^T P_{\ker(A^T)}^T}_{(\mathbf{y}^\perp)^T \in \ker(A^T)} \underbrace{P_{\ker(A^T)} \mathbf{b}}_{\mathbf{y}^\perp \in \ker(A^T)} = (\mathbf{y}^\perp)^T \mathbf{y}^\perp > 0.$$

Portanto, $P_{\ker(A^T)}$ é idempotente, simétrica e definida positiva. ■

A seguir, apresentamos o método de Levenberg-Marquardt. Os resultados apresentados nessa seção são utilizados no desenvolvimento e na interpretação do método proposto e são indispensáveis para a prova da proposição 2.31, a qual é importante não somente para o método de Levenberg-Marquardt, mas também para a técnica primal-dual de pontos interiores proposta neste trabalho.

2.9 O método de Gauss-Newton e o método de Levenberg-Marquardt.

Novamente, os problemas de quadrados mínimos têm como objetivo encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados tal que, a soma dos quadrados das distâncias (tomada ortogonalmente) entre o modelo (curva ajustada) e cada um dos pontos seja a menor possível. Essas diferenças entre a curva ajustada e cada um dos dados são denominadas por *resíduos*. Matematicamente, o modelo para o problema de quadrados mínimos é definido pela generalização apresentada em (2.85):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. ; \quad (2.85)$$

em que $m > n$, $\mathbf{g}$ é um funcional não-linear que admite derivadas parciais de primeira e de segunda ordem e que sejam contínuas em todo ponto $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$. O método de Gauss-Newton é um método Quase-Newton, que se baseia na aproximação para os valores da componente de $\mathbf{g}_t(\mathbf{x})$, $t = 1, \dots, m$ em uma vizinhança de $\mathbf{x}$.

Assim, utilizando o aproximante de Taylor de primeira ordem sobre o problema (2.85), temos:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x. \quad (2.86)$$

Ao substituírmos (2.86) na função objetivo do problema (2.85), temos:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x)^T \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x \right)^T \left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{g}(\mathbf{x})^T + \mathbf{d}_x^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \right) \left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x + \mathbf{d}_x^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}_x^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x + \frac{1}{2} \mathbf{d}_x^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ao diferenciarmos a expressão (2.87) e, sobre ela, aplicarmos a condição suficiente de otimalidade, pois o problema de quadrados mínimos é um problema convexo, isto é, $\nabla G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x &= -\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_x &= -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})\right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

Notemos a semelhança entre as equações (2.88) e (2.82). Como o posto $(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})) = n$, temos que as componentes de $\mathbf{d}_x$ nos permite escrever o vetor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ como combinação linear das n colunas de $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de maneira única. A matriz hessiana do método de Gauss-Newton $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica, pois:

$$(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))^T = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T (\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T)^T = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}); \text{ é definida positiva, pois para}$$

qualquer $\mathbf{d}_x \in X \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ temos:

$$\mathbf{d}_x^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x = \underbrace{\mathbf{d}_x^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T}_{\mathbf{y}^T} \underbrace{\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x}_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} > 0; \text{ e sua inversa existe pela hipótese de}$$

que $\text{posto}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})) = n$. Ao substituírmos (2.88) em (2.87), temos:

$$G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) = \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x}_I + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{d}_x^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x}_{II};$$

em I , utilizamos (2.88), portanto, temos:

$$\begin{aligned}
 I &= \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow I &= -\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \underbrace{\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T}_{P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow I &= -\mathbf{g}(\mathbf{x})^T P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x});
 \end{aligned}$$

em II , utilizamos (2.88), logo, temos:

$$\begin{aligned}
 H &= \mathbf{d}_x^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow H &= \left(\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow H &= \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow H &= \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right) \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow H &= \mathbf{g}(\mathbf{x})^T P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x});
 \end{aligned}$$

assim:

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) &= \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + (I) + \frac{1}{2} (H) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) &= \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})^T P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \quad (2.89) \\
 \Leftrightarrow G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})^T P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right).
 \end{aligned}$$

Com a expressão (2.89), verificamos se $\mathbf{d}_x$, de fato, é uma direção de descida para o problema (2.85). Para isso, a definição 2.9 deve ser satisfeita, isto é, que $G(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}_x) - G(\mathbf{x}) < 0$, para algum $0 < \alpha < \bar{\alpha}$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $\alpha = 1$, assim, a expressão $G(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}_x)$ é equivalente a (2.89). Logo, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.31: *Seja o problema de otimização não-linear definido em (2.85). Se*

$$\mathbf{d}_x = - \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ então } G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) < G(\mathbf{x}).$$

$$\textbf{Prova:} \quad \text{Como } G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})^T P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right) \quad \text{e} \quad P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \quad \text{é}$$

simétrica, definida positiva e idempotente, temos:

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) - G(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})^T P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right) - \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \\
 &= \cancel{\frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x})} - \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \cancel{\frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x})} = \\
 &= -\frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \left(P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \right)^T}_{\mathbf{y}^T} \underbrace{P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} \mathbf{g}(\mathbf{x})}_{\mathbf{y}} = \\
 &= -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2 < 0 \Rightarrow G(\mathbf{x} + \mathbf{d}_x) - G(\mathbf{x}) < 0.
 \end{aligned}$$

Portanto $\mathbf{d}_x$ é uma direção de descida para o problema (2.85) e, segundo a proposição 2.27, o vetor $\mathbf{y} = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_x = P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))} (-\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ é a melhor aproximação de $-\mathbf{g}(\mathbf{x})$ sobre $\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ ■

O método de Gauss-Newton é um método iterativo gera uma sequência de pontos $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \dots \in X \subset \mathbb{R}^n$ que, sob determinadas condições, converge para o ponto ótimo $\mathbf{x}^*$ quando $k \rightarrow \infty$. Sabemos que o problema definido pelo método de Gauss-Newton, apresentado em (2.87), possui sempre uma direção $\mathbf{d}_x^k$ tal que, pela proposição 2.31, $G(\mathbf{x}^{k+1}) < G(\mathbf{x}^k)$ é verdadeira. Porém, quando $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^*$ temos que $G(\mathbf{x}^k) \rightarrow G(\mathbf{x}^*)$ e a matriz $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ pode apresentar mau condicionamento, pois esta está próxima da singularidade, logo, isso pode inviabilizar a estabilidade numérica da matriz $\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \right)^{-1}$, causando, assim, problemas de convergência do método. Para contornar esse problema, o método de Levenberg-Marquardt propõe adicionar à matriz hessiana do método de Gauss-Newton a parcela $\beta_k I_n$, onde $\beta_k \in \mathbb{R}_+$ é denominado *parâmetro de damping* ou de *parâmetro de amortecimento* e I_n é a matriz identidade de ordem n . Com essa modificação, a direção $\mathbf{d}_x^k$ do método de Levenberg-Marquardt é definida por:

$$\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \beta_k I_n \right) \mathbf{d}_x^k = -\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^k). \quad (2.90)$$

A adição de $\beta_k I_n$ na matriz hessiana do método de Gauss-Newton, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})$, implica nas seguintes e interessantes consequências:

- i) Para todo $\beta_k > 0$, a matriz de coeficientes $\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \beta_k I_n \right)$ é definida positiva;
- ii) Se β_k é suficientemente pequeno, o que é bom quando $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^*$, o método de Levenberg-Marquardt possui convergência quadrática;
- iii) Para valores grandes de β_k , temos que $\mathbf{d}_x^k$ é um pequeno passo na direção de máxima descida;
- iv) $\beta_k I_n$ ajusta os autovalores da matriz $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$, transformando-a em não-singular, portanto, auxilia no controle da instabilidade numérica do método;
- v) O parâmetro β_k influencia tanto na direção quanto no tamanho do passo, assim, o procedimento de Levenberg-Marquardt não necessita de uma busca linear para descobrir o tamanho do passo a ser dado em cada direção de busca em uma iteração qualquer.

No próximo capítulo será apresentado o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada, estratégia de convergência global e ajuste cúbico. O método é primal-dual de ponto interior, porque o problema a ser definido é apresentado em sua forma primal e será transformado em um irrestrito equivalente, através da função lagrangiana aumentada interior barreira logarítmica modificada, a qual aborda os multiplicadores de Lagrange – variáveis duais; é previsor-corretor porque determinaremos o vetor de direções de busca em um procedimento previsor e este será corrigido posteriormente através de um procedimento corretor, assim, as soluções a cada iteração serão refinadas

devido a esses procedimentos; a estratégia de convergência global será aplicada em eventos onde a matriz hessiana do método não é definida positiva em uma iteração k convertendo-a em definida positiva por uma técnica variante do método de Levenberg-Marquardt; a estratégia de ajuste cúbico será útil em situações extremas em que o logaritmo não está definido para um ou mais componentes de $\mathbf{z}_1$ tais que não há elemento em $H \cup H_\mu$.

3 O MÉTODO PREVISOR-CORRETOR PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES, COM BARREIRA LOGARÍTMICA MODIFICADA, ESTRATÉGIAS DE CONVERGÊNCIA GLOBAL E DE AJUSTE CÚBICO.

Neste capítulo apresentamos um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada, com estratégias de convergência global e de ajuste cúbico (MPIBLMCG-EX), o qual é uma variante do método de pontos interiores apresentado inicialmente por (Karmarkar, 1984) previsor-corretor apresentado por (Mehrotra, 1992) e (Wu, et al., 1994) . Na definição do algoritmo proposto, a função barreira logarítmica modificada auxilia o método em sua inicialização com pontos $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ tais que o conjunto $H \cup H_\mu = \{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : (\mathbf{h}(\mathbf{x}) < \mathbf{0}) \text{ ou } (\mathbf{0} \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) < \boldsymbol{\mu})\}$ contenha elementos. Porém, a inviabilidade pode ocorrer em pontos $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\mathbf{x} \notin H \cup H_\mu$, consequentemente, implicando na não existência da função barreira logarítmica modificada. Para suprir essa dificuldade um ajuste cúbico ajustado ao logaritmo, que preserva as derivadas de primeira e segunda ordem em algum ponto do conjunto $H_\mu = \{\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) < \boldsymbol{\mu}\}$, é aplicado ao método; esse ajuste é uma variante do ajuste quadrático que pode ser encontrado em (Matioli, 2001) e em (Pereira, 2007). Diferentemente de (Wu, et al., 1994), no procedimento previsor são realizadas atualizações do parâmetro de barreira nos resíduos das restrições de complementaridade, considerando as aproximações de 1ª. ordem do sistema de direções de busca, enquanto que no procedimento corretor, incluímos os termos não-lineares dos resíduos citados, os quais foram desprezados no procedimento

previsor. Essa estratégia foi utilizada em (Souza, et al., 2010) para a resolução do problema de despacho econômico. Consideramos também a estratégia de convergência global para o método, a qual utiliza uma variante do método de Levenberg-Marquardt, apresentado em (Bazaraa, et al., 2006), para atualizar a matriz hessiana da função Lagrangiana, a qual é definida em (Benson, et al., 2000), caso esta não seja definida positiva. Neste caso, esta matriz é redefinida para restrições primais de igualdade, desigualdade e variáveis canalizadas relaxadas, incorporando variáveis duais e matrizes diagonais relativas às restrições de complementaridade.

3.1 O sistema de direções de busca do MPIBLM.

Nesta seção, apresentamos o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada (MPIBLM). Para a construção do método proposto, consideramos o seguinte modelo geral de otimização não-linear com restrições de igualdade, de desigualdades canalizadas e de variáveis canalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_1 \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{l}_1 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{l}_2 \end{array} \right. ; \quad (3.1)$$

em que: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ são funções de classe C^2 ;

$\mathbf{u}_1 = (u_{1_1}, \dots, u_{1_i}, \dots, u_{1_r})^T \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de termos independentes que limita $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ inferiormente

enquanto que o vetor de termos independentes $\mathbf{u}_2 = (u_{2_1}, \dots, u_{2_i}, \dots, u_{2_r})^T \in \mathbb{R}^r$ o limita

superiormente; $\mathbf{l}_1 = (l_{1_1}, \dots, l_{1_j}, \dots, l_{1_n})^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de termos independentes que limita $\mathbf{x}$

inferiormente enquanto que o vetor de termos independentes $\mathbf{l}_2 = (l_{2_1}, \dots, l_{2_j}, \dots, l_{2_n})^T \in \mathbb{R}^n$ o

limita superiormente. O problema (3.1) pode, assim, ser escrito:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{x} \leq \mathbf{l}_2 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Convertemos o problema (3.2) para a forma padrão utilizada neste texto de acordo com (2.1). Assim, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ -\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 \leq \mathbf{0} \\ -\mathbf{x} + \mathbf{l}_1 \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 \leq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Como pretendemos utilizar a função barreira modificada, temos os conjuntos de restrições de desigualdades definidos por: $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (-\mathbf{x} + \mathbf{l}_1 < \mathbf{0}) \text{ e } (\mathbf{x} - \mathbf{l}_2 < \mathbf{0})\}$ e $H = \{\mathbf{x} \in X : (-\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 < \mathbf{0}) \text{ e } (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 < \mathbf{0})\}$. Às restrições de desigualdade do problema (3.3), acrescentamos as variáveis de folga $\mathbf{z}_i > \mathbf{0}, i=1, \dots, 4$ para que essas restrições se tornem restrições de igualdade. Assim, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ - \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 + \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \\ - \mathbf{x} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{z}_3 = \mathbf{0}; \\ \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 + \mathbf{z}_4 = \mathbf{0} \\ - \mathbf{z}_1 < \mathbf{0} \\ - \mathbf{z}_2 < \mathbf{0} \\ - \mathbf{z}_3 < \mathbf{0} \\ - \mathbf{z}_4 < \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{z}_1 = (z_{1_1}, \dots, z_{1_i}, \dots, z_{1_r})^T \in \mathbb{R}_+^r$ e $\mathbf{z}_2 = (z_{2_1}, \dots, z_{2_i}, \dots, z_{2_r})^T \in \mathbb{R}_+^r$ e

$\mathbf{z}_3 = (z_{3_1}, \dots, z_{3_j}, \dots, z_{3_n})^T \in \mathbb{R}_+^n$ e $\mathbf{z}_4 = (z_{4_1}, \dots, z_{4_j}, \dots, z_{4_n})^T \in \mathbb{R}_+^n$. Sobre cada restrição de

desigualdade $(-\mathbf{z}_i < 0)$, $i=1, \dots, 4$, aplicamos uma relaxação finita dessas restrições,

conforme (2.51). Portanto, o problema perturbado é dado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ - \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 + \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \\ - \mathbf{x} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{z}_3 = \mathbf{0}. \\ \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 + \mathbf{z}_4 = \mathbf{0} \\ - \mathbf{z}_1 < \boldsymbol{\mu} \\ - \mathbf{z}_2 < \boldsymbol{\mu} \\ - \mathbf{z}_3 < \boldsymbol{\mu} \\ - \mathbf{z}_4 < \boldsymbol{\mu} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Em consequência, temos o conjunto

$$X \cup X_\mu = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \left\{ \begin{array}{l} (-\mathbf{x} + \mathbf{l}_1 < \mathbf{0}) \text{ ou } (0 \leq -\mathbf{x} + \mathbf{l}_1 < \boldsymbol{\mu}) \\ (\mathbf{x} - \mathbf{l}_2 < \mathbf{0}) \text{ ou } (0 \leq \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 < \boldsymbol{\mu}) \end{array} \right\} \right\}, \text{ que é uma expansão da região de}$$

viabilidade das variáveis canalizadas; e o conjunto

$$H \cup H_\mu = \left\{ \mathbf{x} \in X \cup X_\mu : \begin{cases} (-\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 < \mathbf{0}) \text{ ou } (0 \leq -\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 < \mu) \\ (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 < \mathbf{0}) \text{ ou } (0 \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 < \mu) \end{cases} \right\}, \text{ que é uma expansão da}$$

região de viabilidade das restrições de desigualdade canalizadas. Agora, penalizamos a função objetivo com a função barreira logarítmica modificada apresentada em (2.59). Assim, o problema (3.5) é convertido em um problema equivalente a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \\ f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^r \delta_{1_i} \ln(z_{1_i}^\diamond) - \mu \sum_{i=1}^r \delta_{2_i} \ln(z_{2_i}^\diamond) - \\ \quad - \mu \sum_{j=1}^n \delta_{3_j} \ln(z_{3_j}^\diamond) - \mu \sum_{j=1}^n \delta_{4_j} \ln(z_{4_j}^\diamond) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ - \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 + \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \\ - \mathbf{x} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 + \mathbf{z}_4 = \mathbf{0} \end{array} \right. ; \quad (3.6)$$

onde: $\mu \in \mathbb{R}_*^+$ é o parâmetro de barreira; $\delta_1 = (\delta_{1_1}, \dots, \delta_{1_r}, \dots, \delta_{1_r})^T \in \mathbb{R}_+^r$,

$\delta_2 = (\delta_{2_1}, \dots, \delta_{2_r}, \dots, \delta_{2_r})^T \in \mathbb{R}_+^r$, $\delta_3 = (\delta_{3_1}, \dots, \delta_{3_j}, \dots, \delta_{3_n})^T \in \mathbb{R}_+^n$ e $\delta_4 = (\delta_{4_1}, \dots, \delta_{4_j}, \dots, \delta_{4_n})^T \in \mathbb{R}_+^n$

são os vetores estimadores dos multiplicadores de Lagrange; $z_{1_i}^\diamond = \frac{\mu + z_{1_i}}{\mu}$, $z_{2_i}^\diamond = \frac{\mu + z_{2_i}}{\mu}$,

$z_{3_j}^\diamond = \frac{\mu + z_{3_j}}{\mu}$ e $z_{4_j}^\diamond = \frac{\mu + z_{4_j}}{\mu}$. Associamos ao problema (3.6), a função Lagrangiana

conforme (2.12), assim o problema de otimização não-linear apresentado em (3.1) é transformado em um problema de otimização não-linear irrestrito equivalente ao apresentado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } L(\omega) = f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^r \delta_{1_i} \ln(z_{1_i}^\diamond) - \mu \sum_{i=1}^r \delta_{2_i} \ln(z_{2_i}^\diamond) - \\ \quad - \mu \sum_{j=1}^n \delta_{3_j} \ln(z_{3_j}^\diamond) - \mu \sum_{j=1}^n \delta_{4_j} \ln(z_{4_j}^\diamond) + \sum_{t=1}^m \lambda_{0_t} g_t(\mathbf{x}) + \\ \quad + \sum_{i=1}^r \left[\lambda_{1_i} (-h_i(\mathbf{x}) + u_{1_i} + z_{1_i}) + \lambda_{2_i} (h_i(\mathbf{x}) - u_{2_i} + z_{2_i}) \right] + \\ \quad + \sum_{j=1}^n \left[\lambda_{3_j} (-x_j + l_{1_j} + z_{3_j}) + \lambda_{4_j} (x_j - l_{2_j} + z_{4_j}) \right] \end{array} \right. ; \quad (3.7)$$

onde: $\lambda_0 = (\lambda_{0_1}, \dots, \lambda_{0_r}, \dots, \lambda_{0_m})^T \in \mathbb{R}_{**}^m$ é o vetor de multiplicador de Lagrange referente às restrições originais de igualdade; $\lambda_1 = (\lambda_{1_1}, \dots, \lambda_{1_r}, \dots, \lambda_{1_r})^T \in \mathbb{R}_+^r$ e $\lambda_2 = (\lambda_{2_1}, \dots, \lambda_{2_r}, \dots, \lambda_{2_r})^T \in \mathbb{R}_+^r$ são os vetores de multiplicadores de Lagrange referentes às restrições funcionais canalizadas; $\lambda_3 = (\lambda_{3_1}, \dots, \lambda_{3_j}, \dots, \lambda_{3_n})^T \in \mathbb{R}_+^n$ e $\lambda_4 = (\lambda_{4_1}, \dots, \lambda_{4_j}, \dots, \lambda_{4_n})^T \in \mathbb{R}_+^n$ são os vetores de multiplicadores de Lagrange referente às variáveis canalizadas e $\omega = (\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T \in \mathbb{R}_*^{m+5n+4r}$ é o vetor de variáveis para o problema (3.7). Essa estratégia primal-dual pode ser encontrada em (Sousa, 2006).

Sobre a função (3.7), aplicamos a condição necessária de otimalidade, ou seja, $\nabla L(\omega) = \mathbf{0}$. Ao aplicarmos essa condição, geramos um sistema não-linear tal que nele são recuperadas as condições de viabilidade primal com a operação $\nabla_{\lambda} L = \frac{\partial L}{\partial \lambda}$, viabilidade dual com a operação $\nabla_{\mathbf{x}} L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$ e de folgas complementares com a operação $\nabla_{\mathbf{z}} L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}}$. Em outras palavras, aplicamos as condições necessárias de KKT. Estas equações são apresentadas em (3.8):

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla_{\mathbf{x}} L = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \lambda_0 + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T (\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_3 + \lambda_4 & = & \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_0} L = & \mathbf{g}(\mathbf{x}) & = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_1} L = & -\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 + \mathbf{z}_1 & = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_2} L = & \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 + \mathbf{z}_2 & = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_3} L = & -\mathbf{x} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{z}_3 & = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_4} L = & \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 + \mathbf{z}_4 & = \mathbf{0}; \\ \nabla_{z_1} L = & -\mu \bar{Z}_1^{-1} \delta_1 + \lambda_1 & = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_2} L = & -\mu \bar{Z}_2^{-1} \delta_2 + \lambda_2 & = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_3} L = & -\mu \bar{Z}_3^{-1} \delta_3 + \lambda_3 & = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_4} L = & -\mu \bar{Z}_4^{-1} \delta_4 + \lambda_4 & = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Z}_1^{-1} \text{ é diag } \left(\frac{1}{\mu + z_{1_1}}, \dots, \frac{1}{\mu + z_{1_i}}, \dots, \frac{1}{\mu + z_{1_r}} \right) \\ \bar{Z}_2^{-1} \text{ é diag } \left(\frac{1}{\mu + z_{2_1}}, \dots, \frac{1}{\mu + z_{2_i}}, \dots, \frac{1}{\mu + z_{2_r}} \right) \\ \bar{Z}_3^{-1} \text{ é diag } \left(\frac{1}{\mu + z_{3_1}}, \dots, \frac{1}{\mu + z_{3_j}}, \dots, \frac{1}{\mu + z_{3_n}} \right) \\ \bar{Z}_4^{-1} \text{ é diag } \left(\frac{1}{\mu + z_{4_1}}, \dots, \frac{1}{\mu + z_{4_j}}, \dots, \frac{1}{\mu + z_{4_n}} \right) \end{array} \right. ; \quad (3.9)$$

$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \in \mathbb{R}^{n \times r}$ são, respectivamente, as matrizes jacobianas dos funcionais $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

O produto $\bar{Z}_i \lambda_i$, $i = 1, \dots, 4$, pela dualidade forte apresentada pela proposição 2.22, nos fornece a condição de complementaridade entre as variáveis primais $\mathbf{z}_i$ e as duais λ_i . Assim, deixamos o conjunto de equações (3.8) na forma padrão a seguir:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} L = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \lambda_0 + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T (\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_3 + \lambda_4 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_0} L = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_1} L = -\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 + \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_2} L = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_3} L = -\mathbf{x} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_4} L = \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 + \mathbf{z}_4 = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_1} L = \bar{Z}_1 \lambda_1 - \mu \delta_1 = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_2} L = \bar{Z}_2 \lambda_2 - \mu \delta_2 = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_3} L = \bar{Z}_3 \lambda_3 - \mu \delta_3 = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_4} L = \bar{Z}_4 \lambda_4 - \mu \delta_4 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.10)$$

De acordo com (Luenberger, et al., 2008), para a função barreira, a parcela $\mu \delta_i$, $i = 1, \dots, 4$, associa o método de pontos interiores barreira modificada a um método de trajetória central, isto é, se no decorrer do processo iterativo um ponto se aproxima da fronteira, o método *empurra* esse ponto para o interior da região viável afim de que ele não saia dele. Mais à frente, determinaremos o vetor, o qual será definido por *vetor força de centragem modificado*. Cada equação do sistema não-linear (3.10), linearizamos por um aproximante de Taylor de primeira ordem, assim, determinamos o vetor incógnita de direções de busca $\mathbf{d}_{\omega} = (\mathbf{d}_{\mathbf{x}}, \mathbf{d}_{z_i}, \mathbf{d}_{\lambda_0}, \mathbf{d}_{\lambda_i})^T$, $i = 1, \dots, 4$. O MPIBLM é um método iterativo que gera uma sequência de pontos $\omega^1, \dots, \omega^k, \omega^{k+1}, \dots \in \mathbb{R}_*^{m+5n+4r}$, a partir de um ponto inicial ω^0 que, sob determinadas condições a serem discutidas neste capítulo, converge para o ponto ótimo ω^* do problema quando $k \rightarrow \infty$. Numa iteração k , consideramos o vetor $\omega^k = (\mathbf{x}^k, \mathbf{z}_i^k, \lambda_0^k, \lambda_i^k)^T$ pré-determinado, determinamos uma direção de busca $\mathbf{d}_{\omega}^k = (\mathbf{d}_{\mathbf{x}}^k, \mathbf{d}_{z_i}^k, \mathbf{d}_{\lambda_0}^k, \mathbf{d}_{\lambda_i}^k)^T$, $i = 1, \dots, 4$ e o comprimento do passo dado nessa direção para determinar um novo ponto $\omega^{k+1} = (\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}_i^{k+1}, \lambda_0^{k+1}, \lambda_i^{k+1})^T$.

Começamos pela equação $\nabla_{\mathbf{x}} L = \mathbf{0}$, a qual é apresentada por:

$$\underbrace{\nabla f(\mathbf{x}^{k+1})}_I + \underbrace{\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})^T \boldsymbol{\lambda}_0^{k+1}}_{II} + \underbrace{\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})^T (\boldsymbol{\lambda}_2^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_1^{k+1})}_{III} - \underbrace{\boldsymbol{\lambda}_3^{k+1} + \boldsymbol{\lambda}_4^{k+1}}_{IV} = \mathbf{0};$$

Em que as parcelas I , II , III e IV são explicitadas a seguir:

$$I = \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k \Leftrightarrow I = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k;$$

$$\begin{aligned} II &= \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})^T \boldsymbol{\lambda}_0^{k+1} = \sum_{t=1}^m \left[(\boldsymbol{\lambda}_0^{k+1})_t \nabla g_t(\mathbf{x}^{k+1}) \right] = \\ &= \sum_{t=1}^m \left[(\boldsymbol{\lambda}_0^k)_t + (d_{\lambda_0}^k)_t \right] \left[\nabla g_t(\mathbf{x}^k) + \nabla^2 g_t(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) \right] = \\ &= \sum_{t=1}^m \left[(\boldsymbol{\lambda}_0^k)_t \nabla g_t(\mathbf{x}^k) + (\boldsymbol{\lambda}_0^k)_t \nabla^2 g_t(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) + (d_{\lambda_0}^k)_t \nabla g_t(\mathbf{x}^k) + (d_{\lambda_0}^k)_t \nabla^2 g_t(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) \right] = (3.11) \\ &= \sum_{t=1}^m \left[\cancel{(d_{\lambda_0}^k)_t \nabla^2 g_t(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k)} + (\boldsymbol{\lambda}_0^k)_t \nabla^2 g_t(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) \right] + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow II = \sum_{t=1}^m \left[(\boldsymbol{\lambda}_0^k)_t \nabla^2 g_t(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) \right] + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} III &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})^T (\boldsymbol{\lambda}_2^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_1^{k+1}) = \sum_{i=1}^r \left[(\boldsymbol{\lambda}_2^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_1^{k+1})_i \nabla h_i(\mathbf{x}^{k+1}) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^r \left[(\boldsymbol{\lambda}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k)_i + (d_{\lambda_2}^k - d_{\lambda_1}^k)_i \right] \left[\nabla h_i(\mathbf{x}^k) + \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^r \left[(\boldsymbol{\lambda}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k)_i \nabla h_i(\mathbf{x}^k) + (\boldsymbol{\lambda}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k)_i \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) + (d_{\lambda_2}^k - d_{\lambda_1}^k)_i \nabla h_i(\mathbf{x}^k) + (d_{\lambda_2}^k - d_{\lambda_1}^k)_i \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) \right] = (3.12) \\ &= \sum_{i=1}^r \left[\cancel{(d_{\lambda_2}^k - d_{\lambda_1}^k)_i \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k)} + (\boldsymbol{\lambda}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k)_i \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) \right] + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{d}_{\lambda_2}^k - \mathbf{d}_{\lambda_1}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\boldsymbol{\lambda}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow III = \sum_{i=1}^r \left[(\boldsymbol{\lambda}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k)_i \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k) (\mathbf{d}_x^k) \right] + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{d}_{\lambda_2}^k - \mathbf{d}_{\lambda_1}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\boldsymbol{\lambda}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k); \end{aligned}$$

$$IV = -\boldsymbol{\lambda}_3^{k+1} + \boldsymbol{\lambda}_4^{k+1} = -\boldsymbol{\lambda}_3^k + \boldsymbol{\lambda}_4^k - \mathbf{d}_{\lambda_3}^k + \mathbf{d}_{\lambda_4}^k \Leftrightarrow IV = -\boldsymbol{\lambda}_3^k + \boldsymbol{\lambda}_4^k - \mathbf{d}_{\lambda_3}^k + \mathbf{d}_{\lambda_4}^k.$$

assim, adicionando-se $I + II + III + IV = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^2 f(\mathbf{x}^k) + \sum_{t=1}^m \left[(\lambda_0^k)_t \nabla^2 g_t(x^k) \right] + \sum_{i=1}^r \left[(\lambda_2^k - \lambda_1^k)_i \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k) \right] \right) (\mathbf{d}_x^k) + \\ & + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{d}_{\lambda_2}^k - \mathbf{d}_{\lambda_1}^k) - \mathbf{d}_{\lambda_3}^k + \mathbf{d}_{\lambda_4}^k = \mathbf{m}^k; \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que o resíduo da viabilidade dual, definida por $\mathbf{m}^k$, é dado por:

$$\mathbf{m}^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\lambda_2^k - \lambda_1^k) + \lambda_3^k - \lambda_4^k. \quad (3.14)$$

Continuamos a análise do sistema de equações $\nabla_{\omega} L = \mathbf{0}$ para as demais variáveis

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, e λ_4 ; temos as seguintes equações a serem analisadas:

$$\nabla_{\lambda_0} L = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k); \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_1} L = \mathbf{0} & \Leftrightarrow -\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1}) + \mathbf{u}_1 + \mathbf{z}_1^{k+1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{z}_1^k + \mathbf{d}_{z_1}^k + \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_1}^k = \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_1^k - \mathbf{u}_1; \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_2} L = \mathbf{0} & \Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1}) - \mathbf{u}_2 + \mathbf{z}_2^{k+1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{z}_2^k + \mathbf{d}_{z_2}^k - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_2}^k = -\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_2^k + \mathbf{u}_2; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_3} L = \mathbf{0} & \Leftrightarrow -\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{z}_3^{k+1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\mathbf{x}^k - \mathbf{d}_x^k + \mathbf{z}_3^k + \mathbf{d}_{z_3}^k + \mathbf{l}_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_3}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{z}_3^k - \mathbf{l}_1; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_4} L = \mathbf{0} & \Leftrightarrow \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{l}_2 + \mathbf{z}_4^{k+1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mathbf{x}^k + \mathbf{d}_x^k + \mathbf{z}_4^k + \mathbf{d}_{z_4}^k - \mathbf{l}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_4}^k = -\mathbf{x}^k - \mathbf{z}_4^k + \mathbf{l}_2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Note que as equações (3.15) a (3.19) geraram resíduos de viabilidade primal os quais estão do lado direito de sua respectiva equação. Para simplificação de notação, definimos esses resíduos de forma compacta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0^k &= -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k); \\ \mathbf{t}_1^k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_1^k - \mathbf{u}_1; \\ \mathbf{t}_2^k &= -\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_2^k + \mathbf{u}_2; \\ \mathbf{t}_3^k &= \mathbf{x}^k - \mathbf{z}_3^k - \mathbf{l}_1; \\ \mathbf{t}_4^k &= -\mathbf{x}^k - \mathbf{z}_4^k + \mathbf{l}_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Em relação à análise das equações $\nabla_{\mathbf{z}_i} L = \mathbf{0}, i=1, \dots, 4$, devido à similaridade das equações de complementaridade, mostramos o procedimento apenas sobre a equação $\nabla_{\mathbf{z}_1} L = \mathbf{0}$. Porque o procedimento para as demais equações de complementaridade são análogos. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{z}_1} L = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \bar{Z}_{1_{k+1}} \lambda_1^{k+1} - \mu \delta_1^k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \left[(\mu_k + z_{1_i}^{k+1}) (\lambda_{1_i}^{k+1}) - \mu_k \delta_{1_i}^k \right] = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \left[(\mu_k + z_{1_i}^k + d_{z_{1_i}}^k) (\lambda_{1_i}^k + d_{\lambda_{1_i}}^k) - \mu_k \delta_{1_i}^k \right] = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \left[(\mu_k \lambda_{1_i}^k + z_{1_i}^k \lambda_{1_i}^k + d_{z_{1_i}}^k \lambda_{1_i}^k + \mu_k d_{\lambda_{1_i}}^k + z_{1_i}^k d_{\lambda_{1_i}}^k + d_{z_{1_i}}^k d_{\lambda_{1_i}}^k) - \mu_k \delta_{1_i}^k \right] = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \left[(\mu_k + z_{1_i}^k) \lambda_{1_i}^k + (\mu_k + z_{1_i}^k) d_{\lambda_{1_i}}^k + \lambda_{1_i}^k d_{z_{1_i}}^k + (d_{z_{1_i}}^k d_{\lambda_{1_i}}^k) - \mu_k \delta_{1_i}^k \right] = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{Z}_{1_k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k + \Lambda_{1_k} \mathbf{d}_{z_1}^k = -\bar{Z}_{1_k} \lambda_1^k + \mu_k \delta_1^k - D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Então, os dos aproximantes de Taylor para $\nabla_{\mathbf{z}_2} L = \mathbf{0}$, $\nabla_{\mathbf{z}_3} L = \mathbf{0}$ e $\nabla_{\mathbf{z}_4} L = \mathbf{0}$ são dados por:

$$\nabla_{z_2} L = \mathbf{0} \Leftrightarrow \bar{Z}_{2_k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k + \Lambda_{2_k} \mathbf{d}_{z_2}^k = -\bar{Z}_{2_k} \lambda_2^k + \mu_k \delta_2^k - D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k; \quad (3.22)$$

$$\nabla_{z_3} L = \mathbf{0} \Leftrightarrow \bar{Z}_{3_k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k + \Lambda_{3_k} \mathbf{d}_{z_3}^k = -\bar{Z}_{3_k} \lambda_3^k + \mu_k \delta_3^k - D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k; \quad (3.23)$$

$$\nabla_{z_4} L = \mathbf{0} \Leftrightarrow \bar{Z}_{4_k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k + \Lambda_{4_k} \mathbf{d}_{z_4}^k = -\bar{Z}_{4_k} \lambda_4^k + \mu_k \delta_4^k - D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k; \quad (3.24)$$

em que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Lambda_{1_k} \text{ é } diag(\lambda_{1_1}^k, \dots, \lambda_{1_r}^k) & D_{z_1^k} \text{ é } diag(d_{z_{1_1}}^k, \dots, d_{z_{1_r}}^k) \\ \Lambda_{2_k} \text{ é } diag(\lambda_{2_1}^k, \dots, \lambda_{2_r}^k) & D_{z_2^k} \text{ é } diag(d_{z_{2_1}}^k, \dots, d_{z_{2_r}}^k) \\ \Lambda_{3_k} \text{ é } diag(\lambda_{3_1}^k, \dots, \lambda_{3_n}^k) & D_{z_3^k} \text{ é } diag(d_{z_{3_1}}^k, \dots, d_{z_{3_n}}^k) \\ \Lambda_{4_k} \text{ é } diag(\lambda_{4_1}^k, \dots, \lambda_{4_n}^k) & D_{z_4^k} \text{ é } diag(d_{z_{4_1}}^k, \dots, d_{z_{4_n}}^k). \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Assim, como a equação (3.13) gerou os resíduos de viabilidade dual, as equações (3.15) a (3.19) geraram resíduos de viabilidade primal, as equações (3.21) a (3.24) também geraram resíduos os quais estão do lado direito de sua respectiva equação. Por simplificação de notação, esses resíduos serão definidos de forma compacta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \pi_1^k &= -\bar{Z}_{1_k} \lambda_1^k + \mu_k \delta_1^k - D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k; \\ \pi_2^k &= -\bar{Z}_{2_k} \lambda_2^k + \mu_k \delta_2^k - D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k; \\ \pi_3^k &= -\bar{Z}_{3_k} \lambda_3^k + \mu_k \delta_3^k - D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k; \\ \pi_4^k &= -\bar{Z}_{4_k} \lambda_4^k + \mu_k \delta_4^k - D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k. \end{aligned} \quad (3.26)$$

As equações (3.13), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.21), (3.22), (3.23) e (3.24) podem ser compactadas em um único sistema linear na variável $\mathbf{d}_{\omega}^k$. Esse sistema é apresentado a seguir:

$$A_k \mathbf{d}_{\omega}^k = \mathbf{b}^k \quad (3.27)$$

em que:

$$A_k = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T & -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T & \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T & -I_n & I_n \\ \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) & 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{1_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{1_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{2_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{2_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{3_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{3_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{4_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{4_k} \end{pmatrix};$$

em que: $K = \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^m [\lambda_{0_i}^k \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^k)] + \sum_{i=1}^r [(\lambda_{2_i}^k - \lambda_{1_i}^k) \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k)]$, I_n é a matriz

identidade de ordem n e I_r é a matriz identidade de ordem r ;

$$\mathbf{d}_\omega^k = (\mathbf{d}_x^k, \mathbf{d}_{z_1}^k, \mathbf{d}_{z_2}^k, \mathbf{d}_{z_3}^k, \mathbf{d}_{z_4}^k, \mathbf{d}_{\lambda_0}^k, \mathbf{d}_{\lambda_1}^k, \mathbf{d}_{\lambda_2}^k, \mathbf{d}_{\lambda_3}^k, \mathbf{d}_{\lambda_4}^k)^T \text{ e}$$

$$\mathbf{b}^k = (\mathbf{m}^k, \mathbf{t}_0^k, \mathbf{t}_1^k, \mathbf{t}_2^k, \mathbf{t}_3^k, \mathbf{t}_4^k, \boldsymbol{\pi}_1^k, \boldsymbol{\pi}_2^k, \boldsymbol{\pi}_3^k, \boldsymbol{\pi}_4^k)^T.$$

Notemos que a matriz dos coeficientes A_k é esparsa, isto é, há muitas sub-matrizes nulas em sua composição. A esparsidade pode causar problemas computacionais se essa não for explorada na execução do método. Um desses problemas é a necessidade de mais memória do computador apenas para guardar essas sub-matrizes, que possibilitam a ocorrência de erros numéricos nas operações aritméticas realizadas. Neste trabalho, tratamos a esparsidade da matriz A_k . Esse tratamento consiste na resolução do sistema (3.27) através dos cálculos algébricos apresentados a seguir, isto é, explicitamos com equações cada componente do vetor $\mathbf{d}_\omega^k$. Na próxima seção, apresentaremos o procedimento predictor o qual é uma variante do método predictor-corretor de (Wu, et al., 1994) e (Mehrotra, 1992).

3.2 O procedimento previsor do MPIBLM.

Observemos que, nos resíduos relativos à condição de complementaridade, temos os fatores não-lineares do tipo $D_{z_i^k} \mathbf{d}_{\lambda i}^k, i = 1, \dots, 4$. Como não conhecemos quem são essas direções *a priori*, então, para definir o procedimento previsor, esses fatores são desconsiderados, ou seja:

$$D_{z_i^k} \mathbf{d}_{\lambda i}^k = \mathbf{0}, i = 1, \dots, 4. \quad (3.28)$$

O sistema (3.27) será resolvido explorando-se a sua esparsidade, analogamente à resolução proposta em (Wu, et al., 1994), mas, diferentemente deste, utilizamos uma estratégia proposta em (Souza, et al., 2010), o qual usa as atualizações do parâmetro de barreira nos resíduos das restrições de complementaridade.

3.2.1 O cálculo das direções de folga $\mathbf{d}_{z_1}^k, i = 1, \dots, 4$.

Para o cálculo da direção $\mathbf{d}_{z_1}^k$, partimos da equação (3.16):

$$\begin{aligned} -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_1}^k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_1^k - \mathbf{u}_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_1}^k &= \mathbf{t}_1^k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{d}_{z_1}^k &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_1^k. \end{aligned} \quad (3.29)$$

O cálculo da direção $\mathbf{d}_{z_2}^k$, será feito a partir da equação (3.17):

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_2}^k &= -\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_2^k + \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_2}^k &= \mathbf{t}_2^k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{d}_{z_2}^k &= -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_2^k. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Da equação (3.18), calculamos a direção $\mathbf{d}_{z_3}^k$:

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_3}^k &= \mathbf{x}^k - \mathbf{z}_3^k - \mathbf{l}_1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_3}^k &= \mathbf{t}_3^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{z_3}^k &= \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_3^k.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Para o cálculo da direção $\mathbf{d}_{z_4}^k$, utilizamos a equação (3.19):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_4}^k &= -\mathbf{x}^k - \mathbf{z}_4^k + \mathbf{l}_2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_x^k + \mathbf{d}_{z_4}^k &= \mathbf{t}_4^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{z_4}^k &= -\mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_4^k.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Com a determinação das direções $\mathbf{d}_{z_i}^k, i=1,...,4$, agora é possível, através das condições de complementaridade, determinar as direções duais referente às restrições de desigualdade e variáveis canalizadas do problema (3.1).

3.2.2 O cálculo das direções duais $\mathbf{d}_{\lambda_1}^k, \mathbf{d}_{\lambda_2}^k, \mathbf{d}_{\lambda_3}^k$ e $\mathbf{d}_{\lambda_4}^k$.

Desde que $D_{z_i^k} \mathbf{d}_{\lambda_i}^k = \mathbf{0}$ e que as direções de folga $\mathbf{d}_{z_i}^k, i=1,...,4$, foram calculadas anteriormente em função da direção $\mathbf{d}_x^k$, então podemos determinar as direções duais $\mathbf{d}_{\lambda_1}^k, \mathbf{d}_{\lambda_2}^k, \mathbf{d}_{\lambda_3}^k$ e $\mathbf{d}_{\lambda_4}^k$ através das equações de complementaridade. Para o cálculo da direção $\mathbf{d}_{\lambda_1}^k$, partirmos da equação (3.21):

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{l_k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k + \Lambda_{l_k} \mathbf{d}_{z_1}^k &= -\bar{Z}_{l_k} \lambda_1^k + \mu_k \delta_1^k - D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \bar{Z}_{l_k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k &= -\Lambda_{l_k} \mathbf{d}_{z_1}^k - \bar{Z}_{l_k} \lambda_1^k + \mu_k \delta_1^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_1}^k &= -\bar{Z}_{l_k}^{-1} \Lambda_{l_k} \mathbf{d}_{z_1}^k - \lambda_1^k + \mu_k \bar{Z}_{l_k}^{-1} \delta_1^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_1}^k &= -\bar{Z}_{l_k}^{-1} \Lambda_{l_k} \left(\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_1^k \right) - \lambda_1^k + \mu_k \bar{Z}_{l_k}^{-1} \delta_1^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_1}^k &= -\bar{Z}_{l_k}^{-1} \Lambda_{l_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k - \bar{Z}_{l_k}^{-1} \Lambda_{l_k} \mathbf{t}_1^k - \lambda_1^k + \mu_k \bar{Z}_{l_k}^{-1} \delta_1^k.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Para o cálculo da direção $\mathbf{d}_{\lambda_2}^k$, utilizamos a equação (3.22):

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{2_k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k + \Lambda_{2_k} \mathbf{d}_{z_2}^k &= -\bar{Z}_{2_k} \lambda_2^k + \mu_k \delta_2^k - \cancel{D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \bar{Z}_{2_k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k &= -\Lambda_{2_k} \mathbf{d}_{z_2}^k - \bar{Z}_{2_k} \lambda_2^k + \mu_k \delta_2^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_2}^k &= -\bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{d}_{z_2}^k - \lambda_2^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_2}^k &= -\bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \left(-\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_2^k \right) - \lambda_2^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_2}^k &= \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k - \lambda_2^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

O cálculo da direção $\mathbf{d}_{\lambda_3}^k$, é feito partindo-se da equação (3.23):

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{3_k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k + \Lambda_{3_k} \mathbf{d}_{z_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k} \lambda_3^k + \mu_k \delta_3^k - \cancel{D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \bar{Z}_{3_k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k &= -\Lambda_{3_k} \mathbf{d}_{z_3}^k - \bar{Z}_{3_k} \lambda_3^k + \mu_k \delta_3^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{d}_{z_3}^k - \lambda_3^k + \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \left(\mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_3^k \right) - \lambda_3^k + \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{d}_x^k - \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k - \lambda_3^k + \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

A direção $\mathbf{d}_{\lambda_4}^k$, é feita a partir da equação (3.24):

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{4_k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k + \Lambda_{4_k} \mathbf{d}_{z_4}^k &= -\bar{Z}_{4_k} \lambda_4^k + \mu_k \delta_4^k - \cancel{D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \bar{Z}_{4_k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k &= -\Lambda_{4_k} \mathbf{d}_{z_4}^k - \bar{Z}_{4_k} \lambda_4^k + \mu_k \delta_4^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_4}^k &= -\bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{d}_{z_4}^k - \lambda_4^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_4}^k &= -\bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \left(-\mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_4^k \right) - \lambda_4^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_4}^k &= \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{d}_x^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k - \lambda_4^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Na próxima seção calcularemos o vetor de direções duais $\mathbf{d}_{\lambda_0}^k$ e, com esse vetor, determinaremos o vetor de direções primais $\mathbf{d}_x^k$.

3.2.3 O vetor de direções duais $\mathbf{d}_{\lambda_0}^k$ e o vetor de direções primais $\mathbf{d}_x^k$.

Até aqui, desenvolvemos as equações que definem as direções relacionadas às variáveis de folga $\mathbf{z}_i$ e as direções relativas às variáveis duais λ_i , $i = 1, \dots, 4$, correspondentes

às restrições de desigualdade do problema (3.1) e observamos que todas elas dependem da direção $\mathbf{d}_x^k$. Para determinarmos essa direção, consideramos a equação (3.13) e sobre ela efetuamos os cálculos algébricos convenientes, através de:

$$K(\mathbf{d}_x^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k + \underbrace{\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{d}_{\lambda_2}^k - \mathbf{d}_{\lambda_1}^k)}_I \underbrace{- \mathbf{d}_{\lambda_3}^k + \mathbf{d}_{\lambda_4}^k}_{II} = \mathbf{m}^k.$$

$III = I + II$

Em I , temos:

$$\begin{aligned} I &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{d}_{\lambda_2}^k - \mathbf{d}_{\lambda_1}^k) = \\ &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k - \lambda_2^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k - \mathbf{d}_{\lambda_1}^k \right) = \\ &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k - \underbrace{\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_2^k + \mu_k \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k}_{\mathbf{p}_1^k} - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_1}^k = \\ &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{p}_1^k - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(-\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k - \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k - \lambda_1^k + \mu_k \bar{Z}_{1_k}^{-1} \delta_1^k \right) = \\ &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{p}_1^k + \\ &+ \underbrace{\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_1^k - \mu_k \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} \delta_1^k}_{\mathbf{p}_2^k} = \\ &\Leftrightarrow I = \left(\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \right) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{p}_1^k + \mathbf{p}_2^k. \end{aligned}$$

Em II , temos:

$$\begin{aligned} II &= -\mathbf{d}_{\lambda_3}^k + \mathbf{d}_{\lambda_4}^k = \\ &= -\left(-\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{d}_x^k - \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k - \lambda_3^k + \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k \right) + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{d}_x^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k - \lambda_4^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k = \\ &= \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{d}_x^k + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k + \lambda_3^k - \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{d}_x^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k - \lambda_4^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k = \\ &= \left(\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \right) \mathbf{d}_x^k + \underbrace{\lambda_3^k - \lambda_4^k + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k + \mu_k \left(-\bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k \right)}_{\mathbf{p}_3^k} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow II = \left(\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \right) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{p}_3^k. \end{aligned}$$

Em III , temos:

$$\begin{aligned}
 III &= I + II = \\
 &= \left(\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \right) \mathbf{d}_x^k + \underbrace{\mathbf{p}_1^k + \mathbf{p}_2^k + \mathbf{p}_3^k}_{\mathbf{p}^k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow III = \left(\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \right) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \right) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{p}^k.
 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte expressão matemática devidamente reorganizada para a equação (3.13):

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\left(\mathbf{K} + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \right) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \right) \mathbf{d}_x^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k + \mathbf{p}^k}_{\theta_k} = \mathbf{m}^k \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \theta_k \mathbf{d}_x^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k = \mathbf{m}^k - \mathbf{p}^k.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Calculemos primeiramente a componente vetorial $(\mathbf{m}^k - \mathbf{p}^k) \in \mathbb{R}^n$.

Desde que:

$$\begin{cases}
 \mathbf{m}^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\lambda_2^k - \lambda_1^k) + \lambda_3^k - \lambda_4^k \\
 \mathbf{p}^k = -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\lambda_2^k - \lambda_1^k) + \lambda_3^k - \lambda_4^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k \right) + \\
 + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k + \mu_k \left(\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(-\bar{Z}_{1_k}^{-1} \delta_1^k + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k \right) - \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k \right);
 \end{cases}$$

então, subtraindo-se $\mathbf{p}^k$ de $\mathbf{m}^k$ resulta em:

$$\mathbf{m}^k - \mathbf{p}^k = -\left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k \right); \tag{3.38}$$

em que:

$$\mathbf{c}^k = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k \right) + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k; \tag{3.39}$$

e

$$\boldsymbol{\varphi}^k = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(-\bar{Z}_{1_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_1^k + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_2^k \right) - \bar{Z}_{3_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_3^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_4^k; \quad (3.40)$$

é denominado *vetor força de centragem modificado*, o qual é responsável por afastar uma solução da iteração k da fronteira da região de viabilidade relaxada e o parâmetro de barreira μ_k controla o tamanho do passo desse vetor.

Assim, a equação (3.37) é reformulada a seguir:

$$\theta_k \mathbf{d}_x^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k = - \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \right). \quad (3.41)$$

O sistema (3.27) reduz-se ao sistema definido a seguir:

$$\begin{pmatrix} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T & \theta_k \\ 0 & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{\lambda_0}^k \\ \mathbf{d}_x^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \\ -\mathbf{t}_0^k \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \theta_k \mathbf{d}_x^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \mathbf{c}^k - \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \mathbf{c}^k - \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k - \theta_k \mathbf{d}_x^k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= - \left(\theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k \right) + \mathbf{d}_x^k \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= - \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \right) + \underbrace{\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k}_{\mathbf{t}_0^k} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= - \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \right) + \mathbf{t}_0^k \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= - \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right) \boldsymbol{\lambda}_0^k - \\ &\quad - \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k \right) + \mathbf{t}_0^k \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= - \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k \right) + \mathbf{t}_0^k \right) - \boldsymbol{\lambda}_0^k. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Com a direção $\mathbf{d}_{\lambda_0}^k$ calculada, a direção $\mathbf{d}_x^k$ é calculada imediatamente pela equação

(3.41) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \theta_k \mathbf{d}_x^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= -\left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \theta_k \mathbf{d}_x^k &= -\left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{d}_x^k &= -\theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k \right).
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Assim, o vetor $\mathbf{d}_o^k = (\mathbf{d}_x^k, \mathbf{d}_{z_1}^k, \mathbf{d}_{z_2}^k, \mathbf{d}_{z_3}^k, \mathbf{d}_{z_4}^k, \mathbf{d}_{\lambda_0}^k, \mathbf{d}_{\lambda_1}^k, \mathbf{d}_{\lambda_2}^k, \mathbf{d}_{\lambda_3}^k, \mathbf{d}_{\lambda_4}^k)^T$ do procedimento predictor foi calculado de forma explícita e eficiente, levando-se em consideração a esparsidade da matriz A_k . Apresentamos a seguir o quadro de direções primais e duais do procedimento predictor do método primal-dual barreira logarítmica modificada:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k \right) + \mathbf{t}_0^k \right) - \boldsymbol{\lambda}_0^k; \\
 \mathbf{d}_x^k &= -\theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k \right); \\
 \mathbf{d}_{z_1}^k &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_1^k; \\
 \mathbf{d}_{z_2}^k &= -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_2^k; \\
 \mathbf{d}_{z_3}^k &= \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_3^k; \\
 \mathbf{d}_{z_4}^k &= -\mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_4^k; \\
 \mathbf{d}_{\lambda_1}^k &= -\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{d}_{z_1}^k + \mu_k \bar{Z}_{1_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_1^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k; \\
 \mathbf{d}_{\lambda_2}^k &= -\bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{d}_{z_2}^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_2^k; \\
 \mathbf{d}_{\lambda_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{d}_{z_3}^k + \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_3^k - \boldsymbol{\lambda}_3^k; \\
 \mathbf{d}_{\lambda_4}^k &= -\bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{d}_{z_4}^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_4^k - \boldsymbol{\lambda}_4^k.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Com as direções de folga $\mathbf{d}_{z_i}^k, i=1, \dots, 4$, e as direções duais relacionadas às restrições de desigualdade e às variáveis canalizadas $\mathbf{d}_{\lambda_i}^k, i=1, \dots, 4$, corrigiremos cada uma das componentes de direções que compõe $\mathbf{d}_o^k$ através do procedimento corretor.

3.3 O procedimento corretor do MPIBLM.

Relembremos que, nos resíduos relativos à condição de complementaridade, temos os fatores não-lineares do tipo $D_{z_i^k} \mathbf{d}_{\lambda i}^k, i = 1, \dots, 4$. Agora, uma vez já temos calculado a direção $\mathbf{d}_{\omega}^k$ no procedimento previsor, resolvemos o sistema (3.27) com a condição de que os fatores não-lineares definidos em (3.28) e desconsiderados no procedimento previsor, são utilizados para corrigir cada componente da direção $\mathbf{d}_{\omega}^k$, definindo o *vetor de direções corrigido* $\tilde{\mathbf{d}}_{\omega}^k$, através do procedimento corretor. Portanto, para definirmos o procedimento corretor, os fatores não-lineares serão considerados, ou seja:

$$D_{z_i^k} \mathbf{d}_{\lambda i}^k, \neq \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.46)$$

3.3.1 O cálculo das direções de folga $\tilde{\mathbf{d}}_{z_i}^k, i = 1, \dots, 4$.

O cálculo da direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k$, é definido partindo-se da equação (3.16):

$$\begin{aligned} -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_1^k - \mathbf{u}_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k &= \mathbf{t}_1^k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_1^k. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Para o cálculo da direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k$, partimos da equação (3.17):

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k &= -\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_2^k + \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k &= \mathbf{t}_2^k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k &= -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_2^k. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para o cálculo da direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k$, consideramos a equação (3.18):

$$\begin{aligned}
 -\tilde{\mathbf{d}}_x^k + \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k &= \mathbf{x}^k - \mathbf{z}_3^k - \mathbf{l}_1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\tilde{\mathbf{d}}_x^k + \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k &= \mathbf{t}_3^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k &= \tilde{\mathbf{d}}_x^k + \mathbf{t}_3^k.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

A direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k$, é determinada a partir da equação (3.19):

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{d}}_x^k + \tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k &= -\mathbf{x}^k - \mathbf{z}_4^k + \mathbf{l}_2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_x^k + \tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k &= \mathbf{t}_4^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k &= -\tilde{\mathbf{d}}_x^k + \mathbf{t}_4^k.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Com a determinação das direções corrigidas $\tilde{\mathbf{d}}_{z_i}^k, i=1,...,4$, é possível, através das condições de complementaridade, determinar as direções duais corrigidas referentes às restrições de desigualdade e variáveis canalizadas do problema (3.1).

3.3.2 O cálculo das direções duais $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k$ e $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k$.

Desde que $D_{z_i^k} \mathbf{d}_{\lambda_i}^k \neq \mathbf{0}$ e que as direções de folga corrigidas $\tilde{\mathbf{d}}_{z_i}^k, i=1,...,4$, foram calculadas anteriormente em função da direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_x^k$, então, podemos determinar as direções duais corrigidas $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k$ e $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k$ através das equações de complementaridade. Partindo-se da equação (3.21), é feito o cálculo da direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k$:

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{l_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k + \Lambda_{l_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k &= -\bar{Z}_{l_k} \lambda_1^k + \mu_k \delta_1^k - D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \bar{Z}_{l_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k &= -\Lambda_{l_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k - \bar{Z}_{l_k} \lambda_1^k + \mu_k \delta_1^k - D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k &= -\bar{Z}_{l_k}^{-1} \Lambda_{l_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k - \lambda_1^k + \mu_k \bar{Z}_{l_k}^{-1} \delta_1^k - \bar{Z}_{l_k}^{-1} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k &= -\bar{Z}_{l_k}^{-1} \Lambda_{l_k} \left(\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_x^k + \mathbf{t}_1^k \right) - \lambda_1^k + \mu_k \bar{Z}_{l_k}^{-1} \delta_1^k - \bar{Z}_{l_k}^{-1} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k &= -\bar{Z}_{l_k}^{-1} \Lambda_{l_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_x^k - \bar{Z}_{l_k}^{-1} \Lambda_{l_k} \mathbf{t}_1^k - \lambda_1^k + \mu_k \bar{Z}_{l_k}^{-1} \delta_1^k - \bar{Z}_{l_k}^{-1} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Para o cálculo da direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k$, partimos da equação (3.22):

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{2_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k + \Lambda_{2_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k &= -\bar{Z}_{2_k} \lambda_2^k + \mu_k \delta_2^k - D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \bar{Z}_{2_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k &= -\Lambda_{2_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k - \bar{Z}_{2_k} \lambda_2^k + \mu_k \delta_2^k - D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k &= -\bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k - \lambda_2^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k &= -\bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \left(-\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_2^k \right) - \lambda_2^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k &= \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k - \lambda_2^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

O cálculo da direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k$, é feita através da equação (3.53):

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{3_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k + \Lambda_{3_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k} \lambda_3^k + \mu_k \delta_3^k - D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \bar{Z}_{3_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k &= -\Lambda_{3_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k - \bar{Z}_{3_k} \lambda_3^k + \mu_k \delta_3^k - D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k - \lambda_3^k + \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k - \bar{Z}_{3_k}^{-1} D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \left(\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_3^k \right) - \lambda_3^k + \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k - \bar{Z}_{3_k}^{-1} D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k - \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k - \lambda_3^k + \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_3^k - \bar{Z}_{3_k}^{-1} D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Para o cálculo da direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k$, a equação (3.54) é considerada:

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_{4_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k + \Lambda_{4_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k &= -\bar{Z}_{4_k} \lambda_4^k + \mu_k \delta_4^k - D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \bar{Z}_{4_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k &= -\Lambda_{4_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k - \bar{Z}_{4_k} \lambda_4^k + \mu_k \delta_4^k - D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k &= -\bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k - \lambda_4^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k &= -\bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \left(-\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_4^k \right) - \lambda_4^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k &= \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k - \lambda_4^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_4^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k.
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Na próxima seção calcularemos o vetor de direções duais corrigidas $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k$ e, com esse vetor, determinaremos o vetor de direções primais corrigidas $\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k$.

3.3.3 O vetor de direções duais $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k$ e o vetor de direções primais $\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k$.

Até aqui, desenvolvemos as equações que definem as direções relativas às restrições de folga (canalizadas) corrigidas e as direções duais corrigidas, correspondentes às restrições de desigualdade do problema (3.1) e observamos que todas elas dependem da direção corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k$. Para determinarmos essa direção, consideramos a equação (3.13) e sobre ela efetuamos os cálculos algébricos convenientes:

$$\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k + \underbrace{\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k - \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k)}_I \underbrace{(-\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k + \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k)}_{II} = \mathbf{m}^k.$$

$III = I + II$

Em I , temos:

$$\begin{aligned} I &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k - \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k) = \\ &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k - \lambda_2^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k - \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k \right) = \\ &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k - \underbrace{\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_2^k + \mu_k \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_2^k - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k}_{\tilde{\mathbf{p}}_1} - \\ &\quad - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k = \\ &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \tilde{\mathbf{p}}_1 - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(-\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k - \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k - \lambda_1^k + \mu_k \bar{Z}_{1_k}^{-1} \delta_1^k - \bar{Z}_{1_k}^{-1} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k \right) = \\ &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \tilde{\mathbf{p}}_1 + \\ &+ \underbrace{\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_1^k - \mu_k \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} \delta_1^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k}_{\tilde{\mathbf{p}}_2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow I = \left(\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \right) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2. \end{aligned}$$

Em II , temos:

$$\begin{aligned}
 II &= -\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k + \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k = \\
 &= -\left(-\bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k}\tilde{\mathbf{d}}_x^k - \bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k}\mathbf{t}_3^k - \lambda_3^k + \mu_k\bar{Z}_{3_k}^{-1}\delta_3^k - \bar{Z}_{3_k}^{-1}D_{z_3^k}\mathbf{d}_{\lambda_3}^k\right) + \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\tilde{\mathbf{d}}_x^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\mathbf{t}_4^k - \lambda_4^k + \mu_k\bar{Z}_{4_k}^{-1}\delta_4^k - \\
 &\quad -\bar{Z}_{4_k}^{-1}D_{z_4^k}\mathbf{d}_{\lambda_4}^k = \\
 &= \bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k}\tilde{\mathbf{d}}_x^k + \bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k}\mathbf{t}_3^k + \lambda_3^k - \mu_k\bar{Z}_{3_k}^{-1}\delta_3^k + \bar{Z}_{3_k}^{-1}D_{z_3^k}\mathbf{d}_{\lambda_3}^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\tilde{\mathbf{d}}_x^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\mathbf{t}_4^k - \lambda_4^k + \mu_k\bar{Z}_{4_k}^{-1}\delta_4^k - \\
 &\quad -\bar{Z}_{4_k}^{-1}D_{z_4^k}\mathbf{d}_{\lambda_4}^k = \\
 &= \underbrace{\left(\bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\right)\tilde{\mathbf{d}}_x^k + \lambda_3^k - \lambda_4^k + \bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k}\mathbf{t}_3^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\mathbf{t}_4^k + \bar{Z}_{3_k}^{-1}D_{z_3^k}\mathbf{d}_{\lambda_3}^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1}D_{z_4^k}\mathbf{d}_{\lambda_4}^k + \mu_k\left(-\bar{Z}_{3_k}^{-1}\delta_3^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1}\delta_4^k\right)}_{\tilde{\mathbf{p}}_3^k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow II = \left(\bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\right)\tilde{\mathbf{d}}_x^k + \tilde{\mathbf{p}}_3^k.
 \end{aligned}$$

Em *III* , temos:

$$\begin{aligned}
 III &= I + II = \\
 &= \left(\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{1_k}^{-1}\Lambda_{1_k}\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \bar{Z}_{2_k}^{-1}\Lambda_{2_k}\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\right)\tilde{\mathbf{d}}_x^k + \underbrace{\tilde{\mathbf{p}}_1^k + \tilde{\mathbf{p}}_2^k + \tilde{\mathbf{p}}_3^k}_{\tilde{\mathbf{p}}^k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow III = \left(\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1}\Lambda_{1_k} + \bar{Z}_{2_k}^{-1}\Lambda_{2_k}\right)\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\right)\tilde{\mathbf{d}}_x^k + \tilde{\mathbf{p}}^k.
 \end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte expressão matemática devidamente reorganizada para a equação (3.13):

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\left(\mathbf{K} + \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1}\Lambda_{1_k} + \bar{Z}_{2_k}^{-1}\Lambda_{2_k}\right)\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \bar{Z}_{3_k}^{-1}\Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1}\Lambda_{4_k}\right)\tilde{\mathbf{d}}_x^k + \nabla\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k + \tilde{\mathbf{p}}^k}_{\theta_k} = \mathbf{m}^k \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \theta_k \tilde{\mathbf{d}}_x^k + \nabla\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = \mathbf{m}^k - \tilde{\mathbf{p}}^k.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Calculemos, inicialmente, a componente vetorial $\left(\mathbf{m}^k - \tilde{\mathbf{p}}^k\right) \in \mathbb{R}^n$.

Desde que:

$$\begin{cases} \mathbf{m}^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\boldsymbol{\lambda}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k) + \boldsymbol{\lambda}_3^k - \boldsymbol{\lambda}_4^k \\ \mathbf{p}^k = -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\boldsymbol{\lambda}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k) + \boldsymbol{\lambda}_3^k - \boldsymbol{\lambda}_4^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k + \bar{Z}_{1_k}^{-1} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k \right) + \\ + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k + \bar{Z}_{3_k}^{-1} D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k + \mu_k \left(\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(-\bar{Z}_{1_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_1^k + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_2^k \right) - \bar{Z}_{3_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_3^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_4^k \right) \end{cases};$$

então, subtraindo-se $\tilde{\mathbf{p}}^k$ de $\mathbf{m}^k$ obtemos:

$$\mathbf{m}^k - \tilde{\mathbf{p}}^k = -\left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\phi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \right); \quad (3.56)$$

em que:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}^k = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k + \bar{Z}_{1_k}^{-1} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k \right) + \\ + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k + \bar{Z}_{3_k}^{-1} D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Assim, a equação (3.55) é reformulada a seguir:

$$\theta_k \tilde{\mathbf{d}}_x^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = -\left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\phi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \right). \quad (3.58)$$

O sistema (3.59) reduz-se ao seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T & \theta_k \\ 0 & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k \\ \tilde{\mathbf{d}}_x^k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\phi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k \\ -\mathbf{t}_0^k \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Considerando o sistema (3.27), obtemos a direção dual corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \theta_k \tilde{\mathbf{d}}_x^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k - \tilde{\mathbf{c}}^k - \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \tilde{\mathbf{c}}^k - \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k - \theta_k \tilde{\mathbf{d}}_x^k \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = -\left(\theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k \right) + \tilde{\mathbf{d}}_x^k \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k \right) + \underbrace{\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_x^k}_{\mathbf{t}_0^k} \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k \right) + \mathbf{t}_0^k \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right) \lambda_0^k - \\
 & -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k \right) + \mathbf{t}_0^k \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k \right) + \mathbf{t}_0^k \right) - \lambda_0^k. \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

Com a direção dual corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k$ calculada, a direção primal corrigida $\tilde{\mathbf{d}}_x^k$ é calculada imediatamente pela equação (3.58) através de:

$$\begin{aligned}
 & \theta_k \tilde{\mathbf{d}}_x^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k = -\left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \theta_k \tilde{\mathbf{d}}_x^k = -\left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k \right) \Leftrightarrow \quad (3.61) \\
 & \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_x^k = -\theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k \right).
 \end{aligned}$$

Assim, o vetor de direções corrigidas $\tilde{\mathbf{d}}_{\omega}^k = \left(\tilde{\mathbf{d}}_x^k, \tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k \right)^T$,

do procedimento corretor, analogamente ao procedimento previsor, foi calculado de forma explícita mais eficiente do que o procedimento previsor, pois corrige as componentes deste vetor na iteração k , visando melhorar a eficiência das direções de busca $\mathbf{d}_{\omega}^k$. Apresentamos a seguir o quadro de direções primais e duais do procedimento corretor do método primal-dual barreira logarítmica modificada:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k &= -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T\right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k\right) + \mathbf{t}_0^k\right) - \boldsymbol{\lambda}_0^k; \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k &= -\theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k\right); \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_1^k; \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k &= -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_2^k; \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k &= \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_3^k; \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k &= -\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_4^k; \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_1}^k &= -\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k + \mu_k \bar{Z}_{1_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_1^k - \bar{Z}_{1_k}^{-1} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k; \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_2}^k &= -\bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k + \mu_k \bar{Z}_{2_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_2^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k - \boldsymbol{\lambda}_2^k; \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k + \mu_k \bar{Z}_{3_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_3^k - \bar{Z}_{3_k}^{-1} D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k - \boldsymbol{\lambda}_3^k; \\
 \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_4}^k &= -\bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k + \mu_k \bar{Z}_{4_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_4^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k - \boldsymbol{\lambda}_4^k.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Nesta seção foram apresentadas as direções de busca do procedimento previsor e corretor do MPIBLM definidas para pontos $\mathbf{x}^k \in X \cup X_\mu$ que satisfazem plenamente o conjunto $H \cup H_\mu$. Porém, devido a complexidade de alguns problemas de programação não-linear, podem ocorrer situações extremas de que o novo ponto $(\mathbf{x}^{k+1} \in X \cup X_\mu)$ e $(\mathbf{x}^{k+1} \notin H \cup H_\mu)$, $(\mathbf{x}^{k+1} \notin X \cup X_\mu)$ e $(\mathbf{x}^{k+1} \in H \cup H_\mu)$ ou, na pior das hipóteses, que $(\mathbf{x}^{k+1} \notin X \cup X_\mu)$ e $(\mathbf{x}^{k+1} \notin H \cup H_\mu)$. Sabemos que se uma dessas situações ocorre, a função barreira logarítmica modificada não está definida para alguma componente qualquer dos vetores $\mathbf{z}_1^k, \mathbf{z}_2^k, \mathbf{z}_3^k$ ou $\mathbf{z}_4^k$, e, portanto, o método MPIBLM tem que ser cessado. Para auxiliar o MPIBLM nessas situações, apresentamos a seguir a estratégia de ajuste cúbico.

3.4 Uma estratégia de ajuste cúbico aplicado ao MPIBLM.

Nesta seção apresentamos um ajuste cúbico que deve auxiliar o MPIBLM com pontos $\mathbf{x}^k$ pertençam ao conjunto $X \cup X_\mu$ ou ao conjunto $H \cup H_\mu$ ou em ambos os conjuntos. As

finalidades desse ajuste são: evitar que MPIBLM seja obrigado a cessar prematuramente sua operação em alguma iteração k devido a inviabilidade de algum ponto z^k ; e a de que o usuário do método aumente o número de escolha de pontos e parâmetros iniciais. Em (Matioli, 2001) é apresentado um polinômio quadrático ajustado à função barreira logarítmica modificada e a garantia de que essa técnica converge pra uma solução ótima. Encontram-se em (Pereira, 2007) aplicações satisfatórias do ajuste quadrático para a resolução de problemas de programação não-linear com variáveis e restrições de desigualdades canalizadas. Diferentemente de (Matioli, 2001) e de (Pereira, 2007), apresentamos um polinômio de grau 3 ajustado à função barreira logarítmica modificada (daí o nome ajuste cúbico) que preserva as informações de inclinação e de curvatura da barreira logarítmica modificada aplicada em um ponto viável $-\tau\mu_k$, em que $\tau \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ é o parâmetro de proximidade da variável de folga z^k à fronteira interior relaxada. No final dessa seção, apresentamos um valor para τ , o qual utilizamos neste trabalho, e a combinação do MPIBLM com a estratégia de ajuste cúbico método, isto é, apresentamos o MPIBLM-EX.

