

GABRIELA DE OLIVEIRA NASCIMENTO BRASSAROTE

**MODELAGEM FUNCIONAL E ESTOCÁSTICA DE
SÉRIES TEMPORAIS PARA A ATUALIZAÇÃO E
ESTIMATIVA DA
COMPONENTE ALTIMÉTRICA: APLICAÇÃO NO
SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO**

GABRIELA DE OLIVEIRA NASCIMENTO BRASSAROTE

**MODELAGEM FUNCIONAL E ESTOCÁSTICA DE
SÉRIES TEMPORAIS PARA A ATUALIZAÇÃO E
ESTIMATIVA DA
COMPONENTE ALTIMÉTRICA: APLICAÇÃO NO
SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Cartográficas da Faculdade de Ciências e Tecnologia — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Presidente Prudente/SP, para a obtenção do título de Doutora em Ciências Cartográficas.

Dr. João Francisco Galera Monico
(Orientador)

Dra. Eniuce Menezes de Souza
(Coorientadora)

Presidente Prudente/SP
2020

B823m	Brassarote, Gabriela de Oliveira Nascimento Modelagem funcional e estocástica de séries temporais para a atualização e estimativa da componente altimétrica: aplicação no sistema geodésico brasileiro / Gabriela de Oliveira Nascimento Brassarote. -- Presidente Prudente, 2020 117 f. : il., tabs., mapas Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente Orientador: João Francisco Galera Monico Coorientadora: Eniuce Menezes de Souza 1. Geodesia. 2. Global Navigation Satellite System. 3. Análise de séries temporais. 4. Modelos matemáticos. I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

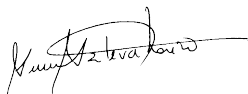
TÍTULO DA TESE: Modelagem funcional e estocástica de séries temporais para a atualização e estimativa da componente altimétrica: aplicação no sistema geodésico brasileiro

AUTORA: GABRIELA DE OLIVEIRA NASCIMENTO BRASSAROTE

ORIENTADOR: JOÃO FRANCISCO GALERA MONICO

COORIENTADORA: ENIUCE MENEZES DE SOUZA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Doutora em CIÊNCIAS CARTOGRÁFICAS, área: Aquisição, Análise e Representação de Informações Espaciais pela Comissão Examinadora:

A handwritten signature in black ink, appearing to read "João Francisco Galera Monico", is positioned above the name of the orientador.

Prof. Dr. JOÃO FRANCISCO GALERA MONICO

Departamento de Cartografia / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. MANOEL IVANILDO SILVESTRE BEZERRA (**PARTICIPAÇÃO VIA VIDEOCONFERÊNCIA**)

Departamento de Estatística / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. GIULIANO SANT'ANNA MAROTTA (**PARTICIPAÇÃO VIA VIDEOCONFERÊNCIA**)

Instituto de Geociências / Universidade de Brasília

Prof. Dr. HAROLDO ANTONIO MARQUES (**PARTICIPAÇÃO VIA VIDEOCONFERÊNCIA**)

Seção de Engenharia Cartográfica / Instituto Militar de Engenharia

Prof. Dr. SILVIO ROGÉRIO CORREIA DE FREITAS (**PARTICIPAÇÃO VIA VIDEOCONFERÊNCIA**)

Departamento de Geomática / Universidade Federal do Paraná

Presidente Prudente, 30 de julho de 2020

DADOS CURRICULARES

GABRIELA DE OLIVEIRA NASCIMENTO BRASSAROTE

Nascimento	23/08/1990 – Dracena/SP
Filiação	Ana Regina de Oliveira Nascimento Luís Carlos do Nascimento
2008 - 2011	Curso de Graduação Licenciatura em Matemática Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Câmpus de Presidente Prudente/SP
2012 - 2014	Curso de Pós-Graduação Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Câmpus de Presidente Prudente/SP
2015 - 2020	Curso de Pós-Graduação Doutorado em Ciências Cartográficas Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Câmpus de Presidente Prudente/SP

*Ao meu amado filho Davi, meu maior incentivo e
inspiração.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelas oportunidades concedidas, pela Sua presença e fiel ajuda em cada momento de minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Francisco Galera Monico pela confiança depositada em mim, apoio, paciência e ensinamentos ao longo desses anos, que tanto contribuíram para o meu desenvolvimento como pesquisadora.

À minha coorientadora Prof. Dra. Eniuce Menezes de Souza, que tanto me motivou e gentilmente compartilhou muito de seu conhecimento sobre *wavelets* comigo.

Aos membros da banca de defesa Profs. Dr. Silvio Rogério Correia de Freitas, Dr. Manoel Ivanildo Silvestre Bezerra, Dr. Giuliano Sant'anna Marotta e Dr. Haroldo Antônio Marques pela revisão e contribuições dadas para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ciências Cartográficas (PPGCC) por contribuírem com minha formação acadêmica e científica. Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação por serem sempre tão dedicados e prestativos.

À agência de fomento pela concessão da bolsa de doutorado. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A todos os colegas do GEGE (Grupo de Estudo em Geodésia Espacial) pela convivência e momentos de troca de conhecimento.

Às minhas queridas amigas Tayná, Samara, Crislaine e Mariana pelo carinho, incentivo, paciência e companhia em todos os momentos do doutorado e da vida.

À toda minha amada família, pelo apoio emocional e encorajamento. Em especial, aos meu pais, Ana Regina e Luís Carlos, e irmã Letícia, por todo amor e disposição em me ajudar com meu filhinho nos dias da minha ausência, ao meu esposo Samuel, por cuidar com tanto zelo da nossa família e sempre acreditar em mim, e ao meu filho Davi, por ser a maior motivação da minha vida.

"Se não puder voar, corra.
Se não puder correr, ande.
Se não puder andar, rasteje,
mas continue sempre em frente de qualquer jeito!"

Martin Luther King

RESUMO

A alta acurácia exigida em algumas aplicações *Global Navigation Satellite System* (GNSS) trouxe, nas últimas décadas, um crescente investimento na melhoria da qualidade dos equipamentos utilizados nos levantamentos GNSS, no desenvolvimento de métodos de posicionamento e na modelagem adequada dos erros na etapa de processamento dos dados. Com todo esse aprimoramento do sistema de posicionamento a incerteza das coordenadas estimadas com o GNSS passou a ser tão pequena que os resultados se tornaram sensíveis a pequenas variações, tais como as decorrentes do movimento crustal. Assim, a compatibilização de coordenadas, não só entre referenciais distintos, mas também em termos de épocas (origem), tornou-se necessária para preservar a qualidade dos resultados obtidos. Nesse sentido, diversos modelos geodésicos e geofísicos têm surgido com o intuito de fornecer a variação horizontal (velocidade) de um ponto sobre a superfície terrestre e viabilizar a atualização de suas coordenadas esféricas entre épocas distintas. Esses modelos, no entanto, geralmente não contemplam a evolução temporal da coordenada altimétrica que, por conter efeitos periódicos significativos, não pode ser descrita por um modelo de velocidade linear. Portanto, não existe atualmente um modelo regional que descreva a variação vertical de um ponto com alta qualidade e viabilize a atualização de sua coordenada altimétrica. As investigações nesse trabalho visam analisar as séries temporais de coordenada vertical de 65 estações GNSS distribuídas pelo Brasil, por meio da Transformada *Wavelet* Contínua (TWC) e do método *Non-negative least-squares variance component estimation* (NNLS-VCE), com o intuito de identificar os efeitos sistemáticos e fenômenos geofísicos que afetam a coordenada altimétrica das estações e o conteúdo de ruído das séries, respectivamente, e assim estimar um modelo que descreva a variação temporal dessa coordenada para cada uma das estações analisadas. A partir desses resultados foi proposta uma metodologia para a estimativa do modelo de variação vertical da posição de um usuário GNSS dentro do território brasileiro, de modo a viabilizar a compatibilização da componente altimétrica dessa posição entre épocas distintas, sendo essa a principal inovação desse trabalho. No experimento realizado com cinco estações GNSS permanentes da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC), os modelos estimados a partir dessa metodologia foram comparados com as séries de coordenada vertical das estações. Os resultados mostraram que a acurácia dos modelos estimados é da ordem de 7 milímetros, na média.

Palavras-chave: Atualização de coordenadas. Modelagem de séries temporais de coordenadas GNSS. Análise *wavelet*. Estimativa de componentes de variância. Análise de ruídos. Modelos funcional e estocástico.

ABSTRACT

The high accuracy required in some Global Navigation Satellite System (GNSS) applications has brought, in the last decades, a growing investment in improving the quality of equipment used in GNSS surveying, in the development of positioning methods and in the efficient errors modeling during data processing. With all this improvement in the positioning system, the uncertainty of the coordinates estimated from GNSS became so small that the results are sensitives to variations from the crustal movement. Thus, transformation of GNSS coordinates not only between different reference systems, but also in terms of epochs (origin), became necessary to preserve the quality of the obtained results. In this sense, several geodetic and geophysical models have emerged in order to provide the horizontal variation (velocity) of a point on the earth's surface and make it possible to update its spherical coordinates between epochs. These models, however, generally do not contemplate the temporal evolution of the altimetric component, which contains significant periodic effects. They cannot be described by a linear velocity model. Therefore, there is currently no regional model that describes the vertical variation of the coordinates of a point with high quality and makes it possible to update its altimetric component. The investigations in this work aim to analyze the vertical coordinate time series of 65 GNSS stations distributed throughout Brazil using the Continuous Wavelet Transform (TWC), in order to identify the systematic effects and geophysical phenomena that affect the altimetric component of the stations, and the Non-negative least-squares variance component estimation (NNLS-VCE) method, in order to characterize the noise content of the series, and thus to estimate a model that describes the temporal variation of this coordinate for each analyzed stations. From these results, a methodology was proposed to estimate the vertical deformation model for the user's position within the Brazilian territory, in order to enable the transformation of the vertical component between different epochs, which is the main innovation of this work. In the experiment carried out with five permanent GNSS stations of the Brazilian Network for Continuous Monitoring (RBMC), the estimated models from this methodology were compared with the vertical coordinate time series of the stations. The results showed that the accuracy of the estimated models is around 7 millimeters, on average.

Keywords: GNSS Coordinate Update. GNSS coordinate time series analysis. Wavelet analysis. Variance component estimation. Noise analysis. Deterministic and stochastic modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Elementos que formam o ciclo hidrológico.....	26
Figura 2 - Bacias hidrográficas no Brasil.....	27
Figura 3 - Resposta por carregamento da crosta.....	28
Figura 4 - Coordenadas do movimento polar	28
Figura 5 - Representação do ruído branco, ruído rosa e caminho aleatório no domínio do tempo.....	30
Figura 6 - Séries temporais de coordenadas de estações GPS localizadas em Porto Velho – RO (POVE) e Salvador – BA (SAVO).....	36
Figura 7 - Direção e sentido do deslocamento das estações pertencentes à rede SIRGAS-CON.....	36
Figura 8 - Saltos (<i>offsets</i>) causados nas coordenadas da estação ANTC, no Chile, devido ao terremoto ocorrido no início de 2010.....	38
Figura 9 - Representação da função janela da Transformada Janelada de Fourier.....	48
Figura 10 - Representação da função janela da Transformada <i>wavelet</i>	49
Figura 11 - Wavelets de Daubechies $\psi(t)$ com $p = 2, 4, 6, 10$ momentos nulos.....	51
Figura 12 - <i>Wavelets Splines</i> $\psi(t)$ com $p = 4$ e 5 momentos nulos.....	52
Figura 13 - <i>Wavelet de Haar</i> $\psi(t)$	53
Figura 14 - <i>Wavelet Symmlets</i> $\psi(t)$ com $p = 4, 5, 6$ e 10 momentos nulos.....	54
Figura 15 - <i>Wavelet Coiflets</i> com $L = 2, 4, 8$ e 10 coeficientes.....	54
Figura 16 - <i>Wavelets de Meyer</i> (à esquerda) e Chapéu mexicano (à direita).....	55
Figura 17 - <i>Wavelets</i> Biortogonais de ordem $L = 2$ e 4.....	55
Figura 18 - <i>Wavelet de Morlet</i> : parte real (em azul) e imaginária (em vermelho).....	56
Figura 19 - Fluxograma da metodologia envolvida na modelagem das séries temporais de coordenadas.....	63
Figura 20 - Fluxograma da metodologia envolvida na estimativa do modelo de variação vertical para a posição de um usuário.....	66
Figura 21 - Seleção das estações a serem utilizadas na estimativa do modelo de variação vertical do usuário	68

Figura 22 - Obtenção da coordenada U nas épocas t_1 e t_2 , a partir dos dados da série de coordenada, adotando-se U_0 como a coordenada de origem.....	70
Figura 23 - Localização geográfica das estações modeladas.....	73
Figura 24 - Número de saltos identificado em cada série das estações GNSS analisadas.....	74
Figura 25 - Número de saltos associados a terremotos em cada uma das séries de estações analisadas.....	75
Figura 26 - Série de coordenada vertical da estação POVE, antes (esquerda) e após (direita) remoção dos saltos (identificados pela linha vertical em verde).....	76
Figura 27 - Série de coordenada vertical da estação POVE, antes (esquerda) e após (direita) remoção dos <i>outliers</i> e interpolação dos <i>gaps</i>	76
Figura 28 - Análise <i>wavelet</i> da série de coordenada vertical (U) da estação POVE.....	78
Figura 29 - Histograma dos períodos contidos nas séries de coordenadas das 65 estações analisadas.....	79
Figura 30 - Distribuição das estações cuja série de coordenada vertical (U) contém o período p em ano (em azul), bem como das estações que não o contém (em branco).....	81
Figura 31 - Distribuição das estações cuja série de coordenada vertical (U) contém o período p em ano (em azul), bem como das estações que não o contém (em branco).....	82
Figura 32 - Distribuição das estações cuja série de coordenada vertical (U_p) contém o período p em ano (em azul), bem como das estações que não o contém (em branco).....	83
Figura 33 - Distribuição das estações cuja série de coordenada vertical (U_p) contém o período p em ano (em azul), bem como das estações que não o contém (em branco).....	84
Figura 34 - Amplitude de <i>white noise</i> σ_{wn}^2 nas séries de coordenadas verticais das estações analisadas.....	88
Figura 35 - Amplitude de <i>flicker noise</i> σ_{fn}^2 nas séries de coordenadas verticais das estações analisadas	88
Figura 36 - Amplitude de <i>random walk</i> σ_{rw}^2 nas séries de coordenadas verticais das estações analisadas	89
Figura 37 - Modelo estocástico adotado nas séries das estações analisadas. Combinação de <i>white noise</i> e <i>flicker noise</i> , representada pelo círculo azul; combinação de <i>white noise</i> e <i>random walk</i> , em vermelho.....	90
Figura 38 - Modelo estimado para a série de coordenada vertical da estação POVE com (à esquerda) e sem correção dos saltos (à direita). Série de coordenada vertical da estação POVE	

(azul), modelo estimado sobreposto à série (vermelho) e identificação dos <i>saltos</i> (linha vertical verde).....	91
Figura 39 - Pontos escolhidos para atualização das coordenadas (losango vermelho) e as 65 estações GNSS modeladas (círculo azul).....	98
Figura 40 - Estações utilizadas na modelagem de cada ponto escolhido.....	101
Figura 41 - Modelo de variação vertical estimado e série temporal de coordenada vertical para cada estação (com correção dos saltos).....	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Frequências fundamentais da maré	24
Tabela 2 - Características de algumas funções <i>wavelets</i>	53
Tabela 3 - Estações GNSS modeladas	71
Tabela 4 - Estimativa de componentes de variância e teste- <i>w</i> das séries de coordenadas.....	85
Tabela 5 - Análise da acurácia do modelo estimado para cada série de coordenada vertical analisada.....	92
Tabela 6 - Análise do resíduo resultante entre a série e o modelo ajustado. Estatística e p-valor para os testes <i>Jarque-Bera</i> e <i>Durbin-Watson</i>	95
Tabela 7 - Coordenadas e respectivas precisões obtidas pelo serviço de PPP-IBGE em SIRGAS2000, época 2020,1752.....	97
Tabela 8 - Distância (<i>d</i>) e azimuth (<i>az</i>) das 65 estações GNSS analisadas com relação a posição dos pontos modelados.	98
Tabela 9 - Períodos de efeitos cíclicos considerados na estimativa do modelo de variação vertical para a posição de cada ponto.....	102
Tabela 10 - Análise da qualidade dos modelos estimados	105
Tabela 11 - Coordenadas oficiais em SIRGAS2000, época 2000,4, e suas respectivas precisões	106
Tabela 12 - Coordenadas atualizadas de SIRGAS2000, época 2020,1752 para a época 2000,4 e discrepância em relação às coordenadas de referência.....	106

LISTA DE SIGLAS

ANOVA	–	<i>Analysis of Variance</i>
APPS	–	<i>Automatic Precise Positioning Service</i>
BIQUE	–	<i>Best Invariant Quadratic Unbiased Estimation</i>
CIO	–	<i>Conventional International Origin</i>
GAMIT	–	<i>GNSS at MIT (Massachusetts Institute of Technology)</i>
GNSS	–	<i>Global Navigation Satellite Systems</i>
GPS	–	<i>Global Positioning Systems</i>
IGS	–	<i>International GNSS Service</i>
ITRF	–	<i>International Terrestrial Reference Frame</i>
ITRS	–	<i>International Terrestrial Reference System</i>
JPL	–	<i>Jet Propulsion Laboratory</i>
KKT	–	<i>Karush–Kuhn–Tucker</i>
LS-VCE	–	<i>Least-squares Variance Component Estimation</i>
MAE	–	<i>Mean Absolute Error</i>
MINQUE	–	<i>Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation</i>
MLE	–	<i>Maximum-Likelihood Estimation</i>
MMQ	–	Método dos Mínimos Quadrados
MVC	–	Matriz Variância-Covariância
NGL	–	<i>Nevada Geodetic Laboratory</i>
NNLS-VCE	–	<i>Non-Negative Least-Squares Variance Component Estimation</i>
NNRNUVEL-1A	–	<i>No Net Rotation – Northern University Velocity Model 1A</i>
PPP	–	Posicionamento por Ponto Preciso
PPS	–	Posicionamento por Ponto Simples
RBMC	–	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
RMSE	–	<i>Root Mean Square Error</i>
SGB	–	Sistema Geodésico Brasileiro
SINEX	–	<i>Software/technique INdependent EXchange format</i>
SIRGAS	–	Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas
SOPAC	–	<i>Script Orbit and Permanent Array Center</i>
TF	–	Transformada de Fourier
TJF	–	Transformada Janelada de Fourier
TW	–	Transformada <i>Wavelet</i>
TWC	–	Transformada <i>Wavelet</i> Contínua

TWD	– Transformada <i>Wavelet</i> Discreta
TWND	– Transformada <i>Wavelet</i> Discreta Não Decimada
VEMOS	– <i>Velocity Model of</i> SIRGAS
WGS84	– <i>World Geodetic System</i>

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 Objetivos	19
1.2 Justificativa	20
1.3 Conteúdo da tese	21
2 SÉRIES TEMPORAIS DE COORDENADAS GNSS	22
2.1 Efeitos geodinâmicos que afetam as coordenadas GNSS	22
2.1.1 Marés	23
2.1.2 Carga oceânica	24
2.1.3 Carga atmosférica	25
2.1.4 Carga hidrológica	25
2.1.5 Deformação por carregamento da crosta	27
2.1.6 Movimento do Polo	28
2.2 Ruídos presentes nas séries de coordenadas	29
3 ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS DE COORDENADAS GNSS	34
3.1 Modelo Funcional	34
3.2 Modelo Estocástico	40
3.2.1 Estimativa de componentes de variância a partir do MMQ	41
3.2.2 Identificação do modelo estocástico adequado (Teste-w)	45
4 ANÁLISE WAVELET	47
4.1 De Fourier a wavelets	47
4.2 Funções wavelets	50
4.2.1 Características das wavelets	50
4.2.2 A escolha da função wavelet	56
4.3 Transformada wavelet	57
4.3.1 Transformada wavelet contínua (TWC)	57
4.3.2 Transformada wavelet discreta (TWD)	58
4.4 Periodograma wavelet e espectro global	60
5 METODOLOGIA	61
5.1 Análise de séries temporais de coordenadas GNSS	61
5.2 Modelo de variação vertical	65
6 RESULTADOS E ANÁLISES	71
6.1 Análise de séries temporais de coordenadas GNSS	71
6.2 Modelo de variação vertical	96
7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	107
7.1 Conclusões	107
7.2 Recomendações	109
REFERÊNCIAS	111

1 INTRODUÇÃO

A parte mais externa da Terra é dividida em blocos constituídos pela crosta e parte do manto superior, que compreendem grandes porções oceânicas e continentais, denominados placas litosféricas. Essas placas se movimentam continuamente no tempo em diferentes direções e magnitudes, de acordo com a região em que estão localizadas. Em decorrência desse movimento, a posição de um ponto localizado sobre uma das placas também varia com o tempo, tornando-se dependente da época na qual foram obtidas (PEREZ, 2002).

