BIBLIOTECA DIGITAL DE TESES E DISSERTAÇÕES
UNESP

RESSALVA

Alertamos para a qualidade do PDF, enviado pelo autor no arquivo original.

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

POLINÔMIOS ALGÉBRICOS E TRIGONOMÉTRICOS COM ZEROS REAIS

Vanessa Avansini Botta

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 077

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445

Polinômios Algébricos e Trigonométricos com Zeros Reais

Vanessa Avansini Botta

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade

São José do Rio Preto

24 de fevereiro de 2003

Aos meus pais, Celso e Cecilia

à minha irmã, Silvia

ao meu amor, Fabio

Dedico

Agradecimentos

À Prof. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade, pela orientação deste trabalho, dedicação e paciência que sempre teve comigo, pela amizade e companheirismo.

Ao Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov, por ser atencioso comigo e por contribuir em minha formação acadêmica.

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga e à Prof. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, pela disposição e paciência nos momentos em que precisei.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho.

A todos os amigos da pós-graduação.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram.

Ao Fabio, pelo carinho, atenção e paciência.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre polinômios algébricos e trigonométricos que possuem somente zeros reais. O Teorema de Hermite nos dá condições necessárias e suficientes para que isto aconteça. São discutidas questões relacionadas à localização dos zeros, onde a Regra de Sinais de Descartes teve grande importância. Além disso, alguns teoremas clássicos sobre zeros de polinômios algébricos e trigonométricos são apresentados.

Palavras-chave: polinômios algébricos e trigonométricos, zeros reais, Regra de Sinais de Descartes.

Abstract

The main purpose of this work is to study algebraic and trigonometric polynomials that have only real zeros. The Hermite Theorem gives necessary and sufficient conditions for this to be true. Questions concerning the locations of the zeros are discussed, where the Descarte's Rule of Signs is of great importance. Furthermore, some classical theorems concerning zeros of algebraic and trigonometric polynomials are presented.

Keywords: algebraic and trigonometric polynomials, real zeros, Descarte's Rule of Signs.

Sumário

Introdução **1**

1 Resultados Preliminares **3**

1.1 Mudanças de Sinal de Seqüências 3

1.2 Polinômios Algébricos e Trigonométricos 6

1.3 Localização de Zeros de Funções 9

1.3.1 Zeros e Mudanças de Sinal de Funções 9

1.3.2 Zeros e Mudanças de Sinal da Derivada 11

1.3.3 Aplicações do Teorema de Rolle 16

2 Resultados Clássicos sobre Zeros de Polinômios Algébricos e Trigonométricos **25**

2.1 Limitantes para as Raízes 25

2.2 Regra de Sinais de Descartes 36

2.2.1 Aplicações da Regra de Sinais de Descartes 46

2.3 Zeros de Polinômios Trigonométricos 51

3 Outros Resultados sobre Zeros de Polinômios Algébricos **55**

3.1 Polinômios com Zeros Reais 55

3.2 Seqüências de Polinômios que satisfazem à Regra de Sinais de Descartes 61

Referências Bibliográficas **77**

Introdução

O comportamento dos zeros dos polinômios algébricos e trigonométricos é uma das subáreas clássicas da Análise. Várias celebridades como Gauss, Cauchy, Hermite, Jensen, Dieudonné, Pólya e Obrechkoff contribuíram nesta área. Na teoria das funções inteiras da classe de Laguerre-Pólya, existem vários problemas sobre a localização dos zeros dos polinômios algébricos que ainda estão em aberto. Um dos mais importantes está relacionado aos polinômios que possuem somente zeros reais, pois a solução deste problema fornecerá uma caracterização das funções inteiras da classe de Laguerre-Pólya que são representadas por

$$\varphi(x) = cx^m e^{-\alpha x^2+\beta x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{x_k}\right) e^{-\frac{x}{x_k}},$$

onde $c, \beta, x_k \in I\!R$, $\alpha \geq 0$, m é um número inteiro não negativo e $\sum x_k^{-2} < \infty$.

Existem algumas condições necessárias e suficientes para que um polinômio tenha somente zeros reais. Uma delas, obtida por Hermite, nos diz que um polinômio $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, cujos zeros são dados por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tem somente zeros reais se, e somente se, a matriz de Hankel

$$H_n(S_0, S_1, \ldots, S_{2n-2}) = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-2} \end{pmatrix}$$

é não negativa definida, onde $S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, representam as somas de Newton. Além disso, $P(x)$ tem somente zeros reais e distintos se, e somente se, $H_n(S_0, S_1, \ldots, S_{2n-2})$ é positiva definida. Na demonstração deste resultado utiliza-se o critério de Silvester, que afirma que uma matriz é definida positiva se, e somente se, os menores principais são positivos. Com relação aos polinômios trigonométricos, uma condição necessária e suficiente para que o polinômio $P(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$ tenha somente zeros reais é que a seqüência de

seus coeficientes $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ seja crescente.

Portanto, o principal objetivo deste trabalho é estudar algumas condições necessárias e suficientes para que polinômios algébricos e trigonométricos tenham somente zeros reais.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi necessário o estudo de conceitos e resultados básicos sobre mudanças de sinal de seqüência e localização de zeros de funções. Dentre esses resultados, estão importantes teoremas como os Teoremas Fundamental da Álgebra e de Rolle. Esses conceitos e resultados básicos foram organizados no primeiro capítulo.

No segundo capítulo, estudamos resultados clássicos sobre zeros de polinômios algébricos e trigonométricos, entre os quais podemos destacar os teoremas de Cauchy, de Lagrange e de Eneström-Kakeya, que determinam regiões onde se localizam os zeros de polinômios algébricos. Já a Regra de Sinais de Descartes, que teve grande importância neste trabalho, avalia a quantidade de zeros positivos de um polinômio através do número de mudanças de sinal da seqüência de seus coeficientes.

No Capítulo 3, demonstramos o resultado dado por Hermite para que um polinômio tenha somente zeros reais, como citamos anteriormente. Apresentamos, também, seqüências de funções que satisfazem à Regra de Sinais de Descartes. Uma caracterização importante de funções que satisfazem à Regra de Sinais de Descartes, obtida por Pólya e Szegő, também foi estudada neste capítulo.

No final, relacionamos as referências bibliográficas que foram utilizadas na pesquisa deste trabalho.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Os resultados e definições apresentados neste capítulo, importantes para o desenvolvimento deste trabalho, basearam-se, principalmente, nos textos de Pólya e Szegő [12], Milovanovic [9] e Birkhoff [1].

1.1 Mudanças de Sinal de Seqüências

Sejam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais. A notação $S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ será utilizada para designar o número de mudanças fortes de sinal da seqüência $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, ou seja, o número de pares da forma $(+,-)$ ou $(-,+)$ na seqüência obtida de $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ substituindo-se todo número positivo a_i por $+$, todo número negativo por $-$ e descartando-se os zeros da seqüência .

Como conseqüência imediata desta definição, temos

$$S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = S^-(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0), \tag{1.1.1}$$

isto é, as seqüências $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0\}$ têm o mesmo número de mudanças de sinal.

Seja $\{b_0, b_1, \ldots, b_p\}$, $p \leq n$, a seqüência obtida de $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$ ao eliminarmos os elementos nulos. Então, $\{b_p, b_{p-1}, \ldots, b_0\}$ é a seqüência obtida

de $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0\}$ eliminando-se os elementos nulos. Logo,

$$S^-(a_0, \ldots, a_n) = S^-(b_0, b_1, \ldots, b_p) = S^-(b_0, b_1) + \ldots + S^-(b_{p-1}, b_p).$$

Seja $b_l,\ l \leq m$, o elemento correspondente a $a_m \neq 0$.

Omitindo-se a_m, obtemos

$$\begin{aligned} S^-(a_0, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_n) &= S^-(b_0, \ldots, b_{l-1}, b_{l+1}, \ldots, b_p) \\ &= S^-(b_0, b_1) + \ldots + S^-(b_{l-1}, b_{l+1}) \\ &\quad + \ldots + S^-(b_{p-1}, b_p). \end{aligned}$$

Analisemos os seguintes casos:

- $S^-(b_{l-1}, b_{l+1}) = 1$. Então, $S^-(b_{l-1}, a_m) + S^-(a_m, b_{l+1}) = 1$.
  Portanto, neste caso,

  $$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_n) = S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

- $S^-(b_{l-1}, b_{l+1}) = 0$. Logo, $S^-(b_{l-1}, a_m) + S^-(a_m, b_{l+1}) = 0$ ou $S^-(b_{l-1}, a_m) + S^-(a_m, b_{l+1}) = 2$. Então,

  $$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_n) \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Portanto, de ambos os casos acima, concluímos que

$$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_{m+1}, \ldots, a_n) \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n), \tag{1.1.2}$$

isto é, omitindo-se termos de uma seqüência não há aumento no número de mudanças de sinal.

Analisemos, agora, as seqüências $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ e $\{a_0, \ldots, a_k, b, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$.

- Se $b = 0$, então $S^-(a_k, b) + S^-(b, a_{k+1}) = S^-(a_k, a_{k+1})$.

- Se $S^-(a_k, a_{k+1}) = 1$ e $sinal(a_k) = sinal(b)$ ou $sinal(a_{k+1}) = sinal(b)$, então $S^-(a_k, b) + S^-(b, a_{k+1}) = 1$.

- Se $S^-(a_k, a_{k+1}) = 0$, temos que $S^-(a_k, b) + S^-(b, a_{k+1}) = 0$ quando $sinal(a_k) = sinal(a_{k+1}) = sinal(b)$.

Portanto, desses três casos, concluímos que não há alteração no número de mudanças de sinal quando inserimos um novo termo na seqüência cujo sinal é o mesmo de um dos termos vizinhos.

Mostremos, agora, que

$$S^-(a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n) \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n). \tag{1.1.3}$$

Consideremos os termos genéricos $a_{k-1},\ a_k,\ a_{k+1}$ e as seguintes possibilidades:

- $sinal(a_{k-1}) = sinal(a_k) = sinal(a_{k+1}) > 0\ (< 0)$.
  Então, $sinal(a_{k-1} + a_k) = sinal(a_k + a_{k+1}) > 0\ (< 0)$.

- $sinal(a_{k-1}) = sinal(a_k) > 0$ e $sinal(a_{k+1}) < 0$.
  Logo, $sinal(a_{k-1} + a_k) > 0$ e $sinal(a_k + a_{k+1}) > 0$ ou < 0.

- $sinal(a_{k-1}) = sinal(a_{k+1}) > 0$ e $sinal(a_k) < 0$.
  Assim, $sinal(a_{k-1} + a_k) > 0$ ou < 0 e $sinal(a_k + a_{k+1}) > 0$ ou < 0.

- $sinal(a_{k-1}) < 0$ e $sinal(a_k) = sinal(a_{k+1}) > 0$.
  Então, $sinal(a_{k-1} + a_k) > 0$ ou < 0 e $sinal(a_k + a_{k+1}) > 0$.

- $sinal(a_{k-1}) > 0$ e $sinal(a_k) = sinal(a_{k+1}) < 0$.
  Logo, $sinal(a_{k-1} + a_k) > 0$ ou < 0 e $sinal(a_k + a_{k+1}) < 0$.

Portanto, de todos os casos acima,

$$S^-(a_{k-1} + a_k, a_k + a_{k+1}) \leq S^-(a_{k-1}, a_k) + S^-(a_k, a_{k+1}),$$

o que demonstra (1.1.3).

De (1.1.3), temos, imediatamente, que

$$S^-(a_0, a_0+a_1, a_1+a_2, \ldots, a_{l-1}+a_l, a_l+a_{l+1}, \ldots) \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_l, \ldots). \tag{1.1.4}$$

Sejam os números $p_i > 0$ para $i = 0, 1, \ldots$. Então, claramente,

$$S^-(a_0p_0, a_1p_1, a_2p_2, \ldots) = S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots). \tag{1.1.5}$$

De (1.1.3), segue que as seqüências $\{a_0, a_0 + a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$, $\{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_3, a_4, \ldots\}$, $\{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, a_4, \ldots\}$, ..., $\{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \ldots\}$ possuem, no máximo, $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ mudanças de sinal.

Portanto,

$$\begin{aligned} S^-(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \quad \ldots \quad , a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \ldots) \\ \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots). \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

1.2 Polinômios Algébricos e Trigonométricos

Um polinômio algébrico de grau n é um polinômio da forma

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

cujos coeficientes $a_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, são reais ou complexos e $a_n \neq 0$.

Um teorema de grande importância no estudo dos zeros de polinômios algébricos é o Teorema Fundamental da Álgebra, que enunciaremos a seguir e cuja demonstração é encontrada em [1].

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Qualquer polinômio não nulo $P(x)$ de grau n com coeficientes complexos $a_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, tem exatamente n zeros complexos $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Além disso, $P(x)$ pode ser unicamente representado por $P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n)$.*

Como conseqüência deste teorema, temos que se o polinômio $P(x) \in \mathbb{P}_n$ tem $n + 1$ zeros complexos, então $P(x) \equiv 0$. Aqui, $\mathbb{P}_n$ denota o conjunto de todos os

polinômios algébricos de grau menor ou igual a n.

Chamamos de polinômio trigonométrico de ordem n uma expressão da forma

$$t_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\theta + b_k \text{ sen } k\theta).$$

Quando $a_k = 0,\ k = 0, \ldots, n,\ t_n(\theta)$ passa a chamar-se polinômio seno de ordem n e, se $b_k = 0,\ k = 1, \ldots, n,\ t_n(\theta)$ torna-se um polinômio cosseno de ordem n.

Os polinômios trigonométricos são funções periódicas de período 2π.

A seguir, introduzimos uma representação dos polinômios trigonométricos de ordem n com coeficientes reais.

Teorema 1.2. *O polinômio trigonométrico de ordem n com coeficientes reais*

$$t_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \ cos\ k\theta + b_k \ sen\ k\theta),$$

$\theta \in \mathbb{R}$, pode ser escrito da forma

$$t_n(\theta) = e^{-in\theta}F(e^{i\theta}),$$

onde $F(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{2n}z^{2n},\ z = e^{i\theta}$, é um polinômio de grau $2n$ tal que

$$F(z) = \overline{u}_{2n} + \overline{u}_{2n-1}z + \ldots + \overline{u}_0 z^{2n} = z^{2n}\overline{F}(z^{-1}).$$

Demonstração: Considerando a mudança de variável $z = e^{i\theta}$, obtemos

$$\begin{aligned} \cos(k\theta) &= \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} = \frac{z^k + z^{-k}}{2}, \\ \text{sen}(k\theta) &= \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}. \end{aligned}$$

Logo,

$$t_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right)z^k + \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right)z^{-k}\right].$$

Mas,

$$\begin{aligned} z^n t_n(\theta) &= a_0 z^n + \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) z^{n+k} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) z^{n-k} \right] \\ &= \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) + \left(\frac{a_{n-1} + ib_{n-1}}{2} \right) z + \ldots + \left(\frac{a_1 + ib_1}{2} \right) z^{n-1} \\ &\quad + a_0 z^n + \left(\frac{a_1 - ib_1}{2} \right) z^{n+1} + \ldots + \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) z^{2n}. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Portanto, $t_n(\theta) = e^{-in\theta} F(e^{i\theta})$, onde $F(z) \in I\!P_{2n}$.

Comparando os coeficientes de $F(z)$ e de (1.2.7), obtemos $u_n = a_0$ e $u_j = \overline{u}_{2n-j} = \dfrac{a_{n-j} + ib_{n-j}}{2}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. ∎

O resultado a seguir fornece um limite para o número de zeros de um polinômio trigonométrico em um intervalo de comprimento 2π.

Corolário 1.1. *Todo polinômio trigonométrico não nulo de ordem n tem, no máximo, $2n$ zeros distintos num intervalo de comprimento 2π.*

Demonstração: Suponhamos que o polinômio trigonométrico não nulo $t_n(\theta)$ tenha $2n+1$ zeros distintos em $[0, 2\pi]$.

Mas, os zeros de $t_n(\theta)$, de acordo com a representação do Teorema 1.2, são também os zeros de $F(z)$. Logo, $F(z)$ possui $2n+1$ zeros em $[0, 2\pi]$.

Do Teorema Fundamental da Álgebra, $F(z) \equiv 0$ e, então, $t_n(\theta) \equiv 0$ e chegamos a uma contradição.

Portanto, $t_n(\theta)$ tem, no máximo, $2n$ zeros distintos em $[0, 2\pi]$. ∎

O determinante de Vandermonde correspondente aos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é definido por

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

O valor desse determinante, que será muito útil em algumas demonstrações, é dado por $V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j)$. Observe que se $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, obtemos $V(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [5].

1.3 Localização de Zeros de Funções

Nesta seção, apresentaremos resultados básicos sobre a localização de zeros e, também, sobre mudanças de sinal de funções. As funções citadas no decorrer do texto serão contínuas e deriváveis num intervalo dado.

1.3.1 Zeros e Mudanças de Sinal de Funções

Estudaremos, agora, alguns resultados interessantes sobre o número de zeros de funções reais em uma variável real. O primeiro deles é o seguinte.

Teorema 1.3. *Seja $f(x)$ uma função real contínua com $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$. Então, o intervalo (a, b) contém um número par (ou ímpar) de zeros de $f(x)$ se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).*

Demonstração: Suponhamos que existe $x_k \in (a, b)$ tal que $f(x_k) = 0$.

Consideremos, primeiramente, $sinal(f(a)) = sinal(f(b))$.

Se $f(x)$ não muda de sinal em $f(x_k)$, x_k é um zero de multiplicidade par.

Se, em $f(x_k), f(x)$ muda de sinal, deve existir $x_j \neq x_k$ onde $f(x)$ muda novamente de sinal.

Portanto, $f(x)$ possui um número par de zeros em (a, b).

Suponhamos, agora, que $sinal(f(a)) \neq sinal(f(b))$.

Se $f(x)$ muda de sinal em $f(x_k)$, então x_k é um zero de multiplicidade ímpar.

Se, em $f(x_k), f(x)$ não muda de sinal, então deve existir $x_j \neq x_k$ onde $f(x)$ muda de sinal. Como $f(x)$ não muda de sinal em x_k, ele tem multiplicidade par

que, junto com x_j, nos dá um número ímpar de zeros.

Portanto, $f(x)$ possui um número ímpar de zeros em (a, b). ■

O resultado a seguir é uma conseqüência imediata do teorema anterior.

Corolário 1.2. *Sejam a_j e a_k diferentes de zero. Então, a subseqüência $\{a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$ tem um número par (ou ímpar) de mudanças de sinal se a_j e a_k têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).*

Consideremos $j+1$ e $k+1$ índices sucessivos de mudanças de sinal da seqüência $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Então,

$$sinal(a_{j+1}) = sinal(a_{j+1} - a_j) \quad \text{e} \quad sinal(a_{k+1}) = sinal(a_{k+1} - a_k).$$

De $sinal(a_{j+1}) = -sinal(a_{k+1}) \neq 0$, obtemos

$$sinal(a_{j+1} - a_j) \neq sinal(a_{k+1} - a_k) \neq 0.$$

Como $a_{j+1} - a_j$ e $a_{k-1} - a_k$ possuem sinais opostos, do Corolário 1.2 segue que a seqüência $\{a_{j+1} - a_j, a_{j+2} - a_{j+1}, \ldots, a_k - a_{k-1}, a_{k+1} - a_k\}$ tem um número ímpar de mudanças de sinal.

Consideremos, agora, $0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_C \leq n$ índices sucessivos de mudanças de sinal da seqüência $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Então,

$$sinal(a_{j_2} - a_{j_1}) \neq sinal(a_{j_3} - a_{j_2}) \neq \ldots \neq sinal(a_{j_C} - a_{j_{C-1}}).$$

Utilizando o fato da seqüência das diferenças ter um número ímpar de mudanças de sinal, obtemos

$$S^-(a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}) \geq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - 1. \tag{1.3.8}$$

Mas, $sinal(a_{j_1}) \neq sinal(a_{j_2} - a_{j_1})$ e $sinal(a_{j_C} - a_{j_{C-1}}) \neq sinal(-a_{j_C})$.

Portanto,

$$S^-(a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_{n-1}, -a_n) \geq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) + 1. \tag{1.3.9}$$

Como conseqüência imediata de (1.1.5) e (1.3.8), se $\alpha > 0$ temos que

$$S^-(\alpha a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha a_2 - a_1, \ldots) \geq S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots). \tag{1.3.10}$$

O resultado a seguir decorre do Teorema 1.3.