Para simplificarmos a notação, consideramos que $z^k = z_{j_i}^k$, $\begin{cases} i=1,\dots,r \text{ se } j=1 \text{ ou } 2 \\ i=1,\dots,n \text{ se } j=3 \text{ ou } 4 \end{cases}$

seja uma componente qualquer dos vetores z_1^k, z_2^k, z_3^k ou z_4^k e que o número $\tau \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ seja o parâmetro de proximidade de z^k à fronteira interior relaxada, temos uma função $\psi(z^k)$ definida por:

$$\psi(z^k) = \begin{cases} \ln(z^k) = -\ln\left(\frac{\mu_k + z^k}{\mu_k}\right), & \text{se } z^k \geq -\tau\mu_k \\ C(z^k) = \frac{c_{3_k}}{6}(z^k)^3 + \frac{c_{2_k}}{2}(z^k)^2 + c_{1_k}z^k + c_{0_k}, & \text{se } z^k < -\tau\mu_k \end{cases}; \quad (3.63)$$

em que $C(z^k)$ é o polinômio cúbico ajustado ao $Ln(z^k)$ o qual é estritamente convexo quando $z^k < -\tau\mu_k$; que $Ln(z^k) = C(z^k)$ no ponto $z^k = -\tau\mu_k$; que as derivadas parciais de primeira, de segunda e de terceira ordem de $C(z^k)$ coincidem com $Ln(z^k)$ no ponto $-\tau\mu_k$; e os parâmetros c_{3_k} , c_{2_k} , c_{1_k} e c_{0_k} são os coeficientes do polinômio a serem determinados. Apresentamos a seguir o quadro das derivadas de primeira, de segunda e de terceira ordem de $C(z^k)$:

$$\begin{cases} C'(z^k) = \frac{c_{3_k}}{2}(z^k)^2 + c_{2_k}z^k + c_{1_k}; \\ C''(z^k) = c_{3_k}z^k + c_{2_k}; \\ C'''(z^k) = c_{3_k} \end{cases} \quad (3.64)$$

A seguir, apresentamos o quadro das derivadas de primeira, de segunda e de terceira ordem de $Ln(z^k)$:

$$\begin{cases} Ln'(z^k) = -\frac{1}{(\mu_k + z^k)} \\ Ln''(z^k) = (\mu_k + z^k)^{-2} \\ Ln'''(z^k) = -2(\mu_k + z^k)^{-3} \end{cases} \quad (3.65)$$

Ao compararmos (3.64) com (3.65), calculamos os coeficientes do polinômio. De imediato, temos que:

$$\begin{aligned} Ln'''(z^k) &= C'''(z^k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2(\mu_k + z^k)^{-3} &= c_{3_k} \end{aligned}$$

Para o cálculo de c_{2_k} , temos:

$$\begin{aligned}
 Ln''(z^k) &= C''(z^k) \Leftrightarrow (\mu_k + z^k)^{-2} = c_{3_k} z^k + c_{2_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\mu_k + z^k)^{-2} - c_{3_k} z^k = c_{2_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{(\mu_k + z^k)^2} - \frac{(-2)z^k}{(\mu_k + z^k)^3} = c_{2_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\mu_k + z^k + 2z^k}{(\mu_k + z^k)^3} = c_{2_k} \Leftrightarrow \frac{\mu_k + 3z^k}{(\mu_k + z^k)^3} = c_{2_k}.
 \end{aligned}$$

Determinamos o parâmetro c_{1_k} da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 Ln'(z^k) &= C'(z^k) \Leftrightarrow -\frac{1}{(\mu_k + z^k)} = \frac{c_{3_k}}{2}(z^k)^2 + c_{2_k} z^k + c_{1_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{(\mu_k + z^k)} - \frac{c_{3_k}}{2}(z^k)^2 - c_{2_k} z^k = c_{1_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-1}{(\mu_k + z^k)} - \frac{(-2)(z^k)^2}{2(\mu_k + z^k)^3} - \frac{(\mu_k + 3z^k)z^k}{(\mu_k + z^k)^3} = c_{1_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-(\mu_k + z^k)^2 + (z^k)^2 - (\mu_k + 3z^k)z^k}{(\mu_k + z^k)^3} = c_{1_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-(\mu_k)^2 - 2\mu_k z^k - (z^k)^2 + (z^k)^2 - \mu_k z^k - 3(z^k)^2}{(\mu_k + z^k)^3} = c_{1_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-(\mu_k)^2 - 3\mu_k z^k - 3(z^k)^2}{(\mu_k + z^k)^3} = c_{1_k}.
 \end{aligned}$$

Como $Ln(z^k) = C(z^k)$, apresentamos os cálculos para o parâmetro c_{0_k} . O resultado

desses cálculos nos asseguram a continuidade de $\psi(z^k)$ avaliada no ponto $z^k = -\mu_k$.

$$\begin{aligned}
 Ln(z^k) = C(z^k) &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{\mu_k + z^k}{\mu_k}\right) = \frac{c_{3_k}}{6}(z^k)^3 + \frac{c_{2_k}}{2}(z^k)^2 + c_{1_k}z^k + c_{0_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{\mu_k + z^k}{\mu_k}\right) - \frac{c_{3_k}}{6}(z^k)^3 - \frac{c_{2_k}}{2}(z^k)^2 - c_{1_k}z^k = c_{0_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{\mu_k + z^k}{\mu_k}\right) - \frac{(-2)(z^k)^3}{6(\mu_k + z^k)^3} - \frac{(\mu_k + 3z^k)(z^k)^2}{2(\mu_k + z^k)^3} - \frac{-((\mu_k)^2 + 3\mu_k z^k + 3(z^k)^2)z^k}{(\mu_k + z^k)^3} = c_{1_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{\mu_k + z^k}{\mu_k}\right) + \frac{2(z^k)^3 - 3\mu_k(z^k)^2 - 9(z^k)^3 + 6(\mu_k)^2 z^k + 18\mu_k(z^k)^2 + 18(z^k)^3}{6(\mu_k + z^k)^3} = c_{0_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{\mu_k + z^k}{\mu_k}\right) + \frac{11(z^k)^3 + 15\mu_k(z^k)^2 + 6(\mu_k)^2 z^k}{6(\mu_k + z^k)^3} = c_{0_k}.
 \end{aligned}$$

Desde que $z^k = -\tau\mu_k$, então temos:

$$\begin{aligned}
 c_{0_k} &= -\ln\left(\frac{\mu_k + z^k}{\mu_k}\right) + \frac{11(z^k)^3 + 15\mu_k(z^k)^2 + 6(\mu_k)^2 z^k}{6(\mu_k + z^k)^3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow c_{0_k} &= -\ln\left(\frac{\mu_k - \tau\mu_k}{\mu_k}\right) + \frac{11(-\tau\mu_k)^3 + 15\mu_k(-\tau\mu_k)^2 + 6(\mu_k)^2(-\tau\mu_k)}{6(\mu_k - \tau\mu_k)^3} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow c_{0_k} = -\ln(1 - \tau) + \frac{(\mu_k)^3(-11\tau^3 + 15\tau^2 - 6\tau)}{6(\mu_k)^3(1 - \tau)^3} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow c_{0_k} = -\ln(1 - \tau) + \frac{-11\tau^3 + 15\tau^2 - 6\tau}{6(1 - \tau)^3}.
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

O coeficiente c_{1_k} é avaliado em:

$$\begin{aligned}
 c_{1_k} &= \frac{-(\mu_k)^2 - 3\mu_k z^k - 3(z^k)^2}{(\mu_k + z^k)^3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow c_{1_k} &= \frac{-(\mu_k)^2 - 3\mu_k(-\tau\mu_k) - 3(-\tau\mu_k)^2}{(\mu_k - \tau\mu_k)^3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow c_{1_k} &= \frac{(\mu_k)^2(-1+3\tau-3\tau^2)}{(\mu_k)^3(1-\tau)^3} \Leftrightarrow c_{1_k} = \frac{-1+3\tau-3\tau^2}{\mu_k(1-\tau)^3}.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

O coeficiente c_{2_k} é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned}
 c_{2_k} &= \frac{\mu_k + 3z^k}{(\mu_k + z^k)^3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow c_{2_k} &= \frac{\mu_k + 3(-\tau\mu_k)}{(\mu_k - \tau\mu_k)^3} \Leftrightarrow c_{2_k} = \frac{\mu_k(1-3\tau)}{(\mu_k)^3(1-\tau)^3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow c_{2_k} &= \frac{1-3\tau}{(\mu_k)^2(1-\tau)^3}.
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Finalizamos o cálculo dos coeficientes de $C(z^k)$ com a apresentação dos cálculos para determinar c_{3_k} . Esses são apresentados em (3.69):

$$\begin{aligned}
 c_{3_k} &= \frac{-2}{(\mu_k + z_k)^3} \Leftrightarrow c_{3_k} = \frac{-2}{(\mu_k - \tau\mu_k)^3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow c_{3_k} &= \frac{-2}{(\mu_k)^3(1-\tau)^3}.
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

O polinômio geral $C(z^k)$ para um valor de $\tau \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ e μ_k dados tem a forma:

$$C(z^k) = \frac{-(z^k)^3}{3(\mu_k)^3(1-\tau)^3} + \frac{(1-3\tau)(z^k)^2}{2(\mu_k)^2(1-\tau)^3} + \frac{(-1+3\tau-3\tau^2)z^k}{\mu_k(1-\tau)^3} + \frac{-11\tau^3+15\tau^2-6\tau}{6(1-\tau)^3} - \ln(1-\tau). \tag{3.70}$$

A figura 3.1 ilustra o gráfico de uma função $\psi(z^k)$ quando definimos os parâmetros

$\mu_k = 2$ e $\tau = 0,5$.

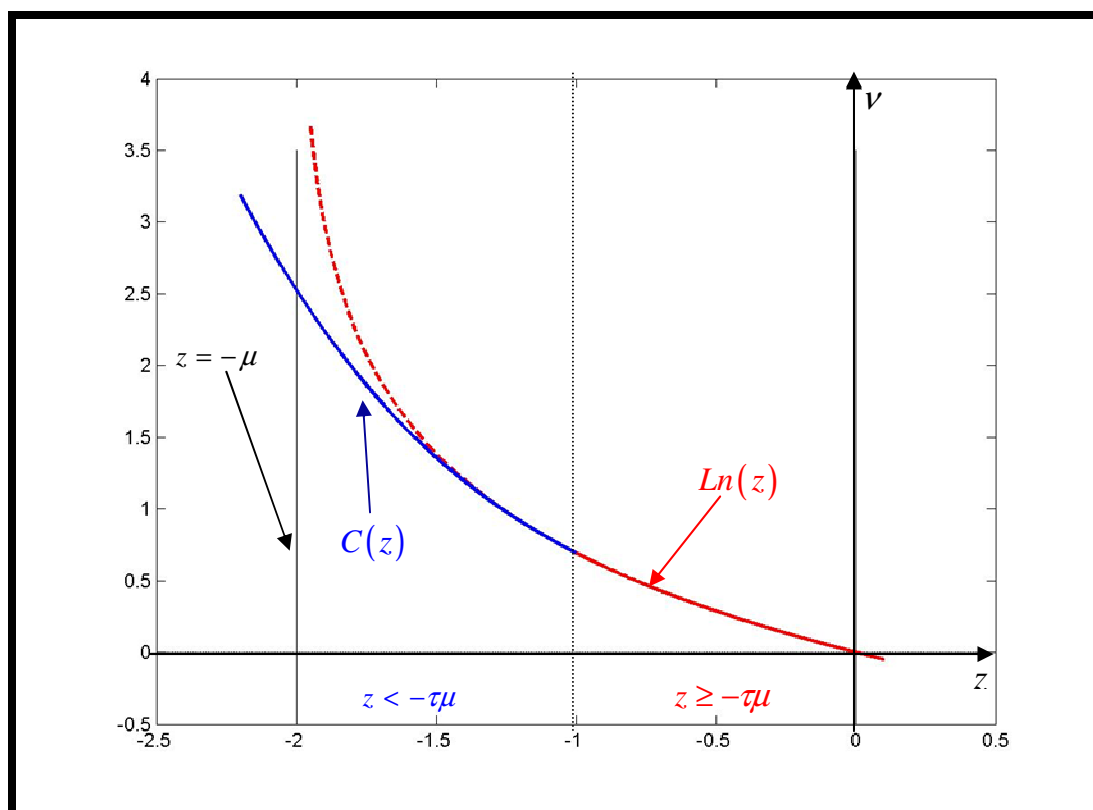


Figura 3.1: A função $\psi(z)$ com polinômio cúbico ajustado ao logaritmo.

A figura 3.1 nos mostra (em vermelho tracejado) que o $-\ln\left(\frac{\mu+z}{\mu}\right) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow -\mu^+$. Esse resultado, que está de acordo com a definição de função barreira modificada apresentada em (2.55), inviabiliza o logaritmo quando esse avalia pontos $z \leq -\mu$, porém a função $\psi(z)$, cuja composição está o polinômio (em azul) $C(z)$ ajustado a $\ln(z)$ (em vermelho contínuo) está definida nos pontos $z \leq -\mu$, portanto, a técnica de ajuste cúbico é interessante ao MPIBLM em situações críticas quando temos pontos $z \leq -\mu$.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta para a escolha do parâmetro de proximidade τ . Para o desenvolvimento da proposta, fizemos os seguintes procedimentos iniciais:

i) calculamos a derivada de primeira ordem de $\psi(z^k)$ nos pontos $z^k = -\tau\mu_k$ e $z^k = -\mu_k$;

ii) com os coeficientes angulares $\psi'(-\tau\mu_k)$ e $\psi'(-\mu_k)$, obtemos as retas r_1 e r_2 tangentes a $\psi(z^k)$ nesses pontos;

iii) e encontrarmos um ponto $z_\tau \in (-\mu_k, -\tau\mu_k)$ que satisfaz o sistema $r_1 \cap r_2$.

No procedimento i), calculamos a derivada de primeira ordem $C(z^k)$, expressão (3.70), no ponto $z^k = -\mu_k$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} C'(z^k) &= \frac{-(z^k)^2}{(\mu_k)^3(1-\tau)^3} + \frac{(1-3\tau)(z^k)}{(\mu_k)^2(1-\tau)^3} + \frac{(-1+3\tau-3\tau^2)}{\mu_k(1-\tau)^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow C'(-\mu_k) &= \frac{-(-\mu_k)^2}{(\mu_k)^3(1-\tau)^3} + \frac{(1-3\tau)(-\mu_k)}{(\mu_k)^2(1-\tau)^3} + \frac{(-1+3\tau-3\tau^2)}{\mu_k(1-\tau)^3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C'(-\mu_k) &= \frac{-1}{(\mu_k)(1-\tau)^3} + \frac{(-1+3\tau)}{(\mu_k)(1-\tau)^3} + \frac{(-1+3\tau-3\tau^2)}{(\mu_k)(1-\tau)^3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C'(-\mu_k) &= \frac{-3+6\tau-3\tau^2}{(\mu_k)(1-\tau)^3} \Leftrightarrow C'(-\mu_k) = \psi'(-\mu_k) = \frac{-3(1-\tau)^2}{(\mu_k)(1-\tau)^3}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Utilizamos (3.65) para avaliarmos a derivada de primeira ordem $\psi(z^k)$ no ponto $z^k = -\tau\mu_k$. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} Ln'(z^k) &= \frac{-1}{\mu_k + z^k} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ln'(-\tau\mu_k) &= \frac{-1}{\mu_k - \tau\mu_k} \Leftrightarrow Ln'(-\tau\mu_k) = \psi'(-\tau\mu_k) = \frac{-1}{\mu_k(1-\tau)}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Iniciamos o procedimento ii) ao apresentarmos os cálculos da reta r_1 :

$$\begin{aligned}
 r_1 : \nu - \psi'(-\mu_k)z &= \psi(-\mu_k) - \psi'(-\mu_k)(-\mu_k) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow r_1 : \nu - \frac{(-3)(1-\tau)^2}{\mu_k(1-\tau)^3}z &= \frac{-(-\mu_k)^3}{3(\mu_k)^3(1-\tau)^3} + \frac{(1-3\tau)(-\mu_k)^2}{2(\mu_k)^2(1-\tau)^3} + \frac{(-1+3\tau-3\tau^2)(-\mu_k)}{\mu_k(1-\tau)^3} + \frac{-11\tau^3+15\tau^2-6\tau}{6(1-\tau)^3} - \\
 &\quad - \ln(1-\tau) - \frac{(-3)(1-\tau)^2(-\mu_k)}{(\mu_k)(1-\tau)^3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow r_1 : \nu + \underbrace{\frac{3}{\mu_k(1-\tau)}}_{a_1}z &= \underbrace{\frac{1}{3(1-\tau)^3} + \frac{(1-3\tau)}{2(1-\tau)^3} + \frac{(1-3\tau+3\tau^2)}{(1-\tau)^3} + \frac{-11\tau^3+15\tau^2-6\tau}{6(1-\tau)^3} - \ln(1-\tau) + \frac{(-3)}{(1-\tau)}}_{b_1} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow r_1 : \nu + a_1z = b_1;
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

e da reta r_2 :

$$\begin{aligned}
 r_2 : \nu - \psi'(-\tau\mu_k)z &= \psi(-\tau\mu_k) - \psi'(-\tau\mu_k)(-\tau\mu_k) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow r_2 : \nu - \frac{(-1)}{\mu_k(1-\tau)}z &= -\ln(1-\tau) - \frac{(-1)(-\tau\mu_k)}{\mu_k(1-\tau)} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow r_2 : \nu + \underbrace{\frac{1}{\mu_k(1-\tau)}}_{a_2}z &= \underbrace{-\ln(1-\tau) + \frac{(-\tau)}{(1-\tau)}}_{b_2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow r_2 : \nu + a_2z = b_2.
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

O procedimento *iii*) é iniciado com resolução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \nu + a_1z &= b_1 \\ \nu + a_2z &= b_2 \end{cases} \tag{3.75}$$

A solução do sistema (3.75) para a incógnita z é o ponto $z_\tau = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$, $a_2 - a_1$ é

explicitado por:

$$\begin{aligned}
 a_2 - a_1 &= \frac{1}{\mu_k(1-\tau)} + \frac{-3}{\mu_k(1-\tau)} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a_2 - a_1 &= \frac{(-2)}{\mu_k(1-\tau)}.
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

E que $b_2 - b_1$ é explicitado por:

$$\begin{aligned}
 b_2 - b_1 &= -\ln(1-\tau) + \frac{(-\tau)}{(1-\tau)} + \frac{(-1)}{3(1-\tau)^3} + \frac{(3\tau-1)}{2(1-\tau)^3} + \frac{(-1+3\tau-3\tau^2)}{(1-\tau)^3} + \frac{11\tau^3-15\tau^2+6\tau}{6(1-\tau)^3} + \\
 &\quad + \ln(1-\tau) + \frac{3}{(1-\tau)} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow b_2 - b_1 &= \frac{(3-\tau)(1-\tau)^2}{(1-\tau)^3} + \frac{(-2)}{6(1-\tau)^3} + \frac{(9\tau-3)}{6(1-\tau)^3} + \frac{(-6+18\tau-18\tau^2)}{6(1-\tau)^3} + \frac{11\tau^3-15\tau^2+6\tau}{6(1-\tau)^3} \Leftrightarrow \\
 &\quad \Leftrightarrow b_2 - b_1 = \frac{(3-\tau)(1-\tau)^2}{(1-\tau)^3} + \frac{-11+33\tau-33\tau^2+11\tau^3}{6(1-\tau)^3} \Leftrightarrow \\
 &\quad \Leftrightarrow b_2 - b_1 = \frac{6(3-\tau)(1-\tau)^2}{6(1-\tau)^3} + \frac{11(\tau-1)(1-\tau)^2}{6(1-\tau)^3} \Leftrightarrow \\
 &\quad \Leftrightarrow b_2 - b_1 = \frac{6(3-\tau)+11(\tau-1)}{6(1-\tau)}.
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
 z_\tau &= \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} = \frac{\frac{6(3-\tau)+11(\tau-1)}{6(1-\tau)}}{\frac{(-2)}{\mu_k(1-\tau)}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow z_\tau &= \frac{6(3-\tau)+11(\tau-1)}{6(1-\tau)} \times \frac{\mu_k(1-\tau)}{(-2)} \Leftrightarrow \\
 &\quad \Leftrightarrow z_\tau = -\left(\frac{5\tau+7}{12}\right)\mu_k.
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

De fato, o número $z_\tau \in (-\mu_k, -\mu_k)$ para todo $\tau \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ e $\mu_k > 0$, pois:

$$\begin{aligned}
 -\mu_k < z_\tau < -\tau\mu_k &\Leftrightarrow -\mu_k < -\left(\frac{5\tau+7}{12}\right)\mu_k < -\tau\mu_k \Leftrightarrow -1 < -\left(\frac{5\tau+7}{12}\right) < -\tau \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < -\left(\frac{5\tau+7}{12}\right) \\ -\left(\frac{5\tau+7}{12}\right) < \tau \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 < -5\tau-7 \\ -5\tau-7 < 12\tau \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < -5\tau \\ -7 < 17\tau \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > \tau \\ -\frac{7}{17} < \tau \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\frac{7}{17} < 0 < \tau < 1.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Uma escolha para τ é a de que a equação a seguir seja satisfeita:

$$\frac{\psi(-\tau\mu_k)}{z_\tau} = \frac{(-1)}{\phi\mu_k} \Leftrightarrow \frac{-\ln(1-\tau)}{z_\tau} = \frac{(-1)}{\phi\mu_k}; \tag{3.80}$$

em que $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{-\ln(1-\tau)}{z_\tau} &= \frac{(-1)}{\phi\mu_k} \Leftrightarrow \ln(1-\tau) = \frac{z_\tau}{\phi\mu_k} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 1-\tau = e^{\frac{z_\tau}{\phi\mu_k}} \Leftrightarrow \tau = -e^{\frac{z_\tau}{\phi\mu_k}} + 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \tau = -e^{\frac{-(5\tau+7)\mu_k}{12\phi\mu_k}} + 1.
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

A solução da equação (3.81) é obtida através do método iterativo linear. O valor $\tau = 0,36529008196440$ é a solução para (3.81) o qual utilizamos neste trabalho.

Com a estratégia de ajuste cúbico (EX) apresentada nesta seção e aplicada sobre o método MPIBLM, temos método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada e estratégia de ajuste cúbico (MPIBLM-EX). Dado $\tau \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ que satisfaz a equação apresentada em (3.81), a reconfiguração da expressão (3.7) é apresentada a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } L(\omega) = f(\mathbf{x}) + \mu \sum_{i=1}^r \delta_{1_i} \psi(z_{1_i}) + \mu \sum_{i=1}^r \delta_{2_i} \psi(z_{2_i}) + \\ \quad + \mu \sum_{j=1}^n \delta_{3_j} \psi(z_{3_j}) + \mu \sum_{j=1}^n \delta_{4_j} \psi(z_{4_j}) + \sum_{t=1}^m \lambda_{0_t} g_t(\mathbf{x}) + \\ \quad + \sum_{i=1}^r \left[\lambda_{1_i} (-h_i(\mathbf{x}) + u_{1_i} + z_{1_i}) + \lambda_{2_i} (h_i(\mathbf{x}) - u_{2_i} + z_{2_i}) \right] + \\ \quad + \sum_{j=1}^n \left[\lambda_{3_j} (-x_j + l_{1_j} + z_{3_j}) + \lambda_{4_j} (x_j - l_{2_j} + z_{4_j}) \right] \end{array} \right. ; \quad (3.82)$$

em que $\psi(z)$ foi apresentada em (3.63); as matrizes diagonais $\bar{Z}_i^{-1}$, $i=1, \dots, 4$, apresentadas em (3.9), são construídas através do cálculo de $-\psi'(z)$, em que

$z = z_{j_i}$, $\begin{cases} i=1, \dots, r \text{ se } j=1 \text{ ou } 2 \\ i=1, \dots, n \text{ se } j=3 \text{ ou } 4 \end{cases}$ é uma componente qualquer dos vetores $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ ou de $\mathbf{z}_4$.

A expressão (3.83) nos apresenta a variante da expressão (3.9) com a consideração de que

$\bar{Z}^{-1}(i, i)$ é uma componente que representa a componente diagonal das matrizes $\bar{Z}_1^{-1}, \bar{Z}_2^{-1}$,

$\bar{Z}_3^{-1}$ ou de $\bar{Z}_4^{-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Z}^{-1}(i, i) = \left(\frac{1}{\mu + z} \right) \quad \text{se } z \geq -\tau \mu_k \\ \bar{Z}^{-1}(i, i) = \left(\frac{z^2}{\mu^3 (1-\tau)^3} - \frac{(1-3\tau)z}{\mu^2 (1-\tau)^3} - \frac{(-1+3\tau-3\tau^2)}{\mu (1-\tau)^3} \right) \quad \text{se } z < -\tau \mu_k \end{array} \right. . \quad (3.83)$$

A seguir, apresentamos o cálculo do tamanho dos passos dual e primal para o MPIBLM-EX.

3.5 Cálculo do comprimento do passo primal $\bar{\alpha}_p$ e do passo dual $\bar{\alpha}_d$.

Após o cálculo das direções corrigidas do MPIBLM-EX, um importante procedimento, anterior à atualização $\omega^{k+1} = \omega^k + \mathbf{d}_\omega^k$, é o cálculo de um escalar estritamente positivo α_p denominado por comprimento do passo primal e outro escalar estritamente positivo α_d denominado por comprimento do passo dual. A função desses escalares é a de

garantir que: calculada uma direção de descida $\mathbf{d}_\omega^k$, o ponto ω^{k+1} seja ponto viável em sua região de definição. Neste trabalho, calculamos os passos primal e dual nos baseando na estratégia proposta por (Granville, 1994). Como as restrições de desigualdade e as variáveis canalizadas estão controladas pelas variáveis de folga $\mathbf{z}_i, i=1, \dots, 4$, o cálculo do passo primal $\bar{\alpha}_p$ será feito em função dessas variáveis. O cálculo do passo dual $\bar{\alpha}_d$ é feito considerando os multiplicadores de Lagrange $\lambda_i, i=1, \dots, 4$, referente às restrições de desigualdade e de variáveis canalizadas. Portanto, segundo (Granville, 1994), temos:

$$\bar{\alpha}_p = \sigma \times \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{z_{1_i} > 0 \text{ e } (\tilde{d}z_{1_i})_i < 0} -\frac{z_{1_i}}{\tilde{d}z_{1_i}}, \min_{z_{2_i} > 0 \text{ e } \tilde{d}z_{2_i} < 0} -\frac{z_{2_i}}{\tilde{d}z_{2_i}}, \\ \min_{z_{3_j} > 0 \text{ e } \tilde{d}z_{3_j} < 0} -\frac{z_{3_j}}{\tilde{d}z_{3_j}}, \min_{z_{4_j} > 0 \text{ e } \tilde{d}z_{4_j} < 0} -\frac{z_{4_j}}{\tilde{d}z_{4_j}}, 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 1, \dots, r; \\ j = 1, \dots, n; \end{array} \quad (3.84)$$

$$\bar{\alpha}_d = \sigma \times \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{\lambda_{1_i} > 0 \text{ e } \tilde{d}\lambda_{1_i} < 0} -\frac{\lambda_{1_i}}{\tilde{d}\lambda_{1_i}}, \min_{\lambda_{2_i} > 0 \text{ e } \tilde{d}\lambda_{2_i} < 0} -\frac{\lambda_{2_i}}{\tilde{d}\lambda_{2_i}}, \\ \min_{\lambda_{3_j} > 0 \text{ e } \tilde{d}\lambda_{3_j} < 0} -\frac{\lambda_{3_j}}{\tilde{d}\lambda_{3_j}}, \min_{\lambda_{4_j} > 0 \text{ e } \tilde{d}\lambda_{4_j} < 0} -\frac{\lambda_{4_j}}{\tilde{d}\lambda_{4_j}}, 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 1, \dots, r \\ j = 1, \dots, n \end{array}. \quad (3.85)$$

onde $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$ e o “1” é o passo newtoniano. Para uma escolha do número $\sigma > 0$ definimos

$z^k > 0$ (por simplificação de notação, $z^k = z_{j_i}^k, \begin{cases} i=1, \dots, r \text{ se } j=1 \text{ ou } 2 \\ i=1, \dots, n \text{ se } j=3 \text{ ou } 4 \end{cases}$ seja uma

componente qualquer do vetor $\mathbf{z}_1^k, \mathbf{z}_2^k, \mathbf{z}_3^k$ ou de $\mathbf{z}_4^k$) e que $\tilde{d}_z^k < 0$ (por simplificação de

notação, $\tilde{d}_z^k = \tilde{d}_{z_{j_i}}^k, \begin{cases} i=1, \dots, r \text{ se } j=1 \text{ ou } 2 \\ i=1, \dots, n \text{ se } j=3 \text{ ou } 4 \end{cases}$ seja uma componente qualquer do vetor $\tilde{\mathbf{d}}_{z_1}^k,$

$\tilde{\mathbf{d}}_{z_2}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{z_3}^k$ ou de $\tilde{\mathbf{d}}_{z_4}^k$) seja uma direção correspondente a z^k . Assim, para garantirmos a

viabilidade primal quando utilizamos a função barreira logarítmica modificada, temos:

$$z^k + \alpha_p \tilde{d}_z^k > -\mu_k \Leftrightarrow \alpha_p \tilde{d}_z^k > -(z^k + \mu_k) \Leftrightarrow \alpha_p > \frac{-(z^k + \mu_k)}{\tilde{d}_z^k} > 0. \quad (3.86)$$

Seja $\bar{\alpha}_p$ o menor valor possível para α_p em (3.86) seja o menor possível, então, por ser o menor, temos que $\bar{\alpha}_p = \alpha_p$. Logo, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_p &= \frac{-(z^k + \mu_k)}{\tilde{d}_z^k} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{\alpha}_p > \frac{-z^k}{\tilde{d}_z^k} \end{aligned} \quad ; \quad (3.87)$$

portanto, existe um $\sigma \in (1, \bar{\sigma}) \subset \mathbb{R}$ tal que $\bar{\alpha}_p \geq \frac{-\sigma z^k}{\tilde{d}_z^k}$ nos assegura da viabilidade primal.

Temos, então, uma técnica de cálculo do tamanho dos passos primal e dual variante da regra de (Granville, 1994) que, segundo as experiências numéricas efetuadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho, possibilita a redução de iterações para o MPIBLM-EX.

Em (Granville, 1994), que não utiliza a função logarítmica modificada, e (Sousa, 2006), que utiliza a função barreira modificada, aplicam $\sigma = 0,9995$ sobre as expressões (3.84) e (3.85).

Neste trabalho, utilizamos $\sigma = 1,01$ sobre essas expressões visto que, através de experiências numéricas com o FPO reativo e problemas-testes matemáticos, esse número mostrou-se eficiente e, também, a técnica variante da proposta (Granville, 1994) possibilitou o aumento da taxa de convergência em relação a técnica prima-dual que utiliza a função barreira apresentada na seção 2.5. Observamos que na literatura específica sobre métodos de ponto interior, utiliza-se o valor $\sigma = 0,9995$, o qual foi definido pelo (Wright, 1995), diferentemente do valor utilizado neste trabalho, isto é, $\sigma = 1,01$.

Feito o cálculo do passo, a expressão que define ω^{k+1} é dada por:

$$\omega^{k+1} = \left(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}_i^{k+1}, \lambda_0^{k+1}, \lambda_i^{k+1} \right)^T = \left(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}_i^k, \lambda_0^k, \lambda_i^k \right)^T + \left(\bar{\alpha}_p \tilde{\mathbf{d}}_x^k, \bar{\alpha}_p \tilde{\mathbf{d}}_{z_i}^k, \bar{\alpha}_d \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k, \bar{\alpha}_d \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_i}^k \right)^T. \quad (3.88)$$

A seguir, apresentamos uma estratégia para a atualização do parâmetro de barreira.

3.6 A atualização do parâmetro de barreira μ .

A atualização do parâmetro de barreira μ para o MPIBLM-EX é dada pela heurística a seguir:

$$\mu_{k+1} = \tau \mu_k; \quad (3.89)$$

e faça-se o teste: se para todo $z^{k+1} = z^k + \bar{\alpha}_p d_z^k$ obtermos que $z^{k+1} \geq -\mu_{k+1}$, então a heurística (3.89) permanece. Caso contrário, se para algum $z^{k+1} = z^k + \bar{\alpha}_p d_z^k$ obtermos que $z^{k+1} < -\mu_{k+1}$, então μ_{k+1} recebe o seguinte incremento ou penalização:

$$\mu_{k+1} = -(1 + \tau) \times \min(\mathbf{z}_i), i = 1, \dots, 4. \quad (3.90)$$

3.7 Inicialização do MPIBLM-EX.

Para a inicialização do MPIBLM-EX, os valores μ_0 , $\mathbf{x}^0$ e $\delta_i^0, i = 1, \dots, 4$, são fornecidos pelo usuário. As demais variáveis são calculadas utilizando informações do procedimento predictor definido na seção 3.2. Assim, para o cálculo de $\mathbf{z}_1^0$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0^k &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{z}_1^0 - \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{z}_1^0 &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{u}_1. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Para o cálculo de $\mathbf{z}_2^0$, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_2^0 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\mathbf{h}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{z}_2^0 + \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{z}_2^0 &= -\mathbf{h}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{z}_2^0 + \mathbf{u}_2.
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Para o cálculo de $\mathbf{z}_3^0$, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_3^0 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{x}^0 - \mathbf{z}_3^0 - \mathbf{l}_1 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{z}_3^0 &= \mathbf{x}^0 - \mathbf{l}_1.
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Para o cálculo de $\mathbf{z}_4^0$, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_4^0 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\mathbf{x}^0 - \mathbf{z}_4^0 + \mathbf{l}_2 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{z}_4^0 &= -\mathbf{x}^0 + \mathbf{l}_2.
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Para o cálculo de λ_1^0 , temos:

$$\begin{aligned}
 \pi_1^0 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\bar{Z}_{1_0} \lambda_1^0 + \mu \delta_1^0 - D_{\bar{z}_1^0} \mathbf{d}_{\lambda_1}^0 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \lambda_1^0 &= \mu \bar{Z}_{1_0}^{-1} \delta_1^0.
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

De maneira análoga ao que foi feito em (3.95), determinamos λ_2^0 , λ_3^0 e λ_4^0 por:

$$\begin{aligned}
 \lambda_2^0 &= \mu \bar{Z}_{2_0}^{-1} \delta_2^0 \\
 \lambda_3^0 &= \mu \bar{Z}_{3_0}^{-1} \delta_3^0 \\
 \lambda_4^0 &= \mu \bar{Z}_{4_0}^{-1} \delta_4^0
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

O cálculo de λ_0^0 , é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}^0 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\nabla f(\mathbf{x}^0) - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^T \lambda_0^0 - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)^T (\lambda_2^0 - \lambda_1^0) + \lambda_3^0 - \lambda_4^0 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^T \lambda_0^0 = -\nabla f(\mathbf{x}^0) - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)^T (\lambda_2^0 - \lambda_1^0) + \lambda_3^0 - \lambda_4^0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^T \lambda_0^0 = -\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \left(\nabla f(\mathbf{x}^0) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)^T (\lambda_2^0 - \lambda_1^0) - \lambda_3^0 + \lambda_4^0 \right) \Leftrightarrow \quad (3.97) \\
 &\Leftrightarrow \lambda_0^0 = - \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^T \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \left(\nabla f(\mathbf{x}^0) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)^T (\lambda_2^0 - \lambda_1^0) - \lambda_3^0 + \lambda_4^0 \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lambda_0^0 = - \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^T \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \left(\nabla f(\mathbf{x}^0) + \mu_0 \Phi^0 \right).
 \end{aligned}$$

A expressão (3.97) nos mostra que as componentes do vetor $\lambda_0^0 \in \mathbb{R}^m$ permitem escrever o vetor $-\left(\nabla f(\mathbf{x}^0) + \mu_0 \Phi^0\right) \in \mathbb{R}^n$ como combinação linear das m colunas da matriz $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e também, pela proposição 2.27, temos que o vetor $\mathbf{y}^0 = P_{\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T)} \left(-\nabla f(\mathbf{x}^0) - \mu_0 \Phi^0 \right) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor que pertence a $\text{Im}(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^T)$ que está mais próximo do vetor de $-\left(\nabla f(\mathbf{x}^0) + \mu_0 \Phi^0\right)$ e que o número de restrições de igualdade não deve exceder o número das componentes do vetor $\mathbf{x}$, isto é, temos que $m \leq n$.

3.8 O critério de parada e algoritmo para o método para o MPIBLM-EX.

O critério de parada para o método é definido por: Dado um escalar suficientemente pequeno $\varepsilon > 0$, calcule ω^{k+1} utilizando a expressão (3.88) e verifique se a viabilidade primal, dual e as folgas complementares estão satisfeitas, ou seja, verifique se $\left\| \nabla L(\omega^{k+1}) \right\|_{\infty} < \varepsilon$. Se isso ocorrer, **pare** o método, pois o ponto ótimo foi encontrado. Caso contrário, faça $k \leftarrow k+1$ e reinicie o **procedimento previsor e corretor com estratégia de ajuste cúbico** conforme as sessões 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6. A seguir, apresentamos o algoritmo do MPIBLM-EX.

3.9 Algoritmo do MPIBLM-EX.

Nesta seção, apresentamos o algoritmo do MPIBLM-EX .

Algoritmo: MPIBLM-EX.

Passo1: Procedimentos iniciais.

Passo1.1: Forneça $\mathbf{x}^0$, $\mu_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, os estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ_i^0 , $i = 1, \dots, 4$, cujas componentes são números positivos, utilize $\tau = 0,36529008196440$;

Passo1.2: Calcule $f(\mathbf{x}^0)$, $\nabla f(\mathbf{x}^0)$, $\nabla^2 f(\mathbf{x}^0)$, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^T$, $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$ e $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$;

Passo1.3: Utilize (3.83) para construir as matrizes $\bar{Z}_{i_0}^{-1}$, $i = 1, \dots, 4$;

Passo 1.4: Utilize (3.95) e (3.96) para o cálculo dos multiplicadores de Lagrange λ_i^0 , $i = 1, \dots, 4$, e depois construa as matrizes Λ_{i_k} , $i = 1, \dots, 4$, através da expressão (3.25);

Passo 1.5: Utilize (3.97) para obter λ_0^0 ;

Passo 1.6: Calcule $L(\omega^0)$ utilizando (3.82);

Passo 1.7: Calcule o resíduo $\mathbf{m}^0$ utilizando (3.14), os resíduos $\mathbf{t}_i^0$, $i = 0, \dots, 4$, utilizando (3.20) e os resíduos π_i^0 , $i = 1, \dots, 4$, utilizando (3.26);

Passo 1.8: Calcule $\|\nabla L(\omega^0)\|_\infty$.

Passo 2: Procedimento Previsor.

Passo 2.1: Construa as matrizes $\bar{Z}_{i_k}^{-1}$, utilizando (3.83) e as matrizes Λ_{i_k} , $i = 1, \dots, 4$, através da expressão (3.25);

Passo 2.2: Construa o vetor $\boldsymbol{\varphi}^k$ utilizando (3.40) e $\mathbf{c}^k$ utilizando (3.39);

Passo 2.3: Construa a matriz $\boldsymbol{\theta}_k$ conforme apresentada no desenvolvimento da equação (3.55) e inverta-a;

Passo 2.4: Calcule o vetor de direções de busca $\mathbf{d}_\omega^k$ utilizando (3.45) e vá para o passo 3.

Passo 3: Procedimento Corretor.

Passo 3.1: Construa as matrizes $D_{z_i^k}$, $i = 1, \dots, 4$, através da expressão (3.25);

Passo 3.2: Utilize (3.57) para construir o vetor $\tilde{\mathbf{c}}^k$;

Passo 3.3: Através da expressão (3.62), calcule o vetor de direções de busca $\tilde{\mathbf{d}}_\omega^k$;

Passo 3.4: Utilize (3.84) para calcular o tamanho do passo primal $\bar{\alpha}_p$ e (3.85) para calcular o tamanho do passo dual $\bar{\alpha}_d$, use $\sigma = 1,01$;

Passo 3.5: Utilize (3.88) para calcular $\boldsymbol{\omega}^{k+1}$;

Passo 3.6: Calcule $f(\mathbf{x}^{k+1})$, $\nabla f(\mathbf{x}^{k+1})$, $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{k+1})$, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})^T$, $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$ e $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})^T$;

Passo 3.7: Calcule o resíduo $\mathbf{m}^{k+1}$ utilizando (3.14), os resíduos $\mathbf{t}_i^{k+1}$, $i = 0, \dots, 4$, utilizando (3.20) e os resíduos π_i^{k+1} , $i = 1, \dots, 4$, utilizando (3.26);

Passo 3.8: Calcule $\|\nabla L(\boldsymbol{\omega}^{k+1})\|_\infty$;

Passo 3.9: Utilize (3.82) para calcular $L(\boldsymbol{\omega}^{k+1})$;

Passo 3.10: Se $\|\nabla L(\mathbf{w}^{k+1})\|_{\infty} < \varepsilon$ **pare**, caso contrário vá para o passo 4.

Passo 4: Atualização de Parâmetros.

Passo 4.1: Utilize (3.89) para calcular μ_{k+1} . Se necessário, utilize (3.90);

Passo 4.2: Utilize (2.67) para atualizar estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ_i^{k+1} , $i = 1, \dots, 4$;

Passo 4.3: Faça $k \leftarrow k + 1$ e volte ao passo 2.

3.10 Aplicação em exemplo matemático (parte 1).

Nesta seção, apresentamos um exemplo de problema de programação não-linear e não-convexo o qual foi proposto para testar o MPIBLM-EX. Os resultados apresentados foram obtidos através de uma implementação do método em MATLAB 6.1 e mostram a eficiência deste.

Seja o problema o problema de programação não-linear e não-convexo a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad f(\mathbf{x}) &= 2 \frac{\cos\left(10 \ln(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(3 \ln(x_1^2 + x_2^2) + 16 \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \frac{\pi}{4}\right)^{-1}} + 1 \\ \text{s.a:} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 & = & 0 \\ 0 & \leq & -x_1^2 + x_2 & \leq & 2 \\ 1 & \leq & -0,1 \cos(5\pi x_1) + x_2 & \leq & 1,5 \\ -2 & \leq & x_1 & \leq & 2 \\ 0 & \leq & x_2 & \leq & 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.98)$$

As curvas de nível da função objetivo $f(\mathbf{x})$ são apresentadas na figura 3.2.

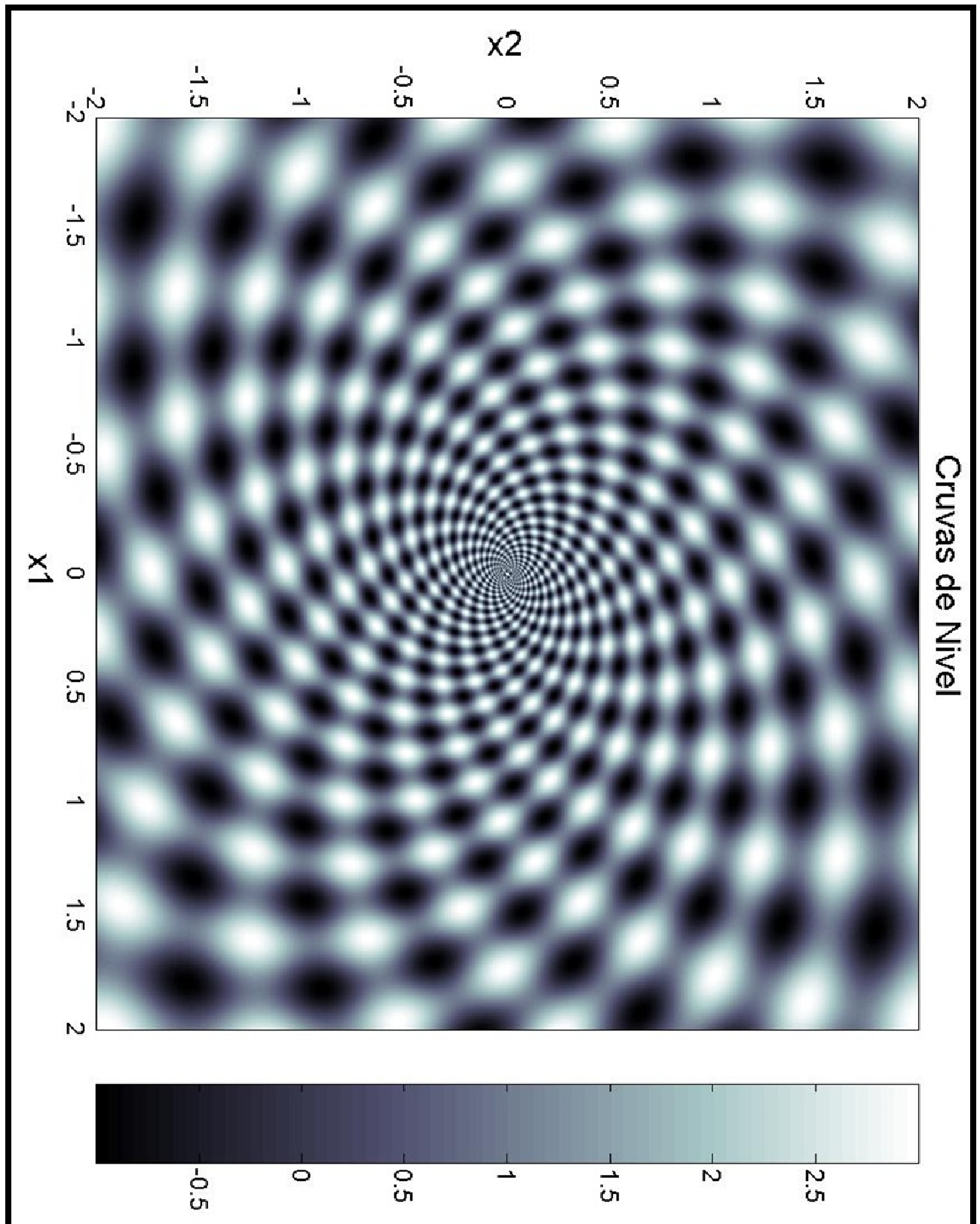


Figura 3.2: Curvas de nível da função objetivo $f(\mathbf{x})$ do problema (3.98).

A figura 3.3 nos apresenta as curvas das restrições de igualdade, de desigualdade e das variáveis canalizadas.

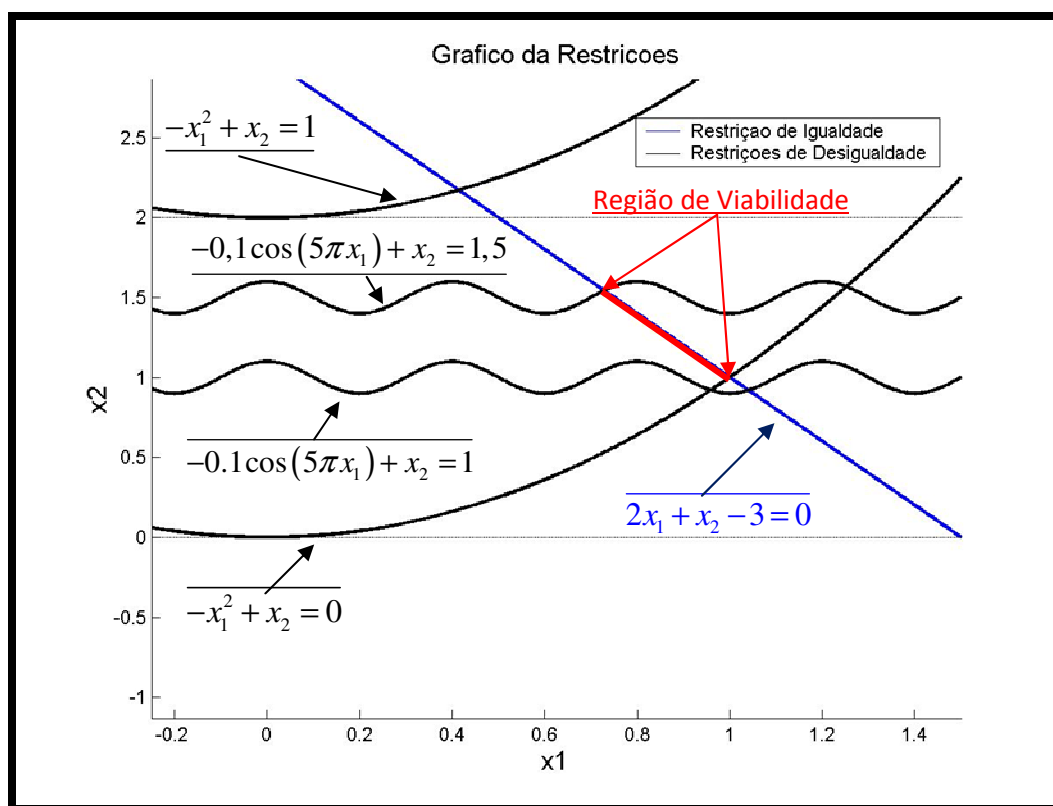


Figura 3.3: Gráfico das restrições de igualdade e de desigualdade do problema (3.98).

O problema (3.98) nos mostra que a solução está em algum ponto sobre a reta $r: x_2 = -2x_1 + 3$ onde $x_1 \in [0,72842;1] \subset \mathbb{R}$, pois se $x_1 = 0,72842$, então r intercepta a curva $x_2 = 0,1 \cos(5\pi x_1) + 1,5$ e se $x_1 = 1$, então r intercepta a curva $x_2 = x_1^2$. Ao substituirmos $x_2 = -2x_1 + 3$ na função objetivo, temos uma função F de uma variável x_1 que nos possibilita observar o comportamento da função objetivo sobre a reta r e visualizarmos os pontos x_1 que são pontos ótimos para F . A figura 3.4 nos mostra a curva $F(x_1) = f(x_1, x_2(x_1))$.

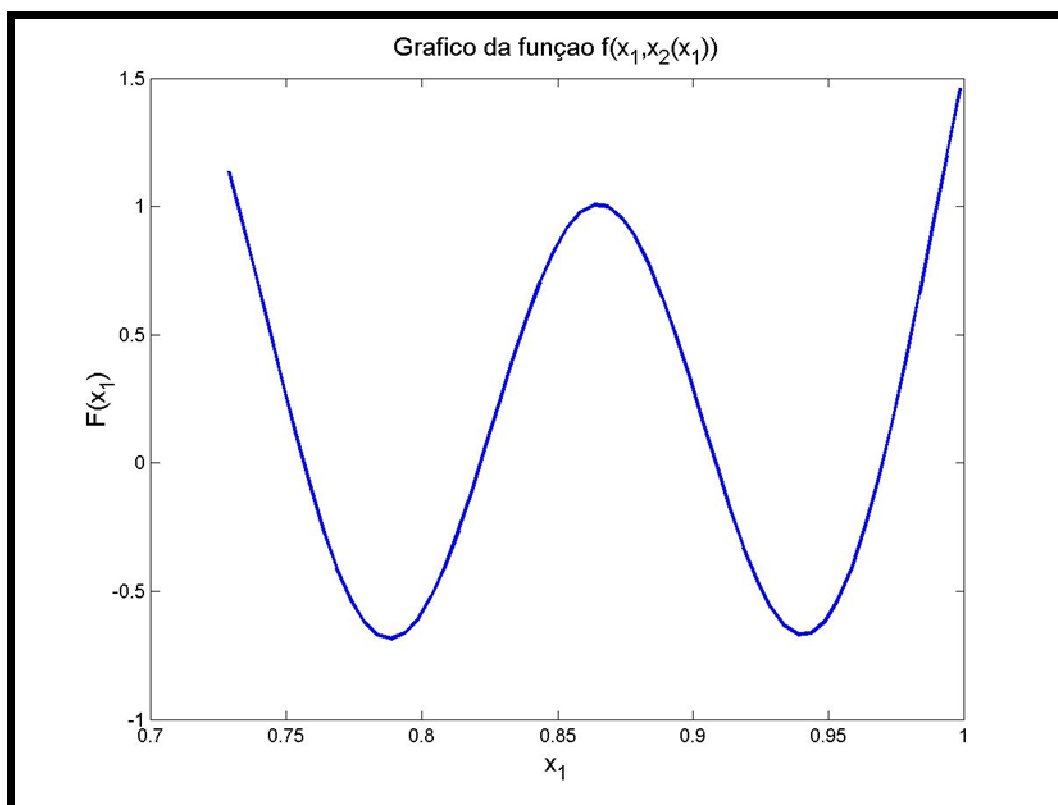


Figura 3.4: O problema (3.98) apresenta dois pontos de mínimos: um local e outro global.

Ao observarmos a figura 3.4, o problema (3.98) apresenta dois pontos de mínimo sendo que um deles está próximo do ponto $x_1 = 0,79$ e o outro está próximo do ponto $x_1 = 0,94$. Iniciamos o MPIBLM-EX com $\mu_0 = 0,05$, $\delta_i^0 = \mathbf{0}, \mathbf{1}$, $i = 1, \dots, 4$ e $\mathbf{x}^0 = \left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)^T$. A dimensão do vetor $\mathbf{w}$ é 19, isto é, esse contém 19 variáveis. Foi utilizado $\|\nabla L(\mathbf{w}^k)\|_{\infty} \leq 10^{-11}$ como critério de parada do método.

O MPIBLM-EX convergiu em 11 iterações com solução ótima primal $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0,94040362539060 \\ 1,11919274921879 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_1^* = \begin{pmatrix} 0,23483377057100 \\ 0,17848301716604 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_2^* = \begin{pmatrix} 1,76516622942900 \\ 0,32151698283396 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_3^* = \begin{pmatrix} 2,94040362539060 \\ 1,11919274921879 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{z}_4^* = \begin{pmatrix} 1,05959637460940 \\ 0,88080725078121 \end{pmatrix}$; com solução ótima dual: $\lambda_0^* = -5,55371477858784$ e $\max((\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*)) = 4,385591 \times 10^{-14}$. A função objetivo no

ponto ótimo está avaliada em $f(\mathbf{x}^*) = -0,67074760266372$ e a função lagrangiana no ponto ótimo está avaliada em $L(\omega^*) = -0,67074760266372$, a avaliação do ponto ótimo na restrição de igualdades é dada por: $g(\mathbf{x}^*) = 0$; a avaliação do ponto ótimo nas restrições de desigualdade é dada por: $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0,23483377057101 \\ 1,17848301716604 \end{pmatrix}$ a avaliação do *gap* de dualidade está avaliada, sobre a norma do máximo, em: $\max(\text{gap}) = 1,041156 \times 10^{-14}$; a precisão da solução ótima é dada por $\|\nabla L(\omega^*)\|_{\infty} = 4,956035 \times 10^{-13}$; O parâmetro de barreira μ é avaliado em $3,757856 \times 10^{-5}$. A figura 3.5 apresenta a sequência de soluções $\mathbf{x}^k$ sobre a região de viabilidade.

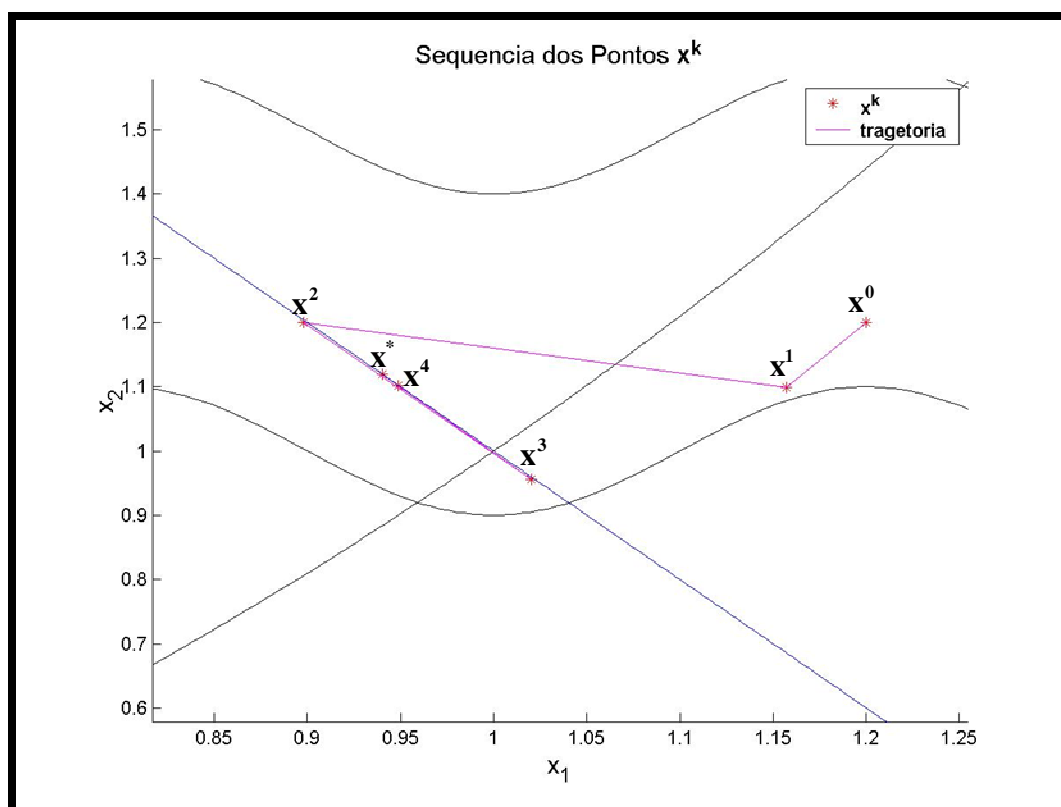


Figura 3.5: Trajetória dos pontos $\mathbf{x}^k$ sobre a região de viabilidade do problema (3.98) gerados pelo MPIBLM-EX.

A figura 3.6 apresenta a sequência de soluções $\mathbf{x}^k$ obtidas pelo MPIBLM-EX ao longo das iterações.

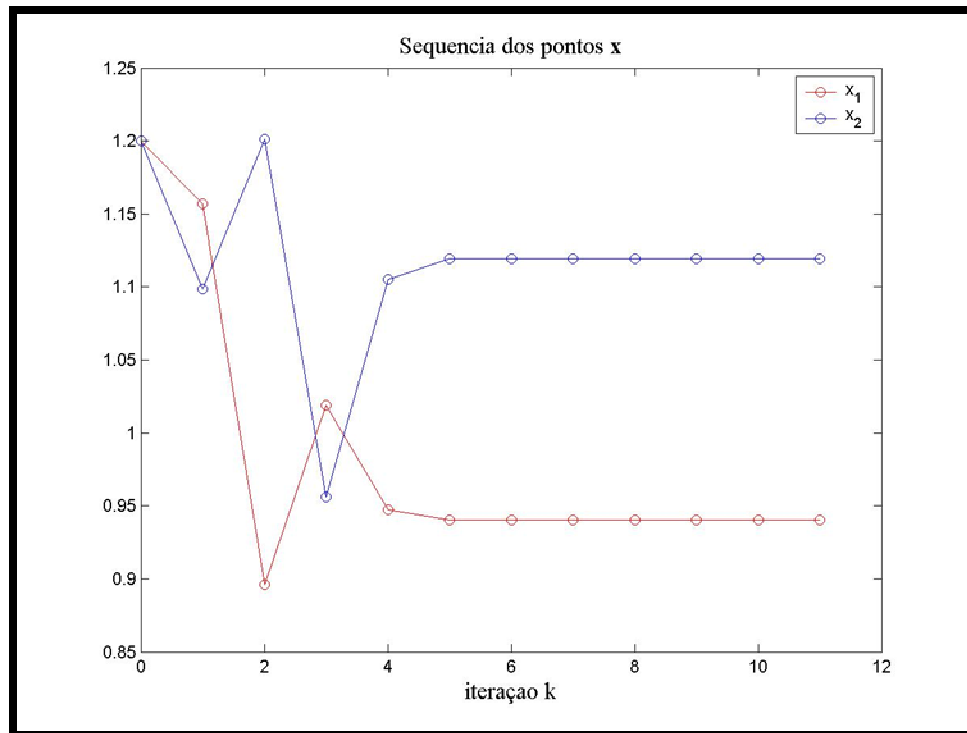


Figura 3.6: Sequência dos pontos $\mathbf{x}^k$ gerados pelo MPIBLM-EX para o problema (3.98).

Notamos na figura 3.6 que a componente x_1 convergiu para um valor próximo de 0,94040. Isto confirmou a hipótese de que um ótimo estaria próximo de 0,94 como foi observado na figura 3.4. A figura 3.7 apresenta a sequência de multiplicadores λ_0^k gerados pelo MPIBLM-EX.

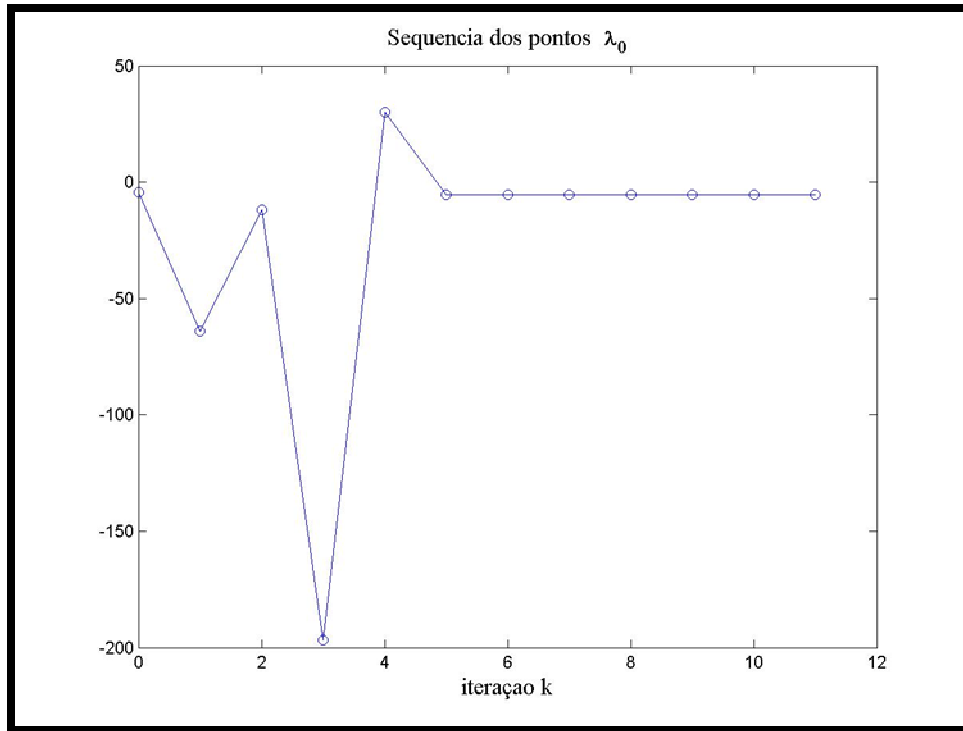


Figura 3.7: Sequência dos pontos λ_0^k gerados pelo MPIBLM-EX para o problema (3.98).

A figura 3.8 apresenta a sequência dos multiplicadores de Lagrange λ_i^k , $i = 1, \dots, 4$, gerados pelo MPIBLM-EX.

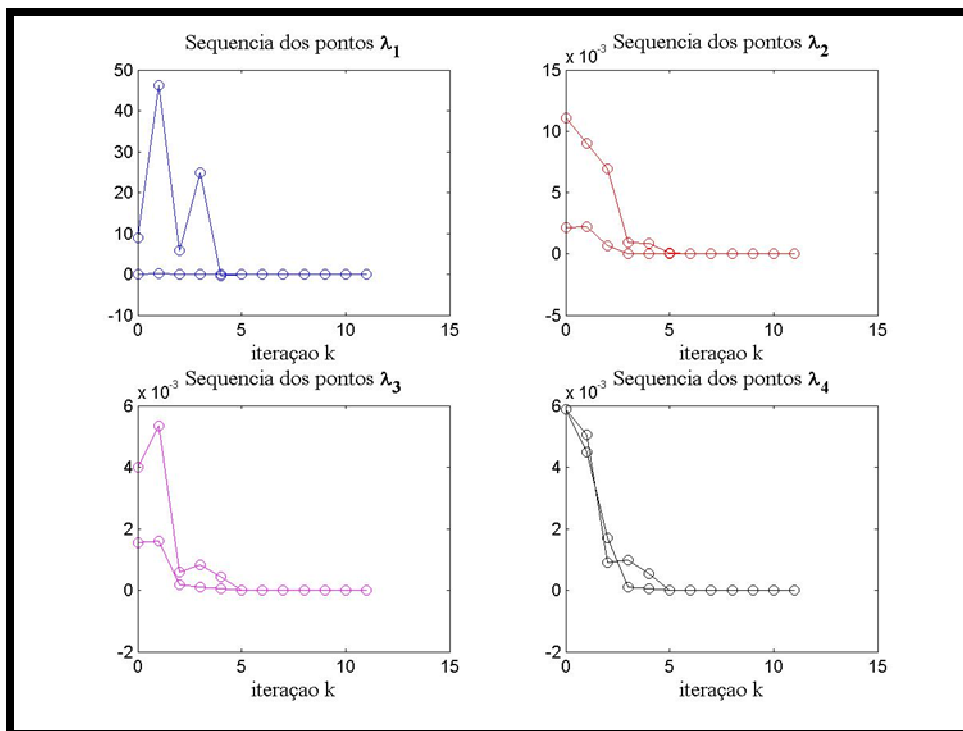


Figura 3.8: Sequência dos pontos λ_i^k , $i = 1, \dots, 4$, gerados pelo MPIBLM-EX para o problema (3.98).

Notamos na figura 3.8 que os multiplicadores de Lagrange correspondente às restrições de desigualdade e às variáveis canalizadas convergem para a nulidade por valores positivos. Isto está de acordo com a condição de dualidade forte, proposição 2.22. A tabela 1 nos apresenta a sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 1: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o problema (3.98).

k	$f(\mathbf{x}^k)$	$L(\mathbf{w}^k)$	$\ \nabla L(\mathbf{w}^k)\ _\infty$	μ_k	α_p	α_d
0	2,36093248434208	0,35426856400850	6,019	-----	-----	-----
1	1,04787841044450	-24,77052220195713	97,281	0,05	0,318	1,01
2	0,27196319594098	-12,59309739832731	31,955	0,3245	1,01	1,01
3	2,42478741059794	8,23239586169361	1676,699	0,1185	0,025	0,076
4	-0,59453917429382	-2,69656548671991	69,466	0,0433	1,01	0,486
5	-0,67074282061512	-0,65858118921429	0,197	0,0158	1,01	1,01
6	-0,67074757605112	-0,67026813321156	0,0009	0,0057	1,01	1,01
7	-0,67074760288765	-0,67074442837657	1,451e-005	0,0021	1,01	1,01
8	-0,67074760266148	-0,67074760404315	1,203e-007	0,0007	1,01	1,01
9	-0,67074760266374	-0,67074760265975	1,194e-009	0,0002	1,01	1,01
10	-0,67074760266372	-0,67074760266373	1,193e-011	0,0001	1,01	1,01
11	-0,67074760266372	-0,67074760266372	1,048e-013	3,7e-005	1,01	1,01

Observamos na tabela 1 que o parâmetro de barreira sofreu penalização na iteração 2, porém o desempenho do método foi robusto na resolução do problema (3.98) devido ao tamanho do passo ser superior a 1, decréscimo rápido do parâmetro de barreira e alta taxa de convergência para solução ótima a partir da iteração 3.

Na próxima seção, mostramos que o método primal-dual proposto neste trabalho (MPIBLM-EX) é uma variante do método primal-afim com força de centragem (MPAFC) apresentado em (Fang, et al., 1993) e é um método de gradiente projetado-escalado variante do método de gradiente projetado apresentado em (Luenberger, et al., 2008).

3.11 O MPIBLM-EX como um método de gradiente projetado.

Nesta seção, investigamos com mais detalhes os vetores de direções, primal $\tilde{\mathbf{d}}_x^k$ e dual $\tilde{\mathbf{d}}_{x_0}^k$. Essa investigação nos mostra que o MPIBLM-EX é uma variante dos métodos primal-afim com força de centragem e do gradiente projetado. Para mostrarmos o que é proposto, dependemos da hipótese de que a matriz θ_k é definida positiva e que ela tenha posto completo n . Na hipótese de que θ_k seja definida positiva apresentamos a proposição a seguir:

Proposição 3.1: Se θ_k é uma matriz definida positiva e de posto completo n , então existe uma matriz definida positiva $\theta_k^{1/2}$ tal que $(\theta_k^{1/2})^2 = \theta_k$.

Prova: Como a matriz θ_k é simétrica e definida positiva, então, pela proposição 2.5, existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}_k$ cujos elementos são autovalores positivos e distintos $v_{i_k}, i=1, \dots, n$ de θ_k e uma matriz $\mathbf{Q}_k$ cujas colunas são autovetores de θ_k , tais que:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_k &= \mathbf{Q}_k^{-1} \theta_k \mathbf{Q}_k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{D}_k &= \mathbf{Q}_k^T \theta_k \mathbf{Q}_k.\end{aligned}$$

Como os autovalores são positivos, então existe $\mathbf{D}_k^{1/2}$. Esta é calculada e dada por:

$$\mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} v_{i_k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & v_{n_k} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}_k^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{v_{i_k}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{v_{n_k}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Então, $\theta_k^{1/2}$ é definida positiva e obtida em (3.99). Desde que os autovalores de $\mathbf{D}_k$ são distintos, isto implica na existência de $\mathbf{Q}_k^{-1}$. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_k^{1/2} &= \mathbf{Q}_k^T \theta_k^{1/2} \mathbf{Q}_k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k^{-1} &= \mathbf{Q}_k^T \theta_k^{1/2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (\mathbf{Q}_k^T)^{-1} \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k^{-1} &= \theta_k^{1/2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{Q}_k \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k^T &= \theta_k^{1/2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \mathbf{Q}_k^T \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k &= \theta_k^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Para verificarmos que $(\theta_k^{1/2})^2 = \theta_k$ basta lembrarmos, pela proposição 2.5, que

$\mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^T = \mathbf{I}_n$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \theta_k &= \mathbf{Q}_k^T \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k \stackrel{\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^T = \mathbf{I}_n}{=} \\
 &= \mathbf{Q}_k^T \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^T \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k = (\mathbf{Q}_k^T \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k) (\mathbf{Q}_k^T \mathbf{D}_k^{1/2} \mathbf{Q}_k) = \\
 &= \theta_k^{1/2} \theta_k^{1/2} = (\theta_k^{1/2})^2 \blacksquare.
 \end{aligned}$$

Da equação (3.60), temos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k &= -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T\right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \mathbf{r}_\mu^k - \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)\right) - \lambda_0^k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k &= \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T\right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} (-\mathbf{r}_\mu^k) + \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T\right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) - \lambda_0^k.
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

em que:

$$\mathbf{r}_\mu^k = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \tilde{\mathbf{c}}^k + \mu_k \boldsymbol{\phi}^k. \tag{3.101}$$

É fácil constatararmos que:

$$\lambda_0^{k+1} = \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T\right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} (-\mathbf{r}_\mu^k) + \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T\right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k). \tag{3.102}$$

Ao aplicarmos a proposição 3.1 sobre a equação (3.102), temos:

$$\begin{aligned}\lambda_0^{k+1} &= \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1/2} \theta_k^{-1/2} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1/2} \theta_k^{-1/2} (-\mathbf{r}_\mu^k) + \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_0^{k+1} &= \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \mathbf{D}_k^{-1/2} \mathbf{D}_k^{-1/2} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \mathbf{D}_k^{-1/2} \mathbf{D}_k^{-1/2} (-\mathbf{r}_\mu^k) + \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k); \\ \text{em que:}\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_k^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v_{l_k}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{v_{n_k}}} \end{pmatrix}. \quad (3.103)$$

Definimos por $\widehat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ a matriz $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \mathbf{D}_k^{-1/2}$ e por $\widehat{\mathbf{r}}_\mu^k$ o vetor $\mathbf{D}_k^{-1/2} \mathbf{r}_\mu^k$, temos:

$$\lambda_0^{k+1} = \left(\widehat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \widehat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \widehat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \left(-\widehat{\mathbf{r}}_\mu^k \right) + \left(\widehat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \widehat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k). \quad (3.104)$$

A matriz $\mathbf{D}_k^{-1/2}$ faz uma mudança de escala sobre a matriz $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})$ e sobre o vetor $\mathbf{r}_\mu^k$.