As coordenadas geodésicas de um ponto sobre a superfície terrestre são determinadas com relação a um referencial geodésico específico, previamente definido e realizado. O referencial terrestre utilizado internacionalmente é o *International Terrestrial Reference System* (ITRS). Esse sistema de referência é materializado pela coleta de observações a partir de pontos devidamente monumentalizados, resultando essencialmente em uma lista de coordenadas (com seus valores de variância e covariância) e velocidades das estações que compõem o sistema de referência, em uma época específica. Como as placas litosféricas estão em constante movimento, as coordenadas das estações utilizadas na determinação do sistema de referência, localizadas na superfície terrestre, devem ser periodicamente recalculadas. Por isso, já foram disponibilizadas diversas realizações do ITRS até hoje. Cada uma das realizações é denominada *International Terrestrial Reference Frame* (ITRF)-yy, em que o número yy especifica os dois últimos dígitos do último ano cujos dados contribuíram para a materialização do sistema de referência (a partir do ano 2000 a designação passou a ser ITRFyyyy). Desde a primeira realização do ITRS, denominada ITRF88, doze outras versões (ITRF-89, ITRF-90, ITRF-91, ITRF-92, ITRF-93, ITRF-94, ITRF-96, ITRF-97, ITRF2000, ITRF2005, ITRF2008 e ITRF2014) já foram materializadas e publicadas.

Dependendo do referencial e época adotados pode-se obter valores distintos para as coordenadas de um mesmo ponto. Em aplicações de geodinâmica ou no posicionamento geodésico de alta acurácia, a compatibilização entre sistemas de referência considerando a evolução temporal das coordenadas são de extrema importância. Caso contrário, a incerteza das coordenadas resultantes seria maior que as variações devido à inconsistência dos referenciais envolvidos (SAPUCCI et al., 2000).

A compatibilização entre sistemas de referência pode ser realizada aplicando-se a transformada generalizada de *Helmert* (14 parâmetros), que envolve a utilização da velocidade da estação e dos parâmetros de transformação e suas variações entre os referenciais que serão

compatibilizados. Os parâmetros de transformação que relacionam as realizações do ITRS consistem em três translações, três rotações e um fator de escala (com suas respectivas taxas de variação), podendo ser obtidas em ITRF (2020). Quando as taxas de variação entre os referenciais envolvidos não estão disponíveis ou, por serem pequenas, podem ser desprezadas, tem-se a possibilidade de aplicar a transformada de *Helmert* com 7 parâmetros. Nesse caso, primeiramente deve-se atualizar as coordenadas para a época de interesse e, então, compatibilizar as coordenadas em termos de sistema de referência (SAPUCCI et al., 2000).

No Brasil, o sistema de referência oficial é o Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas (SIRGAS2000), época 2000,4. No entanto, ao efetuar o posicionamento por ponto com *Global Positioning System* (GPS), por exemplo, as coordenadas serão obtidas no mesmo referencial das efemérides utilizadas: *World Geodetic System* (WGS84) no caso do Posicionamento por Ponto Simples (PPS), que utiliza efemérides transmitidas; e ITRF2014 no caso do Posicionamento por Ponto Preciso (PPP), que utiliza as efemérides precisas produzidas pelo *International GNSS Service* (IGS), *Jet Propulsion Laboratory* (JPL), entre outros. Desta forma, em aplicações de interesse oficial, as coordenadas obtidas em WGS84 ou ITRF2014, associadas à época de coleta dos dados, deverão ser transformadas para SIRGAS2000, época de referência 2000,4. Os parâmetros de transformação entre as realizações do ITRS podem também ser aplicados para a compatibilização de referenciais regionais que estejam associadas a um dos vários ITRFs, tal como o SIRGAS2000, que é compatível com o ITRF2000 (época 1997,0) a menos da época em que foram materializados. Cabe ressaltar ainda que, a mais nova realização do WGS84 (G1762) coincide com o ITRF2014 no nível centimétrico, não havendo, portanto, parâmetros oficiais de transformação que relacione esses referenciais.

Conforme citado anteriormente, para realizar a compatibilização entre as coordenadas de uma estação associadas a diferentes referenciais e obtidos em épocas distintas, é necessário conhecer além dos parâmetros de transformação entre os referenciais, também a velocidade com que as coordenadas dessa estação variam com relação ao tempo. Um valor aproximado do vetor velocidade dessa estação pode ser obtido por meio de modelos geodésicos e geofísicos, tais como o *VELOCITY Model of Sirgas* (VEMOS) e o *No Net Rotation – Northern University Velocity Model 1A* (NNRNUVEL-1A). O movimento relativo das placas litosféricas resultante destes modelos é descrito pelos vetores de rotação de *Euler*, que são proporcionais às velocidades angulares, podendo ser transformados em velocidades das estações (DREWES; SÁNCHEZ, 2020).

O VEMOS é o modelo de velocidade recomendado pelo SIRGAS para o cálculo das velocidades de pontos na América do Sul e Caribe. O VEMOS2017, que é a versão mais recente desse modelo (válido de 1 de janeiro de 2014 a 28 de janeiro de 2017), corresponde a uma grade de $1^\circ \times 1^\circ$ de velocidade referenciada ao ITRF2014, de modo que as velocidades horizontais fornecidas para cada ponto da grade podem ser interpoladas para a posição do usuário. Com base na velocidade estimada é possível que o usuário realize a propagação das coordenadas esféricas de sua posição entre épocas distintas. No entanto, os modelos de velocidade não contemplam a propagação da coordenada altimétrica, uma vez que as variações verticais são, na maioria dos casos, decorrentes de movimentos locais, dificultando a modelagem regional (DREWES; SÁNCHEZ, 2020). Essa é a questão central considerada neste estudo.

A proposta desta pesquisa é a estimativa de um modelo que caracterize as deslocamentos verticais, com especial interesse no território brasileiro, e que viabilize a atualização da coordenada altimétrica, junto das coordenadas esféricas, que já é contemplada pelo VEMOS2017. Espera-se com este modelo, contribuir com análises geodinâmicas e aplicações de alta acurácia na área de Geodésia no Brasil.

Para atingir tal objetivo, partimos do pressuposto que os efeitos sistemáticos não modelados e fenômenos geofísicos tais como, os efeitos de cintilação ionosférica, de marés e de carga hidrológica, por exemplo, ocorrem regionalmente afetando semelhantemente a coordenada altimétrica de pontos próximos uns dos outros. Esses efeitos de natureza periódica, podem ser identificados pela análise de frequência da série temporal de coordenada vertical (U) de uma estação *Global Navigation Satellite System* (GNSS) e são a base para a estimativa do modelo que descreve a variabilidade da coordenada altimétrica dessa estação. A análise das séries de coordenada vertical de várias estações em uma dada região de estudo, permite identificar efeitos periódicos comuns que caracterizam tal região. Um usuário GNSS dentro dessa região, possivelmente, terá as coordenadas de sua posição influenciada por esses mesmos efeitos. Portanto, os efeitos identificados e parâmetros (que compõem o modelo de variação vertical) estimados para cada estação analisada podem ser estendidos (por interpolação) ao usuário, de modo a estimar o modelo de variação vertical para sua posição. O modelo estimado possibilita o entendimento da variabilidade da componente altimétrica ao longo do tempo, a previsão de coordenadas e ainda a compatibilização da componente altimétrica entre épocas distintas.

O desenvolvimento dessa pesquisa só é possível graças à operacionalização das redes ativas, dentre as quais pode-se citar a rede do IGS, JPL, Sistema de Referência Geocêntrico

para as Américas - de funcionamento Contínuo (SIRGAS-CON), Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC) e ainda a rede de estações processadas pelo *Nevada Geodetic Laboratory* (NGL), utilizada neste trabalho. O monitoramento contínuo de pontos pertencentes às redes, que se dá por meio da coleta e processamento das observações GNSS ao longo do tempo, permite determinar posição e velocidade relacionadas às estações. As séries temporais de coordenadas GNSS advindas das soluções diárias ou semanais dessas redes, com dados em torno de dez anos ou mais, representam uma considerável amostragem para a análise da variação da componente altimétrica e o acompanhamento da evolução temporal de determinados fenômenos geofísicos.

1.1 Objetivos

O objetivo geral dessa pesquisa é a estimativa do modelo de variação vertical para usuários GNSS dentro do Brasil. Este modelo contribuirá para uma melhor descrição da deformação da crosta terrestre em cada região do território brasileiro e viabilizará a compatibilização, entre épocas distintas, da coordenada altimétrica de um ponto pertencente ao Brasil.

Para atingir o objetivo proposto, comparecem como objetivos específicos:

- Análise das séries de coordenada vertical (U) de estações GNSS pertencentes ao Brasil, com o intuito de estimar os efeitos sistemáticos e fenômenos geofísicos (de natureza periódica) que afetam a coordenada altimétrica das estações;
- Análise dos ruídos contidos nas séries de coordenada vertical das estações GNSS, estimando as componentes de variância associadas a cada ruído;
- Construção da Matriz Variância-Covariância (MVC) das observações, levando em consideração os ruídos identificados em cada série;
- Estimativa do modelo que descreva realisticamente a variação da série vertical de cada estação GNSS analisada;
- Validação do modelo de deformação vertical estimado, utilizando-o como meio de atualização da coordenada altimétrica de um usuário GNSS.

1.2 Justificativa

O GNSS tem se tornado uma tecnologia indispensável para as atividades humanas que necessitam de posicionamento. O número de aplicações é muito amplo, indo desde a geodésia, geodinâmica, agricultura de precisão, meteorologia, aeronomia, navegação, até as atividades de lazer. Para muitas dessas aplicações, a alta acurácia do posicionamento é fundamental.

As observações GNSS que permitem determinar posição, velocidade e tempo, estão sujeitas a erros provenientes de diversas fontes, tais como os satélites, a propagação do sinal, o receptor/antena e a própria estação (MONICO, 2008). Esses erros, caso não sejam modelados, acabam por prejudicar a qualidade do posicionamento. Nesse sentido, na busca por melhorar a acurácia dos resultados obtidos no posicionamento por satélites, nas últimas décadas tem-se investido cada vez mais na melhoria da precisão dos aparelhos utilizados no levantamento GNSS, no desenvolvimento de novos métodos de posicionamento e na modelagem adequada dos erros na etapa de processamento dos dados. A alta acurácia alcançada faz com que as coordenadas estimadas sejam sensíveis a pequenas variações, tais como as decorrentes do movimento crustal. Deste modo, a compatibilização de coordenadas em termos de épocas é necessária para preservar a qualidade dos resultados obtidos.

Para realizar a atualização de coordenadas de um ponto entre épocas distintas é necessário conhecer a variação da posição desse ponto no período entre as épocas em questão. O vetor velocidade desse ponto descreve a direção e magnitude do movimento horizontal da crosta a que ele está sujeito, podendo ser obtido através de modelos geodésicos e geofísicos (VEMOS e NNRNUVEL-1A, por exemplo). Por meio dele é possível realizar a atualização das coordenadas esféricas (E, N). Estes modelos, no entanto, não fornecem a variação temporal da coordenada altimétrica (U) que, por ser influenciada por efeitos periódicos significativos, não pode ser descrita por um modelo de velocidade linear. Portanto, não existe atualmente um modelo regional que descreva a variação vertical de um ponto e viabilize a atualização da coordenada altimétrica do mesmo.

As investigações nesse trabalho visam caracterizar os efeitos sistemáticos e fenômenos geofísicos que afetam a coordenada altimétrica das estações GNSS distribuídas no território brasileiro e estimar o modelo que descreve a variação da componente de coordenada U para cada uma delas. Os modelos estimados, além de contribuir para a caracterização da deformação vertical no Brasil, através da identificação de elementos comuns a cada região de estudo, podem ainda ser estendidos a um usuário GNSS dentro dessa região. O modelo de variação vertical

para a posição do usuário pode ser estimado por meio da interpolação das componentes dos modelos associados às estações GNSS ao redor do mesmo. A principal contribuição científica desse trabalho é a possibilidade de atualização da componente de coordenada altimétrica por meio do modelo de variação vertical estimado. Espera-se com isso contribuir com as aplicações de alta acurácia no âmbito do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB).

1.3 Conteúdo da tese

A organização deste trabalho se dá da seguinte forma:

No capítulo 1 é realizada uma introdução ao assunto e apresentados os objetivos e a justificativa dessa pesquisa.

Os capítulos 2, 3 e 4 são dedicados à revisão bibliográfica dos temas relacionados ao desenvolvimento dessa pesquisa. No capítulo 2, são apresentados: o conceito de séries temporais de coordenadas GNSS, os efeitos geodinâmicos que afetam as coordenadas de uma estação GNSS e o conteúdo de ruído das séries de coordenadas. No capítulo 3 são abordados assuntos relacionados à análise de séries temporais de coordenadas GNSS, tais como, os modelos funcional e estocástico envolvidos na modelagem das séries de coordenadas, a caracterização dos ruídos contidos nas séries a partir da estimativa de componentes de variância pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) e o teste- w utilizado na identificação do modelo estocástico adequado para as séries. O capítulo 4 é destinado à Teoria *wavelet*, que será empregada na análise das séries de coordenada vertical das estações GNSS como ferramenta para a estimativa dos efeitos de natureza periódica que afetam a posição da estação.

No capítulo 5 (dividido em duas seções) é apresentada a metodologia utilizada no desenvolvimento dessa pesquisa. A primeira seção mostra os passos realizados para a análise das séries temporais de coordenada vertical de estações GNSS no Brasil. Já a segunda, apresenta a metodologia utilizada na estimativa do modelo de variação vertical da posição de um usuário GNSS no território brasileiro.

O capítulo 6 destina-se aos resultados da análise das séries de coordenadas (Seção 6.1) e da aplicação do modelo de variação vertical estimado na atualização da componente de coordenada altimétrica (Seção 6.2).

Por fim, o sétimo capítulo descreve as considerações e próximos passos do desenvolvimento dessa pesquisa de doutorado.

2 SÉRIES TEMPORAIS DE COORDENADAS GNSS

O processamento das observáveis coletadas por um receptor GNSS ao longo do tempo dá origem, dentre outras informações, a uma sequência de coordenadas do ponto em função do tempo, denominada série temporal de coordenadas GNSS. Mesmo com a realização de uma modelagem adequada no processamento de dados GNSS, ainda podem restar erros não modelados (ruídos), os quais devem contaminar as séries temporais das coordenadas obtidas com as observáveis GNSS (MARQUES, 2013). Deste modo, uma série temporal de coordenadas GNSS $\{Y_t, t = 1, \dots, n\}$ é composta da parte determinística, sinal $F(t)$, e da parte estocástica, ruído (a_t), como segue (MORETTIN; TOLOI, 2004):

$$Y_t = F(t) + a_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (1)$$

em que o sinal $F(t)$ é influenciado pelo movimento das placas litosféricas e outros fenômenos geofísicos que exercem influência sobre as coordenadas de um ponto (Seção 2.1), e os ruídos a_t , compostos basicamente por *white noise*, *flicker noise* e *random walk*, que serão melhor descritos na Seção 2.2.

2.1 Efeitos geodinâmicos que afetam as coordenadas GNSS

A Terra é um sistema dinâmico complexo composto pela interação entre diferentes subsistemas (atmosfera, geosfera, hidrosfera, criosfera e biosfera). Esses elementos são bastante dinâmicos, passando por constantes alterações e podendo sofrer profundas transformações ao longo do tempo.

Mudanças provocadas em um desses subsistemas são refletidas na superfície e/ou campo de gravidade terrestre na forma de redistribuição de massa. Consequentemente, a posição de um ponto na superfície determinada com GNSS também é afetada. Esse é o motivo pelo qual as coordenadas GNSS de um ponto não são fixas, mas variam com o tempo. A sequência de posição desse ponto coletada ao longo do tempo (séries temporais de coordenadas) descreve sua movimentação no espaço. As séries de coordenadas horizontais (latitude e longitude) de estações pertencentes a regiões estáveis da placa litosférica caracterizam, basicamente, o movimento linear da estação no sentido do deslocamento da placa a que a mesma pertence. Já a série relativa à componente altimétrica (altitude), descreve a variabilidade vertical da estação, que é influenciada por efeitos geofísicos, tais como carga hidrológica, carga atmosférica, fenômeno das marés, sismicidade, dentre outros. Deste modo, a análise das séries

temporais de coordenadas de estações GNSS constitui um importante papel no estudo da estrutura e evolução da Terra.

A seguir, serão descritos os principais fenômenos geofísicos que afetam a posição tridimensional de uma estação GNSS no Brasil, em uma região relativamente estável do ponto de vista tectônico.

2.1.1 Marés

De acordo com Melchior (1983), o fenômeno de marés é proveniente da atração gravitacional dos corpos celestes sobre a Terra, de modo mais significativo da Lua e do Sol, resultando em deformações em todas as partes do planeta. As marés dos meios fluidos representam a resposta da parte líquida e da atmosfera; as respostas nas outras regiões correspondem às marés terrestres.

Devido à movimentação dos astros, as forças gravitacionais exercidas pelo Sol e a Lua sobre a Terra, bem como suas respectivas distâncias em relação à Terra, é variável com o tempo, o que produz uma alteração na gravidade (WAHR, 1995). Além disso, a rotação da Terra em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua gera uma força centrífuga que age juntamente com a força gravitacional. A resultante dessas duas forças é denominada força de maré, cuja ação causa variações na direção e na intensidade do vetor gravidade provocando alterações no nível dos mares (maré oceânica) e uma variação periódica do nível da crosta terrestre, efeito este conhecido como maré terrestre (MELCHIOR, 1983). As marés terrestres dividem-se ainda em maré gravimétrica, relacionada à componente vertical da força de maré; maré extensométrica, relacionada com as deformações crustais na direção horizontal; e maré clinométrica, que afeta a inclinação da superfície em relação ao eixo da Terra (DE FREITAS, 1993).

A deformação causada pelo efeito de marés afeta o posicionamento tridimensional. A amplitude das marés terrestres é três vezes menor do que a dos oceanos. Ainda assim, a maré gravimétrica pode resultar em deformações com amplitude de 50 cm ou mais, e a extensométrica, em alterações de até 15 cm na horizontal (MELCHIOR, 1983).

A análise das observações de maré permite identificar sua frequência de ocorrência, que pode ser dividida em três tipos principais de componentes de onda: diurna, que possuem período de cerca de 24 horas, ou seja, ocorrem apenas uma vez ao dia; semidiurnas, que ocorrem duas vezes ao dia, portanto, possui período de cerca de 12 horas; e de longo período, cujo período de

ocorrência varia de dias a anos. A Tabela 1 mostra frequências fundamentais de maré de forma mais detalhada (MELCHIOR, 1983).

Tabela 1 – Frequências fundamentais da maré

Componente	Período	Amplitude Vertical (mm)	Amplitude Horizontal (mm)
Componentes semidiurnas			
M_2 (Lunar principal)	12,42 h	384	54
S_2 (Solar principal)	12,00 h	179	25
N_2 (Grande elíptica lunar)	12,66 h	73	10
K_2 (Lunisolar)	11,98 h	48	6,8
Componentes diurnas			
K_1 (Lunar)	23,93 h	191	32
O_1 (Lunar)	25,82 h	158	22
P_1 (Solar)	24,07 h	71	10
S_1 (Solar)	24,00 h	1,6	0,3
Componente de longo período			
M_f (Lunisolar quinzenal)	13,66 dias	40	5,6
M_m (Lunar mensal)	27,55 dias	21	3
S_{sa} (Solar semi-anual)	0,5 ano	19	2,6

Fonte: Adaptado de Melchior (1983)

2.1.2 Carga oceânica

O movimento periódico das massas d'água da Terra devido à atração gravitacional da Lua e do Sol exerce uma pressão ou carga sobre a crosta terrestre. Essa ação resulta em deslocamentos e em mudanças no campo gravitacional não apenas no fundo do oceano, mas também na Terra sólida. Esta deformação da litosfera em função da redistribuição das massas d'água é denominada carga oceânica (PAGIATAKIS, 1982).

Os efeitos de maré terrestre e de carga oceânica possuem características temporais muito semelhantes, uma vez que ambos são função das posições do Sol e da Lua em relação à Terra. No entanto, suas características espaciais são bem distintas. As marés terrestres variam suavemente ao longo da superfície terrestre e dependem mais das propriedades da reologia global da Terra do que das propriedades locais. Por outro lado, os efeitos da carga oceânica têm

uma variação mais irregular e dependem mais das propriedades elásticas locais da litosfera em combinação com as variações das amplitudes das marés oceânicas, resultando em grandes variações nas proximidades da costa. Desta forma, a magnitude do efeito da carga oceânica depende da posição geográfica da estação. Pode atingir cerca de 10 cm na vertical e 3 cm na componente horizontal em pontos próximos à zona costeira, mas vai perdendo força conforme a distância da costa aumenta, chegando a uma variação da ordem de 1 cm para uma estações que estejam 1000 km distantes do oceano (BAKER et al., 1995).

2.1.3 Carga atmosférica

A pressão exercida sobre a superfície terrestre devido a variações na distribuição da massa atmosférica produz deformação da crosta e mudanças no campo de gravidade externo da Terra. A este fenômeno dá-se o nome de carga atmosférica.

O fenômeno de carga atmosférica está diretamente relacionado à variação de pressão atmosférica. Segundo Van Dam et al. (1998), durante as maiores variações de pressão pode-se observar deslocamentos da superfície terrestre da ordem de 10 mm na componente horizontal e de 25 mm na componente vertical. As mudanças de gravidade causadas por esses deslocamentos podem atingir uma magnitude aproximada de 3 μGal , sendo este efeito observado com maior clareza ao longo da passagem de uma tempestade. A magnitude dos efeitos de carga atmosférica diminui com a redução da latitude, devido as variações de pressão serem menores em médias e baixas latitudes.