Corolário 1.3. *Seja $f(x) \neq 0$ e com sinal constante numa vizinhança dos pontos a e b. Então, o intervalo (a, b) contém um número par (ou ímpar) de mudanças de sinal de $f(x)$ se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).*

Teorema 1.4. *Se R é o número de mudanças de sinal e Z o número de zeros de $f(x)$ num mesmo intervalo aberto, então $Z - R$ é um número par não negativo.*

Demonstração: Do Teorema 1.3 e do Corolário 1.3, concluímos que se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal, então $f(x)$ possui um número par de zeros e muda de sinal um número par de vezes em (a, b). Como o número de mudanças de sinal não excede o número de zeros de $f(x)$, então $Z - R \geq 0$. Assim, como a diferença de números pares é um número par, $Z - R$ é par.

Utilizando novamente o Teorema 1.3 e o Corolário 1.3, temos que se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, então $f(x)$ possui um número ímpar de zeros e muda de sinal um número ímpar de vezes em (a, b). Usando os mesmos argumentos do caso acima, temos que $Z - R \geq 0$ e, como a diferença de dois números ímpares é um número par, segue que $Z - R$ é par.

Portanto, $Z - R \geq 0$ e $Z - R$ é par. ∎

1.3.2 Zeros e Mudanças de Sinal da Derivada

Aqui estudaremos a localização dos zeros de derivadas de diversas funções, tendo como ponto de partida o Teorema de Rolle, que será enunciado a seguir e cuja demonstação encontra-se em [12], vol. II. Tal teorema, obra do famoso matemático francês Michel Rolle, avalia a quantidade de zeros reais da derivada de uma função contínua.

Teorema 1.5 (Teorema de Rolle). *Sejam a e b tais que $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ e $f(x) \neq 0$, $\forall\ a < x < b$. Então, a derivada $f'(x)$ tem um número ímpar de zeros no intervalo $a < x < b$, ou seja, tem pelo menos um zero.*

Teorema 1.6. *Se $f(x)$ possui n zeros distintos no intervalo $[a, b]$, então $f'(x)$ possui pelo menos $n - 1$ zeros.*

Demonstração: Sejam $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$ os zeros de $f(x)$ em $[a, b]$. Como x_i e x_{i+1}, $1 \leq i \leq n - 1$, são dois zeros consecutivos de $f(x)$, então $f(x)$ não muda de sinal em (x_i, x_{i+1}).

Mas $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$. Logo, do Teorema 1.5, segue que $f'(x)$ tem um número ímpar de zeros em (x_i, x_{i+1}).

Considerando cada um dos $n - 1$ intervalos (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\ldots, (x_{n-1}, x_n)$, concluímos que existe pelo menos $n - 1$ zeros de $f'(x)$ em $[a, b]$. ■

O teorema acima também é válido se $f(x)$ possui zeros múltiplos. De fato, sejam x_i e x_{i+1} dois zeros consecutivos de $f(x)$ e ξ_i um zero de $f'(x)$ tal que $x_i < \xi_i < x_{i+1}$. Observe que se $x_{i+1} \to x_i$ então $\xi_i \to x_i$. Logo, se x_i é um zero múltiplo de $f(x)$, então x_i é também um zero de $f'(x)$.

Teorema 1.7. *Se $f(x)$ tem n zeros em (a, b) e se uma das duas condições*

- $sinal(f(a)) = sinal(f'(a)) \neq 0$
- $sinal(f(b)) = -sinal(f'(b)) \neq 0$

for satisfeita, então $f'(x)$ tem pelo menos n zeros em (a, b). Se ambas as condições forem satisfeitas, então $f'(x)$ tem $n + 1$ zeros em (a, b).

Demonstração: Suponhamos que $sinal(f(a)) = sinal(f'(a)) \neq 0$ (a demonstração é análoga para o caso em que $sinal(f(b)) = -sinal(f'(b)) \neq 0$).

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os zeros de $f(x)$ em ordem crescente em (a, b), isto é, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$.

Consideremos os $(n-1)$ subintervalos $a < x \leq x_1,\ x_1 < x \leq x_2,\ \ldots,$ $x_{n-1} < x \leq x_n$.

Para $\epsilon > 0,\ \epsilon$ suficientemente pequeno, temos

$$-f(x_1 - \epsilon) = f(x_1) - f(x_1 - \epsilon) = \epsilon f'(x_1 - \eta),\ 0 < \eta < \epsilon.$$

Então,

$$sinal\,(f'(a)) = sinal\,(f(a)) = sinal\,(f(x_1 - \epsilon)) = -sinal\,(f'(x_1 - \eta)) \neq 0.$$

Pelo Teorema 1.3, $f'(x)$ possui pelo menos um zero em $(a, x_1 - \eta)$. Mas, do Teorema 1.6, $f'(x)$ possui pelo menos $n-1$ zeros em (x_1, x_n). Portanto, $f'(x)$ possui pelo menos n zeros em (a, b).

Caso as duas condições sejam satisfeitas, $f'(x)$ possui pelo menos um zero em $(a, x_1 - \eta)$, pelo menos um zero em $(x_n + \gamma, b)$ e pelo menos $n-1$ zeros em (x_1, x_n). Portanto, $f'(x)$ possui pelo menos $n+1$ zeros em (a, b). ■

Como conseqüência do Teorema 1.6, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.4. *Se* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, *então* $f'(x)$ *tem pelo menos o mesmo número de zeros que* $f(x)$ *em* (a, ∞). *(Resultado análogo para -* ∞*).*

Demonstração: Suponhamos que $f(x)$ tem n zeros em (a, ∞) para algum $a \in \mathbb{R}$. Seja x_n o maior zero de $f(x)$. Pelo Teorema 1.6, $f'(x)$ possui pelo menos $n-1$ zeros em $(a, x_n]$.

Como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_{x_n}^{\infty} f'(t)dt = 0,$$

segue que $f'(x)$ muda de sinal em $x_n < x < \infty$. Portanto, $f'(x)$ tem pelo menos n zeros em (a, ∞). ■

Considerando $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, de (1.3.8) temos que

$$S^-(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots) \geq S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots). \tag{1.3.11}$$

Como conseqüência dos Teoremas 1.4 e 1.5, podemos demonstrar o seguinte corolário.

Corolário 1.5. *Sejam $f(a) = f(b) = 0$ e $f(x) \neq 0, \forall\ x \in (a,b)$. Então, existe um número ímpar de mudanças de sinal de $f'(x)$ em (a,b).*

O resultado a seguir dá condições para que funções racionais tenham somente zeros reais.

Teorema 1.8. *Sejam $A_i \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots, n$ e $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ números reais. A função racional*

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

tem somente zeros reais particularmente nos seguintes casos:

1. $A_1 > 0,\ A_2 > 0, \ldots,\ A_{n-1} > 0$;

2. $A_1 > 0,\ A_2 > 0, \ldots,\ A_{k-1} > 0,\ A_{k+1} > 0, \ldots, A_n > 0$ e $A_1 + A_2 + \ldots + A_n < 0,\ 1 < k < n$.

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n} \\ &= \frac{A_1(x - a_2)\ldots(x - a_n) + \ldots + A_n(x - a_1)(x - a_{n-1})}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)} = \frac{P(x)}{Q(x)}, \end{aligned}$$

onde $P(x) \in I\!P_{n-1}$ e $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) \in I\!P_n$.

Provemos o primeiro caso. Para $\epsilon > 0,\ \epsilon$ suficientemente pequeno, temos que $sinal(f(a_1 + \epsilon)) = +1$ e $sinal(f(a_2 - \epsilon)) = -1$, pois

$$f(a_1 + \epsilon) = \underbrace{\frac{A_1}{\epsilon}}_{\to\infty} + \frac{A_2}{a_1 - a_2 + \epsilon} + \frac{A_3}{a_1 - a_3 + \epsilon} + \ldots + \frac{A_n}{a_1 - a_n + \epsilon} > 0$$

e

$$f(a_2 - \epsilon) = -\left(\frac{A_1}{a_1 - a_2 + \epsilon} + \underbrace{\frac{A_2}{\epsilon}}_{\to\infty} + \frac{A_3}{a_3 - a_2 + \epsilon} + \ldots + \frac{A_n}{a_n - a_2 + \epsilon}\right) < 0.$$

Isto implica que $f(x)$ e, conseqüentemente, $P(x)$ têm um zero em (a_1, a_2). Continuando com este processo nos demais intervalos, teremos a existência de $n-2$ zeros de $P(x)$, um em cada um dos intervalos (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_{n-2}, a_{n-1}). No intervalo (a_{n-1}, a_n) não podemos fazer tal análise, pois não sabemos se $A_n > 0$. Como $P(x)$ tem $n-1$ zeros, o zero restante não pode ser complexo, pois seu conjugado também seria zero de $P(x)$. Logo, $f(x)$ tem somente zeros reais.

Provemos, agora, a segunda condição. Como no item anterior, temos que $f(x)$ tem um zero em cada um dos $n-3$ intervalos (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots, (a_{k-2}, a_{k-1})$, (a_{k+1}, a_{k+2}), $\ldots, (a_{n-1}, a_n)$. Tal análise não pode ser feita nos intervalos (a_{k-1}, a_k) e (a_k, a_{k+1}), pois não sabemos se $A_k > 0$. Sejam $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\omega > 0$ suficientemente grande. Então, como $A_1 + A_2 + \ldots + A_n < 0$,

$$\begin{aligned}
f(-\omega) &= -\left[\frac{A_1}{\omega + a_1} + \frac{A_2}{\omega + a_2} + \ldots + \frac{A_n}{\omega + a_n}\right] \\
&= -\left[\frac{A_1(\omega + a_2)\ldots(\omega + a_n) + \ldots + A_n(\omega + a_1)\ldots(\omega + a_{n-1})}{(\omega + a_1)(\omega + a_2)\ldots(\omega + a_n)}\right] \\
&= -\left[\frac{(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)\omega^{n-1} + \ldots}{(\omega + a_1)(\omega + a_2)\ldots(\omega + a_n)}\right] > 0, \\
f(a_1 - \epsilon) &= -\left[\frac{A_1}{\epsilon} + \frac{A_2}{a_2 - a_1 + \epsilon} + \frac{A_3}{a_3 - a_1 + \epsilon} + \ldots + \frac{A_n}{a_n - a_1 + \epsilon}\right] < 0, \\
f(a_n + \epsilon) &= \frac{A_1}{a_n - a_1 + \epsilon} + \frac{A_2}{a_n - a_2 + \epsilon} + \frac{A_3}{a_n - a_3 + \epsilon} + \ldots + \frac{A_n}{\epsilon} > 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{A_1}{\omega - a_1} + \frac{A_2}{\omega - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{\omega - a_n} \\
&= \frac{A_1(\omega - a_2)\ldots(\omega - a_n) + \ldots + A_n(\omega - a_1)\ldots(\omega - a_{n-1})}{(\omega - a_1)(\omega - a_2)\ldots(\omega - a_n)} \\
&= \frac{(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)\omega^{n-1} + \ldots}{(\omega - a_1)(\omega - a_2)\ldots(\omega - a_n)} < 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$sinal(f(-\omega)) = -sinal(f((a_1 - \epsilon)) = sinal(f(a_n + \epsilon)) = -sinal(f(\omega)) = +1.$$

Existe, pois, um zero de $f(x)$ em cada um dos intervalos $(-\infty, a_1)$ e $(a_n, +\infty)$. Como $f(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, $f(x)$ tem somente zeros reais. ■

1.3.3 Aplicações do Teorema de Rolle

Consideremos, agora, $P(x) \in \mathbb{P}_n$. Seja Z o número de zeros reais e $n - Z$ o número de zeros não reais de $P(x)$.

Do Teorema de Rolle, sabemos que $P'(x)$ possui pelo menos $Z - 1$ zeros reais no intervalo. Então, o número de zeros não reais de $P'(x)$ é menor ou igual a $n - 1 - (Z - 1) = n - Z$.

Com isso, demonstramos o seguinte resultado.

Teorema 1.9. *Seja $P(x) \in \mathbb{P}_n$. Então, $P'(x)$ possui, no máximo, o mesmo número de zeros não reais que $P(x)$.*

Seja $P(x)$ um polinômio que possui somente zeros reais dado por $P(x) = (x - x_k)^j Q_{n-j}(x),\ j \geq 0$.

Supondo que $P'(x)$ tenha zeros múltiplos, então $P'(x) = (x - x_k)^i R_{n-i}(x)$, $i \geq 2$. Por outro lado, $P'(x) = (x - x_k)^{j-1} \left(jQ_{n-j}(x) + (x - x_k)Q'_{n-j}(x)\right)$.

Então, devemos ter $j - 1 = i$ e, assim, $j = i + 1$.

Portanto,

$$P(x) = (x - x_k)^j Q_{n-j}(x),\ j \geq 3,$$

ou seja, zeros múltiplos da derivada de um polinômio $P(x)$ que possui somente zeros reais são também zeros múltiplos do próprio polinômio $P(x)$.

Teorema 1.10. *Se um polinômio tem somente zeros reais e simples, então as derivadas de ordem superior têm a mesma propriedade e, além disso, todo zero da $(j+1)$-ésima derivada fica entre dois zeros consecutivos da j-ésima derivada.*

Demonstração: Suponhamos que $P(x)$ tenha n zeros reais e simples.

Do Teorema 1.9, $P'(x)$ tem, no máximo, o mesmo número de zeros não reais

que $P(x)$. Como $P(x)$ tem somente zeros reais e simples, $P'(x)$ tem somente zeros reais e simples e, assim por diante. Então, as derivadas de ordem superior têm somente zeros reais e simples.

Como $P(x)$ tem n zeros, segue, do Teorema de Rolle, que existe pelo menos um zero de $P'(x)$ entre dois zeros de $P(x)$. Como $P'(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, então existe exatamente um zero de $P'(x)$ entre dois zeros consecutivos de $P(x)$.

Aplicando o Teorema de Rolle sobre $P'(x)$, obtemos que $P''(x)$ possui pelo menos um zero entre dois zeros consecutivos de $P'(x)$. Como $P''(x) \in \mathbb{P}_{n-2}$, então existe exatamente um zero de $P''(x)$ entre dois zeros consecutivos de $P'(x)$.

Continuando este processo, chegamos que $P^{(j+1)}(x)$ possui pelo menos um zero entre dois zeros consecutivos de $P^{(j)}(x)$. Como $P^{(j+1)}(x) \in \mathbb{P}_{n-j-1}$, então $P^{(j+1)}(x)$ possui exatamente um zero entre dois zeros consecutivos de $P^{(j)}(x)$. ■

Como aplicação do Teorema 1.10, consideremos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1. *As derivadas de ordem superior da função* $f(x) = (1+x^2)^{-1/2}$ *tem somente zeros reais e simples. Além disso, todo zero da* k*-ésima derivada encontra-se entre dois zeros consecutivos da* $(k+1)$*-ésima derivada.*

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -x(1+x^2)^{-1-1/2}, \\
f''(x) &= (2x^2-1)(1+x^2)^{-2-1/2}, \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= Q_k(x)(1+x^2)^{-k-1/2}, \quad Q_k(x) \in \mathbb{P}_k, \\
f^{(k+1)}(x) &= \left(-(2k+1)xQ_k(x) + (1+x^2)Q_k'(x)\right)(1+x^2)^{-(k+1)-1/2} \\
&= Q_{k+1}(x)(1+x^2)^{-(k+1)-1/2}, \quad Q_{k+1}(x) \in \mathbb{P}_{k+1}.
\end{aligned}$$

Suponhamos que $f^{(k)}(x)$, ou seja, $Q_k(x)$, tenha k zeros reais distintos. Pelo Teorema de Rolle, $f^{(k+1)}(x)$, isto é, $Q_{k+1}(x)$, tem pelo menos um zero entre dois zeros de $Q_k(x)$, um zero entre $-\infty$ e o menor zero de $Q_k(x)$ e outro zero entre

o maior zero de $Q_k(x)$ e $+\infty$. Isto segue do Corolário 1.4, pois $\lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$. Com excessão desses $(k-1)+2 = k+1$ zeros, não há outros. ■

Uma outra interessante aplicação do Teorema de Rolle envolve alguns polinômios ortogonais clássicos.

Exemplo 1.2. *Os polinômios de Legendre, Laguerre e Hermite são dados, respectivamente, por*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right), \; L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \; e$$

$$H_n(x) = \frac{e^{x^2/2}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}).$$

A partir dessas definições, podemos concluir que esses polinômios têm somente zeros reais e simples que estão localizados no interior dos intervalos $(-1,1)$, $(0,+\infty)$ *e* $(-\infty,+\infty)$, *respectivamente.*

De fato, consideremos, primeiramente, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$.

Seja $f(x) = (x^2-1)^n \in I\!P_{2n}$. Então,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2nx(x^2-1)^{n-1} = (x^2-1)^{n-1}Q_1(x),\\
f''(x) &= 2[(2n^2-3)x^2-2n](x^2-1)^{n-2} = (x^2-1)^{n-2}Q_2(x),\\
&\vdots\\
f^{(n-1)}(x) &= (x^2-1)Q_{n-1}(x),\\
f^{(n)}(x) &= Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right).
\end{aligned}$$

Observe que -1 e 1 são zeros de $f^{(n-1)}(x)$ e suponhamos que $Q_{n-1}(x)$ tenha $n-1$ zeros reais e distintos em $(-1,1)$.

Do Teorema 1.5, temos que $f^{(n)}(x)$ tem pelo menos um zero entre dois zeros consecutivos de $f^{(n-1)}(x)$. Como $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \in I\!P_n$, então existe exatamente um zero de $f^{(n)}(x)$ entre dois zeros consecutivos de $f^{(n-1)}(x)$. Portanto, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$ tem somente zeros reais e distintos em $(-1,1)$.

De maneira análoga, demonstramos o resultado para os polinômios $L_n(x)$ e $H_n(x)$. ■

Considerando $a_j^{(i)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, i$, os coeficientes da equação $a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + \ldots + a_i^{(i)}x^i = 0$, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.11. *Suponhamos que a equação* $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = 0$ *tem somente raízes reais. Então, o polinômio* $a_0P(x) + a_1P'(x) + \ldots + a_nP^{(n)}(x)$ *possui, no máximo, a mesma quantidade de zeros não reais que* $P(x)$.

Demonstração: Sejam $a_j^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, i$, os coeficientes da equação algébrica que tem $-x_1, \ldots, -x_i$ como raízes, isto é,

$$a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + \ldots + a_i^{(i)}x^i = a_i^{(i)}(x + x_1)(x + x_2)\ldots(x + x_i).$$

Logo, para $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\frac{a_0^{(i)}}{a_i^{(i)}} &= x_1x_2\ldots x_i, \\
\frac{a_1^{(i)}}{a_i^{(i)}} &= x_1\ldots x_{i-1} + x_1x_3\ldots x_i + \ldots + x_2\ldots x_i, \\
&\vdots \\
\frac{a_{i-2}^{(i)}}{a_i^{(i)}} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{i-1}x_i, \\
\frac{a_{i-1}^{(i)}}{a_i^{(i)}} &= x_1 + x_2 + \ldots + x_i.
\end{aligned}$$

Consideremos

$$F_n(x) = a_n^{(n)}e^{-x_nx}\frac{d}{dx}\left\{e^{(x_n-x_{n-1})x}\frac{d}{dx}\left\{e^{(x_{n-1}-x_{n-2})x}\ldots\frac{d}{dx}\left\{e^{x_1x}P(x)\right\}\right\}\right\}.$$

Para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= a_1^{(1)}e^{-x_1x}\frac{d}{dx}\left\{e^{x_1x}P(x)\right\} = a_1^{(1)}[x_1P(x) + P'(x)] \\
&= a_1^{(1)}\left(\frac{a_0^{(1)}}{a_1^{(1)}}P(x) + P'(x)\right) = a_0^{(1)}P(x) + a_1^{(1)}P'(x).
\end{aligned}$$

Observe que $F_1(x) \in \mathbb{P}_n$ se $P(x) \in \mathbb{P}_n$. Daí, $e^{x_1 x} F_1(x) = a_1^{(1)} \dfrac{d}{dx}\{e^{x_1 x} P(x)\}$.