Em particular, uma linha t , onde $t=1, \dots, m$, da matriz $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ é o vetor

$$\nabla g_t(\mathbf{x}^k)^T = \left(\frac{\partial g_t(\mathbf{x}^k)}{x_1}, \dots, \frac{\partial g_t(\mathbf{x}^k)}{x_j}, \dots, \frac{\partial g_t(\mathbf{x}^k)}{x_n} \right), \text{ logo, a mudança de escala } \mathbf{D}_k^{-1/2} \text{ transforma}$$

$$\nabla g_t(\mathbf{x}^k)^T \text{ no vetor } \widehat{\nabla} g_t(\mathbf{x}^k)^T = \left(\frac{\partial g_t(\mathbf{x}^k)}{x_1} \frac{1}{\sqrt{v_{l_k}}}, \dots, \frac{\partial g_t(\mathbf{x}^k)}{x_j} \frac{1}{\sqrt{v_{j_k}}}, \dots, \frac{\partial g_t(\mathbf{x}^k)}{x_n} \frac{1}{\sqrt{v_{n_k}}} \right). \text{ A figura}$$

3.9 nos mostra a interpretação geométrica do vetor $\nabla g_t(\mathbf{x}^k)$ e de $\widehat{\nabla} g_t(\mathbf{x}^k)$ quando $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

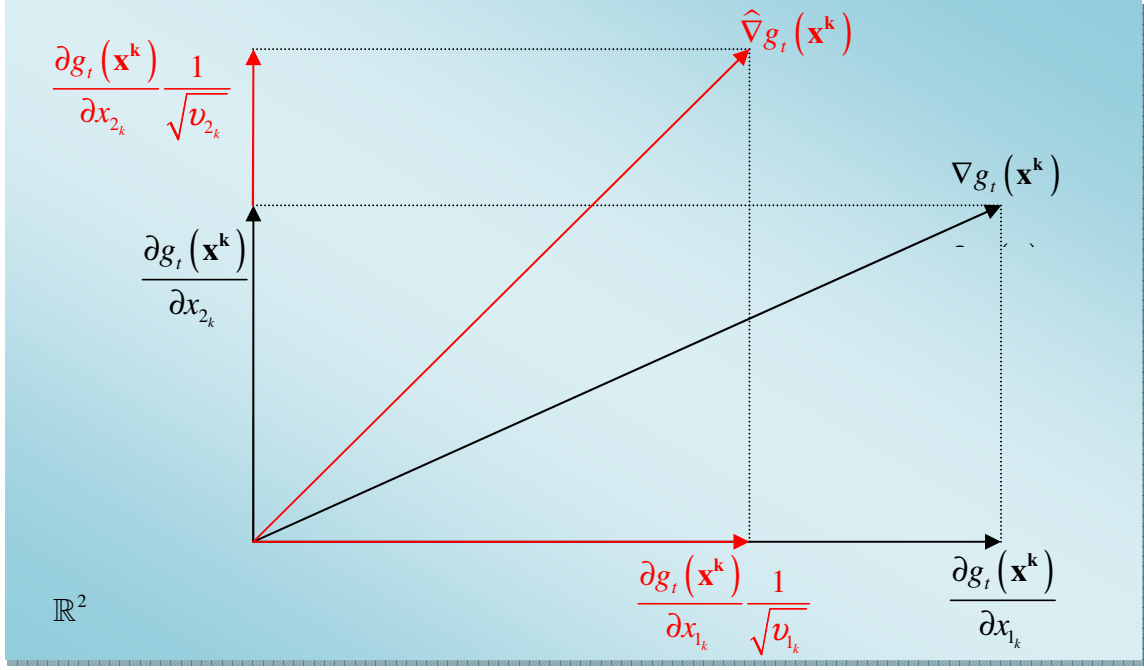


Figura 3.9: Efeito dos autovalores de $\theta_k^{-1/2}$ sobre $\nabla g_t(\mathbf{x}^k)$.

A interpretação geométrica da mudança de escala sobre o vetor $\mathbf{r}_\mu^k$ é análoga a da figura 3.9. A expressão (3.104) mostra-nos que as componentes do vetor λ_0^{k+1} permitem escrever o vetor $-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k$ e o vetor $\mathbf{v}^k = \left(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right)$ como combinação linear das m colunas da matriz $\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T$. Lembramos que as colunas de $\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T$ são linearmente independentes, pois estamos trabalhando com a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz, e também, pela proposição 2.27, temos que o vetor $\mathbf{y}^k = P_{\text{Im}(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T)} \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right) = \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \left(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right)$ é o vetor que pertence a $\text{Im}(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T)$ que está mais próximo do vetor $-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k$. A figura 3.10 mostra-nos para $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^3$ e duas restrições de igualdade $g_1(\mathbf{x})=0$ e $g_2(\mathbf{x})=0$ a interpretação geométrica da expressão $\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^{k+1} \in \mathbb{R}^3$, considerando que $\text{Im}(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T) = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

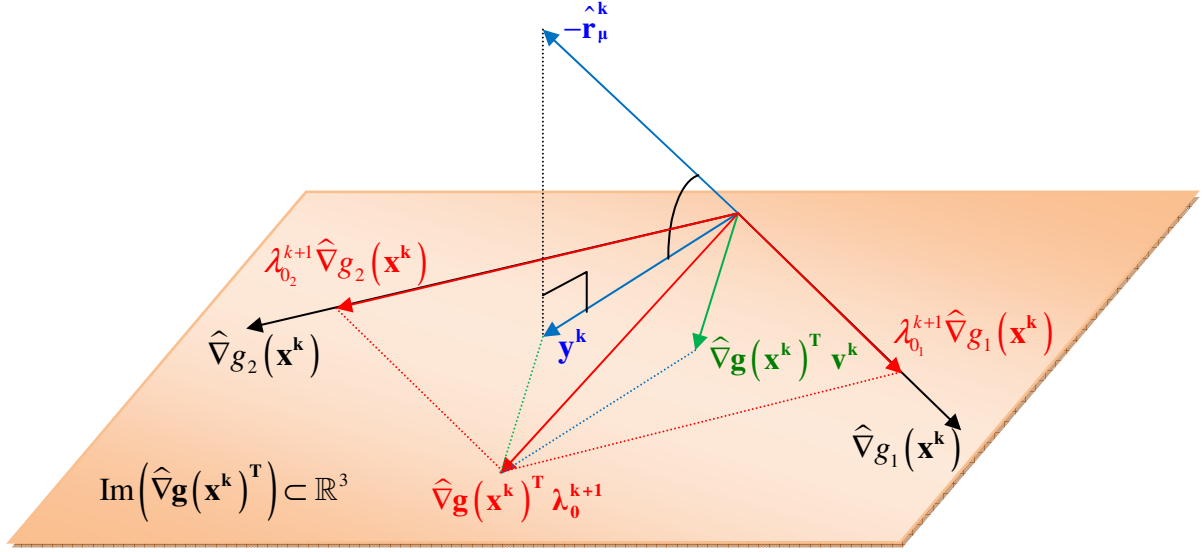


Figura 3.10: Projeção do vetor $-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k$ no espaço imagem de $\mathbf{D}_k^{-1/2} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T$.

Ao substituírmos (3.60) em (3.61), temos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{d}}_x^k &= \underbrace{\theta_k^{-1}}_{\mathbf{D}_k^{-1}} \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \left(\lambda_0^k + \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k \right) \right) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_x^k = \underbrace{\mathbf{D}_k^{-1/2} \mathbf{D}_k^{-1/2}}_{-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k} \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right) - \underbrace{\mathbf{D}_k^{-1/2} \mathbf{D}_k^{-1/2} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T}_{\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T} \lambda_0^{k+1} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_x^k = \mathbf{D}_k^{-1/2} \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right) - \mathbf{D}_k^{-1/2} \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \left(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right) + \\
 &\quad - \mathbf{D}_k^{-1/2} \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \left(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_x^k = \mathbf{D}_k^{-1/2} \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right) - \mathbf{D}_k^{-1/2} P_{\text{Im}(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T)} \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right) - \mathbf{D}_k^{-1/2} \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \left(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_x^k = \mathbf{D}_k^{-1/2} \left(I_n - P_{\text{Im}(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T)} \right) \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right) - \mathbf{D}_k^{-1/2} \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \left(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_x^k = \mathbf{D}_k^{-1/2} \left(P_{\text{ker}(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))} \left(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k \right) - \underbrace{\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \left(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)}_{\mathbf{v}^k} \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}_x^k = \mathbf{D}_k^{-1/2} \left(\underbrace{\left(\mathbf{y}^k \right)^\perp + \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \left(-\mathbf{v}^k \right)}_{\mathbf{u}^k} \right) = \hat{\mathbf{u}}^k.
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

A expressão (3.105) nos mostra que o vetor resultante da soma do vetor gradiente da função objetivo com o vetor força de centragem modificado e com o vetor residual, em sentidos opostos e escalado pela matriz $\mathbf{D}_k^{-1/2}$, é projetado ortogonalmente no espaço nulo de $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \mathbf{D}_k^{-1/2} = \hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ e, assim, obtemos $(\mathbf{y}^k)^\perp = P_{\ker(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))}(-\hat{\mathbf{r}}_\mu^k)$. O interessante é que $\tilde{\mathbf{d}}_x^k$ é resultado de uma mudança de escala, através da matriz $\mathbf{D}_k^{-1/2}$, sobre o vetor $\mathbf{u}^k$: vetor resultante da soma do vetor $(\mathbf{y}^k)^\perp \in \ker(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))$ com o vetor $\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T(-\mathbf{v}^k) \in \text{Im}(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T)$. A figura 3.11 mostra-nos a interpretação geométrica do vetor $\tilde{\mathbf{d}}_x^k$.

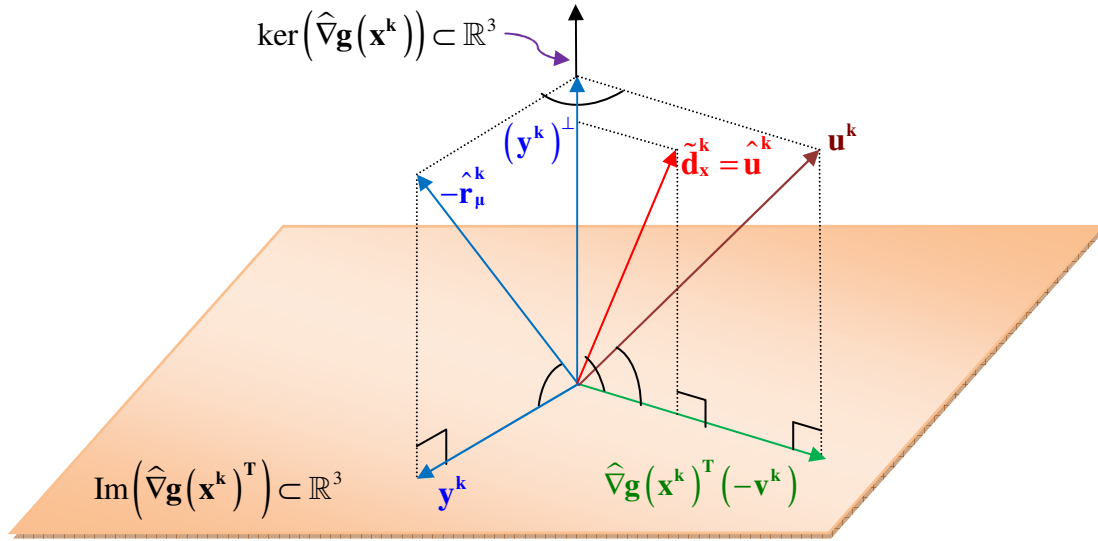


Figura 3.11: Interpretação geométrica do vetor $\tilde{\mathbf{d}}_x^k$.

Da equação (3.105), destacamos duas parcelas. Uma dessas parcelas é responsável pela redução da função objetivo na região de viabilidade e a outra é responsável por afastar um ponto da fronteira na região de viabilidade, isto é, ele é responsável pela trajetória central.

A parcela responsável pela redução da função objetivo é $\mathbf{D}_k^{-1/2} P_{\ker(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))} \mathbf{D}_k^{-1/2} (-\nabla f(\mathbf{x}^k))$. Através dos resultados apresentados na proposição 2.8, mostramos a seguir que a condição $\nabla f(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_x^k < 0$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \tilde{\mathbf{d}}_x^k &= \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{D}_k^{-1/2} P_{\ker(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))} \mathbf{D}_k^{-1/2} (-\nabla f(\mathbf{x}^k)) = \\ &= \underbrace{\nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{D}_k^{-1/2} P_{\ker(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))}}_{(\mathbf{y}_1^k)^\perp} \underbrace{P_{\ker(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))}^T \mathbf{D}_k^{-1/2} (-\nabla f(\mathbf{x}^k))}_{(-\mathbf{y}_1^k)^\perp} = -(\mathbf{y}_1^k)^\perp (\mathbf{y}_1^k)^\perp = \\ &= -\|(\mathbf{y}_1^k)^\perp\|^2 < 0. \end{aligned} \quad (3.106)$$

A parcela $\mathbf{D}_k^{-1/2} P_{\ker(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))} \mathbf{D}_k^{-1/2} (-\mu_k \boldsymbol{\Phi}^k)$ é o vetor força de centragem modificado projetado-escalado, que é responsável por afastar a solução obtida da fronteira da região viável ampliada. Assim, de acordo com interpretação de (Fang, et al., 1993) feita para a função barreira logarítmica, o método da função barreira logarítmica modificada é um algoritmo Primal – Afim com força de centragem modificado. O vetor $\mu_k \boldsymbol{\Phi}^k = \mu_k \left[\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(-\bar{Z}_{1_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_1^k + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_2^k \right) - \bar{Z}_{3_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_3^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_4^k \right]$, como vimos, é projetado no espaço nulo de $\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$, ou seja, no espaço de viabilidade primal e, também vimos na expressão (3.97), que esse vetor está diretamente relacionado com as condições de complementaridade, por isso que, diferentemente de (Mehrotra, 1992) e (Wu, et al., 1994), consideramos interessante não desprezar essa componente no procedimento previsor e corretor, e, portanto, utilizamos $\mu_k \neq 0$ para o cálculo das direções primais e duais em ambos os procedimentos.

Se o MPIBLM-EX encontrou uma região tal que a partir de uma iteração k o método converge para uma solução ótima, então constatamos que parcela $\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{v}^k$ tende para o vetor nulo, pois $\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \rightarrow \mathbf{0}$, assim, o vetor gradiente da função objetivo tende a ser resultante

da combinação linear dos gradientes das restrições ativas, implicando em $\tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^k \in \ker(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))$.

Esse resultado está de acordo com a proposição 2.12 e com a definição 2.16.

Essa seção apresentou o MPIBLM-EX como um método de gradiente projetado-escalado com a observação de que θ_k é definida positiva na iteração corrente, porém, em programação não-linear com região viável não-convexa podemos encontrar, em uma iteração k , algum autovalor da matriz $\theta_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ negativo e, assim, $\mathbf{D}_k^{-1/2}$ será uma matriz com alguns elementos estritamente em $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos) que podem influenciar o desempenho do MPIBLM-EX por divergências ou mau-condicionamento. Uma alternativa para evitar a ocorrência de um número complexo puro na matriz $\mathbf{D}_k^{-1/2}$, é apresentada na seção a seguir.

3.12 A estratégia de convergência global e o método MPIBLMCG-EX.

A matriz θ_k é definida pela matriz hessiana $\nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{w}^k) = \frac{\partial L(\mathbf{w}^k)}{\partial \mathbf{x}^k \partial \mathbf{x}^k}$ da função Lagrangiana barreira modificada aplicada à variável $\mathbf{x}^k$. Notemos que ela é similar à $\nabla^2 FABarmod(\mathbf{x}^k)$, que foi apresentada na seção 2.5, a qual foi complementada com as matrizes hessianas dos funcionais de igualdade, com as matrizes hessianas dos funcionais de desigualdade canalizada, com as matrizes escalas primal-dual $\bar{Z}_{i_k}^{-1} \Lambda_{i_k}$, $i=1, \dots, 4$, isto é, a matriz $\nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{w}^k)$ é uma matriz $\nabla^2 FABarmod(\mathbf{x}^k)$ aumentada. A matriz θ_k é reapresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \theta_k = \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{w}^k) = & \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^m \left[\left(\lambda_0^k \right)_i \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^k) \right] + \sum_{i=1}^r \left[\left(\lambda_2^k - \lambda_1^k \right)_i \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k) \right] + \\ & + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \right) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \end{aligned} \quad (3.107)$$

De acordo com (Benson, et al., 2000), definimos a matriz θ_k por *matriz dual normal*. A matriz dual normal é fundamental para o MPIBLM-EX, pois, como vimos na seção 3.10, a matriz simétrica e definida positiva $\theta_k^{-1/2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ faz mudança de escala sobre as matrizes $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ e $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T$, implicando diretamente sobre a qualidade das matrizes de projeção-escala $P_{\text{Im}(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T)}$ e $P_{\text{ker}(\hat{\nabla} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))}$, e faz uma mudança de escala sobre o vetor $\mathbf{r}_\mu^k = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \mu_k \boldsymbol{\varphi}^k + \tilde{\mathbf{c}}^k$. Todo esse ajuste é feito para que a solução ótima primal $\mathbf{x}^*$ satisfaça todas as restrições do problema e que seja pelo menos um ponto de mínimo local.

Contudo, em problemas de programação não-linear em domínio não-convexo, é possível que em alguma iteração k exista algum autovalor de $\theta_k^{-1/2}$ que seja um número complexo do tipo $\frac{1}{\sqrt{|v_{k_j}|}}i$, $i^2 = -1$ e $j = 1, \dots, n$. Certamente esse resultado infere diretamente as matrizes de projeção-escala e a mudança de escala sobre o vetor $\mathbf{r}_\mu^k$ com a possibilidade de que o MPIBLM-EX encontre soluções inviáveis, instabilidade numérica e, também, a possibilidade de convergência para um ponto de máximo local. Isso só ocorre se θ_k não é definida positiva.

Pelo fato de que a matriz θ_k é simétrica, uma alternativa para verificarmos se a matriz dual normal é definida positiva é efetuarmos a decomposição de Cholesky (DC). Caso a DC não seja possível uma estratégia, que pode ser encontrada em (Bazaraa, et al., 2006) e em (Benson, et al., 2000), é aplicada sobre o MPIBLM-EX. Essa estratégia é a perturbação sobre a matriz dual normal θ_k definida da seguinte maneira:

$$\hat{\theta}_k = \theta_k + \beta_k I_n. \quad (3.108)$$

onde I_n é a matriz identidade e $\beta_k \in \mathbb{R}_+$. O número β é denominado, de acordo com

(Bazaraa, et al., 2006), por *parâmetro de damping* ou *parâmetro de amortecimento* de Levenberg-Marquardt. Essa estratégia apresenta algumas vantagens interessantes para o método tais como: se θ_k for semi-definida ou definida negativa em ω^k , a perturbação (3.108) a transforma em definida positiva, isto é, essa variante do método de Levenberg-Marquardt, que foi apresentado na seção 2.9, perturba diretamente os autovalores da matriz dual normal, como mostramos a seguir: Sejam: $\mathbf{D}_k$ uma matriz cujos elementos são autovalores distintos e $\mathbf{Q}_k$ uma matriz cujos elementos são os autovetores da matriz dual normal, então,

$$\mathbf{Q}_k \theta_k \mathbf{Q}_k^T = \mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} v_{1_k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & v_{n_k} \end{pmatrix}$$

e, ao considerarmos a definição (3.108), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k + \beta_k \mathbf{I}_n = \hat{\mathbf{D}}_k &= \begin{pmatrix} v_{1_k} + \beta_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & v_{n_k} + \beta_k \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_k \hat{\theta}_k \mathbf{Q}_k^T \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Q}_k^{-1} \hat{\mathbf{D}}_k (\mathbf{Q}_k^T)^{-1} = \hat{\theta}_k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Q}_k^T \hat{\mathbf{D}}_k \mathbf{Q}_k = \hat{\theta}_k = \theta_k + \beta_k \mathbf{I}_n. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Assim, enquanto a DC não for satisfeita, a perturbação (3.108) é aplicada, isto é, essa estratégia transforma o MPIBLM-EX de tal forma a determinar e garantir uma sequência de direções de descida para a determinação de novos pontos, convertendo-o em um método primal-dual com estratégia de convergência global (CG), ou seja, o MPIBLM-EX transforma-se em método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada, com estratégias de ajuste cúbico e de convergência global (MPIBLMCG-EX). Para um $\beta_k > 0$ suficiente para que $\beta_k > \min\{v_{j_k}\}$, $j = 1, \dots, n$, seja verdadeiro, temos que $\hat{\mathbf{D}}_k^{-1/2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e as matrizes de projeção-escala estão bem definidas em $\mathbb{R}^{n \times n}$ e o vetor $\hat{\mathbf{r}}_\mu^k$ também está bem definido em $\mathbb{R}^n$, portanto, temos o decréscimo da função

objetivo conforme a expressão (3.106), em outras palavras, essa estratégia converte o método primal-dual em um **método primal-dual globalmente convergente**, tal que pelo menos um ponto de mínimo local seja encontrado no interior da região viável.

A matriz $\mathbf{D}_k^{-1/2}$ é dada a seguir:

$$\widehat{\mathbf{D}}_k^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \sqrt{v_{l_k} + \beta_k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \sqrt{v_{n_k} + \beta_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3.110)$$

Define-se β_0 de modo empírico. Sugerimos que o parâmetro seja iniciado por um valor $\beta_0 \in (0,1] \subset \mathbb{R}$ mesmo que θ_k seja definida positiva. O motivo é que: se os parâmetros iniciais estiverem próximos de uma solução ótima isso infere quão próximo da singularidade está a matriz dual normal no ponto ω^k . Assim, atribuindo um valor adequado ao parâmetro de amortecimento, o mesmo tratará essa singularidade, isto é, essa estratégia favorece ao método alcançar soluções mais refinadas com redução da probabilidade de uma interrupção prematura por motivos de instabilidade numérica. Mas uma má escolha irá gerar um número maior de iterações ou, em casos extremos, a inviabilidade do método.

Nas ocorrências em que a DC não seja satisfeita na iteração k , apresentamos uma proposta (heurística) para atualização do parâmetro de amortecimento, até que a matriz dual normal seja definida positiva na iteração k . Para isso, tomamos como norteador os parâmetros de barreira μ_k e μ_{k-1} . Como $\mu_k < \mu_{k-1}$ temos que $\frac{\mu_k}{\mu_{k-1}} \beta_k < \beta_k$.

Tomemos um segmento de reta euclidiana $\overline{AD}$ cuja medida é $\frac{\mu_k}{\mu_{k-1}} \beta_k$, construímos o segmento $\overline{DE}$ cuja medida é $\frac{\mu_k}{2\mu_{k-1}} \beta_k$ e $\overline{DE} \perp \overline{AD}$. A hipotenusa do triângulo ADE , por

Pitágoras, mede $\frac{\mu_k}{2\mu_{k-1}}\beta_k\sqrt{5}$. Tomemos uma circunferência $C_{1\odot}$ de centro E e raio $|\overline{DE}|$ e marcamos o ponto E' o qual é comum à circunferência $C_{1\odot}$ e à hipotenusa $\overline{AE}$. Agora tomemos uma circunferência $C_{2\odot}$ de centro A e raio $|\overline{AE'}|$ e marcamos o ponto D' o qual é comum à circunferência $C_{2\odot}$ e ao segmento $\overline{AD}$. O segmento $\overline{AD'}$ tem medida $|\overline{AD'}| = |\overline{AE}| - |\overline{ED}| = \frac{\mu_k}{2\mu_{k-1}}\beta_k\sqrt{5} - \frac{\mu_k}{2\mu_{k-1}}\beta_k \Rightarrow |\overline{AD'}| = \frac{\mu_k}{\mu_{k-1}}\beta_k\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. O ponto D' que está entre A e D divide o segmento $\overline{AD}$ em seção áurea. A figura 3.12 nos mostra a geometria do que foi descrito para a obtenção do segmento $\overline{AD'}$.

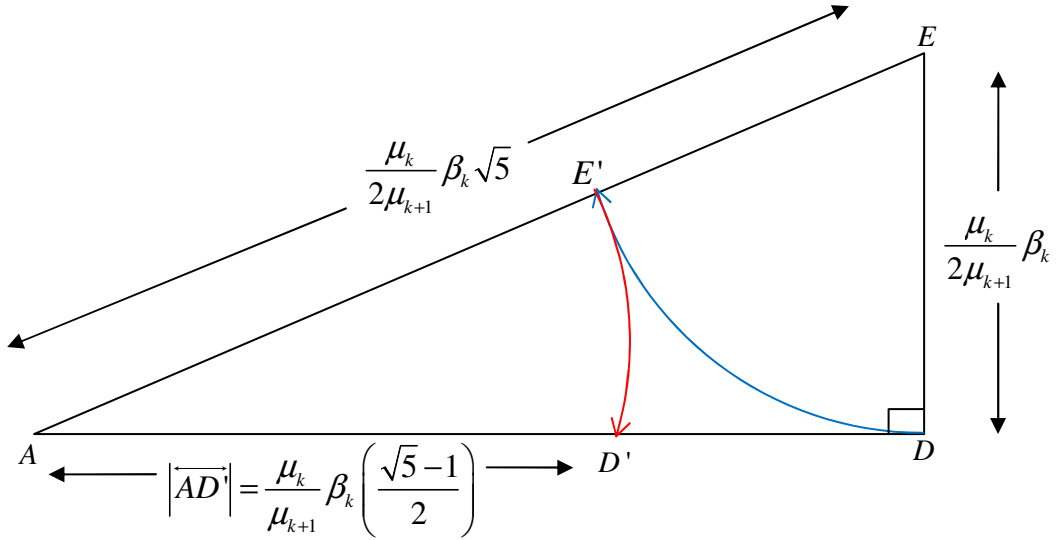


Figura 3.12: Construção do segmento $\overline{AD'}$.

Agora, tomemos um retângulo euclidiano $ABCD'$ cujas medidas de seus segmentos sejam $|\overline{AB}| = |\overline{D'C}| = \beta_k$ e $|\overline{AD'}| = |\overline{BC}| = \frac{\mu_k}{\mu_{k-1}}\beta_k\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ e M um ponto médio sobre o segmento $\overline{AC}$: Por Pitágoras, temos que $|\overline{MC}| = \frac{\beta_k}{2\mu_{k-1}}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2\mu_k^2 + \mu_{k-1}^2}$; tomemos uma circunferência $H_{\odot}$ de centro M e raio $|\overline{MC}|$, a intersecção de $H_{\odot}$ com a reta r , que contém

o segmento de reta $\overrightarrow{AB}$, define um ponto C' tal que B está entre $\overrightarrow{MC'}$ e M está entre $\overrightarrow{AB}$, portanto:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC'}| &= |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MC'}| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{AC'}| &= \frac{\beta_k}{2} + \frac{\beta_k}{2\mu_{k-1}} \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2 \mu_k^2 + \mu_{k-1}^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{AC'}| &= \beta_k \left(\frac{\mu_{k-1} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2 \mu_k^2 + \mu_{k-1}^2}}{2\mu_{k-1}} \right). \end{aligned}$$

Seja lm o número de iterações no procedimento de decomposição de Cholesky necessárias para tornar a θ_k (matriz dual normal) definida positiva, então temos o processo iterativo definido a seguir:

$$\beta_{lm+1} = \beta_{lm} \left(\frac{\mu_{k-1} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2 \mu_k^2 + \mu_{k-1}^2}}{2\mu_{k-1}} \right). \quad (3.111)$$

Após DC ser satisfeito definimos $\beta_k = \beta_{lm+1}$. A figura 3.13 mostra geometricamente o procedimento de determinação da heurística apresentada em (3.111).

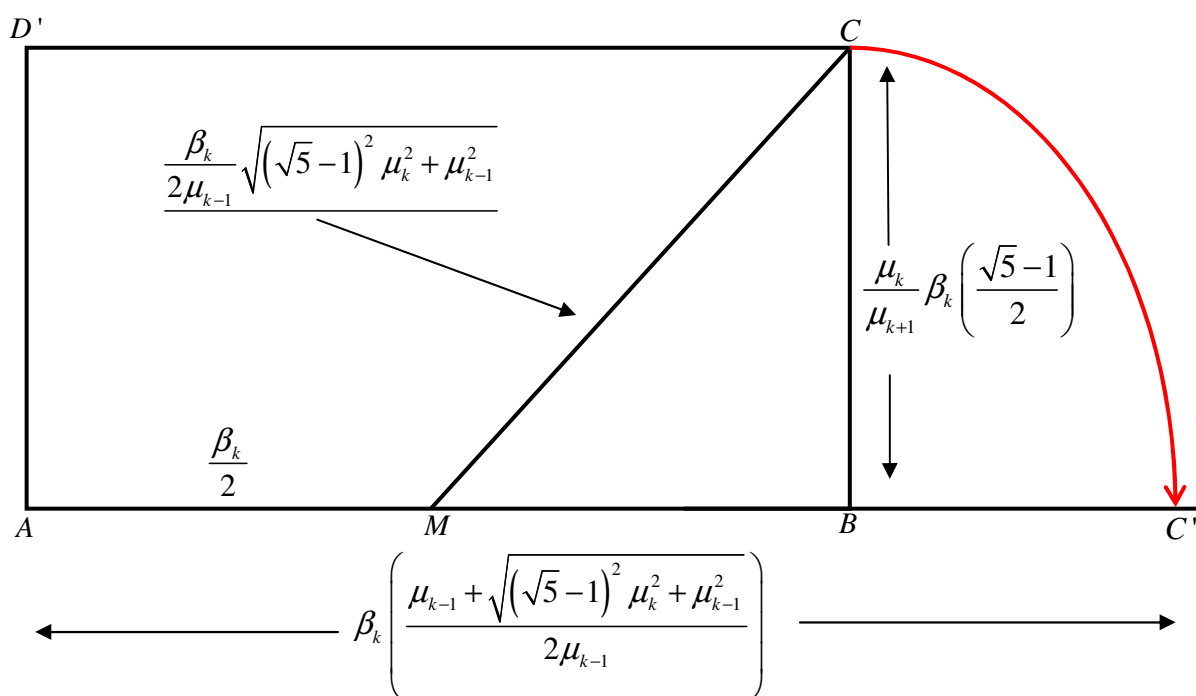


Figura 3.13: Esquema gráfico para a determinação da heurística (3.111).

Suponha que as medidas dos lados do retângulo $ABCD'$ fossem β , então a heurística (3.111) é definida por $\beta_{lm+1} = \beta_{lm} \phi$ em que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número áureo. Uma das propriedades do número áureo é a de que, dentre todos os números irracionais, ele é o “mais irracional”, pois o número áureo é, em relação à teoria de fração contínua, definido por:

$$0 = \phi^2 - \phi - 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\phi} = \phi \Leftrightarrow \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Como a fração contínua correspondente ao número áureo é composta somente por uns, ela converge muito lentamente. O número áureo é, neste sentido, mais “difícil” de se expressar como uma fração de qualquer outro número irracional, por isso ϕ recebe o “mérito” de ser o “mais irracional” dos irracionais e o número $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ é o número que divide um número em seção áurea. Mais informações sobre o número áureo podem ser encontradas em (Livio, 2006).

A heurística (3.111) mostra que β não é só gerada em função do número áureo, β é gerado em função de uma “família áurea” devido ao ajuste dado pelo importante parâmetro de penalidade μ , que é diferente iteração após iteração. Devido a este fato, a proposta de heurística para o parâmetro de amortecimento apresentada nesse trabalho mostrou-se mais eficiente e estável do que a heurística apresentada em (Bazaraa, et al., 2006), cujo autor define uma heurística definida por $\beta_{lm+1} = 2\beta_{lm}$.

Para uma iteração que passa do procedimento corretor para o previsor, ou seja, para uma iteração $k+1$, podemos atualizar o valor de β_k de acordo com a definição a seguir, que propõe uma modificação na definição do parâmetro de amortecimento em relação àquela encontrada em (Bazaraa, et al., 2006):

i) Se $L(\omega^k) - L(\omega^{k+1}) < 0,25$, então β_k é atualizado pela heurística:

$$\beta_{k+1} = \frac{\beta_k}{3}. \quad (3.112)$$

ii) Se $L(\omega^k) - L(\omega^{k+1}) > 0,75$, então β_k é atualizado pela heurística e, (3.111)

iii) Se $0,25 \leq L(\omega^k) - L(\omega^{k+1}) \leq 0,75$, então o valor $\beta_{k+1} = \beta_k$. (3.113)

3.13 Algoritmo do MPIBLMCG-EX.

Nesta seção, apresentamos o algoritmo do MPIBLMCG-EX.

Algoritmo: MPIBLMCG-EX.

Passo1: Procedimentos iniciais.

Passo1.1: Forneça $\mathbf{x}^0$, $\mu_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, os estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ_i^0 , $i = 1, \dots, 4$, cujas componentes são números positivos, utilize $\tau = 0,36529008196440$;

Passo 1.2: Calcule $f(\mathbf{x}^0)$, $\nabla f(\mathbf{x}^0)$, $\nabla^2 f(\mathbf{x}^0)$, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)^T$, $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$ e $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$;

Passo 1.3: Utilize (3.83) para construir as matrizes $\bar{Z}_{i_0}^{-1}$, $i = 1, \dots, 4$;

Passo 1.4: Utilize (3.95) e (3.96) para o cálculo dos multiplicadores de Lagrange λ_i^0 , $i = 1, \dots, 4$, e depois construa as matrizes Λ_{i_k} , $i = 1, \dots, 4$, através da expressão (3.25);

Passo 1.5: Utilize (3.97) para obter λ_0^0 ;

Passo 1.6: Calcule $L(\omega^0)$ utilizando (3.82);

Passo 1.7: Calcule o resíduo $\mathbf{m}^0$ utilizando (3.14), os resíduos $\mathbf{t}_i^0$, $i = 0, \dots, 4$, utilizando (3.20) e os resíduos π_i^0 , $i = 1, \dots, 4$, utilizando (3.26);

Passo 1.8: Calcule $\|\nabla L(\omega^0)\|_\infty$.

Passo 2: Procedimento Previsor.

Passo 2.1: Construa as matrizes $\bar{Z}_{i_k}^{-1}$, utilizando (3.83) e as matrizes Λ_{i_k} , $i = 1, \dots, 4$, através da expressão (3.25);

Passo 2.2: Construa o vetor ϕ^k utilizando (3.40) e $\mathbf{c}^k$ utilizando (3.39);

Passo 2.3: Construa a matriz θ_k conforme (3.107) e inicie o procedimento de Decomposição de Cholesky (DC);

Passo 2.3.1: Faça $lm = 1$ e aplique a expressão (3.108);

Passo 2.3.2: Enquanto a DC não for possível, incremente β_{lm} através da expressão (3.111), faça $lm \leftarrow lm + 1$, aplique a expressão (3.108) e reinicie a DC;

Passo 2.3.3: Se satisfeito passo 2.3.2, faça $\beta_k \leftarrow \beta_{lm+1}$, inverta a matriz $\hat{\theta}_k$ e vá para o passo 2.4.

Passo 2.4: Calcule o vetor de direções de busca $\mathbf{d}_\omega^k$ utilizando (3.45) e vá para o passo 3.

Passo 3: Procedimento Corretor.

Passo 3.1: Construa as matrizes $D_{z_i^k}$, $i=1,...,4$, através da expressão (3.25);

Passo 3.2: Utilize (3.57) para construir o vetor $\tilde{\mathbf{c}}^k$;

Passo 3.3: Através da expressão (3.62), calcule o vetor de direções de busca $\tilde{\mathbf{d}}_\omega^k$;

Passo 3.4: Utilize (3.84) para calcular o tamanho do passo primal $\bar{\alpha}_p$ e (3.85) para calcular o tamanho do passo dual $\bar{\alpha}_d$, use $\sigma = 1,01$;

Passo 3.5: Utilize (3.88) para obter ω^{k+1} ;

Passo 3.6: Calcule $f(\mathbf{x}^{k+1})$, $\nabla f(\mathbf{x}^{k+1})$, $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{k+1})$, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$, $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})^T$, $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$ e $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})^T$;

Passo 3.7: Calcule o resíduo $\mathbf{m}^{k+1}$ utilizando (3.14), os resíduos $\mathbf{t}_i^{k+1}$, $i=0,...,4$, utilizando (3.20) e os resíduos π_i^{k+1} , $i=1,...,4$, utilizando (3.26);

Passo 3.8: Calcule $\|\nabla L(\omega^{k+1})\|_\infty$;

Passo 3.9: Utilize (3.82) para calcular $L(\omega^{k+1})$;

Passo 3.10: Se $\|\nabla L(\omega^{k+1})\|_{\infty} < \varepsilon$ **pare**, caso contrário vá para o passo 4.

Passo 4: Atualização de Parâmetros.

Passo 4.1: Utilize (3.89) para obter μ_{k+1} . Se necessário, utilize (3.90);

Passo 4.2: Utilize (2.67) para atualizar estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ_i^{k+1} , $i = 1, \dots, 4$;

Passo 4.3: Calcule $L(\omega^k) - L(\omega^{k+1})$ e obtenha β_{k+1} segundo as condições *i*), *ii*) e *iii*) apresentadas na seção 3.12;

Passo 4.4: Faça $k \leftarrow k + 1$ e volte ao passo 2.

3.14 Aplicação em exemplo matemático (parte 2).

Nesta seção, aplicamos o MPIBLMCG-EX sobre o problema (3.98) com as mesmas condições iniciais impostas ao MPIBLM-EX. Mostramos no final desta seção que o MPIBLMCG-EX **pode** encontrar soluções ótimas em domínios não-convexos iguais ou melhores do que o MPIBLM-EX sob as mesmas condições iniciais. Os resultados apresentados foram obtidos através de uma implementação do método em MATLAB 6.1 e mostram a eficiência e superioridade deste sobre o MPIBLM-EX.

Reapresentamos o problema (3.98) a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(\mathbf{x}) &= 2 \frac{\cos\left(10\ln(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(3\ln(x_1^2 + x_2^2) + 16\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \frac{\pi}{4}\right)^{-1}} + 1 \\ \text{s.a: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 & = & 0 \\ 0 & \leq & -x_1^2 + x_2 & \leq & 2 \\ 1 & \leq & -0,1\cos(5\pi x_1) + x_2 & \leq & 1,5 \\ -2 & \leq & x_1 & \leq & 2 \\ 0 & \leq & x_2 & \leq & 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Iniciamos o MPIBLMCG-EX com $\mu_0 = 0,05$, $\delta_i^0 = \mathbf{0}, \mathbf{1}$, $i = 1, \dots, 4$ e $\mathbf{x}^0 = \left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)^T$ e

$\beta_0 = 0,1$. A dimensão do vetor ω é 19, isto é, esse contém 19 variáveis. Foi utilizado

$\|\nabla L(\omega^k)\|_{\infty} \leq 10^{-11}$ como critério de parada do método.

O MPIBLMCG-EX convergiu em 10 iterações com solução ótima primal

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0,78799637174976 \\ 1,42400725650048 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_1^* = \begin{pmatrix} 0,80306897460970 \\ 0,32577959951863 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_2^* = \begin{pmatrix} 1,19693102539030 \\ 0,17422040048137 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z}_3^* = \begin{pmatrix} 2,78799637174976 \\ 1,42400725650048 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{z}_4^* = \begin{pmatrix} 1,21200362825024 \\ 0,57599274349952 \end{pmatrix}; \text{ com solução ótima dual:}$$

$\lambda_0^* = 4,53200088969431$ e $\max((\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*)) = 2,9960443 \times 10^{-19}$. A função objetivo no

ponto ótimo está avaliada em $f(\mathbf{x}^*) = -0,68558214673622$ e a função lagrangiana no ponto

ótimo está avaliada em $L(\omega^*) = -0,68558214673622$, a avaliação do ponto ótimo na

restrição de igualdades é dada por: $g(\mathbf{x}^*) = 0$; a avaliação do ponto ótimo nas restrições de

desigualdade é dada por: $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0,80306897460970 \\ 1,32577959951863 \end{pmatrix}$ a avaliação do *gap* de dualidade está

avaliada, sobre a norma do máximo, em: $\max(\text{gap}) = 9,744738 \times 10^{-15}$; a precisão da solução

ótima é dada por $\|\nabla L(\omega^*)\|_{\infty} = 2,191136 \times 10^{-12}$; O parâmetro de barreira μ_k é avaliado em

$1,038055 \times 10^{-4}$ e o parâmetro de amortecimento β_k é avaliado em $0,06094867925052$. A figura 3.17 apresenta a sequência de soluções $\mathbf{x}^k$ sobre a região de viabilidade.

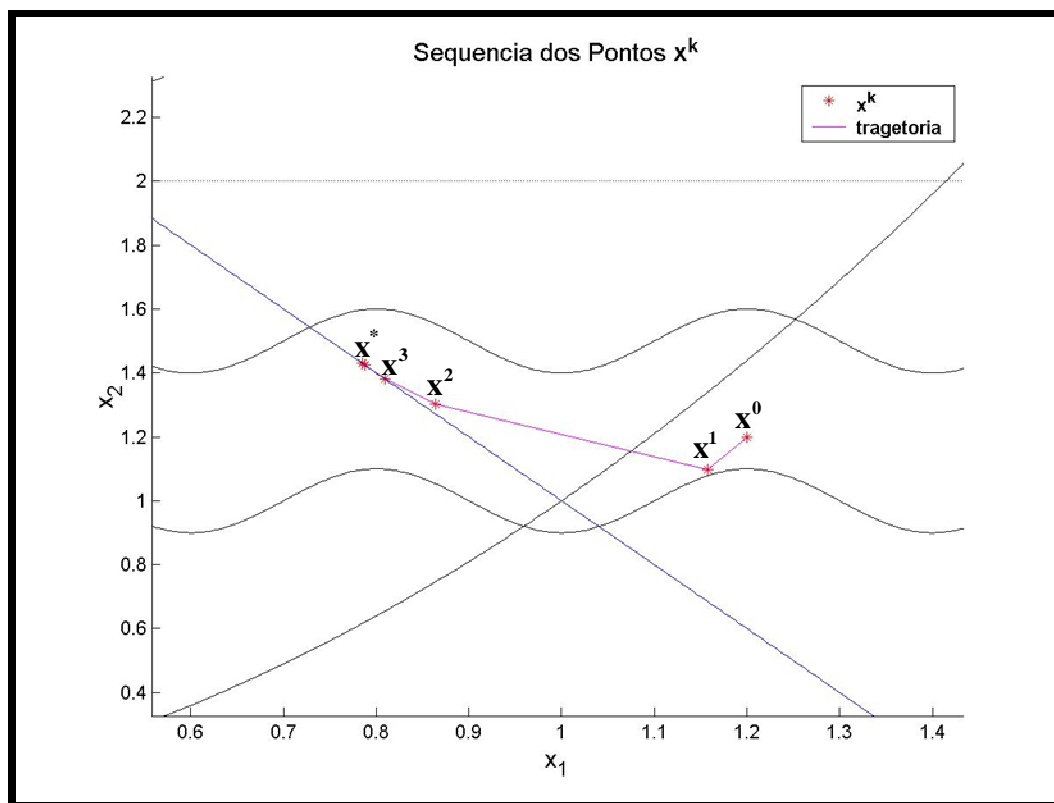


Figura 3.14: Trajetória dos pontos $\mathbf{x}^k$ sobre a região de viabilidade do problema (3.98) gerados pelo MPIBLMCG-EX.

Se compararmos com a trajetória “ziguezagueada” dos pontos $\mathbf{x}^k$ obtidos pelo MPIBLM-EX, figura 3.5, a figura 3.14 nos mostra claramente que o MPIBLMCG-EX produziu uma trajetória “mais retilínea” e possibilitou a convergência para a solução global do problema (3.98) devido ao ajuste dos autolavores de θ_k através do parâmetro de amortecimento e esse ajuste inferiu diretamente sobre a matriz mudança de escala $\mathbf{D}_k^{-1/2}$. Relembramos que a matriz $\theta_k^{-1/2}$ ajusta as matrizes de projeção ortogonal e o vetor $\mathbf{r}_\mu^k$. A figura 3.18 apresenta a sequência de soluções $\mathbf{x}^k$ obtidas pelo MPIBLMCG-EX ao longo das iterações.

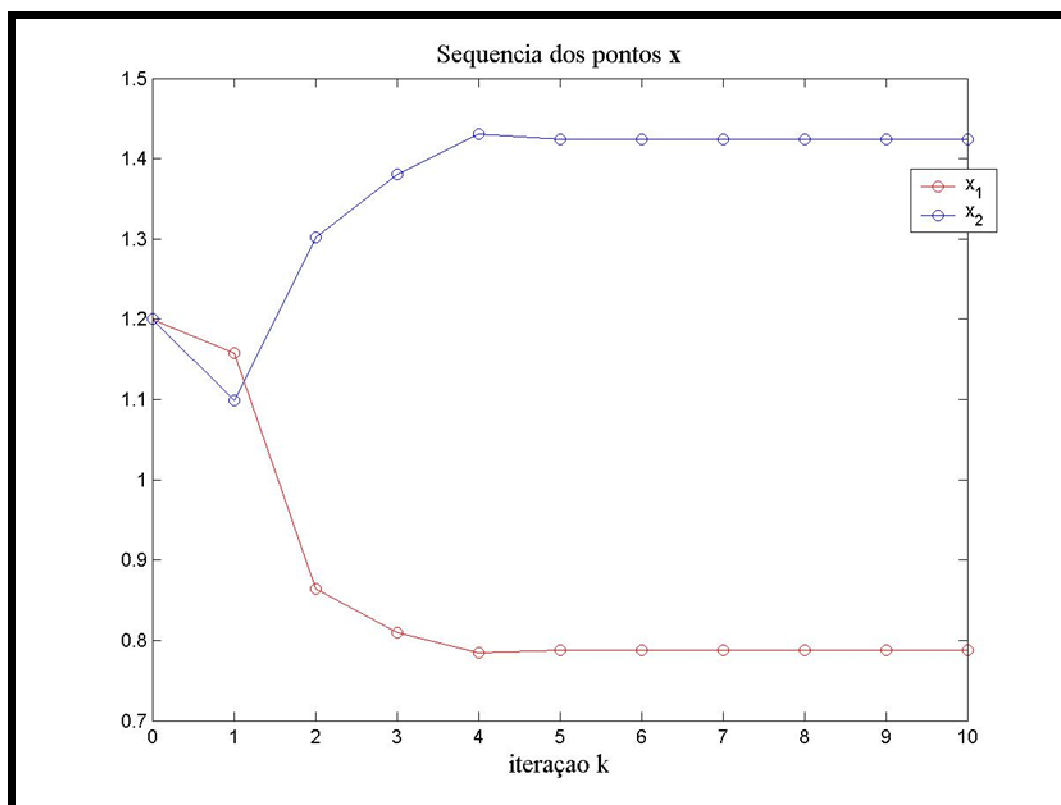


Figura 3.15: Sequência dos pontos $\mathbf{x}^k$ gerados pelo MPIBLM-EX para o problema (3.98).

Notamos na figura 3.18 que a componente x_1 convergiu para um valor próximo de 0,7880. Isto confirmou a hipótese de que um ótimo estaria próximo de 0,79 como foi observado na figura 3.4. A figura 3.19 apresenta a sequência de multiplicadores λ_0^k gerados pelo MPIBLM-EX.

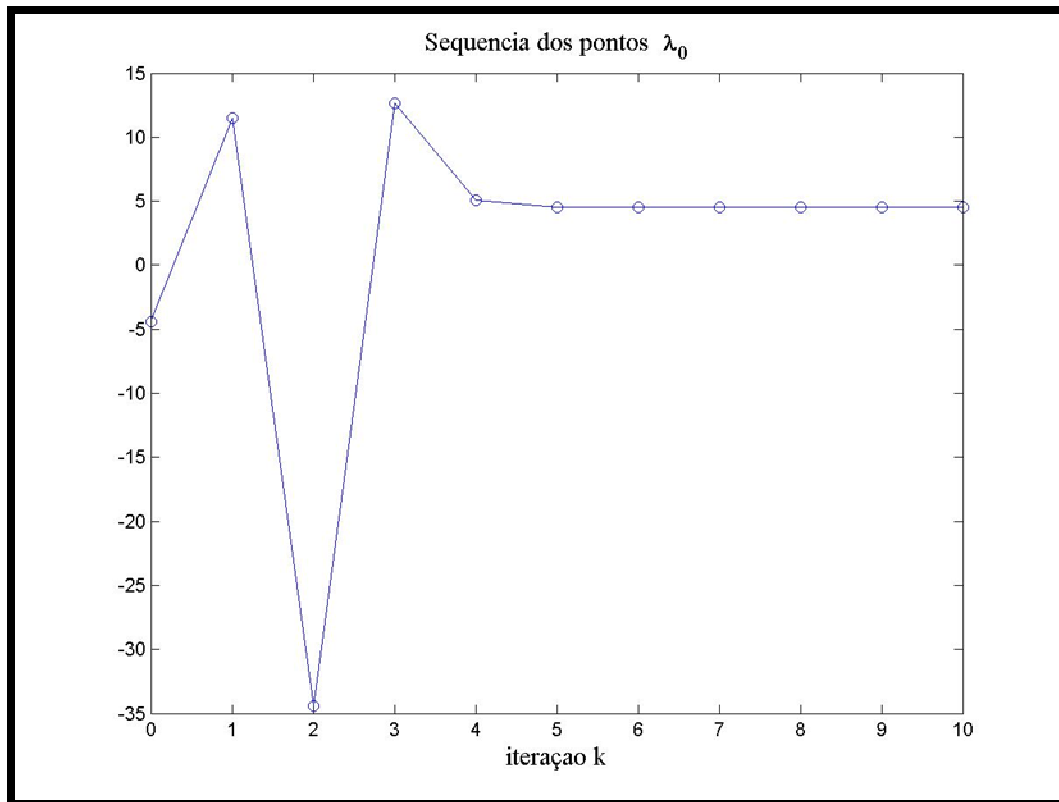


Figura 3.16: Sequência dos pontos λ_0^k gerados pelo MPIBLMCG-EX para o problema (3.98).

A figura 3.8 apresenta a sequência dos multiplicadores de Lagrange λ_i^k , $i = 1, \dots, 4$, gerados pelo MPIBLMCG-EX.

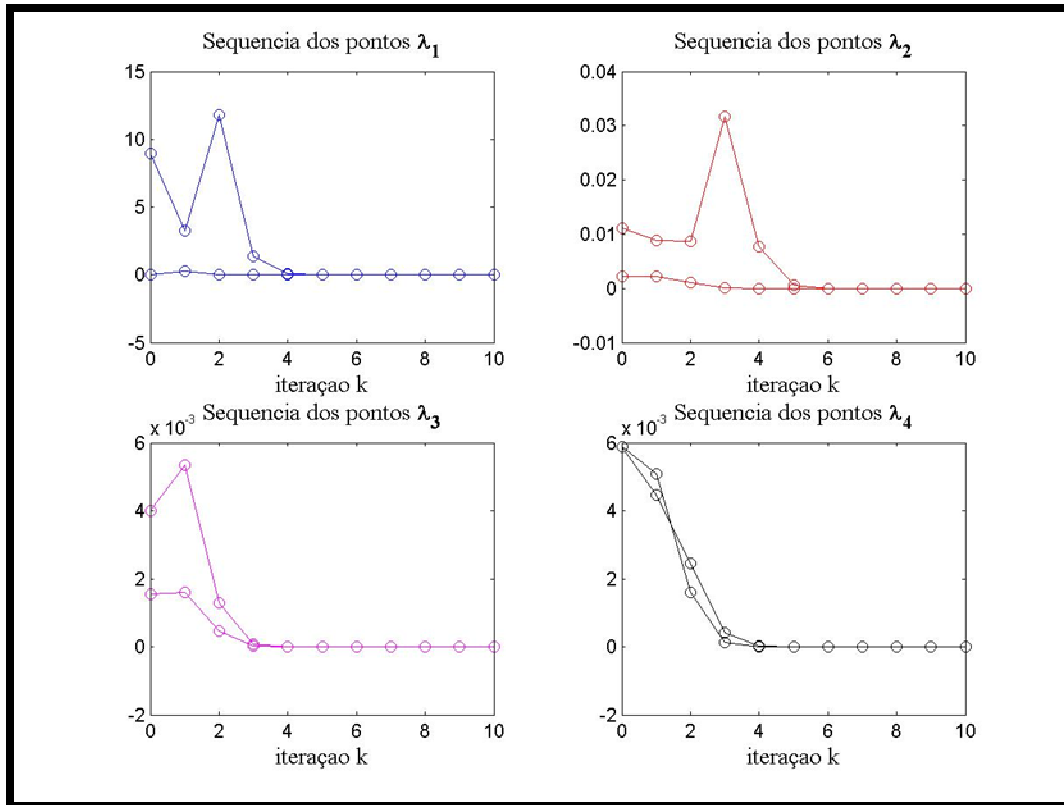


Figura 3.17: Sequencia dos pontos λ_i^k , $i=1,\dots,4$, gerados pelo MPIBLMCG-EX para o problema (3.98).

Notamos na figura 3.20 que os multiplicadores de Lagrange correspondente às restrições de desigualdade e às variáveis canalizadas convergem para a nulidade por valores positivos. Isto está de acordo com a condição de dualidade forte, proposição 2.22.

A figura 3.18, nos apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento, o qual foi aplicado diretamente sobre a matriz θ_k .

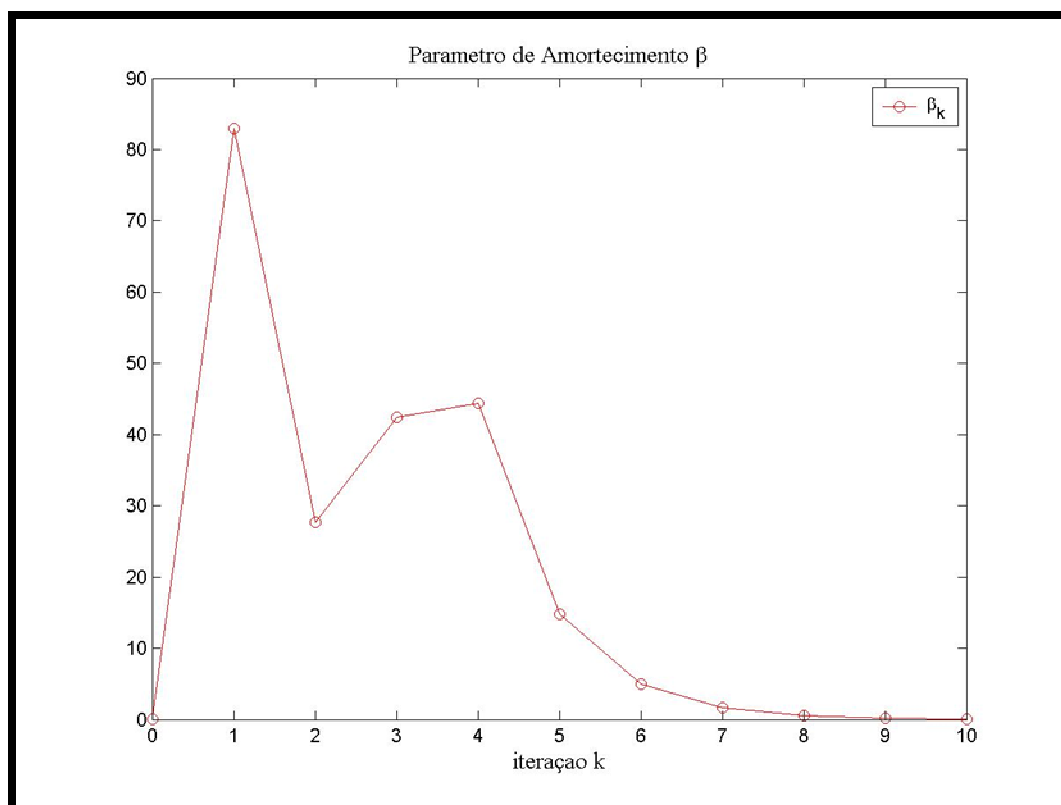


Figura 3.18: Evolução do parâmetro β_k gerado pelo MPIBLMCG-EX para o problema (3.98).

A figura 3.18 nos mostra quão difícil foi tornar a matriz θ_k definida positiva a partir da iteração 1 e o método precisou ajustar, mas com menos intensidade, a matriz dual normal entre as iterações 2 e 4. O parâmetro de amortecimento decresceu acentuadamente a partir da iteração 4. A tabela 2 nos apresenta a sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 2: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o problema (3.98).

k	$f(\mathbf{x}^k)$	$L(\mathbf{w}^k)$	$\ \nabla L(\mathbf{w}^k)\ _\infty$	μ_k	α_p	α_d
0	2,36093248434208	0,35426856400850	6,019	-----	-----	-----
1	1,04344373063412	6,44001774220904	25,743	0,05	0,308	1,01
2	0,80095538346718	-0,42574664204323	58,157	0,32743	0,929	0,819
3	-0,37178366570485	-3,13818384165926	20,135	0,11961	1,01	1,01
4	-0,67788716414266	-0,86237430387495	2,7127	0,04369	1,01	1,01
5	-0,68556955057817	-0,69032501395182	0,071	0,01596	1,01	1,01
6	-0,68558214747306	-0,68561369149063	0,0005	0,00583	1,01	1,01
7	-0,68558214672304	-0,68558224569077	3,351-006	0,00212	1,01	1,01
8	-0,68558214673635	-0,68558214693397	2,391e-008	0,00077	1,01	1,01
9	-0,68558214673622	-0,68558214673564	2,187e-010	0,00028	1,01	1,01
10	-0,68558214673622	-0,68558214673622	2,191e-012	0,00010	1,01	1,01

Observamos na tabela 2 que o parâmetro de barreira sofreu penalização na iteração 2, porém o desempenho do MPIBLMCG-EX foi superior ao MPIBLM-EX, pois foi robusto na resolução do problema (3.98) e também porque encontrou um ponto de mínimo inferior ao que foi encontrado pelo MPIBLM-EX. Isso quer dizer que se a região de viabilidade nos permite encontrarmos mais que um ponto de mínimo local, então o MPIBLMCG-EX tem maior chance de encontrar o menor dos mínimos locais do que o MPIBLM-EX a partir de uma mesma solução e parâmetros iniciais. O problema (3.98), de acordo com o que foi mostrado na figura 3.4, admite dois pontos de mínimos locais sendo que um deles é global. O MPIBLMCG-EX encontrou uma dessas soluções: a solução de mínimo global. A figura 3.19 nos mostra a trajetória dos pontos $\mathbf{x}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX sobre as curvas de nível da função objetivo.

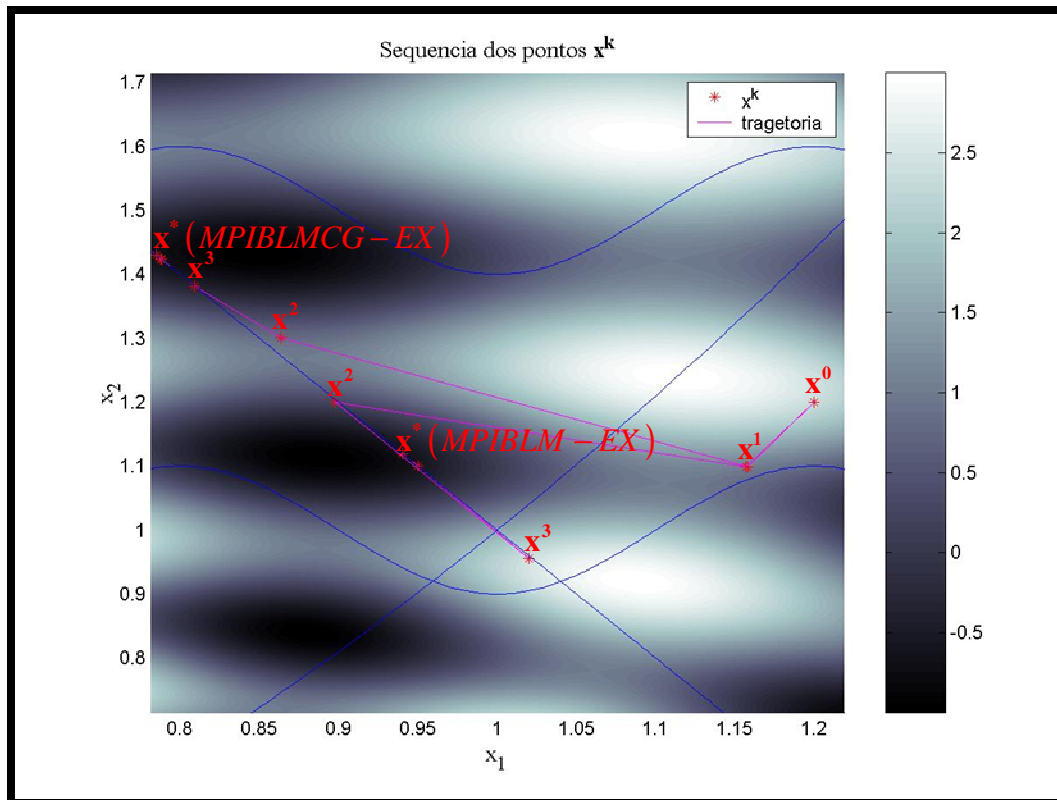


Figura 3.19: Soluções $\mathbf{x}^k$ gerados pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (3.98).

No próximo capítulo, apresentamos o problema de fluxo de potência ótimo reativo (FPO reativo). O FPO reativo é um problema estudado no âmbito da engenharia elétrica em uma subárea denominada por sistemas elétricos de potência. O problema de FPO reativo enquadra-se em um problema de otimização não-linear em domínio não-convexo e é sobre esse problema que aplicamos e mostramos os resultados obtidos MPIBLMCG-EX e são comparados qualitativamente e quantitativamente com o MPIBLM-EX.

4 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS PROPOSTOS PARA SOLUÇÃO DO FPO REATIVO.

4.1 Descrição do problema de FPO reativo.

O fluxo de potência ótimo (FPO) é um problema de otimização não-linear com função objetivo e domínio não-convexos utilizado na área de sistemas de potência. Este problema tem como objetivo o cálculo de determinadas variáveis de controle do sistema de potência que minimizem um critério de otimização (por exemplo: custo de geração de energia, perdas na transmissão, otimização do perfil de tensão, entre outros) levando em consideração as principais restrições físicas e operativas dos sistemas de transmissão e geração.

O FPO possui dois tipos básicos de formulação: ativa e reativa. No FPO ativo, o objetivo, em geral, envolve a definição dos níveis de geração de cada uma das unidades geradoras do sistema. Nesse caso, em geral, os aspectos reativos são desprezados. Essa classe de problemas envolve os modelos de despacho econômico, pré-despacho e programação da geração (*unit commitment*). No FPO reativo, supomos que as decisões relacionadas ao despacho de geração foram pré-determinadas por modelos de despacho ativo. A partir desse despacho, o FPO reativo busca otimizar algum critério relacionado aos reativos-tensões, tais como: a minimização das perdas, a otimização do perfil de tensão, etc., respeitando os limites de operação do sistema.

Nesse trabalho propomos uma técnica de solução para o problema de FPO reativo para a minimização das perdas de potência ativa na rede de transmissão. Em uma formulação mais geral, o FPO reativo é modelado matematicamente como um problema de otimização não-linear, não-convexo e com variáveis inteiras (quando da utilização dos *taps* dos transformadores e banco de capacitores e reatores). Nesse trabalho, supomos que os *taps* dos

transformadores e bancos de capacitores e reatores são fixos. O problema de FPO reativo estudado nesse trabalho tem como objetivo minimizar as perdas de potência ativa na transmissão sujeito ao atendimento das seguintes restrições:

i) as leis de Kirchhoff relacionadas ao atendimento das potências ativa e reativa em cada barra do sistema (restrições de igualdade);

ii) os limites mínimos e máximos de geração de potência reativa para as barras de geração (restrições funcionais de desigualdade canalizadas);

iii) os limites mínimos e máximos das magnitudes de tensão em todas as barras do sistema, (restrições canalizadas).

Matematicamente, o problema de FPO reativo é definido, segundo (Dommel, et al., 1968), a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=1}^{NL} g_{km_i} (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos(\gamma_{km})) \\ \text{s.a.} \\ \Delta P_k = P_k^{esp} - V_k^2 G_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos(\gamma_{km}) + B_{km} \sin(\gamma_{km})) = 0; \quad k \in \Omega_{PV} \cup \Omega_{PQ} \\ \Delta Q_k = Q_k^{esp} + V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin(\gamma_{km}) - B_{km} \cos(\gamma_{km})) = 0; \quad k \in \Omega_{PQ} \\ Q_k^{\min} \leq -V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin(\gamma_{km}) - B_{km} \cos(\gamma_{km})) \leq Q_k^{\max}; \quad k \in \Omega_{PV} \cup \Omega_{V\gamma} \\ V_k^{\min} \leq V_k \leq V_k^{\max}; \quad k \in \Omega_{PV} \cup \Omega_{PQ} \cup \Omega_{V\gamma} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

em que:

$f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\gamma})$: é a função objetivo, que representa as perdas de transmissão de potência ativa na rede de transmissão;

NL : é o número de linhas de transmissão que compõe o sistema;

$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{NB}$: é o vetor de tensões, tal que, NB é o número de barras do sistema;

$\gamma \in \mathbb{R}^{NB}$: é o vetor de ângulos das tensões;

V_k : é a magnitude de tensão na barra k ;

γ_k : é o ângulo da tensão da barra k ;

V_m : é a tensão na barra m ;

γ_m : é o ângulo da tensão da barra m ;

γ_{km} : é a diferença $\gamma_k - \gamma_m$;

$(g_{km})_i$: é a condutância da linha i a qual conecta as barras k e m ;

ΔP_k : é a equação de balanço de potência ativa na barra k ;

P_k^{esp} : é a potência ativa líquida especificada na barra k ;

ΔQ_k : é a equação de balanço de potência reativa na barra k ;

Q_k^{esp} : é a potência reativa líquida especificada na barra k ;

Ω_k : é o conjunto das barras vizinhas à barra k ;

Ω_{pV} : é o conjunto das barras de geração, exceto a barra *slack*;

Ω_{pQ} : é conjunto das barras de carga;

$\Omega_{V\gamma}$: é o conjunto que contém a barra *slack*;

$V_k^{\min}, V_k^{\max}$: limites mínimos e máximos da magnitude de tensão da barra k ;

$Q_k^{\min}, Q_k^{\max}$: limites mínimos e máximos de injeção líquida de potência reativa na barra k ;

$Y_{km} = G_{km} + jB_{km}, j^2 = -1$: é a componente $k \times m$ da matriz de admitância com suas partes real (G_{km}) que indica a condutância e imaginária (B_{km}) que indica susceptância.

As expressões para o cálculo das componentes do vetor gradiente e das matrizes hessiana e jacobiana do problema, essenciais para a aplicação dos métodos propostos para a solução do FPO reativo, são descritas no **ANEXO I**.

4.2 Resultados numéricos.

Para a validação das técnicas de solução propostas, os métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX são aplicados aos sistemas elétricos de (Dommel, et al., 1968), IEEE-9, IEEE-14, IEEE-30, IEEE-57, IEEE-118 e IEEE-162 sob as mesmas condições iniciais e os resultados são comparados qualitativamente, isto é, as comparações mostram, com figuras, como os métodos desenvolveram as trajetórias das magnitudes de tensões em cada barra, trajetória dos ângulos, dos multiplicadores de Lagrange.

Os resultados quantitativos, como tabelas de resultados, são apresentados por ambos os métodos para uma comparação mais eficiente. Apresentamos também a observação do condicionamento da matriz dual-normal θ_k .

Quando utilizamos o MPIBLMCG-EX, o condicionamento da matriz dual normal foi calculado antes e depois de entrar no procedimento de decomposição de Cholesky. O principal objetivo é observarmos a influência do parâmetro de amortecimento sobre esta matriz; quando utilizamos o MPIBLM-EX, o condicionamento da matriz dual normal é feito após a construção da matriz dual normal. No MATLAB 6.1 o comando “cond()” calcula o

condicionamento da matriz θ_k utilizando a norma-2 (norma de Frobenius). Matematicamente, a expressão que define o cálculo do condicionamento da matriz θ_k é dada pela expressão (4.2):

$$\kappa(\theta_k) = \|\theta_k\|_2 \|\theta_k^{-1}\|_2; \quad (4.2)$$

em que quanto maior for o número $\kappa(\theta_k)$, pior é o condicionamento da matriz θ_k .

Neste trabalho, o ângulo da barra de referência, conhecida como barra *slack*, não será fixado em zero. Tanto no MPIBLM-EX quanto no MPIBLMCG-EX o ângulo dessa barra varia de forma irrestrita. Após o critério de convergência dos métodos serem satisfeitos, redefinimos os ângulos de todas as barras, que estão em radianos, conforme a equação (4.3):

$$\gamma_j^{novo} = \left[(\gamma_j - \gamma_{slack}) \frac{180}{\pi} \right]^\circ; j = 1, \dots, NB \quad (4.3)$$

em que: γ_{slack} é o ângulo correspondente à barra *slack* e γ_j^{novo} é apresentado em graus. Essa atualização dos ângulos simplesmente redefine a referência angular dos fasores de tensão do sistema, e não implica em nenhum tipo de aproximação nos métodos.

É importante ressaltar que os *taps* dos transformadores são fixos e que estes são utilizados somente na construção da matriz admitância. Utilizamos a potência de base 100 *megawatts* (MW), isto é, 1 unidade (*pu*) equivale a 100MW. Na descrição dos resultados, foram utilizados a seguinte nomenclatura para a definição dos vetores de multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade e de desigualdade associados ao problema de FPO reativo:

$\lambda_{\Delta P}$: vetor de multiplicadores de Lagrange referente às restrições de atendimento de demanda de potência ativa;

$\lambda_{\Delta Q}$: vetor de multiplicadores de Lagrange referente às restrições de atendimento de demanda de potência reativa;

$\lambda_{Q^{\min}}, \lambda_{Q^{\max}}$: vetor de multiplicadores de Lagrange referentes respectivamente à restrição de limite mínimo e de máximo na injeção líquida de potência reativa;

$\lambda_{V^{\min}}, \lambda_{V^{\max}}$: vetor de multiplicadores de Lagrange referentes respectivamente à restrição de limite mínimo e de máximo nas tensões.

Utilizamos também as nomenclaturas:

$\max(\Delta P)$: indica o maior erro (em módulo) dentre as equações de balanço de potência ativa, em pu , na solução ótima;

$\max(\Delta Q)$: indica o maior erro (em módulo) dentre as equações de balanço de potência reativa, em pu , na solução ótima;

$\max(gap)$: indica o maior valor (em módulo) dentre as condições de complementaridade.

Para a resolução de todos os sistemas de potência, iniciamos com o vetor magnitude de tensão avaliado em $\mathbf{V}^0 = (V_{l_0}, \dots, V_{k_0}, \dots, V_{NB_0})^T = (1, \dots, 1, \dots, 1)^T$, vetor ângulo, em radianos, $\gamma^0 = (\gamma_{l_0}, \dots, \gamma_{k_0}, \dots, \gamma_{NB_0})^T = (0, \dots, 0, \dots, 0)^T$, exceto para o sistema elétrico de 162 barras, pois, para esse problema, utilizamos as informações encontradas no banco de dados; o vetor de magnitude de tensão está canalizado da seguinte maneira: $0,95 \leq \mathbf{V} \leq 1,1$; o parâmetro de amortecimento em $\beta_0 = 0,1$ (este somente foi utilizado no MPIBLMCG-EX). As informações iniciais dos multiplicadores de Lagrange são obtidas conforme descrito nos

algoritmos do MPIBLM-EX e do MPIBLMCG-EX. Indicamos por $h_k(\mathbf{V}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$ a geração de potência reativa para as barras de geração (restrição de desigualdade canalizada) ótima, isto é:

$$h_k(\mathbf{V}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = -\left(V_k^*\right)^2 B_{kk} + V_k^* \sum_{m \in \Omega_k} V_m^* \left(G_{km} \sin(\gamma_{km}^*) - B_{km} \cos(\gamma_{km}^*) \right); \quad (4.4)$$

Por ter sido implementado em uma linguagem interpretativa (MATLAB) e não em uma linguagem compilada (por exemplo: C++, C#, Fortran ou Pascal), não consideramos o tempo de processamento aritmético dos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX neste trabalho. Observamos que o MATLAB 6.1 é lento quando não utilizamos uma função pronta para efetuar uma operação, por exemplo: programamos a Decomposição de Cholesky de acordo com o algoritmo encontrado em (Ruggiero, et al., 1996) e o adaptamos para que a decomposição seja satisfeita mesmo que a matriz dual normal não seja definida positiva ou a construção das matrizes jacobianas e hessianas.

Neste trabalho, mostramos somente as soluções ótimas que foram obtidas pelo MPIBLMCG-EX. As soluções ótimas: magnitudes de tensão, ângulos e os multiplicadores de Lagrange; e a avaliação da solução primal nas gerações de potência reativa para as barras de geração, são apresentadas somente no **ANEXO II**.