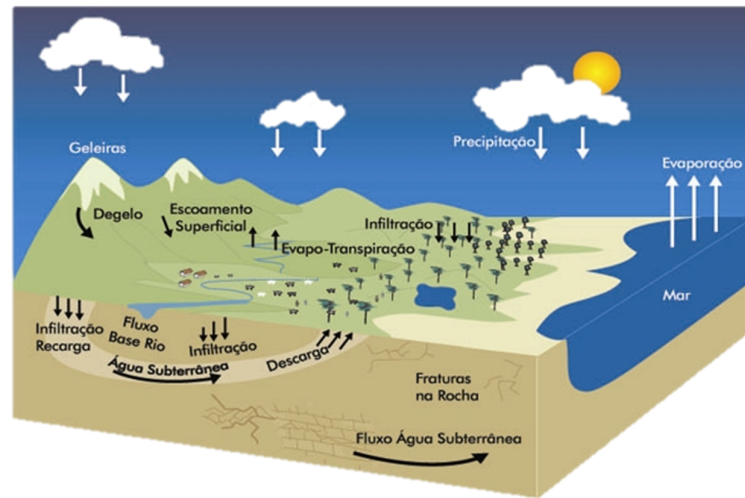
Observa-se ainda uma variação sazonal do efeito de carga atmosférica. No inverno, por exemplo, onde o ar é mais frio e denso, a força gravitacional da atmosfera “atrai” a superfície terrestre diminuindo o valor da gravidade medida (VAN DAM et al., 1998).

2.1.4 Carga hidrológica

O ciclo hidrológico é composto por uma série de variações na distribuição da massa de água (Figura 1), que inclui evaporação das superfícies aquáticas e solo aberto, evapotranspiração da vegetação, transporte de vapor de água na atmosfera, formação de gotículas de nuvens e dinâmica das nuvens, precipitação sólida, o movimento da água e a

alteração da umidade do solo não saturado, incluindo o escoamento superficial e fluvial e o fluxo da água subterrânea (RAST et al., 2014).

Figura 1 – Elementos que formam o ciclo hidrológico



Fonte: http://www.mma.gov.br/estruturas/167/_imagens/167_08122008121516.jpg. Acesso: janeiro 2020

O ciclo hidrológico causa uma variação no volume de água dos rios e na quantidade de água armazenada no solo e nas rochas, o que gera uma carga sobre a bacia hidrográfica resultando na deformação crustal. Este fenômeno é conhecido como carga hidrológica.

Os efeitos da carga hidrológica são mais significativos em regiões com estações de chuvas e secas bem definidas ou regiões inseridas numa bacia hidrográfica. No Brasil, merece destaque a região da bacia do rio Amazonas, que tem as maiores variações sazonais continentais do mundo e cujo sistema hidrológico inclui a troca de água entre a floresta amazônica, os oceanos e a atmosfera (GLOOR et al., 2013). Vários estudos visando a estimativa das deformações sazonais na bacia Amazônica têm sido divulgados (VAN DAM et al., 2001; BEVIS et al., 2005; COSTA et al., 2012; DILL et al., 2013). Nesse contexto, Moreira et al. (2016) demonstraram que os deslocamentos verticais estacionários da crosta causados pela carga hidrológica podem afetar as coordenadas da estação no nível de 10 cm na área da bacia amazônica (e.g. estação NAUS). A estação de Manaus (NAUS) está localizada diretamente na margem do Rio Negro e a poucos quilômetros a montante do rio Amazonas, características que fazem que a carga hidrológica seja fortemente influenciada pela variação da carga de água dentro do canal do rio. Além da bacia Amazônica, outras bacias hidrográficas pertencentes ao

Brasil, ilustradas na Figura 2, têm significativa relevância, são elas: a bacia do Paraná, do Tocantins-Araguaia, de São Francisco.

Figura 2 – Bacias hidrográficas no Brasil

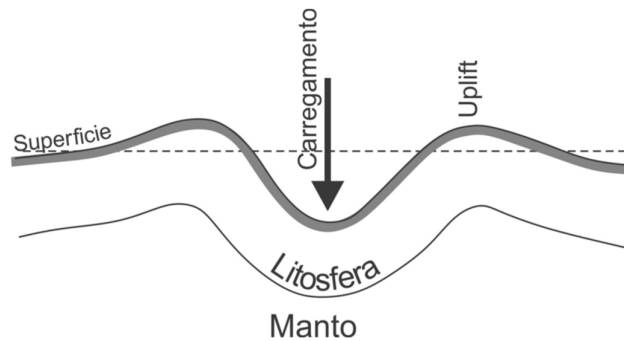


Fonte: https://www.ana.gov.br/aguas-no-brasil/panorama-das-aguas/copy_of_divisoes-hidrograficas. Acesso: janeiro 2020

2.1.5 Deformação por carregamento da crosta

As placas litosféricas são submetidas a cargas decorrentes de diferentes fenômenos que ocorrem na superfície da Terra, tais como derretimento de gelos, depósitos de partículas sólidas de grandes rios, construção de grandes reservatórios de água, atividade vulcânica, dentre outros. Toda carga produz deformação vertical regional da crosta, fazendo com que a crosta não ceda apenas imediatamente abaixo da carga, mas também na área circundante, devido a resposta flexural em vista da resistência lateral da litosfera. A subsidência será maior imediatamente sob a carga e diminuirá gradualmente com a distância da carga. Para manter o mesmo volume da Terra a depressão é acompanhada de um *uplift* nas regiões periféricas, como mostra a Figura 3. A relação entre a magnitude da subsidência e a distância da carga depende da reologia da litosfera e do manto, bem como da amplitude da carga (VANICEK et al., 1986).

Figura 3 – Resposta por carregamento da crosta

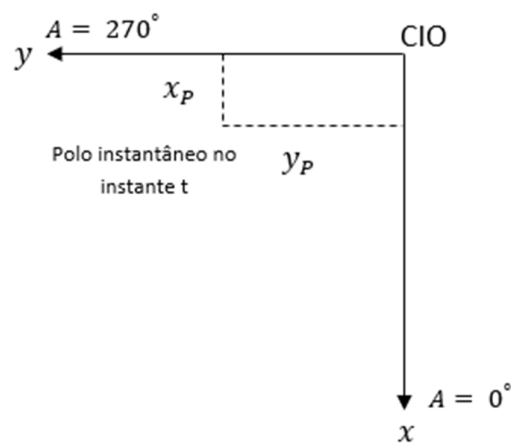


Fonte: Adaptado de Vanicek et al. (1986)

2.1.6 Movimento do Polo

Segundo Jekeli (2012), o movimento do polo é definido como sendo a rotação do polo celeste verdadeiro em relação ao polo de um sistema de referência convencional fixo à Terra, denominado *Conventional International Origin* (CIO). O sistema de coordenadas do movimento polar pode ser interpretado como sendo um sistema de coordenadas cartesianas (Figura 4) que varia periodicamente em torno do polo de referência.

Figura 4 – Coordenadas do movimento polar



Fonte: Adaptado de Jekeli (2012)

O movimento polar é causado por variações na distribuição de massa da Terra e de sua atmosfera, as quais podem ocorrer devido a fenômenos como: movimento da atmosfera e dos oceanos, mudanças na distribuição de massa da superfície (erosão), mudanças na crosta e nos

fluídos (erupções vulcânicas, terremotos) e movimento entre a crosta terrestre e seu interior (ALVES et al. 2008).

O movimento do polo é resultante de duas componentes: uma com período anual e outra denominada oscilação de Chandler, que é a componente dominante do movimento. A oscilação de Chandler é o movimento aproximadamente circular do polo de referência em torno do polo celeste, de amplitude de cerca de 0,3" (≈ 9 m) e período de 433 dias. Essa periodicidade é frequentemente encontrada na análise de séries temporais de coordenadas GNSS (BOGUSZ, 2015; SANTAMARIA et al., 2011), comprovando a influência do movimento do polo terrestre na posição tridimensional de um ponto.

2.2 Ruídos presentes nas séries de coordenadas

Um processo estocástico pode ser definido simplifadamente como uma coleção de variáveis aleatórias ordenadas no tempo. A realização amostral do processo estocástico dá origem um sinal com uma incerteza associada a ele.

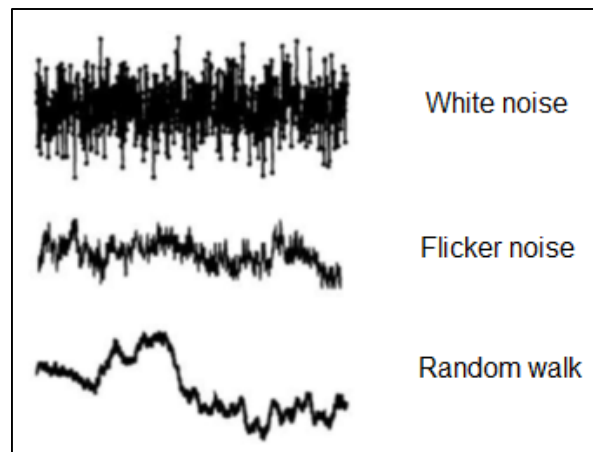
Uma maneira de descrever um processo estocástico é através de seu espectro de potência (AMIRI-SIMKOOEI et al., 2007; WILLIANS et al, 2004; SANTAMARÍA-GÓMEZ, 2011)

$$P_y(f) = P_0 f^\kappa, \quad (2)$$

em que f é a frequência temporal, P_0 é uma constante de normalização e κ é o índice espectral, cujos valores variam no intervalo $[-3,1]$. Um baixo índice espectral caracteriza um processo ruidoso mais correlacionado e com a maior potência concentrada nas baixas frequências. Esse é o caso dos processos estocásticos não estacionários, cujo índice espectral varia de $-3 < \kappa < -1$. Os processos estacionários, cuja frequência não muda com o tempo, apresentam índice espectral $-1 < \kappa < 1$.

O *white noise* (ruído branco), *flicker noise* (ruído rosa) e *random walk* (passeio aleatório) são exemplos de processo estocástico. Tais ruídos compõem as séries de coordenadas GNSS e são ilustrados na Figura 5.

Figura 5 – Representação do ruído branco, ruído rosa e caminho aleatório no domínio do tempo



Fonte: Adaptado de Gambis (2002) apud Marques (2013)

Por definição, o *white noise* possui índice espectral $\kappa = 0$ e, portanto, tem sua potência distribuída uniformemente no espectro de potência, ou seja, P_y constante. Esse ruído tem como propriedades: distribuição Gaussiana (normal), valor médio nulo e variância constante. A presença do *white noise* nas séries de coordenadas GNSS está associada ao ruído de hardware e erros de medida (DMITRIEVA et al., 2015; AMIRI-SIMKOOEI, 2009).

O *flicker noise* tem índice espectral $\kappa = -1$, sendo sua função de densidade espectral dada pelo inverso da frequência, isto é, $P_y \propto 1/f$. O *flicker noise* tem a propriedade de ser um ruído com distribuição Gaussiana (normal) e com valor médio nulo. Esse ruído é comumente observado em uma ampla variedade de processos dinâmicos, tais como, a variabilidade das manchas solares, a oscilação da Terra em torno do seu eixo e as incertezas no tempo medido pelos relógios atômicos. A presença do *flicker noise* nas séries de coordenadas também pode estar relacionada aos efeitos atmosféricos, tais como a refração troposférica e efeitos ionosféricos de segunda ordem (WILLIANS et al., 2004), ou ainda ser consequência dos efeitos de multicaminho (DMITRIEVA et al., 2015).

O *random walk* é exemplo de um processo estocástico não estacionário. Possui índice espectral $\kappa = -2$ e sua função de densidade espectral dada pelo inverso da frequência ao quadrado ($P_y \propto 1/f^2$). A instabilidade de monumentos geodésicos devido a condições variáveis do solo, rocha ou edifícios onde estão fixadas as antenas GNSS é considerada uma importante fonte desse ruído (JOHNSON et al., 1995 apud WILLIANS et al., 2004).

As séries de coordenadas GNSS são compostas de ruídos não correlacionados e correlacionados temporalmente. A principal diferença entre eles é que o ruído não correlacionado, caracterizado pelo *white noise*, pode ser reduzido significativamente através de medidas repetidas, ou seja, com o aumento do tamanho da série temporal. Ao contrário, os ruídos correlacionados temporalmente, representados pela combinação linear de *flicker noise* e *random walk*, se tornam mais influentes com o aumento do tamanho da série temporal (DMETRIVA et al., 2015).

Santamaría-Gómez et al. (2011) mostrou ainda que os ruídos correlacionados temporalmente presentes nas séries de coordenadas não apenas dependem do tamanho das séries, mas, principalmente, do período de tempo em que os dados foram coletados. No trabalho citado, as séries temporais de 275 estações distribuídas globalmente, com 2,5 a 13 anos de dados, foram analisadas em termos de componentes de ruídos. Os mesmos níveis de ruídos foram estimados em séries com 4 a 5 anos de dados, considerando dados mais antigos, e com a série completa (12 anos de dados). Esta análise mostrou que as séries de coordenadas mais antigas são mais ruidosas que aquelas com dados coletados mais recentemente.

Desta forma, a correlação temporal dos dados GNSS está relacionada principalmente ao tamanho da série (crescente número de dados coletados por estação) e à qualidade das coordenadas GNSS estimadas, que tem aumentado consideravelmente graças à evolução da constelação de satélites e às melhorias do desempenho de alguns modelos (de atraso troposférico, por exemplo) utilizados no processamento dos dados (SANTAMARÍA-GÓMEZ et al., 2011).

Além da dependência temporal dos ruídos presentes nas séries de coordenadas, Mao et al. (1999) e Willians et al. (2004) mostraram que o *white noise* apresenta uma significativa dependência latitudinal, apresentando máxima magnitude no equador. A amplitude do *flicker noise* também mostrou dependência latitudinal, apesar de menos evidente que o *white noise*. Em ambos os estudos, as séries de coordenadas de estações localizadas no Hemisfério Sul continham maior nível de *white noise* e *flicker noise* que as séries de estações GNSS do Hemisfério Norte. Isso pode ser justificado pelo fato de que os efeitos atmosféricos (troposfera e ionosfera) ocorrem com maior intensidade e/ou não são tão bem modelados no Hemisfério Sul (WILLIAN et al., 2004).

Os ruídos das séries de coordenadas também são correlacionados espacialmente (AMIRI-SIMKOOEI, 2008; DMITRIEVA et al., 2015). Alguns ruídos presentes nas coordenadas GNSS são decorrentes de erros que refletem uma base física comum com grande

extensão espacial, tais como, distribuição de massa atmosférica sazonal, ruídos atmosféricos e efeitos ionosféricos de segunda ordem. Uma rede de estações GNSS com linhas de base suficientemente pequenas (redes regionais) compartilham desses mesmos erros (erros comuns). Tais erros podem ser reduzidos com o uso de um algoritmo de filtragem ou pelo uso de um referencial regional, por exemplo (WILLIAN et al., 2004). Dmitrieva et al. (2015) mostrou que a remoção desses erros comuns das séries GNSS diminui significativamente a presença de *flicker noise* e *white noise* (nem tão consideravelmente) da série de coordenadas e, em contrapartida, aumenta a influência do *random walk* sobre a série. Isso indica que os ruídos *white noise* e *flicker noise* são correlacionados espacialmente e uma correlação negativa entre o *flicker noise* e *random walk*.

No caso de redes globais, em que as estações GNSS são, em geral, distribuídas muito distantes uma das outras, não há como eliminar os erros provenientes dos efeitos da troposfera e ionosfera, já que essas estações não compartilham dos mesmos erros. As séries de coordenadas dessas estações apresentam, portanto, maior nível de ruído que as séries de estações pertencentes a redes regionais. Tais ruídos são bem descritos pela combinação de *white noise* e ruído colorido (*flicker noise* e *random walk*), sendo o *flicker noise* o ruído colorido dominante na maioria dos casos (ZHANG et al., 1997; Mao et al., 1999; SANTAMARÍA-GÓMEZ et al., 2011; WILLIANS et al., 2004).

Willian et al. (2004) mostrou, no entanto, uma significativa redução na amplitude dos ruídos em soluções GPS globais geradas ao longo dos anos, desde a primeira em 1990. Isto se dá, dentre outras justificativas, pelo aumento do número de estações incluídas na realização dos sistemas de referência (as do Hemisfério Sul, substancialmente), resultando em uma maior acurácia da solução global. Desta forma, o fato das séries temporais de estações GPS pertencentes ao Hemisfério Sul se apresentarem mais ruidosas que a de estações do Hemisfério Norte (MAO et al., 1999) sugere que os ruídos correlacionados espacialmente são também relacionados ao sistema de referência e órbitas (WILLIANS et al., 2004).

Tem-se ainda que, as séries de coordenadas de uma mesma estação provenientes de diferentes centros de análise possuem diferentes níveis de ruído. Willian et al. (2004) mostrou, por exemplo, que a solução global do JPL possui maior nível de *white noise* e *flicker noise* que a solução global do *Script Orbit and Permanent Array Center* (SOPAC). Isso porque esses centros adotam diferentes estratégias de processamento. As soluções do JPL, por exemplo, são obtidas por meio do software *GipsyX*, cujo método utilizado na estimativa das coordenadas é o PPP (BERTIGER et al., 2020). As soluções do SOPAC, por sua vez, são geradas com o

software *GNSS at MIT* (GAMIT) utilizando-se o posicionamento relativo, em que a maior parte dos erros é eliminada, inclusive os provenientes dos efeitos ionosféricos, o que justifica a obtenção de séries com menor nível de *flicker noise* nesse caso.

3 ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS DE COORDENADAS GNSS

A análise estatística de séries temporais consiste no desenvolvimento de modelos para a série com o objetivo de obter alguma descrição dos mecanismos subjacentes à geração dos dados da série, realizar previsões, ou ainda estudar a relação entre séries de modo a prever uma delas em função dos dados da outra (NASON, 2010).

A proposta de um modelo que represente realisticamente a variação da componente de coordenada altimétrica de estações GNSS requer a consideração correta dos modelos funcional e estocástico. Enquanto o modelo funcional descreve as propriedades determinísticas da realidade física das observações, o modelo estocástico descreve suas propriedades estatísticas na forma de MVC. Ambos os modelos serão melhor descritos nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente.

3.1 Modelo Funcional

O modelo funcional de uma série temporal de coordenadas GNSS $\underline{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_m] \in \mathbb{R}^m$ é representado pela tendência linear ($y_0 + rt$) mais uma soma de q termos trigonométricos individuais (AMIRI-SIMKOOEI, 2007; TEUNISSEN et. al., 2008):

$$E(\underline{y}(t)) = y_0 + rt + \sum_{k=1}^q a_k \text{sen}(\omega_k t) + b_k \cos(\omega_k t), \quad (3)$$

em que o sublinhado indica que y é uma variável randômica, y_0 e r são a interseção e a inclinação da reta, respectivamente, a_k e b_k são coeficientes das funções trigonométricas (funções harmônicas) e ω_k é a frequência, que pode ser estimada a partir do MMQ (no domínio do tempo) ou ainda pela análise *wavelet* das séries (no domínio tempo-frequência). A Equação (3) pode ser escrita ainda na forma matricial

$$\underline{y}(t) = AX, \quad (4)$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \text{sen}(\omega_1 t_1) & \cos(\omega_1 t_1) & \dots & \text{sen}(\omega_q t_1) & \cos(\omega_q t_1) \\ 1 & t_2 & \text{sen}(\omega_1 t_2) & \cos(\omega_1 t_2) & \dots & \text{sen}(\omega_q t_2) & \cos(\omega_q t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & \text{sen}(\omega_1 t_m) & \cos(\omega_1 t_m) & \dots & \text{sen}(\omega_q t_m) & \cos(\omega_q t_m) \end{bmatrix}$$

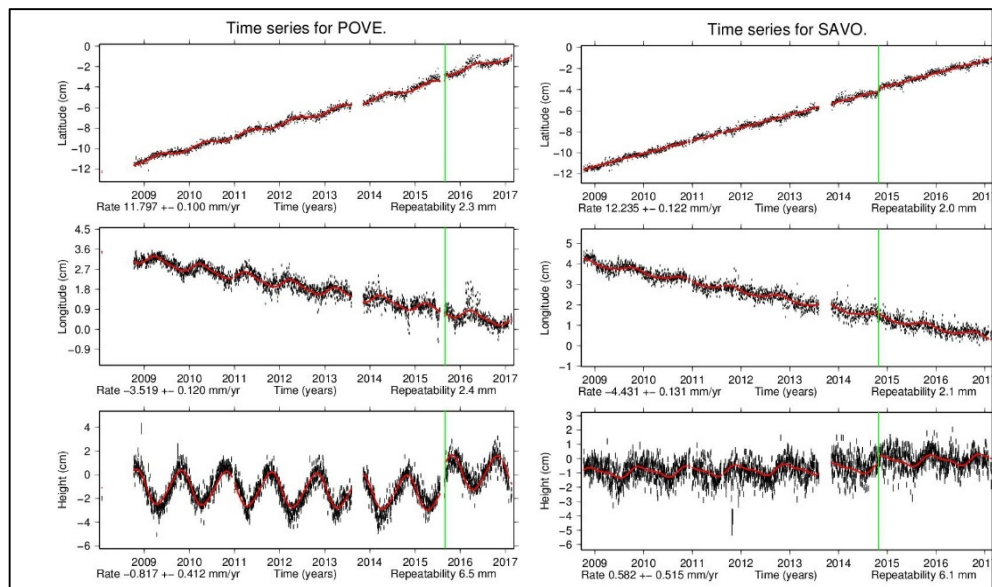
a matriz *design* e $X = [y_0 \ r \ a_1 \ b_1 \ \dots \ a_q \ b_q]^t$, o vetor dos parâmetros a ser estimado pelo MMQ.