Os zeros reais de $e^{x_1 x} F_1(x)$ são os zeros reais de $F_1(x)$ e os zeros reais de $e^{x_1 x} P(x)$ são os de $P(x)$. Pelo Teorema de Rolle, entre dois zeros reais consecutivos de $e^{x_1 x} P(x)$, existe um zero de $e^{x_1 x} F_1(x)$. Logo, se $P(x)$ tem m zeros reais ($n-m$ complexos), $F_1(x)$ tem, pelo menos, $m-1$ zeros reais. Logo, $F_1(x) \in \mathbb{P}_n$ pode ter, no máximo, $n-m$ zeros complexos.

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned} F_2(x) &= a_2^{(2)} e^{-x_2 x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_2 - x_1)x} \frac{d}{dx}\{e^{x_1 x} P(x)\} \right\} \\ &= a_2^{(2)} [x_1 x_2 P(x) + (x_1 + x_2) P'(x) + P''(x)] \\ &= a_2^{(2)} \left(\frac{a_0^{(2)}}{a_2^{(2)}} P(x) + \frac{a_1^{(2)}}{a_2^{(2)}} P'(x) + P''(x) \right) \\ &= a_0^{(2)} P(x) + a_1^{(2)} P'(x) + a_2^{(2)} P''(x). \end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento utilizado para $n = 1$, $F_2(x)$ possui, no máximo, o mesmo número de zeros não reais que $P(x)$.

Suponhamos que

$$\begin{aligned} F_{n-1}(x) &= a_{n-1}^{(n-1)} e^{-x_{n-1} x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_{n-1} - x_{n-2})x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_{n-2} - x_{n-3})x} \cdots \frac{d}{dx}\{e^{x_1 x} P(x)\} \right\} \right\} \\ &= a_0^{(n-1)} P(x) + a_1^{(n-1)} P'(x) + \ldots + a_n^{(n-1)} P^{(n)}(x) \end{aligned}$$

possui, no máximo, o mesmo número de zeros não reais que $P(x)$.

Para n, temos, através da hipótese de indução,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= a_n^{(n)} e^{-x_n x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_n - x_{n-1})x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_{n-1} - x_{n-2})x} \cdots \frac{d}{dx}\{e^{x_1 x} P(x)\} \right\} \right\} \\ &= a_n^{(n)} e^{-x_n x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_n - x_{n-1})x} \frac{e^{x_{n-1} x}}{a_{n-1}^{(n-1)}} F_{n-1}(x) \right\} \\ &= \frac{a_n^{(n)}}{a_{n-1}^{(n-1)}} [x_n F_{n-1}(x) + F'_{n-1}(x)] \\ &= \frac{a_n^{(n)}}{a_{n-1}^{(n-1)}} [a_0^{(n-1)} x_n P(x) + (a_1^{(n-1)} x_n + a_0^{(n-1)}) P'(x) + \ldots \\ &\quad + (a_{n-1}^{(n-1)} x_n + a_{n-2}^{(n-1)}) P^{(n-1)}(x) + a_{n-1}^{(n-1)} P^{(n)}(x)] \end{aligned}$$

$$= \frac{a_0^{(n-1)}a_n^{(n)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}x_nP(x) + \frac{(a_1^{(n-1)}x_n + a_0^{(n-1)})}{a_{n-1}^{(n-1)}}a_n^{(n)}P'(x) + \ldots$$
$$+\frac{(a_{n-1}^{(n-1)}x_n + a_{n-2}^{(n-1)})}{a_{n-1}^{(n-1)}}a_n^{(n)}P^{(n-1)}(x) + a_n^{(n)}P^{(n)}(x).$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{a_0^{(n-1)}a_n^{(n)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}x_n &= \frac{a_0^{(n-1)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}a_n^{(n)}x_n = x_1x_2\ldots x_{n-1}x_na_n^{(n)} = \frac{a_0^{(n)}}{a_n^{(n)}}a_n^{(n)} = a_0^{(n)},\\
\frac{(a_1^{(n-1)}x_n + a_0^{(n-1)})}{a_{n-1}^{(n-1)}}a_n^{(n)} &= \frac{a_1^{(n-1)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}x_na_n^{(n)} + \frac{a_0^{(n-1)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}a_n^{(n)} = [(x_1x_2\ldots x_{n-2} + \ldots\\
&\quad +x_2x_3\ldots x_{n-1})x_n + x_1x_2\ldots x_{n-1}]a_n^{(n)}\\
&= \frac{a_1^{(n)}}{a_n^{(n)}}a_n^{(n)} = a_1^{(n)},\\
&\vdots\\
\frac{(a_{n-1}^{(n-1)}x_n + a_{n-2}^{(n-1)})}{a_{n-1}^{(n-1)}}a_n^{(n)} &= \left[x_n + \frac{a_{n-2}^{(n-1)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}\right]a_n^{(n)} = (x_n + x_1 + \ldots + x_{n-1})a_n^{(n)}\\
&= \frac{a_{n-1}^{(n)}}{a_n^{(n)}}a_n^{(n)} = a_{n-1}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$F_n(x) = a_0^{(n)}P(x) + a_1^{(n)}P'(x) + \ldots + a_n^{(n)}P^{(n)}(x)$$

possui, no máximo, o mesmo número de zeros não reais que $F_{n-1}(x)$ e, conseqüentemente, possui, no máximo, a mesma quantidade de zeros não reais que $P(x)$.■

Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.11, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.6. *Suponhamos que $a_0 \neq 0$ e consideremos a série de potências*

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots = B(x).$$

Então, o polinômio $b_0P(x) + b_1P'(x) + b_2P''(x) + \ldots$ tem, pelo menos, o mesmo número de zeros não reais que $P(x)$.

Demonstração: Consideremos o operador diferencial $D = \dfrac{d}{dx}$ e seja

$$(b_0 + b_1D + b_2D^2 + \ldots)P(x) = Q(x).$$

Observe que

$$\frac{1}{a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots \ .$$

Assim,

$$\left(\frac{1}{a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n}\right) P(x) = (b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots) P(x),$$

ou seja,

$$(a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n)(b_0 + b_1 D + \ldots) P(x) = P(x). \tag{1.3.12}$$

Aplicando o resultado do Teorema 1.11 em $Q(x)$, temos que

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n) Q(x) \quad &= \quad (a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n) \\ &\quad \times (b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots) P(x) \\ &\overset{(1.3.12)}{=} \quad P(x) \end{aligned}$$

possui, no máximo, o mesmo número de zeros não reais que $Q(x)$.

Logo, $Q(x)$ possui pelo menos o mesmo número de zeros não reais que $P(x)$, onde $Q(x) = b_0 P(x) + b_1 P'(x) + b_2 P''(x) + \ldots$. ■

Sejam $P(x) \in I\!P_n$ e $\alpha \notin [-n, 0]$, α inteiro.

Suponhamos que $P(x)$ tenha Z zeros reais e $n - Z$ zeros não reais.

Seja $Q(x) = x^\alpha P(x)$. Observe que $Q(x) \in I\!P_{n+\alpha}$, onde $x = 0$ é zero de $Q(x)$ com multiplicidade α e os zeros restantes são os zeros de $P(x)$.

Temos que

$$Q'(x) = x^{\alpha-1}[\alpha P(x) + x P'(x)] \in I\!P_{n+\alpha-1}$$

possui $x = 0$ como raiz, cuja multiplicidade é $\alpha - 1$. Através do Teorema 1.9, segue que $Q'(x)$ possui, no máximo, o mesmo número de zeros não reais que $Q(x)$. Como $Q(x)$ possui $n - Z$ zeros não reais, segue que $Q'(x)$ possui, no máximo, $n - Z$ zeros não reais. Mas os zeros não reais de $Q'(x)$ são os zeros não reais de $\alpha P(x) + x P'(x)$. Logo, $\alpha P(x) + x P'(x)$ possui, no máximo, $n - Z$ zeros não reais.

Portanto, acabamos de provar o seguinte resultado.

Corolário 1.7. *O polinômio* $\alpha P(x)+xP'(x)$ *possui, no máximo, o mesmo número de zeros não reais que* $P(x)$.

Consideremos uma curva $y = f(x) \in \mathcal{C}^i[a,b]$. Se $f(x)$ cruza uma reta em três pontos distintos de $[a,b]$, então, entre as intersecções, existe pelo menos um ponto de inflexão.

De fato, sejam $\varphi(x) = f(x) - (cx+d)$ e $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ os pontos de intersecção entre a curva $f(x)$ e a reta $cx+d$. Então, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(x_3) = 0$. Logo, $\varphi'(x)$ tem pelo menos um zero no interior de cada intervalo (x_1,x_2) e (x_2,x_3) e, então, $\varphi''(x) = f''(x)$ tem uma mudança de sinal entre x_1 e x_3, ou seja, existe pelo menos um ponto de inflexão entre x_1 e x_3.

De maneira geral,

Teorema 1.12. *Se uma função* $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$ *coincide com um polinômio de grau* $n-1$ *em* $n+1$ *pontos* $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$, *então a* n*-ésima derivada se anula em um ponto do intervalo* (x_1, x_{n+1}).

Demonstração: Sejam $\varphi(x) = f(x) - (a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})$ e $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ os pontos de intersecção, ou seja, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \ldots = \varphi(x_{n+1}) = 0$.

Aplicando o Teorema 1.5, temos que $\varphi'(x)$ contém pelo menos um zero no interior de cada intervalo (x_1,x_2), (x_2,x_2), $\ldots$, (x_n,x_{n+1}). Aplicando o Teorema 1.5 mais $n-1$ vezes, temos que $\varphi^{(n)} = f^{(n)}$ tem pelo menos um zero entre x_1 e x_{n+1}.

Portanto, existe $\xi \in (x_1,x_{n+1})$ tal que $\varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) = 0$. ∎

Teorema 1.13. *Seja* $0 < a < b$. *Se* $f(x) \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$ *se anula em* $n+1$ *pontos de* $[a,b]$ *e se todos os zeros do polinômio com coeficientes reais*

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

são reais, então existe um ponto $\xi \in [a,b]$ *tal que*

$$a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi) + \ldots + a_n f^{(n)}(\xi) = 0.$$

Demonstração: Seja a função

$$F(x) \;=\; a_n e^{-x_n x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_n - x_{n-1})x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_{n-1}-x_{n-2})x} \ldots \frac{d}{dx}\left\{ e^{x_1 x} f(x) \right\} \right\} \right\},$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os zeros de $P(x)$.

Do Teorema 1.11, concluímos que

$$F(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \ldots + a_n f^{(n)}(x).$$

Como $f(x)$ e $e^{x_1 x} f(x)$ possuem os mesmos zeros (se anulam em $n+1$ pontos de $[a,b]$), segue, do Teorema 1.6, que $\dfrac{d}{dx}\left(e^{x_1 x} f(x)\right)$ possui pelo menos n zeros em $[a,b]$.

Como $\dfrac{d}{dx}\left(e^{x_1 x} f(x)\right)$ e $e^{(x_1 - x_2)x} \dfrac{d}{dx}\left(e^{x_1 x} f(x)\right)$ possuem os mesmos zeros, então $\dfrac{d}{dx}\left\{ e^{(x_1 - x_2)x} \dfrac{d}{dx}\left(e^{x_1 x} f(x)\right) \right\}$ possui pelo menos $n-1$ zeros em $[a,b]$.

Continuando este processo, como

$$\frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_{n-1}-x_{n-2})x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_{n-2}-x_{n-3})x} \ldots \frac{d}{dx}\left\{ e^{x_1 x} f(x) \right\} \right\} \right\}$$

e

$$e^{(x_n - x_{n-1})x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_{n-1}-x_{n-2})x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_{n-2}-x_{n-3})x} \ldots \frac{d}{dx}\left\{ e^{x_1 x} f(x) \right\} \right\} \right\}$$

possuem os mesmos zeros (possuem pelo menos dois zeros em $[a,b]$), segue que

$$a_n e^{-x_n x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_n - x_{n-1})x} \frac{d}{dx}\left\{ e^{(x_{n-1}-x_{n-2})x} \ldots \frac{d}{dx}\left\{ e^{x_1 x} f(x) \right\} \right\} \right\} = F(x)$$

possui pelo menos um zero em $[a,b]$. Portanto, existe $\xi \in [a,b]$ tal que $F(\xi) = a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi) + \ldots + a_n f^{(n)}(\xi) = 0$. ∎

Capítulo 2

Resultados Clássicos sobre Zeros de Polinômios Algébricos e Trigonométricos

Neste capítulo, estudaremos importantes resultados que nos indicam regiões onde estão localizados os zeros de polinômios.

2.1 Limitantes para as Raízes

A regra de Cauchy é um importante resultado para se determinar um disco que contém todas as raízes de um polinômio com coeficientes complexos.

Teorema 2.1 (Cauchy). *Seja* $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ *um polinômio algébrico com coeficientes complexos e* $a_0 \neq 0$*, e seja* r *a única raiz positiva da equação*

$$t^n - |a_{n-1}| t^{n-1} - \ldots - |a_1| t - |a_0| = 0. \tag{2.1.1}$$

Então, todos os zeros da equação $P(z) = 0$ *encontram-se no disco* $|z| \leq r$*.*

Demonstração: Primeiramente, demonstremos que a equação (2.1.1) tem um único zero positivo.

Observe que, para $t > 0$, (2.1.1) passa a ser

$$t^n = |a_{n-1}|t^{n-1} + \ldots + |a_1|t + |a_0|$$

ou, equivalentemente,

$$1 = |a_{n-1}|\frac{1}{t} + \ldots + |a_1|\frac{1}{t^{n-1}} + |a_0|\frac{1}{t^n}. \tag{2.1.2}$$

A função do lado direito de (2.1.2) é estritamente decrescente em $(0, \infty)$, tem valores arbitrariamente grandes quando t está próximo de zero e converge para 0 quando $t \to \infty$. Logo, o gráfico desta função cruza o gráfico da função $y(t) = 1$ uma única vez em um ponto r de $(0, \infty)$.

Consideremos $f(t) = t^n - |a_{n-1}|t^{n-1} - \ldots - |a_1|t - |a_0|$. Pela observação acima, $f(t)$ tem uma única raiz positiva, que é o ponto r. Como $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$, então, se $f(t) \leq 0$ para algum $x > 0$, temos $x \leq r$.

Supondo que $P(z) = 0$ para algum z, então

$$z^n = -a_{n-1}z^{n-1} - \ldots - a_1 z - a_0$$

e, conseqüentemente,

$$|z|^n = |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \ldots + |a_1||z| + |a_0|.$$

A última desigualdade mostra que $f(|z|) \leq 0$ e, de acordo com o que já demonstramos acima, $|z| \leq r$. ∎

O teorema a seguir determina um anel que contém todas as raízes de um polinômio complexo.

Teorema 2.2. *Sejam* $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ $(a_0,\ a_n \neq 0)$ *um polinômio com coeficientes complexos,* $M = \max_{0\leq i\leq n-1} |a_i|$ *e* $M' = \max_{1\leq i\leq n} |a_i|$. *Então, todos os zeros de* $P(z)$ *satisfazem*

$$\frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}.$$

Demonstração: Consideremos $|z| > 1$. Então,

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n| = |a_n z^n - (-a_{n-1} z^{n-1} - \ldots - a_1 z - a_0)| \\
&\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_n||z^n| - (|a_{n-1}||z^{n-1}| + \ldots + |a_1||z| + |a_0|) \\
&\geq |a_n||z|^n - M(|z|^{n-1} + \ldots + |z| + 1) = |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^{n} |z|^{-k}\right) \\
&> |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{-k}\right) = |a_n||z|^n \left[1 - \frac{M}{|a_n|} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} - 1\right)\right] \\
&= |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|(|z| - 1)}\right) = |a_n||z|^n \left[\frac{|z| - (1 + \frac{M}{|a_n|})}{|z| - 1}\right].
\end{aligned}$$

Se $|z| > 1 + \dfrac{M}{|a_n|}$, então $|P(z)| > 0$, ou seja, $P(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z| > 1 + \dfrac{M}{|a_n|}$. Logo, um limitante superior para o módulo das raízes de $P(z)$ é $|z| < 1 + \dfrac{M}{|a_n|}$.

Vamos determinar, agora, um limitante inferior.

Seja $Q(z) = z^n P\left(\dfrac{1}{z}\right) = a_n + a_{n-1} z + \ldots + a_0 z^n$. Aplicando o resultado obtido acima, temos que os zeros de $Q(z)$ encontram-se em $|z| < 1 + \dfrac{M'}{|a_0|}$. Mas, considerando z_k um zero de $Q(z)$, temos que $\dfrac{1}{z_k}$ é zero de $P(z)$ e, então,

$$\frac{1}{|z_k|} < 1 + \frac{M'}{|a_0|},$$

ou seja,

$$|z_k| > \frac{|a_0|}{|a_0| + M'}.$$

Logo, todos os zeros de $P(z)$ encontram-se no disco $\dfrac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z| < 1 + \dfrac{M}{|a_n|}$. ∎

Considerando um polinômio com coeficientes reais cuja seqüência dos coeficientes é decrescente, o resultado a seguir determina um disco que contém todos os zeros desse polinômio.

Teorema 2.3. *Seja* $P(z) = a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ *um polinômio de grau exatamente* n, *tal que* $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n$ *e* $a_0,\ a_n \neq 0$. *Então, todos os zeros de* $P(z)$ *encontram-se no disco*

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Demonstração: Seja $R(z) = z^nQ\left(\frac{1}{z}\right)$, onde

$$Q(z) = a_nz^{n+1} + (1-z)P(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})z^k.$$

Então, para $|z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |R(z)| &= \left|z^nQ\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \left|a_0z^n + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})z^{n-k}\right| \\ &\leq |a_0||z|^n + \left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})z^{n-k}\right| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) \\ &= |a_0| + a_n - a_0. \end{aligned}$$

Logo, $\left|Q\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|z|^n}$ e, assim, obtemos que $|Q(z)| \leq (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n$, onde $|z| \geq 1$.

Observe que, para $|z| \geq 1$,

$$\begin{aligned} |(z-1)P(z)| &= |a_nz^{n+1} - Q(z)| \geq |a_n||z|^{n+1} - |Q(z)| \\ &\geq |a_n||z|^{n+1} - (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n \\ &= |z|^n[|a_n||z| - (|a_0| + a_n - a_0)] \\ &= |z|^n|a_n|\left[|z| - \left(\frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|}\right)\right]. \end{aligned}$$

Como $a_n - a_0 = |a_n - a_0|$, então $r = \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \geq 1$. Observe que para $|z| > r$, $|(z-1)P(z)| > 0$. Portanto, $P(z)$ não possui zeros em $|z| > r$. ∎

Veremos, a seguir, uma regra proposta por Lagrange para determinar um limitante superior para as raízes positivas de uma equação algébrica com coeficientes reais. Tal regra pode ser utilizada para determinar, por exemplo, um limitante superior para a raiz r do Teorema 2.1.

Teorema 2.4. *Sejam $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes reais, $a_n \neq 0$, $a_n > 0$, k o índice do primeiro coeficiente negativo e A o valor absoluto do coeficiente negativo de maior valor absoluto da seqüência $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Então, qualquer raiz positiva x de $P(t) = 0$ satisfaz à desigualdade*

$$x < 1 + \sqrt[n-k]{\frac{A}{a_n}}.$$

Demonstração: Suponhamos que $x \geq 1 + \sqrt[n-k]{\frac{A}{a_n}} := \rho$. Então,

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n \\
&\geq a_0 + a_1x \ldots + a_kx^k + a_nx^n \quad (a_i \geq 0 \text{ para } i = k-1, \ldots, n) \\
&\geq a_nx^n - A(x^k + \ldots + x + 1) \\
&= a_nx^n - A\left(\frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}\right) \\
&> a_nx^n - A\frac{x^{k+1}}{x-1} \quad \left(\frac{1}{x-1} > 0\right) \\
&= \frac{x^{k+1}}{x-1}[a_nx^{n-(k+1)}(x-1) - A] \\
&> \frac{x^{k+1}}{x-1}[a_n(x-1)^{n-k} - A].
\end{aligned}$$

Mas, por hipótese,

$$x \geq 1 + \sqrt[n-k]{\frac{A}{a_n}},$$

e, então, $(x-1)^{n-k} \geq \frac{A}{a_n}$. Logo, $a_n(x-1)^{n-k} - A \geq 0$. Portanto, para $x \geq \rho$, temos $P(x) > 0$. Assim, todas as raízes positivas da equação $P(x) = 0$ são menores que ρ. ∎

Observe que, tendo disponível um método para se determinar um limitante superior para as raízes positivas, podemos achar um limitante inferior para as raízes negativas e, então, localizar em um intervalo $[m, M]$ todas as raízes reais de uma equação algébrica. Isto pode ser feito através da mudança de variáveis $x = -t$. De fato, sejam $-x_1 < \ldots < -x_j < 0$ as raízes negativas de $P(x) = 0$.