4.2.1 O sistema elétrico de Dommel e Tinney (parte 1).

Em (Dommel, et al., 1968), encontramos um problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) com 3 barras cuja formulação matemática permite que o MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX sejam aplicados. A figura 4.1 ilustra o diagrama do sistema elétrico de (Dommel, et al., 1968), bem como os dados de admitância das linhas de transmissão, e os tipos de cada barramento.

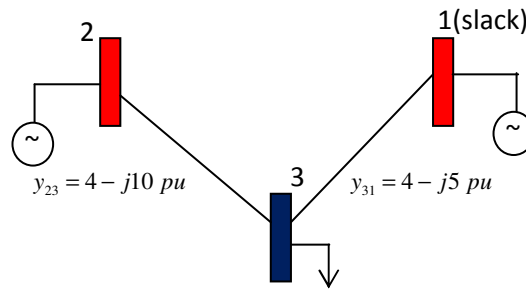


Figura 4.1: Diagrama do sistema elétrico de 3 barras de Dommel e Tinney.

Em que: a barra 1, *slack*, é a barra de referência angular; a barra 2, PV, é a barra de geração e a barra 3, PQ, é a barra de carga. O objetivo do método é minimizar uma função objetivo que representa as perdas de potência ativa na transmissão, atendendo as restrições de igualdade de potência ativa e reativa, com duas restrições de desigualdade canalizadas, as quais representam o controle de reativo dos geradores (barras 1 e 2) e variáveis canalizadas que representam as tensões nas barras (barras 1, 2 e 3).

Em (Dommel, et al., 1968), os autores nos informam que a solução ótima do problema é alcançada desde que a magnitude de tensão na barra 3, V_3 , seja de $1 pu$, porém os autores dizem que essa barra pode assumir uma folga de até $\pm 0,01 pu$ devido a dificuldade, eles dizem até da impossibilidade, em se obter a solução ótima quando $V_3 = 1$.

Neste primeiro teste, consideramos uma pequena tolerância para magnitude de tensão na barra 3. A tabela 3 nos mostra a natureza das barras bem como os seus tipos de restrições nodais associados.

Tabela 3: Natureza das barras e tipos de restrições nodais associadas do sistema 3 barras.

Número de Barras	Natureza das Barras	Estudo Ativo/Reativo		
		Potência Ativa	Potência Reativa	Mag. de Tensão
1	PQ	Igualdade	Igualdade	Canalização
1	<i>Slack</i>	-	Canalização	Canalização
1	PV	Igualdade	Canalização	Canalização

A tabela 4 apresenta os valores iniciais de V , γ e das especificações líquidas de potência ativa e reativa do sistema.

Tabela 4: Estado inicial do sistema elétrico de 3 barras.

Barra k	Tipo	$P_k^{esp} (pu)$	$Q_k^{esp} (pu)$	$V_k (pu)$	$\gamma_k (graus)$
1	Slack	-	-	1	0
2	PV	1,7	-	1	0
3	PQ	-2,0	-1,0	1	0

A tabela 5 apresenta os limitantes para as magnitudes de tensão e para os controles de reativos.

Tabela 5: Limites de operação para o sistema elétrico de 3 barras do teste 1.

Barra k	$V_k^{\min} (pu)$	$V_k^{\max} (pu)$	$Q_k^{\min} (pu)$	$Q_k^{\max} (pu)$
1	0,95	1,163	-10,0	10,0
2	0,95	1,2	0,1	2
3	0,99	1,01	-	-

Com as informações das tabelas 3, 4 e 5, o modelo matemático do sistema elétrico de 3 barras do teste 1 é apresentado a seguir:

$$\begin{cases}
 \text{Min } f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\gamma}) = 4(V_1^2 + V_3^2 - 2V_1V_3 \cos(\gamma_{13})) + 4(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos(\gamma_{23})) \\
 \text{s.a :} \\
 \begin{aligned}
 &1,7 - 4V_2^2 - V_2V_3(-4\cos(\gamma_{23}) + 10\sin(\gamma_{23})) = 0 \\
 &-2 - 8V_3^2 - V_3V_1(-4\cos(\gamma_{31}) + 5\sin(\gamma_{31})) - V_3V_2(-4\cos(\gamma_{32}) + 10\sin(\gamma_{32})) = 0 \\
 &-1 - 15V_3^2 - V_3V_1(-4\sin(\gamma_{31}) - 5\cos(\gamma_{31})) - V_3V_2(-4\sin(\gamma_{32}) - 10\cos(\gamma_{32})) = 0 \quad (4.5) \\
 &-10 \leq 5V_1^2 + V_1V_2(-4\sin(\gamma_{13}) - 5\cos(\gamma_{13})) \leq 10 \\
 &0,1 \leq 10V_2^2 + V_2V_3(-4\sin(\gamma_{23}) - 10\cos(\gamma_{23})) \leq 2 \\
 &0,95 \leq V_1 \leq 1,163 \\
 &0,95 \leq V_2 \leq 1,2 \\
 &0,99 \leq V_3 \leq 1,01
 \end{aligned}
 \end{cases}$$

Para resolução do problema (4.5) utilizamos $\mu_0 = 0,5$. A dimensão do vetor $\boldsymbol{\omega}$ é 41, isto é, esse contém 41 variáveis. Foi utilizado $\|\nabla L(\boldsymbol{\omega}^k)\|_{\infty} \leq 10^{-11}$ como critério de parada do método.

A matriz dual normal θ_k contém 36 elementos, dos quais 28 são não-nulos, isto é, a matriz contém $77,7\%$ de elementos não-nulos.

O método MPIBLM-EX convergiu em 11 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 12,66707353832235 \text{ MW}$ (megawatts) e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 12,66707353832234 \text{ MW}$, $\max(\Delta P) = 1,776356 \times 10^{-15} \text{ pu}$, $\max(\Delta Q) = 7,105427 \times 10^{-15} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(\text{gap}) = 1,362548 \times 10^{-13} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 2,115186 \times 10^{-5}$. A tabela 6 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 6: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o problema (4.5).

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k) (MW)$	$L(\omega^k) (MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _\infty$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-208,49707782381	2	----	-----	-----
1	5,29341782089805	-191,21550927647	0,7429	0,5	0,614	1,01
2	6,10001376000557	6,24141038562185	0,6188	0,1826	0,163	1,01
3	12,59179788770268	10,6654062859166	0,0287	0,0667	1,01	0,076
4	12,53763610361975	12,1157888297643	0,0024	0,0243	1,01	0,486
5	12,65318112397260	12,5849258091182	0,0011	0,0089	1,01	1,01
6	12,66787265669027	12,6602598262875	0,0001	0,0032	1,01	1,01
7	12,66714224168144	12,6667681957883	7,26e-006	0,0011	1,01	1,01
8	12,66707440226114	12,6670675782608	6,71e-007	0,0004	1,01	1,01
9	12,66707353644296	12,6670735079894	8,57e-009	0,0001	1,01	1,01
10	12,66707353833603	12,6670735383494	1,87e-011	5,79e-05	1,01	1,01
11	12,66707353832235	12,6670735383223	1,36e-013	2,11e-05	1,01	1,01

A tabela 6 mostra-nos que o MPIBLM-EX foi eficiente em obter a solução ótima do problema (4.5). Destacamos a redução do erro com taxa aproximadamente quadrática a partir da iteração 6.

O método MPIBLMCG-EX convergiu em 11 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 12,66707353832235 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 12,66707353832238 \text{ MW}$, $\max(\Delta P) = 1,776356 \times 10^{-15} \text{ pu}$, $\max(\Delta Q) = 1,776356 \times 10^{-15} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(\text{gap}) = 1,173552 \times 10^{-13} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 2,115186 \times 10^{-5}$ e o parâmetro de amortecimento está avaliado em $\beta = 1,084428 \times 10^{-5}$. A tabela 7 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 7: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o problema (4.5).

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(\text{MW})$	$L(\omega^k)(\text{MW})$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-208,49707782381	2	----	-----	-----
1	0,473349698388592	-182,633878483507	1,6299	0,5	0.185	1,01
2	1,17601489590697	5,34255327726287	1,4046	0,1826	0.133	0,987
3	13,4430136143479	9,56180929694975	0,1349	0,0667	1,01	1,01
4	12,5236884622948	11,7570466140089	0,0054	0,0243	1,01	1,01
5	12,6509507224856	12,5779386721663	0,0012	0,0089	1,01	1,01
6	12,6677935811726	12,6605393460726	0,0001	0,0032	1,01	1,01
7	12,6671329351574	12,666799384674	6,60e-006	0,0011	1,01	1,01
8	12,6670742894801	12,6670683161386	5,80e-007	0,0004	1,01	1,01
9	12,6670735366998	12,6670735118774	7,45e-009	0,0001	1,01	1,01
10	12,6670735383343	12,667073538346	1,62e-011	5,79e-05	1,01	1,01
11	12,6670735383223	12,6670735383224	1,17e-013	2,11e-05	1,01	1,01

A tabela 7 nos mostra que o MPIBLMCG-EX, assim como o MPIBLM-EX, foi eficiente e robusto em obter a solução ótima do problema (4.5). Destacamos a redução do

erro com taxa aproximadamente quadrática a partir da iteração 6 e que a solução ótima é mais robusta do que o MPIBLM-EX quando comparamos o erro na iteração 11.

A tabela 8 mostra-nos o condicionamento da matriz dual normal θ_k de ambos os métodos. A primeira coluna apresenta a iteração k , a segunda coluna apresenta o condicionamento da matriz dual normal obtido pelo MPIBLM-EX, a terceira e a quarta coluna apresentam, respectivamente, o condicionamento da matriz dual-normal antes (ADC) e depois (DDC) da decomposição de Cholesky e a quinta coluna apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento β .

Tabela 8: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para o problema (4.5).

k	$\kappa(\theta_k)$ MPIBLM-EX	$\kappa(\theta_k)$ ADC	$\kappa(\theta_k)$ DDC	β_k
0	--	--	--	--
1	316,27	316,27	63,49	0,6106
2	671,71	1528,54	669,66	0,2035
3	106,85	2045,34	792,17	0,0711
4	105,12	340,04	286,12	0,0237
5	193,90	210,43	206,60	0,0079
6	264,43	271,16	269,48	0,0026
7	524,42	525,46	524,37	0,0008
8	1378,41	1379,55	1378,59	0,0002
9	3717,02	3717,13	3716,27	9,75e-05
10	10100,02	10100,03	10099,25	3,25e-05
11	27571,89	27571,90	27571,19	1,08e-05

A partir da iteração 6, notamos que o MPIBLMCG-EX apresentou melhor condicionamento da matriz dual em relação MPIBLM-EX, porém esses valores estão próximos. O parâmetro de amortecimento foi reduzindo gradativamente iteração após iteração, essa redução influenciou diretamente no condicionamento de θ_k MPIBLMCG-EX.

A figura 4.2 nos apresenta a trajetória das magnitudes de tensão de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

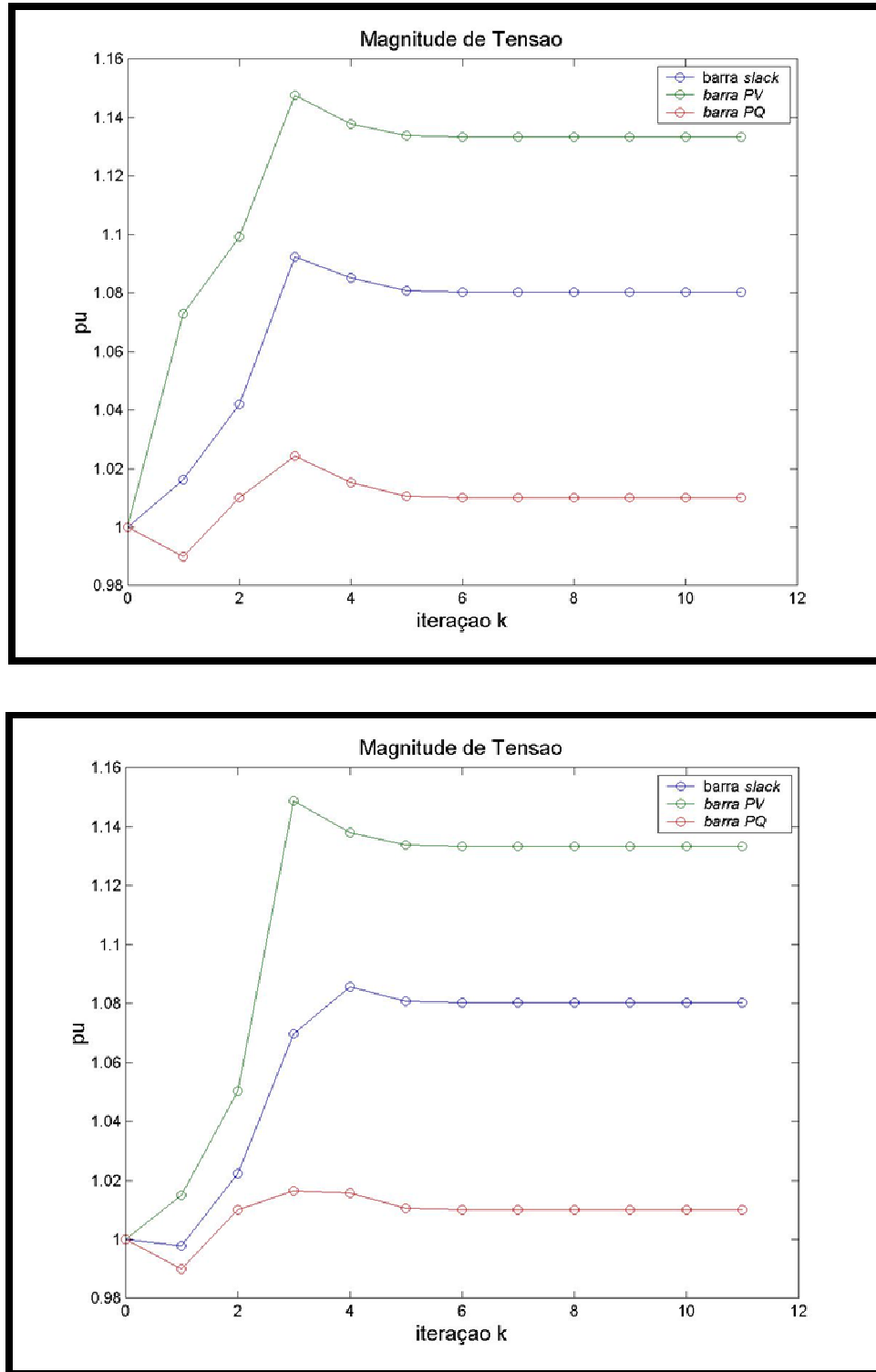


Figura 4.2: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.5).

A figura 4.3 nos apresenta a trajetória dos ângulos, já convertidos para graus, de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

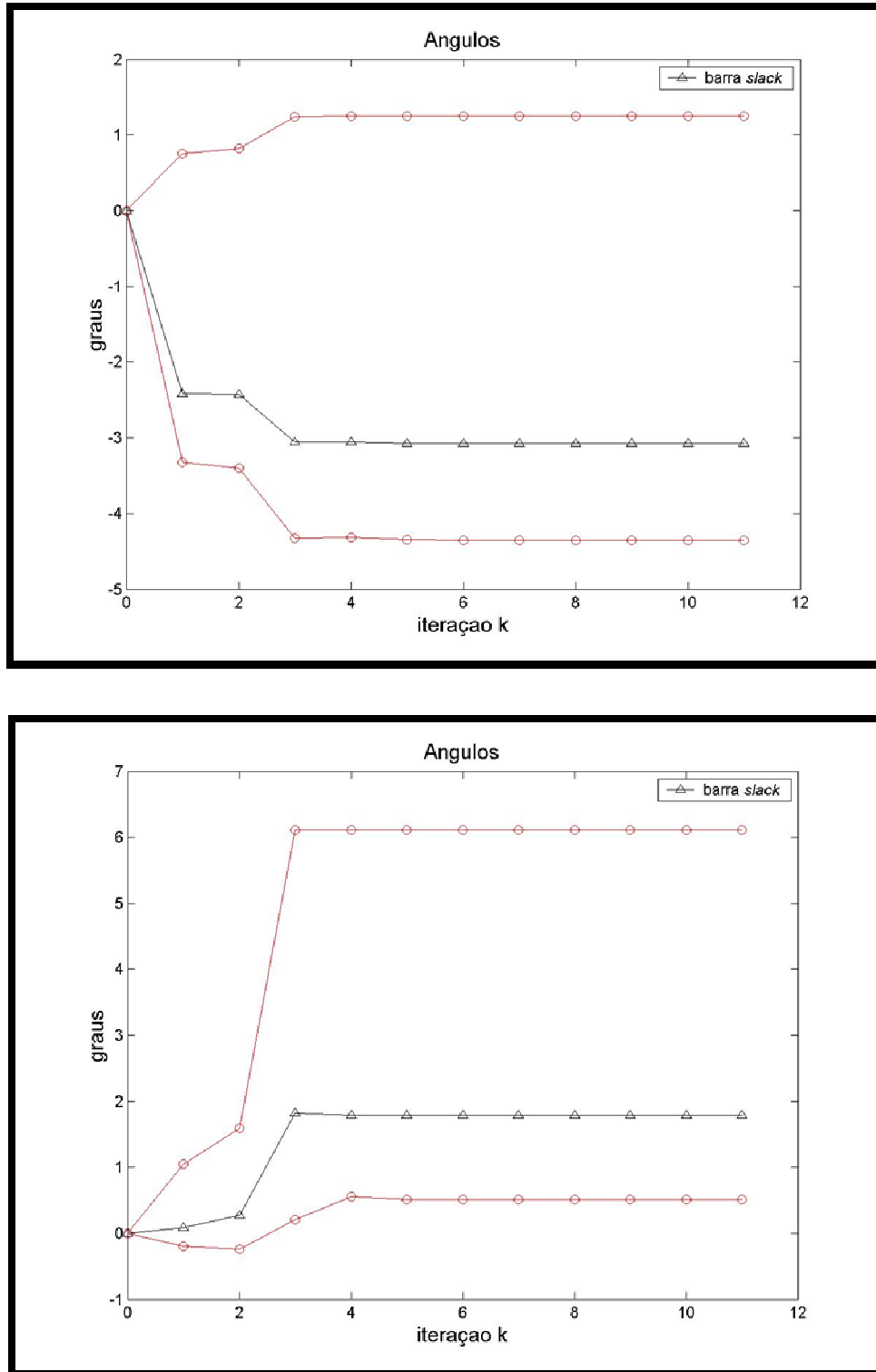


Figura 4.3: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.5).

A figura 4.4 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

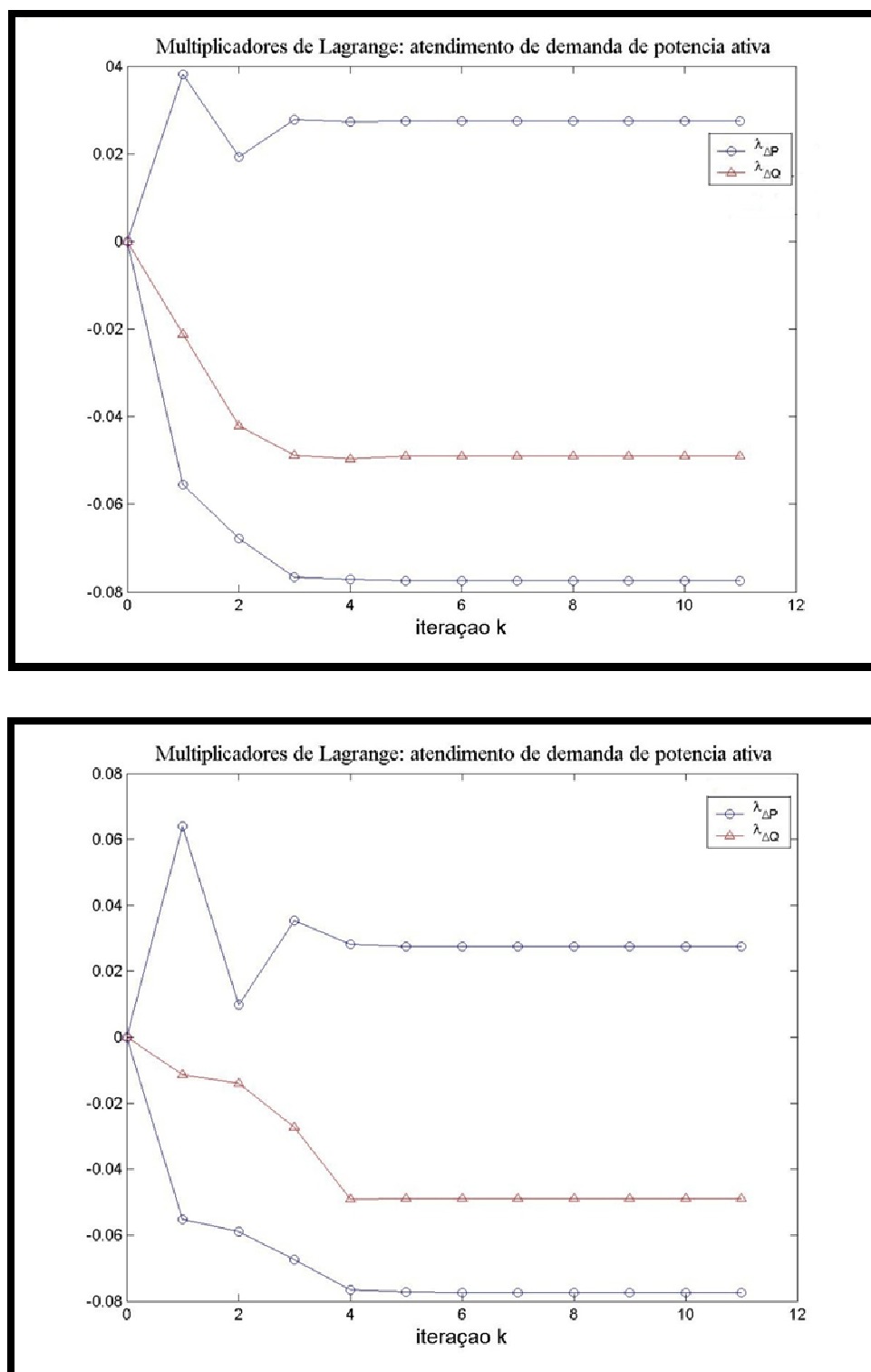


Figura 4.4: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.5).

A figura 4.5 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

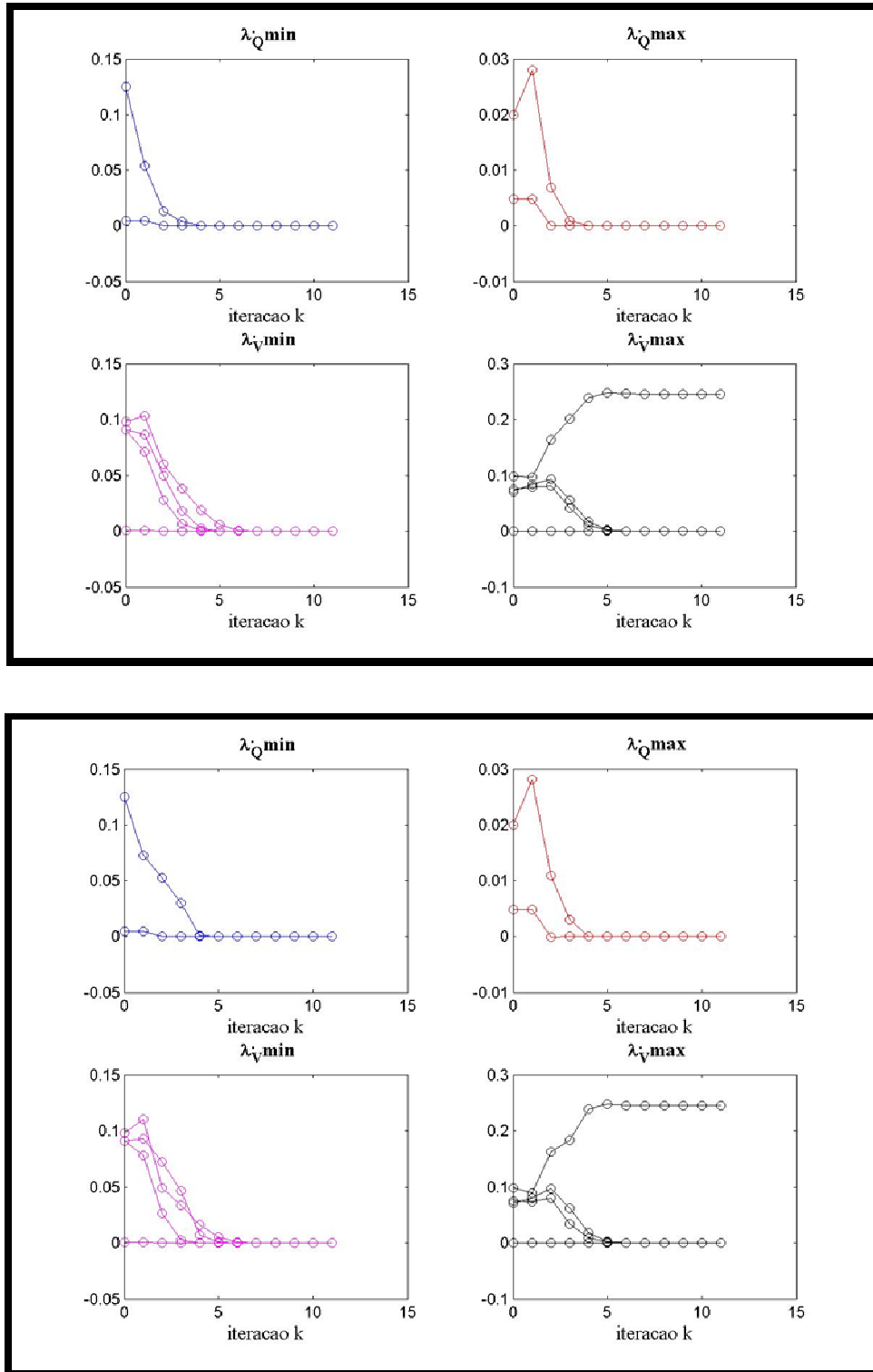


Figura 4.5: Sequência dos pontos $\lambda_{Q^{\min}}$, $\lambda_{Q^{\max}}$, $\lambda_{V^{\min}}$ e $\lambda_{V^{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.5).

A figura 4.6 apresenta a sequência de valores da função objetivo e da função lagrangiana obtidos em cada iteração pelo MPIBLMCG-EX.

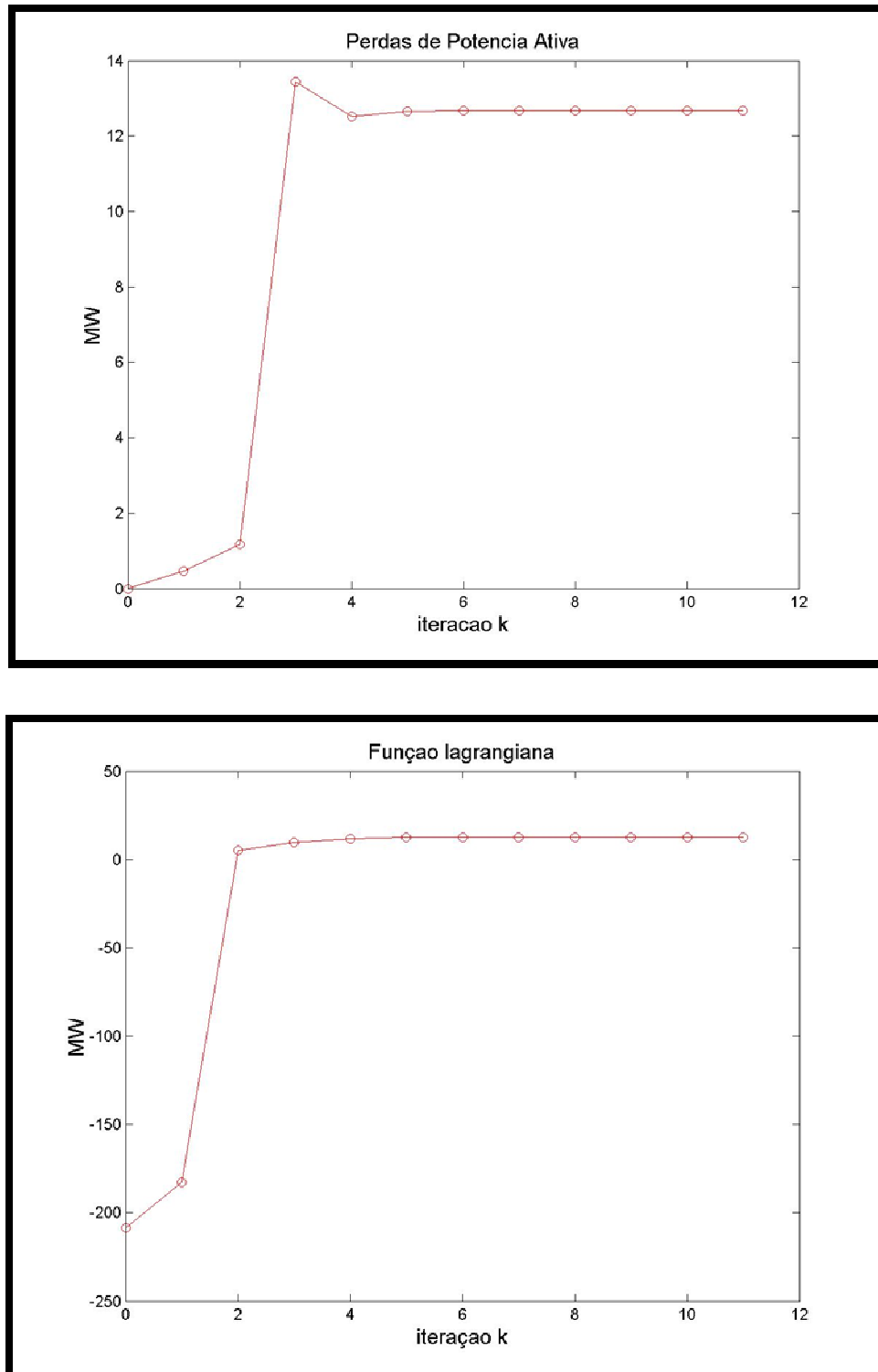


Figura 4.6: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o problema (4.5).

4.2.2 O sistema elétrico de Dommel e Tinney (parte 2).

Nesta seção, propomos uma modificação problema (4.5). Essa modificação propõe que os métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX encontrem a solução ótima para o problema (4.5) quando a magnitude de tensão na barra 3 seja exatamente 1. Lembremos que os métodos são de pontos interiores, sendo assim, será possível que os métodos possam encontrar uma solução ótima quando temos uma restrição canalizada do tipo $1 \leq V_3 \leq 1$? A resposta é positiva, pois esses métodos utilizam a técnica da função barreira modificada. Porém, a resposta não é suficiente, pois precisamos de uma condição de qualificação de restrição que nos dê suporte para que possamos encontrar uma solução primal-dual ótima e viável nessas condições. Encontramos em (Janin, 1984) a condição de qualificação de restrição que nos permite aplicar os métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX sobre o problema (4.5) mesmo que $1 \leq V_3 \leq 1$. A figura 4.7 nos ilustra o porquê que somente o método da função barreira modificada pode solucionar problemas como o proposto nessa seção e não o método da função barreira clássica (vide seção 2.5):

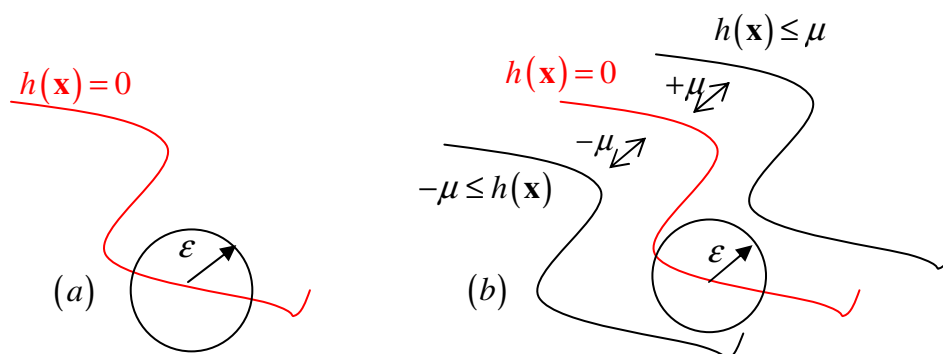


Figura 4.7: Estratégia para resolução de Dommel e Tinney quando $1 \leq V_3 \leq 1$.

A figura 4.7 nos mostra pela expressão (a) que é impossível a aplicabilidade do método da função barreira clássica, pois para qualquer $\varepsilon > 0$ a bola de centro $h(\mathbf{x}) = 0$ e raio

ε não está inserida totalmente no interior definido por $h(\mathbf{x})=0$. Já expressão (b), a qual é utilizada a função barreira modificada, é possível definir, para qualquer que seja $\mu > 0$, um $\varepsilon > 0$ tal que a bola de centro $h(\mathbf{x})=0$ e raio ε esteja totalmente inserida na região viável relaxada definida por $-\mu \leq h(\mathbf{x}) \leq \mu$. A tabela 9 apresenta os limitantes para as magnitudes de tensão e para os controles de reativos.

Tabela 9: Limites de operação para o sistema elétrico de 3 barras do teste 2.

Barra k	$V_k^{\min} (pu)$	$V_k^{\max} (pu)$	$Q_k^{\min} (pu)$	$Q_k^{\max} (pu)$
1	0,95	1,163	-10,0	10,0
2	0,95	1,2	0,1	2
3	1	1	-	-

Com as informações das tabelas 3, 4 e 9, o modelo matemático do sistema elétrico de 3 barras do teste 2 é apresentado a seguir:

$$\begin{cases}
 s.a : & \begin{aligned}
 & Min f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\gamma}) = 4(V_1^2 + V_3^2 - 2V_1V_3 \cos(\gamma_{13})) + 4(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos(\gamma_{23})) \\
 & 1,7 - 4V_2^2 - V_2V_3(-4\cos(\gamma_{23}) + 10\sin(\gamma_{23})) = 0 \\
 & -2 - 8V_3^2 - V_3V_1(-4\cos(\gamma_{31}) + 5\sin(\gamma_{31})) - V_3V_2(-4\cos(\gamma_{32}) + 10\sin(\gamma_{32})) = 0 \\
 & -1 - 15V_3^2 - V_3V_1(-4\sin(\gamma_{31}) - 5\cos(\gamma_{31})) - V_3V_2(-4\sin(\gamma_{32}) - 10\cos(\gamma_{32})) = 0 \\
 & -10 \leq 5V_1^2 + V_1V_2(-4\sin(\gamma_{13}) - 5\cos(\gamma_{13})) \leq 10 \\
 & 0,1 \leq 10V_2^2 + V_2V_3(-4\sin(\gamma_{23}) - 10\cos(\gamma_{23})) \leq 2 \\
 & 0,95 \leq V_1 \leq 1,163 \\
 & 0,95 \leq V_2 \leq 1,2 \\
 & 1 \leq V_3 \leq 1
 \end{aligned}
 \end{cases} \quad (4.6)$$

Para resolução do problema (4.6) utilizamos $\mu_0 = 0,5$. A dimensão do vetor $\boldsymbol{\omega}$ é 41, isto é, esse contém 41 variáveis. Foi utilizado $\|\nabla L(\boldsymbol{\omega}^k)\|_{\infty} \leq 10^{-11}$ como critério de parada do método.

A matriz dual normal $\boldsymbol{\theta}_k$ contém 36 elementos, dos quais 28 são não-nulos, isto é, a matriz contém 77,7% de elementos não-nulos.

O método MPIBLM-EX convergiu em 10 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 12,91584094822103 \text{ MW}$ (megawatts) e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 12,91584094821999 \text{ MW}$, $\max(\Delta P) = 4,440892 \times 10^{-14} \text{ pu}$, $\max(\Delta Q) = 5,329070 \times 10^{-15} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(\text{gap}) = 1,226651 \times 10^{-12} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 5,790430 \times 10^{-5}$. A tabela 10 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 10: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o problema (4.6).

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k) (\text{MW})$	$L(\omega^k) (\text{MW})$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _\infty$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-208,299051550848	2	----	-----	-----
1	14,52633958562899	-191,033958819001	0,3498	0.5	1,01	1,01
2	13,86784151757876	6,81743195761917	0,3199	0.1826	0,132	1,01
3	12,37581334674687	11,1187053496631	0,0181	0.0667	1,01	1,01
4	12,73926665427059	12,4859021253617	0,0040	0.0243	1,01	1,01
5	12,88375485639435	12,8579684828918	0,0016	0.0089	1,01	1,01
6	12,91537334886233	12,913102124745	0,0003	0.0032	1,01	1,01
7	12,91583896105166	12,9158040983946	4,80e-06	0.0011	1,01	1,01
8	12,91584095617857	12,915840871337	2,84e-08	0.0004	1,01	1,01
9	12,91584094816010	12,9158409483681	1,44e-10	0.0001	1,01	1,01
10	12,91584094822103	12,91584094822	1,22e-12	5.79e-05	1,01	1,01

A tabela 10 nos mostra que o MPIBLM-EX foi eficiente em obter a solução ótima do problema (4.6). Destacamos a redução do erro com taxa aproximadamente quadrática a partir da iteração 5.

O método MPIBLMCG-EX convergiu em 10 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 12,91584094821570 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 12,91584094822327 \text{ MW}$, demanda de potência ativa

avaliada em $\max(\Delta P) = 1,438849 \times 10^{-13} pu$, demanda de potência reativa avaliada em $\max(\Delta Q) = 3,552713 \times 10^{-15} pu$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(gap) = 2,953193 \times 10^{-14} pu$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 1,140326 \times 10^{-4}$ e o parâmetro de amortecimento está avaliado em $\beta = 3,102487 \times 10^{-5}$. A tabela 11 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 11: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o problema (4.6).

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-208,299051550848	2	----	-----	-----
1	14,06056122757633	-190,943586617062	0,2511	0.5	1.01	1,01
2	12,53731198056283	5,83134134226081	0,2373	0,1826	0.408	1,01
3	12,04549293104495	10,9168306247887	0,01910	0,0667	1,01	1,01
4	12,59562164187500	12,3122211941773	0,0069	0,0479	1,01	1,01
5	12,84763829928952	12,7695209132609	0,0028	0,0175	1,01	1,01
6	12,91247644114897	12,9017541517703	0,0007	0,0064	1,01	1,01
7	12,91578757354284	12,9154019060028	3,58e-05	0,0023	1,01	1,01
8	12,91584087436366	12,91583724013	6,32e-07	0,0008	1,01	1,01
9	12,91584094874931	12,915840947061	6,89e-010	0,0003	1,01	1,01
10	12,91584094821570	12,9158409482233	4,46e-012	0,0001	1,01	1,01

A tabela 11 mostra-nos que o MPIBLMCG-EX, assim como o MPIBLM-EX, foi eficiente e robusto em obter a solução ótima do problema (4.6). Destacamos a redução do erro com taxa aproximadamente quadrática a partir da iteração 5 e que a solução ótima é menos robusta do que o MPIBLM-EX quando comparamos o erro na iteração 11, pois o parâmetro de barreira sofreu incremento na iteração 4.

A tabela 12 mostra-nos o condicionamento da matriz dual normal θ_k de ambos os métodos. A primeira coluna apresenta a iteração k , a segunda coluna apresenta o

condicionamento da matriz dual normal obtido pelo MPIBLM-EX, a terceira e a quarta coluna apresentam, respectivamente, o condicionamento da matriz dual-normal antes (ADC) e depois (DDC) da decomposição de Cholesky e a quinta coluna apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento β .

Tabela 12: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para o problema (4.6).

k	$\kappa(\theta_k)$ MPIBLM-EX	$\kappa(\theta_k)$ ADC	$\kappa(\theta_k)$ DDC	β_k
0	--	--	--	--
1	310,57	310.57	63,49	0,61066
2	629,25	708.36	368,09	0,20355
3	98,29	94.24	79,06	0,06785
4	131,98	89.72	85,34	0,02261
5	279,56	149.82	147,28	0,00753
6	405,62	235.56	234,18	0,00251
7	714,26	400.69	399,90	0,00083
8	1856,51	977.96	977,31	0,00027
9	5003,32	2593.32	2592,75	0,00009
10	13619,45	7021.50	7020,98	0,00003

A partir da iteração 1, notamos que o MPIBLMCG-EX apresentou melhor condicionamento da matriz dual em relação MPIBLM-EX e a diferença entre os condicionamentos da matriz dual normal entre o MPIBLMCG-EX (DDC) e o MPIBLM-EX na última iteração é de 6598,47. O parâmetro de amortecimento foi reduzindo gradativamente iteração após iteração, essa redução influenciou diretamente no condicionamento de θ_k MPIBLMCG-EX.

A figura 4.8 nos apresenta a trajetória das magnitudes de tensão de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

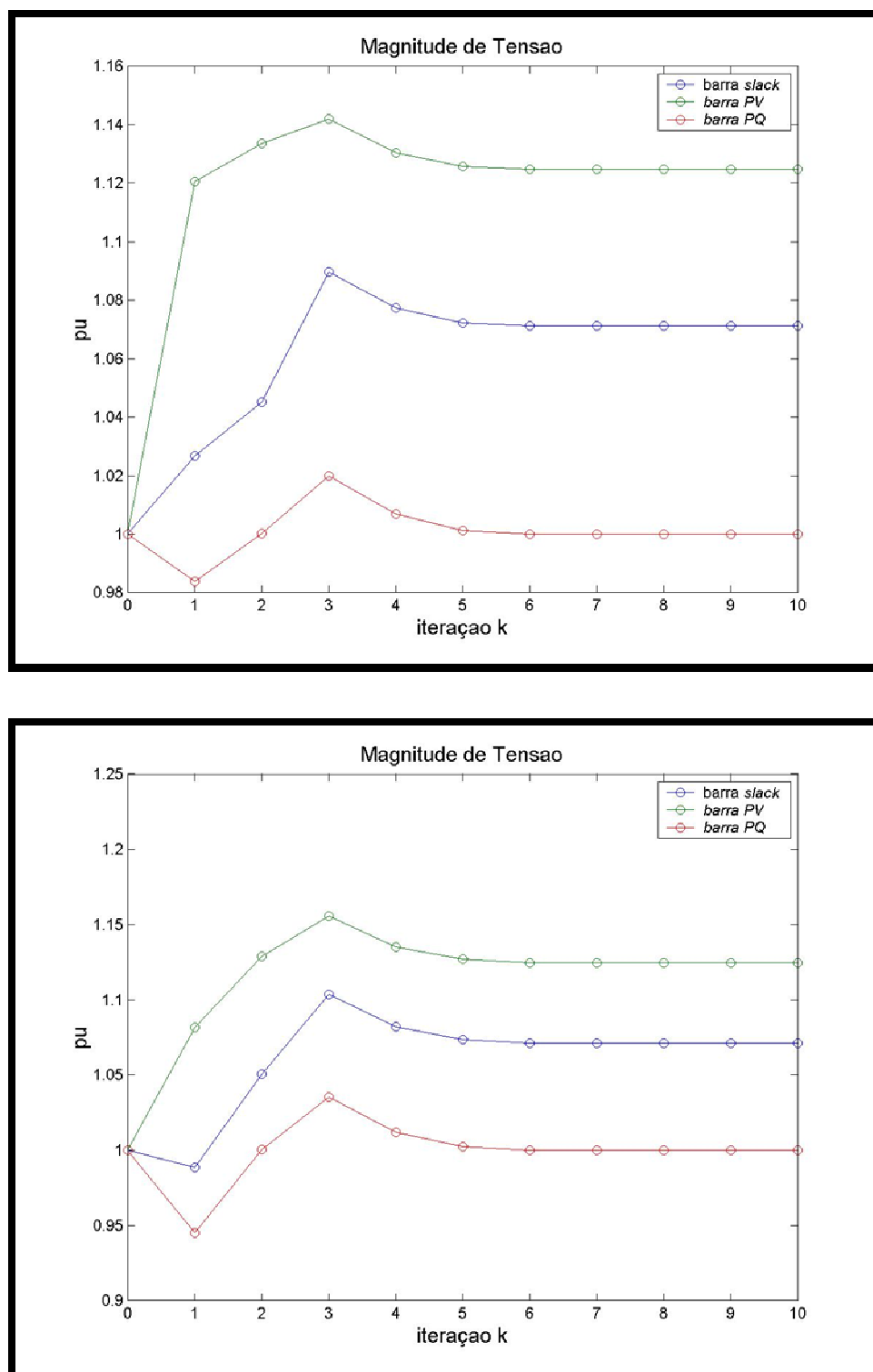


Figura 4.8: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).

A figura 4.9 nos apresenta a trajetória dos ângulos, já convertidos para graus, de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

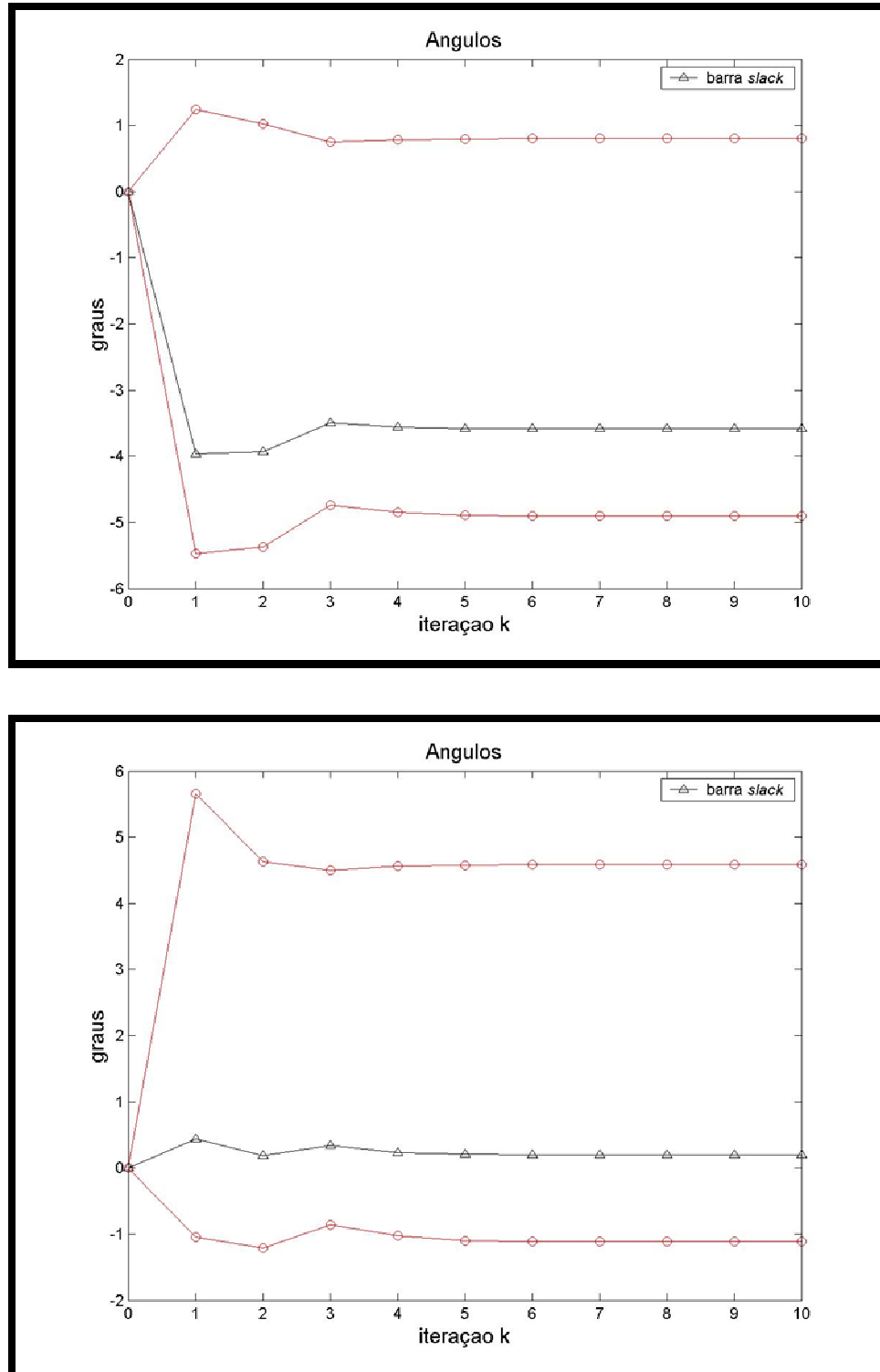


Figura 4.9: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).

A figura 4.10 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

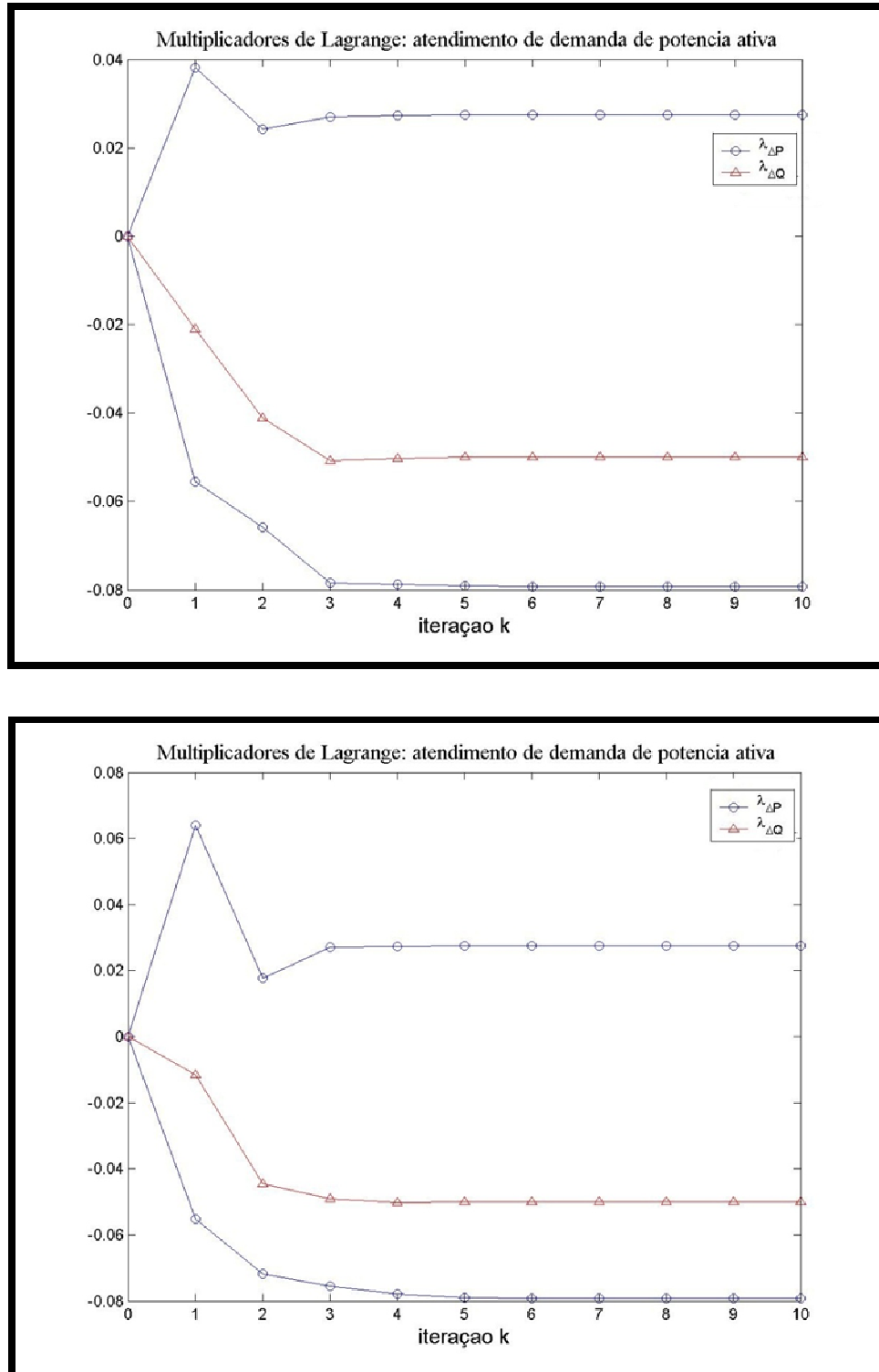


Figura 4.10: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).

A figura 4.11 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

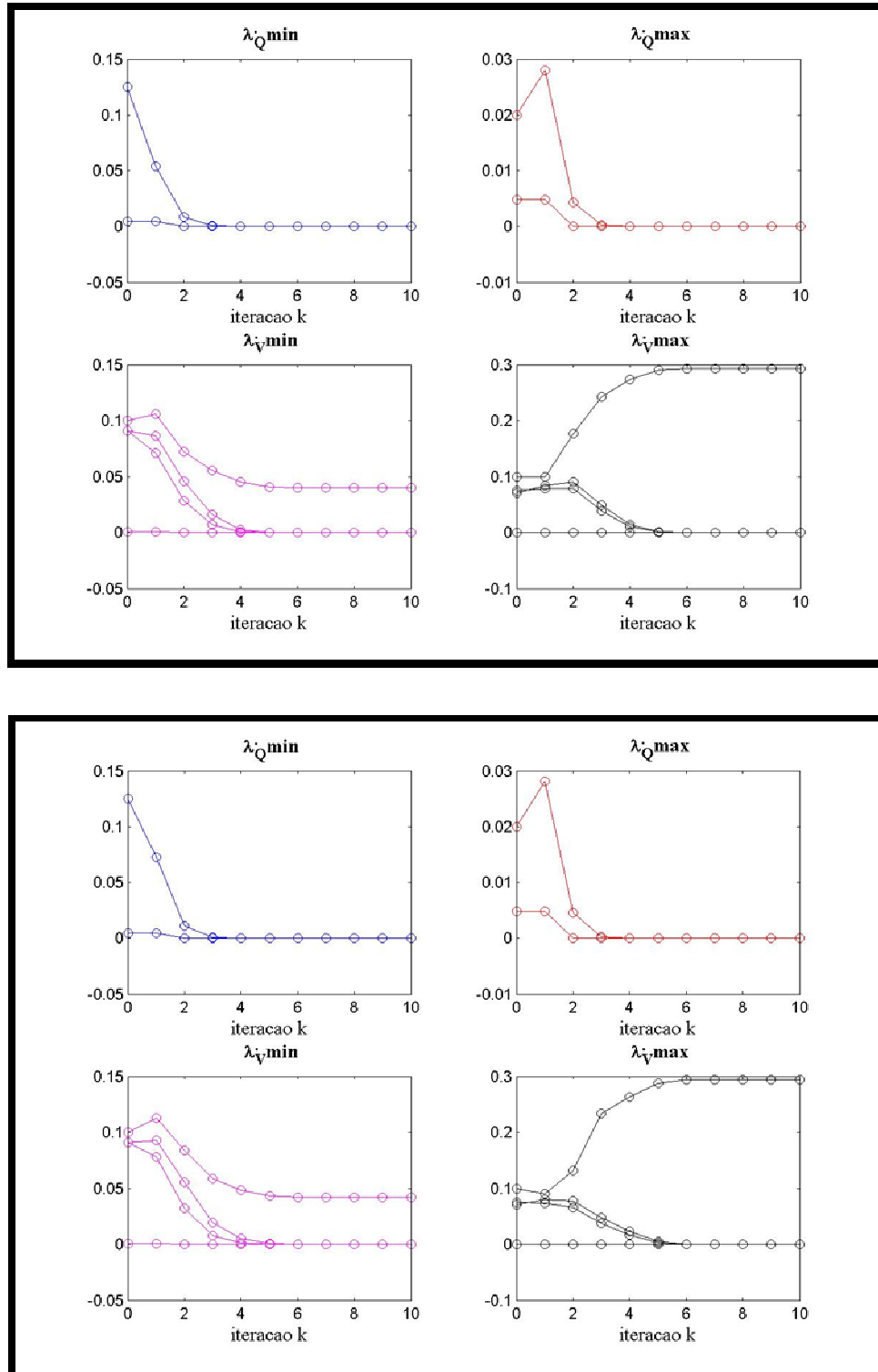


Figura 4.11: Sequência dos pontos $\lambda_{Q^{\min}}$, $\lambda_{Q^{\max}}$, $\lambda_{V^{\min}}$ e $\lambda_{V^{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).

A figura 4.12 apresenta a sequência de valores da função objetivo e da função lagrangiana obtidos em cada iteração pelo MPIBLMCG-EX.

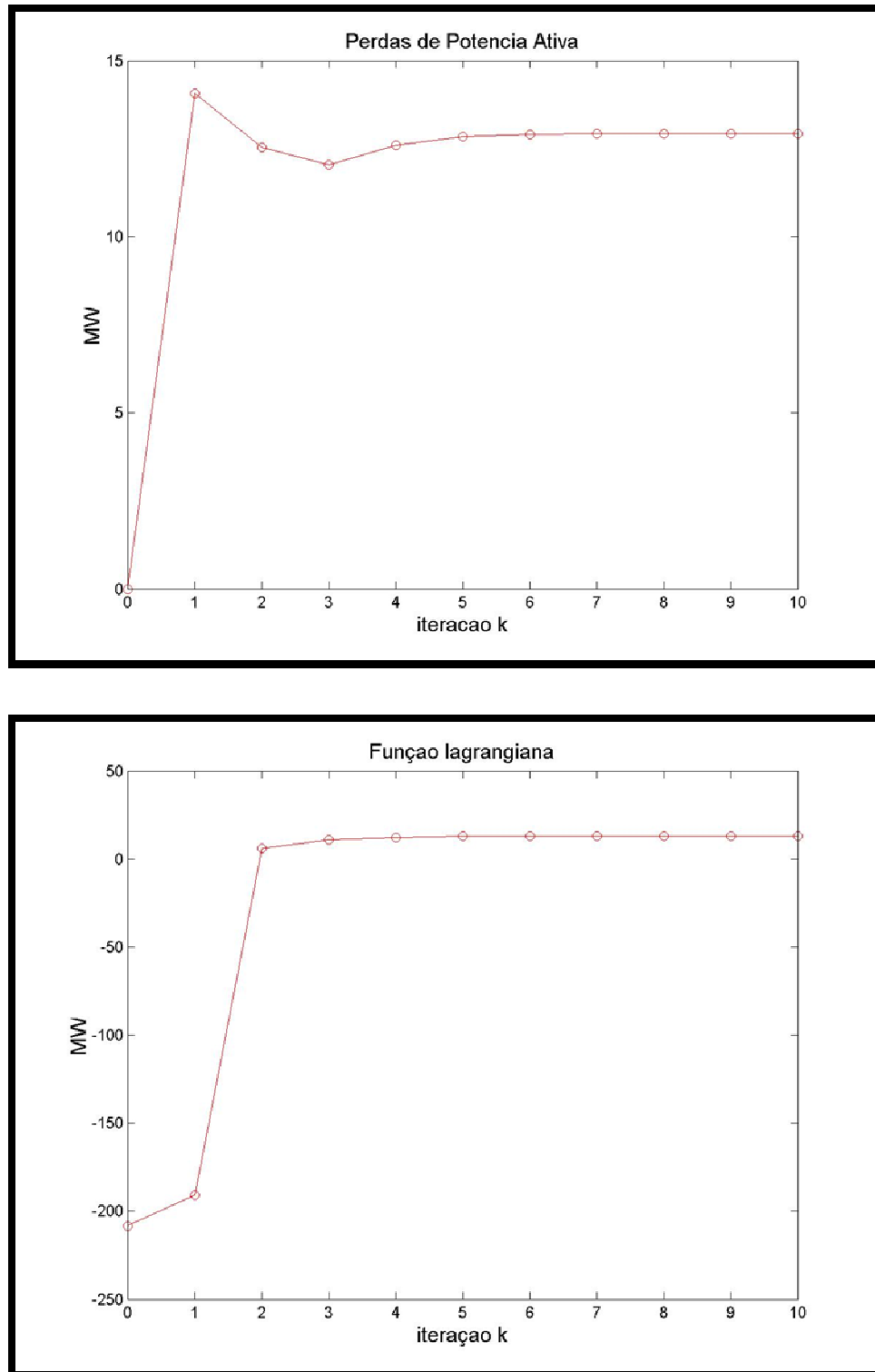


Figura 4.12: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o problema (4.6).

Em (Dommel, et al., 1968), os autores estimam que a solução ótima quando se fixa $V_3 = 1$ é de $12,9MW$. Os métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX determinaram uma solução mais refinada, mesmo com a restrição $1 \leq V_3 \leq 1$, e confirmaram os resultados dos autores com robustez e eficiência.

4.2.3 O sistema elétrico de potência de 9 barras.

O dados do sistema elétrico de potência de 9 barras podem ser encontrados em (Anderson, et al., 1994). O banco de dados do sistema elétrico de potência de 9 barras, cujas informações são de dados de barra e de linhas e em formato IEEE, está no **ANEXO III**. A topologia do sistema elétrico de 9 barras é vista na figura 4.21.

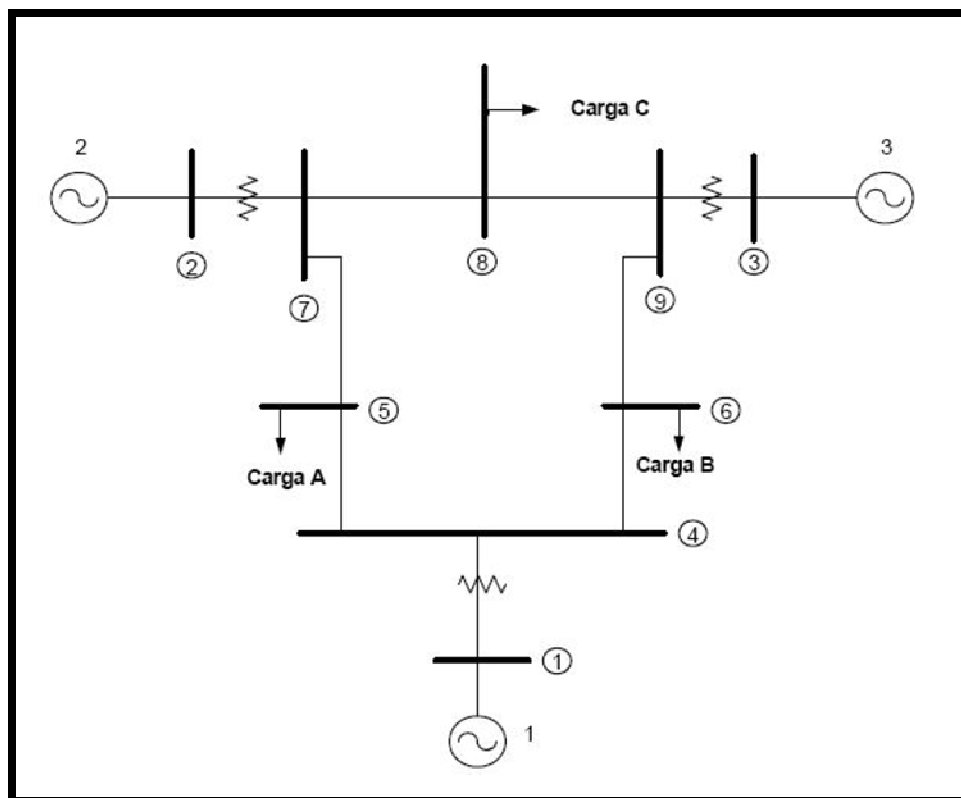


Figura 4.13: Topologia do sistema elétrico de potência de 9 barras.

A tabela 13 nos mostra a natureza das barras bem como os seus tipos de restrições

nodais associados, número de linhas e de *taps*.

Tabela 13: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de *taps* do sistema 9 barras.

Número de Barras	Natureza das Barras	Estudo Ativo/Reativo		
		Potência Ativa	Potência Reativa	Mag. de Tensão
6	PQ	Igualdade	Igualdade	Canalização
1	<i>Slack</i>	-	Canalização	Canalização
2	PV	Igualdade	Canalização	Canalização
Informação de Número de Linhas e quantidades de <i>taps</i>				
Número de Linhas		Quantidade de <i>taps</i>		
9		0		

Para resolução do problema do sistema elétrico de 9 barras utilizamos $\mu_0 = 0,5$. A dimensão do vetor ω é 116, isto é, esse contém 116 variáveis. Foi utilizado $\|\nabla L(\omega^k)\|_{\infty} \leq 10^{-10}$ como critério de parada do método.

A matriz dual normal θ_k contém 324 elementos, dos quais 118 são não-nulos, isto é, a matriz contém $33,3\%$ de elementos não-nulos.

O método MPIBLM-EX não foi satisfatório para a resolução deste sistema. A tabela 14 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT contendo as 25 primeiras iterações.

Tabela 14: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 9 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-525,515236628222	1,63	----	-----	-----
1	5,36081352218238	-522,330590354232	0,1819	0,5	1,01	1,01
2	4,52953838037635	-10,7426475014335	0,0144	0,1826	1,01	1,01
3	4,53294348386132	-2,02484353487583	0,0013	0,0667	1,01	1,01
4	4,39183498036776	2,50734504545926	0,0007	0,0243	1,01	1,01
5	4,09284851278882	3,92478094631967	0,0040	0,0089	0,98	0,98
6	4,10129029537253	4,07890348919495	0,0004	0,0032	0,88	1,09
7	4,11063823910769	4,10988347558349	6,74e-05	0,0018	1,01	1,01
8	4,11331165262019	4,11308616877569	2,65e-05	0,0006	1,01	1,01
9	4,11368217154379	4,11365004451527	3,73e-06	0,0002	1,01	1,01
10	4,11369136521063	4,11369090497815	1,00e-07	9,08e-05	1,01	1,01
11	4,11409101309333	4,11369180682469	6,22e-05	3,32e-05	0,80	1,01
12	4,09084000531801	4,11361553106584	0,0044	1,21e-05	1,01	1,00
13	3,87542153077594	4,10877027114163	0,1512	4,43e-06	1,01	0,76
14	2,99108580978617	1,66035756513169	2,2538	1,61e-06	0,37	0,30
15	3,14945609242246	2,17084002617756	1,9418	0,0002	0,16	0,006
16	2,40732231892945	6,54903305263304	1,0247	0,0016	0,31	1,00
17	2,74698320430751	16,0558183791225	1,1164	0,0035	0,02	0,35
18	2,88374020702344	18,7647498465724	1,4675	0,0013	5,97-05	0,007
19	3,17577181631454	2,5837807633251	0,5221	0,0211	0,41	0,97
20	4,63637783067127	4,08042003635485	0,0352	0,0077	1,01	1,00
21	4,04211703660254	4,11263995117424	0,0101	0,0028	0,99	1,01
22	4,09996468375663	4,11373169043593	0,0019	0,0010	0,81	1,01
23	4,11382621162299	4,11369186118762	1,83e-05	0,0003	1,01	1,01
24	4,11343183869508	4,11369183682559	0,0001	0,0001	1,01	1,01
25	4,01750375668670	4,11230965742171	0,0159	5,03e-05	1,01	1,01

A tabela 14 mostra-nos que o MPIBLM-EX foi eficiente em obter a solução ótima com precisão superior a 10^{-6} na iteração 10, porém, a partir dessa iteração apresentou instabilidade e não conseguiu avançar para uma precisão superior.

O método MPIBLMCG-EX convergiu em 23 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 4,11369184655363 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 4,11369184655366 \text{ MW}$, demanda de potência ativa avaliada em $\max(\Delta P) = 4,840572 \times 10^{-14} \text{ pu}$, demanda de potência reativa avaliada em

$\max(\Delta Q) = 6,050715 \times 10^{-15} pu$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(gap) = 2,705618 \times 10^{-19} pu$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 2,788686 \times 10^{-10}$ e o parâmetro de amortecimento está avaliado em $\beta = 0,032829$. A tabela 15 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 15: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 9 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _\infty$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	525,515236628222	1,63	----	-----	-----
1	5,01105498794252	-523,059901608928	0,3841	0,5	1,01	1,01
2	4,88666477789513	-10,604337997901	0,0429	0,1826	1,01	1,01
3	4,69538213644289	-2,0156575656444	0,0269	0,0667	1,01	1,01
4	4,54702642370203	2,55527365666082	0,0155	0,0243	1,01	1,01
5	4,31421983750803	4,0540434842605	0,0089	0,0089	1,01	1,009
6	4,09791345832234	4,09974724677432	0,0100	0,0032	0,828	1,01
7	4,18756078803192	4,19180226165677	0,0106	0,0011	0,538	0,216
8	4,11036599555840	4,11287882527939	0,0039	0,0004	0,961	1,01
9	4,11298648812239	4,1135788879686	0,0002	0,0001	1,01	1,01
10	4,11363431929041	4,11369475380472	0,0001	0,0001	1,01	1,01
11	4,11369392560712	4,11369196166127	2,70e-005	4,94e-05	1,01	1,01
12	4,11369187079010	4,11369185992526	9,66e-006	1,86e-05	1,01	1,01
13	4,11369185098043	4,11369185054439	5,95e-006	6,59e-06	0,6963	1,01
14	4,11369184673944	4,11369184701925	1,77e-006	2,40e-06	1,0002	1,01
15	4,11369184652922	4,11369184660714	6,07e-007	8,79e-07	1,01	1,01
16	4,11369184655065	4,11369184655996	2,04e-007	3,21e-07	1,01	1,01
17	4,11369184655321	4,11369184655439	6,87e-008	1,17e-07	1,01	1,01
18	4,11369184655357	4,11369184655383	2,29e-008	4,28e-08	1,01	1,01
19	4,11369184655391	4,11369184655378	7,6e-009	1,56e-08	1,01	1,01
20	4,11369184655381	4,1136918465538	2,55e-009	5,72e-09	1,01	1,01
21	4,11369184655393	4,11369184655392	8,75e-010	2,08e-09	1,01	1,01
22	4,11369184655412	4,11369184655397	2,92e-010	7,63e-10	1,01	1,01
23	4,11369184655363	4,11369184655366	9,97e-011	2,78e-10	1,01	1,01

A tabela 15 mostra-nos que o MPIBLMCG-EX foi superior ao MPIBLM-EX por solucionar o problema de FPO reativo do sistema 9 barras com uma precisão superior a 10^{-10} . As dificuldades são apresentadas devido a lenta taxa de convergência e mau

condicionamento da matriz dual normal (ver tabela 16). Na iterações 10, o MPIBLMCG-EX precisou incrementar o valor do parâmetro de barreira.

A tabela 16 mostra-nos o condicionamento da matriz dual normal θ_k de ambos os métodos. A primeira coluna apresenta a iteração k , a segunda coluna apresenta o condicionamento da matriz dual normal obtido pelo MPIBLM-EX, a terceira e a quarta coluna apresentam, respectivamente, o condicionamento da matriz dual-normal antes (ADC) e depois (DDC) da decomposição de Cholesky e a quinta coluna apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento β .

Tabela 16: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 9 barras.