A representação dada pela Equação (3) é justificada pelo fato de que as séries de coordenadas possuem além de uma tendência linear (velocidade devida ao movimento da placa

litosférica), sinais periódicos decorrentes de erros e fenômenos geofísicos não modelados, tais como os efeitos atmosféricos, efeito de multicaminho, erros de órbita do satélite, instabilidade do monumento, marés terrestres e oceânicas, variação da massa d'água, carga da pressão atmosférica, etc (WILLIANS et al., 2004; AMIRI-SIMKOOEI, 2008). Vale destacar que, em geral, as séries temporais de coordenadas advêm do processamento de dados diários em que, mesmo com a realização de uma modelagem adequada, não é possível modelar efeitos que se repetem em períodos maiores que um dia, os quais ficarão inclusos nas séries temporais de coordenadas obtidas com as observáveis GNSS.

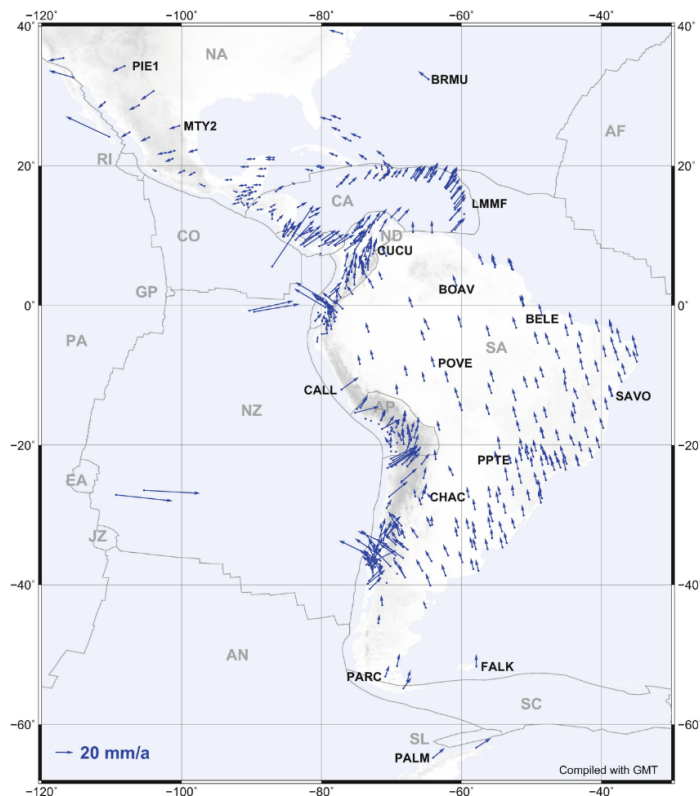
A Figura 6 ilustra as séries temporais de coordenadas das estações POVE e SAVO, localizadas em Porto Velho - RO e Salvador - BA, respectivamente, geradas pelo JPL. Observa-se um comportamento tendencioso das séries de coordenadas horizontais, que descreve a movimentação da placa litosférica Sul-americana a que pertence o Brasil. A coordenada E (leste) apresenta uma tendência linear descendente, e a coordenada N (Norte), uma tendência linear ascendente, indicando uma movimentação no sentido noroeste das estações (Figura 7). Essas séries de coordenadas também descrevem um comportamento periódico relacionado aos efeitos geofísicos, instrumentais ou sistemáticos que influenciam a posição das estações. No entanto, a série relativa à componente vertical U (*height*) é a que apresenta um comportamento de periódico de maior magnitude, variando em até 6 cm para a estação POVE e até 2 cm para SAVO. A magnitude desse efeito está diretamente relacionada à localização geográfica da estação (AMIRI-SIMKOOEI, 2008). A coordenada vertical de estações próximas a rios (como POVE) ou oceanos, por exemplo, sofrem maior influência da variação da massa d'água causada pela carga hidrológica e oceânica, gerando séries com variações sazonais significativas.

Figura 6 – Séries temporais de coordenadas de estações GPS localizadas em Porto Velho – RO (POVE) e Salvador – BA (SAVO)



Fonte: <https://sideshow.jpl.nasa.gov/post/series.html>. Acesso: mar. 2019

Figura 7 – Direção e sentido do deslocamento das estações pertencentes à rede SIRGAS-CON



Fonte: Sánchez (2020)

Frente ao comportamento periódico das séries de coordenadas, quanto mais efeitos periódicos forem identificados nas séries e assumidos no modelo funcional, mais realística será a representação dessa variabilidade. A consideração dos efeitos cíclicos de período anual e semianual na modelagem das séries temporais de coordenadas GNSS já é bem estabelecida na literatura, inclusive já faz parte da mais nova realização do ITRS, o ITRF2014 (ALTAMINI et al., 2016). Além desta variação, no entanto, outras devem ser consideradas.

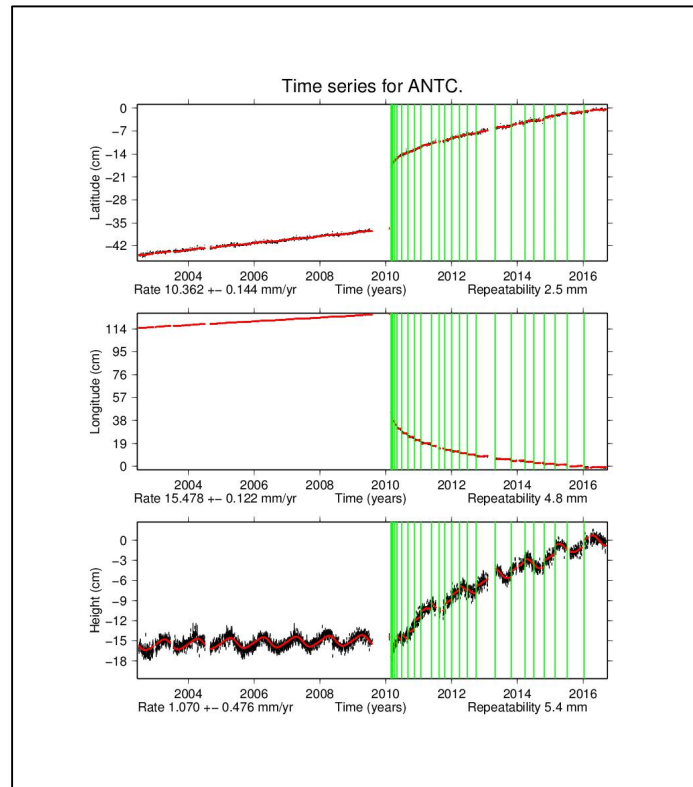
Penna (2007) propõe a inclusão de sinais com períodos de 13,66, 14,2, 14,8 dias no modelo funcional das séries de coordenadas. Amiri-Simkooei et al. (2007) identificou a presença das periodicidades de 350 dias e suas frações $350/n$, $n = 2, \dots, 8$ nas séries. Já Bogusz (2015) propõe modelar as séries temporais de coordenadas considerando as periodicidades de 13,66 dias, correspondente à maré terrestre (MELCHIOR, 1983 apud BOGUSZ, 2015), de 14,6 dias, citada por Amiri-Simkooei (2013), de 14,19 e 14,76 dias referentes aos períodos de *aliasing* GPS (GRIFFITHS et al., 2013 apud BOGUSZ, 2015), além de todas as periodicidades do 1º ao 9º harmônico referentes aos períodos residuais de Chandler (433 dias), tropical (365,2 dias) e draconiano (351,6 dias) no modelo funcional. As oscilações de Chandler estão associadas ao movimento do polo de rotação da Terra, os períodos tropicais referem-se aos efeitos anuais e semianuais, e o período orbital draconiano GPS é o erro sistemático associado com órbitas de satélites presente nas séries de coordenadas GNSS (BOGUSZ et al., 2015; SANTAMARIA et al., 2011). Os resultados da modelagem proposta por Bogusz (2015), quando comparada à modelagem tradicional que considera somente os efeitos anuais e semianuais no modelo funcional, indicam a diminuição das amplitudes dos ruídos nas séries temporais de coordenadas e das incertezas das velocidades estimadas a partir das séries, mostrando que a metodologia adotada é mais representativa com relação série.

Outro erro sistemático nas séries de coordenadas GNSS e que, portanto, deve ser considerado no modelo funcional, é a presença de saltos (*offsets*). Os saltos são interrupções, ou descontinuidades, que ocorrem nas séries de coordenadas devido a alterações ou falhas no equipamento (substituição de um receptor, antena ou mesmo a desconexão e reconexão de um cabo da antena, por exemplo), eventos sísmicos, mudanças de referencial (como a mudança de IGS05 para IGS08 no início de 2011, que ocasionou um salto nas séries GPS nesta mesma época), alteração da estratégia de processamento das observações GNSS ou ainda por causas desconhecidas (GAZEAUX et al., 2013; MONTILLET et al., 2015, NIKOLAIDIS, 2002).

A Figura 8 ilustra a presença de saltos nas séries temporais de coordenadas GPS da estação ANTC, gerada pelo JPL, causados pelo terremoto ocorrido no Chile em 27 de fevereiro

de 2010. O abalo sísmico acarretou num deslocamento leste-oeste de até 3 metros nas coordenadas de estações Chile e Argentina entre os paralelos -30° e -40° .

Figura 8 – Saltos (*offsets*) causados nas coordenadas da estação ANTC, no Chile, devido ao terremoto ocorrido no início de 2010



Fonte: <https://sideshow.jpl.nasa.gov/post/series.html>. Acesso: mar.2019

A frequência com que ocorre os saltos nas séries de coordenadas varia de acordo à estação GNSS. Estações localizadas em regiões sísmicamente ativas ou aquelas que apresentam constantes problemas com o equipamento GNSS (em fase de teste, por exemplo) tendem a conter maior quantidade de saltos em suas séries de coordenadas. De modo geral, no entanto, estima-se que pelo menos um salto ocorra a cada 9 anos de dados (WILLIAMS, 2003). Os saltos podem ainda se propagar de uma estação para a outra via processamento dos dados, ajuste da rede ou realização do sistema de referência.

A detecção dos saltos presentes nas séries de coordenadas de uma estação GNSS, além de contribuir para a identificação de fenômenos sísmicos, como terremotos e tsunamis, por exemplo, também possibilita sua remoção, uma vez que a presença de saltos, mesmo que de

pequena magnitude, pode alterar significativamente a estimativa da velocidade da estação (GAZEUX et al., 2013; WILLIANS, 2003).

Apesar de vários métodos de detecção e remoção de saltos já terem sido desenvolvidos, Gazeaux (2013) mostrou que os métodos manuais, em que os saltos são identificados graficamente pela análise visual dos dados, quase sempre apresentam melhores resultados que os métodos automatizados. Os métodos manuais mostraram-se capazes de identificar inclusive os saltos de menor magnitude, mais difíceis de serem detectados.

Os saltos identificados nas séries temporais de coordenadas GNSS podem ser incluídos no modelo funcional da série (Eq. 3). Para tanto, considere o caso mais simples, em que há apenas um salto (*offset*) no instante de tempo t_{off} da série de coordenadas, sendo $t_1 < t_{off} < t_m$, então a Equação (3) torna-se (WILLIANS, 2003)

$$E(\underline{y}(t)) = y_0 + rt + p_i y_{off} + \varepsilon_y(t), t = 1, \dots, m \quad (5)$$

em que ε_y refere-se aos efeitos sistemáticos (periódicos) que devem ser considerados no modelo e

$$p_i = \begin{cases} 1, & t \geq t_{off} \\ 0, & t < t_{off} \end{cases}. \quad (6)$$

Desta forma, tem-se que

$$y = (y_1, \dots, y_m)^T, \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & p_1 \\ 1 & t_2 & p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_{m-1} & p_{m-1} \\ 1 & t_m & p_m \end{bmatrix}, \quad (8)$$

e $\hat{y} = (\hat{y}_0, \hat{r}, \hat{y}_{off})^T$ pode ser obtido por meio do MMQ, utilizando

$$\hat{y} = [A^T Q_y^{-1} A]^{-1} A^T Q_y^{-1} y, \quad (9)$$

em que Q_y é a MVC das observações y que será melhor descrita na Seção 3.2. A MVC da estimativa $\hat{y}$ é dada por

$$Q_y = [A^T Q_y^{-1} A]^{-1}. \quad (10)$$

A correta consideração do modelo funcional por si só não é suficiente para uma modelagem efetiva das séries de coordenadas. Há uma equivalência entre os modelos funcional e estocástico, de modo que qualquer efeito não modelado na parte funcional vai aparecer no modelo estocástico, e vice-versa (DMITRIEVA, 2015). Por isso, o modelo estocástico também tem papel fundamental na modelagem das séries.

3.2 Modelo Estocástico

O papel do modelo estocástico na modelagem de séries temporais de coordenadas é considerar os efeitos não modelados no processamento dos dados GNSS que contaminam as séries de coordenadas na forma de ruídos.

O modelo estocástico de uma série temporal de coordenadas GNSS é descrito na forma de MVC (Q_{y_i}) das observações (y_i). A MVC é subdivida em componentes de variância (σ_k) e matrizes cofatoras (Q_k), sendo as primeiras incógnitas e as outras partes conhecidas da MVC, a saber,

$$D\{y_i\} = Q_{y_i} = \sum_{k=1}^q \sigma_k Q_k, \quad (11)$$

em que $D()$ é o operador dispersão e q é o número de componentes a serem estimadas.

Normalmente utilizam-se modelos estocásticos numa forma simplificada, considerando apenas a parte diagonal da MVC, desprezando as correlações. A proposta deste trabalho é utilizar a MVC completa, considerando as variâncias e covariâncias das observações compostas pelos ruídos, isto é, a correlação existente entre os ruídos contidos nas séries.

A construção do modelo estocástico requer a estimativa das componentes de variância σ_k que caracterizam os ruídos presentes nas séries temporais de coordenadas GNSS. Existem diversos métodos para se determinar os parâmetros σ_k , por exemplo: *Analysis of Variance* (ANOVA), *Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation* (MINQUE), *Best Invariant Quadratic Unbiased Estimation* (BIQUE), *Maximum-Likelihood Estimation* (MLE) além do *Least-squares Variance Component Estimation* (LS-VCE) (GRODECKI, 1997; SEARLE, 1995; AMIRI-SIMKOOEI et. al, 2008). Todos esses métodos estimam as componentes de variância para cada estação individualmente em uma rede. Essa abordagem é sensata, uma vez que se espera que diferentes estações tenham ruídos característicos, tais como estabilidade do monumento e multicaminho. Segundo Dmitrieva (2015), essa abordagem, no entanto, não é sensível à baixa frequência de ruídos tais como o *random walk*. A grande preocupação quanto à presença de ruídos de baixa frequência nos dados é que eles não são facilmente detectáveis em pequenas séries temporais ou se a variância do *flicker noise* é muito grande, mascarando o *random walk* (DMITRIEVA, 2015).

Uma abordagem alternativa seria determinar as componentes de variância representativas dos ruídos pela análise de todas as estações de uma rede, simultaneamente, o

que possibilita obter estimativas mais acuradas de valores de variância (DMITRIEVA, 2015). A desvantagem é que através desse método estima-se um único conjunto de parâmetros de ruído para o grupo de estações, de modo que uma estação com nível elevado de ruído altera a estimativa da rede. Uma solução, no entanto, seria estimar primeiramente as componentes de variância para cada estação e se alguma apresentar alto nível de ruído removê-la da rede, ou ainda aplicar o método a redes homogêneas em termos de qualidade de estação, isto é, subdividir as estações em grupos baseados no tipo de monumento e solo e, então, estimar os parâmetros de ruído para cada grupo separadamente. Isso ajudaria ainda a entender o ruído em séries temporais provenientes de diferentes tipos de monumento em diferentes condições de superfície (DMITRIEVA, 2015). A abordagem proposta, pela estimativa dos parâmetros σ_k de um grupo de estações simultaneamente, possibilita uma análise mais efetiva das séries de coordenadas GNSS. Pela análise de correlação temporal e espacial entre as séries de coordenadas é possível se obter, além das características individuais de cada série, também as possíveis relações entre elas, identificando os elementos comuns que caracterizam a região de estudo. Essa abordagem, apesar de pertinente, não foi explorada nesse trabalho.

3.2.1 Estimativa de componentes de variância a partir do MMQ

Como mostrado na Equação (11), a MVC das observáveis, que descreve o modelo estocástico da série, é geralmente expressa como uma combinação linear de algumas matrizes cofatoras conhecidas. Os coeficientes dessa combinação, referidos como componentes de variância da MVC, são desconhecidos e necessitam ser estimados.

Dentre os vários métodos que podem ser aplicados no processo de estimativa das componentes de variância do modelo estocástico (citados na Seção 3.2), a estimativa das componentes de variância a partir do MMQ (o método LS-VCE) apresenta vantagens sobre os demais. O LS-VCE, originalmente desenvolvido por Teunissen (1988), pode ser implementado de forma relativamente simples e direta, permite incorporar eficientemente qualquer número de componentes de ruídos no modelo estocástico, através dele pode-se obter diretamente a precisão dos estimadores de variância, e permite aplicar o teste estatístico de hipótese sobre o modelo estocástico (como será apresentado na Seção 3.2.2), que possibilita julgar de modo objetivo a contribuição de cada componente de ruído sobre os dados e, assim, determinar qual combinação de ruídos melhor caracteriza os erros presentes nas séries de coordenadas (AMIRI-SIMKOOEI et. al, 2007).

Em suma, o método de estimativa de componentes de variância a partir do MMQ caracteriza os ruídos contidos nas séries de coordenadas, estima o modelo estocástico representativo das observações e ainda pode ser estendido ao caso multivariado com o objetivo de estimar a correlação espacial entre os ruídos de diferentes séries de coordenadas (AMIRI-SIMKOOEI, 2008).

A seguir será descrito o método de estimativa de componentes de variância a partir do MMQ, o LS-VCE. Para isso, considere a série temporal $y_i, i = 1, \dots, m$ com m observações. O modelo linear das equações de observação pode ser denotado como

$$E(\underline{y}) = A\underline{x}; \quad D(\underline{y}) = Q_y = \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k, \quad (12)$$

em que $E()$ e $D()$ são os operadores de esperança e dispersão, respectivamente.

Na parte da Equação (12) referente ao modelo funcional, $\underline{y}$ é um vetor de m observáveis, $\underline{x}$ é um vetor de n parâmetros de interesse e a matriz *design* A de ordem $m \times n$ é definida de posto coluna completa. A MVC Q_y , que expressa a parte estocástica do modelo, é definida como a combinação linear de matrizes cofatoras conhecidas $Q_k, k = 1, \dots, p$ de ordem $m \times m$, em que os componentes de variância σ_k devem ser estimadas. As matrizes cofatoras Q_k devem ser linearmente independentes, condição necessária para que o modelo estocástico tenha uma solução regular, e serem assumidas simétricas, para que a soma $\sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k$ seja positiva (AMIRI-SIMKOOEI, 2007; AMIRI-SIMKOOEI et. al, 2007).

A estimativa das componentes de variância pode ser obtida através do seguinte problema de minimização:

$$\hat{\sigma} = \arg \min \|A\sigma - y\|_{Q_y^{-1}}^2. \quad (13)$$

Deste modo, o estimador dos mínimos quadrados para o vetor de p componentes de variância desconhecidos $\sigma = [\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p]^t$ é dado por

$$\hat{\sigma} = (A^t Q_y^{-1} A)^{-1} A^t Q_y^{-1} y = N^{-1} l, \quad (14)$$

em que as entradas da matriz normal $N = (A^t Q_y^{-1} A)^{-1}$ de ordem $p \times p$ e o p -vetor $l = A^t Q_y^{-1} y$ são obtidos de

$$n_{kl} = \frac{1}{2} \text{tr}(Q_y^{-1} P_A^\perp Q_k Q_y^{-1} P_A^\perp Q_l) \quad (15)$$

e

$$l_k = \frac{1}{2} \hat{\underline{e}}^T Q_y^{-1} Q_k Q_y^{-1} \hat{\underline{e}}, \quad (16)$$

respectivamente, em que $k, l = 1, 2, \dots, p$ e o vetor de resíduos $\hat{\underline{e}} = P_A^\perp \underline{y}$ contém um projetor ortogonal $P_A^\perp$ dado por

$$P_A^\perp = I - A(A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1}, \quad (17)$$

sendo I uma matriz identidade e A , a matriz *design* obtida no modelo funcional (Eq. 8). Desde que os estimadores $\hat{\underline{\sigma}}$ são baseados no MMQ, a inversa da matriz normal N resulta automaticamente na MVC das componentes de variância estimadas, ou seja,

$$Q_{\hat{\sigma}} = N^{-1}, \quad (18)$$

o que garante uma medida de precisão para a estimativa (AMIRI-SIMKOOEI, 2007; AMIRI-SIMKOOEI et. al, 2007).

A implementação do método pode ser realizada de modo iterativo, atribuindo um valor inicial $\sigma_k^0, k = 1, \dots, p$ para as componentes de variância e assim calculando $Q_y = \sum_{k=1}^p \sigma_k^0 Q_k$. Aplicando a MVC Q_y nas Equações (15) e (16) obtém-se estimativas para as componentes de variância $\sigma_k, k = 1, \dots, p$, através da Equação (17). Esse processo é repetido até que as componentes de variância estimadas não mudem com mais iterações. Segundo Amiri-Simkooei (2008) são necessárias ao menos dez iterações para que as componentes de variância estimadas converjam.

Uma desvantagem do método LS-VCE é que as componentes de variância estimadas podem ser negativas. Isso não é aceitável, pois leva a uma definição não-positiva da MVC Q_y tornando-a não interpretável fisicamente.