Consideremos o polinômio $Q(t) = P(-t)$. É claro que $0 < x_j < \ldots < x_1$ serão os zeros positivos da equação $Q(t) = 0$. Pela regra de Lagrange, podemos calcular $\rho > 0$ tal que $x_j < \ldots < x_1 < \rho$. Portanto, $-\rho < -x_1 < \ldots < -x_j < 0$ e, conseqüentemente, $-\rho$ será um limite inferior para as raízes negativas de P.

De maneira análoga, através das mudanças $x = \dfrac{1}{t}$ e $x = -\dfrac{1}{t}$, obtemos um limitante inferior para as raízes positivas e um limitante superior para as raízes negativas da equação $P(x) = 0$.

A seguir, vamos ver mais um resultado clássico sobre a localização de raízes de um polinômio, que é o Teorema de Eneström-Kakeya.

Teorema 2.5 (Eneström-Kakeya). *Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ um polinômio cujos coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, satisfazem $a_0 > a_1 > \ldots > a_n > 0$. Então, $P(z)$ não possui zeros no círculo unitário $|z| \leq 1$.*

Demonstração: Observe que, para $|z| \leq 1$, $z \neq 1$,

$$\begin{aligned} |(1-z)P(z)| &= |(1-z)(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n)| \\ &= \left| a_0 - a_n z^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) z^k \right| \\ &\geq |a_0| - |(a_0 - a_1)z + \ldots + (a_{n-1} - a_n)z^n + a_n z^{n+1}|. \quad (2.1.3) \end{aligned}$$

Mas, $(a_0 - a_1)z$, $(a_1 - a_2)z^2, \ldots,$ $a_n z^{n+1}$ não podem todos ter o mesmo argumento. De fato, se $z = a + ib$ e θ_1 é o argumento de z, então $\operatorname{tg} \theta_1 = \dfrac{b}{a}$. Temos, também, $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ e $\operatorname{tg} \theta_2 = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$, onde θ_2 é o argumento de z^2. Se z e z^2 tiverem o mesmo argumento, então

$$\frac{b}{a} = \frac{2ab}{a^2 - b^2},$$

e chegamos que $a^2 = -b^2$, o que é um absurdo. Logo, $\theta_1 \neq \theta_2$ e, assim, de (2.1.3) obtemos

$$|(1-z)P(z)| > a_0 - (a_0 - a_1) - \ldots - (a_{n-1} - a_n) - a_n = 0.$$

Portanto, $(1-z)P(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z| \leq 1$ e $z \neq 1$, ou seja, $P(z)$ não possui zeros no círculo unitário $|z| \leq 1$. ■

Através desse teorema, podemos determinar um polinômio que possui somente zeros no círculo unitário. De fato, consideremos

$$Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = a_n + a_{n-1}z + \ldots + a_0 z^n,$$

onde $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_0 > 0$ e $P(z)$ é dado como no teorema anterior. Pelo Teorema de Eneström-Kakeya, $Q(z)$ não tem zeros no círculo unitário. Como z_k é zero de $Q(z)$ tal que $|z_k| \geq 1$, então $\eta_k = \dfrac{1}{z_k}$ é zero de $P(z)$. Mas $|\eta_k| < 1$. Logo, quando $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_0 > 0$, os zeros do polinômio $P(z)$ encontram-se no círculo unitário $|z| < 1$.

Vamos, agora, tratar de problemas relacionados à determinação do número de zeros reais de um polinômio algébrico num intervalo $[a, b]$. O lema a seguir, que afirma que, se c é qualquer raiz da equação $f(x) = 0$, a função f e sua derivada têm sinais opostos antes e o mesmo sinal depois dessa raiz, tem um importante papel no cálculo de limitantes para este número.

Lema 2.1. *Seja f uma função que possui derivadas contínuas até a ordem$k$ em uma vizinhança U do ponto c. Consideremos*

$$f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0 \quad e \quad f^{(k)}(c) \neq 0.$$

Então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} f(c+\epsilon)f'(c+\epsilon) &> 0 \\ f(c-\epsilon)f'(c-\epsilon) &< 0. \end{aligned}$$

Demonstração: Pela fórmula de Taylor temos que, para todo h suficientemente pequeno tal que $c+h$ e $c-h$ pertencem a U,

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(c)}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(c+\theta h)}{k!}h^k,$$

com $\theta \in (0,1)$.

Da mesma forma,

$$f'(c+h) = f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}h + \frac{f'''(c)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(k-2)}(c)}{(k-2)!}h^{k-2} + \frac{f^{(k)}(c+\theta_1 h)}{(k-1)!}h^{k-1},$$

onde $\theta_1 \in (0,1)$.

Como $f^{(j)}(c) = 0$ para $j = 0, 1, \ldots, k-1$, então

$$\frac{f(c+h)}{f'(c+h)} = \frac{f^{(k)}(c+\theta h)}{f^{(k)}(c+\theta_1 h)}\frac{h}{k}.$$

Mas $f^{(k)}(t) \neq 0$. Desde que $f^{(k)}(t)$ é uma função contínua, existe uma vizinhança U_1 de c tal que $f^{(k)}(t) \neq 0$ para todo $t \in U_1$. Além disso, $sinal(f^{(k)}(t)) = sinal(f^{(k)}(c))$, para todo $t \in U_1$. Em particular, para h suficientemente pequeno, $sinal(f^{(k)}(c+\theta h)) = sinal(f^{(k)}(c+\theta_1 h))$. Logo,

$$sinal\left(\frac{f(c+h)}{f'(c+h)}\right) = sinal(h).$$

Assim, fazendo $h = \epsilon$ e $h = -\epsilon$, $\epsilon > 0$, obtemos a afirmação do lema. ■

Seja $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Aplicando o algoritmo de Euclides para encontrar o maior fator comum entre $P(x)$ e $P'(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
P(x) &= P'(x)Q_0(x) - R_1(x) \\
P'(x) &= R_1(x)Q_1(x) - R_2(x) \\
R_1(x) &= R_2(x)Q_2(x) - R_3(x) \\
&\vdots \\
R_{k-2}(x) &= R_{k-1}(x)Q_{k-1}(x) - R_k(x).
\end{aligned}$$

Neste processo, tomamos o resto da divisão com sinal negativo. Observe que os graus dos polinômios $R_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, são estritamente decrescentes. A divisão é repetida até obtermos o resto $R_k(x)$ de grau zero, ou seja, uma constante. Se esta constante é nula, então $R_{k-1}(x)$ é o fator comum entre $P(x)$

e $P'(x)$. Se $R_k(x) \neq 0$, então $P(x)$ e $P'(x)$ não têm fatores em comum diferentes de constante e, conseqüentemente, o algoritmo de Euclides produz a seqüência $\{P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x)\}$ com $R_k(x) \neq 0$.

Seja $[a, b]$ um intervalo qualquer e suponhamos que $R_k(x)$ é um fator comum entre $P(x)$ e $P'(x)$ e, também, que $R_k(x) \neq 0$ em (a, b). Por outro lado, $R_k(x) \neq 0$ em $[a, b]$ se, e somente se, $P(x)$ não tem zeros múltiplos em $[a, b]$. De fato, se ξ é um zero de $P(x)$ com multiplicidade m, então ξ é um zero de $P'(x)$ com multiplicidade $m-1$. Então, $P(x)$ e $P'(x)$ têm um fator comum $(x-\xi)^{m-1}$, com $\xi \in [a, b]$. Reciprocamente, se $P(x)$ não tem zeros múltiplos em $[a, b]$, então o fator comum entre $P(x)$ e $P'(x)$ não tem zeros em $[a, b]$.

Dizemos que $\{P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x)\}$ é a seqüência de Sturm gerada pelo algoritmo de Euclides aplicado a $P(x)$ e $P'(x)$.

Lema 2.2. *Quando $P(x)$ não tem zeros múltiplos em $[a, b]$, a seqüência $\{P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x)\}$ satisfaz às seguintes propriedades:*

1. *Se $P(c) = 0$, então $P(c-\epsilon)$ e $P'(c-\epsilon)$ têm sinais opostos e $P(c+\epsilon)$ e $P'(c+\epsilon)$ têm o mesmo sinal para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno;*

2. *Se $R_i(c) = 0$ para algum i, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, então $R_{i-1}(c)$ e $R_{i+1}(c)$ não se anulam e possuem sinais opostos, onde $R_{-1}(x) := P(x)$ e $R_0(x) := P'(x)$;*

3. *$R_k(x) \neq 0$ em $[a, b]$.*

Demonstração: A primeira condição segue do Lema 2.1.

A segunda afirmação é conseqüência imediata da relação $R_{i-1}(x) = R_i(x)Q_i(x) - R_{i+1}(x)$ para $x = c$. Como $R_i(c) = 0$, obtemos $R_{i-1}(x) = -R_{i+1}(x)$. Se um desses dois números é zero, então, pela relação de recorrência, $R_{i-1}(c) = R_{i-2}(c) = \ldots = R_1(c) = P'(c) = P(c) = 0$. Assim, c seria zero múltiplo de $P(x)$, o que leva a uma contradição. A terceira condição segue do fato de $P(x)$ não ter zeros múltiplos em $[a, b]$. ∎

Teorema 2.6 (Sturm). *Sejam $P(x)$ um polinômio algébrico de grau n que não possui zeros múltiplos em $[a,b]$ e Z o número de zeros de $P(x)$. Então,*

$$Z = S^-(P(a), P'(a), R_1(a), \ldots, R_k(a)) - S^-(P(b), P'(b), R_1(b), \ldots, R_k(b)).$$

Demonstração: Quando x se move de a até b, vamos acompanhar a variação do número $S^-(P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x))$. Como todas as funções dessa seqüência são polinômios algébricos e, portanto, funções contínuas, então a mudança do número $S^-(P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x))$ pode ocorrer somente quando x passa por uma raiz de uma das funções $P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_{k-1}(x)$.

Vamos supor que exista $c \in [a,b]$ tal que $P(c) = 0$. Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $P(c-\epsilon)$ e $P'(c-\epsilon)$ têm sinais opostos e $P(c+\epsilon)$ e $P'(c+\epsilon)$ têm o mesmo sinal. Conseqüentemente, entre $P(x)$ e $P'(x)$ existe uma mudança de sinal antes de c e esta mudança desaparece depois de c. Portanto, o número $S^-(P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x))$ diminui de uma unidade quando x passa pela raiz de P.

Observe agora o que acontece quando x passa por uma raiz de $R_i(x)$ para algum $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Seja, então, $R_i(c) = 0$. Pela propriedade 2. do Lema 2.2, $R_{i-1}(c) \neq 0$, $R_{i+1}(c) \neq 0$ e $R_{i-1}(c)R_{i+1}(c) < 0$. Isto significa que $R_{i-1}(x)R_{i+1}(x) < 0$ para todo x numa vizinhança suficientemente pequena de c e, portanto, $S^-(R_{i-1}(x), R_i(x), R_{i+1}(x)) = 1$ para todo x desta vizinhança. Isto mostra que quando x passa por um zero de uma função intermediária da seqüência de Sturm, o número de mudanças $S^-(P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x))$ não muda. Portanto, $S^-(P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x))$ diminui de uma unidade somente quando x passa por um zero de $P(x)$. Conseqüentemente, o número de mudanças de sinal perdidas quando x percorre o intervalo $[a,b]$ é exatamente igual ao número de zeros de $P(x)$ em $[a,b]$. ∎

Observe que a demonstração do Teorema de Sturm é baseada somente nas propriedades 1., 2., e 3. da seqüência $\{P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x)\}$. Portanto,

o mesmo resultado pode ser obtido sobre o número de zeros de P se considerarmos uma outra seqüência $\{P(x), P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)\}$ que satisfaz às exigências do Lema 2.2. Tal seqüência é chamada de seqüência de Sturm generalizada. Então, se $\{P(x), P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)\}$ é uma seqüência de Sturm generalizada e $P(x)$ não possui zeros múltiplos em $[a, b]$, o número de zeros de $P(x)$ em $[a, b]$ é exatamente igual a $S^-(P(a), P_0(a), \ldots, P_k(a)) - S^-(P(b), P_0(b), \ldots, P_k(b))$.

Aplicando esta observação vamos mostrar que para qualquer polinômio $P(x)$, independente de ter ou não zeros múltiplos em $[a, b]$, o número $S^-(P(a), P_0(a), \ldots, P_k(a)) - S^-(P(b), P_0(b), \ldots, P_k(b))$ é exatamente igual ao número de pontos distintos de $[a, b]$ onde $P(x)$ se anula. De fato, se $P(x)$ não tem zeros múltiplos, o resultado segue do Teorema de Sturm, já que esta é a afirmação de tal teorema. Suponhamos, agora, que $P(x)$ possui zeros múltiplos em $[a, b]$. Então, $P(x)$ e $P'(x)$ têm um fator comum $R_k(x)$ que não é constante e também é fator de $R_1(x), \ldots, R_k(x)$. Por isto, as funções da seqüência

$$\left\{ \frac{P(x)}{R_k(x)}, \frac{P'(x)}{R_k(x)}, \ldots, \frac{R_{k-1}(x)}{R_k(x)}, \frac{R_k(x)}{R_k(x)} \right\} \tag{2.1.4}$$

são definidas em $[a, b]$ e satisfazem às propriedades do Lema 2.2. Então, (2.1.4) é uma seqüência de Sturm para $\widetilde{P}(x) := \dfrac{P(x)}{R_k(x)}$ e, pelo Teorema de Sturm,

$$S := S^- \left(\frac{P(a)}{R_k(a)}, \frac{P'(a)}{R_k(a)}, \ldots, 1 \right) - S^- \left(\frac{P(b)}{R_k(b)}, \frac{P'(b)}{R_k(b)}, \ldots, 1 \right)$$

é o número de raízes simples de $\dfrac{P(x)}{R_k(x)}$ em $[a, b]$, isto é, o número de zeros de $P(x)$ em $[a, b]$. Desde que o número de mudanças de sinal na seqüência (2.1.4) é igual ao número de mudanças de sinal na seqüência $\{P(x), P'(x), R_1(x), \ldots, R_k(x)\}$, então $S = S^-(P(a), P'(a), R_1(a), \ldots, R_k(a)) - S^-(P(b), P'(b), R_1(b), \ldots, R_k(b))$. Conseqüentemente, o Teorema de Sturm, aplicado a qualquer polinômio P fornece o número de raízes de P em $[a, b]$ sem contar suas multiplicidades.

Uma das desvantagens do Teorema de Sturm é a construção da seqüência, pois exige divisão de polinômios algébricos.

2.2 Regra de Sinais de Descartes

Faremos, a seguir, algumas considerações sobre mudanças de sinal de seqüências, importantes para demonstrarmos, mais adiante, a Regra de Sinais de Descartes.

Tal regra, apresentada há mais de 350 anos pelo famoso matemático e filósofo francês Renet Descartes, estima o número de zeros positivos de um polinômio através do número de mudanças de sinal da seqüência de seus coeficientes.

Sejam, então, $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ e $\alpha > 0$.

É claro que as seqüências dos coeficientes dos polinômios $P(x)$ e $P(\alpha x)$ têm o mesmo número de mudanças de sinal uma vez que

$$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) = S^-(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^n a_n). \tag{2.2.5}$$

Como $P(-x) = a_0 - a_1x + \ldots + (-1)^n a_n x^n$, então

$$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) + S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \leq n. \tag{2.2.6}$$

De fato, sejam Z^+ o número de zeros positivos de $P(x)$ e Z^- o número de zeros positivos de $P(-x)$. Como os zeros positivos de $P(-x)$ são os zeros negativos de $P(x)$, segue que $Z^+ + Z^- \leq n$.

Mas, pelo Teorema 1.4, concluímos que $Z^+ - S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) \geq 0$ e $Z^- - S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \geq 0$. Somando essas duas inequações, obtemos

$$Z^+ + Z^- - \left[S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) + S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n)\right] \geq 0,$$

ou

$$n - \left[S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) + S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n)\right] \geq 0.$$

Logo, $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) + S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \leq n$ e, aplicando (1.3.9) sobre os coeficientes de $P(\alpha x)$, obtemos

$$\begin{aligned} S^-(a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha(\alpha a_2 - a_1), \ldots, -\alpha^n a_n) &> S^-(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^n a_n) \\ &= S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Como $\alpha > 0$, de (1.1.5) e (2.2.5), concluímos que

$$S^-(a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha(\alpha a_2 - a_1), \ldots, -\alpha^n a_n) = S^-(\alpha a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha a_2 - a_1, \ldots, -a_n).$$

Logo,

$$S^-(\alpha a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha a_2 - a_1, \ldots, -a_n) > S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n). \tag{2.2.7}$$

Consideremos, agora, $P(x)$ uma série de potências representada por $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$. Seja $Q(x) = (\alpha - x)P(x) = \alpha a_0 + (\alpha a_1 - a_0)x + (\alpha a_2 - a_1)x^2 + \ldots$. Então, para as séries de potências $P(x)$ e $Q(x)$ segue, imediatamente de (2.2.7), que

$$S^-(\alpha a_0, \alpha a_1 - a_0, \alpha a_2 - a_1, \ldots, -a_n) \geq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n). \tag{2.2.8}$$

Mostremos, agora, que

$$S^-(\alpha a_0, \alpha a_1 + a_0, \alpha a_2 + a_1, \ldots) \leq S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots). \tag{2.2.9}$$

Para $\alpha = 1$, temos

$$(1 + x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = a_0 + (a_1 + a_0)x + (a_2 + a_1)x^2 + \ldots,$$

o que, de (1.1.3), nos dá

$$S^-(a_0, a_1 + a_0, a_2 + a_1, \ldots) \leq S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Como $\alpha > 0$, $S^-(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots) = S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

Então, novamente por (1.1.3), $S^-(a_0, \alpha a_1 + a_0, \alpha(\alpha a_2 + a_1), \ldots) \leq S^-(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots)$.

Mas, de (1.1.5), $S^-(a_0, \alpha a_1 + a_0, \alpha(\alpha a_2 + a_1), \ldots) = S^-(\alpha a_0, \alpha a_1 + a_0, \alpha a_2 + a_1, \ldots)$. Logo,

$$S^-(\alpha a_0, \alpha a_1 + a_0, \alpha a_2 + a_1, \ldots) \leq S^-(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots) = S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Considerando a série de potências

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{1 - x} = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \ldots,$$

concluímos, de (1.1.6), que

$$S^-(a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \ldots) \leq S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots). \tag{2.2.10}$$

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números positivos e a série de potências

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_1 x}{(p_1 - x)} + \frac{a_2 x^2}{(p_1 - x)(p_2 - x)} + \quad \ldots \quad + \frac{a_n x^n}{(p_1 - x)(p_2 - x)\ldots(p_n - x)} \\ = \quad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \end{aligned}$$

convergente para x suficientemente pequeno.

Suponhamos que apenas um dos coeficientes de $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, por exemplo a_α, é não nulo. Então,

$$\begin{aligned} \frac{a_\alpha x^\alpha}{(p_1 - x)\ldots(p_\alpha - x)} &= a_\alpha x^\alpha \frac{1}{(p_1 - x)} \frac{1}{(p_2 - x)} \cdots \frac{1}{(p_\alpha - x)} \\ &= a_\alpha x^\alpha \frac{1}{p_1\left(1 - \frac{x}{p_1}\right)} \frac{1}{p_2\left(1 - \frac{x}{p_2}\right)} \cdots \frac{1}{p_\alpha\left(1 - \frac{x}{p_\alpha}\right)} \\ &= \frac{a_\alpha x^\alpha}{p_1 \ldots p_\alpha} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{p_1}\right)^i\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{p_2}\right)^i\right) \cdots \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{p_\alpha}\right)^i\right) \\ &= \frac{a_\alpha x^\alpha}{p_1 \ldots p_\alpha} \left(1 + \frac{x}{p_1} + \frac{x^2}{p_1^2} + \ldots\right) \ldots \left(1 + \frac{x}{p_\alpha} + \frac{x^2}{p_\alpha^2} + \ldots\right) \\ &= A_\alpha x^\alpha + \ldots. \end{aligned}$$

Observe que este produto não possui mudanças de sinal, pois $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha$ são positivos. Então, $S^-(a_\alpha) = S^-(A_\alpha, A_{\alpha+1}, \ldots)$.