K	$\kappa(\theta_k)$ MPIBLM-EX	$\kappa(\theta_k)$ ADC	$\kappa(\theta_k)$ DDC	β_k
0	--			
1	1292,1	--	--	--
2	9276,9	1292,1	148,52	0,61066
3	8637	3825	470,26	0,31203
4	14549	37603	533,38	0,15943
5	27445	18923	356,08	0,089576
6	1,5021e+005	4853,6	930,94	0,043649
7	8,7377e+006	5,9214e+005	3857,7	0,023387
8	2,886e+008	2,5393e+005	25157	0,019208
9	3,6703e+010	4,373e+006	1,9141e+005	0,020973
10	1,2369e+014	2,8966e+007	4,5665e+005	0,024014
11	5,9893e+016	7,9697e+009	7,1207e+005	0,092902
12	1,9671e+019	3,9047e+010	1,1747e+006	0,052196
13	5,7019e+021	5,2368e+011	3,3463e+006	0,038988
14	5,9843e+022	5,1882e+012	8,5035e+006	0,03521
15	5,3789e+019	4,0548e+013	2,6459e+007	0,033343
16	2,9372e+017	2,0547e+014	6,7469e+007	0,033111
17	8,8234e+016	1,6452e+015	1,9041e+008	0,03288
18	6,91e+011	1,3366e+016	5,3772e+008	0,032651
19	2,9311e+013	1,0908e+017	1,5197e+009	0,032423
20	1,5412e+013	8,9439e+017	4,298e+009	0,032197
21	6,7349e+013	7,3686e+018	1,2166e+010	0,031972
22	7,0533e+015	6,0999e+019	2,5394e+010	0,033293
23	5,7206e+017	4,8239e+020	7,8252e+010	0,03306
24	2,5378e+020	3,9082e+021	2,2087e+011	0,03283
25	1,824e+023			

A tabela 16 mostra-nos na coluna ADC o mau condicionamento da matriz dual

normal do MPIBLMCG-EX a partir da iteração 6 do método em que a ordem do condicionamento dessa passa a ser superior a uma ordem de grandeza de 10^5 , cujo valor aumenta substancialmente nas iterações seguintes atingindo a ordem de grandeza 10^{21} na iteração 23. Por outro lado, quando observamos a coluna DDC, notamos que o parâmetro de amortecimento influenciou positivamente no condicionamento da matriz dual normal, sendo importante e eficiente em relação à correção do posto dessa, pois a ordem de grandeza de 10^5 somente é atingida na iteração 8, alcançando o seu valor máximo da ordem de 10^{11} na iteração 23. Ressaltamos também a estabilidade desse parâmetro de uma iteração para outra na coluna β_k , observando que essa reflete a eficiência da heurística proposta de acordo com a expressão (3.111). Observamos o condicionamento da matriz dual normal obtidos pelo MPIBLM-EX e constatamos muita instabilidade, destacamos o salto substancial de mau condicionamento avaliado cerca de mil vezes da iteração 9 para 10. O MPIBLM-EX se perdeu ao encontrar uma solução ótima superior a precisão de 10^{-7} e seu mau condicionamento, na iteração 25, está na grandeza de 10^{23} .

A figura 4.14 nos apresenta a trajetória das magnitudes de tensão de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

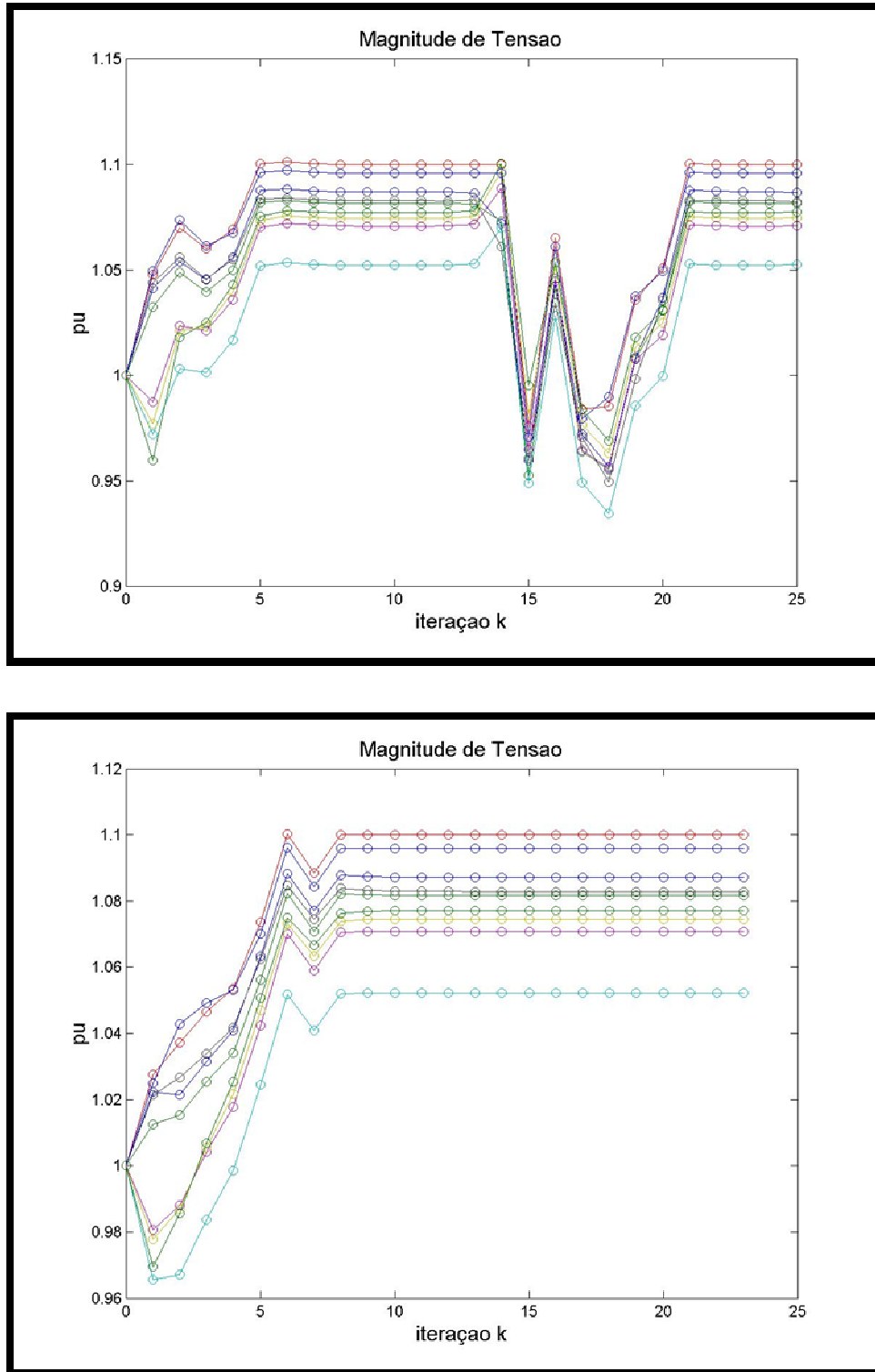


Figura 4.14: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 9 barras.

A figura 4.15 nos apresenta a trajetória dos ângulos, já convertidos para graus, de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

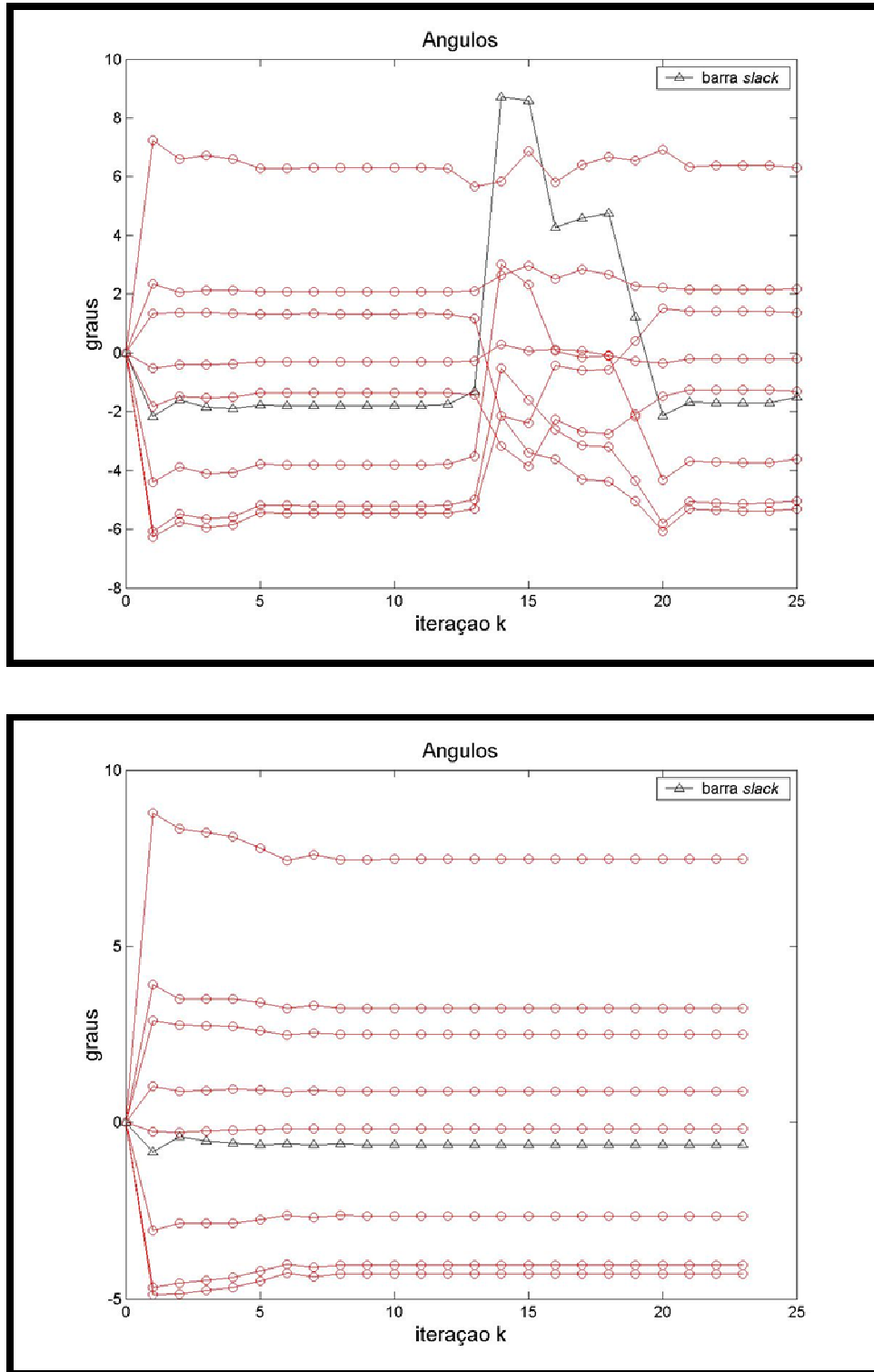


Figura 4.15: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 9 barras.

A figura 4.16 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

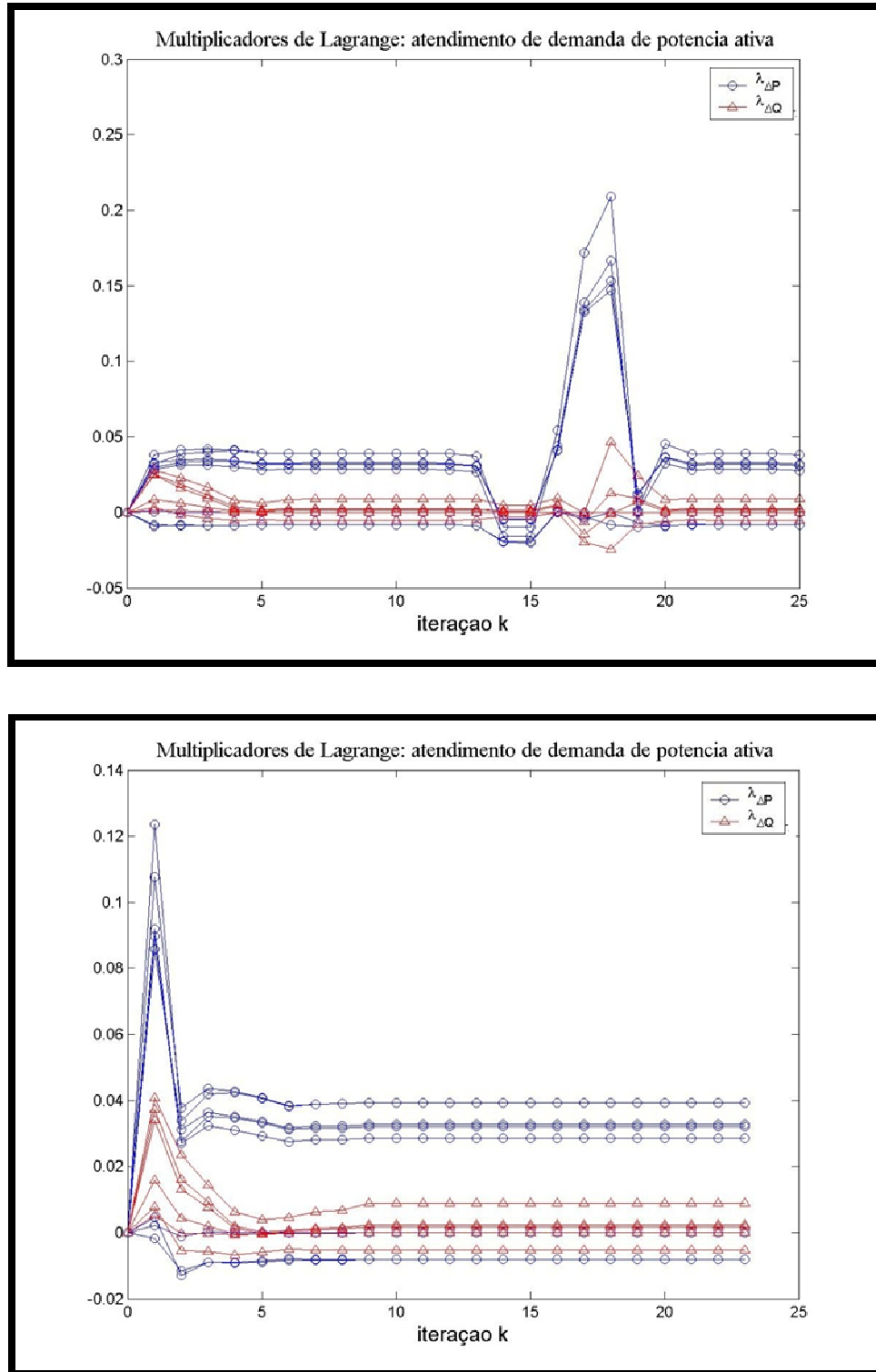


Figura 4.16: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 9 barras.

A figura 4.17 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

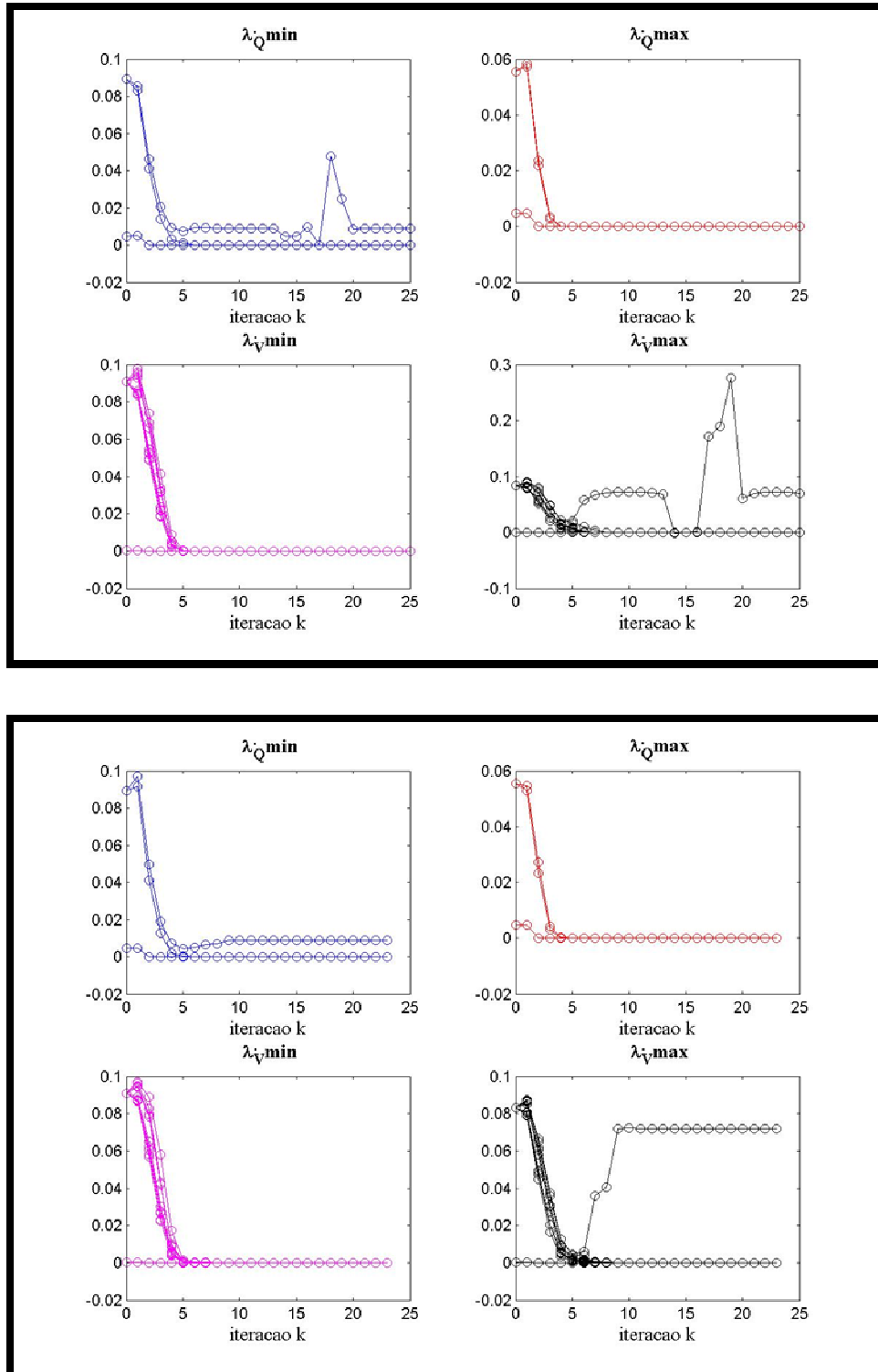


Figura 4.17: Sequência dos pontos $\lambda_{Q^{\min}}$, $\lambda_{Q^{\max}}$, $\lambda_{V^{\min}}$ e $\lambda_{V^{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 9 barras.

A figura 4.18 apresenta a sequência de valores da função objetivo e da função lagrangiana obtidos em cada iteração pelo MPIBLMCG-EX.

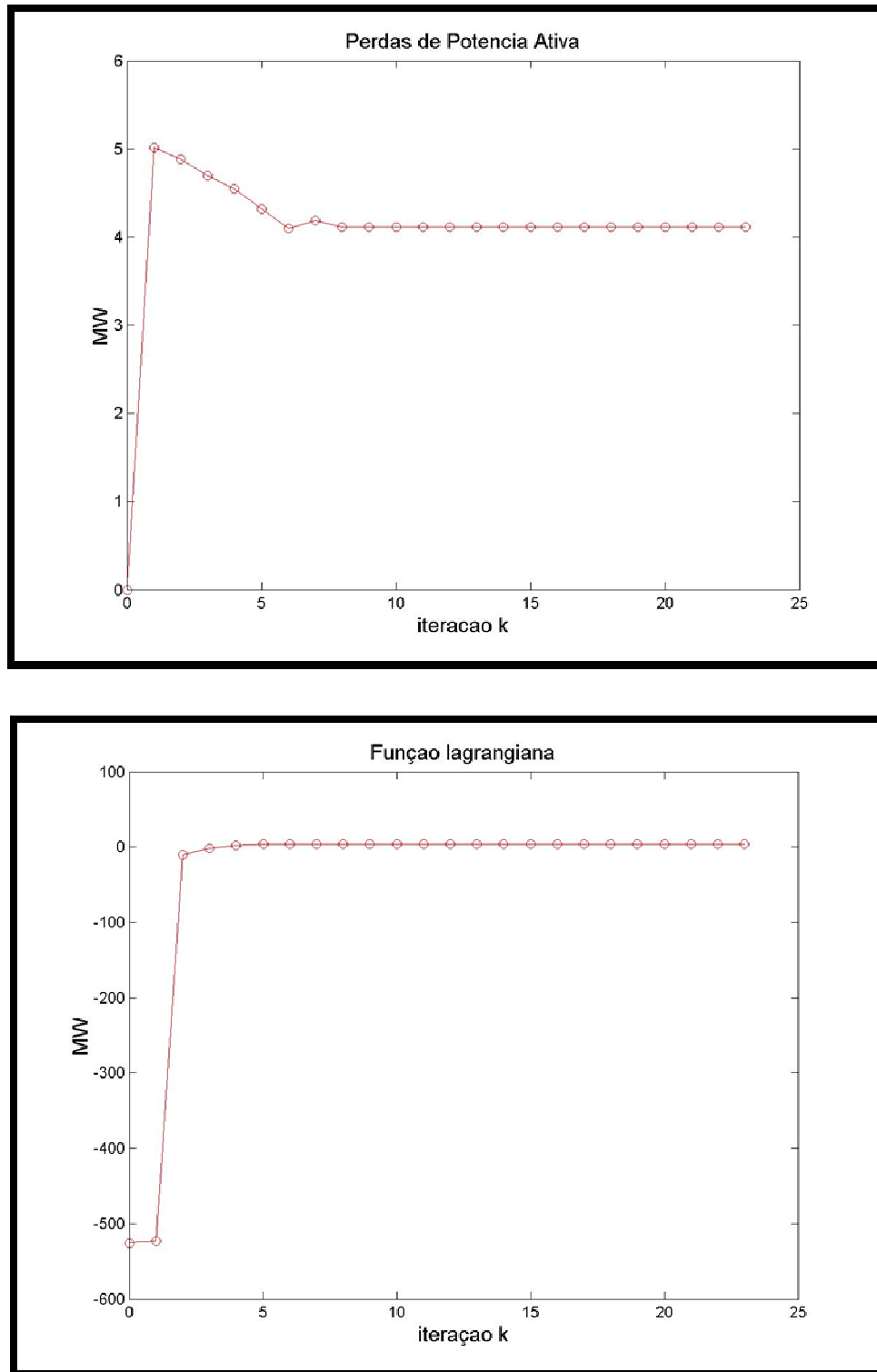


Figura 4.18: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 9 barras.

A figura 4.19 apresenta a sequência de valores do parâmetro de amortecimento e a apresentação dos estados ótimos das magnitudes de tensão em cada barra obtidos pelo MPIBLMCG-EX.

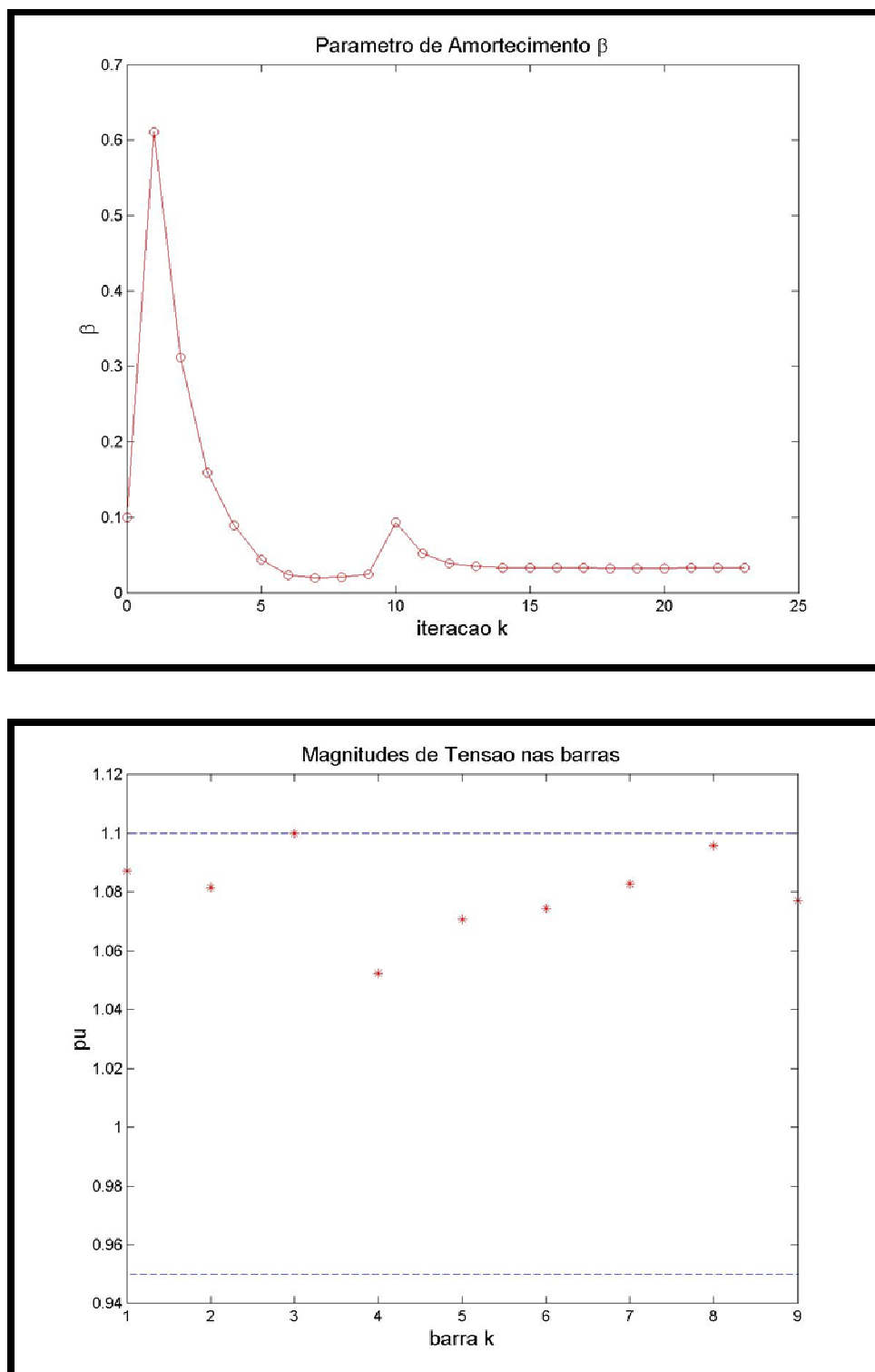


Figura 4.19: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 9 barras.

4.2.4 O sistema elétrico de potência de 14 barras.

Os dados de barra e de linha do sistema IEEE-14 barras podem ser encontrado no site da (University Washington Electrical Engineering). A topologia do sistema elétrico de 14 barras é apresentada na figura 4.20.

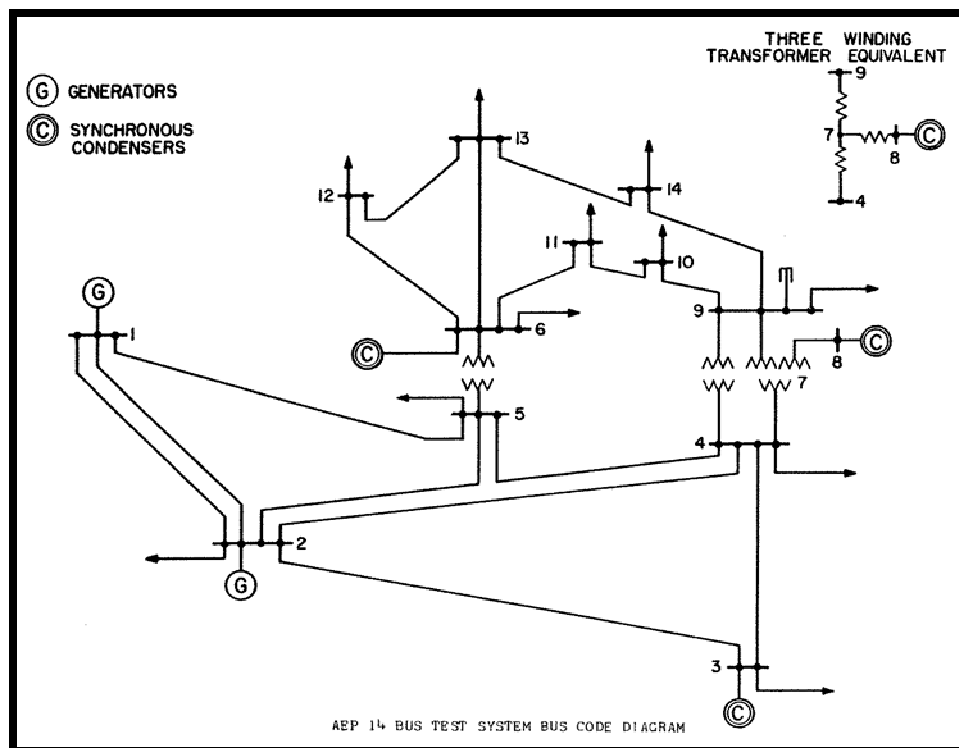


Figura 4.20: Topologia do sistema IEEE-14. Fonte: (University Washington Electrical Engineering)

A tabela 17 nos mostra a natureza das barras bem como os seus tipos de restrições nodais associados, número de linhas e de taps.

Tabela 17: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de taps do sistema 14 barras.

Número de Barras	Natureza das Barras	Estudo Ativo/Reativo		
		Potência Ativa	Potência Reativa	Mag. de Tensão
9	PQ	Igualdade	Igualdade	Canalização
1	Slack	-	Canalização	Canalização
4	PV	Igualdade	Canalização	Canalização
Informação de Número de Linhas e quantidades de taps				
Número de Linhas		Quantidade de taps		
20		3		

Para resolução do problema do sistema elétrico de 14 barras utilizamos $\mu_0 = 0,05$. A dimensão do vetor ω é 182, isto é, esse contém 182 variáveis. Foi utilizado $\|\nabla L(\omega^k)\|_{\infty} \leq 10^{-11}$ como critério de parada do método.

A matriz dual normal θ_k contém 784 elementos, dos quais 280 são não-nulos, isto é, a matriz contém 35,71% de elementos não-nulos.

O método MPIBLM-EX convergiu em 10 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(V^*, \gamma^*) = 12,29251166782918 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 12,29251166782950 \text{ MW}$, $\max(\Delta P) = 5,944134 \times 10^{-13} \text{ pu}$, $\max(\Delta Q) = 6,215861 \times 10^{-14} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(\text{gap}) = 4,633552 \times 10^{-13} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 8,719705 \times 10^{-6}$. A tabela 18 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 18: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 14 barras.

k	$f(V^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-132,767706945752	1,8298	----	-----	-----
1	15,04795917625340	-117,120090888106	0,3066	0,05	1,01	1,01
2	12,98153283776589	8,67123828996379	0,0903	0,0182	0,627	0,966
3	12,26865598385229	11,8767490164579	0,0127	0,0066	1,01	0,897
4	12,27153213893072	12,2474275728348	0,0010	0,0024	1,01	0,990
5	12,28699609573707	12,288062557718	0,0010	0,0013	0,909	1,01
6	12,29249582411187	12,2923442758208	5,26e-05	0,0004	1,01	1,01
7	12,29251078301533	12,2925098742642	1,86e-06	0,0001	0,965	1,01
8	12,29251167638255	12,2925116665201	1,86e-08	6,53e-05	1,01	1,01
9	12,29251166776994	12,2925116678321	1,95e-10	2,38e-05	1,007	1,01
10	12,29251166782918	12,2925116678295	2,57e-12	8,71e-06	1,01	1,01

A tabela 18 mostra-nos que o MPIBLM-EX foi eficiente e robusto em obter a solução ótima do problema com precisão superior a 10^{-11} na iteração 10. Observamos uma rápida taxa de convergência a partir da iteração 5, pois o erro está em uma ordem de grandeza de 10^{-5} e é reduzido a ordem de grandeza de 10^{-12} em apenas 5 iterações. Informamos que houve uma penalização do parâmetro de barreira na iteração 5, porém, não afetou em nada o desempenho do MPIBLM-EX .

O método MPIBLMCG-EX convergiu em 10 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 12,29251166782274 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 12,29251166783009 \text{ MW}$, demanda de potência ativa avaliada em $\max(\Delta P) = 2,886024 \times 10^{-13} \text{ pu}$, demanda de potência reativa avaliada em $\max(\Delta Q) = 9,237055 \times 10^{-14} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(\text{gap}) = 9,753831 \times 10^{-12} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 5,790430 \times 10^{-6}$ e o parâmetro de amortecimento está avaliado em $\beta = 2,896687 \times 10^{-5}$. A tabela 19 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 19: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 14 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-132,767706945752	1,8298	----	-----	-----
1	14,42766692370709	-117,208848631187	0,3310	0,05	1,01	1,01
2	12,45228834575644	8,64793561591555	0,0227	0,0182	1,01	0,970
3	12,37397254561801	12,0615285510553	0,0432	0,0061	0,443	0,864
4	12,27135067734959	12,2435746042741	0,0037	0,0024	1,01	0,999
5	12,28371707630932	12,2896224386426	0,0025	0,0008	0,807	0,979
6	12,29129404034099	12,2924594610979	5,88e-05	0,0003	1,01	1,01
7	12,29252200603055	12,2925104945221	1,19e-05	0,0001	1,01	1,01
8	12,29251156868163	12,2925116689654	1,02e-07	4,33e-05	1,01	1,01
9	12,29251166880152	12,2925116678265	9,91e-10	1,58e-05	1,01	1,01
10	12,29251166782274	12,2925116678301	9,78e-12	5,79e-06	1,01	1,01

A tabela 19 mostra-nos que o MPIBLMCG-EX foi eficiente e robusto em obter a solução ótima do problema com precisão superior a 10^{-11} na iteração 10, porém o MPIBLM-EX foi mais eficiente, pois a avaliação do erro na iteração 10 é mais preciso. Observamos uma rápida taxa de convergência a partir da iteração 5, pois o erro está em uma ordem de grandeza de 10^{-5} e é reduzido a ordem de grandeza de 10^{-12} em apenas 5 iterações. Informamos não houve não que houve penalização do parâmetro de barreira, por isso a avaliação do parâmetro de barreira na solução ótima é menor do que do MPIBLM-EX.

A tabela 20 mostra-nos o condicionamento da matriz dual normal θ_k de ambos os métodos. A primeira coluna apresenta a iteração k , a segunda coluna apresenta o condicionamento da matriz dual normal obtido pelo MPIBLM-EX, a terceira e a quarta coluna apresentam, respectivamente, o condicionamento da matriz dual-normal antes (ADC) e depois (DDC) da decomposição de Cholesky e a quinta coluna apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento β .

Tabela 20: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 14 barras.

K	$\kappa(\theta_k)$ MPIBLM-EX	$\kappa(\theta_k)$ ADC	$\kappa(\theta_k)$ DDC	β_k
0	--	--	--	--
1	10662	10662	4558,5	0.4715
2	20646	3490	1842,1	0.1648
3	1989,6	1677,8	706,6	0.0633
4	64893	37144	3337,2	0.0211
5	88468	2,2741e+005	87420	0.0070
6	1,3364e+005	4,8003e+005	3,5085e+005	0.0023
7	4,505e+005	9,8879e+005	8,0919e+005	0.0007
8	1,6311e+006	2,4342e+006	2,1827e+006	0.0002
9	4,456e+006	6,7091e+006	6,4614e+006	8.6901e-005
10	1,2189e+007	1,8353e+007	1,8121e+007	2.8967e-005

A tabela 20 mostra-nos na coluna ADC o mau condicionamento da matriz dual normal do MPIBLMCG-EX a partir da iteração 5 do método em que a ordem do condicionamento dessa passa a ser superior a uma ordem de grandeza de 10^5 , cujo valor valor aumenta pouco nas iterações seguintes atingindo a ordem de grandeza 10^7 na iteração 10. Por outro lado, quando observamos a coluna DDC, notamos que o parâmetro de amortecimento influenciou positivamente no condicionamento da matriz dual normal, sendo importante e eficiente em relação à correção do posto dessa, pois a ordem de grandeza de 10^5 somente é atingida na iteração 6, alcançando o seu valor máximo da ordem de 10^7 na iteração 10. Observamos o condicionamento da matriz dual normal obtidos pelo MPIBLM-EX e constatamos que o mau condicionamento foi aumentado, em relação ao MPIBLMCG-EX, uniformemente. Concluimos que o condicionamento da matriz dual normal de ambos os métodos estão próximos, porém o condicionamento apresentado pelo MPIBLM-EX foi superior ao do MPIBLMCG-EX.

A figura 4.21 nos apresenta a trajetória das magnitudes de tensão de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

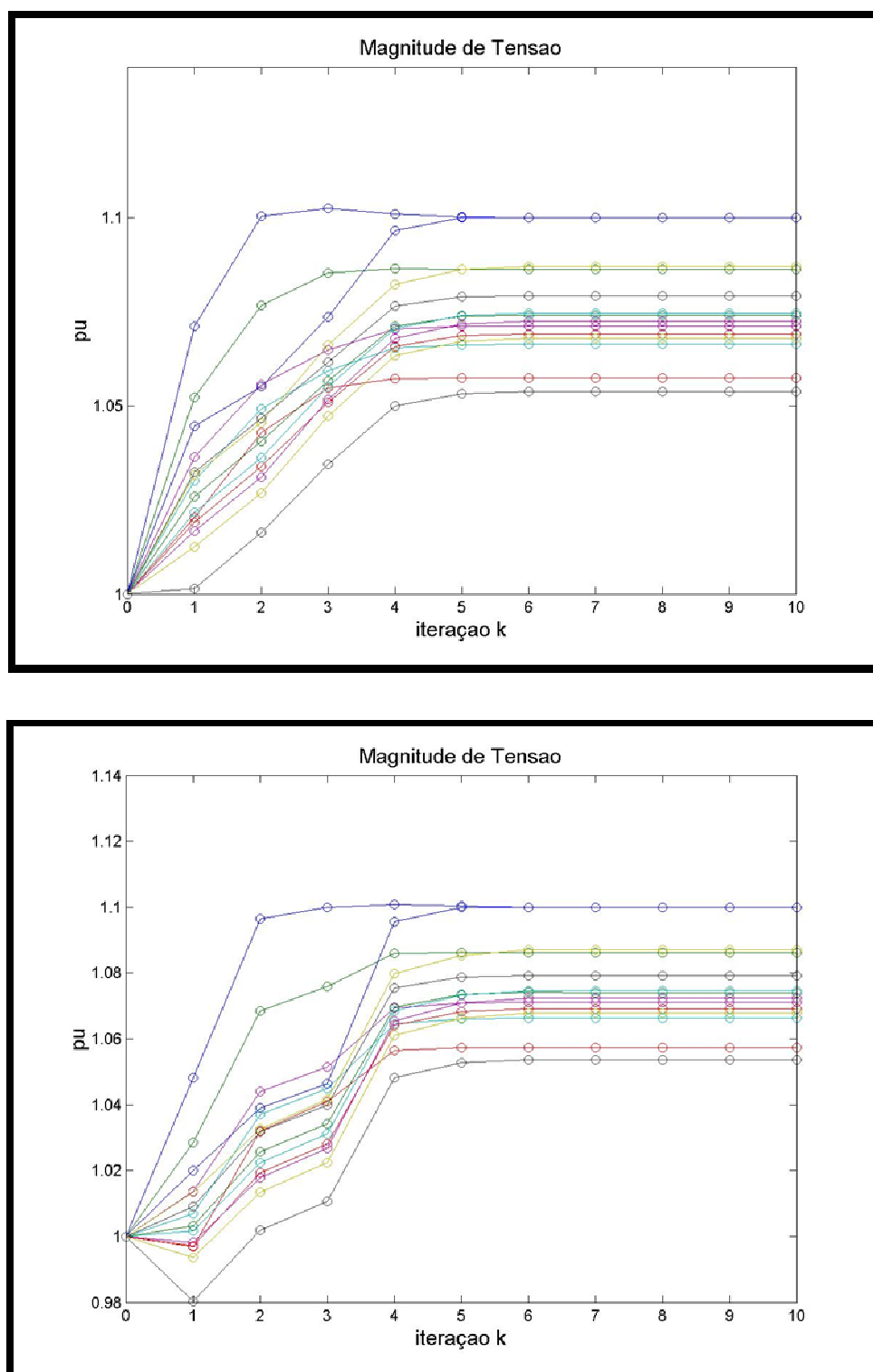


Figura 4.21: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 14 barras.

A figura 4.22 nos apresenta a trajetória dos ângulos, já convertidos para graus, de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

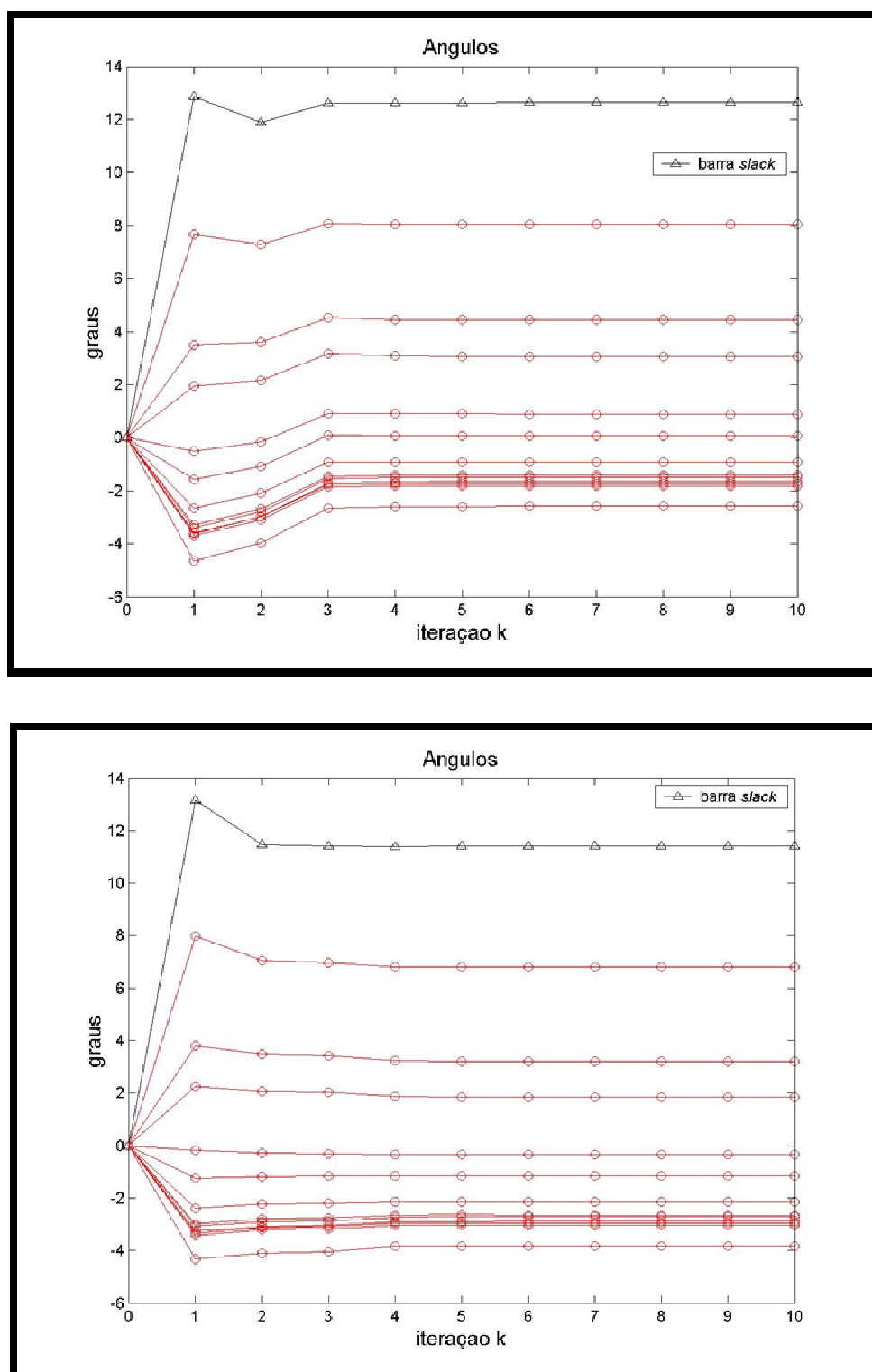


Figura 4.22: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 14 barras.

A figura 4.23 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

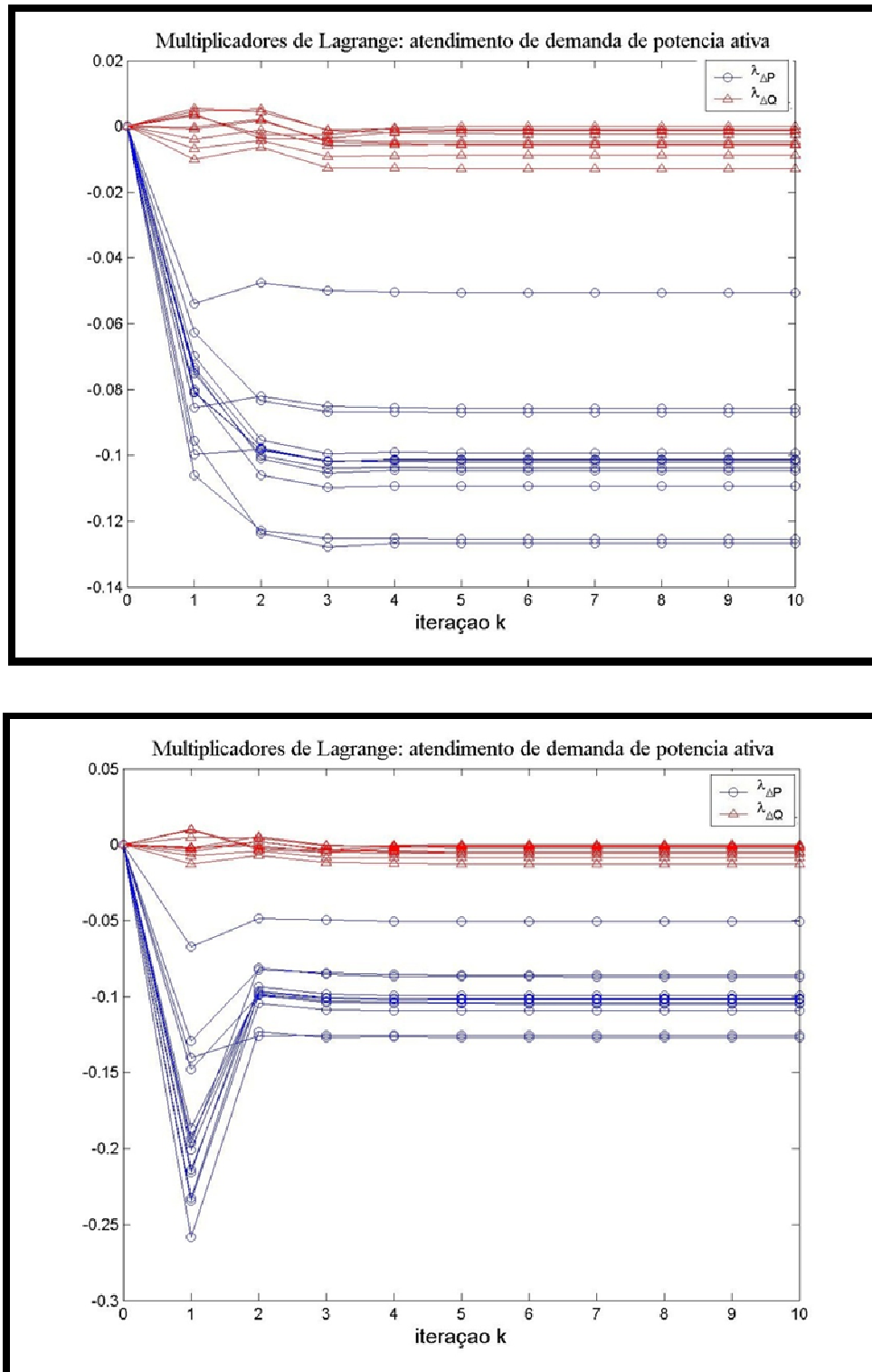


Figura 4.23: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 14 barras.

A figura 4.24 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

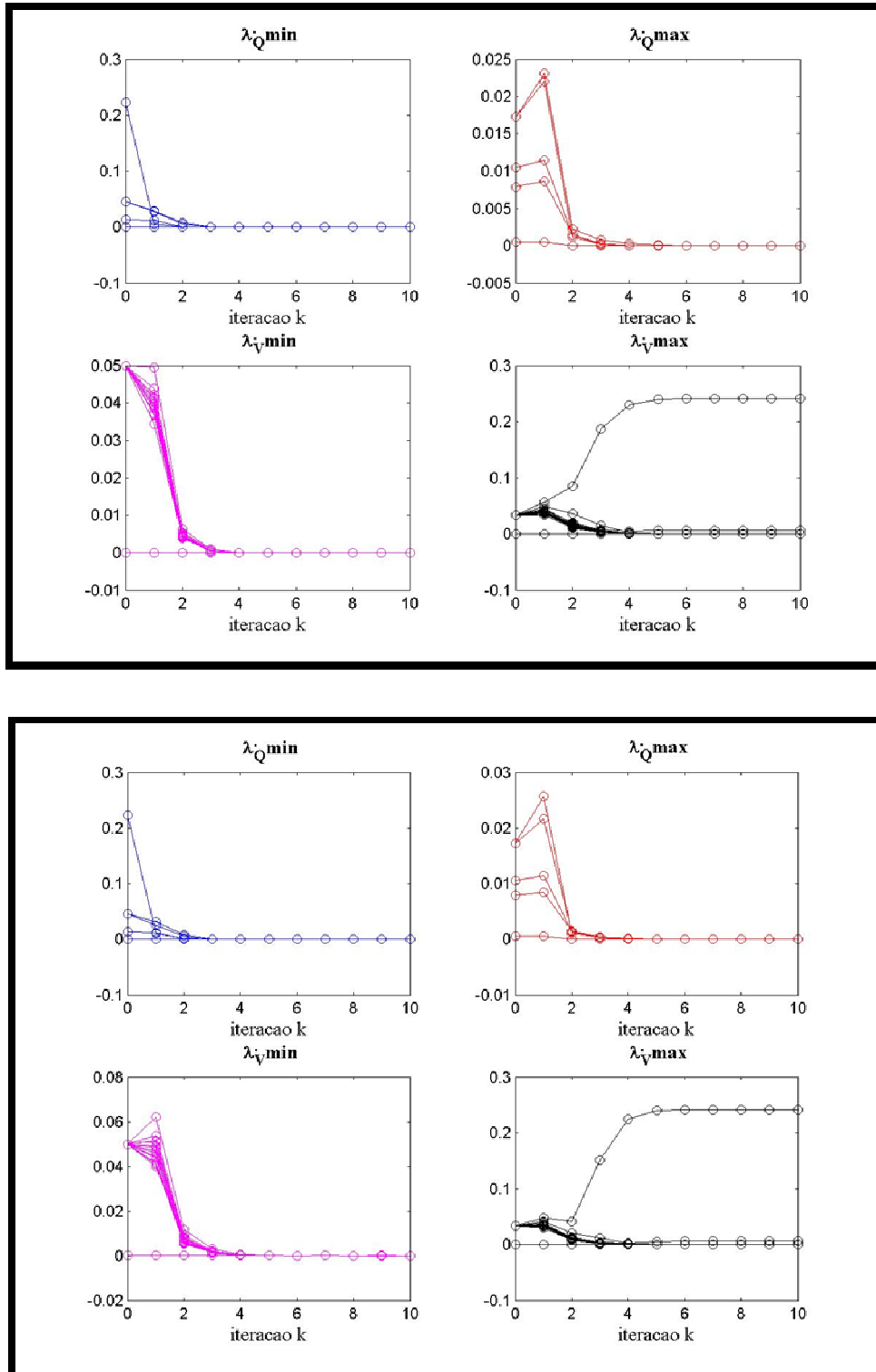


Figura 4.24: Sequência dos pontos $\lambda_{Q_{\min}}$, $\lambda_{Q_{\max}}$, $\lambda_{V_{\min}}$ e $\lambda_{V_{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 14 barras.

A figura 4.25 apresenta a sequência de valores da função objetivo e da função lagrangiana obtidos em cada iteração pelo MPIBLMCG-EX.

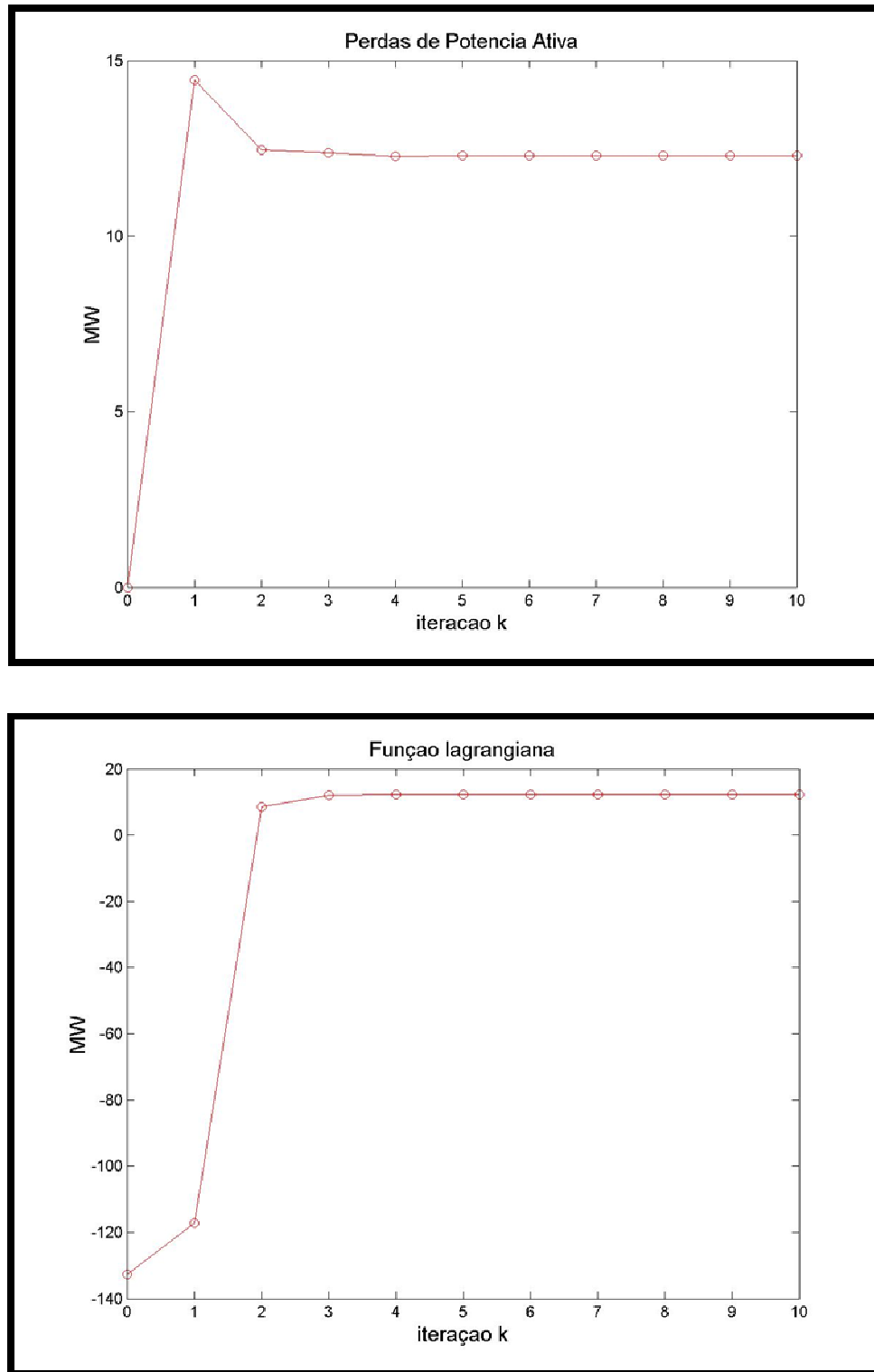


Figura 4.25: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 14 barras.

A figura 4.26 apresenta a sequência de valores do parâmetro de amortecimento e a apresentação dos estados ótimos das magnitudes de tensão em cada barra obtidos pelo MPIBLMCG-EX.

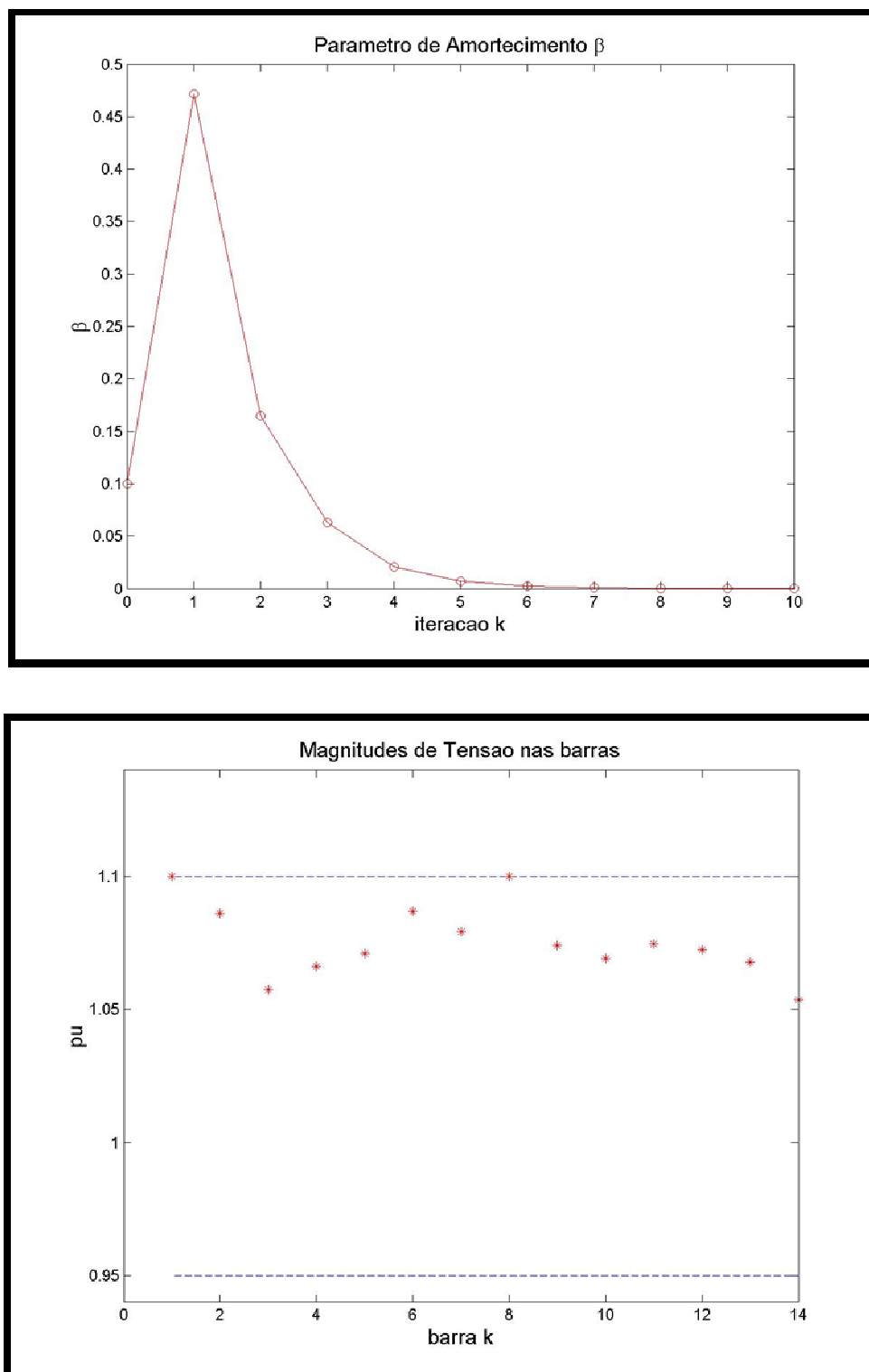


Figura 4.26: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 14 barras.

Para resolução do problema do sistema elétrico de 30 barras utilizamos $\mu_0 = 0,05$. A dimensão do vetor ω é 377, isto é, esse contém 377 variáveis. Foi utilizado $\|\nabla L(\omega^k)\|_{\infty} \leq 10^{-11}$ como critério de parada do método.

A matriz dual normal θ_k contém 3600 elementos, dos quais 504 são não-nulos, isto é, a matriz contém 14% de elementos não-nulos.

O método MPIBLM-EX convergiu em 11 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(V^*, \gamma^*) = 16,08931485724442 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 16,08931485724783 \text{ MW}$, $\max(\Delta P) = 1,365019 \times 10^{-13} \text{ pu}$, $\max(\Delta Q) = 1,596917 \times 10^{-13} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(\text{gap}) = 9,806798 \times 10^{-14} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 3,2021148 \times 10^{-6}$. A tabela 22 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 22: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 30 barras.

k	$f(V^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-268,85729731404	0,942	----	-----	-----
1	19,66400586820302	-251,970568153024	0,2298	0,05	1,01	1,01
2	18,04812265191566	8,59845257531684	0,1675	0,0182	0,380	0,952
3	16,02365332163177	15,1210457946625	0,0068	0,0066	1,01	0,947
4	16,05901154471790	15,9882985814183	0,0015	0,0036	0,996	0,995
5	16,07959474870200	16,0837021904942	0,0014	0,0013	0,771	1,01
6	16,08908631020826	16,0892027445528	8,37e-005	0,0004	1,01	1,01
7	16,08930948048603	16,0893133711273	1,68e-006	0,0001	1,01	1,01
8	16,08931491635905	16,0893148497795	7,95e-008	6,56e-05	1,01	1,01
9	16,08931485694357	16,0893148572537	1,35e-009	2,39e-05	1,007	1,01
10	16,08931485723699	16,0893148572485	1,96e-011	8,76e-06	0,966	1,01
11	16,08931485724442	16,0893148572478	1,59e-013	3,20e-06	1,01	1,01

A tabela 22 mostra-nos que o MPIBLM-EX foi eficiente e robusto em obter a solução ótima do problema com precisão superior a 10^{-11} na iteração 11. Observamos uma substancial redução do erro da iteração 5 para 6, pois na iteração 5 para 6 houve uma redução de cerca de 200 vezes, a partir da iteração 6 houve uma rápida taxa de convergência, pois o erro é reduzido para a ordem de grandeza de 10^{-13} em apenas 4 iterações. Informamos que houve uma penalização do parâmetro de barreira na iteração 4, porém, não afetou em nada o desempenho do MPIBLM-EX.

O método MPIBLMCG-EX convergiu em 10 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 16,08931485725272 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 16,08931485724832 \text{ MW}$, demanda de potência ativa avaliada em $\max(\Delta P) = 4,6204171 \times 10^{-13} \text{ pu}$, demanda de potência reativa avaliada em $\max(\Delta Q) = 1,820765 \times 10^{-14} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(\text{gap}) = 1,727096 \times 10^{-13} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 1,221213 \times 10^{-5}$ e o parâmetro de amortecimento está avaliado em $\beta = 2,762418 \times 10^{-5}$. A tabela 23 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 23: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 30 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-268,85729731404	0,942	----	-----	-----
1	18,88571287696585	-252,173962936692	0,3668	0,05	1,01	1,01
2	16,51128083565439	8,34154249519154	0,0666	0,0182	0,795	0,965
3	16,14844037043567	15,2497439914019	0,0131	0,0066	1,01	0,924
4	16,04074339834903	15,9873532462719	0,0038	0,0035	0,968	0,960
5	16,08251085075706	16,0798624937929	0,0005	0,0018	1,01	0,963
6	16,08926078704318	16,0889905992363	6,82e-005	0,0006	1,01	1,01
7	16,08931531373887	16,0893125104061	3,01e-007	0,0002	1,01	1,01
8	16,08931485449609	16,0893148492996	5,82e-009	9,1e-05	1,01	1,01
9	16,08931485726766	16,0893148572537	2,20e-011	3,34e-05	1,006	1,01
10	16,08931485725272	16,0893148572483	4,62e-013	1,22e-05	1,009	1,01

A tabela 23 mostra-nos que o MPIBLMCG-EX foi eficiente e robusto em obter a solução ótima do problema com precisão superior a 10^{-11} na iteração 10, superou o MPIBLM-EX, pois foi mais eficiente em ganho com iteração. A partir da iteração 6 houve uma rápida taxa de convergência, pois o erro é reduzido para a ordem de grandeza de 10^{-13} em apenas 4 iterações. Informamos que houve uma penalização do parâmetro de barreira nas iterações 4 e 5, porém, não afetaram negativamente o desempenho do MPIBLMCG-EX.

A tabela 24 mostra-nos o condicionamento da matriz dual normal θ_k de ambos os métodos. A primeira coluna apresenta a iteração k , a segunda coluna apresenta o condicionamento da matriz dual normal obtido pelo MPIBLM-EX, a terceira e a quarta coluna apresentam, respectivamente, o condicionamento da matriz dual-normal antes (ADC) e depois (DDC) da decomposição de Cholesky e a quinta coluna apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento β .

Tabela 24: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 30 barras.

k	$\kappa(\theta_k)$ MPIBLM-EX	$\kappa(\theta_k)$ ADC	$\kappa(\theta_k)$ DDC	β_k
0	--	--	--	--
1	2389,5	2389,5	1468.1	0,4715
2	7891,5	8940,8	20328	0,1571
3	12017	2389,1	1341.6	0,0604
4	72006	88914	11342	0,0201
5	1,0256e+005	1,3145e+005	47042	0,0067
6	2,1318e+005	1,0713e+005	79486	0,0022
7	2,7633e+005	1,9716e+005	1,7681e+005	0,0007
8	9,3096e+005	6,7778e+005	6,4615e+005	0,0002
9	2,5989e+006	1,8662e+006	1,836e+006	8,2873e-005
10	7,1098e+006	5,1042e+006	5,0764e+006	2,7624e-005
11	1,9459e+007			

A tabela 24 mostra-nos na coluna ADC o mau condicionamento da matriz dual normal do MPIBLMCG-EX a partir da iteração 5 do método em que a ordem do condicionamento dessa passa a ser superior a uma ordem de grandeza de 10^5 , cujo valor aumenta pouco nas iterações seguintes atingindo a ordem de grandeza 10^6 na iteração 10. Por outro lado, quando observamos a coluna DDC, notamos que o parâmetro de amortecimento influenciou positivamente no condicionamento da matriz dual normal, sendo importante e eficiente em relação à correção do posto dessa, pois a ordem de grandeza de 10^5 somente é atingida na iteração 8, alcançando o seu valor máximo da ordem de 10^6 na iteração 10. Observamos o condicionamento da matriz dual normal obtidos pelo MPIBLM-EX e constatamos que o mau condicionamento foi aumentado uniformemente, porém, em uma avaliação geral enquanto os métodos estavam em procedimento, o mau condicionamento foi tratado melhor pelo MPIBLMCG-EX.

A figura 4.28 nos apresenta a trajetória das magnitudes de tensão de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

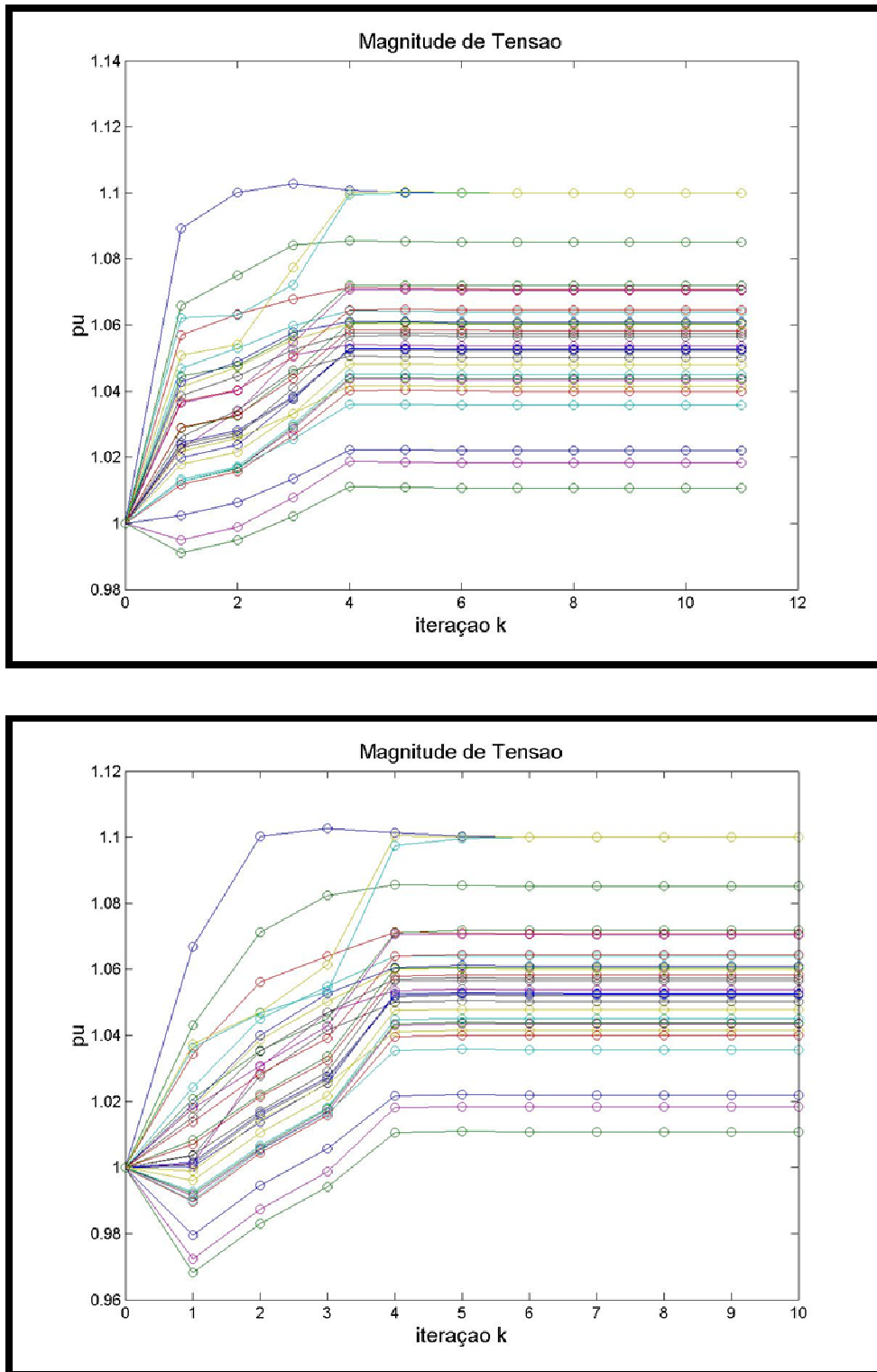


Figura 4.28: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 30 barras.

A figura 4.29 nos apresenta a trajetória dos ângulos, já convertidos para graus, de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

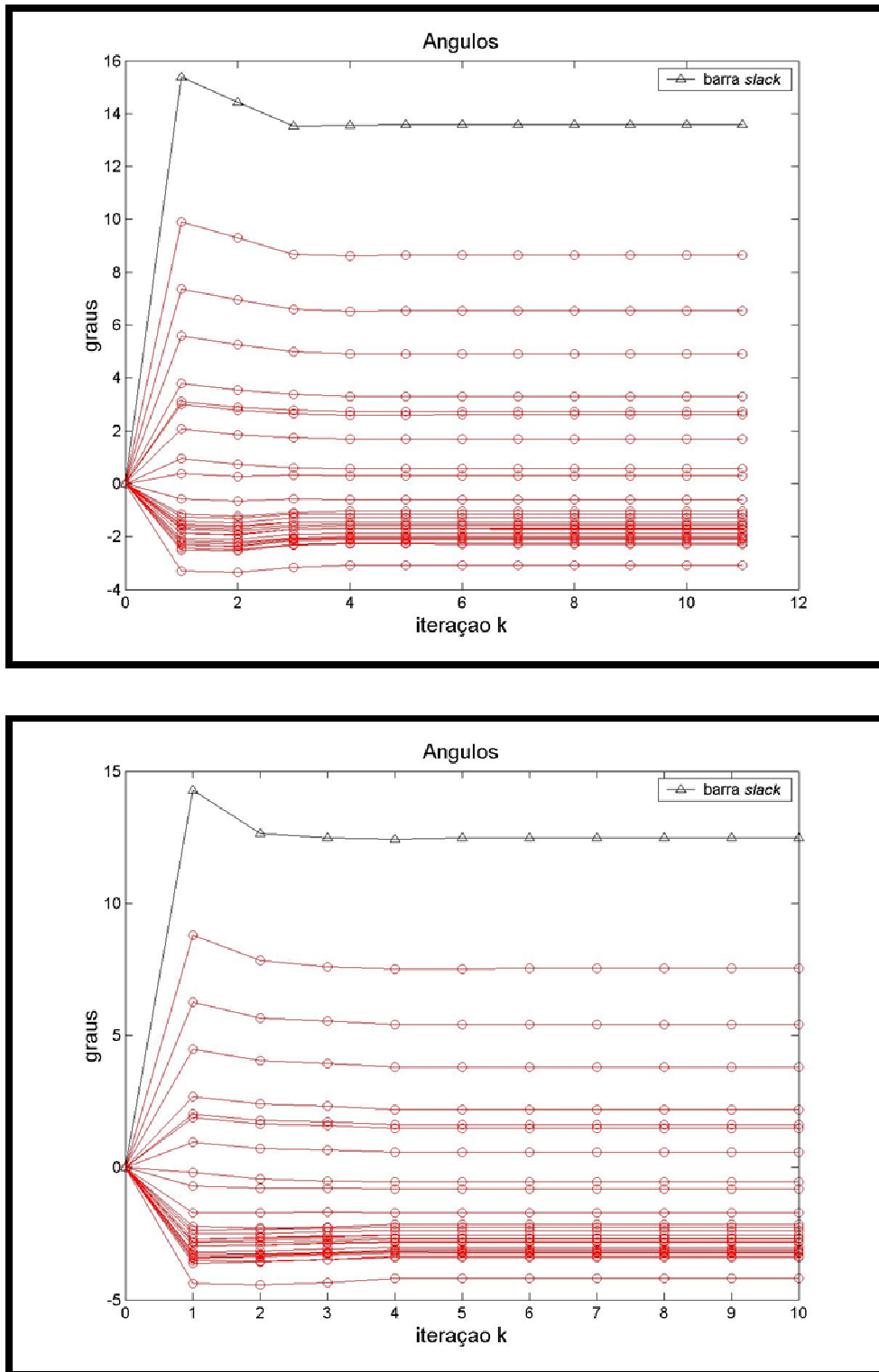


Figura 4.29: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 30 barras.