Segundo Amiri-Simkooei (2007), a estimativa negativa da componente de variância ocorre principalmente devido a três razões: (1) número insuficiente de observações no modelo funcional fazendo com que a estimativa da componente de variância não seja suficientemente precisa e, portanto, se torne negativa; (2) estrutura inadequada do modelo estocástico. Nesse caso, quando muitas componentes de ruídos são incluídas no modelo estocástico, por exemplo, tem-se uma alta correlação entre as diferentes componentes de ruído e as componentes improváveis presentes no modelo se tornam negativas; (3) escolha incorreta dos valores iniciais σ_k^0 atribuídos às componentes de variância. A escolha apropriada das componentes de variância a priori (valores iniciais o mais próximo possível das estimativas finais) pode evitar que as componentes de variâncias estimadas sejam negativas.

Amiri-Simkooei (2016) solucionou este problema introduzindo restrições de não-negatividade $\sigma \geq 0$ sobre as componentes de variância de modo a garantir que elas não sejam

negativas. A formulação do método, denominado *Non-negative least-squares variance component estimation* (NNLS-VCE), será apresentada a seguir.

Ao adicionar a restrição de não-negatividade $\sigma \geq 0$ à Equação (13), o problema de LS-VCE se torna

$$\hat{\sigma} = \arg \min_{\sigma \geq 0} \|A\sigma - y\|_{Q^{-1}}^2. \quad (19)$$

Para resolvê-lo, o método iterativo de Franc et al. (2005) é aplicado, produzindo uma sequência de soluções $\sigma^{[j]}, j = 0, 1, \dots, t$ que convergem para a solução ótima não-negativa $\hat{\sigma}$. O método será apresentado brevemente a seguir, em notação matricial (AMIRI-SIMKOOEI, 2016).

Considere σ_k o k -ésimo elemento do vetor $\sigma = [\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p]^t$ de componentes de variância a serem estimadas. Excluindo-se o índice k , os índices restantes são denotados por $K = \{1, \dots, p\} \setminus \{k\}$ e, então, a Equação (19) é reescrita como

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} [\sigma_k \sigma_K^t] \begin{bmatrix} n_{kk} & n_{kK} \\ n_{Kk} & N_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_k \\ \sigma_K \end{bmatrix} - [l_k \quad l_K^t] \begin{bmatrix} \sigma_k \\ \sigma_K \end{bmatrix}, \quad (20)$$

em que $n_{kK} = n_{Kk}^t$ é um vetor linha de tamanho $p - 1$ e N_{KK} é uma matriz quadrada de ordem $(p - 1) \times (p - 1)$. A equação anterior, pode ser simplificada por

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} n_{kk} \sigma_k^2 + (\sigma_K^t n_{Kk} - l_k) \sigma_k + \left(\frac{1}{2} \sigma_K^t N_{KK} - l_K^t \right) \sigma_K. \quad (21)$$

A minimização da equação anterior com respeito à uma única componente σ_k é obtido como

$$\delta_{\sigma_k} F(\sigma) = n_{kk} \sigma_k + (\sigma_K^t n_{Kk} - l_k) = 0 \quad (22)$$

ou

$$n_{kk} \sigma_k = n_{kk} \sigma_k - (\sigma_K^t n_{Kk} + \sigma_k n_{kk} - l_k). \quad (23)$$

Tem-se que $\sigma_K^t n_{Kk} + \sigma_k n_{kk}$ é a k -ésima entrada $\mu = N\sigma - l$, a qual é dada por

$$\sigma_k = \sigma_k - \frac{[N\sigma - l]_k}{n_{kk}} = \sigma_k - \frac{\mu_k}{n_{kk}}, \quad (24)$$

considerando μ um multiplicador de *Lagrange*.

A componente de variância não-negativa estimada na iteração $j + 1$ é, então, dada por

$$\hat{\sigma}_k^{[j+1]} = \max \left(0, \hat{\sigma}_k^{[j]} - \frac{\mu_k^{[j]}}{n_{kk}} \right) \quad (25)$$

e as demais componentes de variância são mantidas fixas desde a última iteração, isto é,

$$\hat{\sigma}_K^{[j+1]} = \hat{\sigma}_K^{[j]}, K = \{1, \dots, p\} \setminus \{k\}. \quad (26)$$

Da condição de *Karush–Kuhn–Tucker* (KKT), que a partir da função de *Lagrange*

$$L(\sigma, \mu) = \frac{1}{2} \sigma^t N \sigma - l^t \sigma - \mu^t \sigma, \quad (27)$$

assegura que

$$\frac{\delta L(\sigma, \mu)}{\delta \sigma} = N\sigma - l - \mu = 0, \sigma \geq 0, \mu \geq 0, \mu^t \sigma = 0, \quad (28)$$

tem-se que os multiplicadores μ são atualizados como

$$\mu^{[j+1]} = N\sigma^{[j+1]} - l \quad (29)$$

ou

$$\mu^{[j+1]} = N \left(\sigma^{[j]} + \left(\hat{\sigma}_k^{[j+1]} - \hat{\sigma}_k^{[j]} \right) c_k \right) - l, \quad (30)$$

em que c_k é o vetor de base canônica, possuindo um número um na k -ésima posição e zeros nas demais. A equação anterior, com $\mu^{[j]} = N\sigma^{[j]} - l$, pode então ser simplificada para

$$\mu^{[j+1]} = \mu^{[j]} + \left(\hat{\sigma}_k^{[j+1]} - \hat{\sigma}_k^{[j]} \right) n(:, k), \quad (31)$$

em que $n(:, k) = Nc_k$ é a k -ésima coluna de N . O processo é repetido até que a componente de variância estimada não se altere com a próxima iteração.

3.2.2 Identificação do modelo estocástico adequado (Teste-w)

Estimadas as componentes de variância σ_k que compõem o modelo estocástico a partir do MMQ (Seção 3.2.1), agora convém avaliar a contribuição de cada componente de ruído sobre os dados e, assim, determinar qual combinação de componentes de variância melhor descreve os ruídos contidos nas séries de coordenadas GNSS. Esta tarefa pode ser realizada aplicando o teste-w sobre o modelo estocástico. Para isso, considere uma série de coordenadas GNSS composta de *white noise*, *flicker noise* e *random walk*, com as respectivas variâncias σ_w^2 , σ_f^2 e σ_{rw}^2 estimadas. O modelo estocástico da série, dado na Equação (11), pode ser escrito como (AMIRI-SIMKOOEI, 2007)

$$Q_y = \sigma_w^2 I + \sigma_f^2 Q_f + \sigma_{rw}^2 Q_{rw}, \quad (32)$$

em que I é a matriz identidade quadrada de ordem m , e Q_f e Q_{rw} são as matrizes cofatoras relacionadas às componentes de *flicker noise* e *random walk*, respectivamente. Uma aproximação para as matrizes Q_f e Q_{rw} é dada por (ZHANG et al., 1997)

$$Q_f = q_{ij}^{(f)} = \begin{cases} \frac{9}{8} & \text{se } \tau = 0 \\ \frac{9}{8} \left(1 - \frac{\log \tau / \log 2 + 2}{24} \right) & \text{se } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$Q_{rw} = f_s^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{bmatrix}; \text{ com } f_s = \frac{m-1}{T}, \quad (34)$$

em que $\tau = |t_j - t_i|$ e f_s é a frequência amostral dada em ano^{-1} , sendo T o tempo total de observação.

A determinação do modelo estocástico Q_y apropriado para as séries pode ser realizada através de um teste estatístico de hipótese (teste- w) sobre o modelo dado na Equação (32).

Considerando que não há erro de especificação na parte funcional do modelo ($E\{\underline{y}\} = A\underline{x}$), as seguintes hipóteses, como exemplo, podem ser elaboradas (AMIRI-SIMKOOEI, 2007):

$$H_0: Q_y = \sigma_w^2 I \quad (35)$$

contra

$$H_\alpha: Q_y = \sigma_w^2 I + C_y \nabla, \quad (36)$$

em que C_y é a matriz cofatora conhecida, por exemplo Q_f ou Q_{rw} , e ∇ é um parâmetro de variância incógnito. Considerando a hipótese nula H_0 em que há somente uma componente de variância no modelo estocástico, isto é, $Q_y = \sigma_w^2 I$, pode-se obter o seguinte teste estatístico (AMIRI-SIMKOOEI, 2007):

$$\underline{w} = \frac{b \underline{\hat{e}}^T C_y \underline{\hat{e}} - tr(C_y P_A^\perp) \underline{\hat{e}}^T \underline{\hat{e}}}{\sigma_w^2 [2b^2 tr(C_y P_A^\perp C_y P_A^\perp) - 2b tr(C_y P_A^\perp)^2]^{1/2}}, \quad (37)$$

em que $b = m - n$ é a redundância do modelo funcional e $\underline{\hat{e}}$ é o vetor resíduo do MMQ sobre a hipótese nula.

O teste estatístico $\underline{w}$ (Eq. 37) deve ser calculado para diferentes hipóteses alternativas, isto é, levando em consideração diferentes C_y 's na Equação (36) e, então, selecionado o modelo que apresente maior valor de $\underline{w}$. Isso permite identificar qual combinação de ruídos melhor caracteriza os dados.

4 ANÁLISE WAVELET

A análise *wavelet* teve seu uso intensificado nas últimas décadas em uma grande quantidade de aplicações, principalmente nas áreas de análise de sinais e equações diferenciais. Isso se deve à capacidade das *wavelets* de localização tempo-frequência, apresentando uma visão diferenciada e inovadora na análise de dados não estacionários, cujas componentes de frequência variam no decorrer do tempo.

Neste capítulo são introduzidas as ideias básicas sobre a teoria *wavelet*. Primeiramente será mostrado como as limitações encontradas na análise de Fourier conduziram ao desenvolvimento da análise *wavelet*, e depois, serão apresentadas as características de diferentes bases *wavelet* e os tipos de transformada *wavelet* apropriados para cada aplicação.

4.1 De Fourier a *wavelets*

Considere $L^2(\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções mensuráveis de quadrado integrável sobre $\mathbb{R}$ e uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, tal que, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$. A Transformada de Fourier (TF) de $f(t)$ é definida pela integral

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt, \quad (38)$$

em que $\xi = k\xi_0$, sendo $\xi_0 = \frac{2\pi}{T}$ a frequência fundamental e $T > 0$ o período.

A TF aproxima a função f por meio de exponenciais complexas $e^{-i\omega_n t}$, que podem ser decompostas em componentes senoidais através da fórmula de *Euler*, $e^{-i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) - i\sin(\omega_n t)$. Através dessa aproximação o sinal analisado é transformado do domínio do tempo (ou espaço, de forma mais geral) para o domínio frequencial, de modo que as informações de frequência que não puderam ser identificadas no sinal original possam ser detectadas no sinal transformado.

Embora útil e muito empregada na análise de sinais, a TF possui certas limitações do ponto de vista prático. As ondas senoidais utilizadas como base para a representação do sinal analisado são muito bem localizadas na frequência, mas por possuir suporte de comprimento infinito, não têm boa localização no domínio do tempo. Desta forma, a aplicação da TF em um sinal permite identificar seu conteúdo de frequência mas não o relaciona com a informação temporal, tornando impossível detectar características transitórias do sinal, tais como

tendências, mudanças abruptas e o início ou final de eventos. Por esse motivo, o uso da TF é limitado à análise de sinais estacionários, cuja frequência não muda ao longo do tempo.

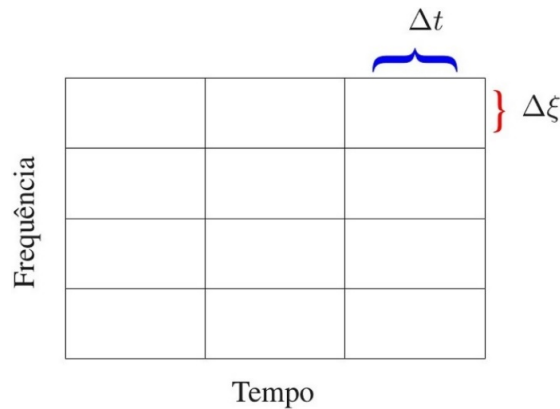
Com o intuito de corrigir essa limitação da TF e obter uma ferramenta de análise mais localizada, que fosse uma combinação dos domínios de tempo e frequência, desenvolveu-se a Transformada Janelada de Fourier (TJF). A ideia principal da TJF é calcular a TF em janelas de tamanho fixo, ao invés dele todo, considerando que dentro de cada janela o sinal tem comportamento estacionário. Esse conceito pode ser obtido multiplicando o sinal original f por uma função $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ que seja zero fora do intervalo desejado. Desta forma, o produto $f(t)g(t - u)$ conterà informações de f perto de $t = u$ e, variando-se o parâmetro u , obtém-se o comportamento local do sinal f em diferentes intervalos (DOMINGUES, 2016).

A TJF de um sinal f é definida por

$$\hat{f}(u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - u)e^{-i\xi t} dt, \quad (39)$$

em que g é denominada função janela e $\hat{g}(0) \neq 0$. O problema da TJF é que a função janela possui tamanho fixo. Note, pela análise da Figura 9, que suas variações em tempo Δt e em frequência $\Delta \xi$ independem de sua localização no plano $t - \xi$. E mais, essas variações são inversamente proporcionais, de modo que quanto menor for o tamanho da janela (Δt), maior será a resolução em frequência ($\Delta \xi$). Uma vez estabelecido o tamanho dessa janela, a resolução tempo-frequência é fixada. Na maioria das aplicações, no entanto, é impossível determinar um tamanho de janela ótimo para localizar com resolução suficiente eventos com frequência muito distintas.

Figura 9 – Representação da função janela da Transformada Janelada de Fourier

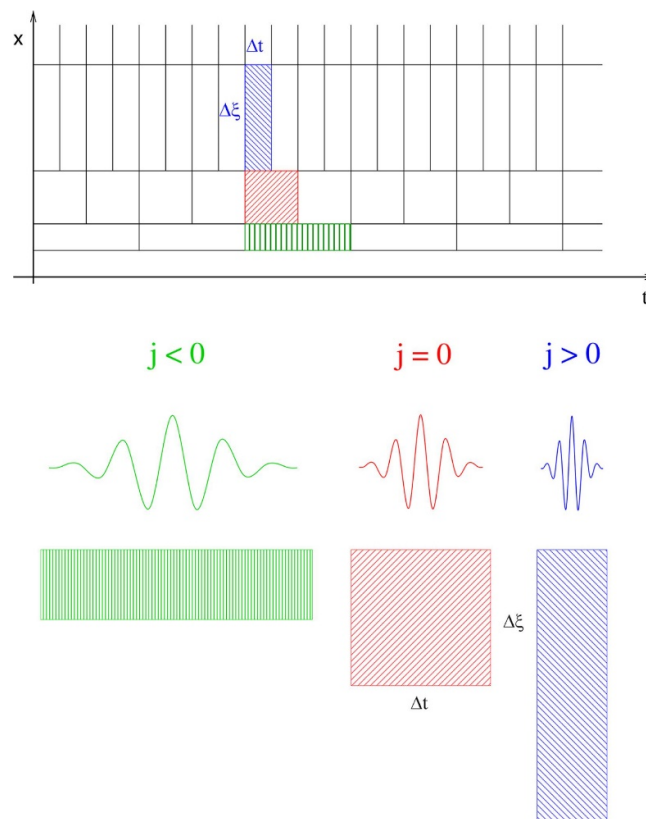


Fonte: Domingues (2016)

A busca por se obter uma ferramenta com tamanho de janela variável que fornecesse boa resolução em qualquer localização do plano tempo-frequência conduziu ao desenvolvimento da Transformada *wavelet* (TW). A TW expande uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ utilizando um conjunto de funções *wavelets* que têm localização espaço-frequência. Essas funções *wavelets* podem ser dilatadas ou comprimidas para aproximar diferentes conteúdos de frequência da função f , obtendo uma janela de tamanho variável, cujo raio aumenta em tempo (reduz em frequência) para investigar conteúdos de baixa frequência, e decresce em tempo (aumenta em frequência) enquanto detecta o conteúdo de altas frequências do sinal, como ilustra a Figura 10. Por meio da TW extrai-se informações do sinal em tempo e frequência simultaneamente, tornando possível identificar as variações transitórias de sinais não estacionários.

Nas seções seguintes serão apresentados os conceitos fundamentais relacionados à teoria *wavelet*, partindo da definição de uma função *wavelet*.

Figura 10 – Representação da função janela da Transformada *wavelet*



Fonte: Domingues (2016)

4.2 Funções wavelets

Na análise *wavelet*, existem várias funções que podem ser utilizadas como base para a representação de um sinal ou função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ no domínio espaço-frequência. De modo geral, para que essas funções sejam caracterizadas como *wavelets* elas devem obedecer a conceitos como admissibilidade e energia unitária. Adicionalmente, tais funções possuem características distintas, se diferenciando em aspectos como momentos nulos e regularidade, de acordo ao propósito da sua utilização.

Assim, uma função $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é denominada *wavelet* se satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) Sua integral em relação a t é igual a 0, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (40)$$

Essa condição, também conhecida como condição de admissibilidade, estabelece que $\psi(t)$ deve oscilar em torno do eixo x . Por isso, geometricamente, uma *wavelet* tem o formato de uma onda, como o próprio nome sugere.

- 2) Sua energia é unitária, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1, \quad (41)$$

garantindo que a função *wavelet* possua um rápido decaimento de amplitude, o que significa que deve existir um intervalo $[a, b]$ fora do qual o valor da função $\psi(t)$ é sempre igual a 0. Esta propriedade possibilita a preservação da informação temporal do sinal após a transformação (DAUBECHIES et al., 1992).

4.2.1 Características das wavelets

Além de satisfazer as propriedades das Equações (40) e (41), as funções *wavelets* possuem características que as diferenciam uma das outras: podem ser suaves ou não, simétricas ou não, gerar sistemas ortogonais ou não e ainda ter formulações matemáticas simples ou não (MORETTIN, 1999). Com base nessas características é possível se obter uma *wavelet* apropriada para cada aplicação.

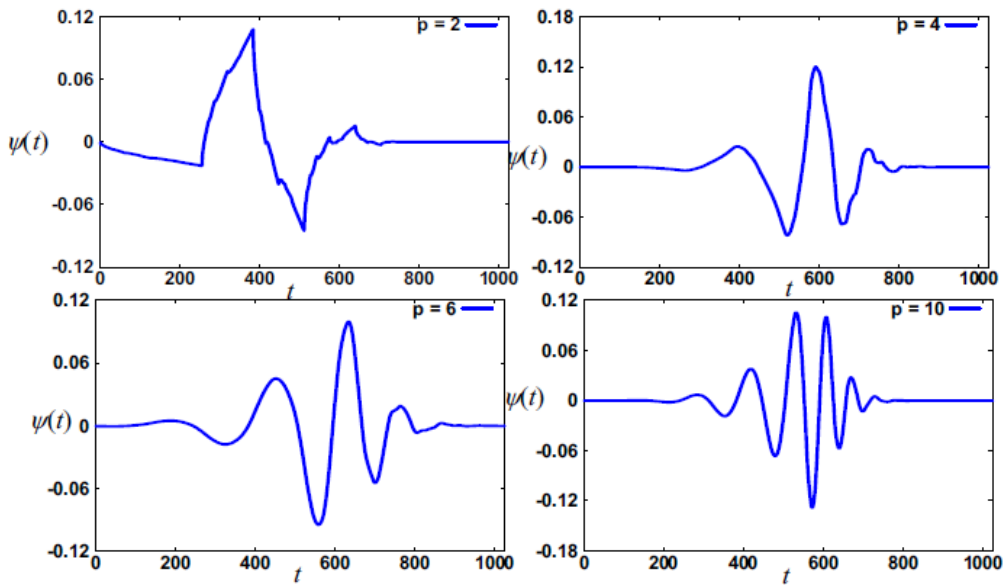
Os fatores que mais influenciam na escolha das *wavelets* são suavidade, simetria, ortogonalidade e suporte (TORRENCE et al., 1998). A suavidade ou regularidade de uma

wavelet é determinada pelo seu número de momentos nulos. Uma função *wavelet* ψ tem p momentos nulos se

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0, \text{ para } 0 \leq m \leq p. \quad (42)$$

A Figura 11 ilustra a *wavelet* de *Daubechies* ψ com diferentes momentos nulos p . Em geral, quanto maior o número de momentos nulos p , mais suave será a *wavelet* ψ (NASON, 2010).

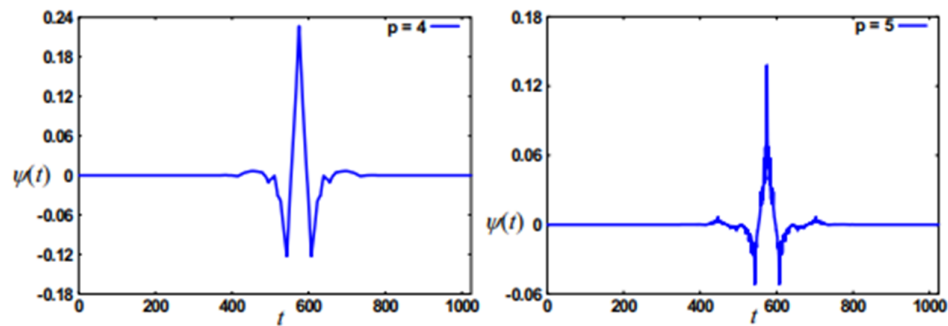
Figura 11 - Wavelets de Daubechies $\psi(t)$ com $p = 2, 4, 6, 10$ momentos nulos



Fonte: Souza (2008)

A simetria e ortogonalidade de uma *wavelet* são fatores interligados. Segundo Daubechies (1992), em *wavelets* ortogonais (exceto *wavelet* de *Haar*) é impossível obter simetria e reconstrução perfeita se as *wavelets* utilizadas para decomposição e reconstrução do sinal forem as mesmas. Esse é o caso das *wavelets* de *Daubechies* (Figura 11), que não são simétricas. No caso das *wavelets* biortogonais (definidas como um par de *wavelets* mutuamente ortogonais), usa-se *wavelets* distintas para a decomposição e reconstrução do sinal em lugar de uma só, obtendo-se a simetria das *wavelets*. As *wavelets splines*, ilustradas na Figura 12, são exemplos de *wavelets* biortogonais em que se verifica simetria.