Suponhamos, agora, que o resultado seja válido para todas as seqüências que contêm um número menor de termos não nulos que $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Seja $a_\alpha,\ 0 \leq \alpha < n$, o primeiro termo não nulo de $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Então,

$$\begin{aligned} 0 + \frac{a_{\alpha+1} x}{(p_{\alpha+1} - x)} + \frac{a_{\alpha+2} x^2}{(p_{\alpha+1} - x)(p_{\alpha+2} - x)} + \quad \ldots \quad + \frac{a_n x^{n-\alpha}}{(p_{\alpha+1} - x)\ldots(p_n - x)} \\ = \quad 0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Mas,

$$S^-(B_1, B_2, \ldots) \leq S^-(a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \ldots, a_n).$$

Se a_β é o primeiro termo não nulo da seqüência $\{a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \ldots, a_n\}$, então

$$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_\alpha, \ldots, a_n) = S^-(a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \ldots, a_n) + \frac{1 - sinal(a_\alpha a_\beta)}{2}.$$

O primeiro termo não nulo da seqüência $\{B_1, B_2, \ldots\}$ tem o mesmo sinal de a_β. Considerando a seqüência $\{a_\alpha, B_1, B_2, \ldots\}$, obtemos

$$S^-(a_\alpha, B_1, B_2, \ldots) = S^-(B_1, B_2, \ldots) + \frac{1 - sinal(a_\alpha a_\beta)}{2}.$$

Observe que

$$\frac{a_\alpha x^\alpha}{(p_1 - x)\ldots(p_\alpha - x)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{(p_1 - x)\ldots(p_n - x)} = A_0 + A_1 x + \ldots.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(A_0 + A_1 x + \ldots)(p_1 - x)\ldots(p_\alpha - x) &= a_\alpha x^\alpha + \frac{a_{\alpha+1}x^{\alpha+1}}{(p_{\alpha+1} - x)} + \ldots \\ &\quad + \frac{a_n x^n}{(p_{\alpha+1} - x)\ldots(p_n - x)} \\ &= a_\alpha x^\alpha + B_1 x^{\alpha+1} + B_2 x^{\alpha+2} + \ldots\end{aligned}$$

e, então,

$$(A_0 + A_1 x + \ldots)(p_1 - x)\ldots(p_\alpha - x) = x^\alpha(a_\alpha + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots).$$

De (2.2.8),

$$\begin{aligned}S^-(A_0, A_1, \ldots) &\leq S^-(B_1, B_2, \ldots) + \frac{1 - sinal(a_\alpha a_\beta)}{2} \\ &\leq S^-(a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \ldots, a_n) + \frac{1 - sinal(a_\alpha a_\beta)}{2} \\ &= S^-(a_0, a_1, \ldots, a_\alpha, \ldots, a_n).\end{aligned}$$

Portanto,

$$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) \geq S^-(A_0, A_1, A_2, \ldots). \tag{2.2.11}$$

Estamos, agora, em condições de demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 2.7 (Regra de Sinais de Descartes). *Seja Z^+ o número de zeros positivos do polinômio $P(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$. Então, $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n)-Z^+$ é um número par não negativo.*

Demonstração: Demonstremos, primeiramente, que $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+ \geq 0$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{Z^+}$ os zeros positivos de $P(x)$. Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= r(x)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{z^+}) \\ &= r(x)(-1)^{Z^+}(x_1 - x)(x_2 - x)\ldots(x_{Z^+} - x) \\ &= q(x)(x_1 - x)(x_2 - x)\ldots(x_{Z^+} - x), \end{aligned}$$

onde $q(x)$ é um polinômio de grau $n - Z^+$ com coeficientes reais.

De acordo com (2.2.7), como

$$(\alpha - x)(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = \alpha a_0 + (\alpha a_1 - a_0)x + \ldots - a_nx^{n+1},$$

temos que o número de mudanças de sinal de $q(x)$ é maior ou igual a zero, o de $q(x)(x_1 - x)$ é maior ou igual a um, o de $q(x)(x_1 - x)(x_2 - x)$ é maior ou igual a dois e, assim por diante, chegamos que o número de mudanças de sinal de $q(x)(x_1 - x)\ldots(x_{Z^+} - x) = P(x)$ é maior ou igual a Z^+. Portanto,

$$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+ \geq 0.$$

Demonstremos, agora, que $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+$ é um número par. Sejam a_α o primeiro e a_ω o último coeficiente não nulo de $P(x)$, $\alpha < \omega$ e $0 < \xi < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{Z^+} < X < \infty$.

Considerando ξ suficientemente próximo de 0 e X tendendo a infinito, temos que

$$sinal\,(P(\xi)) = sinal(a_\alpha) \neq 0,\ sinal\,(P(X)) = sinal(a_\omega) \neq 0.$$

Pelo Teorema 1.3 e Corolário 1.2, Z^+ é par (ou ímpar) se $P(\xi)$ e $P(X)$ têm o mesmo sinal (ou sinais opostos) e $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é par (ou ímpar) se a_α e a_ω têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).

Como a diferença entre números pares é par e a diferença entre números ímpares é também par, segue que $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z^+$ é um número par. ■

O resultado a seguir é mais geral que o teorema anterior e nos dá a Regra de Sinais de Descartes para séries de potências.

Teorema 2.8. *Sejam ρ o raio de convergência da série de potências $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ e Z^+ o número de zeros de $P(x)$ em $0 < x < \rho$. Então,*

$$S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots) - Z^+ \geq 0.$$

Demonstração: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{Z^+}$ os zeros de $P(x)$ em $0 < x < \rho$. Então,

$$P(x) = q(x)(x_1 - x)(x_2 - x)\ldots(x_{Z^+} - x),$$

onde $q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots$.

De (2.2.8), o número de mudanças de sinal de $q(x)$ é maior ou igual a zero, o de $q(x)(x_1 - x)$ é maior ou igual a um, o de $q(x)(x_1 - x)(x_2 - x)$ é maior ou igual a dois e, então, o número de mudanças de sinal de $q(x)(x_1 - x)\ldots(x_{Z^+} - x)$ $= P(x)$ é maior ou igual a Z^+. Portanto, $S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots) - Z^+ \geq 0$. ■

A série a seguir é um exemplo onde $S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots) - Z^+$ é um número ímpar. Devemos, então, ter algumas condições adicionais para que o Teorema 2.7 possa ser estendido para série de potências.

Exemplo 2.1. *A série de potências*

$$2 - \frac{x}{1 \times 2} - \frac{x^2}{2 \times 3} - \frac{x^3}{3 \times 4} - \ldots$$

não possui zeros no círculo de convergência.

De fato, sabemos que

$$2 - \frac{x}{1 \times 2} - \frac{x^2}{2 \times 3} - \frac{x^3}{3 \times 4} - \ldots = 2 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i(i+1)} = P(x).$$

Considerando $k_n = \dfrac{x^n}{n(n+1)}$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{k_{n+1}}{k_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+1)x^{n+1}}{(n+1)(n+2)x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx}{(n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{2}{n}}\right| = |x|.$$

Portanto, pelo Teste da Razão, segue que a série $P(x)$ converge se $|x| < \rho = 1$.

Observe que $P(0) = 2 > 0$ e $P(1) > 0$. Pelo Teorema 1.3, temos que o número de zeros de $P(x)$ no intervalo $0 < x < 1$ é par. Como, neste caso, $S^-\left(2, -\dfrac{1}{1\times 2}, -\dfrac{1}{2\times 3}, \ldots\right) = 1$, do Teorema 2.8 obtemos que $Z^+ \leq 1$. Mas, Z^+ é um número par. Logo, $Z^+ = 0$, ou seja, $P(x)$ não possui zeros em $0 < x < 1$.

Então, $S^-\left(2, -\dfrac{1}{1\times 2}, -\dfrac{1}{2\times 3}, \ldots\right) - Z^+$ é um número ímpar. ■

Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.8, o próximo teorema estabelece algumas condições para que $S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots) - Z^+$ seja um número par.

Teorema 2.9. *Seja $\rho = \infty$ ou ρ finito e $P(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots$ divergente. Então, se $S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ é finito, $S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots) - Z^+$ é um número par.*

Demonstração: Sejam a_α o primeiro coeficiente não nulo de $\{a_0, a_1, \ldots\}$ e ω o último índice de mudança de sinal. Quando $x \to 0$, o termo dominante em $P(x)$ é a_α e, quando $x \to \infty$, o termo dominante é a_ω. Logo, $sinal\,(P(0)) = sinal(a_\alpha)$ e $sinal\,(P(\rho)) = sinal(a_\omega)$. Podem, então, ocorrer as seguintes situações:

- se $S^-(a_\alpha, a_\omega) = 0$, a seqüência $\{a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots, a_\omega, \ldots\}$ tem um número par de mudanças de sinal;
- se $S^-(a_\alpha, a_\omega) = 1$, então $\{a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots, a_\omega, \ldots\}$ tem um número ímpar de mudanças de sinal.

Fazendo uma análise idêntica à feita no Teorema 2.7, concluímos que $S^-(a_0, a_1, a_2, \ldots) - Z^+$ é um número par. ■

A seguir, apresentamos uma aplicação deste resultado.

Exemplo 2.2. *Sejam λ uma fração própria positiva e n um número inteiro positivo. A equação*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \lambda e^x$$

tem somente uma raiz positiva.

De fato, sabemos que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots \ .$$

Então,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} - \lambda \left(1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots\right) \\ &= (1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)}{1!}x + \ldots + \frac{(1-\lambda)}{n!}x^n - \frac{\lambda}{(n+1)!}x^{n+1} - \ldots \ . \end{aligned}$$

Mas,

$$S^-\left(1-\lambda, \frac{1-\lambda}{1!}, \ldots, \frac{1-\lambda}{n!}, -\frac{\lambda}{(n+1)!}, \ldots\right) = 1.$$

Então, pelo Teorema 2.8, segue que $Z^+ \leq 1$.

Seja $k_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{k_{n+1}}{k_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!x^{n+1}}{(n+1)!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = 0.$$

Portanto, pelo Teste da Razão, a série $f_n(x)$ converge para todos os valores de x, ou seja, seu raio de convergência é $\rho = \infty$. Logo, pelo Teorema 2.9, $1 - Z^+$ é um número par. Como $Z^+ \leq 1$, segue que $Z^+ = 1$.

Portanto, $f_n(x)$ possui somente uma raiz positiva. ■

O resultado a seguir é uma versão da Regra de Sinais de Descartes diferente daquela dada pelo Teorema 2.7.

Teorema 2.10. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ constantes reais, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Considerando Z o número de zeros reais da função inteira*

$$F(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + a_n e^{\lambda_n x},$$

temos que $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n) - Z$ é um número par não negativo.

Demonstração: Mostremos, primeiramente, que $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n) - Z$ é um número par. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são todos não nulos.

Quando $x \to \infty$, o termo dominante em $F(x)$ é $a_1 e^{\lambda_1 x}$ e quando $x \to -\infty$, o termo dominante é $a_n e^{\lambda_n x}$.

Então, $sinal(F(R_-)) = sinal(a_1) \neq 0$ e $sinal(F(R_+)) = sinal(a_n) \neq 0$, onde $R_- < 0$ é um número suficientemente pequeno e $R_+ > 0$ é um número suficientemente grande. Do Teorema 1.3 e do Corolário 1.2, temos que Z é par (ou ímpar) e $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ também é par (ou ímpar) se a_1 e a_n têm o mesmo sinal (ou sinais opostos).

Como a diferença entre números pares ou ímpares é um número par, segue que $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n) - Z$ é par.

Demonstremos, agora, que $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n) - Z \geq 0$, por indução.

Se não há mudanças de sinal, ou seja, se $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, evidentemente $Z = 0$. Portanto, $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n) - Z = 0$.

Vamos supor que o resultado seja válido para $n-1$ e demonstremos, agora, que $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n) - Z \geq 0$.

Seja $\alpha + 1$ um índice de mudança de sinal da seqüência $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $1 \leq \alpha < n$, ou seja, $a_\alpha a_{\alpha+1} < 0$. Seja F^* definida por

$$\begin{aligned} F^*(x) &= e^{\lambda x}\frac{d}{dx}[e^{-\lambda x}F(x)] \\ &= a_1(\lambda_1 - \lambda)e^{\lambda_1 x} + \ldots + a_\alpha(\lambda_\alpha - \lambda)e^{\lambda_\alpha x} + \ldots + a_n(\lambda_n - \lambda)e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

com λ um número no intervalo $(\lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1})$.

Seja Z^* o número de zeros reais de $F^*(x)$.

Como $F(x)$ e $e^{-\lambda x}F(x)$ possuem os mesmos zeros, segue que $\dfrac{d}{dx}\left[e^{-\lambda x}F(x)\right]$ tem pelo menos $Z - 1$ zeros reais. Mas, $\dfrac{d}{dx}\left[e^{-\lambda x}F(x)\right]$ e $F^*(x)$ possuem os mesmos zeros. Logo,

$$Z^* \geq Z - 1 \tag{2.2.12}$$

e, mais ainda,

$$S^-\left(a_1(\lambda_1-\lambda), a_2(\lambda_2-\lambda), \ldots, a_n(\lambda_n-\lambda)\right) = S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n) - 1. \quad (2.2.13)$$

Da hipótese de indução,

$$S^-\left(a_1(\lambda_1-\lambda), a_2(\lambda_2-\lambda), \ldots, a_n(\lambda_n-\lambda)\right) - Z^* \geq 0 \quad (2.2.14)$$

Portanto, de (2.2.12), (2.2.13) e (2.2.14), obtemos

$$\begin{aligned} S^-(a_1, \ldots, a_n) - Z &= S^-(a_1, \ldots, a_n) - 1 - (Z-1) \\ &\geq S^-\left(a_1(\lambda_1-\lambda), \ldots, a_n(\lambda_n-\lambda)\right) - Z^* \geq 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.11. *Sejam* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ *tais que* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. *No interior de sua região de convergência, a série de Dirichlet*

$$F(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + a_n e^{\lambda_n x} + \ldots$$

possui, no máximo, a mesma quantidade de zeros reais que o número de mudanças de sinal da seqüência de seus coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Demonstração: Seja Z o número de zeros reais de $F(x)$. Queremos mostrar que $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) - Z \geq 0$. Provemos por indução.

Se $S^-(a_1, a_2, \ldots) = 0$, então $Z = 0$. Portanto, $S^-(a_1, a_2, \ldots) - Z = 0$.

Vamos supor que o resultado seja válido para $k \leq n-1$ e demonstremos para $k = n$.

Sabemos que $F(x)$ tem $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ mudanças de sinal e $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \geq 1$.

Sejam $\alpha + 1$ um índice de mudança de sinal, $\alpha \geq 1$, e $\lambda \in (\lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1})$.

Como a série de Dirichlet $F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j x}$ pode ser diferenciada termo a

termo no interior de sua região de convergência, consideremos a função

$$\begin{aligned} F^*(x) &= e^{-\lambda x}\frac{d}{dx}[e^{\lambda x}F(x)] = a_1(\lambda-\lambda_1)e^{-\lambda_1 x}+\ldots \\ &\quad +a_\alpha(\lambda-\lambda_\alpha)e^{-\lambda_\alpha x}+\ldots+a_n(\lambda-\lambda_n)e^{-\lambda_n x}+\ldots. \end{aligned}$$

Seja Z^* o número de zeros reais de $F^*(x)$. Mas, $F(x)$ e $e^{\lambda x}F(x)$ possuem os mesmos zeros. Logo, $\frac{d}{dx}[e^{\lambda x}F(x)]$ tem pelo menos $Z-1$ zeros reais. Como $\frac{d}{dx}[e^{\lambda x}F(x)]$ e $F^*(x)$ possuem os mesmos zeros, obtemos

$$Z^* \geq Z-1. \tag{2.2.15}$$

Temos, também,

$$S^-\left(a_1(\lambda-\lambda_1),\ldots,a_n(\lambda-\lambda_n,\ldots)\right) = S^-(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)-1. \tag{2.2.16}$$

Pela hipótese de indução,

$$S^-\left(a_1(\lambda-\lambda_1),\ldots,a_n(\lambda-\lambda_n),\ldots\right)-Z^*\geq 0. \tag{2.2.17}$$

Portanto, de (2.2.15), (2.2.16) e (2.2.17),

$$\begin{aligned} S^-(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)-Z &= S^-(a_1,\ldots,a_n,\ldots)-1-(Z-1) \\ &\geq S^-\left(a_1(\lambda-\lambda_1),\ldots,a_n(\lambda-\lambda_n),\ldots\right)-Z^*\geq 0. \end{aligned}$$

■

2.2.1 Aplicações da Regra de Sinais de Descartes

Como conseqüência dos importantes teoremas que demonstramos na seção anterior, apresentaremos algumas interessantes proposições onde analisaremos os zeros de diversas funções reais.

Proposição 2.1. *Se o polinômio $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ tem somente zeros reais, então $Z^+=S^-(a_0,a_1,\ldots,a_n)$.*

Demonstração: Sejam Z^- o número de zeros negativos e Z^+ o número de zeros positivos de $P(x)$. Sabemos que $Z^+ + Z^- = n$.

De (2.2.6), temos que $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) + S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \leq n$.

Então, $n - [S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) + S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n)] \geq 0$, ou seja, $[Z^+ - S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n)] + [Z^- - S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n)] \geq 0$.

Como os zeros negativos de $P(x)$ são os zeros positivos de $P(-x)$, o Teorema 2.7 nos garante que

$$Z^+ - S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leq 0 \quad \text{e} \quad Z^- - S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \leq 0.$$

Mas, $0 \leq Z^+ - S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leq 0$. Então, $Z^+ - S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$, ou seja, $Z^+ = S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. ∎

Proposição 2.2. *Sejam $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ e consideremos que $2m$ coeficientes consecutivos do polinômio $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ são nulos, onde $m \geq 1$ é um número inteiro. Então, $P(x)$ tem pelo menos $2m$ zeros não reais.*

Demonstração: Como $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_n x^n$, onde $a_k \neq 0$ e $a_{k+1} = \ldots = a_{k+2m} = 0$, então a seqüência $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ possui, no máximo, $n - 2m$ mudanças de sinal.

Consideremos Z^+ o número de zeros positivos de $P(x)$ e Z^- o número de zeros positivos de $P(-x)$.

Por (2.2.6), obtemos que

$$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) + S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \leq n - 2m.$$

Do Teorema 2.7,

$$Z^+ + Z^- \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) + S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) \leq n - 2m,$$

ou seja, $P(x)$ tem, no máximo, $n - 2m$ zeros reais.

Portanto, $P(x)$ deve ter, no mínimo, $2m$ zeros não reais. ∎

Proposição 2.3. *Sejam m e n números inteiros positivos e $a_1, a_2, \ldots, a_n$, λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ números reais que satisfazem às condições*

$$m \geq 1,\ n \geq 2,\ a_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ e } \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n.$$

Seja o polinômio não identicamente nulo

$$P(x) = a_1(x - \lambda_1)^m + a_2(x - \lambda_2)^m + \ldots + a_n(x - \lambda_n)^m.$$

Então, o número de zeros reais Z de $P(x)$ não pode exceder o número de mudanças de sinal da seqüência dos coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n, (-1)^m a_1$.

Demonstração: Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ têm o mesmo sinal e m é par, então $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n, (-1)^m a_1) = 0$ e $(x-\lambda_1)^m \geq 0,\ (x-\lambda_2)^m \geq 0, \ldots, (x-\lambda_n)^m \geq 0$. Como $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$, então os monômios $(x - \lambda_j)^m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, não se anulam simultaneamente. Logo, $P(x) > 0$ ou $P(x) < 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Portanto, $Z = 0$. Assim, encontramos que $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n, (-1)^m a_1) - Z = 0$.

Outra possibilidade é se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ têm o mesmo sinal e m é ímpar. Então, $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n, (-1)^m a_1) = 1$. Observe que

$$P'(x) = m[a_1(x - \lambda_1)^{m-1} + a_2(x - \lambda_2)^{m-1} + \ldots + a_n(x - \lambda_n)^{m-1}]$$

nunca se anula, pois $a_1, a_2, \ldots, a_n$ têm o mesmo sinal e $m - 1$ é par (segue do caso anterior). Então, $Z \leq 1$. Portanto, $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n, (-1)^m a_1) - Z \geq 0$.