A figura 4.30 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

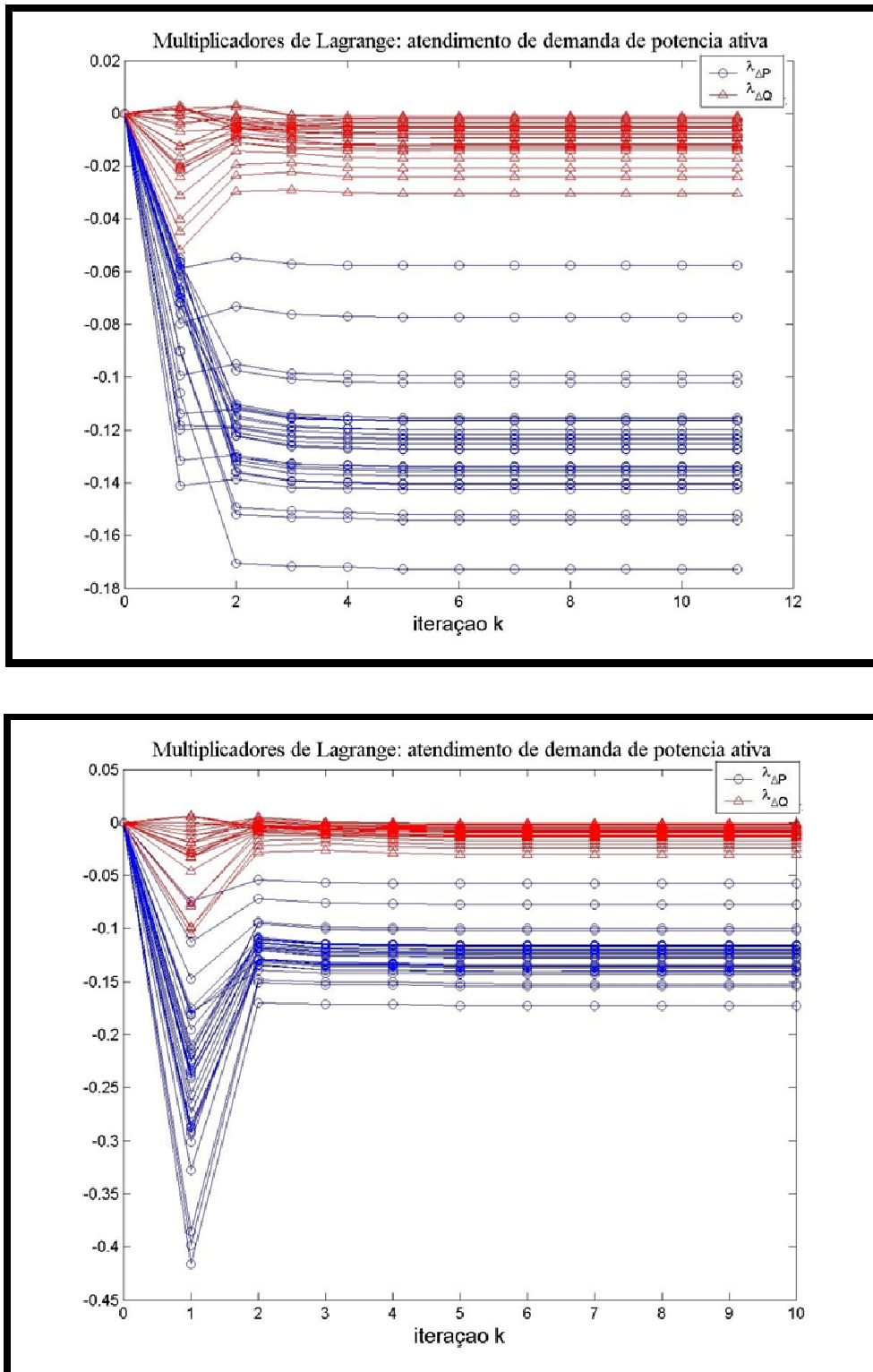


Figura 4.30: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 30 barras.

A figura 4.31 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

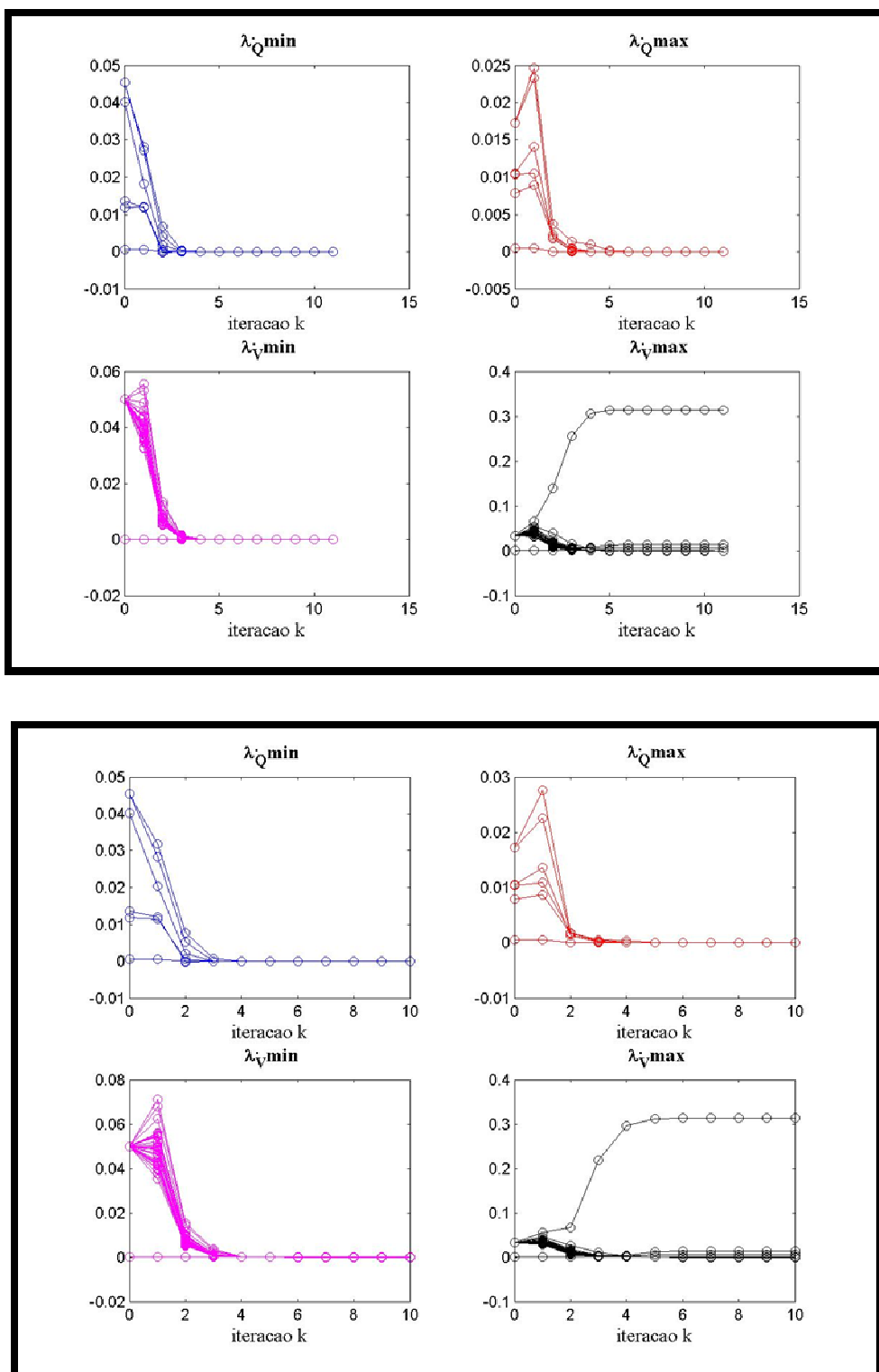


Figura 4.31: Sequência dos pontos $\lambda_{Q^{\min}}$, $\lambda_{Q^{\max}}$, $\lambda_{V^{\min}}$ e $\lambda_{V^{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 30 barras.

A figura 4.32 apresenta a sequência de valores da função objetivo e da função lagrangiana obtidos em cada iteração pelo MPIBLMCG-EX.

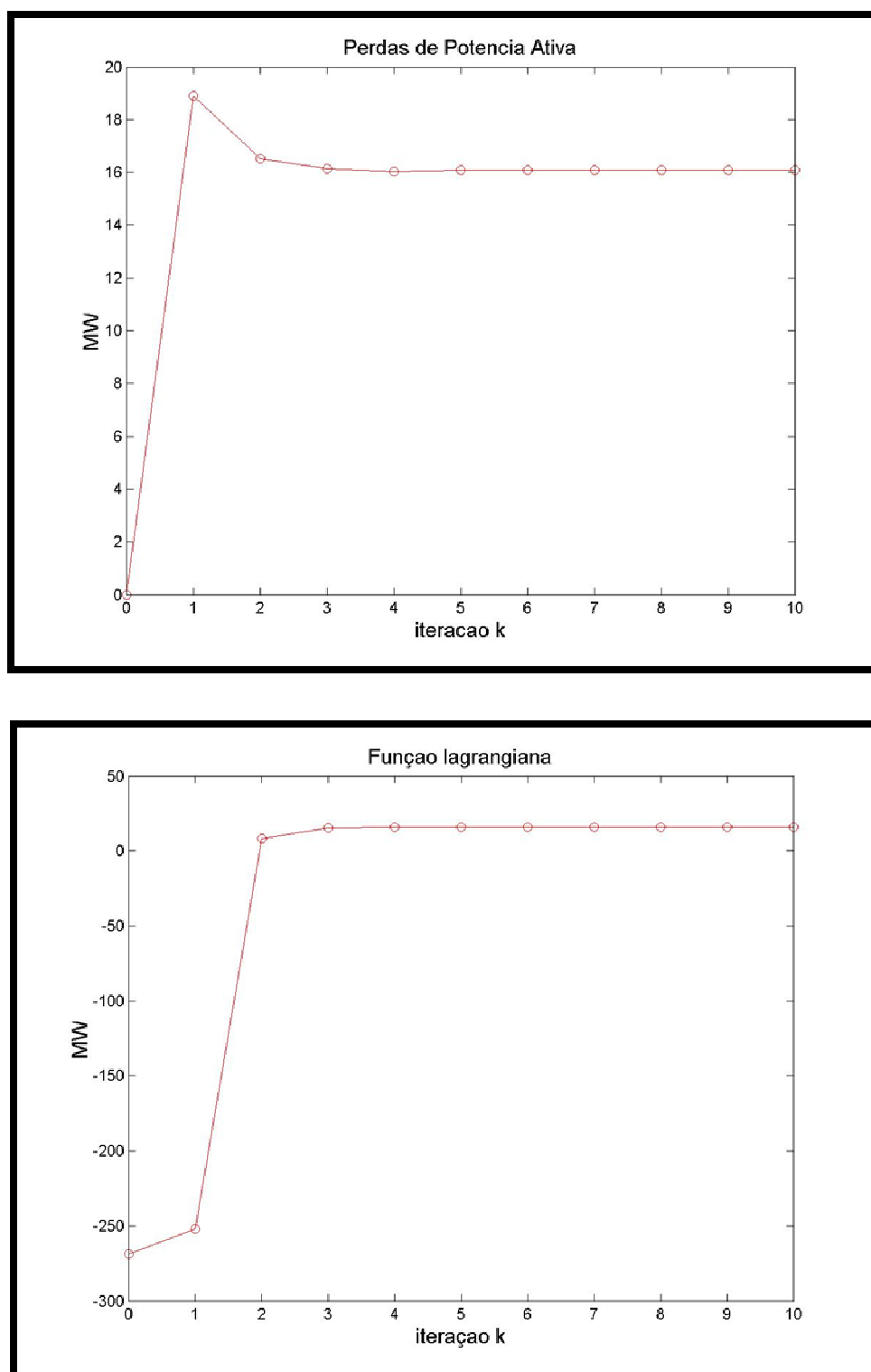


Figura 4.32: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 30 barras.

A figura 4.33 apresenta a sequência de valores do parâmetro de amortecimento e a apresentação dos estados ótimos das magnitudes de tensão em cada barra obtidos pelo MPIBLMCG-EX.

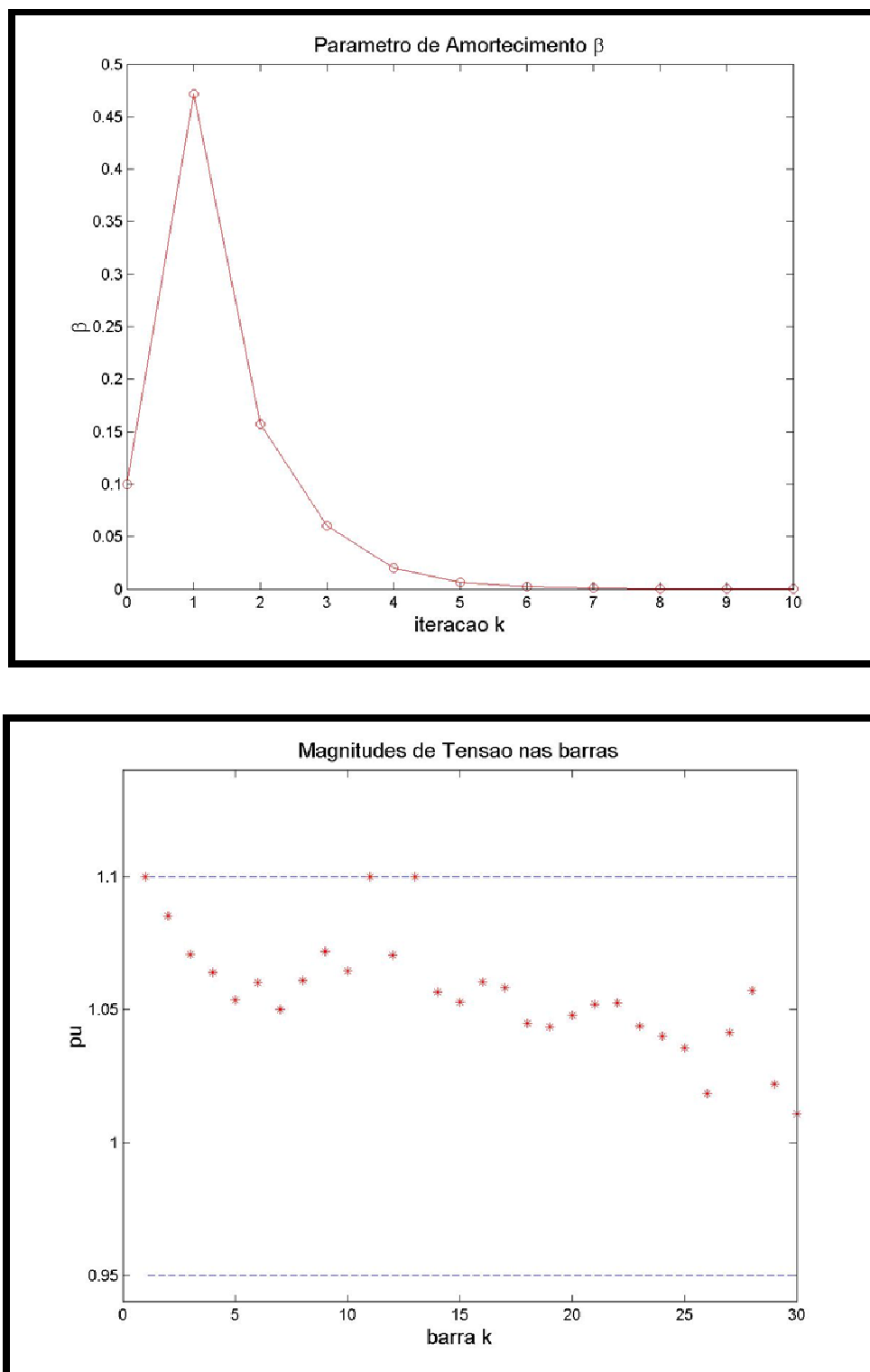


Figura 4.33: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 30 barras.

4.2.6 O sistema elétrico de 57 barras

Os dados de barra e de linha do sistema IEEE-57 barras podem ser encontrados no site da (University Washington Electrical Engineering). A topologia do sistema IEEE-57 é apresentada na figura 4.34.

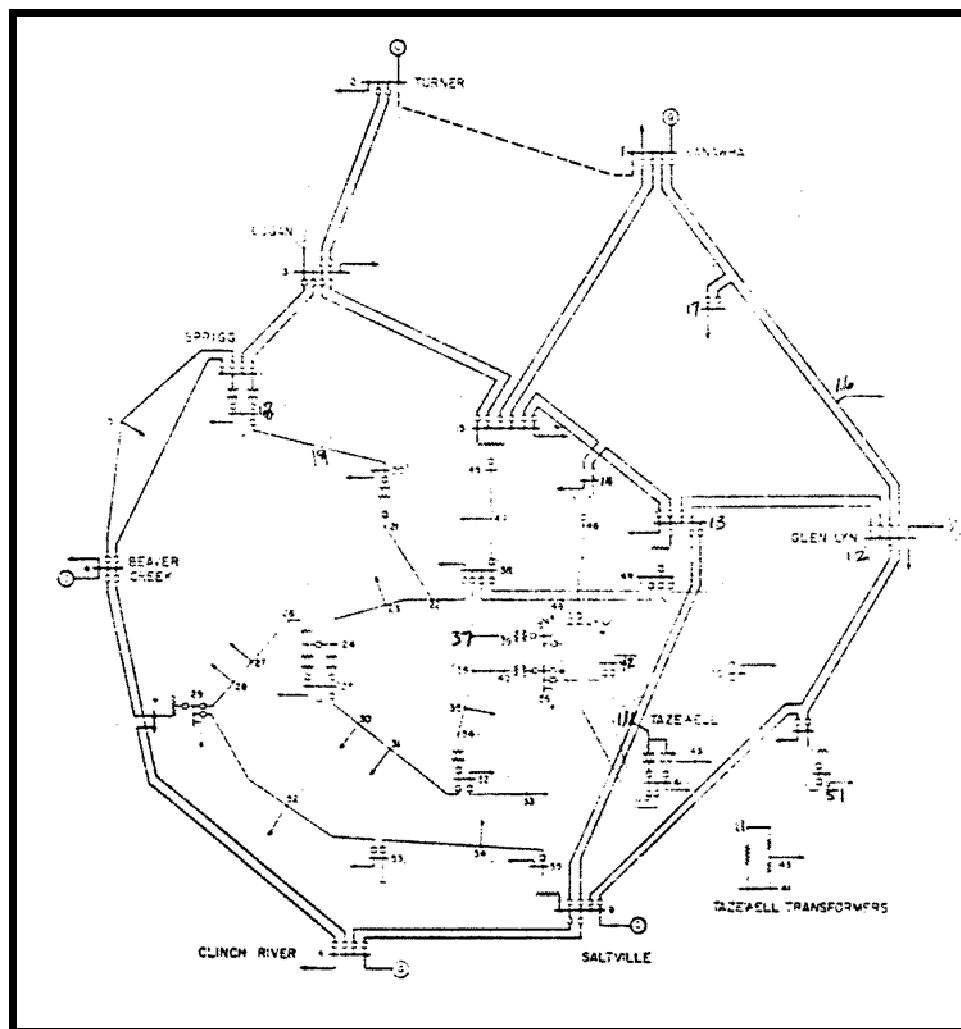


Figura 4.34: Topologia do sistema IEEE-57. Fonte: (University Washington Electrical Engineering).

A tabela 25 nos mostra a natureza das barras bem como os seus tipos de restrições nodais associados, número de linhas e de *taps*.

Tabela 25: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de taps do sistema 57 barras.

Número de Barras	Natureza das Barras	Estudo Ativo/Reativo		
		Potência Ativa	Potência Reativa	Mag. de Tensão
50	PQ	Igualdade	Igualdade	Canalização
1	Slack	-	Canalização	Canalização
6	PV	Igualdade	Canalização	Canalização
Informação de Número de Linhas e quantidades de taps				
Número de Linhas		Quantidade de taps		
80		17		

Para resolução do problema do sistema elétrico de 57 barras utilizamos $\mu_0 = 0,3$. A dimensão do vetor ω é 704, isto é, esse contém 704 variáveis. Foi utilizado $\|\nabla L(\omega^k)\|_{\infty} \leq 10^{-11}$ como critério de parada do método.

A matriz dual normal θ_k contém 12996 elementos, dos quais 1116 são não-nulos, isto é, a matriz contém 8,58% de elementos não-nulos.

O método MPIBLM-EX convergiu em 13 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(V^*, \gamma^*) = 22,97598670741492 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 22,97598670741478 \text{ MW}$, $\max(\Delta P) = 1,872113 \times 10^{-14} \text{ pu}$, $\max(\Delta Q) = 1,776356 \times 10^{-14} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(gap) = 3,311625 \times 10^{-13} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 2,419295 \times 10^{-6}$. A tabela 26 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 26: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 57 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-2120,51394208883	3	----	-----	-----
1	0,31155430695302	-750,409791684211	28,303	0,3	0,072	1,01
2	0,58649051970295	-65,4601984005918	5,8117	0,1095	0,073	0,265
3	16,64761742067090	-97,0107881318412	2,4171	0,0571	0,871	0,992
4	18,87533320230524	-10,8267851533176	0,2886	0,0208	0,399	0,958
5	21,88908234675168	18,4698344138347	0,1170	0,0076	0,785	0,973
6	22,82609921220410	22,5007977292181	0,0174	0,0027	0,897	1,009
7	22,97395262038769	22,9385130199405	0,0035	0,0010	1,01	0,852
8	22,97675274405655	22,9712817651108	0,0001	0,0003	1,01	1,009
9	22,97612854786580	22,9758716582591	1,45e-05	0,0001	1,01	1,009
10	22,97598911586035	22,9759854427559	1,49e-06	4,96e-05	1,01	1,01
11	22,97598671129041	22,9759867042154	2,98e-08	1,81e-05	1,01	1,01
12	22,97598670737773	22,9759867074216	3,35e-10	6,62e-06	1,01	1,01
13	22,97598670741492	22,9759867074148	3,38e-12	2,41e-06	1,01	1,01

A tabela 26 nos mostra que o MPIBLM-EX foi eficiente e robusto em obter a solução ótima do problema com precisão superior a 10^{-11} na iteração 13. A partir da iteração 9 houve uma rápida taxa de convergência, pois o erro é reduzido para a ordem de grandeza de 10^{-12} em apenas 4 iterações. Informamos que houve uma penalização do parâmetro de barreira na iteração 3, essa penalização influenciou positivamente o desempenho do MPIBLM-EX na trajetória das soluções ótimas e evitou o fracasso do mesmo em obtermos a solução ótima primal-dual.

O método MPIBLMCG-EX convergiu em 14 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 22,97598670741253 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 22,97598670741252 \text{ MW}$, $\max(\Delta P) = 1,543210 \times 10^{-14} \text{ pu}$, $\max(\Delta Q) = 1,338512 \times 10^{-14} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(gap) = 1,156577 \times 10^{-13} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 1,468713 \times 10^{-6}$ e o parâmetro de amortecimento está avaliado em

$\beta = 8,317579 \times 10^{-7}$. A tabela 27 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 27: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 57 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-2120,51394208883	3	----	-----	-----
1	9,51167431605630	-2006,89532502749	1,6221	0,3	0,604	1,01
2	18,00609146668471	-32,8122428699411	0,6534	0,1095	0,671	1,01
3	20,28354456247494	2,00879677428252	0,1441	0,0400	0,511	1,01
4	22,07171010467287	18,0741271281673	0,0474	0,0146	0,766	1,01
5	22,75588775395594	22,0497025988467	0,0084	0,0083	1,01	0,967
6	22,86304715328824	22,7646154467754	0,0009	0,0046	0,992	1,004
7	22,93615456908660	22,9419081602501	0,0004	0,0016	1,01	1,01
8	22,96464791688331	22,9736187878875	0,0011	0,0006	1,01	0,977
9	22,97519321718632	22,9756707743004	7,65e-05	0,0002	1,01	1,008
10	22,97600903749599	22,9759832131519	1,28e-05	8,24e-05	1,01	1,01
11	22,97598687511595	22,9759866912022	2,52e-07	3,01e-05	1,01	1,01
12	22,97598670724338	22,9759867074192	3,02e-09	1,10e-05	1,01	1,01
13	22,97598670741284	22,9759867074128	5,41e-11	4,02e-06	1,01	1,01
14	22,97598670741253	22,9759867074125	7,26e-13	1,46e-06	1,01	1,01

A tabela 27 nos mostra que o MPIBLMCG-EX foi eficiente e robusto em obter a solução ótima do problema com precisão superior a 10^{-12} na iteração 14, porém perdeu para o MPIBLM-EX em número de iterações. A partir da iteração 9 houve uma rápida taxa de convergência, pois o erro é reduzido para a ordem de grandeza de 10^{-13} em apenas 5 iterações. Informamos que houve uma penalização do parâmetro de barreira nas iterações 5 e 6, porém, não afetaram negativamente o desempenho do MPIBLMCG-EX nem em uma mudança abrupta de trajetória das soluções ótimas.

A tabela 28 mostra-nos o condicionamento da matriz dual normal θ_k de ambos os métodos. A primeira coluna apresenta a iteração k , a segunda coluna apresenta o condicionamento da matriz dual normal obtido pelo MPIBLM-EX, a terceira e a quarta

coluna apresentam, respectivamente, o condicionamento da matriz dual-normal antes (ADC) e depois (DDC) da decomposição de Cholesky e a quinta coluna apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento β .

Tabela 28: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 57 barras.

k	$\kappa(\theta_k)$ MPIBLM-EX	$\kappa(\theta_k)$ ADC	$\kappa(\theta_k)$ DDC	β_k
0	--	--	--	--
1	--	21997	2351,3	1,3261
2	21997	1,8282e+005	10918	0,4420
3	74235	2,4734e+005	32853	0,1473
4	2,2153e+005	25129	16109	0,0491
5	2,7277e+005	4588,9	4011,6	0,0163
6	42442	32642	31038	0,0054
7	2983,3	1,8126e+005	1,7687e+005	0,0018
8	18594	8,6344e+005	8,5229e+005	0,0006
9	6,5953e+005	2,782e+006	2,7677e+006	0,0002
10	4,1578e+006	7,3498e+006	7,3369e+006	6,73e-005
11	1,2019e+007	2,0056e+007	2,0044e+007	2,24e-005
12	3,3365e+007	5,5002e+007	5,4991e+007	7,48e-006
13	9,1421e+007	1,5059e+008	1,5058e+008	2,49e-006
14	2,5027e+008	4,1225e+008	4,1224e+008	8,31e-007

A tabela 28 nos mostra na coluna ADC o mau condicionamento da matriz dual normal do MPIBLMCG-EX a partir da iteração 2 do método em que a ordem do condicionamento dessa passa a ser superior a uma ordem de grandeza de 10^5 , o parâmetro de amortecimento foi eficiente em conter esse mau condicionamento nas iterações 2 e 3 como observamos na coluna DDC. A partir da iteração 7 até a convergência na iteração 14, o mau condicionamento apresentado pelas colunas ADC e DDC permaneceram próximos atingindo a ordem de grandeza 10^8 na iteração 14. Ressaltamos que o decrescimento do parâmetro de amortecimento foi gradativo iteração após iteração até a solução ótima do problema. Observamos o condicionamento da matriz dual normal obtidos pelo MPIBLM-EX e constatamos que o mau condicionamento foi aumentado uniformemente após a iteração 6 após recuperar-se de um mau condicionamento, cuja ordem de grandeza é de 10^5 nas iterações

A figura 4.35 nos apresenta a trajetória das magnitudes de tensão de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

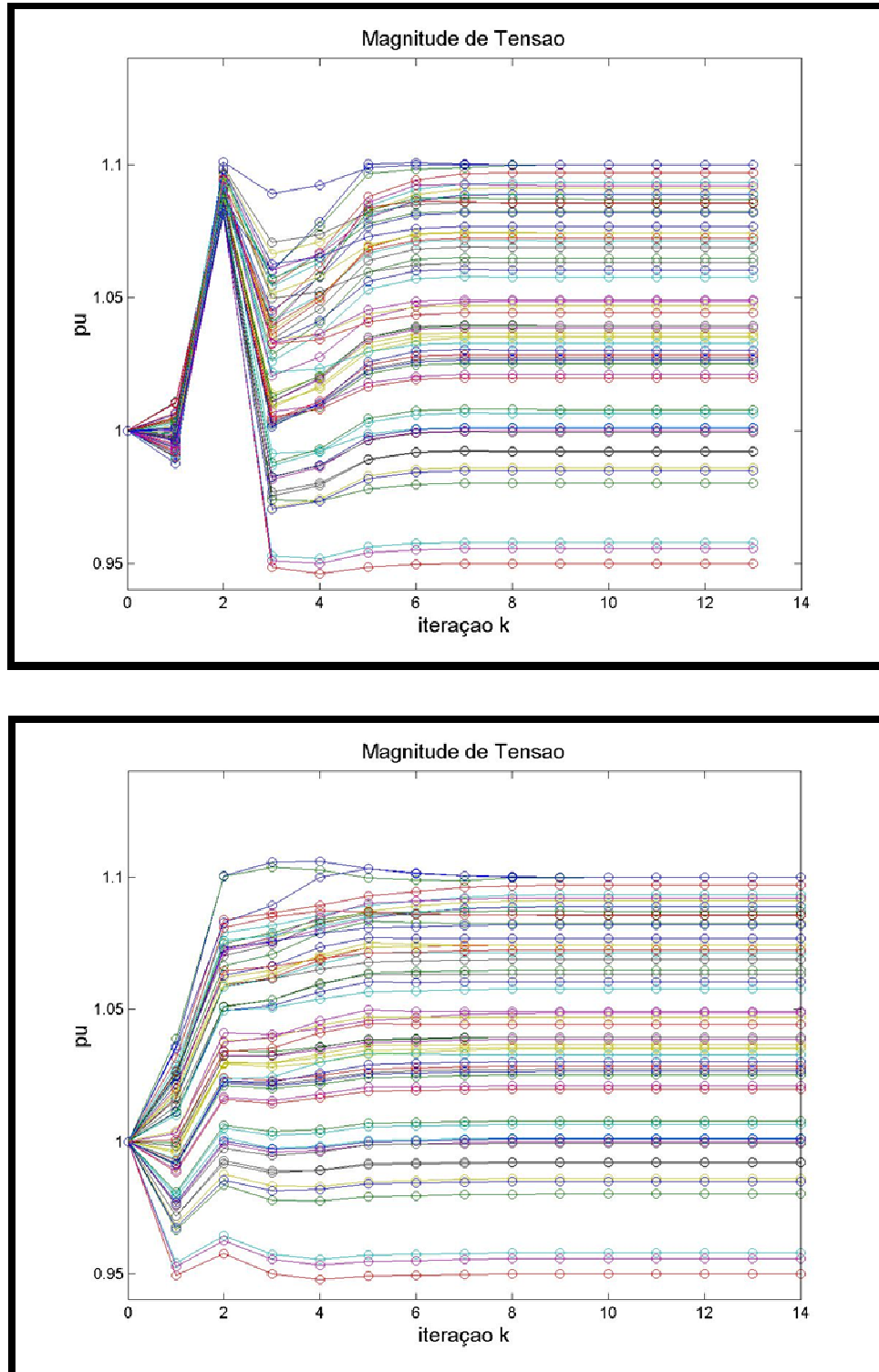


Figura 4.35: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 57 barras.

A figura 4.36 nos apresenta a trajetória dos ângulos, já convertidos para graus, de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

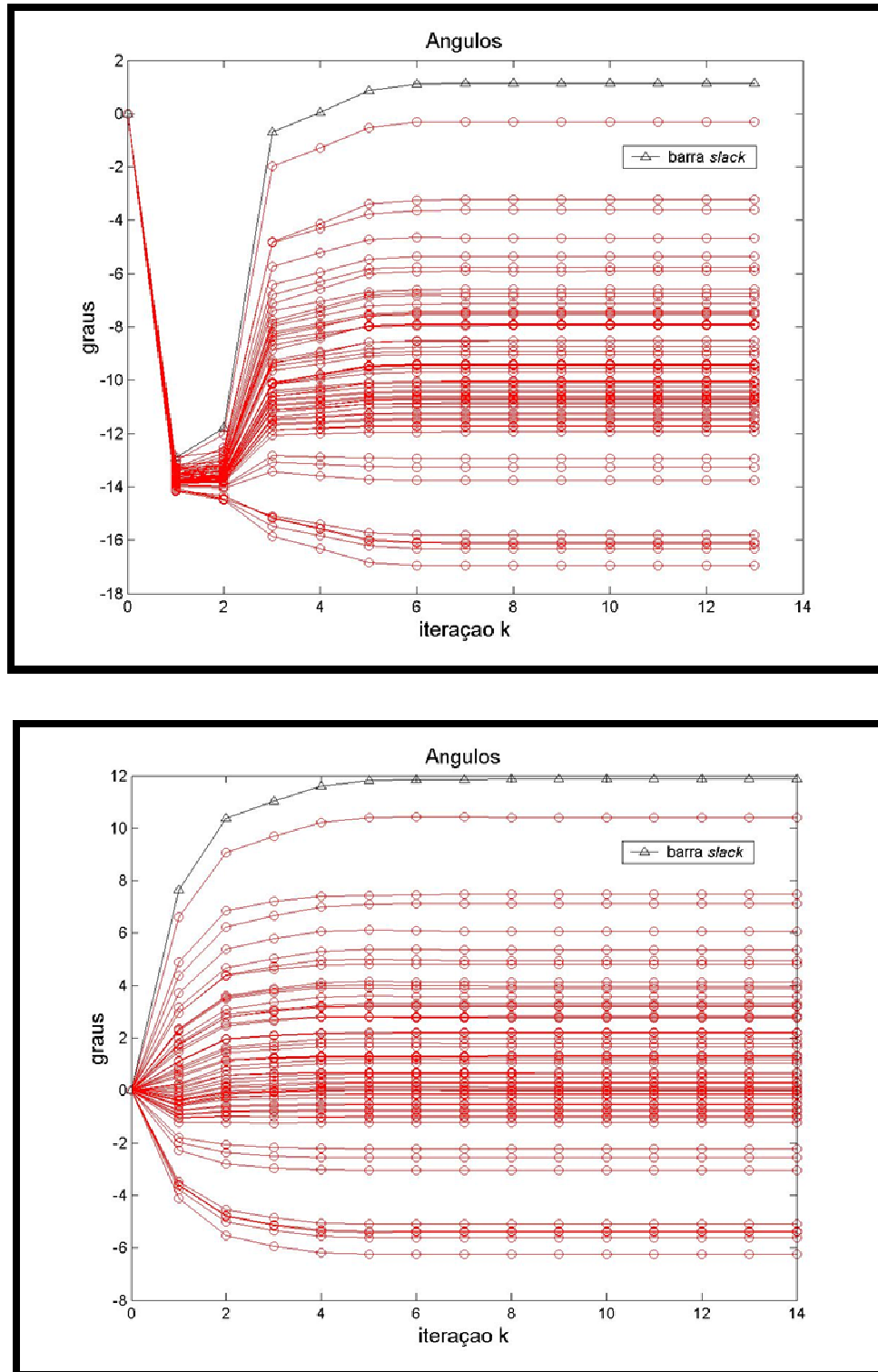


Figura 4.36: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 57 barras.

A figura 4.37 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

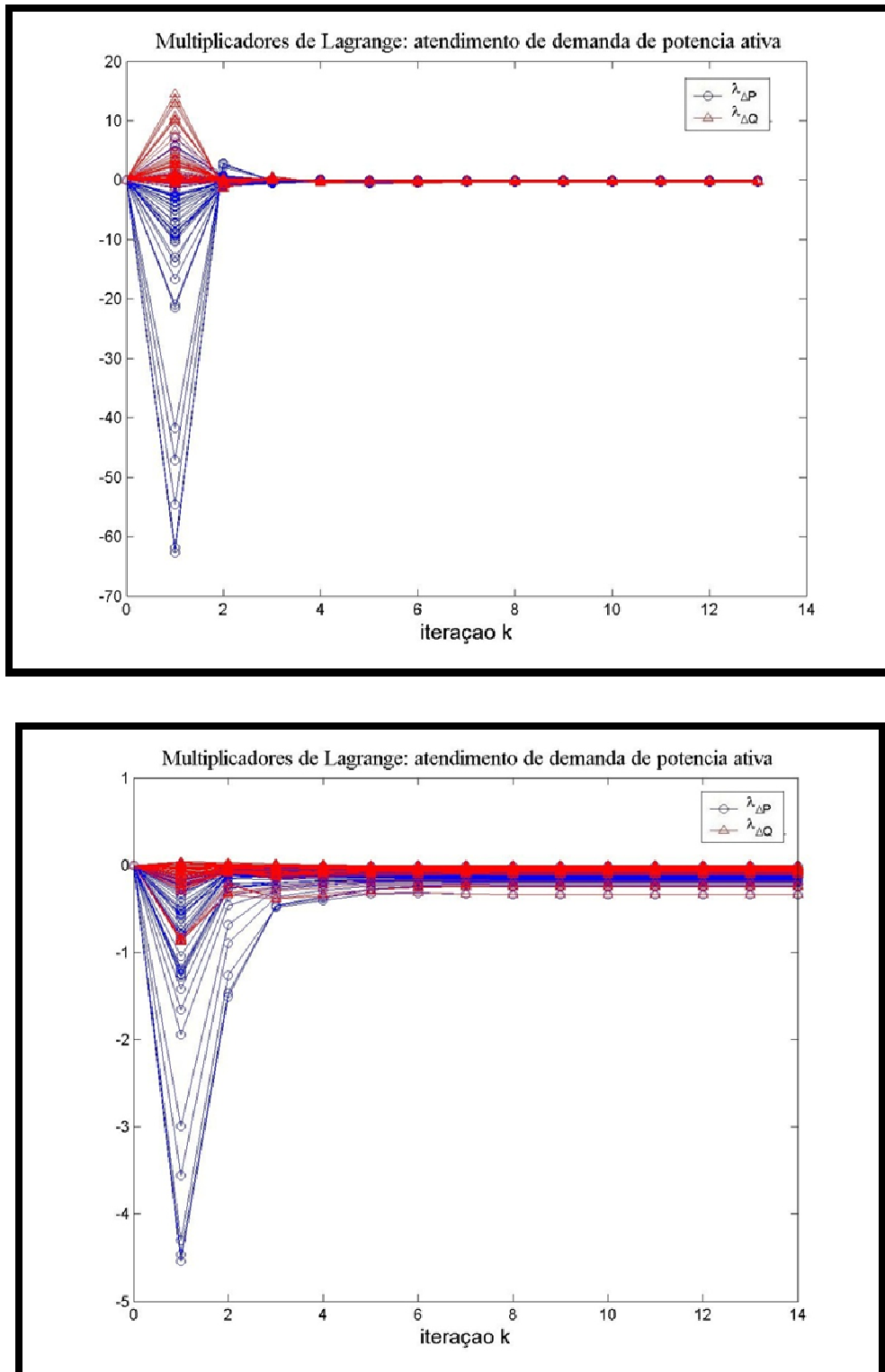


Figura 4.37: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 57 barras.

A figura 4.38 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

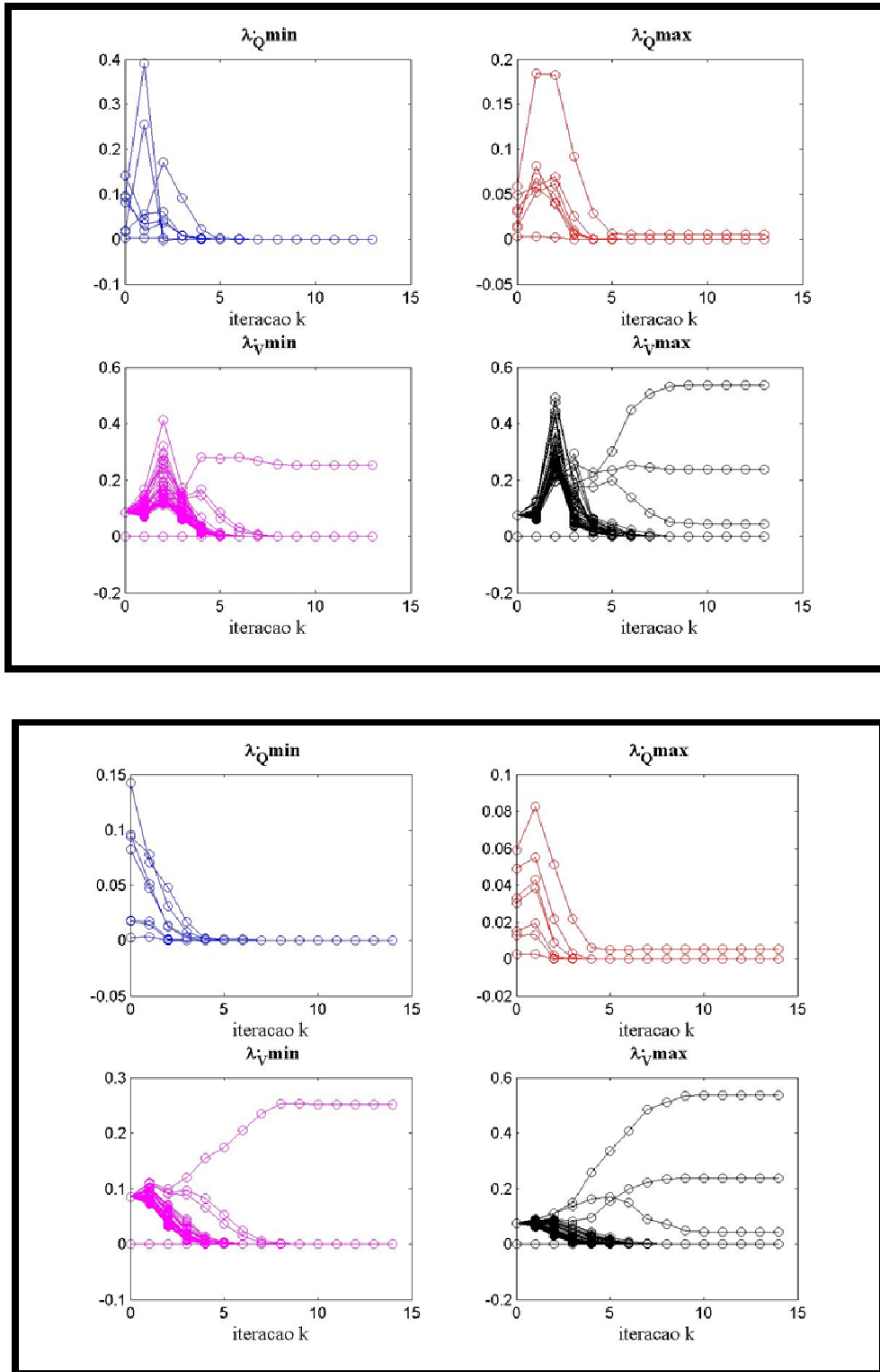


Figura 4.38: Sequência dos pontos $\lambda_{Q^{\min}}$, $\lambda_{Q^{\max}}$, $\lambda_{V^{\min}}$ e $\lambda_{V^{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 57 barras.

A figura 4.39 apresenta a sequência de valores da função objetivo e da função lagrangiana obtidos em cada iteração pelo MPIBLMCG-EX.

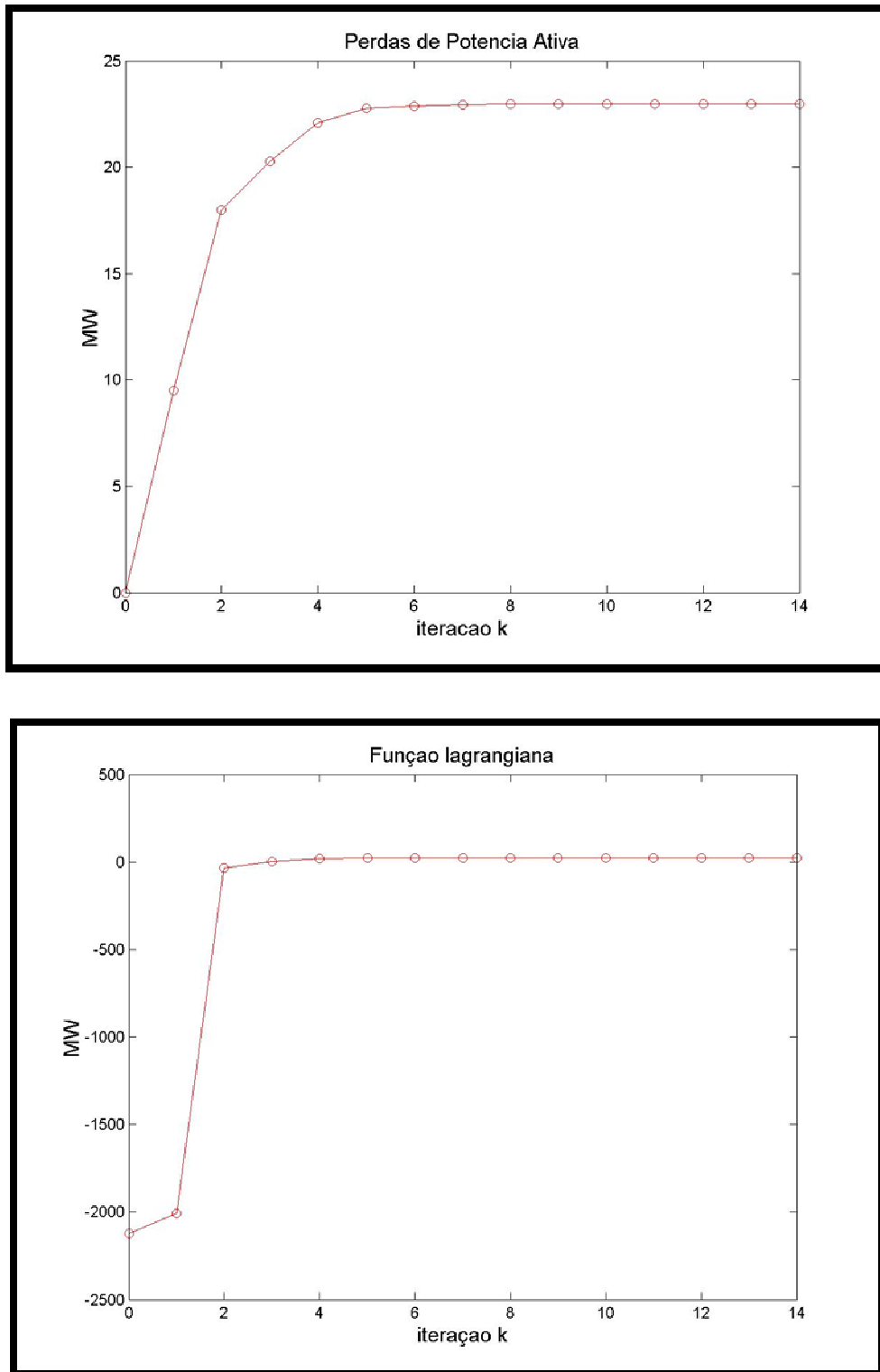


Figura 4.39: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 57 barras.

A figura 4.40 apresenta a sequência de valores do parâmetro de amortecimento e a apresentação dos estados ótimos das magnitudes de tensão em cada barra obtidos pelo MPIBLMCG-EX.

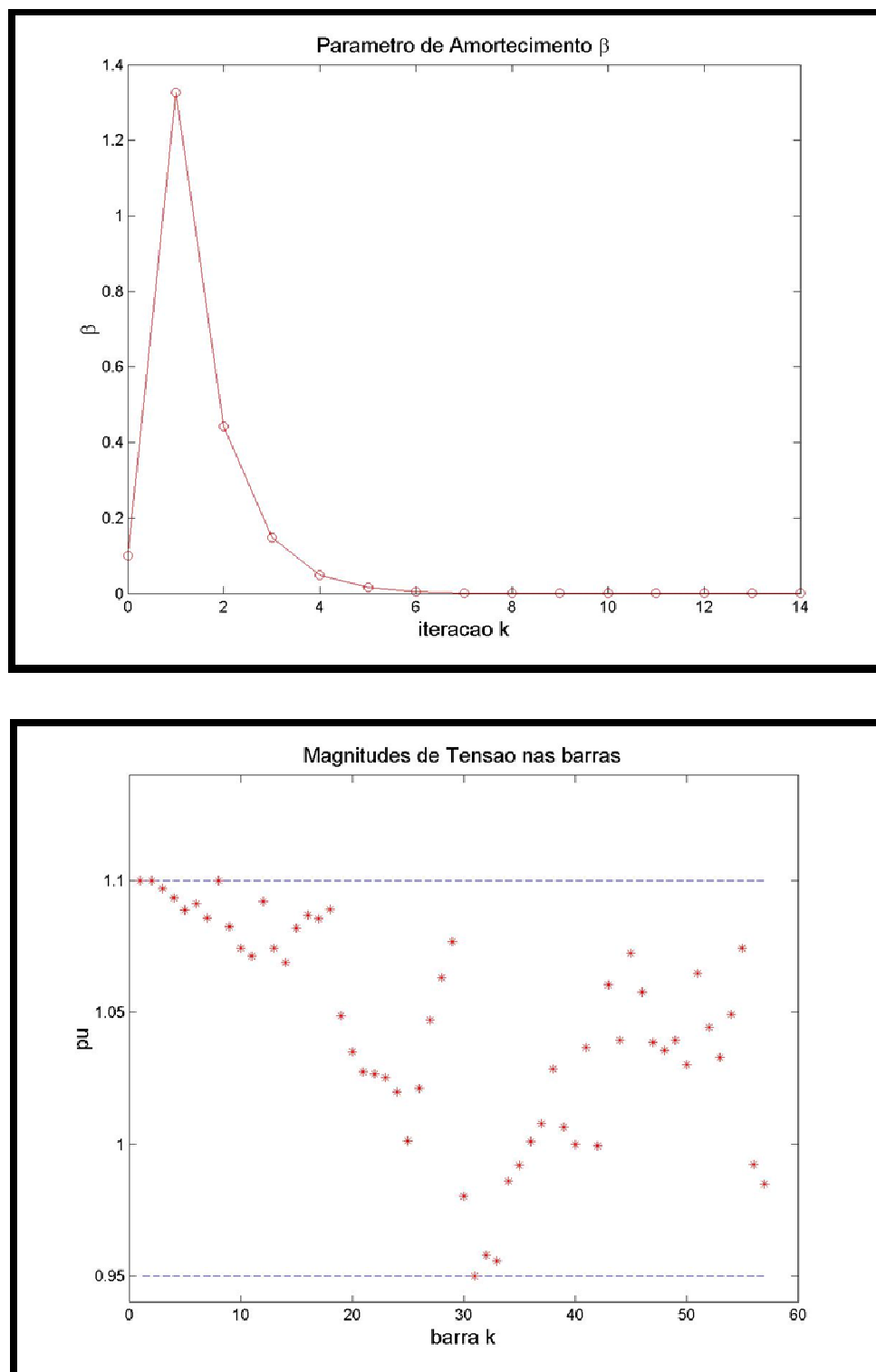


Figura 4.40: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 57 barras.

4.2.7 O sistema elétrico de 118 barras

Os dados de barra e de linha do sistema IEEE-118 barras podem ser encontrados no site da (University Washington Electrical Engineering). A topologia do sistema IEEE-118 é apresentada na figura 4.41.

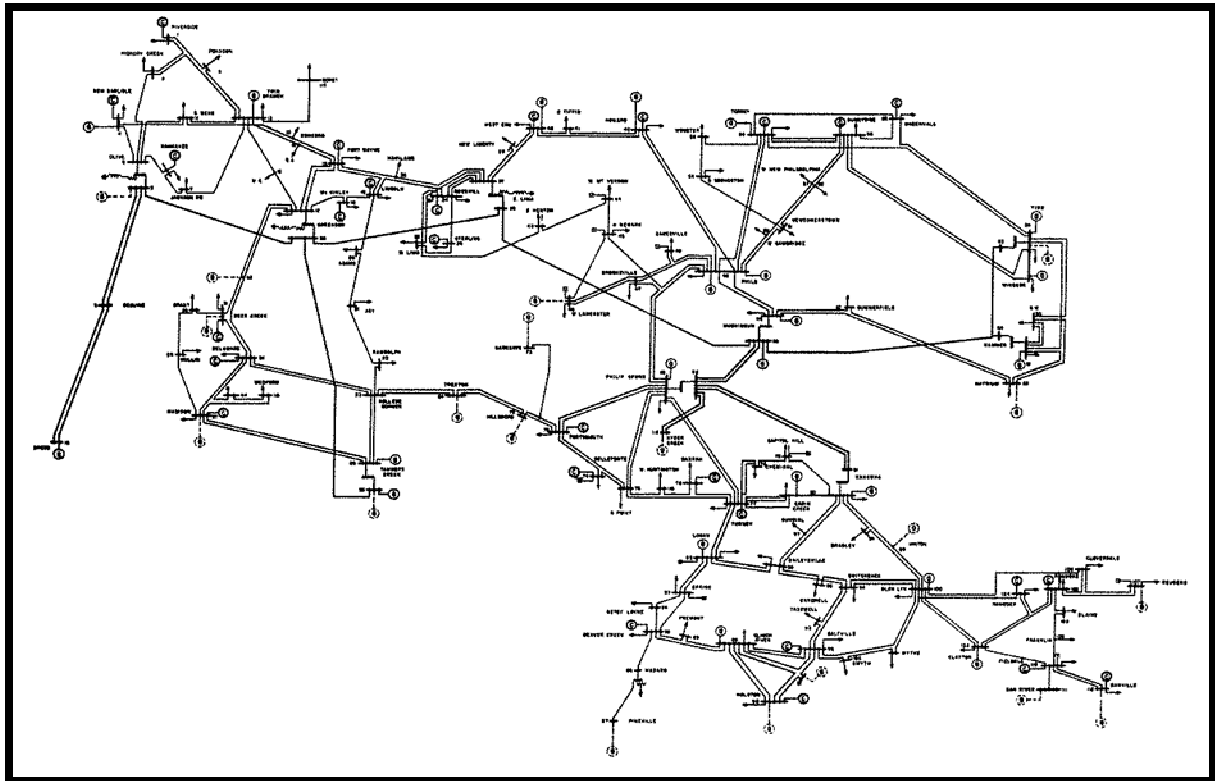


Figura 4.41: Topologia do sistema IEEE-118. Fonte: (University Washington Electrical Engineering).

A tabela 29 nos mostra a natureza das barras bem como os seus tipos de restrições nodais associados, número de linhas e de *taps*.

Tabela 29: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de *taps* do sistema 118 barras.

Número de Barras	Natureza das Barras	Estudo Ativo/Reativo		
		Potência Ativa	Potência Reativa	Mag. de Tensão
64	PQ	Igualdade	Igualdade	Canalização
1	Slack	-	Canalização	Canalização
53	PV	Igualdade	Canalização	Canalização
Informação de Número de Linhas e quantidades de <i>taps</i>				
Número de Linhas		Quantidade de <i>taps</i>		
186		9		

Para resolução do problema do sistema elétrico de 118 barras utilizamos $\mu_0 = 8$. A dimensão do vetor ω é 1577, isto é, esse contém 1577 variáveis. Foi utilizado $\|\nabla L(\omega^k)\|_{\infty} \leq 10^{-10}$ como critério de parada do método.

A matriz dual normal θ_k contém 55696 elementos, dos quais 3968 são não-nulos, isto é, a matriz contém 7,12% de elementos não-nulos.

O método MPIBLM-EX convergiu em 20 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(V^*, \gamma^*) = 107,7019055916977 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 107,7019055916994 \text{ MW}$, $\max(\Delta P) = 1,596500 \times 10^{-13} \text{ pu}$, $\max(\Delta Q) = 3,907985 \times 10^{-14} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(\text{gap}) = 1,044599 \times 10^{-12} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 7,935269 \times 10^{-7}$. A tabela 30 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 30: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 118 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-58196,7623165223	6,07	----	-----	-----
1	0,0016000358904785	-57999,3228710849	6,0483	10	0,003	1,01
2	0,0593691123104637	-3798,81981956059	5,9401	3,6529	0,017	1,01
3	4,96490552966426	-622,385924371179	4,9245	1,3344	0,189	0,978
4	39,0144590986679	-264,54255836088	2,493	1,2234	0,418	1,01
5	99,6237263778105	-125,041498271357	0,4979	0,4469	0,793	1,01
6	113,114350262446	-25,2044939967347	0,0283	0,1632	1,01	1,01
7	112,490125866473	47,704707408257	0,0026	0,0596	1,01	1,001
8	110,511386917032	92,7218967736481	0,0459	0,0217	0,458	1,000
9	109,352157741041	106,28781624019	0,1015	0,0079	0,268	0,835
10	108,164009584975	107,47708592332	0,0846	0,0029	0,524	0,905
11	108,020294526482	107,646563745129	0,0992	0,0068	0,194	0,947
12	107,698135338234	107,653022824352	0,0335	0,0025	0,760	0,990
13	107,692677495047	107,694900435481	0,0144	0,0009	0,603	1,002
14	107,698093433854	107,701637181198	0,0029	0,0003	0,719	1,001
15	107,700924691944	107,701895528287	0,0008	0,0001	0,784	1,009
16	107,70170214408	107,701920881827	0,0002	4,45e-05	0,804	1,01
17	107,701904520081	107,701904701761	1,07e-06	1,62e-05	0,996	1,01
18	107,701905567212	107,701905584247	3,11e-08	5,94e-06	0,978	1,01
19	107,701905591945	107,701905591703	3,09e-10	2,17e-06	1,009	1,01
20	107,701905591698	107,701905591699	3,07e-12	7,93e-07	1,01	1,01

A tabela 30 mostra-nos que o MPIBLM-EX foi eficiente e robusto em obter a solução ótima do problema com precisão superior a 10^{-11} na iteração 20. A partir da iteração 17 houve uma rápida taxa de convergência, aproximadamente quadrática, pois o erro, que estava na ordem de grandeza de 10^{-6} é reduzido para a ordem de grandeza de 10^{-12} em apenas 3 iterações.

O método MPIBLMCG-EX convergiu em 27 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 107,7019055916502 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 107,7019055917001 \text{ MW}$, demanda de potência ativa avaliada em $\max(\Delta P) = 7,757794 \times 10^{-12} \text{ pu}$, demanda de potência reativa avaliada em $\max(\Delta Q) = 5,400124 \times 10^{-13} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em

$\max(gap) = 2,081487 \times 10^{-16} pu$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 4,491725 \times 10^{-9}$ e o parâmetro de amortecimento está avaliado em $\beta = 0,0065$. A tabela 27 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 31: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 118 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	0	-58196,7623165223	6,07	----	-----	-----
1	0,00182220628359	-57708,4012654177	6,0466	10	0,003	1,01
2	1,76774138978129	-3371,79961464513	5,3365	3,6529	0,114	1,01
3	132,010728151324	-531,917615706125	0,8259	1,3344	1,01	1,01
4	117,530271008581	-189,531962091544	0,1072	0,4874	1,01	1,01
5	114,878235745328	-45,3465669288337	0,0243	0,1780	1,01	1,003
6	113,186107852745	38,8077343518841	0,0124	0,0650	1,01	0,968
7	110,910694658558	88,8670808134482	0,0232	0,0237	0,769	1,001
8	109,402020894948	106,055562182468	0,0707	0,0086	0,345	0,857
9	108,282321192666	107,662555635725	0,0793	0,0031	0,523	0,908
10	108,292460542036	107,974348092277	0,4567	0,0075	0,012	0,225
11	108,004565093803	107,888463755831	0,0579	0,0027	0,462	0,996
12	107,819930086719	107,844345730383	0,0976	0,0016	0,389	1,002
13	107,701338210702	107,714526986954	0,0321	0,0011	0,705	0,984
14	107,700220461821	107,7187108967	0,0124	0,0004	0,221	0,958
15	107,699763195317	107,702438553884	0,0016	0,0003	0,856	1,01
16	107,700783970962	107,702281126062	0,0012	0,0001	0,536	1,009
17	107,701840643202	107,70189567144	3,12e-05	4,37e-05	0,981	1,01
18	107,701860962724	107,701907951944	8,07e-05	1,59e-05	0,318	1,01
19	107,701905892156	107,701905587033	1,32e-06	1,41e-05	1,007	1,01
20	107,701905759356	107,701905592821	4,13e-06	5,17e-06	0,418	1,01
21	107,701905594476	107,701905591704	9,82e-08	1,89e-06	0,982	1,01
22	107,701905591815	107,701905591695	4,55e-08	6,9e-07	0,922	1,01
23	107,701905591734	107,701905591703	1,52e-09	2,52e-07	1,01	1,01
24	107,701905591724	107,701905591699	7,27e-09	9,21e-08	0,122	1,01
25	107,701905591689	107,7019055917	1,25e-10	3,36e-08	1,01	1,01
26	107,701905591691	107,701905591703	6,78e-10	1,22e-08	0,001	1,01
27	107,70190559165	107,7019055917	1.13e-11	4,49e-09	1,01	1,01

A tabela 27 mostra-nos que o MPIBLMCG-EX foi eficiente 10^{-10} na iteração 27. A baixa taxa de convergência, a oscilação da avaliação do erro, observado entre as iterações 19

a 27, e a diferença considerável de iterações e a precisão do erro na solução ótima apontam que o MPIBLM-EX foi superior para a solução deste problema.

A tabela 28 mostra-nos o condicionamento da matriz dual normal θ_k de ambos os métodos. A primeira coluna apresenta a iteração k , a segunda coluna apresenta o condicionamento da matriz dual normal obtido pelo MPIBLM-EX, a terceira e a quarta coluna apresentam, respectivamente, o condicionamento da matriz dual-normal antes (ADC) e depois (DDC) da decomposição de Cholesky e a quinta coluna apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento β .

Tabela 32: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 118 barras.

k	$\kappa(\theta_k)$ MPIBLM-EX	$\kappa(\theta_k)$ ADC	$\kappa(\theta_k)$ DDC	β_k
0	--	--	--	--
1	83757	83757	5358.6	0,4715
2	3,9422e+006	58056	39702	0,2297
3	1,1632e+005	3,126e+005	34070	0,1887
4	1,111e+008	1,2152e+006	5,1401e+005	0,1787
5	6,6875e+005	1,4067e+005	1,0278e+006	0,1104
6	3,2106e+005	5,672e+005	3,9273e+006	0,0650
7	9,7366e+005	7,3303e+005	1,2208e+006	0,0401
8	3,3602e+005	92278	6,8349e+005	0,0225
9	85281	1,1243e+005	4,161e+005	0,0126
10	94309	8,2388e+005	4,6443e+005	0,0370
11	4,1027e+006	1,4725e+005	3,862e+005	0,0276
12	9,2989e+005	1,9338e+005	3,1589e+005	0,0204
13	6,8806e+005	1,9675e+005	2,1908e+006	0,0191
14	1,4588e+006	6,1283e+005	2,6142e+006	0,0107
15	4,6383e+006	7,8646e+005	1,3128e+006	0,0215
16	1,7591e+007	4,4363e+006	1,844e+007	0,0115
17	6,6588e+007	1,0464e+007	8,2829e+007	0,00822
18	3,6559e+008	1,282e+008	2,1418e+009	0,00708
19	1,0391e+009	1,4669e+008	3,6733e+009	0,0205
20	2,8528e+009	4,4139e+008	6,928e+009	0,0110
21		1,2154e+009	5,2677e+009	0,0082
22		3,28e+009	5,7282e+010	0,0070
23		8,9744e+009	1,8438e+011	0,0067
24		2,4564e+010	2,5087e+011	0,0066
25		6,7245e+010	8,7922e+011	0,0066
26		1,8409e+011	3,3348e+012	0,0065
27		5,0395e+011	1,4791e+013	0,0065

A tabela 28 mostra-nos na coluna ADC o mau condicionamento da matriz dual normal do MPIBLMCG-EX a partir da iteração 3 do método em que a ordem do condicionamento dessa passa a ser superior a uma ordem de grandeza de 10^5 . Ao compararmos as colunas ADC e DDC, constatamos que o parâmetro de amortecimento, não ajudou ao método conter o mau condicionamento, pois este piorou o condicionamento da matriz dual normal e influenciou diretamente nos resultados apresentados na tabela 31. Observamos o condicionamento da matriz dual normal obtidos pelo MPIBLM-EX e constatamos que o mau condicionamento foi aumentado uniformemente após a iteração 11 após um súbdo melhoramento de sua condição conforme é observado entre as iterações 8, 9 e 10.

A figura 4.42 nos apresenta a trajetória das magnitudes de tensão de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

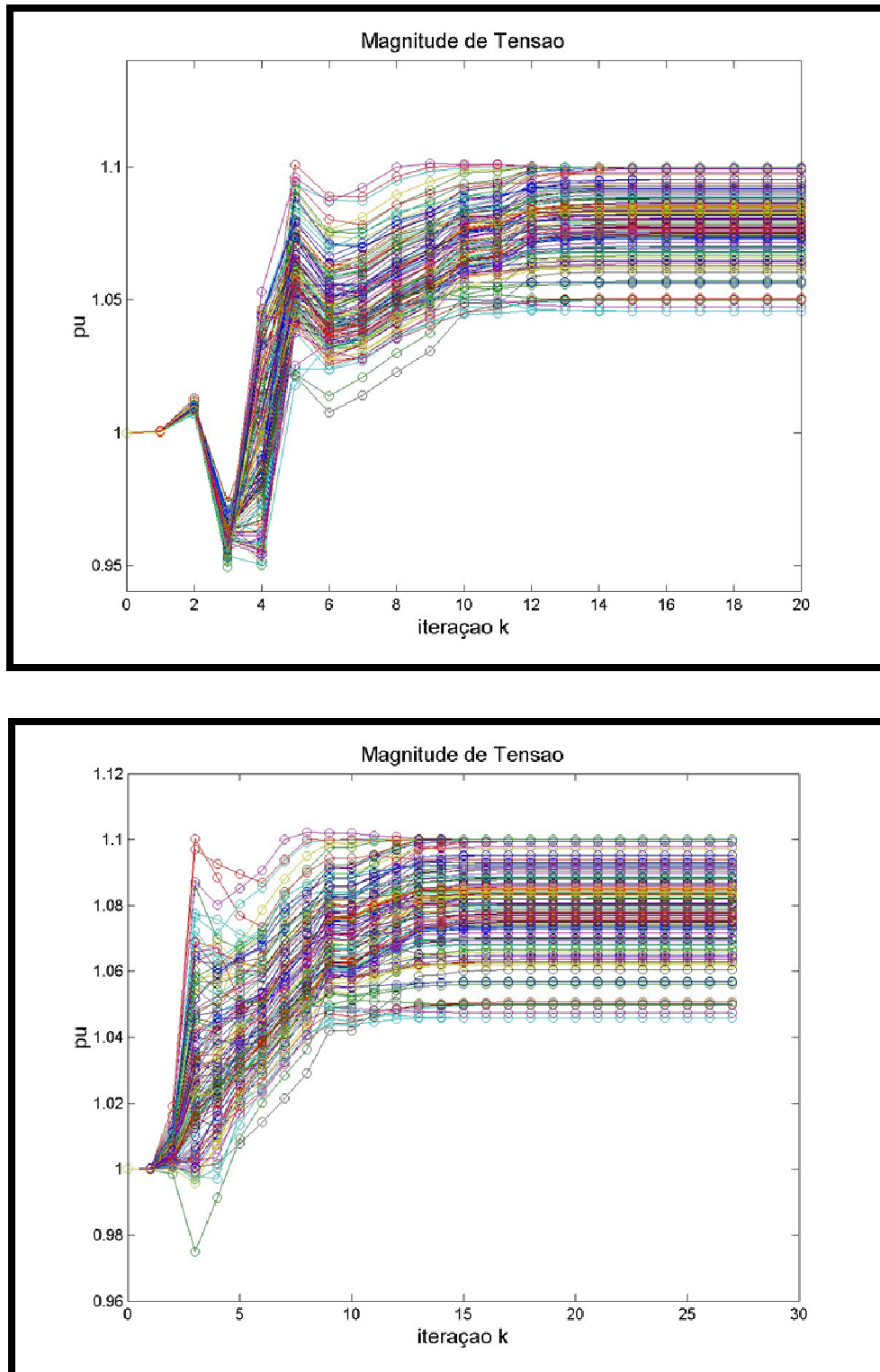


Figura 4.42: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 118 barras.

A figura 4.43 nos apresenta a trajetória dos ângulos, já convertidos para graus, de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

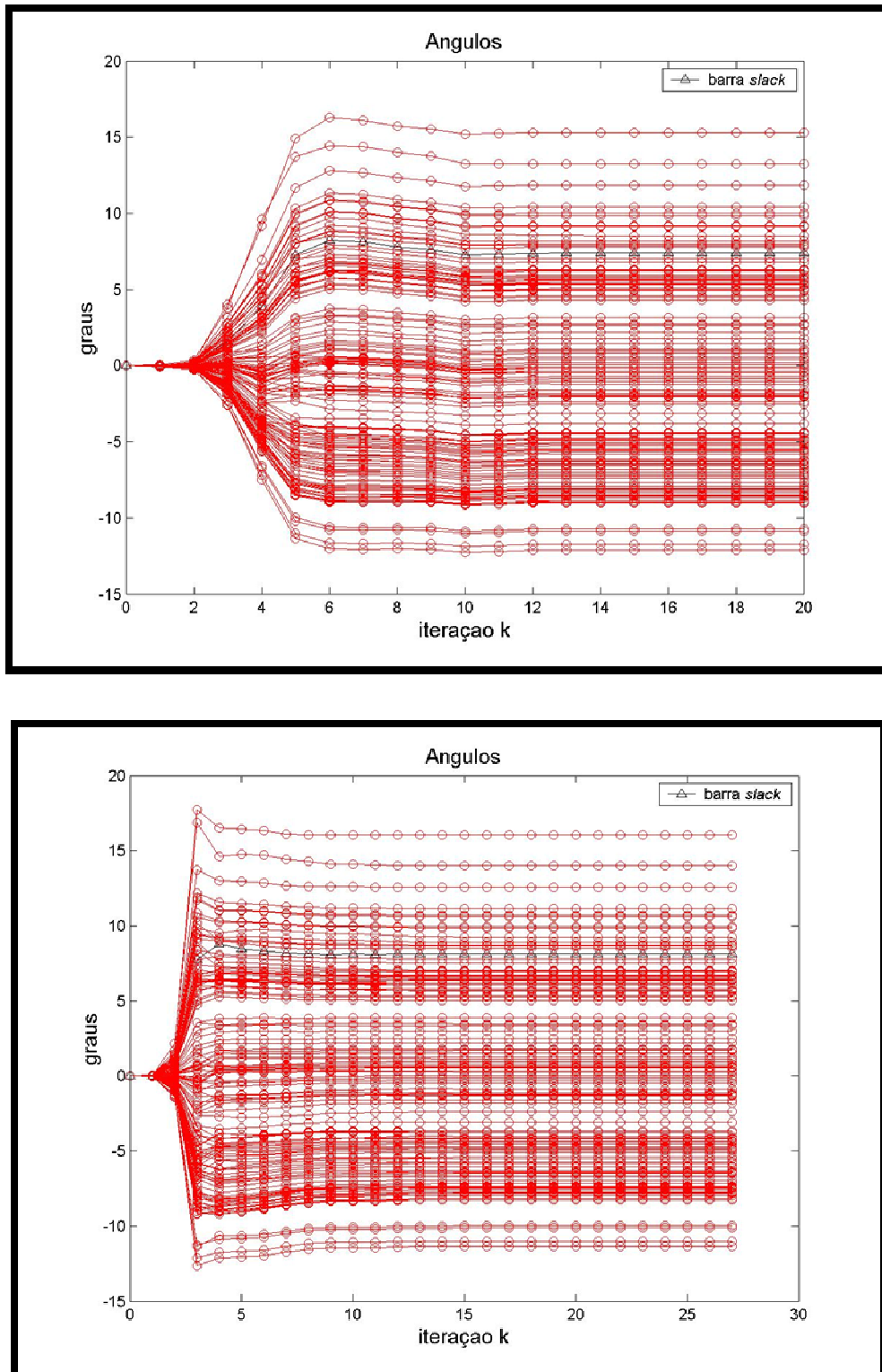


Figura 4.43: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 118 barras.