Figura 12 – Wavelets Splines $\psi(t)$ com $p = 4$ e 5 momentos nulos



Fonte: Souza (2008)

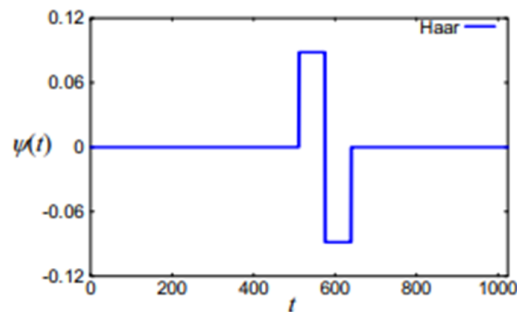
Outra característica importante a ser considerada na escolha da *wavelet* é o seu suporte, isto é, o intervalo em que a energia da função *wavelet* está concentrada. A resolução de uma função *wavelet* é determinada pelo balanço entre seu suporte no domínio temporal e o seu suporte no espaço da frequência (TORRENCE et al., 1998). Uma função com um suporte mais compacto (mais estreita) terá boa resolução no domínio do tempo e uma resolução mais pobre no domínio da frequência, enquanto uma função com suporte mais amplo (mais larga) terá uma resolução mais pobre no domínio do tempo e uma boa resolução no domínio da frequência (características determinadas pelo princípio da incerteza de *Heisenberg*).

A Tabela 2 apresenta as características inerentes a algumas funções *wavelets*, partindo da *wavelet* de *Haar* (ilustrada na Figura 13), que é a mais antiga e simples dentre todas as *wavelets*. A *wavelet* de *Haar* é uma função real de suporte compacto e apenas um momento nulo. Apesar de possuir boa localização no espaço temporal, isso não ocorre no espaço frequencial, o que reduz bastante a sua aplicação prática no estudo de sinais.

Tabela 2 – Características de algumas funções *wavelets*

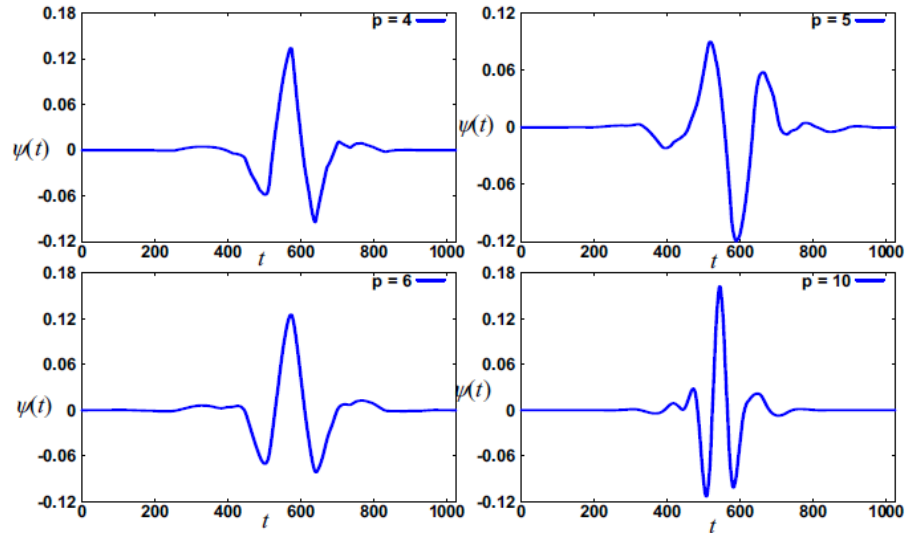
Wavelet	Características				
	Complexa	Suporte compacto	Simétrica	Ortogonal	Biortogonal
<i>Haar</i>		X	X	X	
<i>Daubechies</i>		X		X	
<i>Symmlets</i>		X		X	
<i>Coiflets</i>		X		X	
<i>Meyer</i>				X	
Chapéu mexicano			X		
<i>Splines</i>		X	X		X
Biortogonais		X	X		X
<i>Morlet</i>	X		X		

Fonte: Adaptado de Souza (2008)

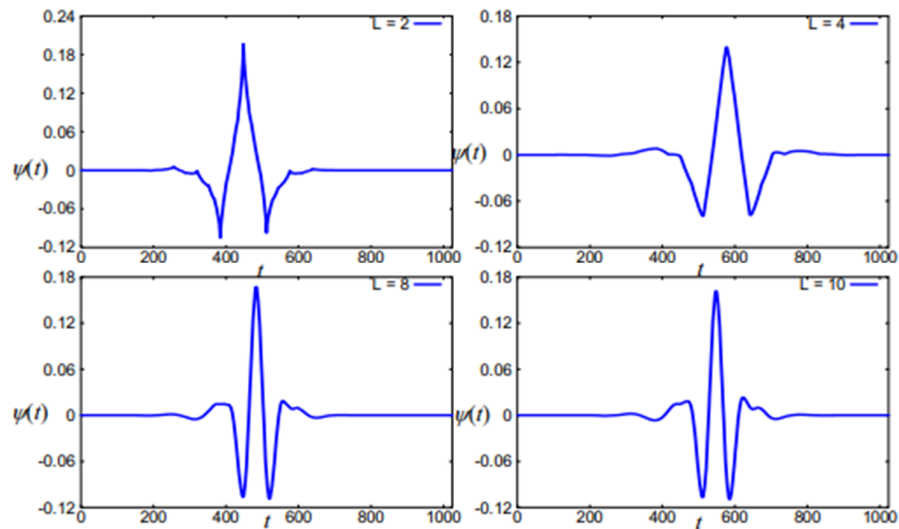
Figura 13 – Wavelet de Haar $\psi(t)$ 

Fonte: Souza (2008)

As *wavelets* de *Daubechies* (Figura 11), *Symmlets* e *Coiflets* (ilustradas nas Figuras 14 e 15, respectivamente) são exemplos de funções reais que possuem suporte compacto e geram bases ortonormais. Nenhuma dessas *wavelets* são simétricas, no entanto, as *Symmlets* são menos assimétricas que as *wavelets* de *Daubechies*, e as *Coiflets* são consideradas quase simétricas.

Figura 14 – Wavelet Symmlets $\psi(t)$ com $p = 4, 5, 6$ e 10 momentos nulos

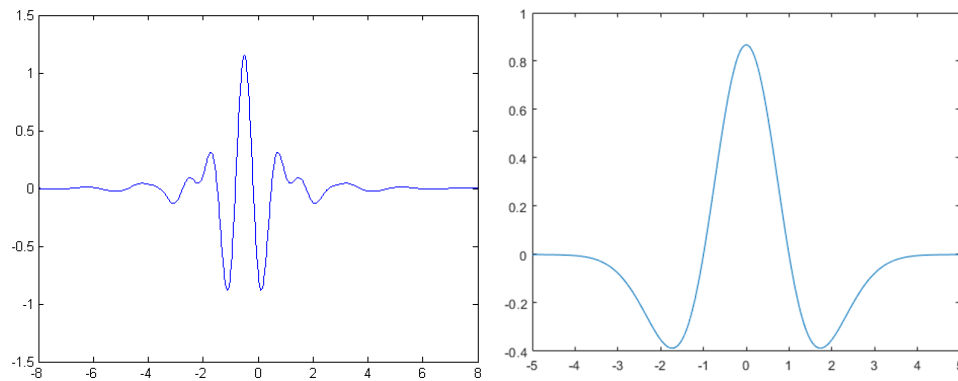
Fonte: Souza (2008)

Figura 15 - Wavelet Coiflets com $L = 2, 4, 8$ e 10 coeficientes

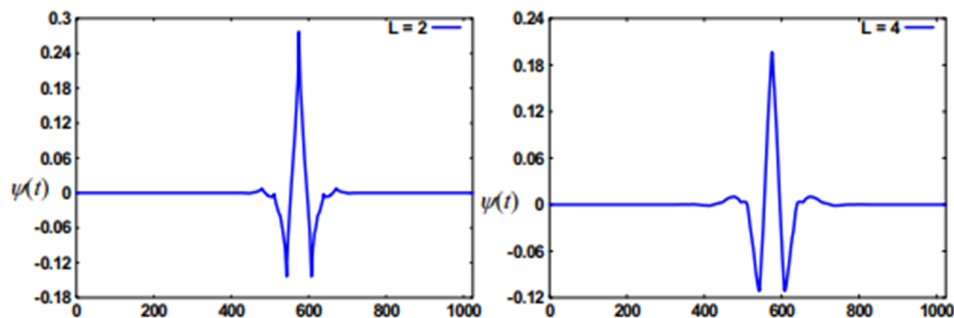
Fonte: Souza (2008)

Já as *wavelets* de *Meyer* e Chapéu mexicano (ilustradas na Figura 16) são funções reais de suporte infinito, mas diferem no fato de que somente a *wavelet* de *Meyer* é ortogonal. Em contrapartida, a *wavelet* chapéu mexicano é simétrica, bem localizada espacialmente e muito utilizada em estudos onde a localização temporal é importante e pode-se abrir mão da localização frequencial.

Figura 16 - Wavelets de Meyer (à esquerda) e Chapéu mexicano (à direita)



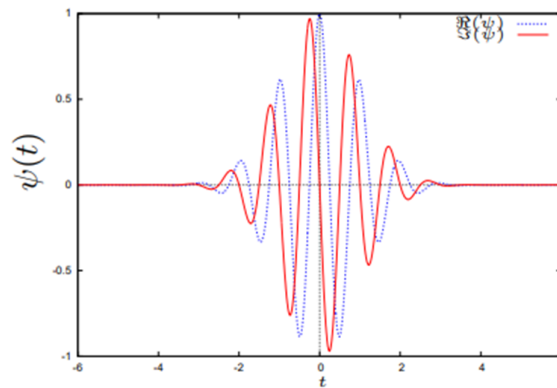
Como exemplos de funções *wavelets* biortogonais tem-se as *wavelets* Splines (Figura 12) e Biortogonais (ilustradas na Figura 17), que são também simétricas e de suporte compacto. As bases *wavelets* biortogonais são úteis para redução de truncamentos na reconstrução de sinais e muito utilizadas também para a compactação de imagens.

Figura 17 - Wavelets Biortogonais de ordem $L = 2$ e 4

Fonte: Souza (2008)

A *wavelet* de Morlet, ilustrada na Figura 18, foi a utilizada nessa pesquisa. Ela é uma função complexa, não ortogonal e que possui equilíbrio de resolução no plano tempo-frequência. Uma função *wavelet* complexa fornece informação da amplitude e da fase do sinal, sendo ideal para capturar comportamentos oscilatórios dos dados (DOMINGUES, 2016).

Figura 18 - Wavelet de Morlet: parte real (em azul) e imaginária (em vermelho)



Fonte: Domingues (2016)

4.2.2 A escolha da função wavelet

Com base nas características das *wavelets*, discutidas na Seção 4.2.1, é possível escolher uma *wavelet* apropriada para cada aplicação. As funções *wavelets* apresentadas até aqui são as que se tornaram mais populares pelo seu contexto histórico, pela sua aplicabilidade, ou ainda pela sua facilidade de utilização. No entanto, existem inúmeras *wavelets* que podem ser utilizadas, sendo possível até mesmo criar uma *wavelet* específica para uma dada aplicação (SWELDENS et al., 2000). A seguir, seguem algumas recomendações que podem auxiliar na escolha da *wavelet* (DOMINGUES et al., 2005).

Para a análise de séries temporais, a escolha da *wavelet* deve ser baseada no seu formato, de modo que a forma da função *wavelet* escolhida reflita as características presentes no sinal ou série temporal. Ao analisar séries com variações mais bruscas, por exemplo, é necessário aplicar uma *wavelet* com menor número de momentos nulos, como a *wavelet* de Haar ou Daub2 (Daubechies com $p = 2$). Já para séries mais suaves, com variações mais sutis, deve-se escolher uma função *wavelet* também mais suave. Nesse caso, as *wavelet* de Morlet e chapéu mexicano são as mais recomendadas. Por outro lado, se as séries temporais a serem analisadas apresentam falhas ou poucos dados, a *wavelet gapped* torna-se mais eficiente do que a *wavelet* de Morlet, por exemplo.

Se o objetivo é a análise exploratória dos dados, as *wavelets* não-ortogonais revelam-se mais apropriadas pela sua redundância de informação. No entanto, se o intuito é sintetizar dados e fazer compressões, usa-se as funções *wavelets* ortogonais, que representam o sinal sem redundância de informações.

Na análise de dados multidimensionais ou análises em que a invariância a deslocamentos é importante, as *wavelets Dual-tree* são interessantes. Já na análise de dados de grande escala (tamanho) e dados astronômicos, onde os objetos de estudo são na maioria das vezes isotrópicos, a *Starlet wavelet* pode produzir melhores resultados (NASON, 1995).

4.3 Transformada wavelet

Escolhida a wavelet apropriada para determinada aplicação, a etapa seguinte é o cálculo da TW. Existem dois tipos de TW: a Transformada *Wavelet* Contínua (TWC) e a Transformada *Wavelet* Discreta (TWD), nas versões decimada e não-decimada. Essas duas classes de TW diferem-se na forma de representação dos parâmetros de escala e localização da função *wavelet*, os quais podem assumir valores contínuos ou discretos (potências de dois). Essas diferenças resultam em vantagens e desvantagens para as duas classes de TW e também determina em quais aplicações cada uma delas pode fornecer melhores resultados (BRASSAROTE et al., 2018).

4.3.1 Transformada wavelet contínua (TWC)

A wavelet $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ escolhida, também chamada de *wavelet* mãe, pode ser dilatada (ou comprimida) por um fator a e submetida a um deslocamento b , com $a, b \in \mathbb{R}$, dando origem a uma família de funções na forma

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (43)$$

em que o parâmetro $a(> 0)$ se refere à escala e b à localização da função *wavelet*, e o fator $\frac{1}{\sqrt{a}}$ é incluído na fórmula para que se conserve a norma unitária de ψ (DAUBECHIES, 1992). Essa família de *wavelets* (Eq. 43) obtida a partir de ψ , servirá como base de representação de funções pertencente ao espaço $L^2(\mathbb{R})$ no domínio tempo-frequência.

Desta forma, a TWC de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é expressa por

$$W_f^\psi(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\psi}_{a,b}(t) dt, \quad (44)$$

em que $\psi_{a,b}(t)$ é a família da *wavelet* escolhida, $\bar{\psi}$ denota o conjugado complexo da função ψ e W_f^ψ é conhecido como coeficiente *wavelet*.

A TWC é invertível, de modo que o sinal f transformado pode ser recuperado por meio da TWC inversa, dada pela seguinte relação

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f^\psi(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}, \quad (45)$$

em que C_ψ é a constante de admissibilidade da *wavelet* ψ escolhida, calculada por

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|}{|\xi|} dt, \quad (46)$$

sendo $\hat{\psi}$ a TF (Eq. 38) da função *wavelet* ψ e $0 < C_\psi < \infty$ para garantir a TWC inversa.

A TWC resulta em uma representação redundante do sinal f analisado em relação aos seus coeficientes *wavelets* W_f^ψ . Por isso, essa transformada é pouco eficiente do ponto de vista computacional, mas ideal para o estudo exploratório de sinais. A redundância obtida com a TWC tende a reforçar os traços de representação dos coeficientes *wavelet* tornando a informação mais visível, o que facilita a interpretação dos dados, a localização de efeitos transitórios e a caracterização de comportamentos periódicos do sinal. A escolha apropriada da *wavelet*-mãe contribui para uma análise de alta fidelidade.

4.3.2 Transformada *wavelet* discreta (TWD)

A fim de se obter a TWD, utiliza-se parâmetros de dilatação e translação que variam discretamente, isto é,

$$\begin{aligned} a &= a_0^{-j} \\ b &= kb_0 a_0^{-j} \end{aligned} \quad (47)$$

em que $j, k \in \mathbb{Z}$, $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$. Desta forma, a família de *wavelets* da Equação (43) pode ser reescrita como

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{j/2} \psi\left(\frac{t - kb_0 a_0^{-j}}{a_0^{-j}}\right) = a_0^{j/2} \psi(a_0^{-j} t - kb_0). \quad (48)$$

Considerando, por simplicidade, $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$, então existe uma função ψ com boas propriedades de localização tempo-frequência, tal que $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^{-j} t - k)$ constitui uma base ortonormal para o espaço de funções $L^2(\mathbb{R})$ (DAUBECHIES, 1992).

A TWD de um sinal ou série temporal Y_t com relação à *wavelet* mãe ψ é dada por

$$W_{j,k} = \sum_{t=0}^{n-1} Y_t \psi_{j,k}(t), \quad (49)$$

em que $n = 2^{j_0}$ é o número de observações da série Y_t , $j = 0, \dots, j_0 - 1$ são os níveis de resolução e $k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1$ é a escala, com $j_0 \in \mathbb{Z}$ (MORETTIN, 2014). A TWD decompõe a série Y_t em diferentes níveis de resolução (ou escala). O primeiro nível de decomposição, relacionado à escala mais suave (ou grossa), compreende o conteúdo de menor frequência da série. Já os últimos níveis de decomposição (escalas mais finas) estão relacionados ao conteúdo de maior frequência da série.

A TWD é uma ferramenta muito utilizada na filtragem de ruídos e compressão de sinais. Isso porque as características mais importantes do sinal são capturadas pela TWD e representadas por coeficientes $W_{j,k}$ de grande magnitude. Os ruídos, por sua vez, estão associados a coeficientes *wavelets* pequenos, que podem ser descartados sem afetar o conteúdo de informação presente no sinal (NASON, 1995). Desta forma, a TWD permite separar o sinal dos ruídos e ainda representa-lo por um subconjunto de coeficientes que normalmente é muito menor que o sinal original, obtendo assim o sinal comprimido. Outras vantagens da TWD são: fácil implementação, bom desempenho computacional e reconstrução perfeita do sinal após inversão.

Na prática, a TWD é calculada através de um algoritmo desenvolvido por Mallat (1989), denominado algoritmo piramidal. No primeiro estágio do algoritmo é obtida uma aproximação suavizada da série e à medida que a escala se torna mais refinada são acrescentados detalhes complementares (obtidos pela diferença de informação entre um nível j do algoritmo e um mais refinado $j + 1$) que, somados à suavização dada, reconstroem exatamente a série original. Esse processo usa filtros discretos e decimação (diática) por 2, em que para cada duas saídas do filtro uma é descartada, sendo aproveitados apenas os elementos pares ou ímpares da amostra. Deste modo, a cada estágio do algoritmo tem-se metade dos elementos considerados no estágio anterior. Uma desvantagem da TWD é que ela é sensível à origem, ou seja, à escolha da decimação. Isso implica dizer que uma translação na entrada dos dados pode resultar em um conjunto de coeficientes *wavelet* completamente diferente se comparado ao conjunto de dados obtidos com a entrada original.

Em algumas aplicações, principalmente envolvendo a análise de séries temporais não-estacionárias, é necessário que o método seja invariante à translação (não sensível à origem da decimação). Isso é conseguido com a Transformada *Wavelet* Discreta Não Decimada (TWND), que leva em consideração todos os elementos da amostra (pares e ímpares) eliminando o processo de decimação da TWD (PERCIVAL et al, 2000). Dessa forma, um sinal é representado com o mesmo número de coeficientes em cada nível de decomposição do

algoritmo piramidal. Uma translação no sinal de entrada não gera mudanças nos coeficientes *wavelet* em relação aos coeficientes do sinal original, a menos de uma translação. A TWND possui uma implementação simples, podendo ser computada similarmente à TWD, mas com a vantagem de ser invariante à translação, o que a torna ideal para a análise tempo-frequência de séries temporais não-estacionárias.

4.4 Periodograma *wavelet* e espectro global

Os periodogramas (ou escalogramas) são gráficos que permitem a visualização bidimensional dos coeficientes *wavelets* por meio de um campo de isolinhas ou imagem. Através deles, as amplitudes (ou energia) associadas aos coeficientes *wavelet* são representadas em tempo e escala, simultaneamente (DOMINGUES et al., 2016).

O periodograma *wavelet* é calculado a partir dos coeficientes da transformada *wavelet*, como

$$I_{j,k} = |W_{j,k}|^2, \quad (50)$$

em que $W_{j,k}$ denota os coeficientes da TWD obtidos na Equação (49), mas também podem ser substituídos pelos resultados da TWC ($W_f^\psi(a, b)$) obtidos na Equação (44). O periodograma *wavelet* fornece uma boa descrição de onde mudanças significativas estão localizadas nas séries temporais, já que mudanças abruptas correspondem proporcionalmente a coeficientes *wavelet* de maior magnitude.