Seja, agora, $a_\alpha a_{\alpha+1} < 0,\ 1 \leq \alpha < n$, e vamos supor que a afirmação seja verdadeira para um certo número de mudanças de sinal inferior a $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_n, (-1)^m a_1)$.

Considere $P(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$ e $\lambda \in (\lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1})$ tal que $P(\lambda) \neq 0$. Logo, se $b_0 \neq 0$, teremos $b_1 + \lambda m b_0 \neq 0$.

Seja $P(x)(x - \lambda)^{-m} = F(x)$. Então,

$$\begin{aligned}(x - \lambda)^{m+1} F'(x) &= (x - \lambda)^{m+1}[P'(x)(x - \lambda)^{-m} - mP(x)(x - \lambda)^{-m-1}] \\ &= (x - \lambda)P'(x) - mP(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m(x-\lambda)[a_1(x-\lambda_1)^{m-1}+\ldots+a_n(x-\lambda_n)^{m-1}] \\
&\quad -m[a_1(x-\lambda_1)^m+a_2(x-\lambda_2)^m+\ldots+a_n(x-\lambda_n)^m] \\
&= m(\lambda_1-\lambda)a_1(x-\lambda_1)^{m-1}+\ldots+m(\lambda_n-\lambda)a_n(x-\lambda_n)^{m-1} \\
&= a_1^*(x-\lambda_1)^{m-1}+a_2^*(x-\lambda_2)^{m-1}+\ldots+a_n^*(x-\lambda_n)^{m-1} \\
&= P^*(x),
\end{aligned}$$

onde $a_i^* = m(\lambda_i-\lambda)a_i,\ i=1,2,\ldots,n$.

Temos que

$$S^-\left(a_1^*,a_2^*,\ldots,a_n^*,(-1)^{m-1}a_1^*\right) = S^-(a_1,a_2,\ldots,a_n,(-1)^m a_1)-1. \qquad (2.2.18)$$

Considerando Z^* o número de zeros reais de $P^*(x)$, pela hipótese de indução obtemos que

$$S^-\left(a_1^*,a_2^*,\ldots,a_n^*,(-1)^{m-1}a_1^*\right) - Z^* \geq 0. \qquad (2.2.19)$$

Observe que

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\frac{F(x)}{x^2F'(x)} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)(x-\lambda)^{-m}}{x^2[P'(x)(x-\lambda)^{-m}-mP(x)(x-\lambda)^{-m-1}]} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}[\frac{P(x)(x-\lambda)}{x^2[P'(x)(x-\lambda)-mP(x)]} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{-\lambda mb_0x^m-b_1x^m+\ldots+mb_mx}\right] \\
&\quad -\lambda\lim_{x\to\pm\infty}\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{-\lambda mb_0x^{m+1}+\ldots} \\
&= -\frac{b_0}{\lambda mb_0+b_1}\neq 0, \quad \text{se } b_0\neq 0.
\end{aligned}$$

Como $F(x) = (x-\lambda)^{-m}P(x)$, então $sinal(F(x)) = sinal(P(x))$ quando m é par ($x\to\pm\infty$) e quando m é ímpar e $x\to\infty$. Temos ainda $sinal(F(x)) = -sinal(P(x))$ quando m é ímpar e $x\to-\infty$.

Logo, como $x^2F'(x) = x^2[P'(x)(x-\lambda)^{-m}-mP(x)(x-\lambda)^{-m-1}]$, obtemos

(a) para $x\to-\infty$ e m par,

$$sinal(x^2F'(x)) = sinal(F'(x)) = sinal(P(x)) = sinal(F(x))$$

e, se m é ímpar,

$$sinal(x^2F'(x)) = sinal(F'(x)) = -sinal(P(x)) = sinal(F(x));$$

(b) para $x \to \infty$ e m par,

$$sinal(x^2F'(x)) = sinal(F'(x)) = -sinal(P(x)) = -sinal(F(x))$$

e, para m ímpar,

$$sinal(x^2F'(x)) = sinal(F'(x)) = -sinal(P(x)) = -sinal(F(x)).$$

Portanto, $sinal(F(R_-)) = sinal(F'(R_-))$ para $R_- < 0$ suficientemente pequeno ou $sinal(F(R_+)) = sinal(F'(R_+))$ para $R_+ > 0$ suficientemente grande.

Aplicando o Teorema 1.7 para (R_-, λ) e o Teorema 1.6 para (λ, R_+) ou, aplicando o Teorema 1.6 para (R_-, λ) e o Teorema 1.7 para (λ, R_+), temos que $F'(x)$ tem pelo menos Z zeros em (R_-, R_+) (Z é o número de zeros reais de $P(x)$, mas $P(x)$ e $F(x)$ possuem os mesmos zeros).

Como $P^*(x)$ possui mais zeros que $F'(x)$ (pelo menos um, sendo $x = \lambda$), temos que

$$Z^* + 1 \geq Z \Rightarrow Z^* \geq Z - 1. \tag{2.2.20}$$

Então, de (2.2.18), (2.2.19) e (2.2.20), obtemos

$$\begin{aligned} S^-(a_1, \ldots, a_n, (-1)^m a_1) - Z &= S^-(a_1, \ldots, a_n, (-1)^m a_1) - 1 - (Z - 1) \\ &\geq S^-\left(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*, (-1)^{m-1} a_1^*\right) - Z^* \geq 0. \end{aligned}$$

2. Considerando $b_0 = b_1 = \ldots = b_{s-1} = 0,\ b_s \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{xF'(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(b_s x^{m-s} + \ldots + b_m) - \lambda(b_s x^{m-s} + \ldots + b_m)}{-(x-\lambda)(sb_s x^{m-s} + \ldots + (m-1)b_{m-1}x^2) - mb_m x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{b_s x^{m-s+1} + \ldots}{-sb_s x^{m-s+1} + \ldots} = -\frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Assim, $sinal\left(\dfrac{F(x)}{xF'(x)}\right) = -1$, ou seja, $sinal(F(x)) = -sinal(xF'(x))$.

Logo,

(a) quando $x \to -\infty$, $sinal(F(x)) = sinal(F'(x))$;

(b) quando $x \to \infty$, $sinal(F(x)) = -sinal(F'(x))$.

Então, $sinal(F(R_-)) = sinal(F'(R_-))$ para $R_- < 0$ suficientemente pequeno ou $sinal(F(R_+)) = sinal(F'(R_+))$ para $R_+ > 0$ suficientemente grande.

Aplicando o Teorema 1.7 para (R_-, λ) e (R_+, λ), temos que $F'(x)$ possui pelo menos $Z + 1$ zeros em (R_-, R_+).

Como $P^*(x)$ tem mais zeros que $F'(x)$ (pelo menos o λ), segue que

$$Z^* + 1 \geq Z + 1 \Rightarrow Z^* \geq Z \geq Z - 1 \Rightarrow Z^* \geq Z - 1. \tag{2.2.21}$$

Portanto, de (2.2.18), (2.2.19) e (2.2.21), obtemos que

$$\begin{aligned} S^-(a_1, \ldots, a_n, (-1)^m a_1) - Z &= S^-(a_1, \ldots, a_n, (-1)^m a_1) - 1 - (Z - 1) \\ &\geq S^-\left(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*, (-1)^{m-1} a_1^*\right) - Z^* \geq 0. \end{aligned}$$

■

2.3 Zeros de Polinômios Trigonométricos

Veremos, aqui, um importante resultado sobre zeros de polinômios trigonométricos e que é conseqüência do Teorema de Eneström-Kakeya. Utilizando o Teorema 1.3 mostraremos, primeiramente, um resultado sobre zeros do polinômio cosseno.

Teorema 2.12. *O polinômio trigonométrico*

$$P(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx,$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *tem somente zeros reais se*

$$|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| < a_n. \tag{2.3.22}$$

Demonstração: De (2.3.22), temos que

$$P(0) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n > a_0 + \ldots + a_{n-1} + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| \geq 0.$$

Assim, $P(0) > 0$. Temos, também, que

$$P\left(\frac{\pi}{n}\right) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \ldots - a_n = a_0 + k_1 a_1 + \ldots - a_n.$$

Mas, de (2.3.22),

$$a_0 + k_1 a_1 + \ldots - a_n < a_0 + k_1 a_1 + \ldots + k_{n-1} a_{n-1} - [|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|] < 0,$$

onde $-1 < k_i < 1,\ i = 1, \ldots, n-1$.

Logo, $P\left(\frac{\pi}{n}\right) < 0$. Como

$$P\left(\frac{2\pi}{n}\right) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + a_n \cos(2\pi) = a_0 + l_1 a_1 + \ldots + a_n$$

temos, por hipótese, que

$$a_0 + l_1 a_1 + \ldots + a_n > a_0 + l_1 a_1 + \ldots + l_{n-1} a_{n-1} + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| > 0,$$

e, então, $P\left(\frac{2\pi}{n}\right) > 0,$ pois $-1 < l_i < 1,\ i = 1, \ldots, n-1$.

Continuando este processo, obtemos, de (2.3.22), que

$$\begin{aligned} P\left(\frac{2n\pi}{n}\right) &= a_0 + a_1 \cos(2\pi) + \ldots + a_n \cos(2n\pi) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\ &> a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| > 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $P\left(\frac{2n\pi}{n}\right) > 0$.

Logo, pelo Teorema 1.3, $P(x)$ possui pelo menos um zero em cada um dos intervalos $\left(0, \frac{\pi}{n}\right),\ \left(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right),\ \ldots, \left(\frac{2(n-1)\pi}{n}, \frac{2n\pi}{n}\right)$. Do Corolário 1.1, segue que $P(x)$ tem exatamente um zero em cada intervalo citado. Portanto, $P(x)$ tem $2n$ zeros reais no intervalo $(0, 2\pi)$. ∎

Consideremos, agora, uma curva fechada, contínua e orientada do plano complexo, com excessão da origem. Se, partindo de um ponto arbitrário, z descreve

uma curva inteira em uma dada direção (retornando ao ponto de partida), o argumento de z muda continuamente e o total de variações é um múltiplo de 2π, por exemplo $2n\pi$. O número inteiro n é chamado de *número de voltas* da curva. Todo raio que parte da origem intercepta a curva em questão pelo menos $|n|$ vezes.

Sejam L uma curva fechada e contínua sem pontos duplos e D o interior fechado de L. Suponha que a função $f(z)$ é regular em D exceto, possivelmente, em finitos pólos, finita e não nula em L. Quando z se move ao longo de L no sentido positivo, o ponto $w = f(z)$ descreve uma certa curva contínua e fechada, sendo que o número de voltas desta curva é igual ao número de zeros de $f(z)$ no interior de L menos o números de pólos dentro de L. A proposição também é verdadeira quando $f(z)$ é somente contínua e não nula em L.

Estamos, agora, em condições de demonstrar o teorema a seguir, que nos mostra o comportamento dos zeros de um polinômio trigonométrico.

Teorema 2.13. *Sejam* $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. *Então, o polinômio trigonométrico* $F(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta$ *tem* $2n$ *zeros distintos no intervalo* $0 \leq \theta < 2\pi$.

Demonstração: Através do Teorema de Eneström-Kakeya, temos que o polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ tem n zeros dentro do círculo unitário $|z| = 1$.

Considerando n_w o número de voltas da curva que representa a imagem do círculo unitário sob $w = P(z)$, n_p o número de pólos de $P(z)$ e n_z o número de zeros de $P(z)$, obtemos $n_w = n_z - n_p = n_z - 0 = n$.

Seja $z = \cos\theta + i \text{ sen } \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Então, como $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ e $\text{sen } \theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, obtemos facilmente que

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \\ &= a_0 + a_1(\cos\theta + i \text{ sen } \theta) + a_2(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)^2 + \ldots + a_n(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)^n \\ &= a_0 + a_1 \cos\theta + \ldots + a_n \cos n\theta + i(a_1 \text{ sen } \theta + a_2 \text{ sen } 2\theta + \ldots + a_n \text{ sen } n\theta). \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que todo raio que parte da origem intercepta a curva$P(z)$

pelo menos n vezes, então o eixo imaginário corta pelo menos n vezes a curva $P(z)$ na parte positiva e na parte negativa e, portanto, pelo menos$2n$ vezes. Mas, em tal eixo, ou seja, sobre os pelo menos $2n$ pontos,

$$P(z) = i(a_1 \text{ sen } \theta + a_2 \text{ sen } 2\theta + \ldots + a_n \text{ sen } n\theta),$$

isto é,

$$F(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta = 0$$

em pelo menos $2n$ pontos, onde $\theta \in I\!R$. Mas $F(\theta)$ possui $2n$ zeros (segue do Corolário 1.1). Logo, tais zeros são reais e distintos. ■

Capítulo 3

Outros Resultados sobre Zeros de Polinômios Algébricos

Estudaremos, neste capítulo, condições necessárias e suficientes para que uma seqüência de polinômios satisfaça à Regra de Sinais de Descartes. Além disso, apresentaremos condições necessárias e suficientes para que um polinômio tenha somente zeros reais. Em virtude dessas condições, introduziremos alguns novos conceitos, que podem ser encontrados em [3], [4], [9] e [12].

3.1 Polinômios com Zeros Reais

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os zeros do polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, onde $a_0 \neq 0$. Podemos escrever $P(x) = a_0(x - x_1)\ldots(x - x_n)$. Comparando os coeficientes, obtemos

$$\begin{aligned} x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_n}{a_0} = \sigma_n \\ x_1x_2\ldots x_{n-1} + \ldots + x_2x_3\ldots x_n &= (-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_0} = \sigma_{n-1} \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_1}{a_0} = \sigma_1. \end{aligned}$$

Esta última igualdade é um caso especial do teorema a seguir.

Teorema 3.1 (Newton). *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os zeros do polinômio*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

e $S_p = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p$ as somas de Newton dos zeros de $P(x)$. Então, para todo inteiro positivo k, $k = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$S_k = -a_1 S_{k-1} - a_2 S_{k-2} - \ldots - a_{k-1} S_1 - k a_k$$

e

$$S_{n+j} = -a_1 S_{n+j-1} - a_2 S_{n+j-2} - \ldots - a_n S_j, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Demonstração: Derivando $P(x)$, obtemos

$$P'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}. \tag{3.1.1}$$

Seja α um dos zeros de $P(x)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{x-\alpha} &= \frac{P(x) - P(\alpha)}{x-\alpha} \\ &= \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n - \alpha^n - a_1\alpha^{n-1} - \ldots - a_n}{x-\alpha} \\ &= x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-1} \\ &\quad + a_1(x^{n-2} + \alpha x^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-2}) + \ldots + a_{n-2}(x+\alpha) + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Utilizaremos, agora, o seguinte resultado que decorre facilmente do Teorema do Valor Médio:

$$P'(x) = \frac{P(x)}{x-x_1} + \ldots + \frac{P(x)}{x-x_n}.$$

Para os n zeros de $P(x)$, temos, então, que

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{P(x)}{x-x_1} + \ldots + \frac{P(x)}{x-x_n} \\ &= nx^{n-1} + (S_1 + na_1)x^{n-2} + (S_2 + a_1 S_1 + na_2)x^{n-3} + \ldots \\ &\quad + (S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + \ldots + na_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Comparando os coeficientes de (3.1.1) e de (3.1.2), obtemos

$$\begin{aligned} S_1 + a_1 &= 0 \\ S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 &= 0 \\ &\vdots \\ S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + \ldots + (n-1)a_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na equação de $P(x)$ e somando, facilmente chegamos que

$$S_n + a_1 S_{n-1} + \ldots + n a_n = 0.$$

Portanto, para $k = 1, \ldots, n$,

$$S_k = -a_1 S_{k-1} - a_2 S_{k-2} - \ldots - a_{k-1} S_1 - k a_k.$$

Para $i > n$, note que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{n} x_j^{i-n} P(x_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j^{i-n}(x_j^n + a_1 x_j^{n-1} + \ldots + a_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^i + a_1 \sum_{j=1}^{n} x_j^{i-1} + \ldots + a_n \sum_{j=1}^{n} x_j^{i-n} \\ &= S_i + a_1 S_{i-1} + \ldots + a_{n-1} S_{i-(n-1)} + a_n S_{i-n}. \end{aligned}$$

Logo, $S_i = -a_1 S_{i-1} - a_2 S_{i-2} - \ldots - a_n S_{i-n}$. ■

Podemos representar, também, as somas de Newton através dos coeficientes de $P(x)$. Observe que, no Teorema de Newton, $a_0 = 1$. Então,

$$\begin{aligned} S_1 = -a_1 &\Rightarrow S_1 = \sigma_1 \\ S_2 = -a_1 S_1 - 2a_2 &\Rightarrow S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ S_3 = -a_1 S_2 - a_2 S_1 - 3a_3 &\Rightarrow S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \end{aligned}$$

Por indução, obtemos que

$$S_k = (-1)^k \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 1 & \dots & 0 & 2\sigma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \dots & 1 & (k-1)\sigma_{k-1} \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \dots & \sigma_1 & k\sigma_k \end{vmatrix}.$$

Uma matriz quadrada A é chamada de positiva-definida se $\langle x, Ax\rangle > 0$ para todo vetor $x \neq 0$. Dizemos que A é não-negativa definida se $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ para todo vetor x. É comum vermos nos livros de Álgebra Linear algumas condições necessárias e suficientes para que uma matriz seja positiva-definida, sendo tais condições dadas em função dos autovalores da matriz ou em função dos seus menores principais. Para cada $k = 1, \dots, n$, o menor principal de ordem k da matriz A é o determinante da submatriz principal $A_k = (a_{ij}),\ 1 \leq i,\ j \leq k$. Uma condição necessária e suficiente para que uma matriz seja positiva-definida é que os seus menores principais sejam positivos (Critério de Silvester).

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para que um polinômio tenha somente zeros reais.

Teorema 3.2 (Hermite). *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ os zeros do polinômio $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Então, $P(x)$ tem somente zeros reais se, e somente se, a matriz de Hankel*

$$H_n \equiv H_n(S_0, S_1, \dots, S_{2n-2}) = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{pmatrix}$$

é não negativa definida. Além disso, $P(x)$ tem somente zeros reais e distintos se, e somente se, H_n é positiva definida.

Demonstração: Mostremos, primeiramente, que $P(x)$ tem somente zeros reais se, e somente se, H_n é não negativa definida.

Supondo que $P(x)$ tem somente zeros reais, devemos mostrar que $\langle y, H_n y\rangle \geq 0$, para todo vetor y.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m$ os zeros de $P(x)$ com suas respectivas multiplicidades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, onde $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$. Então,

$$\begin{aligned}
< y, H_n y > &= y^t H_n y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & \ldots & S_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{n-1} & \ldots & S_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} S_{j+k-2} y_j y_k = \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} x_l^{j+k-2} \right) y_j y_k \\
&= \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \left[\left(\sum_{j=1}^{n} x_l^{j-1} y_j \right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_l^{k-1} y_k \right) \right] \\
&= \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \left(\sum_{p=1}^{n} x_l^{p-1} y_p \right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Como $\langle y, H_n y\rangle \geq 0$ para todo y, segue que H_n é não negativa definida.

Agora, vamos supor que H_n é não negativa definida. Logo, os menores principais de H_n são não negativos. Assim,

$$0 \leq \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = S_0 S_2 - S_1^2 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} (x_j - x_k)^2.$$

Se $\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} (x_j - x_k)^2 = 0$, vamos ter $x_j - x_k = 0$, ou seja, $x_j = x_k$, para todo j e k.

Se $\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} (x_j - x_k)^2 > 0$, então, para algum j e k, $(x_j - x_k)^2 > 0$, ou seja, $x_j \neq x_k$. Suponhamos que esses dois zeros sejam complexos conjugados, isto é, $x_j = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ e, conseqüentemente, $x_k = a - ib$. Logo,

$$0 < (x_j - x_k)^2 = (2bi)^2 = -4b^2$$

e chegamos a um absurdo. Logo, todos os zeros de $P(x)$ são reais.

Vamos mostrar, agora, que $P(x)$ tem somente zeros reais e distintos se, e somente se, H_n é positiva definida.

Consideremos que $P(x)$ possua somente zeros reais e distintos. Neste caso, as multiplicidades das n raízes são todas iguais a um.