A figura 4.44 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

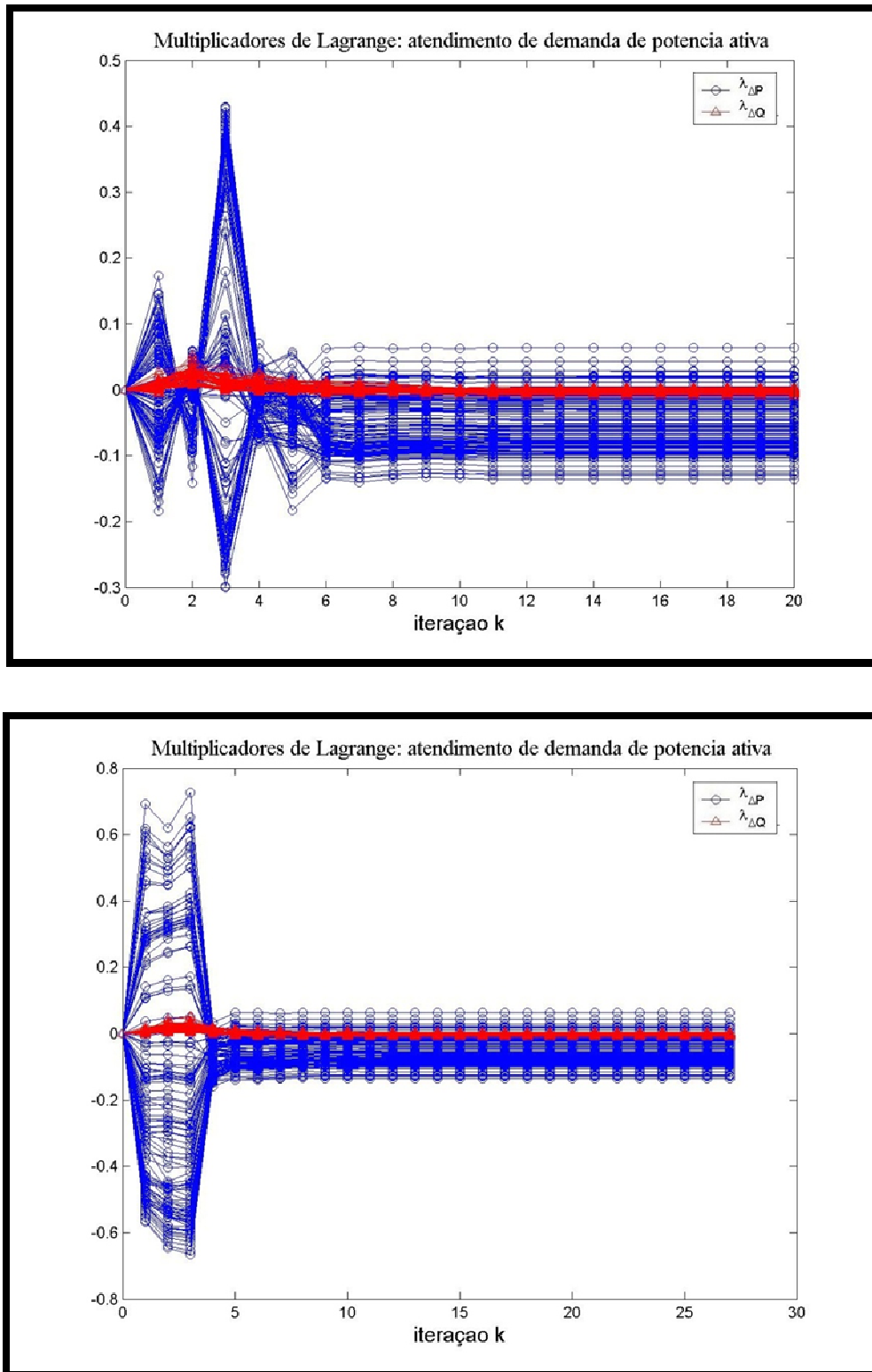


Figura 4.44: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 118 barras.

A figura 4.45 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

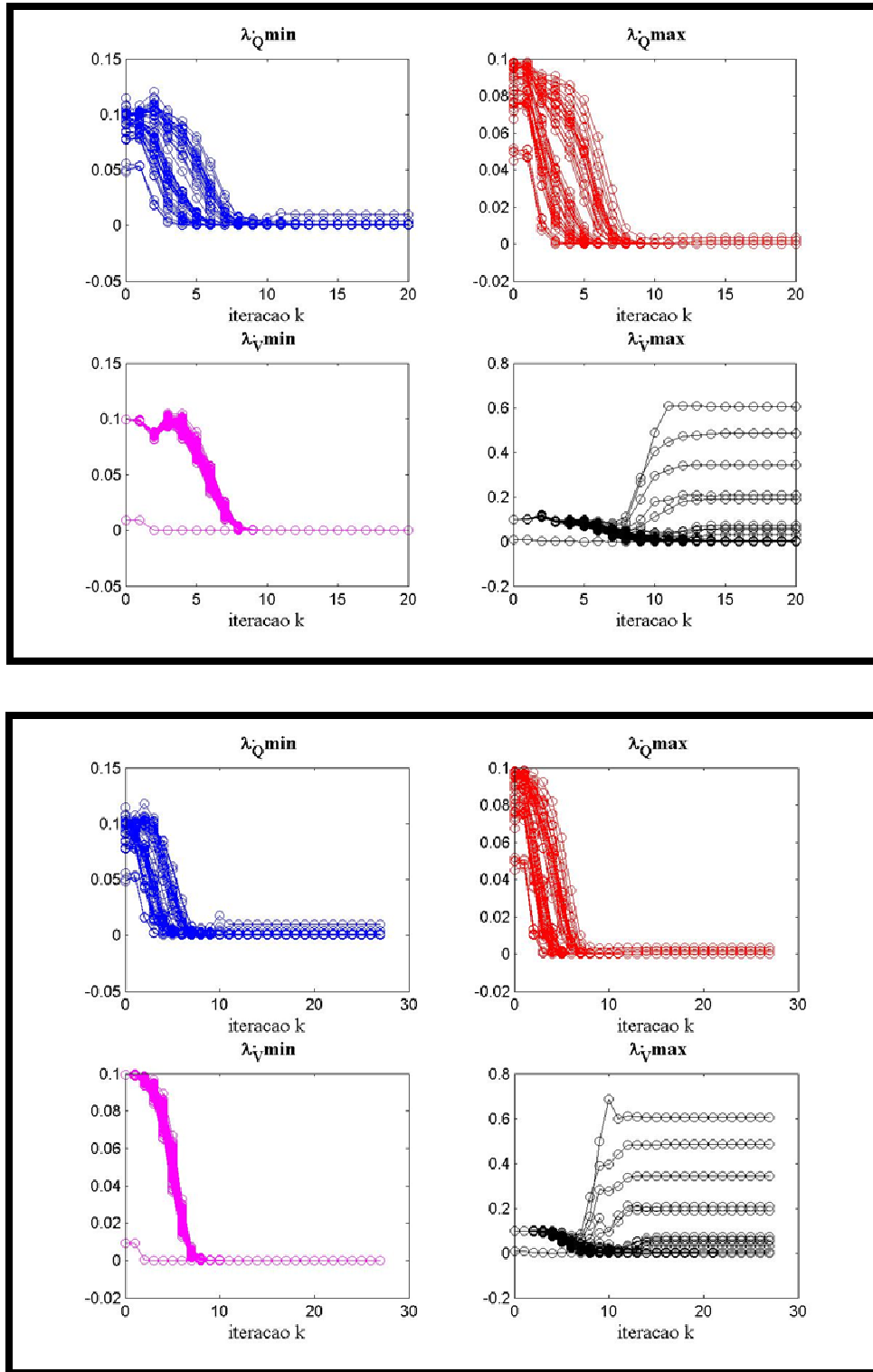


Figura 4.45: Sequência dos pontos $\lambda_{Q_{\min}}$, $\lambda_{Q_{\max}}$, $\lambda_{V_{\min}}$ e $\lambda_{V_{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 118 barras.

A figura 4.46 apresenta a sequência de valores da função objetivo e da função lagrangiana obtidos em cada iteração pelo MPIBLMCG-EX.

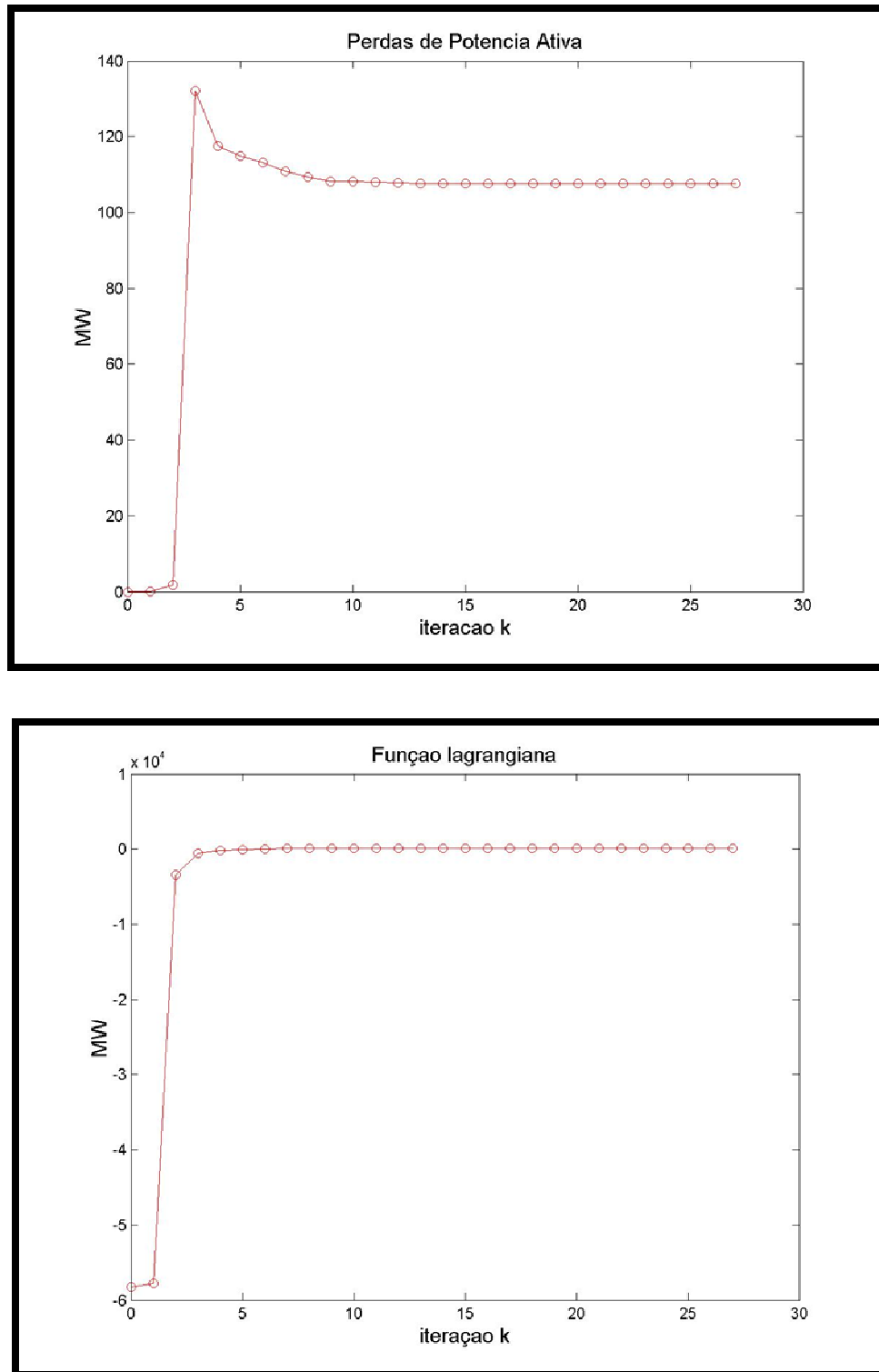


Figura 4.46: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 118 barras.

A figura 4.47 apresenta a sequência de valores do parâmetro de amortecimento e a apresentação dos estados ótimos das magnitudes de tensão em cada barra obtidos pelo MPIBLMCG-EX.

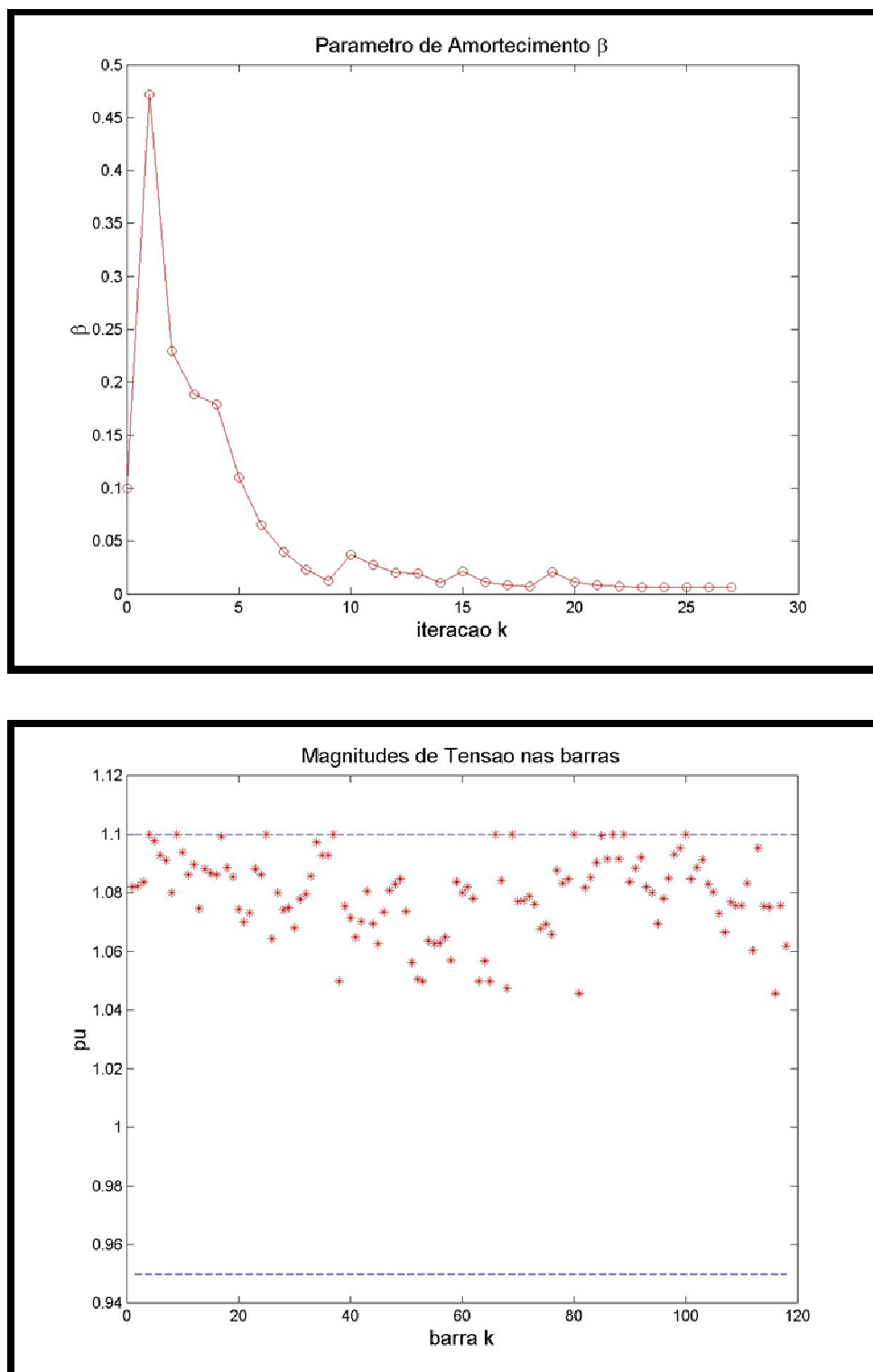


Figura 4.47: Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 118 barras.

4.2.8 O sistema elétrico de 162 barras

Os dados de barra e de linha do sistema IEEE-162 barras podem ser encontrados no site da (University Washington Electrical Engineering).

A tabela 33 nos mostra a natureza das barras bem como os seus tipos de restrições nodais associados, número de linhas e de taps.

Tabela 33: Natureza das barras e tipos de restrições nodais, número de linhas e de taps do sistema 162 barras.

Número de Barras	Natureza das Barras	Estudo Ativo/Reativo		
		Potência Ativa	Potência Reativa	Mag. de Tensão
150	PQ	Igualdade	Igualdade	Canalização
1	Slack	-	Canalização	Canalização
12	PV	Igualdade	Canalização	Canalização
Informação de Número de Linhas e quantidades de taps				
Número de Linhas		Quantidade de taps		
284		46		

Para resolução do problema do sistema elétrico de 162 barras utilizamos $\mu_0 = 5$ e com os vetores magnitude de tensão e de ângulo inicializados conforme as informações encontradas no banco de dados desse sistema. A dimensão do vetor ω é 1972, isto é, esse contém 1972 variáveis. Foi utilizado $\|\nabla L(\omega^k)\|_{\infty} \leq 10^{-5}$ como critério de parada do método.

A matriz dual normal θ_k contém 104976 elementos, dos quais 3080 são não-nulos, isto é, a matriz contém 2,93% de elementos não-nulos.

O método MPIBLM-EX não foi resolveu o problema de FPO para este sistema. A tabela 34 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT contendo as 40 primeiras iterações.

Tabela 34: Evolução dos principais resultados do MPIBLM-EX sobre o sistema elétrico de 162 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \mathbf{\gamma}^k)(MW)$	$L(\mathbf{\omega}^k)(MW)$	$\ \nabla L(\mathbf{\omega}^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	163,018888299912	-49844,8508428859	0,4587	----	-----	-----
1	146,57171953242	-49863,4415709566	0,4586	5	0,338	1,01
2	144,521341472922	-1418,5986706294	0,3777	1,8265	0,152	1,01
3	151,848115879855	-124,712771841834	0,1150	0,6671	1,01	1,01
4	152,553519099493	-36,2988422177186	0,0028	0,2437	1,01	1,01
5	151,860565419426	39,5097947353539	0,0007	0,0890	1,01	1,01
6	147,906533309788	107,361063157962	0,0071	0,0325	0,994	0,994
7	145,637402342849	137,96059459087	0,0378	0,0118	0,467	0,897
8	145,021106241962	142,786213617657	0,0546	0,0132	0,451	0,923
9	145,040559141652	144,963608033183	0,0554	0,0132	0,372	1,007
10	145,732594519412	145,587080682913	0,0071	0,0105	1,01	1,01
11	145,986916283743	146,028372955184	0,0013	0,0038	1,01	1,006
12	146,097311572684	146,110893844442	0,0010	0,0031	0,944	0,992
13	146,162393976683	146,163375703195	0,0007	0,0017	1,01	1,009
14	146,189649898432	146,191790232361	0,0003	0,0006	1,01	1,009
15	146,770225599148	146,197649799052	0,6864	0,0002	1,01	1,01
16	143,77515604361	144,651162171543	1,6077	8,47e-05	0,204	0,984
17	139,483794474294	141,374899487651	1,4326	3,09e-05	0,242	0,856
18	129,063921064871	95,2275695887642	9,316	0,0084	0,173	0,997
19	129,135319830682	106,79774805887	10,481	0,0030	0,006	0,259
20	128,579284314562	108,481807905605	10,329	0,0011	0,014	0,079
21	128,562291542249	57,8369486066841	10,322	0,0017	0,000	0,003
22	133,642170697392	216,023439776866	9,8719	0,1510	0,042	0,3783
23	138,595023381702	352,867795222443	8,782	0,0551	0,105	0,914
24	138,611374270436	267,17778718019	8,7777	0,0201	0,0004	0,509
25	138,162495238556	275,329679665385	8,774	0,0073	0,0002	0,002
26	138,235071122221	270,887404143601	8,7556	0,0075	0,002	0,048
27	137,916947514566	128,064480634159	8,699	0,0074	0,007	0,038
28	138,346279619972	664,91934098838	8,7067	0,0176	0,0001	0,005
29	138,655564172454	533,493416905399	8,7022	0,0134	0,0005	0,027
30	139,195913391194	626,005355886673	8,7016	0,0448	7,39e-07	6,39e-06
31	140,110468418782	1503,78232226824	8,6603	0,1385	0,002	0,146
32	140,847108401089	2166,21039172369	8,6727	0,2405	0,0002	0,0089
33	142,742143302459	2154,97693566377	26,133	0,1569	0,005	0,2231
34	144,495729438396	1767,36683429805	37,897	0,1565	0,016	1,01
35	146,239087606681	547,015654669002	53,189	0,4362	0,013	1,01
36	145,814226658652	362,465563062891	51,036	0,6805	8,75e-05	0,0003
37	145,839186322761	435,433000259511	63,234	1,4147	0,0002	0,2174
38	147,187114276009	-555,893158754903	88,754	1,4059	0,014	1,01
39	147,472512449351	-27,4650287412961	106,4	1,363	0,0001	0,0085
40	148,819972677317	450,088521187799	164,5	1,3715	0,010	1,01

A tabela 34 mostra-nos que o MPIBLM-EX foi eficiente em obter a solução ótima na ordem de grandeza de 10^{-3} na iteração 14, porém, a partir dessa iteração apresentou instabilidade, não conseguiu avançar para uma precisão superior e apresentou divergência a partir da iteração 15, portanto, foi insatisfatório.

O método MPIBLMCG-EX convergiu em 40 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{V}^*, \gamma^*) = 146,1992165680332 \text{ MW}$ e a função lagrangiana está avaliada em $L(\boldsymbol{\omega}^*) = 146,1992165680790 \text{ MW}$, $\max(\Delta P) = 8,314771 \times 10^{-11} \text{ pu}$, $\max(\Delta Q) = 8,775202 \times 10^{-13} \text{ pu}$, condições de complementaridade avaliadas em $\max(\text{gap}) = 1,161703 \times 10^{-13} \text{ pu}$, o parâmetro de barreira está avaliado em $\mu_k = 1,354223 \times 10^{-9}$ e o parâmetro de amortecimento está avaliado em $\beta = 0,130762$. A tabela 35 nos apresenta dados quantitativos da sequência numérica dos principais resultados em uma iteração k tais como: função objetivo, função lagrangiana, parâmetro de barreira, tamanho do passo primal e dual e avaliação da precisão aplicada sobre as condições de KKT.

Tabela 35: Evolução dos principais resultados do MPIBLMCG-EX sobre o sistema elétrico de 162 barras.

k	$f(\mathbf{V}^k, \gamma^k)(MW)$	$L(\omega^k)(MW)$	$\ \nabla L(\omega^k)\ _{\infty}$ (pu)	μ_k	α_p	α_d
0	163,018888299912	-49844,8508428859	0,4587	----	-----	-----
1	161,524770034515	-49853,2151342747	0,2210	5	1,01	1,01
2	159,589293364982	-1407,30638973163	0,0411	1,8265	1,01	1,01
3	157,761765229224	-120,020015058214	0,0390	0,6671	1,01	1,01
4	152,445398262616	-38,1192764661693	0,0183	0,2437	1,01	1,01
5	149,705716593404	37,8887443719513	0,0046	0,0890	1,01	1,01
6	148,049032447603	107,099834074084	0,0060	0,0325	0,848	1,01
7	145,714097511888	138,251141411335	0,0255	0,0118	0,592	0,977
8	145,078656617766	143,533987163688	0,0344	0,0137	0,603	1,01
9	145,105071333067	145,689860549974	0,0352	0,0136	0,495	0,998
10	145,588998137554	145,851108228637	0,0144	0,0110	1,01	1,01
11	145,985717536041	145,998990610144	0,0113	0,0059	1,01	0,998
12	146,121358163276	146,117261542014	0,0119	0,0045	1,01	0,994
13	146,153348164963	146,183264135279	0,0121	0,0032	1,01	1,007
14	146,155130713694	146,286082373487	0,0145	0,0019	0,091	1,005
15	146,186485917405	146,206430556709	0,0112	0,0018	1,01	1,007
16	146,196211300638	146,197884543047	0,0107	0,0925	0,763	1,01
17	146,211228651905	146,181788906364	0,0092	0,1172	1,01	1,01
18	146,225658753193	146,170272031305	0,0072	0,1532	1,01	1,01
19	146,242330077812	146,163864089506	0,0068	0,1736	1,01	1,01
20	146,251498856463	146,16332905022	0,0082	0,1585	1,01	1,01
21	146,255479518346	146,15684109039	0,0113	0,1168	1,01	1,01
22	146,248930613527	146,155172442395	0,0086	0,0426	1,01	1,01
23	146,231822915794	146,17333941774	0,0027	0,0155	1,01	1,01
24	146,226915639634	146,20258797983	0,0049	0,0056	1,01	1,01
25	146,215813737448	146,215624795041	0,0069	0,0020	0,677	1,01
26	146,201015897205	146,200960854787	0,0036	0,0007	0,886	1,005
27	146,198534390959	146,200387773118	0,0038	0,0004	0,631	1,009
28	146,198943686194	146,199165044377	0,0012	0,0002	1,01	1,009
29	146,199274091567	146,199228218946	0,0003	8,76e-05	1,01	1,01
30	146,199230419156	146,199229863847	0,0002	3,20e-05	1,008	1,01
31	146,199229726078	146,199229355216	0,0004	1,16e-05	0,064	1,01
32	146,199221906689	146,199221932896	0,0001	4,27e-06	1,006	1,01
33	146,199221006754	146,199221038968	0,0002	1,56e-06	0,250	1,01
34	146,199218435087	146,199218443381	9,59e-05	5,69e-07	1,01	1,01
35	146,199217343377	146,199217349664	6,3e-05	2,08e-07	1,01	1,01
36	146,199216887338	146,199216889306	4,24e-05	7,60e-08	1,01	1,01
37	146,199216695201	146,199216695895	2,82e-05	2,77e-08	1,01	1,01
38	146,199216617461	146,199216617702	1,91e-05	1,01e-08	1,01	1,01
39	146,199216582935	146,199216583039	1,28e-05	3,70e-09	1,01	1,01
40	146,199216568033	146,199216568079	8,60e-06	1,35e-09	1,01	1,01

A tabela 35 mostra-nos que o MPIBLMCG-EX foi eficiente e superior ao MPIBLM-EX para a resolução do problema, pois, apesar do número de iterações, determinou a solução ótima do mesmo com o erro avaliado na ordem de grandeza de 10^{-6} na iteração 40. A baixa taxa de convergência deve-se à dificuldade de avaliação da solução ótima nas condições de viabilidade dual das restrições de igualdade (observamos que as precisões das condições de viabilidade primal e das condições de complementaridade avaliados na solução ótima são superiores a ordem de grandeza de 10^{-12}). Informamos que houve penalização do parâmetro de barreira nas iterações 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 21, 27 e 28 e todas essas penalizações ocorreram nas restrições de desigualdade associadas aos controles de reativo. Isso nos mostra, também, uma das dificuldades que o método encontrou para encontrar uma solução ótima primal viável, $\mathbf{V}^*$ e γ^* , que satisfaça todas as restrições de igualdade e de desigualdade do problema e que seja uma solução de mínimo para o mesmo. Outra dificuldade é apresentada quando analisamos o condicionamento da matriz dual normal θ_k na tabela 36.

A tabela 36 nos mostra o condicionamento da matriz dual normal θ_k de ambos os métodos. A primeira coluna apresenta a iteração k , a segunda coluna apresenta o condicionamento da matriz dual normal obtido pelo MPIBLM-EX, a terceira e a quarta coluna apresentam, respectivamente, o condicionamento da matriz dual-normal antes (ADC) e depois (DDC) da decomposição de Cholesky e a quinta coluna apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento β .

Tabela 36: Avaliação do condicionamento da matriz dual normal para sistema elétrico de 162 barras.

k	$\kappa(\theta_k)$ MPIBLM-EX	$\kappa(\theta_k)$ ADC	$\kappa(\theta_k)$ DDC	β_k
0	--	--	--	--
1	59947	59947	1114,8	1,024
2	56945	1,4706e+005	65182	0,4989
3	13726	36386	2028,2	0,3554
4	46238	23299	8893	0,1502
5	1,1403e+005	45328	16432	0,0605
6	1,3536e+006	3,6997e+005	45063	0,0324
7	4,1516e+005	4,6639e+005	1,7358e+005	0,0220
8	1,0201e+006	1,4521e+006	59785	0,1259
9	1,8832e+006	4,4486e+005	3159,3	0,2547
10	6,6649e+006	8,2445e+005	8840	0,2638
11	4,1066e+007	2,1058e+008	4008,2	0,2082
12	6,6235e+008	1,6896e+007	79031	0,2688
13	2,4614e+010	3,7042e+007	76112	0,3083
14	6,043e+012	1,0954e+008	13452	0,3181
15	1,2361e+016	1,6819e+008	22895	0,5659
16	3,069e+018	2,6663e+007	162,54	6,0565
17	1,0363e+020	2,0874e+007	257,9	2,8846
18	1,9975e+019	1,8307e+007	334,78	2,0214
19	9,0685e+018	2,2699e+007	2734,3	1,2469
20	1,1115e+019	1,4462e+009	722,98	1,0276
21	1,0696e+018	3,5729e+008	1000,7	0,7715
22	1,259e+018	2,6033e+008	2624,3	0,3759
23	2,1247e+019	7,8636e+008	8509,9	0,2322
24	6,8866e+018	4,5489e+008	8612,2	0,1819
25	2,3888e+019	8,879e+008	14997	0,1424
26	4,2031e+019	1,1354e+008	45487	0,1170
27	9,1011e+018	1,7687e+008	40587	0,2080
28	8,735e+018	3,9789e+008	90060	0,218
29	1,4899e+019	1,52e+009	4,2603e+006	0,1552
30	3,114e+018	1,9651e+012	1,3893e+006	0,1402
31	1,1482e+019	1,608e+011	2,1598e+006	0,1328
32	1,6671e+019	8,675e+011	8,2303e+007	0,1318
33	3,8774e+019	2,3044e+012	3,9271e+007	0,1309
34	6,8522e+019	1,3143e+013	5,6484e+007	0,1300
35	8,2299e+019	4,2503e+013	1,0768e+008	0,1291
36	5,6152e+019	3,1409e+014	2,2399e+008	0,1282
37	3,5315e+019	2,4478e+015	4,9733e+008	0,1273
38	1,0028e+019	2,2091e+016	2,0981e+009	0,1326
39	3,1262e+019	4,7638e+016	2,8952e+010	0,1316
40	7,994e+020	8,6641e+016	3,2188e+010	0,1307

A tabela 36 mostra-nos na coluna ADC o mau condicionamento da matriz dual normal do MPIBLMCG-EX a partir da iteração 6 do método em que a ordem de grandeza do

condicionamento dessa passa a ser superior a 10^6 , cujo valor aumenta de maneira oscilante nas iterações seguintes, atingindo a ordem de grandeza 10^{16} na iteração 40. Por outro lado, quando observamos a coluna DDC, notamos que o parâmetro de amortecimento influenciou positivamente no condicionamento da matriz dual normal θ_k , sendo importante e eficiente em relação à correção do posto dessa, pois a ordem de grandeza de 10^6 somente é atingida na iteração 29, alcançando o seu valor máximo da ordem de 10^{10} na iteração 40.

Ressaltamos também a estabilidade desse parâmetro de uma iteração para outra na coluna β_k , observando que essa reflete a eficiência da heurística proposta de acordo com a expressão (3.111). Destacamos que o condicionamento foi melhorado em mais de 5 milhões de unidades na última iteração.

Observamos o condicionamento da matriz dual normal obtidos pelo MPIBLM-EX e constatamos muita instabilidade, destacamos o salto substancial de mau condicionamento avaliado cerca de 10 mil vezes da iteração 14 (onde a avaliação do erro está mais próximo de zero) para 15. O MPIBLM-EX se perdeu ao encontrar uma solução ótima superior a precisão de 10^{-3} e seu mau condicionamento, na iteração 40, está na grandeza de 10^{20} . Destacamos que a diferença de valores de mau condicionamento da matriz dual-normal da coluna DDC com do MPIBLM-EX, na iteração 40, é de mais de 40 bilhões de unidades.

A figura 4.48 nos apresenta a trajetória das magnitudes de tensão de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

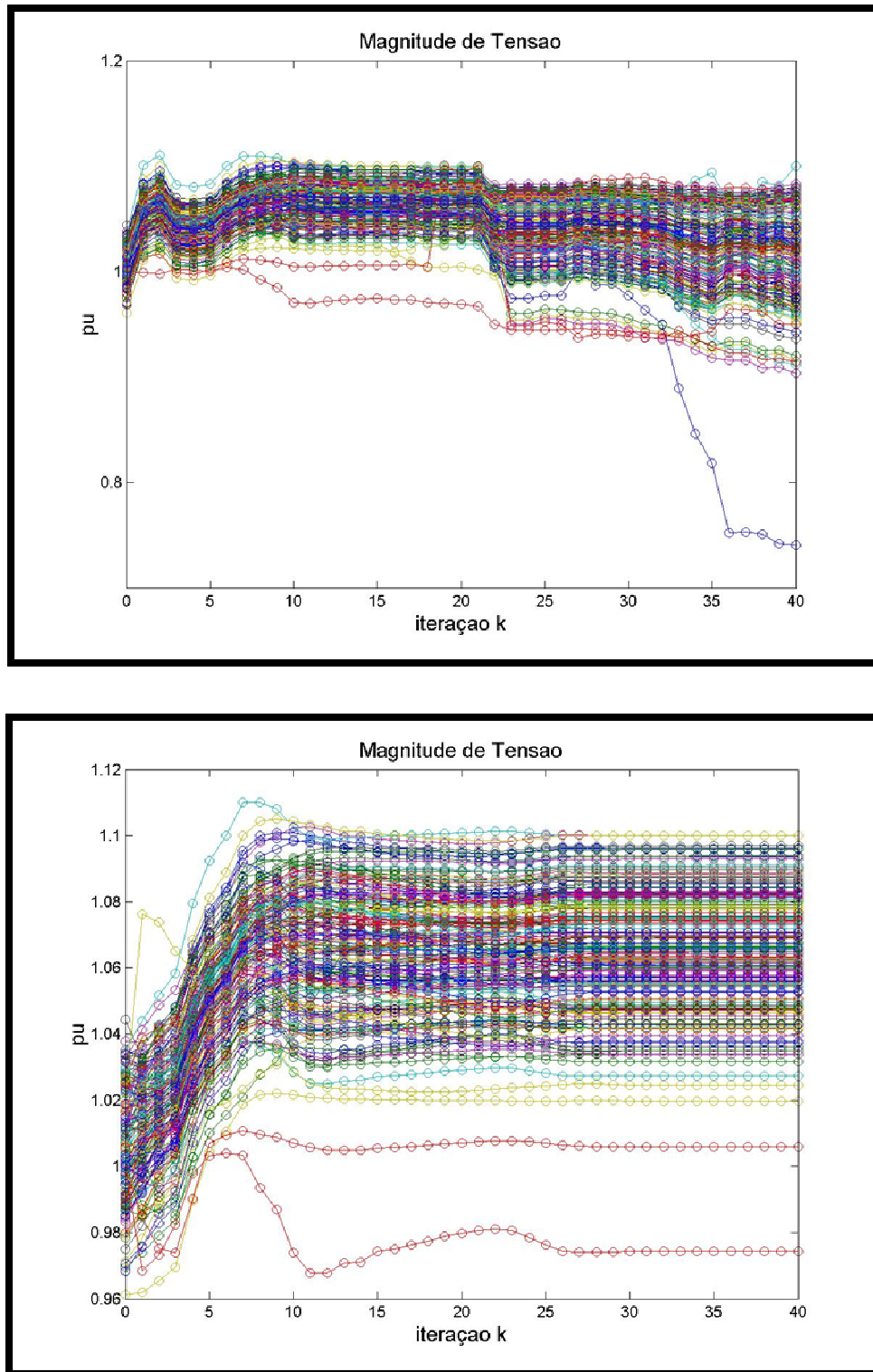


Figura 4.48: Sequência dos pontos $\mathbf{V}^k$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 162 barras.

A figura 4.49 nos apresenta a trajetória dos ângulos, já convertidos para graus, de cada barra obtidas respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

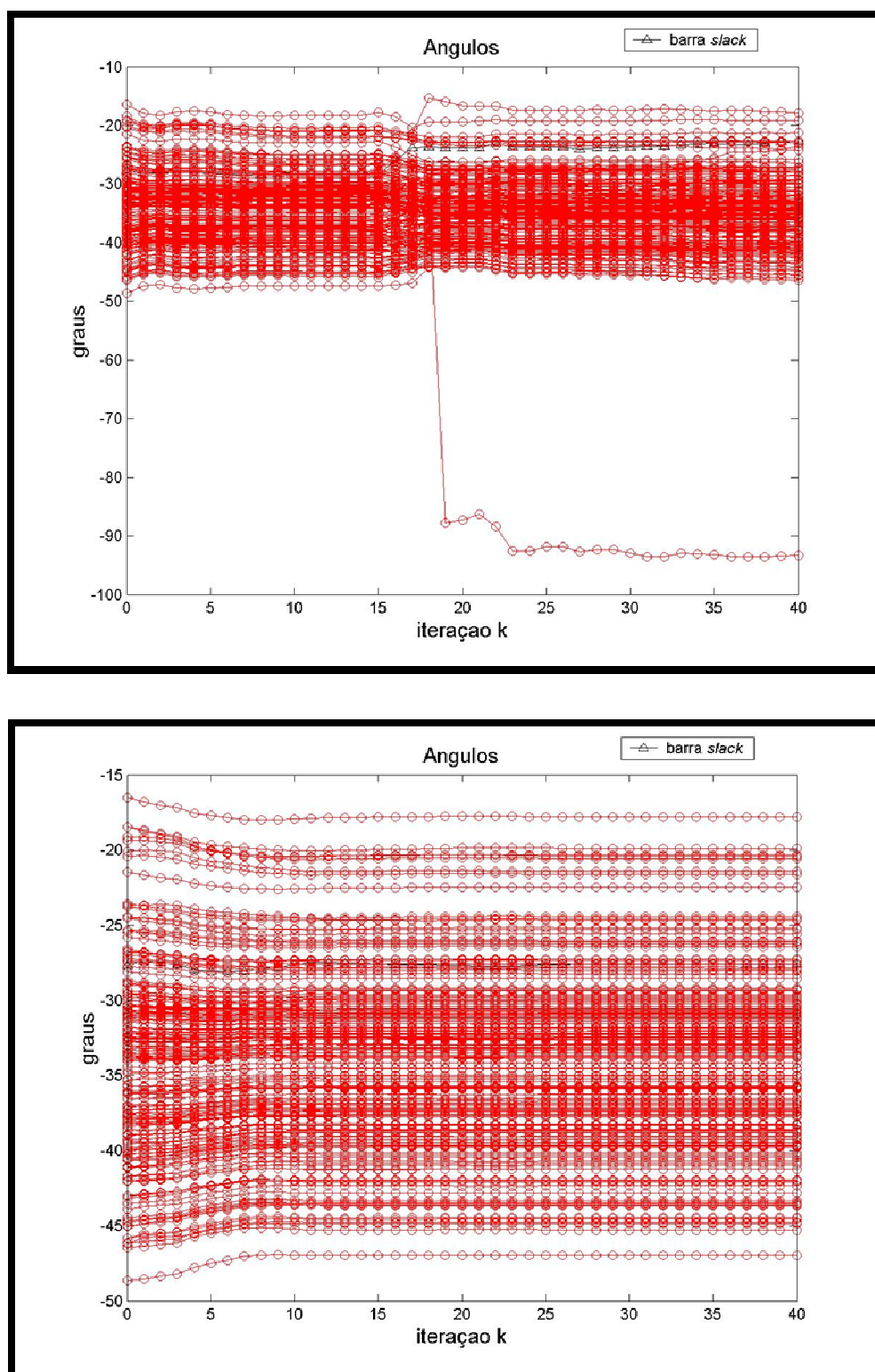


Figura 4.49: Sequência dos pontos γ^k obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para sistema elétrico de 162 barras.

A figura 4.50 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

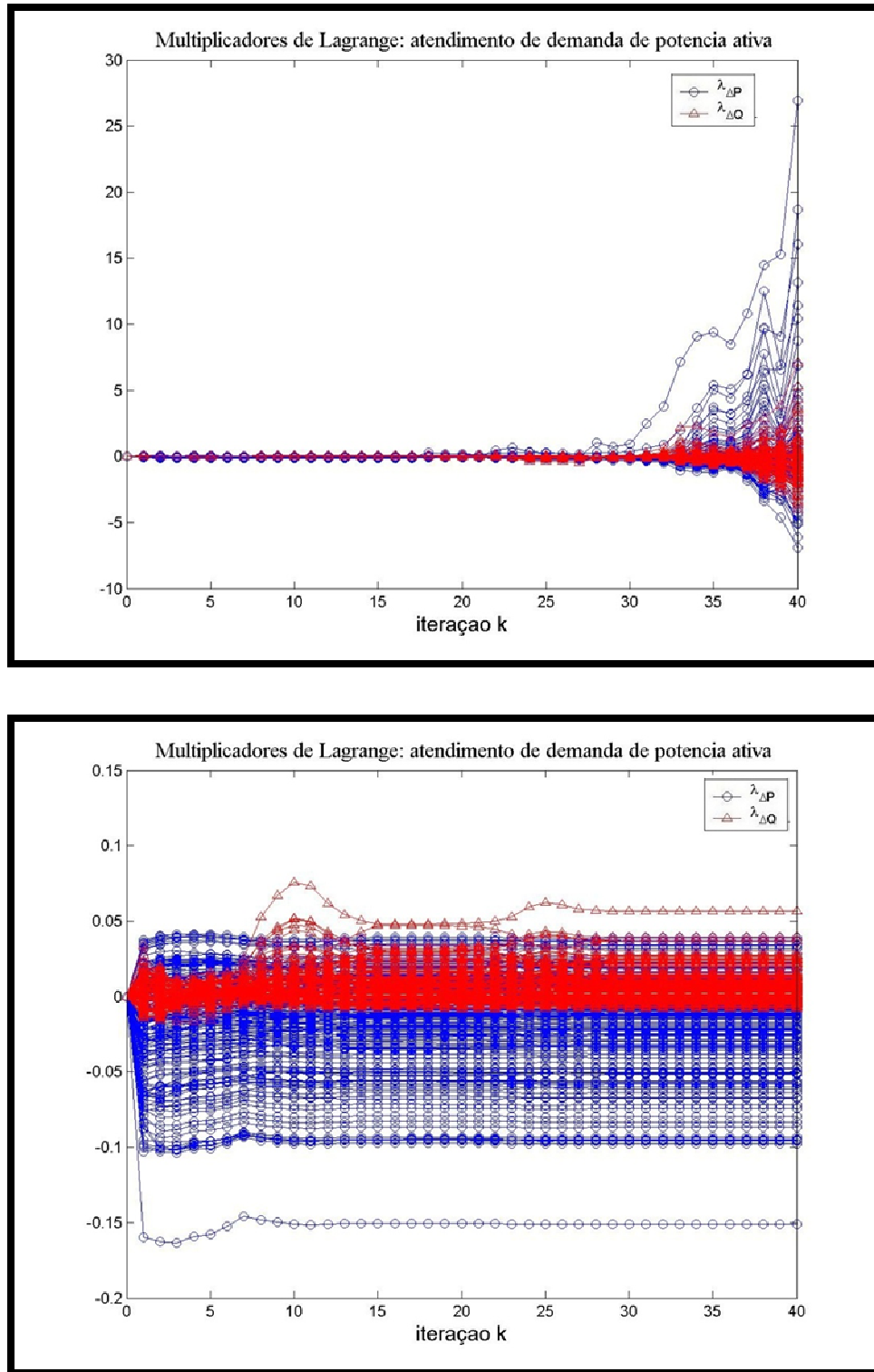


Figura 4.50: Sequência dos pontos $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 162 barras.

A figura 4.51 nos apresenta a trajetória dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade respectivamente pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX.

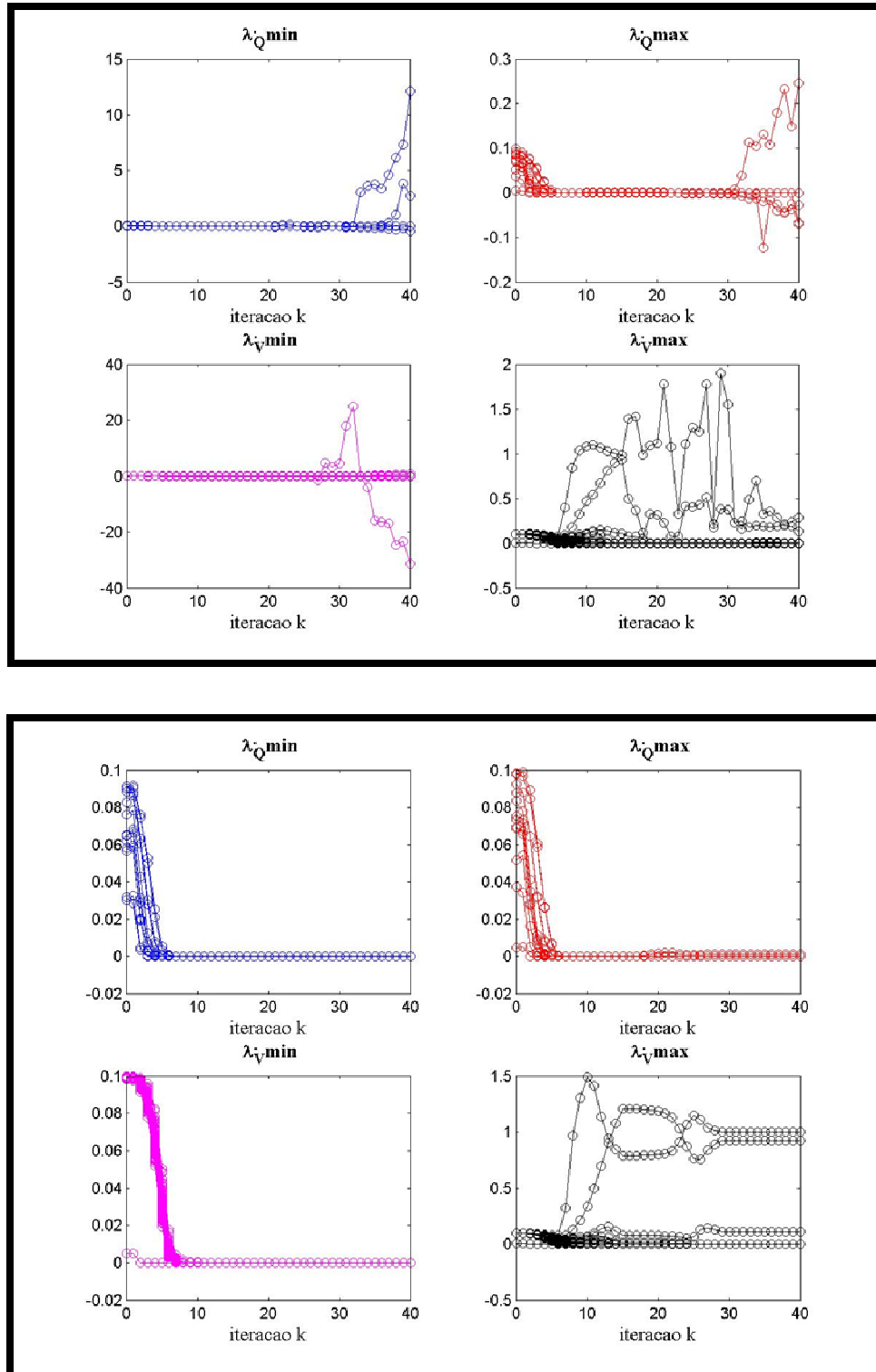


Figura 4.51: Sequência dos pontos $\lambda_{Q^{\min}}$, $\lambda_{Q^{\max}}$, $\lambda_{V^{\min}}$ e $\lambda_{V^{\max}}$ obtidos pelos métodos MPIBLM-EX e MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 162 barras.

A figura 4.52 apresenta a sequência de valores da função objetivo e da função lagrangiana obtidos em cada iteração pelo MPIBLMCG-EX.

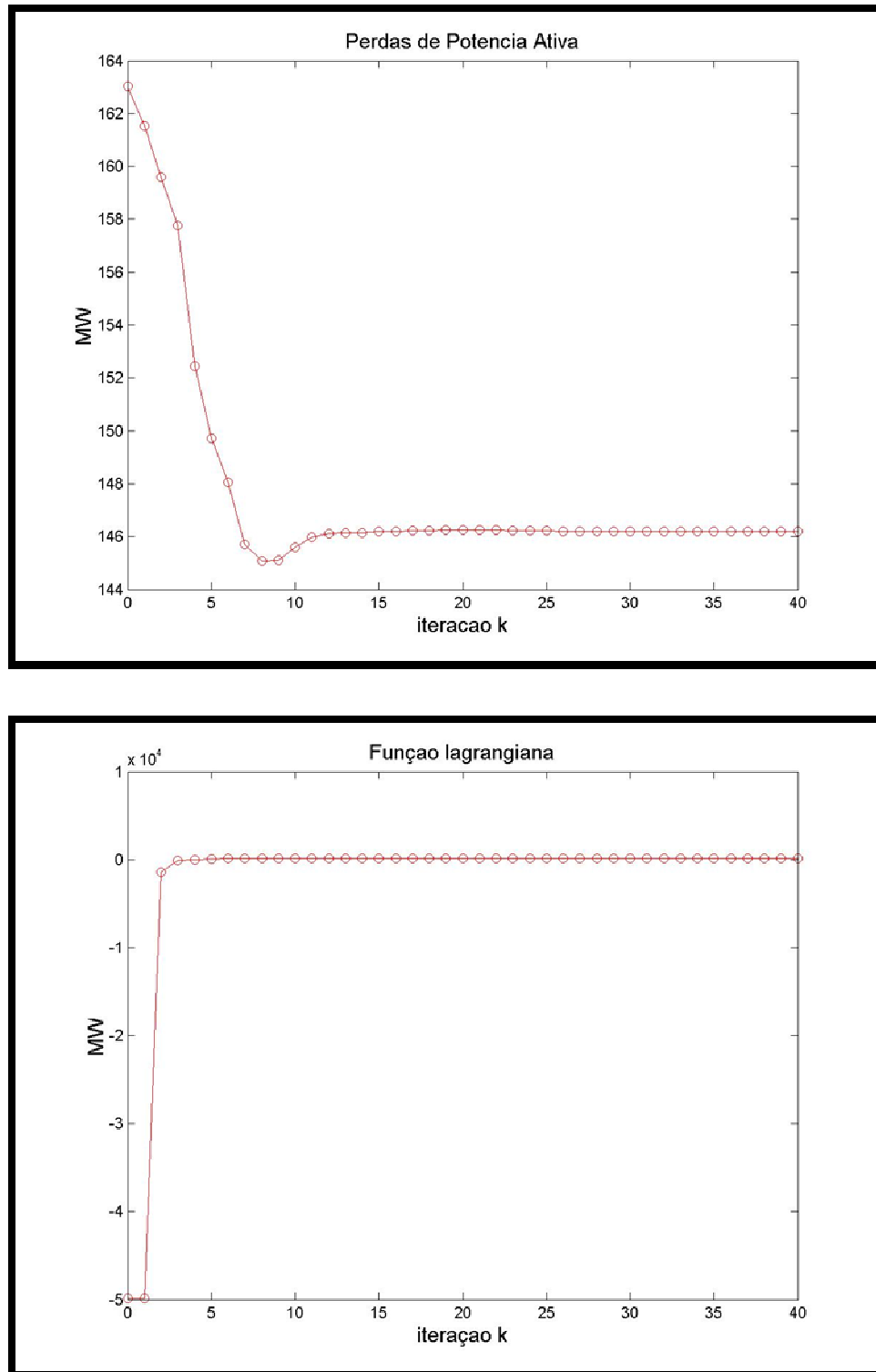


Figura 4.52: Sequência de valores da função objetivo e lagrangiana pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de potência de 162 barras.

A figura 4.53 apresenta a sequência de valores do parâmetro de amortecimento e a apresentação dos estados ótimos das magnitudes de tensão em cada barra obtidos pelo MPIBLMCG-EX.

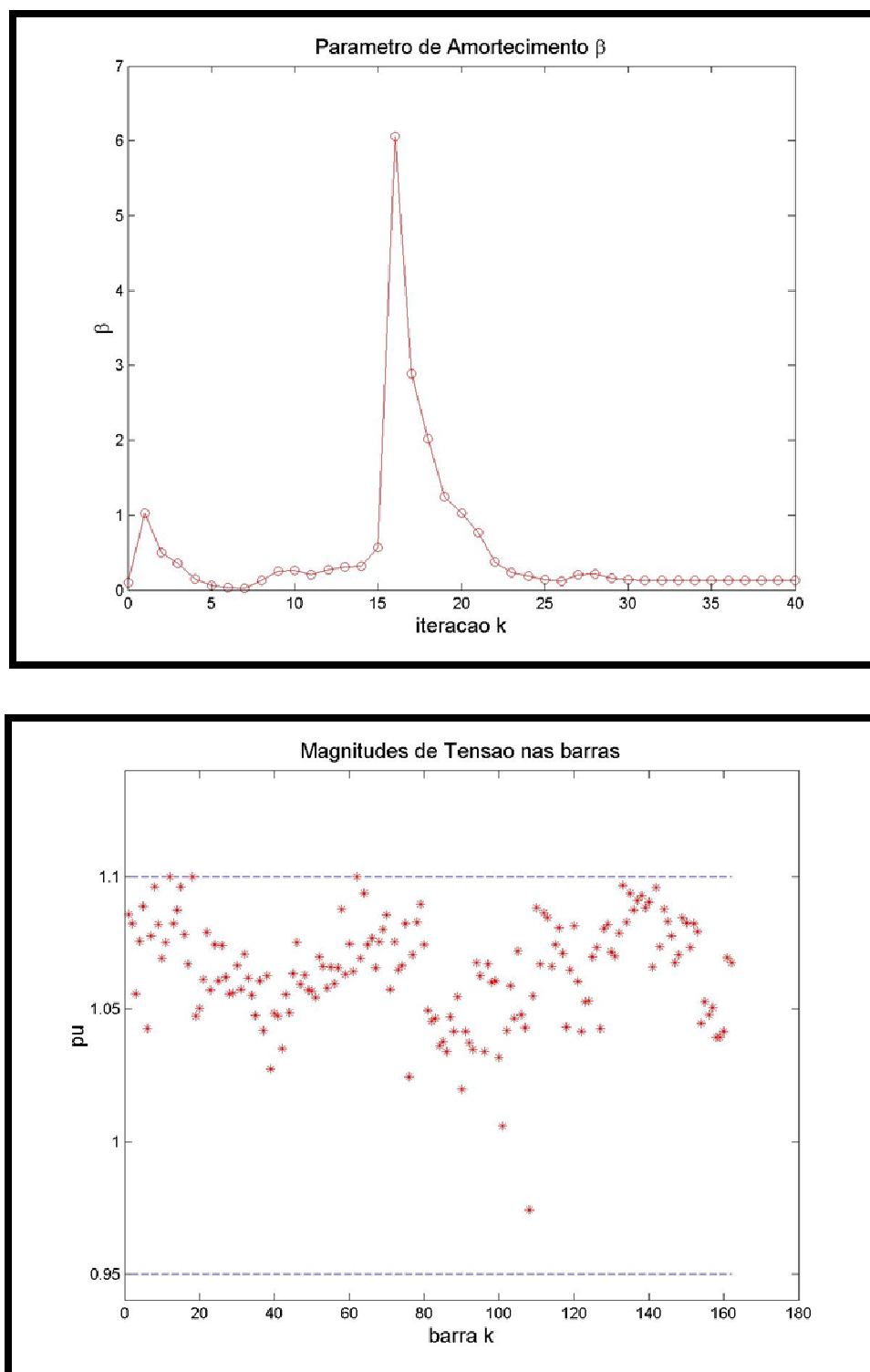


Figura 4.53 : Evolução do parâmetro de amortecimento e o estado final das magnitudes de tensão obtidos pelo MPIBLMCG-EX para o sistema elétrico de 162 barras.

5 CONCLUSÕES E PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS.

Neste trabalho, uma revisão da teoria de programação não-linear foi fundamental para a construção de um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada e estratégia de ajuste cúbico (MPIBLM-EX) e de sua extensão para o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada, com estratégias de ajuste cúbico e de convergência global (MPIBLMCG-EX). Os mesmos apresentaram-se consistentes para a resolução de problemas de FPO reativo, devido aos procedimentos propostos e utilizados: ajuste de um polinômio cúbico em pontos indefinidos à função barreira logarítmica modificada; uso de uma estratégia de convergência global baseada na determinação e utilização de uma atualização do parâmetro de amortização β , relativo à matriz dual normal; aproveitamento dos resíduos de primeira e de segunda ordem gerados pelas condições de complementaridade, respectivamente, nos procedimentos previsor e corretor do método e utilização do parâmetro de barreira em ambos os procedimentos.

Uma implementação desses métodos, realizadas em MATLAB 6.1, mostrou eficiência e sucesso à resolução de problemas de fluxo de potência ótimo reativo, devido aos seguintes fatores:

- i)* os métodos exploram a esparsidade da matriz dos coeficientes do sistema (3.27);
- ii)* os métodos não necessitam de um ciclo interno de Newton para determinar as direções primais e duais;
- iii)* o MPIBLM-EX e o MPIBLMCG-EX são métodos de gradiente projetado-escalado: a relação entre as direções de busca propostas com gradientes projetados-escalados e a teoria de projeções ortogonais nos mostraram que, diferentemente de (Wu, et al., 1994), é interessante considerarmos o parâmetro de barreira no procedimento previsor e que as matrizes de projeção ortogonal e o vetor resultante da soma dos vetores gradiente, força de

centragem modificada e residual são ajustados (escalados) pela $\theta_k^{-1/2}$, assim, uma direção é projetada na região de viabilidade desde que a matriz dual normal seja definida positiva;

iv) para o melhor refinamento da solução na iteração k , os métodos utilizaram os resíduos das viabilidades primais, duais e das folgas complementares nos procedimentos previsor e corretor;

v) o MPIBLMCG-EX considerou uma estratégia de convergência global relacionada ao tratamento da matriz dual normal por uma variante do método de Levenberg-Marquardt convertendo-a em uma matriz definida positiva, quando este procedimento fez-se necessário, a cada iteração;

vi) o MPIBLMCG-EX utilizou dois parâmetros de barreira μ_k e μ_{k-1} de uma forma inovadora para a atualização do parâmetro de amortecimento β , com o auxílio do número áureo e da seção áurea – uma interessante interpretação geométrica foi realizada, a qual auxiliou na determinação da expressão de atualização desse parâmetro;

vii) (Wu, et al., 1994) não consideram o parâmetro de barreira no procedimento previsor, trabalhando apenas com as direções afim-escala. Assim, eles não usufruem da propriedade do vetor força de centragem projetado-escalado, no procedimento previsor, o qual foi apresentado e explorado pelos métodos neste trabalho.

viii) os métodos utilizaram uma estratégia de ajuste cúbico que os auxiliaram em situações extremas em que o logaritmo aplicado em alguma variável de folga do problema não estava definido na região expandida pela barreira modificada. Utilizamos um polinômio de grau 3 que preservou as informações de inclinação e de curvatura do logaritmo quando esse estava próximo à fronteira relaxada;

ix) os métodos utilizaram uma variante do método de (Granville, 1994). Essa variante permitiu escolher um valor $\sigma > 0,9995$ que não comprometeu a viabilidade das direções de busca e;

x) os métodos usufruíram da proposição 2.25 para o cálculo dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade. Essa proposição permitiu aos métodos que a atualização dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange fosse feita em função dos multiplicadores de Lagrange calculados na iteração anterior. O que simplificou o cálculo destes estimadores e tornou-os mais robusto.

Como proposta para trabalhos futuros, investigaremos a possibilidade da extensão desses métodos para a resolução de problemas de programação não-linear inteira mista e, principalmente, encontrarmos problemas atuais que nos motivem a propor a atualização e aprimoramento das técnicas apresentadas neste trabalho.

6 BIBLIOGRAFIA

Adler I. [et al.] An implementation of Karmakar's algorithm for linear Programming [Article]. - [s.l.] : Math Programming, 1989. - pp. 297-335.

Anderson P.M. and A.A. Fouad Power System Control and Stability [Book]. - New York : IEEE Press, 1994.

Bazaraa M. S., Sherali H. D. and Shetty C. M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms [Book]. - New Jersey : Wiley Interscience, 2006. - 3.

Benson H. Y., Shanno D. F. and Vanderbei R. J. Interior-Point Methods for nonconvex nonlinear programming: Jamming and comparative numerical testing [Journal] // Operations Research and Financial Engineering / ed. ORFE-00-02 Princeton University. - 2000.

Butler T. and Martin A. V. On a Method of Courant for Minimizing Functionals [Journal] // J. Math. and Phys.. - 1962. - Vol. 41. - pp. 291-299.

Callioli C. A., Domingues H. H. and Costa R. C. F. Álgebra Linear e Aplicações [Book]. - São Paulo : Atual, 1991. - 6.

Carroll C. W. The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems [Journal] // Operational Research. - 1961. - 12 : Vol. 9. - pp. 169-184.

Courant R. Calculus of Variations and Supplementary Notes and Exercises [Book]. - [s.l.] : New York University, 1957. - pp. 1-23.

Dantzig G. B. Application of the Simplex Method to a Transportation Problem [Article] // in Activity Analysis of Production and Allocation / ed. Koopmans T. C., John Wiley. - New York : [s.n.], 1951. - pp. 359-373.

Dommel H. W. and Tinney W. F. Optimal Power Flow Solutions [Journal] // IEEE. Transactions on Power Apparatus and Systems. - 1968. - Vol. 87. - pp. 1866-1876.

Douady S. and Couder Y. Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Growth Process [Journal] // Physical Review Letters. - 1992. - Vol. 13. - pp. 2098-2101.

Fang S. C. and Puthenpura S. Linear Optimization and Extensions: Theory and Algorithms [Book]. - New Jersey : Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.

Fiacco A. V. and McCormick G. P. Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques [Book]. - New York : John Wiley, 1968.

Flemming D.M. and Gonçalves M. B. Cálculo B [Book]. - São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2007. - 2.

Frisch K. R. The Logarithmic Potential Method for Convex Programming [Journal]. - Oslo : Unpublished Manuscript, Institute of Economics, University of Oslo, 1955.

Granville S. Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods [Journal] // IEEE Transactions on Power Systems. - 1994. - Vol. 9. - pp. 136-146.

Janin R. Direction derivative of the marginal function in nonlinear programming. [Journal] // Mathematical Programming Study. - 1984. - Vol. 21. - pp. 127-138.

Karmarkar N. K. A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming [Article]. - [s.l.] : Combinatorica, 1984. - Vol. 4. - pp. 373-395.

Khachiyan L. G. A Polynomial Algorithm for Linear Programming [Article]. - [s.l.] : Doklady Akad. Nauk USSR, 1979. - Vol. 244. - pp. 1093-1096.

Kuhn H. W. and Tucker A. W. Nonlinear programming [Journal] // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability / ed. Neyman J.. - Berkeley, Calif. : [s.n.], 1951. - pp. 481-492.

Livio M. Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente [Book] / trans. Matsumura M. S.. - Rio de Janeiro : Editora Record, 2006.

Luenberger D. L. and Ye Y. Linear and Nonlinear Programming [Book]. - New York : Springer, 2008. - 3 : Vol. 1.

Mangasarian O. L. and Fromovitz S. The Fritz-John necessary optimality conditions in the Presence of Equality and Inequality Constraints [Journal] // Journal of mathematical analysis and applications. - 1976. - Vol. 17. - pp. 37-47.

Matioli L.C. Uma nova metodologia para construção de funções de penalização para algoritmos de lagrangeano aumentado.Tese (Doutorado) [Book]. - Florianópolis : Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

Mehrotra S. On implementation of a primal-dual interior point method [Journal] // SIAM Journal on Optimization. - 1992. - Vol. 2. - pp. 572-601.

Melman A. and Polyak R.A. The Newton Modified Barrier Method for QP Problems [Journal] // Annals of Operations Research. - 1996. - Vol. 54. - pp. 465-519.

Melo M. P., Lima D. P. and Pinheiro P. R. Modelos em programação matemática para o processamento do biscoito tipo cracker [Article] // Ciência e Tecnologia de Alimentos. - Campinas : [s.n.], Setembro 2004. - Vol. 24.

Monteiro M. F and Filho D. C. S. Exercício físico e o controle da pressão arterial [Journal] // Revista Brasileira de Medicina do Esporte. - Dezembro 2004. - 6 : Vol. 10. - pp. 503-516.

Monticelli A.J. Fluxo de carga em redes de energia elétrica [Book]. - São Paulo : Edgard Blücher , 1983.

Nash S.G., Polyak R. A. and Sofer A. A numerical comparision of barrier and modified-barrier methods for large-scale bound-constrained optimizatin [Journal] // Large Scale Optimization: State of Art. - 1994. - pp. 319-338.

Pereira A. A. O método da função lagrangiana barreira modificada/penalidade. Dissertação (mestrado) [Book]. - São Carlos : Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007.

Polyak R.A. Modified barrier functions [Journal] // Mathematical Programming. - 1992. - 2 : Vol. v.54. - pp. 177 – 222.

Poole D. Álgebra Linear [Book] / trans. Monteiro M. S and al.] [et. - São Paulo : Cengage Learning, 2009.

Ramalhete M., Guerreiro J. and Magalhães A. Programação linear [Book]. - [s.l.] : McGraw-Hill, 1985.

Ruggiero M. A. G. and Lopes V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais [Book]. - São Paulo : MAKRON books, 1996. - 2ª.

Schuverdy M.L. Métodos de lagrangiano aumentado com convergência utilizando a condição de dependência linear positiva constante [Book]. - Campinas : [s.n.], 2006. - Tese de Doutorado pela UNICAMP.

Sousa V. A. Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Via Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada. Tese (Doutorado) [Book]. - São Carlos : Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

Souza M. A. S. [et al.] Uma estratégia primal-dual de pontos interiores para a resolução do problema de despacho econômico [Journal] // IEEE/PES Transmission & Distribution Conference and Exposition Latin America. - São Paulo : EPUSP, 2010. - pp. 1-9.

Steinhardt P. J. [et al.] Experimental verification of the quasi-unit-cell model of quasicrystal structure [Journal] // Nature. - [s.l.] : Macmillan Publishers Ltd, Novembro 5, 1998. - Vol. 396. - pp. 55-57.

Stewart J. Cálculo [Book]. - [s.l.] : Cengage, 2006. - 6 : Vol. 2.

Tucker V. A. The deep fovea, sideways vision and spiral flight paths in raptors [Journal] // The Journal of Experimental Biology. - Novembro 14, 2000. - pp. 3745-3754.

University Washington Electrical Engineering [Online]. - Março 26, 2012. - <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>.

Vanderbei R.J., Meketon M. S. and Freedman B.A., A modification of Karmarkar's linear programming algorithms [Article]. - [s.l.] : Algorithmica, 1984. - Vol. 1. - pp. 395-407.

Wright M. H. Why a pure primal Newton barrier step may be infeasible [Article] // SIAM - Journal on Optimization. - 1995. - 1 : Vol. 5. - pp. 1-12.

Wu Y., Debs A. S. and E. Marsten R. A Direct Nonlinear Predictor- Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flow [Journal] // IEEE Transactions on Power Systems. - 1994. - Vol. 9. - pp. 876-883.

Zangwill W. I. Nonlinear Programming via Penalty Functions [Journal] // Management Science. - 1967. - Vol. 13. - pp. 344-358.