O periodograma *wavelet* decompõe a energia (ou variância) da série temporal Y_t em diferentes níveis de resolução j e com localização tempo-frequência $2^j t$ (NASON, 2010). A soma de todos os coeficientes *wavelet* em cada escala do periodograma permite ainda calcular a variância da série temporal em cada escala, com objetivo de saber quais delas possuem maior energia. Esta tarefa pode ser executada através do espectro global, descrito pela equação

$$S_{j,k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |W_{j,k}|^2, \quad (51)$$

em que N é o número de coeficientes wavelets na escala 2^j .

O espectro *wavelet* global completa a análise multiescala (multiresolução) da série temporal Y_t . Através dele, as escalas do periodograma são analisadas através dos picos locais de um gráfico $\log_2(2^j)$, buscando identificar quais delas concentram maior energia e, portanto, mais contribui com a variabilidade da série.

5 METODOLOGIA

Esta pesquisa está dividida em duas etapas de desenvolvimento:

1. Análise de séries temporais de coordenadas GNSS, objetivando a construção de um modelo que descreva a variabilidade da coordenada vertical de estações GNSS localizadas em diferentes regiões do Brasil, como forma de avaliar as características individuais de cada série e também as possíveis relações entre elas, identificando os elementos comuns que caracterizam cada região de estudo.

2. Estimativa do modelo de variação vertical para a posição de um usuário GNSS no território brasileiro, como ferramenta para atualização de sua componente de coordenada altimétrica h para uma época t desejada, visto que os modelos de velocidade são apropriados somente para a atualização das coordenadas esféricas (lat, lon).

A seguir, será descrita a metodologia utilizada em cada uma dessas etapas e apresentado o fluxograma da implementação. A implementação de ambas as etapas dessa pesquisa foi realizada no ambiente do *Matlab*, versão R2018b, licença do Departamento de Cartografia da FCT/Unesp, Campus de Presidente Prudente.

5.1 Análise de séries temporais de coordenadas GNSS

O primeiro passo do desenvolvimento dessa pesquisa consiste na obtenção das séries temporais de coordenadas GNSS no Sistema Geodésico Local (SGL). Vários centros de processamento disponibilizam gratuitamente os dados de coordenadas de estações GNSS distribuídas pelo mundo todo, inclusive no Brasil. Dentre esses centros podem-se citar o JPL, o SIRGAS através da rede SIRGAS-CON, o NGL, dentre outros.

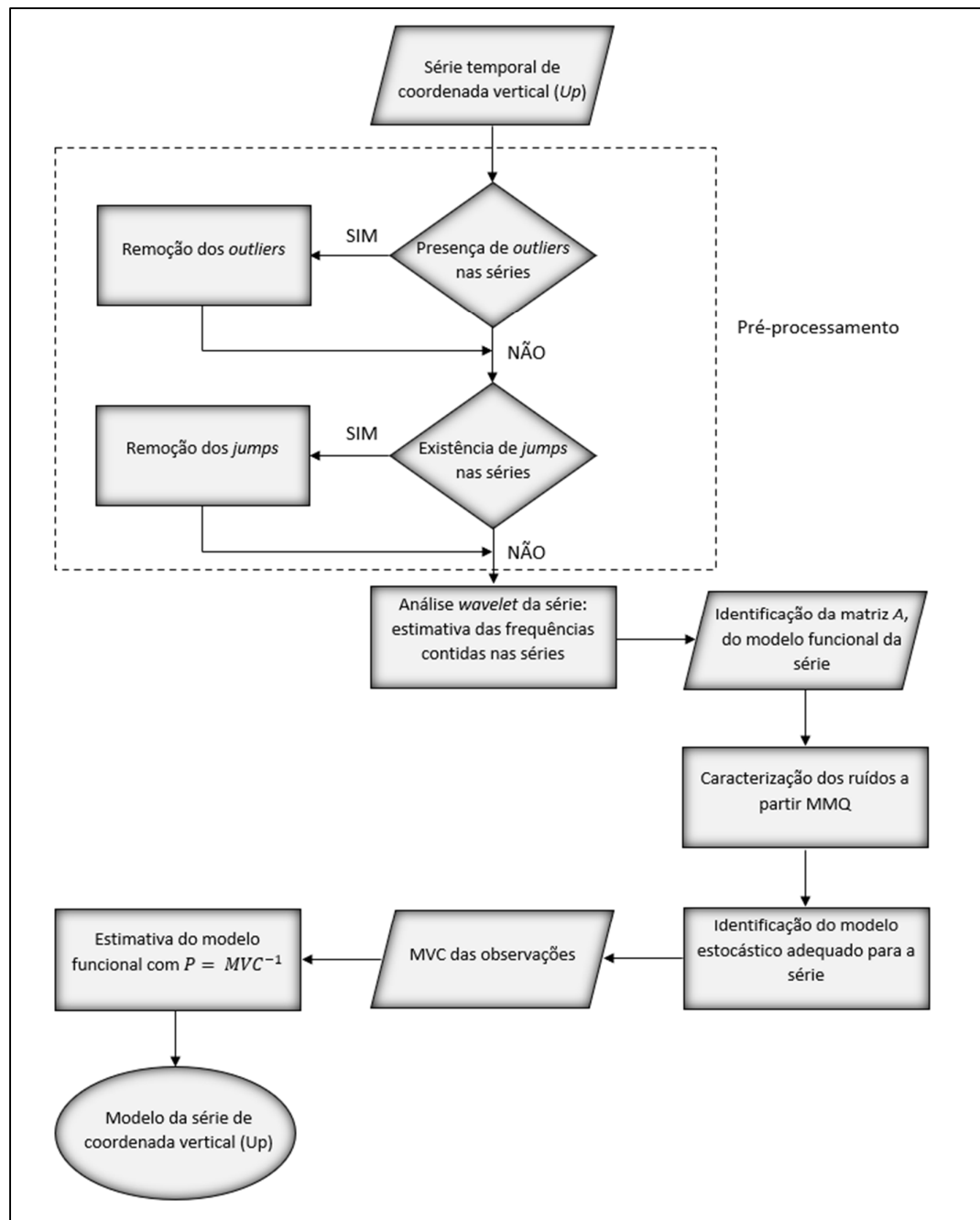
As séries temporais da rede SIRGAS-CON são obtidas a partir de arquivos de soluções semanais, disponibilizados em formatos *Solution (Software/technique) INdependent EXchange format* (SINEX) ou *CardSpace* (.crd), contendo, dentre outras informações, as coordenadas cartesianas (X, Y e Z) estimadas de todas estações da rede SIRGAS (SIRGAS-CON, 2020). Essa rede conta com cerca de 400 estações GNSS distribuídas pela América Latina e Caribe e constitui uma importante estrutura geodésica disponível ao usuário para utilização em levantamentos geodésicos e experimentos científicos.

O JPL fornece as séries temporais diárias das estações GNSS pertencentes à rede global IGS, em termos de SGL (JPL, 2020). Essa rede conta com 506 estações GNSS ao redor do mundo, mas apenas 13 delas no Brasil.

O NGL disponibiliza as soluções diárias de estações GNSS em arquivo de texto, contendo as coordenadas cartesianas e geodésicas das estações, em ITRF 2014, e respectivas precisões das séries de coordenadas (NGL, 2020). As séries temporais do NGL, assim como as do JPL, são produzidas utilizando o método PPP via programa *GipsyX*. O NGL processa mais de 17000 estações GNSS distribuídas por todo o mundo, dezenas delas localizadas no Brasil (BLEWITT et al. 2018). Visto o grande potencial dessa rede, tanto pela quantidade de estações disponíveis, quanto pelo grande número de observações (chegando até 22 anos de dados), as séries de coordenadas disponibilizadas pelo NGL foram as escolhidas para esta aplicação. Os critérios adotados para seleção das estações foram: (1) estar localizada dentro do território brasileiro e (2) possuir número de observações acima de dez anos de dados.

Uma vez selecionadas as estações, foram obtidas as séries de coordenadas (E,N,U) no SGL. Nesta pesquisa foi analisada somente a série da componente vertical (U) dentre as três séries de coordenadas, que é a componente mais afetada por fenômenos geofísicos e cujas séries apresentam variações sazonais mais significativas e de difícil modelagem. O fluxograma da Figura 19 ilustra as demais etapas envolvidas na análise das séries. Abaixo, segue a explicação detalhada de cada uma dessas etapas.

Figura 19 - Fluxograma da metodologia envolvida na modelagem das séries temporais de coordenadas



Fonte: A autora

A etapa seguinte à obtenção das séries de coordenadas é o pré-processamento, que envolve a identificação dos saltos (*offsets*), remoção de erros grosseiros (*outliers*), e a interpolação de dados faltantes (*gaps*). A identificação dos *saltos* foi realizada por meio do

arquivo disponibilizado pelo NGL, através do endereço <<http://geodesy.unr.edu/NGLStationPages/steps.txt>>, que contém a data de ocorrência dos saltos relacionados a cada uma das estações GNSS processadas. Após identificados, os *saltos* deverão ser removidos das séries, para que tais mudanças abruptas nos dados, frequentemente caracterizadas por troca de antena e de receptor, não sejam interpretadas como eventos geofísicos que afetaram a posição da estação. A próxima etapa do pré-processamento consiste em verificar a existência de *outliers* nos dados. Para tanto, foi ajustada uma curva à série de modo que os dados da série cuja distância em relação à curva seja superior a $2,0\sigma$ (considerando que cerca de 5% dos dados são *outliers*) foram caracterizados como erros grosseiros e, então, removidos. A última etapa anterior à análise das séries de coordenadas é a interpolação dos *gaps*. A consideração dos efeitos sazonais de período anual e semianual na modelagem das séries de coordenadas já é bem estabelecida na literatura (BOGUSZ, 2015; SANTAMARIA et al., 2011). Este sinal sazonal aproxima bem muitas das séries de coordenadas. Incluí-lo na série de modo a preencher os dados faltantes não afetaria a posterior análise da série, que originalmente já apresenta tais periodicidades. Portanto, nesta etapa, os *gaps* da série foram substituídos pelo o sinal sazonal de períodos anual e semianual ajustado aos dados.

A partir dos resultados advindos dos dados pré-processados foi realizada a análise das séries de coordenadas verticais de cada estação GNSS selecionada com o objetivo de identificar a frequência ω_k dos efeitos periódicos contidos nas séries de coordenadas e, então, incluí-los no modelo funcional da série (Eq. 3). Esta análise foi realizada no domínio tempo-frequência a partir da TWC (Seção 4.3.1) com relação à *wavelet* de *Morlet*, utilizando-se o pacote desenvolvido por Torrence et al. (1998), disponível em <<https://paos.colorado.edu/research/wavelets/>>.

Uma vez identificadas as frequências dos efeitos sistemáticos que afetam a posição vertical das estações e, por conseguinte, estimado a matriz A (Eq. 4) do modelo funcional de cada série de coordenadas, foi realizada então a caracterização dos ruídos contidos nas séries pela estimativa de componentes de variância baseada no MMQ (Seção 3.2.1). Finalmente determinados os parâmetros σ_k , construiu-se o modelo estocástico (Eq. 11) de cada uma das séries de coordenadas analisadas. O modelo estocástico, na forma de MVC, pôde então ser aplicado na estimativa do modelo funcional da série assumindo-se a inversa da MVC como a matriz peso do ajustamento. Vale ressaltar que nesta pesquisa é utilizada a MVC completa das observações, composta pelas variâncias e covariâncias dos ruídos presentes nas séries. Como todas as séries de coordenadas utilizadas possuem mais de 10 anos de observação, a MVC (que

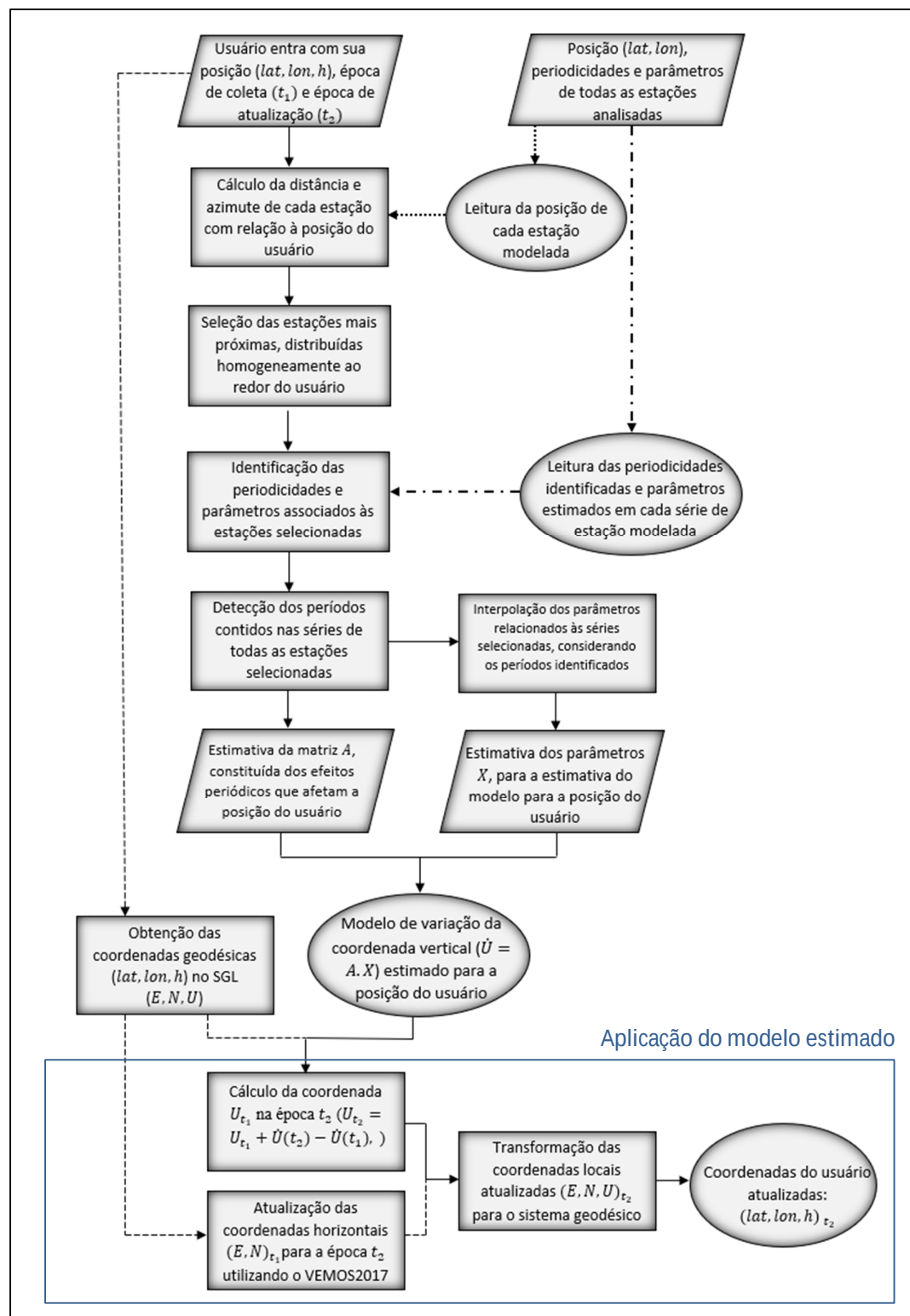
é uma matriz quadrada de ordem igual ao tamanho da série) é bem esparsa. Apesar do grande esforço computacional exigido para a inversão dessa matriz, não foram encontradas grandes dificuldades de sua aplicação na estimativa do modelo de cada série.

O modelo estimado, composto das partes funcional e estocástica, permite entender a variabilidade da coordenada vertical de cada estação GNSS analisada de modo a identificar os fenômenos geofísicos que afetam a posição de determinada estação ou região de estudo. A qualidade do modelo estimado para a série de coordenada de cada estação é avaliada na Seção 6.1 por meio do cálculo dos erros médios quadrático e absoluto e da análise do resíduo da série, pelos testes *Jarque-Bera* e *Durbin-Watson*, que verificam a normalidade e autocorrelação do resíduo, respectivamente.

5.2 Modelo de variação vertical

Nessa etapa de desenvolvimento da pesquisa, o objetivo principal é estimar um modelo que descreva o comportamento da coordenada vertical de um ponto localizado no território brasileiro, sem monitoramento contínuo, a partir do qual seja possível a previsão da coordenada vertical em qualquer época t_2 , dada a mesma numa época t_1 , por exemplo. A Figura 20 ilustra o fluxograma da metodologia proposta na estimativa do modelo, que será descrita a seguir.

Figura 20 - Fluxograma da metodologia envolvida na estimativa do modelo de variação vertical para a posição de um usuário

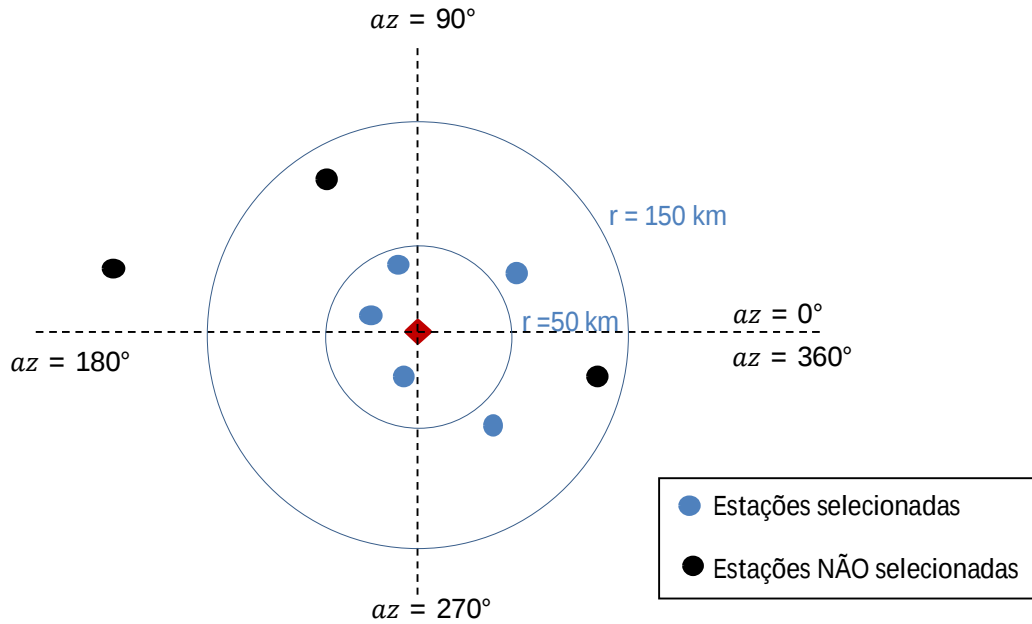


Fonte: A autora

Por meio da análise das séries de coordenada vertical das estações selecionadas na etapa 1 (conforme descrito na Seção 5.1, cujos resultados são apresentados na Seção 6.1) gerou-se um arquivo contendo o nome de todas as estações analisadas, sua posição (lat, lon), as periodicidades contidas em suas respectivas séries e os parâmetros do modelo ajustado a cada uma delas. A partir dessas informações será realizada a estimativa do modelo de coordenada vertical do usuário.

Primeiramente, o usuário entra com sua posição (lat, lon, h) em graus decimais e metro, a época t_1 (dd.mm.yyyy) em que suas coordenadas foram coletadas e a época t_2 (dd.mm.yyyy) para qual deseja atualizá-las. A partir da posição dada são calculadas a distância e azimuth das 65 estações GNSS modeladas na etapa 1 com relação à posição do usuário e, então, selecionadas as estações mais próximas do usuário que estejam distribuídas homogeneamente nos quatro quadrantes em torno do ponto a ser modelado (posição do usuário). Os critérios adotados no processo de seleção das estações (distância e azimuth) permitem que a realidade atmosférica e geofísica na proximidade do usuário seja considerada na estimativa do modelo para sua posição, de modo que a representação da variabilidade de sua coordenada vertical seja a mais realística possível. A Figura 21 ilustra o processo de seleção das estações no entorno do usuário que serão utilizadas na estimativa do modelo de variação vertical para sua posição. O losango ao centro (em vermelho) representa a posição do usuário. Com relação a ela são calculadas a distância (d) e azimuth (az) das 65 estações analisadas. Com base nessas informações, a seleção das estações é realizada da seguinte forma: considerando um raio de 50 km percorre-se os quatro quadrantes ($0 < az \leq 360$) selecionando todas as estações que estejam até 50 km distantes do usuário ($d \leq 50$). Somente para os quadrantes em que nenhuma estação foi selecionada (tais como os 1º e 4º quadrantes da Figura 21, por exemplo) o raio é incrementado em 100 km ($r = r + 100$) e os quadrantes em questão são percorridos novamente de modo a identificar a estação mais próxima do usuário dentro desse raio ($50 < d \leq 150$). Este processo é repetido até que seja identificada ao menos uma estação em cada quadrante, respeitando o raio máximo de 1000 km que, embora não seja o ideal, visto que quanto maior a distância, maior a possibilidade de as estações apresentarem realidades atmosférica e geofísica distintas, é o possível, pela baixa densidade de estações disponíveis em algumas regiões do Brasil.