Logo,

$$\langle y, H_n y\rangle \;=\; \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{n} x_l^{p-1} y_p\right)^2 \geq 0.$$

Suponhamos que $\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{n} x_l^{p-1} y_p\right)^2 = 0$. Então,

$$\begin{cases} y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_1^{n-1} y_n &= 0 \\ y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_2^{n-1} y_n &= 0 \\ \qquad\qquad \vdots & \qquad\quad \vdots \\ y_1 + x_n y_2 + \ldots + x_n^{n-1} y_n &= 0 \end{cases}$$

ou

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que A é a matriz de Vandermonde. Como $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são distintos, segue que $det(A) \neq 0$. Portanto, A é não singular. Então, existe uma única solução para o sistema acima, que é $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Logo, $\langle y, H_n y\rangle > 0$ para todo vetor $y \neq 0$, ou seja, H_n é positiva definida.

Suponhamos, agora, que H_n seja positiva definida.

Usando o mesmo argumento da demonstração do caso em que H_n é não negativa definida, provamos que os zeros de $P(x)$ são reais.

Mostremos, agora, que esses zeros são distintos. Como H_n é positiva definida, temos que existe um número l, $1 \leq l \leq n$, tal que $y_1 + x_l y_2 + \ldots + x_l^{n-1} y_n \neq 0$, para todo $y \neq 0$. Se existir $x_i = x_j$, então $det(A) = 0$. Logo, o sistema linear $Ax = 0$ tem solução diferente da solução trivial, isto é, existe um vetor y não nulo tal que $Ay = 0$, isto é, $\sum_{p=1}^{n} x_l^{p-1} y_p = 0$, $l = 1, \ldots, n$. Mas, $y^t H_n y = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{n} x_l^{p-1} y_p \right)^2 > 0$. Portanto, $x_i \neq x_i$ para $i \neq j$. ■

3.2 Seqüências de Polinômios que satisfazem à Regra de Sinais de Descartes

Dizemos que uma seqüência finita de funções $\{f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ satisfaz à regra de sinais de Descartes no intervalo (a, b) se o número de zeros em (a, b) de qualquer combinação linear não-trivial

$$a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x)$$

é menor ou igual ao número de mudanças de sinal da seqüência $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Uma caracterização para as seqüências de funções que satisfazem à regra de sinais de Descartes, apresentada por Pólya e Szegő [12], pode ser vista a seguir.

O determinante Wronskiano do sistema de funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ é dado por

$$W[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Teorema 3.3. *A seqüência de funções $\{h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)\}$ satisfaz à Regra de Sinais de Descartes em (a, b) se, e somente se, as seguintes propriedades se verificam:*

- *se* $i_1, i_2, \ldots, i_l$ *denotam números inteiros com* $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leq n$, *então o determinante Wronskiano* $W[h_{i_1}(x), h_{i_2}(x), \ldots, h_{i_l}(x)]$ *não se anula em* (a, b);

- *quaisquer dois determinantes Wronskianos com o mesmo númerol de linhas têm o mesmo sinal para* $l = 1, 2, \ldots, n-1$.

Demonstração: Suponhamos que a Regra de Sinais de Descartes seja válida para a seqüência $\{h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)\}$

Queremos mostrar que se $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leq n$, então

$$W[h_{i_1}(x), h_{i_2}(x), \ldots, h_{i_l}(x)] = \begin{vmatrix} h_{i_1}(x) & h_{i_2}(x) & \ldots & h_{i_l}(x) \\ h'_{i_1}(x) & h'_{i_2}(x) & \ldots & h'_{i_l}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h^{(l-1)}_{i_1}(x) & h^{(l-1)}_{i_2}(x) & \ldots & h^{(l-1)}_{i_l}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Suponhamos, contrariamente, que $W[h_{i_1}(x), h_{i_2}(x), \ldots, h_{i_l}(x)] = 0$ para algum x_0 em (a, b). Então, existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_l$, não todas nulas, tais que

$$\begin{pmatrix} h_{i_1}(x_0) & h_{i_2}(x_0) & \ldots & h_{i_l}(x_0) \\ h'_{i_1}(x_0) & h'_{i_2}(x_0) & \ldots & h'_{i_l}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h^{(l-1)}_{i_1}(x_0) & h^{(l-1)}_{i_2}(x_0) & \ldots & h^{(l-1)}_{i_l}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} c_1 h_{i_1}(x_0) & + & c_2 h_{i_2}(x_0) & + & \ldots & + & c_l h_{i_l}(x_0) & = & 0 \\ c_1 h'_{i_1}(x_0) & + & c_2 h'_{i_2}(x_0) & + & \ldots & + & c_l h'_{i_l}(x_0) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_1 h^{(l-1)}_{i_1}(x_0) & + & c_2 h^{(l-1)}_{i_2}(x_0) & + & \ldots & + & c_l h^{(l-1)}_{i_l}(x_0) & = & 0 \end{cases}.$$

Então, x_0 é zero de $c_1 h_{i_1}(x) + c_2 h_{i_2}(x) + \ldots + c_l h_{i_l}(x)$ com multiplicidade l.

Mas, $S^-(c_1, c_2, \ldots, c_l) \leq l - 1$. Logo, da hipótese, $l \leq l - 1$, o que é um

absurdo.

Portanto, $W[h_{i_1}(x), h_{i_2}(x), \ldots, h_{i_l}(x)] \neq 0, \ \forall\ x \in (a,b)$.

Demonstremos, agora, que quaisquer dois determinantes Wronskianos com o mesmo número de linhas têm o mesmo sinal.

Sejam $x_0 \in (a,b)$ e $a_1, a_2, \ldots, a_l$ tais que

$$\begin{cases} a_1 h_{i_1}(x_0) + a_2 h_{i_2}(x_0) + \ldots + a_l h_{i_l}(x_0) = 0 \\ a_1 h'_{i_1}(x_0) + a_2 h'_{i_2}(x_0) + \ldots + a_l h'_{i_l}(x_0) = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_1 h^{(l-2)}_{i_1}(x_0) + a_2 h^{(l-2)}_{i_2}(x_0) + \ldots + a_l h^{(l-2)}_{i_l}(x_0) = 0 \\ a_1 h^{(l-1)}_{i_1}(x_0) + a_2 h^{(l-1)}_{i_2}(x_0) + \ldots + a_l h^{(l-1)}_{i_l}(x_0) = 1 \end{cases}.$$

Neste caso, $W[h_{i_1}(x_0), h_{i_2}(x_0), \ldots, h_{i_l}(x_0)] \neq 0$.

A função $f(x) = a_1 h_{i_1}(x) + a_2 h_{i_2}(x) + \ldots + a_l h_{i_l}(x)$ possui $x = x_0$ como zero de multiplicidade $n-1$. Como tal função obedece à Regra de Sinais de Descartes, se Z^+ é o número de zeros positivos de $f(x)$, então $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_l) \geq l-1$. Mas, $S^-(a_1, a_2, \ldots, a_l) \leq l-1$. Logo,

$$S^-(a_1, a_2, \ldots, a_l) = l - 1. \tag{3.2.3}$$

Desenvolvendo o determinante Wronskiano pela última linha, encontramos

$$\begin{aligned} W[h_{i_1}(x), h_{i_2}(x), \ldots, h_{i_l}(x)] &= (-1)^{l+1} W[h_{i_2}(x), \ldots, h_{i_l}(x)] h^{(l-1)}_{i_1}(x) \\ &\quad + (-1)^l W[h_{i_1}(x), h_{i_3}(x), \ldots, h_{i_l}(x)] h^{(l-1)}_{i_2}(x) \\ &\quad + \ldots + W[h_{i_1}(x), \ldots, h_{i_{l-1}}(x)] h^{(l-1)}_{i_l}(x). \end{aligned}$$

Como $W[h_{i_1}(x_0), h_{i_2}(x_0), \ldots, h_{i_l}(x_0)] = c \neq 0, \ \forall\ x \in (a,b)$, temos

$$b_1 h^{(l-1)}_{i_1}(x_0) + b_2 h^{(l-1)}_{i_2}(x_0) + \ldots + b_l h^{(l-1)}_{l}(x_0) = c,$$

onde $b_j = (-1)^{l+j} W[h_{i_1}(x_0), \ldots, h_{i_{j-1}}(x_0), h_{i_{j+1}}(x_0), \ldots, h_{i_n}(x_0)]$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Logo,

$$\frac{b_1}{c} h^{(l-1)}_{i_1}(x_0) + \frac{b_2}{c} h^{(l-1)}_{i_2}(x_0) + \ldots + \frac{b_l}{c} h^{(l-1)}_{i_l}(x_0) = 1.$$

Considerando $a_j = \dfrac{b_j}{c},\ j = 1, 2, \ldots, l$, de (3.2.3) obtemos

$$S^-(a_1, a_2, \ldots, a_l) = l - 1,$$

ou seja,

$$S^-\left(\frac{b_1}{c}, \frac{b_2}{c}, \ldots, \frac{b_l}{c}\right) = l - 1.$$

Então, para $j = 1, 2, \ldots, l$, temos que

$$sinal\left(\frac{b_j}{c}\right) = -sinal\left(\frac{b_{j+1}}{c}\right),$$

isto é,

$$\begin{aligned} &sinal\left(W[h_{i_1}(x_0), \ldots, h_{i_{j-1}}(x_0), h_{i_{j+1}}(x_0), \ldots, h_{i_l}(x_0)]\right) \\ &\qquad = sinal\left(W[h_{i_1}(x_0), \ldots, h_{i_j}(x_0), h_{i_{j+2}}(x_0), \ldots, h_{i_l}(x_0)]\right). \end{aligned}$$

Portanto, quaisquer dois determinantes Wronskianos com o mesmo número$l$ de linhas, $l = 1, 2, \ldots, n-1$, têm o mesmo sinal.

Para demonstrarmos a outra implicação, utilizaremos o fato que segue.

Sejam $1 \leq \alpha \leq n$ e

$$\begin{aligned} H_1(x) &= -\left(\frac{h_1(x)}{h_\alpha(x)}\right)', \ldots, H_{\alpha-1}(x) = -\left(\frac{h_{\alpha-1}(x)}{h_\alpha(x)}\right)', \\ H_\alpha(x) &= \left(\frac{h_{\alpha+1}(x)}{h_\alpha(x)}\right)', \ldots, H_{n-1}(x) = \left(\frac{h_n(x)}{h_\alpha(x)}\right)'. \end{aligned}$$

Supondo que $\{h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)\}$ satisfaz à Regra de Sinais de Descartes em (a, b) e, conseqüentemente, as propriedades citadas no teorema se verificam, então a seqüência de funções $\{H_j(x),\ j = 1, \ldots, \alpha, \ldots, n-1\}$ também as satisfaz.

De fato, sejam $l \leq n-1,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j < \alpha < i_{j+1} < \ldots < i_l \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} &W[H_{i_1}(x), H_{i_2}(x), \ldots, H_{i_l}(x)] \\ &\qquad = W\left[-\left(\frac{h_{i_1}(x)}{h_\alpha(x)}\right)', \ldots, -\left(\frac{h_{i_j}(x)}{h_\alpha(x)}\right)', \left(\frac{h_{i_{j+1}}(x)}{h_\alpha(x)}\right)', \ldots, \left(\frac{h_{i_l}(x)}{h_\alpha(x)}\right)'\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix}
-\left(\frac{h_{i_1}}{h_\alpha}\right)' & \cdots & -\left(\frac{h_{i_j}}{h_\alpha}\right)' & \left(\frac{h_{i_{j+1}}}{h_\alpha}\right)' & \cdots & \left(\frac{h_{i_l}}{h_\alpha}\right)' \\
-\left(\frac{h_{i_1}}{h_\alpha}\right)'' & \cdots & -\left(\frac{h_{i_j}}{h_\alpha}\right)'' & \left(\frac{h_{i_{j+1}}}{h_\alpha}\right)'' & \cdots & \left(\frac{h_{i_l}}{h_\alpha}\right)'' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-\left(\frac{h_{i_1}}{h_\alpha}\right)^{(l-2)} & \cdots & -\left(\frac{h_{i_j}}{h_\alpha}\right)^{(l-2)} & \left(\frac{h_{i_{j+1}}}{h_\alpha}\right)^{(l-2)} & \cdots & \left(\frac{h_{i_l}}{h_\alpha}\right)^{(l-2)}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
\frac{h_{i_1}}{h_\alpha} & \cdots & \frac{h_{i_j}}{h_\alpha} & 1 & \frac{h_{i_{j+1}}}{h_\alpha} & \cdots & \frac{h_{i_l}}{h_\alpha} \\
\left(\frac{h_{i_1}}{h_\alpha}\right)' & \cdots & \left(\frac{h_{i_j}}{h_\alpha}\right)' & 0 & \left(\frac{h_{i_{j+1}}}{h_\alpha}\right)' & \cdots & \left(\frac{h_{i_l}}{h_\alpha}\right)' \\
\left(\frac{h_{i_1}}{h_\alpha}\right)'' & \cdots & \left(\frac{h_{i_j}}{h_\alpha}\right)'' & 0 & \left(\frac{h_{i_{j+1}}}{h_\alpha}\right)'' & \cdots & \left(\frac{h_{i_l}}{h_\alpha}\right)'' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\left(\frac{h_{i_1}}{h_\alpha}\right)^{(l-1)} & \cdots & \left(\frac{h_{i_j}}{h_\alpha}\right)^{(l-1)} & 0 & \left(\frac{h_{i_{j+1}}}{h_\alpha}\right)^{(l-1)} & \cdots & \left(\frac{h_{i_l}}{h_\alpha}\right)^{(l-1)}
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{h_\alpha^{l+1}(x)} \begin{vmatrix}
h_{i_1}(x) & \cdots & h_{i_j}(x) & h_\alpha & h_{i_{j+1}} & \cdots & h_{i_l}(x) \\
h'_{i_1}(x) & \cdots & h'_{i_j}(x) & h'_\alpha & h'_{i_{j+1}} & \cdots & h'_{i_l}(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
h_{i_1}^{(l-1)}(x) & \cdots & h_{i_j}^{(l-1)}(x) & h_\alpha^{(l-1)} & h_{i_{j+1}}^{(l-1)} & \cdots & h_{i_l}^{(l-1)}(x)
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{h_\alpha^{l+1}(x)} W[h_{i_1}(x), \ldots, h_{i_j}(x), h_\alpha(x), h_{i_{j+1}}(x), \ldots, h_{i_l}(x)].
\end{aligned}
$$

Como

$$W[H_{i_1}(x), H_{i_2}(x), \ldots, H_{i_l}(x)] = (h_\alpha^{l+1}(x))^{-1} W[h_{i_1}(x), h_{i_2}(x) \ldots, h_{i_l}(x)]$$

e $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)$ satisfazem às condições do Teorema 3.3, então $H_1(x), H_2(x), \ldots, H_n(x)$ as satisfazem também.

Provemos agora a outra implicação por indução.

Sejam $F(x) = a_1h_1(x) + a_2h_2(x) + \ldots + a_nh_n(x)$ e Z o número de zeros de $F(x)$ em (a, b).

Para $n = 1$, $F(x) = a_1h_1(x)$ e $W[h_1(x)] = h_1(x) \neq 0$. Então, $S^-(a_1) = 0$ e $Z = 0$. Portanto, $S^-(a_1) - Z = 0$.

Suponhamos que a Regra de Sinais de Descartes seja válida para qualquer sistema de $n - 1$ funções que satisfazem às condições do Teorema 3.3.

Provemos para n. Seja $\alpha + 1$ um índice de mudança de sinal.

Temos que

$$\frac{F(x)}{h_\alpha(x)} = a_1\frac{h_1(x)}{h_\alpha(x)} + \ldots + a_{\alpha-1}\frac{h_{\alpha-1}(x)}{h_\alpha(x)} + a_\alpha + a_{\alpha+1}\frac{h_{\alpha+1}(x)}{h_\alpha(x)} + \ldots + a_n\frac{h_n(x)}{h_\alpha(x)}$$

e, então,

$$\begin{aligned}\left(\frac{F(x)}{h_\alpha(x)}\right)' &= a_1\left(\frac{h_1(x)}{h_\alpha(x)}\right)' + \ldots + a_{\alpha-1}\left(\frac{h_{\alpha-1}(x)}{h_\alpha(x)}\right)' + a_{\alpha+1}\left(\frac{h_{\alpha+1}(x)}{h_\alpha(x)}\right)' \\ &\quad + \ldots + a_n\left(\frac{h_n(x)}{h_\alpha(x)}\right)' \\ &= -a_1H_1(x) - \ldots - a_{\alpha-1}H_{\alpha-1}(x) + a_{\alpha+1}H_\alpha(x) + \ldots + a_nH_{n-1}(x) \\ &= F^*(x).\end{aligned}$$

Seja Z^* o número de zeros reais de $F^*(x)$ em (a,b). Observe que

$$S^-(-a_1,\ldots,-a_{\alpha-1},a_{\alpha+1},\ldots,a_n) = S^-(-a_1,\ldots,-a_{\alpha-1},-a_\alpha,a_{\alpha+1},\ldots,a_n).$$

Temos, ainda, que

$$S^-(-a_1,\ldots,-a_{\alpha-1},-a_\alpha,a_{\alpha+1},\ldots,a_n) = S^-(-a_1,a_2,\ldots,a_n) - 1. \tag{3.2.4}$$

Como $F^*(x) = \left(\frac{F(x)}{h_\alpha(x)}\right)'$ e considerando que $F(x)$ possui Z zeros em (a,b), obtemos

$$Z^* \geq Z - 1. \tag{3.2.5}$$

Pela hipótese de indução,

$$Z^* \leq S^-(-a_1,\ldots,-a_{\alpha-1},-a_\alpha,a_{\alpha+1},\ldots,a_n). \tag{3.2.6}$$

Portanto, de (3.2.4), (3.2.5) e (3.2.6), obtemos

$$\begin{aligned}S^-(a_1,a_2,\ldots,a_n) - Z &= (S^-(a_1,a_2,\ldots,a_n) - 1) - (Z-1) \\ &\geq S^-(-a_1,\ldots,-a_{\alpha-1},-a_\alpha,a_{\alpha+1},\ldots,a_n) - Z^* \geq 0.\end{aligned}$$

■

O problema apresentado a seguir aparece no rodapé de um importante artigo de Schoenberg [13] e ele o atribui a Pólya. Apresentaremos o problema em forma de conjectura.

Conjectura 3.1 (Pólya). *Seja $P(x)$ um polinômio de grau precisamente n com zeros reais e distintos $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Então, a seqüência $\{P(x), P'(x), \ldots, P^{(n)}(x)\}$ satisfaz à Regra de Sinais de Descartes em (x_n, ∞).*

Observe que a seqüência $\{1, x, \ldots, x^n\}$ satisfaz à Regra de Sinais de Descartes em $(0, \infty)$, de acordo com o Teorema 2.7. A seguir, vamos mostrar que a seqüência $\{1, (x-x_1), (x-x_1)(x-x_2), \ldots, (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\}$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais arbitrários, também satisfaz à Regra de Sinais de Descartes para $x > \max\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$. A seqüência de polinômios ortogonais $\{P_k(x)\}_{k=0}^{n}$ também satisfaz à regra de sinais de Descartes para $x > x_{n,n}$, onde $x_{n,n}$ é o maior zero de $P_n(x)$. Este resultado será apresentado mais adiante.

Teorema 3.4 (Runge). *Sejam x_α e x_ω, respectivamente o mínimo e o máximo entre os números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considerando Z o número de zeros do polinômio*

$$F(x) = a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + a_n(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

então, no intervalo $x_\omega < x < \infty$, $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z$ é um número não negativo e no intervalo $-\infty < x < x_\alpha$, $S^-(a_0, -a_1, \ldots, (-1)^n a_n) - Z$ também é um número não negativo.

Demonstração: Vamos provar o resultado para $x_\omega < x < \infty$. Para demonstrar o outro caso, basta considerar $x = -x$ no primeiro caso.

Considere $G(x) = \dfrac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}$. Logo,

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} \\
&= \frac{a_0 + a_1(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} \\
&= a_n + \frac{a_{n-1}}{(x-x_n)} + \frac{a_{n-1}}{(x-x_{n-1})(x-x_n)} + \ldots + \frac{a_0}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)} \\
&= a_n + \frac{a_{n-1}}{x}\frac{1}{\left(1-\frac{x_n}{x}\right)} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\frac{1}{\left(1-\frac{x_1}{x}\right)}\cdots\frac{1}{\left(1-\frac{x_n}{x}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_n + \frac{a_{n-1}}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^k + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{x}\right)^k \cdots \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_n}{x}\right)^k \\ &= a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + (a_{n-1}x_n + a_{n-2})\frac{1}{x^2} + \ldots \\ &= A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots . \end{aligned}$$

A série anterior converge para $x > x_\omega$. Pelo Teorema 2.8, temos que $S^-(A_0, A_1, A_2, \ldots) - Z_G \geq 0$, onde Z_G é o número de zeros de $G(x)$. Mas $Z_G = Z$ e, através de (2.2.11), temos que $S^-(A_0, A_1, A_2, \ldots) \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Logo,

$$Z = Z_G \leq S^-(A_0, A_1, A_2, \ldots) \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

ou seja, $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z \geq 0$. ∎

Vamos relembrar, agora, alguns conceitos que serão úteis para demonstrarmos que uma seqüência de polinômios ortogonais satisfaz à Regra de Sinais de Descartes. Um bom estudo sobre os polinômios ortogonais e suas propriedades pode ser encontrado em Chihara [2].