7 ANEXO I.

A FUNÇÃO OBJETIVO

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n=2NB}, \text{ onde: } \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{NB}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{NB} \text{ e NB é o Número de Barras do}$$

Sistema.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{NL=\text{Número de Linhas}} (g_{km})_i \left(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos(\gamma_k - \gamma_m) \right), \quad \text{onde}$$

$k=1, \dots, NB$ e $(g_{km})_i$ é a condutância da linha i a qual conecta as barras k e m . O cálculo do $\nabla f(\mathbf{x})$ é dado por:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} \\ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix};$$

em que:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}_k} = \sum_{i=1}^{NL} g_{ikm} (2V_k - 2V_m \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}_m} = \sum_{i=1}^{NL} g_{ikm} (2V_m - 2V_k \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^{NL} (2g_{ikm} V_k V_m \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma_m} = \sum_{i=1}^{NL} (-2g_{ikm} V_k V_m \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

A matriz hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$ é dada por:

$$F_1 = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial V_k \partial V_k} = \sum_{i=1}^{NL} 2(g_{km})_i \\ \frac{\partial f}{\partial V_m \partial V_m} = \sum_{i=1}^{NL} 2(g_{km})_i \\ \frac{\partial f}{\partial V_m \partial V_k} = \frac{\partial f}{\partial V_k \partial V_m} = \sum_{i=1}^{NL} -2(g_{km})_i \cos(\gamma_k - \gamma_m) \end{cases}; \quad (5.2)$$

$$F_2 = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \gamma_k \partial V_k} = \sum_{i=1}^{NL} (2(g_{km})_i V_m \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma_m \partial V_k} = \sum_{i=1}^{NL} (-2(g_{km})_i V_m \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma_k \partial V_m} = \sum_{i=1}^{NL} (2(g_{km})_i V_k \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma_m \partial V_m} = \sum_{i=1}^{NL} (-2(g_{km})_i V_k \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.3)$$

$$F_3 = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial V_k \partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^{NL} (2(g_{km})_i V_m \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial V_m \partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^{NL} (2(g_{km})_i V_k \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial V_k \partial \gamma_m} = \sum_{i=1}^{NL} (-2(g_{km})_i V_m \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial V_m \partial \gamma_m} = \sum_{i=1}^{NL} (-2(g_{km})_i V_k \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.4)$$

$$F_4 = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \gamma_k \partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^{NL} (2(g_{km})_i V_k V_m \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma_m \partial \gamma_m} = \sum_{i=1}^{NL} (2(g_{km})_i V_k V_m \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma_m \partial \gamma_k} = \frac{\partial f}{\partial \gamma_k \partial \gamma_m} = \sum_{i=1}^{NL} (-2(g_{km})_i V_k V_m \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.5)$$

AS RESTRIÇÕES DE DESIGUALDADES CANALIZADAS

Definimos por r o **número de barras de controle de reativo**. A equação de cada controle (só tem sentido para barras de geração) é dada a seguir:

$$\begin{aligned} u_{1_i} &\leq -V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \leq u_{2_i} \\ u_{1_i} &\leq h_i(\mathbf{x}) \leq u_{2_i} \end{aligned}$$

Onde Ω é o conjunto de todas as barras vizinhas à barra k ; $h_i(\mathbf{x})$ com $i=1, \dots, r$ é o gerador i que contém V_k , V_m , γ_k e γ_m , $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ é a admitância da linha entre as barras k e m . Observação: $Y_{km} = 0$ se, e somente, se m não estiver conectada com k . Logo, sua matriz Jacobiana terá dimensão $r \times n$ e tenderá a ser esparsa:

$$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix};$$

em que:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial V_k} = -2V_k B_{kk} + \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_k} = V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_m} = -V_k V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}. \quad (5.7)$$

Para o cálculo de $\nabla^2 \mathbf{h}(\mathbf{x})$ temos que, para cada gerador i , a hessiana é dada por:

$$\nabla^2 h_i(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} H_{1_i} & H_{2_i} \\ H_{3_i} & H_{4_i} \end{pmatrix};$$

em que:

$$H_{1_i} = \begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial V_k \partial V_k} = -2B_{kk} \\ \frac{\partial h_i}{\partial V_m \partial V_m} = 0 \\ \frac{\partial h_i}{\partial V_k \partial V_m} = \frac{\partial h_i}{\partial V_m \partial V_k} = G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) \end{cases}; \quad (5.8)$$

$$H_{2_i} = \begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_k \partial V_k} = \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_m \partial V_k} = -V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_k \partial V_m} = V_k (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_m \partial V_m} = -V_k (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.9)$$

$$H_{3_i} = \begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial V_k \partial \gamma_k} = \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial V_m \partial \gamma_k} = V_k (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial V_k \partial \gamma_m} = -V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial V_m \partial \gamma_m} = -V_k (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.10)$$

$$H_{4_i} = \begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_k \partial \gamma_k} = V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (-G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_m \partial \gamma_m} = V_k V_m (-G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_m \partial \gamma_k} = \frac{\partial h_i}{\partial \gamma_k \partial \gamma_m} = -V_k V_m (-G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}. \quad (5.11)$$

AS RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

Definimos por $t = t_1 + t_2$ tal que, t_1 é o número de equações do tipo $\Delta P_k(\mathbf{x})$ definido pelo número de barras de carga e de geradores menos a barra *slack*, $t_1 = NB - 1$, e

t_2 é o número de equações do tipo $\Delta Q_k(\mathbf{x})$, definido por número de barras de carga, $t_2 = NBC$. A equação de cada equação de igualdade é dada a seguir:

$$\begin{aligned}\Delta P_{t_1} &= P_k^{esp} - V_k^2 G_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) = 0; \\ \Delta Q_{t_2} &= Q_k^{esp} + V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) = 0; \\ g_t(\mathbf{x}) &= 0;\end{aligned}$$

Em que, Ω é o conjunto das barras vizinhas à barra k ; $g_t(\mathbf{x})$ com $t = t_1 + t_2$

$t = \begin{cases} t_1 = 1, \dots, NB - 1 \\ t_2 = 1, \dots, NBC \end{cases}$ é a equação t que contém V_k , V_m , γ_k e γ_m ; novamente,

$Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ é matriz de Admitância das linhas, as quais k conecta-se com $m \in \Omega$.

Observação: $Y_{km} = 0$ se, e somente, se m não estiver conectada com k . Logo, sua matriz Jacobiana terá dimensão $t \times n$ e tenderá a ser esparsa:

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix};$$

em que:

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial V_k} = -2V_k G_{kk} - \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial V_m} = -V_k (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_k} = V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_m} = -V_k V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial V_k} = 2V_k B_{kk} - \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial V_m} = -V_k (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \gamma} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_k} &= -V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_m} &= V_k V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases} \quad (5.15)$$

Para o cálculo de $\nabla^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla^2 \Delta P_{t_1} \cup \nabla^2 \Delta Q_{t_2}$ temos que, para cada equação t_1 o conjunto de equações a seguir:

$$\nabla^2 \Delta P_{t_1} = \begin{pmatrix} GP_{1_{t_1}} & GP_{2_{t_1}} \\ GP_{3_{t_1}} & GP_{4_{t_1}} \end{pmatrix};$$

em que:

$$GP_{1_{t_1}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial V_k \partial V_k} &= -2G_{kk} \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial V_m \partial V_m} &= 0 \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial V_k \partial V_m} = \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial V_m \partial V_k} &= -(G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.16)$$

$$GP_{2_{t_1}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_k \partial V_k} &= \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_m \partial V_k} &= -V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_k \partial V_m} &= V_k (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_m \partial V_m} &= -V_k (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.17)$$

$$GP_{3_{t_1}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial V_k \partial \gamma_k} &= \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{V_m \partial \gamma_k} &= V_k (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial V_k \partial \gamma_m} &= -V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial V_m \partial \gamma_m} &= -V_k (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases}; \quad (5.18)$$

$$GP_{4_{t_1}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_k \partial \gamma_k} & = V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_m \partial \gamma_m} & = V_k V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_m \partial \gamma_k} = \frac{\partial \Delta P_{t_1}}{\partial \gamma_k \partial \gamma_m} & = -V_k V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases} \quad (5.19)$$

Para cada equação t_2 , temos:

$$\nabla^2 \Delta Q_{t_2} = \begin{pmatrix} GQ_{1_{t_2}} & GQ_{2_{t_2}} \\ GQ_{3_{t_2}} & GQ_{4_{t_2}} \end{pmatrix};$$

em que:

$$GQ_{1_{t_2}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial V_k \partial V_k} & = 2B_{kk} \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial V_m \partial V_m} & = 0 \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial V_k \partial V_m} = \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial V_m \partial V_k} & = -(G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases} ; \quad (5.20)$$

$$GQ_{2_{t_2}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_k \partial V_k} & = -\sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_m \partial V_k} & = V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_k \partial V_m} & = -V_k (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_m \partial V_m} & = V_k (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases} ; \quad (5.21)$$

$$GQ_{3_{t_2}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial V_k \partial \gamma_k} &= - \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{V_m \partial \gamma_k} &= -V_k (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial V_k \partial \gamma_m} &= V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial V_m \partial \gamma_m} &= V_k (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases} ; \quad (5.22)$$

$$GQ_{4_{t_2}} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_k \partial \gamma_k} &= V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_m \partial \gamma_m} &= V_k V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_m \partial \gamma_k} = \frac{\partial \Delta Q_{t_2}}{\partial \gamma_k \partial \gamma_m} &= -V_k V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \end{cases} .(5.23)$$

8 ANEXO II.

8.1 Soluções ótimas. Sistema Dommel e Tinney (parte 1)

8.1.1 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$.

Barra k	$\lambda_{\Delta P}^k$
2	-0.07741851717214
3	-0.04893028234327

8.1.2 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta Q}$.

Barra k	$\lambda_{\Delta Q}^k$
3	-0.04893028234327

8.1.3 Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$.

k	$V_k (pu)$	$\gamma_k^{novo} (graus)$	$\lambda_{V_k^{\min}} (\times 10^{-13})$	$\lambda_{V_k^{\max}}$
1	1.08025381073581	0	-0.00026229128551	0.000000000000000
2	1.13340759449970	4.32612603446309	-0.00001600348533	0.000000000000000
3	1.010000000000000	-1.28156780445853	-0.45240892984114	0.24513567927483

8.1.4 Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$.

Barra k	$h_k(V^*, \gamma^*) (pu)$	$\lambda_{Q_k^{\min}} (\times 10^{-20})$	$\lambda_{Q_k^{\max}} (\times 10^{-19})$
1	0.00283215327564	0.07957142140048	0.00099257600726
2	0.01006054311049	-0.55744666498153	-0.16120365324245

8.2 Soluções ótimas. Sistema Dommel e Tinney (parte 2)

8.2.1 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$.

Barra k	$\lambda_{\Delta P}^k$
2	-0.07934482662833
3	-0.04991189949728

8.2.2 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta Q}$.

Barra k	$\lambda_{\Delta Q}^k$
3	-0.04991189949728

8.2.3 Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$.

k	$V_k (pu)$	$\gamma_k^{novo} (graus)$	$\lambda_{V_k^{\min}}$	$\lambda_{V_k^{\max}}$
1	1.07115066365717	0	-0.000000000000004	-0.000000000000010
2	1.12465901831528	4.38194970323790	-0.000000000000000	0.000000000000045
3	1.000000000000013	-1.31781757220195	0.04215589680141	0.29460354358686

8.2.4 Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}, \lambda_{Q_k^{\max}}$.

Barra k	$h_k(V^*, \gamma^*)(pu)$	$\lambda_{Q_k^{\min}} (\times 10^{-17})$	$\lambda_{Q_k^{\max}} (\times 10^{-17})$
1	0.28394370118838	0.00006875682370	0.00003030216045
2	1.01080710625228	-0.58042892402353	-0.14106806453237

8.3 Soluções ótimas. Sistema elétrico 9 barras.

8.3.1 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$

Barra k	$\lambda_{\Delta P}^k$	Barra k	$\lambda_{\Delta Q}^k$
1	0.03923469677530	1	0.000000000000475
2	0.02849627843934	2	0.00234294308295
3	0.03271055193895	3	0.00894887986435
4	-0.00804654750974	4	-0.00518964671947
5	-0.00809821292125	5	0.00169937880658
6	0.000000000000059	6	-0.000000000000534
7	0.03923469677592		
8	0.03196691167896		

8.3.2 Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}$, $\lambda_{V_k^{\max}}$.

k	$V_k (pu)$	$\gamma_k^{novo} (graus)$	$\lambda_{V_k^{\min}} (\times 10^{-35})$	$\lambda_{V_k^{\max}}$
1	1.08715291282349	3.12782284105459	-0.00346440904765	-0.000000000000000
2	1.08168948123486	0.44217911211933	-0.00894770764181	0.000000000000000
3	1.100000000000000	1.50093335592478	-0.00201029555570	0.07192881303267
4	1.05223984266455	-3.66872682500767	-0.26876402052233	-0.000000000000000
5	1.07084413683984	-3.42038477944888	-0.03886065984709	-0.000000000000000
6	1.07451911081061	-2.02809822630615	-0.01897204343973	-0.000000000000000
7	1.08288557569814	8.09215205231439	-0.00195428507593	0.000000000000000
8	1.09585204791129	3.86913256119110	-0.00263894296340	-0.000000000000000
9	1.07717411159914	0	-0.00780412127969	-0.000000000000000

8.3.3 Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}$, $\lambda_{Q_k^{\max}}$.

Barra k	$h_k(V^*, \gamma^*) (pu)$	$\lambda_{Q_k^{\min}}$	$\lambda_{Q_k^{\max}} (\times 10^{-40})$
7	-0.00327762527948	0.000000000000000	-0.33786323262316
8	-0.060000000000000	0.00903237015369	-0.05553320652727
9	0.06223837702140	0.000000000000000	0.00000013444218

8.4 Soluções ótimas. Sistema elétrico 14 barras.

8.4.1 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$

Barra k	$\lambda_{\Delta P}^k$	Barra k	$\lambda_{\Delta Q}^k$
2	-0.12553092766171	4	0.00004435434510
3	-0.10207601723600	5	-0.00120384470955
4	-0.08583244705440	7	-0.00106489092181
5	-0.08704564414193	9	-0.00234499636572
6	-0.10155090314767	10	-0.00564777142170
7	-0.10155090314767	11	-0.00465920467551
8	-0.10134205245544	12	-0.00540892228414
9	-0.10477183350879	13	-0.00870787139135
10	-0.09936588834332	14	-0.01292224084135
11	-0.10391477988076		
12	-0.10933908311672		
13	-0.12680456904630		
14	0.00004435434510		

8.4.2 Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}$, $\lambda_{V_k^{\max}}$.

k	$V_k (pu)$	$\gamma_k^{novo} (graus)$	$\lambda_{V_k^{\min}} (\times 10^{-15})$	$\lambda_{V_k^{\max}}$
1	1.100000000000040	0	-0.05117978056936	0.24073121754681
2	1.08621369411554	-0.08691739674932	-0.03949840147821	0.000000000000000
3	1.05742025702272	-0.22200588085368	-0.08575112370261	-0.000000000000000
4	1.06631026785116	-0.18029251173101	-0.05676097900049	0.000000000000000
5	1.07119753369499	-0.15323990832510	-0.04282599646801	0.000000000000000
6	1.08700218684795	-0.24818581963359	-0.13637585932007	0.000000000000000
7	1.07916129006486	-0.23335052099164	-0.10541467512186	0.000000000000000
8	1.100000000000015	-0.23317598806644	-0.12059688975200	0.00652392313908
9	1.07407002761413	-0.26075219024795	-0.16568343269029	0.000000000000000
10	1.06907740825603	-0.26354471705114	-0.26316710092503	0.000000000000000
11	1.07455295731062	-0.25813419636996	-0.23247009464599	0.000000000000000
12	1.07248203900842	-0.26302111827555	-0.31978435829366	0.000000000000000
13	1.06787187040564	-0.26459191460234	-0.42160525936572	0.000000000000000
14	1.05370837947906	-0.27995081201989	-0.94614078330038	-0.000000000000000

8.4.3 Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}$, $\lambda_{Q_k^{\max}}$.

Barra k	$h_k (V^*, \gamma^*) (pu)$	$\lambda_{Q_k^{\min}} (\times 10^{-15})$	$\lambda_{Q_k^{\max}} (\times 10^{-13})$
1	-0.23739977963178	-0.00002183589558	0.00000007645701
2	0.17667174538263	0.00079569024351	0.00007620661706
3	0.06917724119727	-0.00311864219845	0.00006401883938
6	0.22135151257055	0.01292051786844	0.17941763878466
8	0.13013102996780	-0.18564155033508	0.00048376040615

8.5 Soluções ótimas. Sistema elétrico 30 barras.

8.5.1 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$

Barra k	$\lambda_{\Delta P}^k$	Barra k	$\lambda_{\Delta Q}^k$
2	-0.07715346387774	3	-0.00548574722547
3	-0.09945582908030	4	-0.00370504612149
4	-0.14260875905301	6	-0.00226806549134
5	-0.11664578189013	7	-0.00500658278405
6	-0.13364257001407	9	-0.00114488380112
7	-0.12374203899169	10	-0.00118670044863
8	-0.11650109907687	12	-0.00170941786523
9	-0.11639514945970	14	-0.00693384663818
10	-0.11650109907687	15	-0.00914063996528
11	-0.10204916353883	16	-0.00515774876957
12	-0.10204916353883	17	-0.00503212377413
13	-0.11996215567422	18	-0.01158683885854
14	-0.12537467048835	19	-0.01175081275663
15	-0.11543170549182	20	-0.00935506317758
16	-0.11978130740297	21	-0.00798656006569
17	-0.13741619228794	22	-0.00757130706780
18	-0.14031351722084	23	-0.01322855314167
19	-0.13498461529870	24	-0.01406039332655
20	-0.12759328115769	25	-0.01689444963429
21	-0.12718558246040	26	-0.03034524132171
22	-0.13573278934717	27	-0.01235219432105
23	-0.14057963691381	28	-0.00339913375715
24	-0.13400579673693	29	-0.02072991265617
25	-0.15416277568562	30	-0.02416134197377
26	-0.12184616969754		
27	-0.12309458800390		
28	-0.15192913554521		
29	-0.17272361835353		
30	-0.00548574722547		

8.5.2 Multiplicadores Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange:

$\lambda_{V_k^{\min}}, \lambda_{V_k^{\max}}$.

k	$V_k (pu)$	$\gamma_k^{novo} (graus)$	$\lambda_{V_k^{\min}} (\times 10^{-15})$	$\lambda_{V_k^{\max}}$
1	1.100000000000001	0	-0.11616742864303	0.31385628074290
2	1.08516792656344	-4.94397264236123	-0.07560361512841	-0.000000000000003
3	1.07080385058363	-7.04531502110569	-0.06698922880408	0.000000000000000
4	1.06391933546238	-8.66971715486777	-0.06557107311416	0.000000000000000
5	1.05371619917263	-13.01810876673952	-0.08788614490817	0.000000000000000
6	1.06017725725695	-10.28424032183842	-0.06406114383381	0.000000000000000
7	1.05022794065785	-11.89041044108783	-0.07467948653380	0.000000000000000
8	1.06091161289653	-10.97949831552015	-0.06302556604216	0.000000000000000

9	1.07194446225015	-13.28442001796095	-0.05596254554032	0.00000000000000
10	1.06450346295261	-14.86408343775470	-0.07173528881747	0.00000000000000
11	1.09999999999996	-13.28442001796097	-0.04481878199360	0.00590024928140
12	1.07044213100377	-14.17844820859251	-0.09654478823961	0.00000000000000
13	1.09999999999999	-14.17844820859205	-0.09576062432674	0.01307023501731
14	1.05651206382839	-15.03309654538896	-0.12924688653647	0.00000000000000
15	1.05276454925961	-15.12329319611656	-0.13353989337797	0.00000000000000
16	1.06048417512273	-14.73565410724533	-0.10368155361051	0.00000000000000
17	1.05832720247410	-15.02864881286328	-0.09015168190910	0.00000000000000
18	1.04495536212669	-15.70485550725248	-0.14483036645570	0.00000000000000
19	1.04341926706088	-15.86454164686207	-0.13883180251415	0.00000000000000
20	1.04792192249357	-15.67040521611492	-0.11909750442340	0.00000000000000
21	1.05208512256968	-15.29107148807096	-0.09403952050387	0.00000000000000
22	1.05252801024874	-15.27736645150215	-0.09297984784030	0.00000000000000
23	1.04376316201755	-15.48188338245804	-0.14086716610572	0.00000000000000
24	1.04002113422789	-15.62458566258318	-0.11720419293987	0.00000000000000
25	1.03572930369233	-15.16184418022944	-0.07965222960917	0.00000000000000
26	1.01837788382556	-15.56647348521268	0.00263316140296	-0.00000000000000
27	1.04143949021913	-14.62501510459743	-0.06691405169677	0.00000000000000
28	1.05731751003431	-10.86136989497511	-0.06384917685500	0.00000000000000
29	1.02198374215394	-15.81152853326486	-0.02776755312358	-0.00000000000000
30	1.01072931577150	-16.66221573248171	0.14162766827435	-0.00000000000000

8.5.3 Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}$, $\lambda_{Q_k^{\max}}$.

Barra k	$h_k(V^*, \gamma^*)(pu)$	$\lambda_{Q_k^{\min}} (\times 10^{-15})$	$\lambda_{Q_k^{\max}} (\times 10^{-14})$
1	-0.26099741961131	-0.00029609359242	-0.00001415380547
2	0.27861575825534	0.00206375227300	-0.00320221191910
5	0.13715348530928	-0.00564913417779	-0.00371952530490
8	0.09632247153289	-0.00036793682580	0.00109515684419
11	0.14837063233073	-0.45915889183920	0.00086847997283
13	0.23224039925601	0.03446302191469	0.77225545569351

8.6 Soluções ótimas. Sistema elétrico 57 barras.

8.6.1 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$

Barra k	$\lambda_{\Delta P}^k$	Barra k	$\lambda_{\Delta Q}^k$
2	-0.05284658101093	4	-0.00024590794494
3	-0.06442516411088	5	-0.00078984497164
4	-0.07720478242509	7	-0.00683619208062
5	-0.07625387789687	10	-0.00695788425727
6	-0.06879250716622	11	-0.01371199816803
7	-0.04830018702689	13	-0.01323944579468
8	-0.08064246871187	14	-0.01823506141099
9	-0.09082532218486	15	-0.01224523872766
10	-0.08897895226876	16	-0.00254557141658
11	-0.08205526895762	17	-0.00429511188431
12	-0.08471344271481	18	-0.00239485075826
13	-0.08124442189991	19	-0.03133987812569
14	-0.05786648495771	20	-0.04578258178589
15	-0.06883813152863	21	-0.05034825586300
16	-0.04171693583567	22	-0.05254392038269
17	-0.06496409660399	23	-0.05427690440390
18	-0.11641331059675	24	-0.07683506910975
19	-0.13007542161569	25	-0.18283312934473
20	-0.13106525098244	26	-0.07326963442542
21	-0.13086991373806	27	-0.03851726081888
22	-0.13434624433225	28	-0.02447779204497
23	-0.16879185547086	29	-0.01326777989577
24	-0.19071375267167	30	-0.23315566001691
25	-0.16929284332304	31	-0.34040022633195
26	-0.12014216535968	32	-0.24663568043871
27	-0.09079084398067	33	-0.24903659631498
28	-0.06788556631221	34	-0.11241708923257
29	-0.24294162412259	35	-0.09773907433468
30	-0.33826819393104	36	-0.08392993503454
31	-0.23998520445083	37	-0.07453818003632
32	-0.24477887500260	38	-0.04973328071817
33	-0.21417063123524	39	-0.07507687348948
34	-0.19693539741734	40	-0.08388310904701
35	-0.17628682111608	41	-0.02718144029786
36	-0.16165139090849	42	-0.05643253794999
37	-0.12410648045324	43	-0.01733854776073
38	-0.16381481638053	44	-0.04161418476468
39	-0.17727410763968	45	-0.02043139289895
40	-0.09163515517214	46	-0.02475590496822
41	-0.14728048786571	47	-0.03776275696300
42	-0.08957449628924	48	-0.04081145518443
43	-0.10673139812757	49	-0.03307406511071

44	-0.05575701974386	50	-0.03543642848837
45	-0.08180243833897	51	-0.00743707822864
46	-0.10437398326794	52	-0.02644646663683
47	-0.11064446822660	53	-0.02904705969246
48	-0.10383691585309	54	-0.02023067783806
49	-0.12161992848070	55	-0.00656479330495
50	-0.08955414303614	56	-0.06281986439810
51	-0.12319359400197	57	-0.06894821537068
52	-0.14585925926055		
53	-0.11895994805236		
54	-0.08093258091166		
55	-0.16964673998194		
56	-0.18422406711285		
57	-0.00024590794494		

8.6.2 Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}$, $\lambda_{V_k^{\max}}$.

k	$V_k (pu)$	$\gamma_k^{novo} (graus)$	$\lambda_{V_k^{\min}}$	$\lambda_{V_k^{\max}}$
1	1.100000000000000	0	-0.000000000000000	0.53714712779574
2	1.100000000000001	-1.46690285752259	0.000000000000000	0.04444567618369
3	1.09714945085823	-5.81560879634129	0.000000000000000	-0.000000000000000
4	1.09338764260644	-6.92266020705133	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.08874518428204	-7.89468883034062	0.000000000000000	-0.000000000000000
6	1.09121598793581	-7.99083031524597	0.000000000000000	-0.000000000000000
7	1.08583220785271	-7.06210662554147	0.000000000000000	-0.000000000000000
8	1.100000000000000	-4.38475782939394	0.000000000000000	0.23645623449550
9	1.08247144216009	-8.63509704187146	0.000000000000000	-0.000000000000000
10	1.07425609672457	-10.07680675244858	0.000000000000000	-0.000000000000000
11	1.07147726167001	-9.06830748138610	0.000000000000000	0.000000000000000
12	1.09215561021279	-9.10477723012348	0.000000000000000	0.000000000000000
13	1.07448421655606	-8.67412231964722	0.000000000000000	-0.000000000000000
14	1.06903372039591	-8.28292291060577	0.000000000000000	0.000000000000000
15	1.08201286815494	-6.50690334459470	0.000000000000000	-0.000000000000000
16	1.08705924818776	-7.73781425481217	0.000000000000000	-0.000000000000000
17	1.08562769005475	-4.74809963383241	0.000000000000000	-0.000000000000000
18	1.08917220789982	-10.71568827080012	0.000000000000000	-0.000000000000000
19	1.04876752711719	-11.87588838230130	0.000000000000000	0.000000000000000
20	1.03514731257865	-11.99581808688093	0.000000000000000	0.000000000000000
21	1.02735345972137	-11.80896264022853	0.000000000000000	0.000000000000000
22	1.02650089695105	-11.73938425634903	0.000000000000000	0.000000000000000
23	1.02531442445044	-11.80329502281928	0.000000000000000	0.000000000000000
24	1.01976757842428	-12.15471797094230	0.000000000000000	0.000000000000000
25	1.00121834794368	-16.95909210201086	0.000000000000000	0.000000000000000
26	1.02112180509882	-11.85754649151788	0.000000000000000	0.000000000000000
27	1.04718471866594	-10.56451006640061	0.000000000000000	0.000000000000000
28	1.06312947414919	-9.65705068318368	0.000000000000000	0.000000000000000
29	1.07691557120103	-9.03500193527024	0.000000000000000	-0.000000000000000
30	0.98013235785295	-17.47938957792573	0.000000000000000	0.000000000000000

31	0.950000000000000	-18.10766552949030	0.25216424673739	0.000000000000000
32	0.95792391376347	-17.23003123841124	0.000000000000000	0.000000000000000
33	0.95564921705683	-17.26903626579158	0.000000000000000	0.000000000000000
34	0.98591645955340	-13.09145892583733	0.000000000000000	0.000000000000000
35	0.99206950853217	-12.85601950133744	0.000000000000000	0.000000000000000
36	1.00094007013666	-12.59168360659217	0.000000000000000	0.000000000000000
37	1.00792424810134	-12.36942396438799	0.000000000000000	0.000000000000000
38	1.02859477338438	-11.59784573989347	0.000000000000000	0.000000000000000
39	1.00653263144938	-12.41497372021057	0.000000000000000	0.000000000000000
40	0.99985402691539	-12.64899694374711	0.000000000000000	0.000000000000000
41	1.03668633645368	-12.88896761206552	0.000000000000000	0.000000000000000
42	0.99935214077719	-14.09093455373420	0.000000000000000	0.000000000000000
43	1.06054282443837	-10.19150953040132	0.000000000000000	0.000000000000000
44	1.03939100878223	-10.83669895094660	0.000000000000000	0.000000000000000
45	1.07258419733879	-8.57097921817926	0.000000000000000	0.000000000000000
46	1.05779542377704	-9.89630950426285	0.000000000000000	0.000000000000000
47	1.03854362830288	-11.24386218412568	0.000000000000000	0.000000000000000
48	1.03555799425045	-11.37815134265920	0.000000000000000	0.000000000000000
49	1.03957681182662	-11.55493475324365	0.000000000000000	0.000000000000000
50	1.03014510921127	-12.03210392947774	0.000000000000000	0.000000000000000
51	1.06471703458437	-11.17852789573202	0.000000000000000	0.000000000000000
52	1.04428054705426	-10.53638978800433	0.000000000000000	0.000000000000000
53	1.03296135398661	-11.19227501979603	0.000000000000000	0.000000000000000
54	1.04914605240632	-10.59814511952225	0.000000000000000	0.000000000000000
55	1.07429951411378	-9.68090898771862	0.000000000000000	-0.000000000000000
56	0.99233821733056	-14.42891679543506	0.000000000000000	0.000000000000000
57	0.98480557969664	-14.91398535774022	0.000000000000000	0.000000000000000

8.6.3 Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}$, $\lambda_{Q_k^{\max}}$.

Barra k	$h_k(\mathbf{V}^*, \gamma^*)(pu)$	$\lambda_{Q_k^{\min}} (\times 10^{-15})$	$\lambda_{Q_k^{\max}}$
1	-0.52977321097339	0.000000000000008	-0.000000000000000
2	-0.07995437033861	0.27397725311897	-0.000000000000000
3	0.37895396049036	-0.00000046047918	-0.000000000000000
6	0.13541814553514	-0.00000290257164	0.000000000000000
8	0.09268693862867	0.00000000003954	-0.000000000000000
9	0.090000000000001	0.00000042181147	0.00548036495231
12	0.66696692941386	-0.000000000000072	0.000000000000000

8.7 Soluções ótimas. Sistema elétrico 118 barras.

8.7.1 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$

Barra k	$\lambda_{\Delta P}^k$	Barra k	$\lambda_{\Delta Q}^k$
1	-0.09848413971501	2	-0.00155408107201
2	-0.09281644561611	3	-0.00196038412118
3	-0.08853096204530	5	-0.00166008416402
4	-0.05797138447363	7	-0.00008813992566
5	-0.05505211332404	9	0.00363913699977
6	-0.07532773975831	11	-0.00263111460150
7	-0.07885890045085	13	-0.00596457763309
8	-0.05560190468201	14	0.00082130262018
9	-0.03666589707039	16	-0.00150789824855
10	-0.01733338329758	17	0.00068129805796
11	-0.07999942338985	20	-0.00324176176552
12	-0.08239133554649	21	-0.00544413360054
13	-0.09398192534017	22	-0.00508314474348
14	-0.08916064289468	23	-0.00076712048333
15	-0.09262846105181	28	-0.00149994413693
16	-0.08483787303336	29	-0.00087001106023
17	-0.06934441466144	30	0.00013683188309
18	-0.08868273437814	33	-0.00122182768156
19	-0.09423216519060	35	0.00010575262974
20	-0.09381348446935	37	0.00148403855429
21	-0.08705897565664	38	-0.00043268515614
22	-0.07361183937922	39	-0.00220750811823
23	-0.04583032281917	41	-0.00167709260705
24	-0.05116756309877	43	0.00155583549046
25	-0.00894301973796	44	0.00231221375579
26	-0.01489083391035	45	-0.00089868669589
27	-0.08129877659682	47	0.00020570859531
28	-0.09163775390679	48	0.00233589990632
29	-0.09709623852647	50	-0.00148417700125
30	-0.06281584371989	51	-0.00549361314697
31	-0.09484022069830	52	-0.00600416538286
32	-0.08466506434113	53	-0.00479804277899
33	-0.09369606404394	57	-0.00103821939043
34	-0.08219307376782	58	-0.00337230546829
35	-0.08557530036695	60	-0.00005379732093
36	-0.08597414611558	63	0.00010070085338
37	-0.07710762289926	64	0.00090502451305
38	-0.06894881379601	67	0.00409190364703
39	-0.11614209321563	68	0.00016858879018
40	-0.12945397545682	71	0.00027115415034
41	-0.13591602499410	75	-0.00197697223634
42	-0.12379386166230	78	-0.00184897755568

43	-0.09853488828919	79	-0.00210970535002
44	-0.10238193305116	81	-0.00016600117828
45	-0.09683350145355	82	-0.00239482031323
46	-0.07242925594662	83	-0.00201179575717
47	-0.05367700729209	84	-0.00424236387877
48	-0.05611826397022	86	-0.00281686404430
49	-0.04489813857335	88	-0.00288303565094
50	-0.06593870482062	93	-0.00704459349093
51	-0.09342843634938	94	-0.00681785632467
52	-0.10322226028905	95	-0.01035342599565
53	-0.10686011351062	96	-0.00551478022066
54	-0.09659137604272	97	-0.00386613702801
55	-0.09864952864701	98	-0.00106233132253
56	-0.09779169316627	101	-0.00556554069758
57	-0.08894447976864	102	-0.00471839900918
58	-0.09879602208149	106	-0.00256829771345
59	-0.05057550299637	108	0.00007255003612
60	-0.03306653747234	109	-0.00017542626992
61	-0.02808564095534	114	-0.00105823324694
62	-0.03266268783665	115	-0.00115474612220
63	-0.04031927061357	117	-0.00399668280626
64	-0.02963411378508	118	-0.00315649967413
65	-0.01343151307321		
66	-0.00791542414414		
67	-0.02484531834721		
68	-0.00929339711360		
70	-0.06111864369560		
71	-0.06141040426806		
72	-0.06206977657869		
73	-0.07784093896745		
74	-0.06749544572001		
75	-0.08093524370797		
76	-0.03043199834108		
77	-0.03266491884415		
78	-0.02871047893937		
79	-0.00700466018867		
80	-0.00746278903771		
81	-0.02411209982743		
82	-0.01326846885110		
83	0.01127931356223		
84	0.02849542959357		
85	0.01883916078615		
86	0.02084382094539		
87	0.04334736300016		
88	0.06432918804652		
89	0.02089365045426		
90	0.02148503632787		
91	0.02878112685392		
92	0.00456444876349		
93	-0.01204022334888		

94	-0.02154954251434
95	-0.02080765313572
96	-0.01633131085419
97	-0.01771201834922
98	-0.02022695976928
99	-0.01266456461353
100	-0.00146937927592
101	0.01807963383824
102	-0.04404870681940
103	-0.06670294870682
104	-0.07634021604184
105	-0.07854673407645
106	-0.10295019666745
107	-0.08577367749517
108	-0.08917538612440
109	-0.09400756369499
110	-0.07932949616523
111	-0.12722737156832
112	-0.07214248557617
113	-0.08727242217273
114	-0.08737145764290
115	-0.01044647241319
116	-0.09479243598856
117	-0.07866835465247
118	-0.00155408107201

8.7.2 Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}$, $\lambda_{V_k^{\max}}$.

k	$V_k (pu)$	$\gamma_k^{novo} (graus)$	$\lambda_{V_k^{\min}} (\times 10^{-22})$	$\lambda_{V_k^{\max}}$
1	1.08205559462850	-16.36322228568110	0.03803906174473	0.000000000000000
2	1.08223754509908	-15.72889517087327	0.03438533287682	0.000000000000000
3	1.08366968045868	-15.50256997841165	0.03127555581379	0.000000000000000
4	1.100000000000002	-12.31444657135377	0.01364468307546	0.03202252887954
5	1.09778123122111	-11.87869358724500	0.01111747059535	0.000000000000000
6	1.09291873487372	-14.19122199551612	0.01505570312840	-0.000000000000000
7	1.09112703023887	-14.53900071734649	0.01712553647477	-0.000000000000000
8	1.08018324576425	-7.58809636001491	0.01071490784743	0.000000000000000
9	1.100000000000000	-1.09196535979406	0.00311076748083	0.18774094293407
10	1.09394021097527	5.86020636613053	0.00380581381813	-0.000000000000000
11	1.08611935422780	-14.39550001376945	0.02439818926371	-0.000000000000000
12	1.08974297817596	-14.80181395145490	0.01923695456658	-0.000000000000000
13	1.07473859814715	-15.57842505169038	0.04131630877882	0.000000000000000
14	1.08829855375613	-15.45906149330795	0.01542589501532	-0.000000000000000
15	1.086698744444681	-15.86674392772305	0.00684984638739	-0.000000000000000
16	1.08620478408642	-15.08708724609808	0.01685920045335	-0.000000000000000
17	1.09933616805920	-13.66813748804320	0.00317123129554	-0.000000000000005
18	1.08866103345162	-15.60211884948303	0.00527495309778	-0.000000000000000
19	1.08560110800413	-16.07975270612410	0.00667098726105	-0.000000000000000
20	1.07450273992356	-15.29878180785310	0.01289854993415	0.000000000000000

21	1.06990649015213	-13.96223443036021	0.01678486911916	0.00000000000000
22	1.07333351403572	-11.81151626446974	0.01272422894540	0.00000000000000
23	1.08817080284500	-7.58347959275239	0.00485195497010	-0.00000000000000
24	1.08630768222738	-7.78070552797410	0.00655378579274	-0.00000000000000
25	1.10000000000001	-1.17823657219728	0.00223387595415	0.34387803105037
26	1.06445061985397	0.40517663860953	0.02053673198427	0.00000000000000
27	1.08008116998583	-12.46568317973356	0.00912333152949	0.00000000000000
28	1.07414174145724	-13.84501058771116	0.01478121280406	0.00000000000000
29	1.07484426613074	-14.62984779710545	0.01566109681997	0.00000000000000
30	1.06818415433068	-9.45197904039393	0.01791443017663	0.00000000000000
31	1.07784108390943	-14.52887830206580	0.01315860606096	0.00000000000000
32	1.07953413868287	-12.96475578058309	0.00905183030967	0.00000000000000
33	1.08562381174706	-16.38523818347151	0.00760181727544	-0.00000000000000
34	1.09722844815565	-15.91572133746418	0.00446923701310	0.00000000000000
35	1.09292071649248	-16.26344335498180	0.00609529123877	-0.00000000000000
36	1.09292120906162	-16.26834316658493	0.00622956040396	-0.00000000000000
37	1.10000000000004	-15.50025865755339	0.00376121113823	0.07309422146779
38	1.04997414079357	-11.20906120756748	0.05448420585900	0.00000000000000
39	1.07537227482341	-18.25583723324161	0.01756790433547	0.00000000000000
40	1.07155246614381	-19.13542774590884	0.02580741051525	0.00000000000000
41	1.06487788124913	-19.49076921852340	0.03876997530788	0.00000000000000
42	1.07018304302591	-18.11346051234543	0.02273256083035	0.00000000000000
43	1.08069784505228	-15.95642926705030	0.01025951106863	0.00000000000000
44	1.06964386706757	-13.85481379723990	0.01752709243435	0.00000000000000
45	1.06272811029861	-12.25065916339138	0.02549854100910	0.00000000000000
46	1.07342703624383	-9.75943824397064	0.01291218911917	0.00000000000000
47	1.08079449558635	-7.77966956705380	0.00751254591265	0.00000000000000
48	1.08311313483025	-8.41701671364826	0.00645095331667	0.00000000000000
49	1.08476944808443	-7.48227256329288	0.00569639972718	0.00000000000000
50	1.07371795459228	-9.40632033492518	0.01097035566268	0.00000000000000
51	1.05620746504836	-11.80339649372750	0.03475829805189	0.00000000000000
52	1.05061908954094	-12.64966191420334	0.05224956272804	0.00000000000000
53	1.04979810390797	-13.53129821476150	0.05760423327773	0.00000000000000
54	1.06368817472298	-12.83245727590672	0.02245510636294	0.00000000000000
55	1.06266647161557	-13.08308420858212	0.02288725787249	0.00000000000000
56	1.06296578698120	-12.91892528748485	0.02290323339962	0.00000000000000
57	1.06487355159354	-11.78097305829577	0.01967239837717	0.00000000000000
58	1.05712054187025	-12.52936095350354	0.03320330227154	0.00000000000000
59	1.08373789218267	-9.24207207938239	0.00618084625741	0.00000000000000
60	1.08003946518155	-5.92632418442713	0.00767188373530	0.00000000000000
61	1.08213591354744	-5.17409661769470	0.00684724387031	0.00000000000000
62	1.07804781840559	-5.62009355156061	0.00847026507856	0.00000000000000
63	1.04995709220429	-6.34421840276345	0.04430758871855	0.00000000000000
64	1.05676446816024	-4.75873508507203	0.02623200805107	0.00000000000000
65	1.04991491615420	-1.77727149202025	0.02531644979876	0.00000000000000
66	1.10000000000001	-1.73290559631518	0.00202061082548	0.60534431298587
67	1.08418893631524	-4.23651704948448	0.00525334441787	0.00000000000000
68	1.04741255189165	-1.95525741789357	0.05324062759001	0.00000000000000
69	1.10000000000000	0	0.00280244568707	0.20657993395058
70	1.07709104304623	-6.56580252672315	0.01055694092608	0.00000000000000

71	1.07748356990928	-6.87455154852100	0.01148125602176	0.00000000000000
72	1.07877120561608	-7.85937935785418	0.01187811019328	0.00000000000000
73	1.07628268188719	-7.00187845150460	0.01453575977276	0.00000000000000
74	1.06784868644390	-7.55936653058910	0.02346303932926	0.00000000000000
75	1.06923206965943	-6.41810847389896	0.02017539328320	0.00000000000000
76	1.06589764066554	-7.56412922321822	0.02811692852198	0.00000000000000
77	1.08770651721124	-2.88043259173920	0.00765439113238	-0.00000000000000
78	1.08336732315746	-3.10182942591309	0.01019155587829	0.00000000000000
79	1.08483287145720	-2.78340434666396	0.00982404023951	0.00000000000000
80	1.10000000000001	-0.61202382040867	0.00458416266209	0.05925972135957
81	1.04582221472386	-1.43777199393179	0.07070495526346	0.00000000000000
82	1.08181191638983	-2.42336732919334	0.01153478056132	0.00000000000000
83	1.08523583250980	-1.47995549268801	0.00893951611905	0.00000000000000
84	1.09052999504605	0.51569467986746	0.00599241456669	-0.00000000000000
85	1.09946149658215	1.74022746611678	0.00350389674236	0.00000000000010
86	1.09171498638255	0.77332360218447	0.00480726413341	0.00000000000000
87	1.10000000000001	1.11706726170631	0.00263808232842	0.00552232793259
88	1.09174157304330	4.44148805464036	0.00349951683488	-0.00000000000000
89	1.10000000000002	7.90984657095116	0.00197324425371	0.48641081984162
90	1.08385345929475	2.58942308996025	0.00541279869998	0.00000000000000
91	1.08842218499963	2.47004509396404	0.00491016364602	-0.00000000000000
92	1.09221252839006	3.01073448112261	0.00408808716005	-0.00000000000000
93	1.08203156058742	0.59207311660823	0.00923436642664	0.00000000000000
94	1.08016292662990	-1.13869638549755	0.01355394150715	0.00000000000000
95	1.06964060932787	-1.94217181506154	0.02649436001652	0.00000000000000
96	1.07814742772918	-2.06308774704384	0.01537177681426	0.00000000000000
97	1.08489166905662	-1.65410771967446	0.01057020783968	0.00000000000000
98	1.09302520946330	-2.04086567216820	0.00793469940997	-0.00000000000000
99	1.09530655392063	-2.47179352578661	0.00764042071697	-0.00000000000000
100	1.10000000000001	-1.57372918398206	0.00669114958826	0.05461439910634
101	1.08467435488280	-0.34955682955928	0.01027179603408	0.00000000000000
102	1.08877079575653	1.80872323997886	0.00572634456045	-0.00000000000000
103	1.09148248217918	-4.65763656237526	0.00996598280469	-0.00000000000000
104	1.08296721008471	-7.18099178853072	0.01535553435577	0.00000000000000
105	1.08030226275444	-8.11826129552993	0.01934207291672	0.00000000000000
106	1.07289757825011	-8.26281793493983	0.03524305581218	0.00000000000000
107	1.06667773550997	-10.52584441847307	0.07955282518445	0.00000000000000
108	1.07689652614056	-9.00272092833393	0.02584604183920	0.00000000000000
109	1.07567379676805	-9.33509482921358	0.02891448583507	0.00000000000000
110	1.07559468777155	-9.93288015135924	0.03144799912011	0.00000000000000
111	1.08319915377813	-8.60514653817349	0.02581121752355	0.00000000000000
112	1.06054099068425	-12.15205247809189	0.12472515646248	0.00000000000000
113	1.09529898655310	-13.63730646749058	0.00433523207490	0.00000000000000
114	1.07545131161489	-13.20645496663807	0.01206132548520	0.00000000000000
115	1.07511335459008	-13.20861725901872	0.01237484756674	0.00000000000000
116	1.04579773183569	-2.34048983629037	0.06427447190877	0.00000000000000
117	1.07563970387526	-16.07521351238385	0.05362358156268	0.00000000000000
118	1.06194042714573	-7.32800956405459	0.03427338483912	0.00000000000000

8.7.3 Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}$, $\lambda_{Q_k^{\max}}$.

Barra k	$h_k(V^*, \gamma^*)(pu)$	$\lambda_{Q_k^{\min}}$	$\lambda_{Q_k^{\max}}$
1	0.09452465944361	0.000000000000000	0.000000000000000
4	0.56432228736157	-0.000000000000000	0.000000000000000
6	0.11756591896476	0.000000000000000	-0.000000000000000
8	-0.79294318712120	0.000000000000000	-0.000000000000000
10	-1.02763757565508	-0.000000000000000	-0.000000000000000
12	0.32566134232008	0.000000000000000	-0.000000000000000
15	-0.05564030692009	-0.000000000000000	0.000000000000000
18	-0.01315122236511	0.000000000000000	0.000000000000000
19	0.00027055038832	-0.000000000000000	0.000000000000000
24	-0.07266303238910	0.000000000000000	0.000000000000000
25	-0.46999999999985	0.00407967026079	-0.000000000000000
26	-0.30749784819490	-0.000000000000000	0.000000000000000
27	0.14191991301422	0.000000000000000	0.000000000000000
31	0.00057491858378	0.000000000000000	0.000000000000000
32	-0.00405381899761	0.000000000000000	0.000000000000000
34	-0.07999999999968	0.00166784021753	-0.000000000000000
36	-0.07999999999939	0.00017400805440	0.000000000000000
40	0.08043343247833	0.000000000000000	0.000000000000000
42	0.10729968406366	0.000000000000000	0.000000000000000
46	-0.16604335982780	0.000000000000000	0.000000000000000
49	-0.10870287305269	0.000000000000000	-0.000000000000000
54	0.03403698368519	0.000000000000000	0.000000000000000
55	-0.01270144021326	0.000000000000000	0.000000000000000
56	0.00875291509848	0.000000000000000	0.000000000000000
59	-0.06250394531499	0.000000000000000	0.000000000000000
61	0.24845942085528	0.000000000000000	-0.000000000000000
62	-0.19999999999922	0.00027909734759	0.000000000000000
65	-0.66999999999749	0.00113036715355	0.000000000000000
66	-0.66999999999986	0.00957648416707	0.000000000000000
69	-1.04059301669826	0.000000000000000	-0.000000000000000
70	-0.04952869405201	-0.000000000000000	0.000000000000000
72	-0.05730330608525	0.000000000000000	0.000000000000000
73	-0.02378392933345	0.000000000000000	0.000000000000000
74	-0.05999999999547	0.00006848821332	0.000000000000000
76	0.12228074736242	0.000000000000000	0.000000000000000
77	0.28035141772197	0.000000000000000	0.000000000000000
80	-0.39608764437208	-0.000000000000000	0.000000000000000
85	0.23000000000009	-0.000000000000000	0.00213108504121
87	0.01166924045626	0.000000000000000	0.000000000000000
89	-0.57420296361208	0.000000000000000	-0.000000000000000
90	0.05434519123279	0.000000000000000	0.000000000000000
91	0.02588264112548	0.000000000000000	0.000000000000000
92	0.08999999999985	0.000000000000000	0.00361854074524
99	-0.03619363335427	0.000000000000000	-0.000000000000000
100	0.33209194466178	0.000000000000000	0.000000000000000
103	0.01976219147400	-0.000000000000000	-0.000000000000000

104	-0.00788005950874	-0.000000000000000	0.000000000000000
105	-0.07999999999950	0.00060892434817	0.000000000000000
107	-0.08239741650605	0.000000000000000	0.000000000000000
110	-0.04574083181400	0.000000000000000	0.000000000000000
111	-0.00338931411972	0.000000000000000	0.000000000000000
112	-0.00851631749459	0.000000000000000	0.000000000000000
113	-0.07893380173697	0.000000000000000	0.000000000000000
116	-0.34608185143219	0.000000000000000	0.000000000000000

8.8 Soluções ótimas. Sistema elétrico 162 barras.

8.8.1 Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{\Delta P}$ e $\lambda_{\Delta Q}$

Barra k	$\lambda_{\Delta P}^k$	Barra k	$\lambda_{\Delta Q}^k$
1	0.02001397965336	1	0.00000001356674
2	0.00576372055006	2	0.00652091370700
3	-0.00394294604916	3	-0.00522822635051
4	-0.01060525212184	4	0.00086219771848
5	0.02260416711341	5	-0.00000000781491
6	0.02001397842159	7	0.00494248268347
7	0.00423260904109	8	0.00714938084666
8	0.00135038748422	9	0.00268319790558
9	0.01307865711204	10	0.01380886398927
10	-0.02099138385425	11	0.01332794269466
11	-0.00538122151237	12	0.01100164543346
12	0.00179854095063	13	0.01295253469878
13	0.00798268756726	14	0.00081493476999
14	0.01199775024319	15	0.02671006323503
15	0.01982855932377	16	0.03714416758696
16	0.02327423205034	17	0.03044084105900
17	0.02684101596544	18	0.05661615754448
18	0.00607774074358	19	0.01218402744003
19	-0.02813016502958	20	0.00579661989173
20	-0.00389307553793	21	0.01387505105103
21	0.02155924043743	22	0.01576297996981
22	-0.01229515024597	23	0.00921230295620
23	-0.00939960228961	24	0.01241429350489
24	0.00958294990246	25	0.01147575699155
25	0.00994439932598	26	0.00000003340978
26	0.03352803208042	27	0.01978207858824
27	0.00927825131178	28	0.01385312318974
28	-0.01390387979654	29	0.02210406446079
29	-0.01862548706537	30	0.03938248806312
30	-0.02530168770918	31	0.01989158309845
31	-0.00888327896546	32	0.03704233446553
32	-0.03393589702690	33	0.02756800144705
33	-0.05102838039442	34	0.01428193281770
34	-0.05759861015203	35	0.01940759740972
35	-0.06111343582504	36	0.02336946355892
36	-0.05186573844438	37	0.02696161579224
37	0.00598564148598	38	0.01344177634335
38	-0.02284874346732	39	0.01126204363295
39	-0.00571672826526	40	0.01060929009034
40	-0.04800944762687	41	0.00684266454369
41	-0.03376500291274	42	0.00441234752345
42	-0.00419566925910	43	0.00395089249919

43	-0.01381551402417	44	0.00024222695991
44	-0.01507949806161	45	0.01003452003487
45	-0.01225315564977	46	0.01143843624976
46	-0.03556849983480	47	0.00662651842467
47	-0.06383683037359	48	0.00679397340181
48	-0.05989676823268	49	0.00601294287402
49	-0.06682712863242	50	0.00396708135546
50	-0.05815754165309	51	-0.00009706484053
51	-0.05089573724699	52	-0.00000010659978
52	-0.03232164928955	53	0.00754694970105
53	-0.00303475237199	54	0.00918384875380
54	-0.02614635503177	55	0.00650712020477
55	-0.00130883898818	56	0.01281879716025
56	-0.03905644963703	57	0.01052241374148
57	-0.03146915159620	58	0.02313826884685
58	0.00397539049441	59	0.01567888954952
59	-0.01236634190660	60	0.02410925300636
60	-0.01446414221106	61	0.02192443237757
61	-0.00866616482888	62	0.03710862177112
62	0.03183878077306	63	0.02406355815791
63	-0.00131816466243	64	0.02116765328590
64	0.00540817871001	65	0.02446010020092
65	0.01939687587826	66	0.01471145031690
66	-0.00426971616140	67	0.01646306350425
67	-0.04396686477885	68	0.01080546324650
68	-0.03334748668699	69	0.00843908990221
69	-0.02496991886634	70	-0.00000007531750
70	0.03730952971390	71	-0.00825828291723
71	-0.01244796892771	72	-0.00154388396410
72	0.01175729268657	74	0.00270683309321
73	0.03730953062452	75	0.00055044798352
74	-0.01091425833582	77	0.00969537384743
75	0.02007424080752	78	0.00736953896788
76	0.03352803529614	79	0.00527663181747
77	-0.03766015410494	80	0.00961496863654
78	-0.02189166917138	81	0.01069336233563
79	-0.01183413682343	82	0.00912815961468
80	-0.02984690414331	83	0.00794671070964
81	-0.05598959269717	84	0.00358447160950
82	-0.04740681656454	85	-0.00663906014674
83	-0.04054940112144	86	-0.00119772059720
84	-0.02616358489190	87	0.00323910654052
85	-0.07197496758517	88	-0.00039043844202
86	-0.09567538650562	89	-0.00005085886263
87	-0.07944151874318	90	-0.00669875171599
88	-0.08681113933010	91	-0.00261160361351
89	-0.09744936570374	92	-0.00296853008819
90	-0.15096903365943	93	-0.00000004088232
91	-0.01235935696932	94	0.00191556490854
92	-0.02225180247424	95	0.00000057572371

93	0.00000000255978	96	0.00000013574072
94	-0.00892598780578	97	0.00350358062752
95	-0.00767944459543	98	-0.00008074122380
96	-0.09332857213346	100	0.00449355266197
97	-0.01668777619060	102	-0.00145815026214
98	-0.00107224403664	103	0.00062770089872
99	-0.00767941138931	104	0.01119914746601
100	-0.09500215379859	105	0.01669108013354
101	-0.09332855122323	106	-0.00074246192027
102	-0.02061225020004	107	-0.00059315777730
103	-0.00257597833349	109	0.00304158607006
104	-0.06763594331973	110	-0.00103772253316
105	-0.02923605884731	111	-0.00458771267466
106	-0.07438807018463	112	-0.00000009505899
107	-0.08308812329635	113	0.00050632872441
109	0.01877329954295	115	-0.00031724817000
110	-0.00904927821458	116	0.00078715638789
111	0.01615447934803	117	-0.00093461860250
112	0.01191503532264	119	0.00082216819536
113	0.01895850535092	120	-0.00048377870654
114	-0.01226217904199	122	0.00013748270473
115	-0.01792570209393	123	0.00355880495502
116	-0.02048759131223	124	0.00105153231015
117	-0.03232165671720	126	0.02397167317178
118	-0.01685768547914	127	0.02527958770779
119	0.01465992501627	128	-0.00040247259080
120	0.01615447250255	129	-0.00048185773378
121	-0.09522142976200	132	-0.00089814138860
122	-0.09483091842447	133	0.00067723293003
123	-0.00013315930407	134	-0.00013882915011
124	0.00823098704268	135	-0.00067489459995
125	0.01859509257080	136	-0.00290063915453
126	0.01150838051410	137	-0.00155447295749
127	0.01476478416998	138	-0.00325082421422
128	0.01460093233171	139	-0.00356252855464
129	0.02324312003441	140	-0.00196799326076
130	0.02260416475493	141	-0.00403171873313
131	0.01371666376454	142	0.00467398942966
132	0.01229919152498	143	-0.00632072982711
133	0.01248392482591	144	-0.00501789061792
134	0.01091484238942	145	-0.00650665340875
135	0.00637809035379	146	-0.00721891148873
136	0.00999279520249	147	-0.00138556930526
137	0.02044533097264	148	0.00080374400665
138	0.01122080225830	149	-0.00012649613332
139	0.01065922275157	150	-0.00109192427793
140	-0.01979571096491	151	0.00052532389189
141	-0.05589663077373	152	0.00018131971676
142	-0.05661794698263	153	0.00020250650373
143	-0.02112960669245	154	-0.00260610458104

144	-0.00906661378686	155	-0.00286551432870
145	-0.05027873333871	156	-0.00180382460978
146	-0.02474646179523	157	0.00513222169107
147	-0.01785798710342	158	0.00008230710011
148	0.03669387690038	159	-0.00163933691783
149	0.03441862035591	160	-0.00242586855906
150	0.02176599473594	161	0.00164057146388
151	0.02530354989575	162	0.00309160707173
152	0.03876343951665		
153	-0.00477537873926		
154	0.00892210431763		
155	0.00022389419369		
156	-0.00274478947920		
157	-0.01491592631304		
158	-0.01319033092455		
159	-0.00950601485044		
160	0.01453706050948		
161	0.00840337349820		
162	0.00000001356674		

8.8.2 Mag. De tensões, ângulos e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{V_k^{\min}}$, $\lambda_{V_k^{\max}}$.

k	$V_k (pu)$	$\gamma_k^{novo} (graus)$	$\lambda_{V_k^{\min}} (\times 10^{-41})$	$\lambda_{V_k^{\max}}$
1	1.08592882559550	1.57333454440048	0.000000000000007	0.000000000000000
2	1.08235277756829	-2.64648312130506	0.000000000000008	0.000000000000000
3	1.05594311480533	-4.87079418579550	0.00000000001686	-0.000000000000000
4	1.07571931820726	-6.02991027190322	0.000000000000019	-0.000000000000000
5	1.08878602000185	2.30167518323406	0.000000000000004	0.000000000000000
6	1.04268426102745	7.20340951834847	0.00000000032667	-0.000000000000000
7	1.07772138759183	-2.98813723395827	0.000000000000021	0.000000000000000
8	1.09608731718621	-6.04472692487059	0.000000000000000	-0.000000000000000
9	1.08205908272374	-0.62702905601726	0.000000000000008	0.000000000000000
10	1.06914710717822	-7.62027923459314	0.000000000000008	-0.000000000000000
11	1.07522626581003	-4.28649824780291	0.000000000000000	0.000000000000000
12	1.100000000000002	-5.90892911158721	0.000000000000000	0.10910735922268
13	1.08230468852979	-3.28944807918137	0.000000000000004	0.000000000000000
14	1.08760887645423	-3.56826052689182	0.000000000000003	0.000000000000000
15	1.09620477974075	2.01976979816562	-0.000000000000000	-0.000000000000000
16	1.07830132796711	-2.39878744620641	0.000000000000001	0.000000000000000
17	1.06708931305676	-1.69982263562456	0.000000000000034	-0.000000000000000
18	1.099999999999999	-6.11918475978100	-0.000000000000000	0.99872910001421
19	1.04737608938068	-10.02097583429656	0.00000000004065	0.000000000000000
20	1.05031616090314	-5.00574487731104	0.00000000000354	0.000000000000000
21	1.06137488994661	-3.11674774056398	0.00000000000164	-0.000000000000000
22	1.07902432630819	-9.63413407282003	0.000000000000002	0.000000000000000
23	1.05729544997236	-6.96060411827309	0.00000000000143	-0.000000000000000
24	1.07451413293816	-5.61797646988044	0.000000000000001	-0.000000000000000
25	1.06083775520010	-2.12577965085549	0.000000000000064	-0.000000000000000
26	1.07411490366687	5.11081965025919	0.000000000000000	-0.000000000000000

27	1.06204352450534	-3.07441609607670	0.000000000000066	-0.000000000000000
28	1.05577599578678	-8.12963586947080	0.000000000000225	-0.000000000000000
29	1.05612054648099	-9.74989557070781	0.000000000000245	-0.000000000000000
30	1.06636720266303	-11.48499187734187	0.000000000000031	-0.000000000000000
31	1.05734137615461	-8.97279127507742	0.000000000000188	-0.000000000000000
32	1.07094867468265	-12.65756072080388	0.000000000000011	-0.000000000000000
33	1.06192561524255	-14.39262931543796	0.000000000000105	-0.000000000000000
34	1.05537626401742	-14.39937318856697	0.000000000000540	-0.000000000000000
35	1.04759514550012	-15.72946624104214	0.0000000000002952	0.000000000000000
36	1.06078031189960	-14.49974249441356	0.000000000000124	-0.000000000000000
37	1.04187841283735	-3.23924893763135	0.0000000000009250	0.000000000000000
38	1.06252159267205	-10.12513732248064	0.000000000000163	-0.000000000000000
39	1.02736116743180	-5.53891410605323	0.000000000331342	0.000000000000000
40	1.04841041302430	-13.65472551009819	0.00000000003145	0.000000000000000
41	1.04731302258867	-11.99503142913403	0.00000000004737	0.000000000000000
42	1.03508373872783	-5.29081526285870	0.000000000074115	0.000000000000000
43	1.05567547572596	-7.78825393467059	0.00000000000794	-0.000000000000000
44	1.04879988589820	-8.27017315168487	0.00000000003765	0.000000000000000
45	1.06346170423827	-8.19238721171279	0.000000000000032	-0.000000000000000
46	1.07519448234054	-10.61207975916894	0.000000000000002	0.000000000000000
47	1.05934103073593	-13.07613312316923	0.000000000000240	-0.000000000000000
48	1.06281399628285	-12.13557537587275	0.000000000000231	-0.000000000000000
49	1.05711674549490	-13.35840779707449	0.000000000000386	-0.000000000000000
50	1.05699306957884	-11.14556290432584	0.00000000001091	-0.000000000000000
51	1.05447488328626	-10.02013447608340	0.000000000002218	-0.000000000000000
52	1.06960657076575	-11.02029620790025	0.000000000000047	-0.000000000000000
53	1.06608741101319	-3.26970978859947	0.000000000000007	-0.000000000000000
54	1.05788127300577	-9.66541597496695	0.000000000000119	-0.000000000000000
55	1.06599462830486	-3.00473642589500	0.000000000000006	-0.000000000000000
56	1.05962827213983	-12.04075552948184	0.000000000000105	-0.000000000000000
57	1.06572097536200	-9.37651808880850	0.000000000000017	-0.000000000000000
58	1.08763852862675	-1.59057009568886	-0.000000000000000	0.000000000000000
59	1.06311215326508	-5.31827533161329	0.000000000000035	-0.000000000000000
60	1.07477941537500	-6.15798498754096	0.000000000000002	-0.000000000000000
61	1.06418309119027	-3.94500417705508	0.000000000000034	-0.000000000000000
62	1.100000000000004	7.26749207625883	-0.000000000000000	0.92060979932142
63	1.06912986107508	-2.50497406233121	0.000000000000011	-0.000000000000000
64	1.09373921922642	-1.74980344806510	-0.000000000000000	-0.000000000000000
65	1.07440042237331	1.34707791512020	0.000000000000003	-0.000000000000000
66	1.07673131191959	-3.66458484228308	0.000000000000000	0.000000000000000
67	1.06560476759751	-13.19926207521144	0.000000000000034	-0.000000000000000
68	1.07551587488520	-11.87337673385012	0.000000000000003	0.000000000000000
69	1.08024295716447	-10.69749000550688	0.000000000000000	0.000000000000000
70	1.08547708624462	3.16276747171360	-0.000000000000001	0.000000000000000
71	1.05748654858811	-4.23535730679236	0.000000000000046	-0.000000000000000
72	1.07545959137426	-3.33952078616462	0.000000000000039	-0.000000000000000
73	1.06484494062164	7.70630826303142	-0.000000000000010	-0.000000000000000
74	1.06655788711928	-5.88910377761411	0.000000000000046	-0.000000000000000
75	1.08239643150576	1.48064967448395	0.000000000000007	0.000000000000000
76	1.02445987401286	9.80069891687095	0.00000000121030	0.000000000000000

77	1.07069319003518	-12.11671859520224	0.00000000000014	-0.00000000000000
78	1.08284127032786	-10.06842642598766	-0.00000000000000	0.00000000000000
79	1.08968601864295	-8.24044873478079	-0.00000000000000	0.00000000000000
80	1.07424674140808	-10.14753679967177	0.00000000000002	-0.00000000000000
81	1.04968438544368	-17.67803649788685	0.00000000002643	0.00000000000000
82	1.04537181962903	-13.64028570004605	0.00000000006332	0.00000000000000
83	1.04645985483989	-12.82966011813820	0.00000000005330	0.00000000000000
84	1.03615183417171	-9.79859829208129	0.00000000065520	0.00000000000000
85	1.03783067652570	-12.54022782273371	0.00000000012169	0.00000000000000
86	1.03392422528125	-16.06692827144602	0.00000000049865	0.00000000000000
87	1.04714953934895	-14.74829173771232	0.00000000003123	0.00000000000000
88	1.04158958522848	-15.91096896338491	0.00000000017357	0.00000000000000
89	1.05476028964359	-17.16961016807050	0.00000000000479	-0.00000000000000
90	1.01980175222664	-19.37994147752223	0.00000001430357	0.00000000000000
91	1.04150356265221	-8.63390088060013	0.00000000022314	0.00000000000000
92	1.03729020205437	-9.52836959167300	0.00000000051199	0.00000000000000
93	1.03492752189742	-4.91537218571059	0.00000000119259	0.00000000000000
94	1.06751068435320	-8.95519974156275	0.00000000000061	-0.00000000000000
95	1.06275461935568	-8.64321716820177	0.00000000000229	-0.00000000000000
96	1.03394390608250	-15.99777891449920	0.00000000092076	0.00000000000000
97	1.06706769308056	-9.29220855436174	0.00000000000070	-0.00000000000000
98	1.06015804371771	-7.43733583692222	0.00000000000495	-0.00000000000000
99	1.06065016193744	-3.94532597795086	0.00000000000463	-0.00000000000000
100	1.03170222989069	-16.85197874733257	0.00000000122113	0.00000000000000
101	1.00587847531238	-11.19680302980957	0.00000052444953	0.00000000000000
102	1.04203348213922	-9.06749102120498	0.00000000017136	0.00000000000000
103	1.05895593972953	-6.89072526639887	0.00000000000394	-0.00000000000000
104	1.04647250562606	-15.88613655405384	0.00000000004019	0.00000000000000
105	1.07188524205833	-10.68418022974510	0.00000000000021	-0.00000000000000
106	1.04790300457504	-14.34941651230956	0.00000000005001	0.00000000000000
107	1.04296939893996	-15.19577238663192	0.00000000013972	0.00000000000000
108	0.97430044681083	0	0.11831756261307	0.00000000000000
109	1.05508112385318	-5.36802772318987	0.00000000000945	-0.00000000000000
110	1.08829103519264	-2.22986564087590	0.00000000000002	0.00000000000000
111	1.06708195768163	-6.17743620474793	0.00000000000241	-0.00000000000000
112	1.08639980488116	0.01380871849075	0.00000000000003	0.00000000000000
113	1.08437499199171	-3.49508139154665	0.00000000000006	0.00000000000000
114	1.06614382973661	2.94303668282153	0.00000000005488	-0.00000000000000
115	1.07446622820285	-8.09250934481286	0.00000000000023	-0.00000000000000
116	1.08071181009446	-9.21252129140215	0.00000000000003	0.00000000000000
117	1.07097322008913	-9.80284450484979	0.00000000000045	-0.00000000000000
118	1.04325019659710	-6.19731895856467	0.00000000034782	0.00000000000000
119	1.06482382904681	-7.38790533607977	0.00000000000153	-0.00000000000000
120	1.08153615667058	-0.28761464387028	0.00000000000012	0.00000000000000
121	1.06042916849952	6.17666833629567	0.00000000001380	-0.00000000000000
122	1.04158574515128	-16.94555351154276	0.00000000018356	0.00000000000000
123	1.05281483488550	-17.26449876542768	0.00000000001520	-0.00000000000000
124	1.05311534253179	-3.52875134054558	0.00000000001406	-0.00000000000000
125	1.06970212890184	-2.02410542176690	0.00000000000017	-0.00000000000000
126	1.07320913452714	0.28349747062356	0.00000000000005	-0.00000000000000

127	1.04278408267709	-2.32983439496681	0.00000000007474	0.00000000000000
128	1.08024814286256	-0.19202598563332	0.00000000000014	0.00000000000000
129	1.08200225818471	-0.39573747209301	0.00000000000011	0.00000000000000
130	1.07178522552624	7.04600229730577	0.00000000000171	-0.00000000000000
131	1.06994029143151	5.98527832586996	0.00000000000205	-0.00000000000000
132	1.07871869744648	-2.95925262504622	0.00000000000021	0.00000000000000
133	1.09687728981226	-4.60200210375196	0.00000000000000	0.00000000000000
134	1.08279911281762	-3.41365083311202	0.00000000000009	0.00000000000000
135	1.09383077246219	-4.64163038253898	0.00000000000000	-0.00000000000000
136	1.08747394739964	-4.87932000504877	0.00000000000003	0.00000000000000
137	1.09098230277763	-4.84450438503758	0.00000000000001	0.00000000000000
138	1.09298453000618	-3.78785054916294	0.00000000000001	-0.00000000000000
139	1.08840504555111	-4.47883575496749	0.00000000000002	0.00000000000000
140	1.09048228237453	-4.77726374143404	0.00000000000001	0.00000000000000
141	1.06579044551757	-6.16529723284036	0.00000000000312	-0.00000000000000
142	1.09580960242461	-12.13640609350357	-0.00000000000000	-0.00000000000000
143	1.07359842471126	-11.04627483543280	0.00000000000057	-0.00000000000000
144	1.08768053994661	-8.15679439391379	0.00000000000002	0.00000000000000
145	1.08314201073020	-6.58376753728635	0.00000000000008	0.00000000000000
146	1.07778426255079	-11.45217040224366	0.00000000000022	0.00000000000000
147	1.06750791972436	-10.72339952638744	0.00000000000096	-0.00000000000000
148	1.07054256935095	-11.64979824531676	0.00000000000045	-0.00000000000000
149	1.08451053493661	3.00945116226112	-0.00000000000001	0.00000000000000
150	1.08259723469526	2.41883410514936	-0.00000000000001	0.00000000000000
151	1.07327673686507	0.34177114237903	-0.00000000000002	-0.00000000000000
152	1.08235354959909	0.27050505989750	-0.00000000000001	0.00000000000000
153	1.07936133061518	1.18209519158264	-0.00000000000001	0.00000000000000
154	1.04462139331190	-4.44050621441763	0.00000000000972	0.00000000000000
155	1.05268977835126	-2.81745833570100	0.00000000000125	0.00000000000000
156	1.04783308884175	-4.16498351499337	0.00000000000466	0.00000000000000
157	1.05076944014504	-4.87839040967946	0.00000000000305	0.00000000000000
158	1.03953235180005	-5.68694995212695	0.00000000003645	0.00000000000000
159	1.03957738466820	-5.52616982939613	0.00000000003423	0.00000000000000
160	1.04166772035697	-5.02507142467300	0.00000000001990	0.00000000000000
161	1.06949213789800	-0.92421575422791	-0.00000000000001	-0.00000000000000
162	1.06746872920424	-1.71967354011379	0.00000000000002	-0.00000000000000

8.8.3 Controle de Reativo e Multiplicadores de Lagrange: $\lambda_{Q_k^{\min}}$, $\lambda_{Q_k^{\max}}$.

Barra k	$h_k(\mathbf{V}^*, \gamma^*)(pu)$	$\lambda_{Q_k^{\min}} (\times 10^{-58})$	$\lambda_{Q_k^{\max}}$
6	1.20060836402746	-0.00000000000000	-0.00000000000000
73	1.30791306965703	0.00000000002840	-0.00000000000000
76	-0.61029498876009	0.00000170366989	0.00000000000000
99	0.49419310713228	0.00000000030066	0.00000000000000
101	0.05056535642872	0.01659713990076	-0.00000000000000
108	-0.47066621196409	-0.00000000000000	0.00000000000000
114	0.32999999999997	-0.94307069165131	0.00100840001257
118	0.42680286041525	-0.00000000274749	-0.00000000000000
121	1.76613313299801	-0.00000000000000	0.00000000000000

125	-0.19322714719379	0.0000000000000000	0.0000000000000000
130	0.83996891237823	0.0000000000000000	0.0000000000000000
131	0.82571753224673	0.0000000000000000	0.0000000000000000

9 ANEXO III

Banco de dados do sistema elétrico de potência de 9 barras em formato IEEE

```

21/08/2008 UW ARCHIVE      100.0 Fouad 3 Generators Test Case
BUS DATA FOLLOWS          9 ITEMS
1 Bus 1  HV 1 1 0 1.026 3.7 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0
2 Bus 2  HV 1 1 0 1.016 0.7 100.0 35.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0
3 Bus 3  HV 1 1 0 1.032 2.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0
4 Bus 4  HV 1 1 0 0.996 -4.0 125.0 50.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0
5 Bus 5  HV 1 1 0 1.013 -3.7 90.0 30.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0
6 Bus 6  HV 1 1 0 1.026 -2.2 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0
7 Bus 7  HV 1 1 2 1.025 9.3 0.0 0.0 163.0 6.7 0.0 0.0 40.0 -6.0 0.0 0.0 0
8 Bus 8  HV 1 1 2 1.025 4.7 0.0 0.0 85.0 -10.8 0.0 0.0 40.0 -6.0 0.0 0.0 0
9 Bus 9  HV 1 1 3 1.040 0.0 0.0 0.0 71.6 27.0 0.0 0.0 40.0 -6.0 0.0 0.0 0
-999
BRANCH DATA FOLLOWS      9 ITEMS
1 2 1 1 1 0 0.00850 0.07200 0.1490 0 0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1 4 1 1 1 0 0.03200 0.16100 0.3060 0 0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1 7 1 1 1 0 0.0 0.06250 0.0 0 0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
2 3 1 1 1 0 0.01190 0.10080 0.2090 0 0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
3 5 1 1 1 0 0.03900 0.17000 0.3580 0 0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
3 8 1 1 1 0 0.0 0.05860 0.0 0 0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
4 6 1 1 1 0 0.01000 0.08500 0.1760 0 0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
5 6 1 1 1 0 0.01700 0.09200 0.1580 0 0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
6 9 1 1 1 0 0.0 0.05760 0.0 0 0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
-999
LOSS ZONES FOLLOWS      0 ITEMS
-99
INTERCHANGE DATA FOLLOWS 0 ITEMS
-9
TIE LINES FOLLOWS      0 ITEMS
-999
END OF DATA

```