Sejam $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de números complexos e seja $\pounds$ uma função de valores complexos definida no espaço vetorial de todos os polinômios por

(i) $\pounds[x^n] = \mu_n$, $n = 0, 1, \ldots$;

(ii) $\pounds[\alpha_1 R_1(x) + \alpha_2 R_2(x)] = \alpha_1 \pounds[R_1(x)] + \alpha_2 \pounds[R_2(x)]$, para todo número complexo α_i e todo polinômio $R_i(x)$, $i = 1, 2$.

Então, $\pounds$ é chamado de funcional de momento determinado pela seqüência de momentos $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. O número μ_n é chamado de momento de ordem n.

Dizemos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais em relação ao funcional de momento $\pounds$ se, considerando m e n números inteiros não negativos, tivermos

(i) $P_n(x)$ é um polinômio de grau n;

(ii) $\pounds[P_m(x)P_n(x)] = 0$ para $m \neq n$;

(iii) $\pounds[P_n(x)^2] \neq 0$.

O funcional de momento $\pounds$ é chamado de definido positivo se $\pounds[P(x)] > 0$ para todo polinômio $P(x)$ não identicamente nulo e não negativo para todo x real.

O próximo teorema, apresentado em 1935 por J. Favard, nos traz condições para que qualquer seqüência de polinômios que satisfaz a uma dada fórmula de recorrência seja uma seqüência de polinômios ortogonais.

Teorema 3.5 (Favard). *Sejam* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *e* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *seqüências arbitrárias de números complexos e* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *definida pela fórmula de recorrência*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x),\ n = 1, 2, \ldots \\ P_{-1}(x) &= 0,\ P_0(x) = 1. \end{aligned}$$

Então, existe um único funcional de momento $\pounds$ *tal que*

$$\pounds[1] = \lambda_1,\ \pounds[P_m(x)P_n(x)] = 0 \text{ para } m \neq n,\ m, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Além disso, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma seqüência de polinômios ortogonais se, e somente se,* $\lambda_n \neq 0$*, enquanto que* $\pounds$ *é definido positivo se, e somente se,* c_n *é real e* $\lambda_n > 0$ *(*$n \geq 1$*).*

A seguir, veremos alguns resultados que mostram o comportamento dos zeros dos polinômios que compõe uma seqüência de polinômios ortogonais.

Seja $E \subset (-\infty, \infty)$. O funcional de momento $\pounds$ é dito definido positivo em E se, e somente se, $\pounds[P(x)] > 0$ para todo polinômio real $P(x)$ não identicamente nulo e não negativo em E. O conjunto E é chamado de conjunto suporte para $\pounds$.

Seja $\pounds$ um funcional de momento definido positivo e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a correspondente seqüência de polinômios ortogonais.

Teorema 3.6. *Seja o intervalo* I *um conjunto suporte para* $\pounds$*. Os zeros de* $P_n(x)$ *são todos reais, simples e estão localizados no interior de* I*.*

No próximo teorema, que analisa o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais, vamos considerar $x_{i,j}$ o j-ésimo zero do polinômio $P_i(x)$, onde $x_{i,1} < x_{i,2} < \ldots < x_{i,n}$, $n \geq 1$.

Teorema 3.7. *Os zeros de $P_{n-1}(x)$ e $P_n(x)$ se entrelaçam, ou seja, $x_{n,j} < x_{n-1,j} < x_{n,j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$.*

A seguir, apresentaremos três lemas que serão úteis para demonstrarmos que uma seqüência de polinômios ortogonais satisfaz à Regra de Sinais de Descartes.

Lema 3.1. *Sejam a seqüência $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ($\alpha_1, \ \alpha_n \neq 0$) tal que $S^-(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = v$ e β_q dado por*

$$\beta_q = a_q\alpha_{q-1} + b_q\alpha_q + c_q\alpha_{q+1}, \ q = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.2.7}$$

onde $a_q, c_q \geq 0$ para $q = 1, \ldots, n$ e $c_1 = c_n = 0$. Suponha que os determinantes

$$\Delta_{pq} = \begin{vmatrix} b_p & c_p & & & & \\ a_{p+1} & b_{p+1} & c_{p+1} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{p+q-1} & b_{p+q-1} & c_{p+q-1} & \\ & & & a_{p+q} & b_{p+q} & \end{vmatrix}$$

satisfaçam $(-1)^{q+1}\Delta_{pq} > 0$, $q = 0, 1, \ldots, s$, onde $s = \min\{n-p, n-v-1\}$ e $p = 1, 2, \ldots, n$. Então, a seqüência $\{\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \alpha_n\}$ possui pelo menos $v+2$ mudanças de sinal (ou um número par a mais).

Demonstração: Consideremos a seqüência $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ da forma $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\ldots$, $\alpha_{m-1} > 0$, $\alpha_m \leq 0$, $\ldots$, $\alpha_{p-1} < 0$, $\alpha_p \geq 0$, $\ldots$, $\alpha_{r-1} > 0$, $\ldots$, $\alpha_l > 0$, $\ldots$, $\alpha_n > 0$. Provaremos que pelo menos um do números β_p, β_{p+1}, $\ldots$, β_{r-1} é negativo. De maneira análoga, ao considerarmos, por exemplo, a subseqüência $\{\beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{p-1}\}$ correspondente à subseqüência $\{\alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{p-1}\}$, onde $\alpha_m \leq 0$, $\ldots$, $\alpha_{p-1} < 0$, podemos provar que existe pelo menos um elemento da subseqüência $\{\beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{p-1}\}$ que é positivo.

Sejam p fixo e $\delta_q = \Delta_{pq}$. Vamos supor que todos os números $\beta_p,\ \beta_{p+1},\ \ldots,\ \beta_{r-1}$ são não negativos.

Como $\beta_p,\ \beta_{p+1} \geq 0$, de (3.2.7) obtemos

$$0 \leq \beta_p - a_p\alpha_{p-1} = b_p\alpha_p + c_p\alpha_{p+1} \Rightarrow c_p\alpha_{p+1} \geq -b_p\alpha_p \tag{3.2.8}$$

e

$$a_{p+1}\alpha_p + c_{p+1}\alpha_{p+2} \geq -b_{p+1}\alpha_{p+1}. \tag{3.2.9}$$

Multiplicando (3.2.8) por a_{p+1} $(a_{p+1} \geq 0)$ e (3.2.9) por $-b_p$ $(-b_p \geq 0)$ e, em seguida, somando-as, obtemos

$$-b_pc_{p+1}\alpha_{p+2} \geq (b_pb_{p+1} - a_{p+1}c_p)\alpha_{p+1},$$

ou seja,

$$-\delta_0c_{p+1}\alpha_{p+2} \geq \delta_1\alpha_{p+1}. \tag{3.2.10}$$

Agora, provemos por indução sobre q que

$$(-1)^{q-2}\delta_{q-1}c_{p+q}\alpha_{p+q+1} \geq (-1)^{q-1}\delta_q\alpha_{p+q} \tag{3.2.11}$$

para $p + q \leq r - 1$.

Observe que (3.2.11) é, de fato, a desigualdade (3.2.11) para $q = 1$.

Como hipótese de indução, consideremos que (3.2.11) se verifica para um valor de q tal que $p + q < r - 1$.

Desde que $\beta_{p+q+1} \geq 0$, temos, por definição, que

$$a_{p+q+1}\alpha_{p+q} + c_{p+q+1}\alpha_{p+q+2} \geq -b_{p+q+1}\alpha_{p+q+1}.$$

Multiplicando esta desigualdade por $(-1)^{q-1}\delta_q$ e a desigualdade (3.2.11) por a_{p+q+1} e somando-as, encontramos

$$(-1)^{q-1}\delta_qc_{p+q+1}\alpha_{p+q+2} \geq (-1)^q(b_{p+q+1}\delta_q - a_{p+q+1}c_{p+q}\delta_{q-1})\alpha_{p+q+1}. \tag{3.2.12}$$

Desenvolvendo δ_{q+1} com respeito aos elementos da última coluna, obtemos que

$$\delta_{q+1} = b_{p+q+1}\delta_q - a_{p+q+1}c_{p+q}\delta_{q-1},$$

o que nos permite reescrever (3.2.12) da seguinte forma

$$(-1)^{q-1}\delta_q c_{p+q+1}\alpha_{p+q+2} \geq (-1)^q \delta_{q+1}\alpha_{p+q+1},$$

que é a desigualdade (3.2.11) com q substituído por $q+1$. Portanto, (3.2.7) está provada por indução.

Desde que $r-p \leq n-v$, $q = 0, 1, \ldots, r-p-1$ (pelas condições impostas pela própria afirmação), então $(-1)^{q-1}\delta_q > 0$.

Portanto, colocando $p+q = r-1$ em (3.2.11), obtemos

$$(-1)^{r-p-2}\delta_{r-p-1}\alpha_{r-1} \leq (-1)^{r-p-3}\delta_{r-p-2}c_{r-1}\alpha_r \leq 0,$$

o que é impossível, pois $(-1)^{r-p-2}\delta_{r-p-1}\alpha_{r-1} \geq 0$. Então, pelo menos um elemento da subseqüência $\{\beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_{r-1}\}$ é negativo.

Logo, de maneira análoga, podemos provar que entre $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ existe pelo menos um número negativo β'_1, entre $\beta_m, \ldots, \beta_{p-1}$ existe pelo menos um número positivo β'_2, entre $\beta_p, \ldots, \beta_{r-1}$ existe pelo menos um número negativo β'_3, ..., entre $\beta_l, \ldots, \beta_n$ existe pelo menos um número negativo β'_{v+1}.

Portanto, $S^-(\alpha_1, \beta'_1, \ldots, \beta'_{v+1}, \alpha_n) = v + 2$. Conseqüentemente, $S^-(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_n) \geq v + 2$. ∎

Lema 3.2. *Seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ $(\alpha_1 \neq 0)$ uma seqüência de números reais com v mudanças de sinal. Consideremos $\beta_q = a_q\alpha_{q-1} + b_q\alpha_q + c_q\alpha_{q+1}$, $q = 1, \ldots, n$, com $a_q, c_q \geq 0$, $a_1 = c_n = 0$ e*

$$D_k = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ & & & a_k & b_k \end{vmatrix}$$

satisfazendo $(-1)^k D_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Então, a seqüência $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_n\}$ tem pelo menos $v+1$ mudanças de sinal.

Demonstração: A afirmação deste lema segue do lema anterior se provarmos que os determinantes

$$\delta_{gk} = \begin{vmatrix} b_g & c_g & & & \\ a_{g+1} & b_{g+1} & c_{g+1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ & & & a_k & b_k \end{vmatrix}$$

satisfazem $(-1)^{k-g+1}\delta_{gk} > 0$ para $g = 1, \ldots, k$, $k = 1, \ldots, n$. A demonstração é feita por indução com respeito à dimensão de δ_{gk}.

Desenvolvendo D_k pela última coluna, obtemos

$$D_k = b_k D_{k-1} - a_k c_{k-1} D_{k-2}$$

ou, equivalentemente,

$$(-b_k)(-1)^{k-1} D_{k-1} = a_k c_{k-1}(-1)^{k-2} D_{k-2} + (-1)^k D_k.$$

Então, $-b_k > 0$, ou seja, $-\delta_{kk} = -b_k > 0$. Portanto, quando δ_{gk} possui dimensão 1, temos $(-1)^{k-g+1}\delta_{gk} > 0$.

Desenvolvendo D_k pela regra de Laplace com respeito às primeiras $g-1$ colunas, obtemos

$$D_k = D_{g-1}\delta_{gk} - D_{g-2} a_g c_{g-1} \delta_{g+1,k}$$

ou

$$(-1)^{g-1} D_{g-1}(-1)^{k-g+1}\delta_{gk} = (-1)^k D_k + (-1)^{g-2} D_{g-2}(-1)^{k-g}\delta_{g+1,k} a_g c_{g-1}. \tag{3.2.13}$$

Como hipótese de indução, suponhamos que $(-1)^{k-g}\delta_{g+1,k} > 0$. Então, de (3.2.13), segue que $(-1)^{k-g+1}\delta_{g,k} > 0$.

Agora, podemos aplicar o lema anterior e concluir que a seqüência $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_n\}$ tem pelo menos $v+2$ mudanças de sinal. Conseqüentemente, $S^-(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,) \geq v+1$. ∎

Lema 3.3. *Sejam* $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x)$ *um polinômio de grau* n *com coeficientes reais,* λ *um número tal que* $\lambda > x_{n+1,n+1}$ *(*$x_{n+1,n+1}$ *é a maior raiz de* $P_{n+1}(x)$*) e*

$$\varphi(x)(x-\lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k P_k(x). \tag{3.2.14}$$

Então, $S^-(c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}) \geq 1 + S^-(b_0, b_1, \ldots, b_n)$.

Demonstração: Comparando os coeficientes de (3.2.14) e utilizando a fórmula de recorrência, obtemos

$$c_k = b_{k-1}\alpha_k + b_k(\omega_{k+1} - \lambda) + b_{k+1}\beta_{k+2},$$

onde $k = 0, 1, \ldots, n+1$ e $b_{-1} = b_{n+1} = b_{n+2} = 0$.

Seja $\Delta_\mu = \begin{vmatrix} \omega_1 - \lambda & \alpha_1 & & & \\ \beta_2 & \omega_2 - \lambda & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{\mu-1} & \omega_{\mu-1} - \lambda & \alpha_{\mu-1} \\ & & & \beta_\mu & \omega_\mu - \lambda \end{vmatrix}$.

Desenvolvendo Δ_μ pela última coluna, obtemos

$$\Delta_\mu = (\omega_\mu - \lambda)\Delta_{\mu-1} - \alpha_{\mu-1}\beta_\mu\Delta_{\mu-2}. \tag{3.2.15}$$

Mostremos agora, por indução, que

$$\Delta_\mu = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu(-1)^\mu P_\mu(\lambda). \tag{3.2.16}$$

De fato, de (3.2.15) temos que $\Delta_1 = \omega_1 - \lambda = -\alpha_1 P_1(\lambda)$.

Como hipótese de indução, suponhamos que $\Delta_k = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(-1)^k P_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, \mu - 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu(-1)^\mu P_\mu(\lambda) &= (-1)^{\mu-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}[(\omega_\mu - \lambda)P_{\mu-1}(\lambda) + \beta_\mu P_{\mu-2}(\lambda)] \\ &= \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}(-1)^{\mu-1}P_{\mu-1}(\lambda)(\omega_\mu - \lambda) \\ &\quad -\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-2}(-1)^{\mu-2}P_{\mu-2}(\lambda)\beta_\mu\alpha_{\mu-1} \\ &= (\omega_\mu - \lambda)\Delta_{\mu-1} - \alpha_{\mu-1}\beta_\mu\Delta_{\mu-2} = \Delta_\mu, \end{aligned}$$

o que demonstra (3.2.16).

Desde que λ é maior que todas as raízes de todos os polinômios $P_\mu(x)$, $\mu = 0, 1, \ldots, n+1$, de (3.2.16) temos que $(-1)^\mu \Delta_\mu = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\mu P_\mu(x) > 0$.

Fazendo $D_k \equiv \Delta_\mu$ no Lema 3.2 e considerando as seqüências $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ correspondentes às seqüências $\{\alpha_k\}$ e $\{\beta_k\}$, respectivamente, concluímos que $S^-(c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}) \geq 1 + S^-(b_0, b_1, \ldots, b_n)$. ■

Estamos em condições de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.8 (Obrechkoff). *Seja a seqüência de polinômios* $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$ *definida através da fórmula de recorrência*

$$\begin{aligned} \alpha_k P_k(x) &= (x - \omega_k) P_{k-1}(x) - \beta_k P_{k-2}(x) \\ P_{-1}(x) &= 0,\ P_0(x) = 1,\ k = 0, \ldots, n, \end{aligned}$$

onde α_k, β_k *e* ω_k *são reais e, além disso,* α_k *e* β_k *são positivos para* $k = 1, \ldots, n$. *Consideremos* F *um polinômio de grau* n *da forma*

$$F(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \ldots + a_n P_n(x)$$

e Z *o número de zeros reais de* $F(x)$. *Então,* $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z \geq 0$.

Demonstração: Pelo Teorema de Favard, temos que existe um funcional de momento $\pounds$ com relação a qual a seqüência de polinômios $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$ é ortogonal. Pelo Teorema 3.6, todos os zeros de $P_n(x)$ são reais, distintos e pertencem ao suporte de $\pounds$. Além disso, os zeros de $P_{n-1}(x)$ e $P_n(x)$ se entrelaçam.

Pelo fato dos α_k serem positivos, segue que os coeficientes dos maiores graus de $P_k(x)$ são positivos.

Consideremos, agora, $x_1, x_2, \ldots, x_z$ as raízes reais de $F(x)$ que são maiores que $x_{n,n}$. Queremos provar que $S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) \geq Z$.

Pelo Lema 3.3 e pelo fato de que $x_1 > x_{n,n}$, concluímos que

$$S^-(a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n-1}) \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - 1,$$

onde $\dfrac{F(x)}{(x-x_1)} = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k P_k(x)$.

Da mesma maneira, usando ainda o Lema 3.3 e que $x_2 > x_{n-1,n-1}$, obtemos

$$S^-(a''_0, a''_1, \ldots, a''_{n-2}) \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - 2,$$

onde $\dfrac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \sum_{k=0}^{n-2} a''_k P_k(x)$.

Continuando este processo, vamos obter

$$S^-(a_0^{(Z)}, a_1^{(Z)}, \ldots, a_{n-Z}^{(Z)}) \leq S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) - Z,$$

onde $\dfrac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_Z)} = \sum_{k=0}^{n-Z} a_k^{(Z)} P_k(x)$.

Desde que, obviamente, $S^-(a_0^{(Z)}, a_1^{(Z)}, \ldots, a_{n-Z}^{(Z)}) \geq 0$, então

$$S^-(a_0, a_1, \ldots, a_n) \geq S^-(a_0^{(Z)}, a_1^{(Z)}, \ldots, a_{n-Z}^{(Z)}) + Z \geq Z,$$

como queríamos demonstrar. ■

Referências Bibliográficas

[1] G. Birkhoff, S. MacLane, "Algebra Moderna", Editorial Teide, Barcelona, 1954.

[2] T. S. Chihara, "An Introduction to Orthogonal Polynomials", Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978.

[3] D. K. Dimitrov, *A problem of Pólya concerning polynomials which obey Descarte's rule of signs*, East J. Approx., **3** (1997), 31-40.

[4] D. K. Dimitrov, "Polinômios e Funções Inteiras com Zeros Reais", Tese de Livre-Docência, IBILCE/UNESP, São José do Rio Preto (SP), 1998.

[5] J. N. Franklin, "Matrix Theory", Prentice-Hall, Inc., Englewood Clifs, New Jersey, 1968.

[6] F. R. Gantmacher, "The Theory of Matrices", vol II, Chelsea Publishing Company, New York, 1989.

[7] R. A. Horn, C. A. Johnson, "Matrix Analysis", Cambridge University Press, New York, 1985.

[8] M. Marden, "Geometry of Polynomials", Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.

[9] G. V. Milovanóvic, D. S. Mitrinovic, Th. M. Rassias, "Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros", World Scientific, Singapore, 1994.

[10] T. Muir, "A Treatise on the Theory of Determinants", Dover Publications, New York, 1960.

[11] N. Obrechkoff, "Zeros of Polynomials", Publ. Bulg. Acad. Sci., Sofia, 1963.

[12] G. Pólya, G. Szegő, "Problems and Theorems in Analysis", vol. I and II, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[13] I. J. Schoenberg, *Zur Abzählung der reelen Wurzeln algebraischer Gleichungen*, Math. Z., **38** (1934), 546-564.