Figura 21 - Seleção das estações a serem utilizadas na estimativa do modelo de variação vertical do usuário



Fonte: A autora

Selecionadas as estações no entorno do usuário, acessa-se os dados referentes aos períodos e parâmetros do modelo estimados nas séries das 65 estações analisadas na etapa 1, separando-se aqueles associados às estações em questão. A partir desses dados são identificadas as periodicidades que aparecem nas séries de todas as estações selecionadas (que dará origem à matriz A (Eq. 4) do modelo do usuário) e os parâmetros do modelo associados a cada periodicidade, para cada série de estação selecionada. Tais parâmetros, junto dos parâmetros y_0 e r estimados para cada série, que se referem aos coeficiente linear e angular do modelo, respectivamente, são então interpolados para a posição do usuário de modo a estimar os parâmetros X (Eq. 4) do modelo de variação de sua coordenada vertical. O método de interpolação utilizado foi a média dos parâmetros ponderada pelo inverso da distância de cada estação utilizada na estimativa com relação à posição do usuário. Deste modo, cada parâmetro $\bar{x}_p, p = 1, \dots, m$ do modelo do usuário é estimado por

$$\bar{x}_p = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad (52)$$

em que x_i é o parâmetro associado à série da estação i selecionada, p_i é o inverso da distância entre essa estação e a posição do usuário, n é o número de estações utilizadas na estimativa e m é o número de parâmetros estimados.

Identificados os efeitos cíclicos que afetam a componente vertical, por meio dos períodos identificados em todas as estações ao redor do usuário, e estimados os parâmetros do modelo dado na Equação (3), pela interpolação dos parâmetros do modelo das estações envolvidas, tem-se então a estimativa do modelo que descreve a variabilidade da coordenada vertical para a posição do usuário. A partir desse modelo, a coordenada vertical desse ponto poderá ser atualizada para qualquer época de interesse.

Como aplicação do modelo estimado, a coordenada geodésica (lat, lon, h) do usuário, cujas observações foram coletadas numa época t_1 , serão atualizadas para a época t_2 de interesse. Para a atualização das coordenadas esféricas (lat, lon) será utilizado o VEMOS2017 (DREWES et al., 2020; SÁNCHEZ et al., 2020). Esse modelo corresponde a uma grade de $1^\circ \times 1^\circ$ de velocidade horizontal referenciada ao ITRF2014, em que as velocidades V_E e V_N fornecidas para cada ponto da grade podem ser interpoladas para uma dada posição pertencente à América Latina e Caribe. A atualização das coordenadas esféricas do usuário, que ocorre no SGL de uma época t_1 para uma época t_2 , se dá da seguinte forma:

$$E_{t_2} = E_{t_1} + V_E(t_2 - t_1) \quad (53)$$

$$N_{t_2} = N_{t_1} + V_N(t_2 - t_1),$$

em que t_1 é a época de origem das coordenadas e t_2 é a época de interesse; E_{t_1} e N_{t_1} são as coordenadas horizontais do ponto na época em que as observações foram coletadas; E_{t_2} e N_{t_2} são as coordenadas atualizadas para a época de interesse; e V_E e V_N são as velocidades obtidas do VEMOS2017, interpoladas para a posição do ponto de coordenadas (lat, lon) . Vale destacar que a partir do VEMOS2017 não se obtém a velocidade da componente vertical. A atualização da coordenada h será, então, realizada empregando-se o modelo de variação vertical estimado para a posição do usuário.

A dedução da fórmula para a atualização da coordenada vertical será realizada a seguir. Primeiramente, considere que a série temporal de coordenada vertical descreve a variação da coordenada U ao longo do tempo, com relação a uma coordenada U_0 adotada como referência. Dessa forma, a coordenada U nas épocas t_1 e t_2 , por exemplo, pode ser obtida por meio da série utilizando-se as seguintes equações:

$$U_{t_1} = U_0 + \bar{U}(t_1) \quad (54)$$

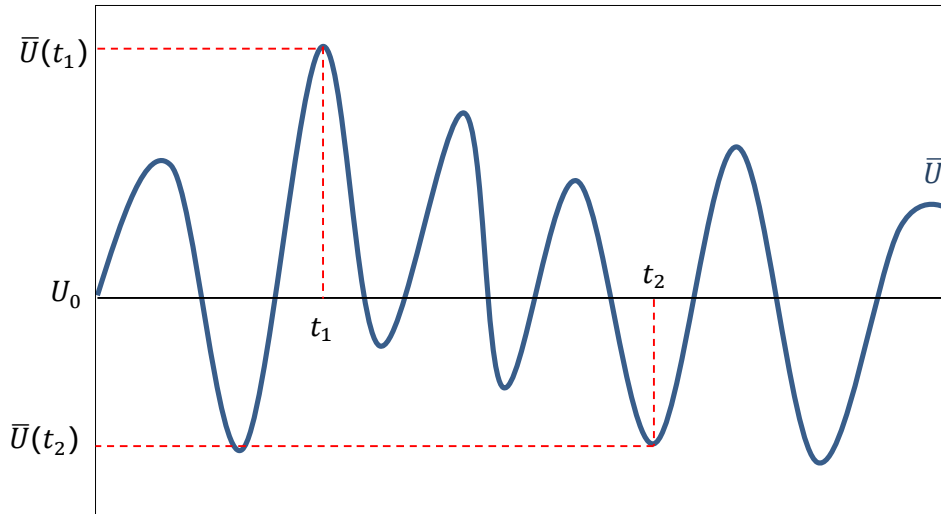
$$U_{t_2} = U_0 + \bar{U}(t_2), \quad (55)$$

em que U_{t_1} e U_{t_2} são a coordenada vertical obtida nas épocas t_1 e t_2 , respectivamente; U_0 é a coordenada adotada como referência; $\bar{U}(t_1)$ e $\bar{U}(t_2)$ representam a variação $\bar{U}$ da coordenada vertical nas épocas t_1 e t_2 , respectivamente (ver representação na Figura 22). Isolando-se o termo U_0 , comum às Equações (54) e (55), e igualando as duas equações, obtém-se U_{t_2} em função de U_{t_1}

$$U_{t_2} = U_{t_1} + \bar{U}(t_2) - \bar{U}(t_1), \quad (56)$$

de forma que a coordenada U na época t_2 de interesse é calculada a partir da coordenada na época de coleta (U_{t_1}) e da variação $\bar{U}$ da coordenada vertical nas épocas t_1 e t_2 .

Figura 22 - Obtenção da coordenada U nas épocas t_1 e t_2 , a partir dos dados da série de coordenada, adotando-se U_0 como a coordenada de origem



Fonte: A autora

Deste modo, utilizando-se da Equação (56), cujas componentes $\bar{U}(t_1)$ e $\bar{U}(t_2)$ podem ser obtidas por meio do modelo de variação vertical estimado para a posição do usuário, realiza-se a atualização da coordenada U da época t_1 para a t_2 . Após a atualização, as coordenadas $E_{t_2}, N_{t_2}, U_{t_2}$ são então transformadas do SGL para o sistema geodésico, obtendo-se as coordenadas (lat, lon, h) na época t_2 de interesse.

6 RESULTADOS E ANÁLISES

Os resultados desta pesquisa são apresentados em duas seções. A seção 6.1 contém os resultados da análise das séries temporais de coordenada vertical de 65 estações GNSS distribuídas no território brasileiro, que envolve a estimativa da parte determinística e estocástica do modelo referente a cada uma das séries analisadas. Já a seção 6.2, contém os resultados dos experimentos relacionados à estimativa do modelo de variação vertical para a posição de um usuário GNSS do SGB, bem como a validação do modelo proposto.

6.1 Análise de séries temporais de coordenadas GNSS

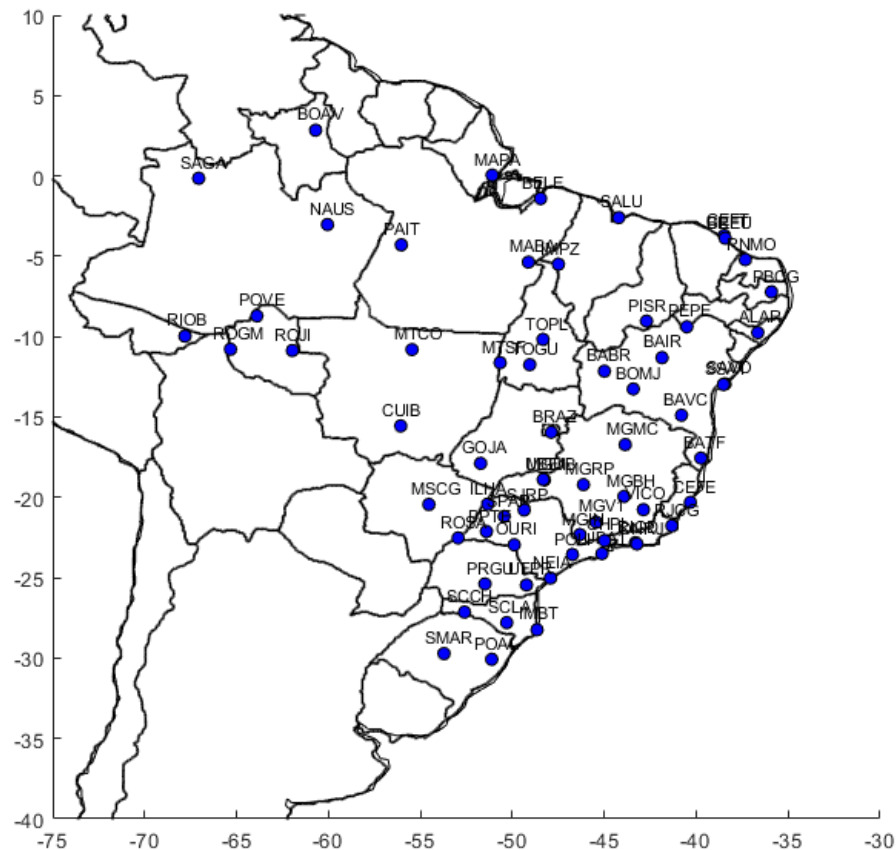
Os experimentos foram realizados utilizando as séries de coordenadas (componente vertical) diárias de 65 estações GNSS, cujos dados foram processados pelo NGL e disponibilizadas no SGL em ITRF2014 (BLEWITT et al., 2018). As estações selecionadas obedecem aos critérios estabelecidos na Seção 5.1: estão localizadas em diferentes regiões do Brasil, apresentando comportamento distinto uma das outras, tais como diferentes tipo de solo e condições atmosféricas; e suas séries possuem quantidade considerável de dados, mais de 10 anos, o que possibilita identificar efeitos cíclicos de longo período presentes nas séries. A Tabela 3 mostra as estações GNSS escolhidas e o período de observação das respectivas séries de coordenadas analisadas. A Figura 23 ilustra a localização geográfica das estações selecionadas.

Tabela 3 – Estações GNSS modeladas

Estação (Sigla)	Localização	Período de observação	
		Época inicial	Época final
ALAR	Arapiraca - AL	03/04/2008	-
BABR	Barreiras - BA	18/02/2010	-
BAIR	Irecê - BA	01/01/2009	-
BATF	Teixeira de Freitas	01/01/2009	-
BAVC	Vitória da Conquista - BA	22/06/2009	-
BELE	Belém do Pará - PA	01/01/2004	-
BOAV	Boa Vista - RR	05/09/2007	-
BOMJ	Bom Jesus da Lapa - BA	21/01/2000	01/02/2016
BRAZ	Brasília - DF	05/03/1995	-
BRFT	Fortaleza - CE	16/09/2005	-
CEEU	Eusébio - CE	14/04/2008	-
CEFE	Bento Ferreira - ES	25/07/2007	-
CEFT	Fortaleza - CE	26/03/2010	-

CHPI	Cachoeira Paulista - SP	17/04/2001	-
CUIB	Cuiabá - MT	21/01/2000	-
GOJA	Jataí - GO	06/04/2008	-
ILHA	Ilha Solteira - SP	30/08/2008	-
IMBT	Imbituba - SC	05/09/2007	-
IMPZ	Imperatriz - MA	21/01/2000	-
MABA	Marabá - PA	05/09/2007	-
MAPA	Macapá - AP	13/01/2006	-
MGBH	Belo Horizonte - MG	02/01/2009	-
MGIN	Inconfidentes - MG	06/01/2008	-
MGMC	Montes Claros - MG	05/04/2008	-
MGRP	Rio Paranaíba - MG	05/03/2010	-
MGUB	Uberlândia - MG	09/01/2008	-
MGV1	Governador Valadares - MG	05/04/2010	-
MSCG	Campo Grande - MS	01/01/2008	-
MTCO	Colíder - MT	25/06/2009	05/08/2019
MTSF	São Félix do Araguaia - MT	03/04/2008	26/10/2018
NAUS	Manaus - AM	01/01/2006	-
NEIA	Cananéia - SP	29/06/2002	-
ONRJ	Rio de Janeiro - RJ	31/03/2007	-
OURI	Ourinhos - SP	22/12/2006	06/03/2017
PAIT	Itaituba - PA	07/04/2010	-
PBCG	Campina Grande - PB	03/04/2008	-
PEPE	Petrolina - PE	01/01/2008	-
PISR	São Raimundo Nonato - PI	23/06/2009	-
POAL	Porto Alegre - RS	14/09/1999	-
POLI	São Paulo - SP	23/02/2007	-
POVE	Porto Velho - RO	04/01/2006	-
PPTE	Presidente Prudente - SP	18/12/1996	-
PRGU	Guarapuava - PR	23/06/2009	-
RIOB	Rio Branco - AC	01/05/2007	-
RIOD	Duque de Caxias - RJ	03/02/2002	12/06/2019
RJCG	Campo dos Goytacazes - RJ	03/04/2008	-
RNMO	Mossoró - RN	01/01/2009	-
ROGM	Guarajá-Mirim - RO	01/01/2008	-
ROJI	Ji-Paraná - RO	03/04/2008	-
ROSA	Rosana - SP	27/12/2006	-
SAGA	São Gabriela da Cachoeira - AM	16/09/2007	-
SALU	São Luiz - MA	05/09/2007	-
SAVO	Salvador - BA	06/09/2007	-
SCCH	Chapecó - SC	03/04/2008	-
SCLA	Lages - SC	03/04/2008	-
SJRP	São José do Rio Preto - SP	01/01/2007	-
SMAR	Santa Maria - RS	01/01/2004	-
SPAR	Araçatuba - SP	01/01/2010	-
SSA1	Salvador - BA	05/09/2007	-
TOGU	Gurupi - TO	03/04/2008	-
TOPL	Palmas - TO	01/01/2008	-
UBA1	Ubatuba - SP	07/04/2010	-
UBE1	Uberlândia - MG	26/07/2007	-
UFPR	Curitiba - PA	14/02/1996	-
VICO	Viçosa - MG	25/04/2001	-

Figura 23 – Localização geográfica das estações modeladas

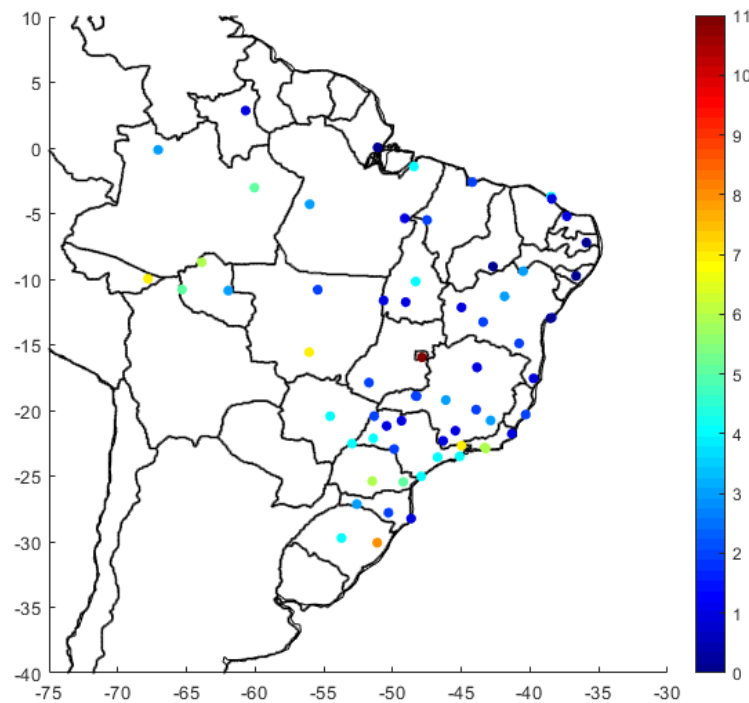


Fonte: A autora

Obtidas as séries de coordenada vertical (U) das estações GNSS selecionadas, realizou-se as etapas de pré-processamento e posterior análise das séries. Para ilustrar o procedimento realizado em cada uma das etapas, serão apresentados os resultados obtidos para a estação POVE, localizada em Porto Velho – RO. A escolha dessa estação, se deve ao fato de sua série apresentar saltos, *outliers*, *gaps*, exemplificando bem a diferença da série antes e depois do pré-processamento.

A primeira etapa do pré-processamento é a identificação e remoção dos saltos da série de coordenada vertical. O NGL fornece as épocas em que ocorrem descontinuidades na série associadas a terremotos, mudanças de referencial ou troca de equipamentos. Com base nesses registros, os saltos são identificados nas séries. A Figura 24 ilustra a quantidade de saltos presente nas séries de coordenadas das estações GNSS analisadas nesse estudo. Das 65 séries analisadas, apenas 5 delas não apresentam saltos. Algumas delas, no entanto, são afetadas por até 11 saltos, como é o caso da estação BRAZ em Brasília-DF, cujos deslocamentos da série são decorrentes, na grande maioria, de trocas de antena e receptor.

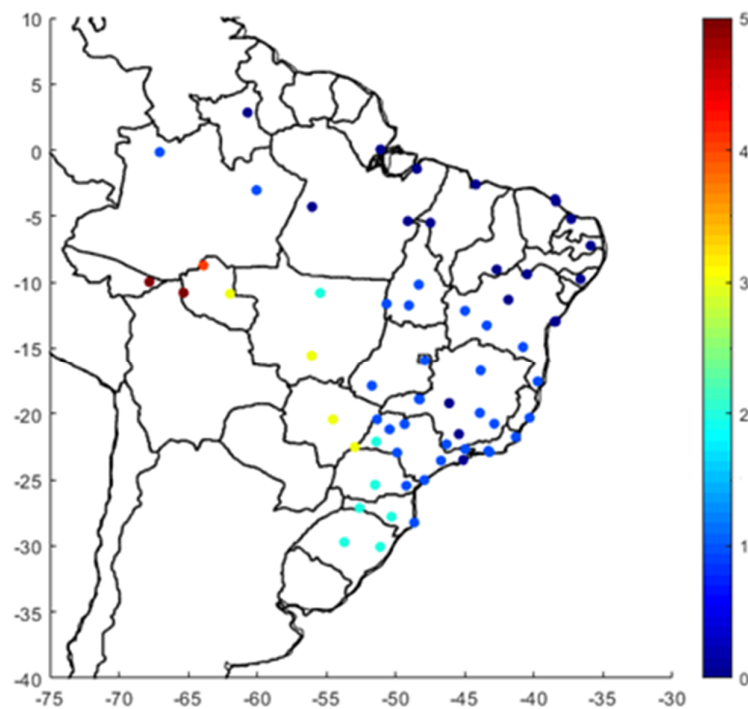
Figura 24 – Número de saltos identificados em cada série das estações GNSS analisadas



Fonte: A autora

A ocorrência de terremotos próximos à estação também pode afetar sua posição tridimensional produzindo deslocamentos (saltos) nas séries de coordenadas. Quando a distância (em Km) entre a estação e o epicentro do terremoto é inferior a $10^{M/2-0,8}$, sendo M a magnitude do terremoto, a data de ocorrência do terremoto passa a integrar os registros de saltos disponibilizados pelo NGL (BLEWITT et al., 2018). A Figura 25 ilustra o número de saltos associados a terremotos presentes na série de coordenada vertical de cada estação analisada. As séries que apresentam maior número de saltos oriundos de terremotos estão localizadas mais a oeste do território brasileiro. Este fato justifica-se pela maior proximidade dessas estações em relação à zona intra-placas (Nazca e Sul-americana) onde ocorre a maioria dos terremotos do território sul-americano, sendo também os de maior magnitude.

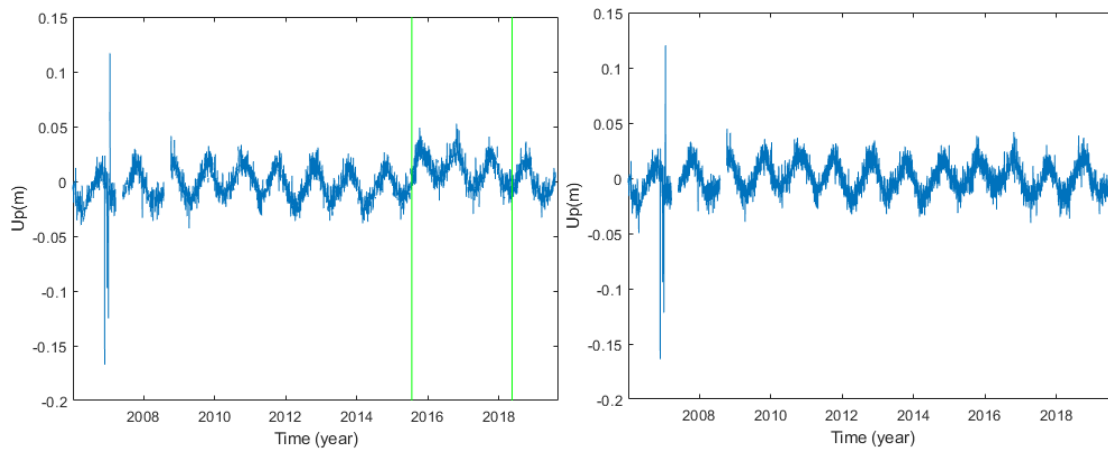
Figura 25 – Número de saltos associados a terremotos em cada uma das séries de estações analisadas



Fonte: A autora

Identificados os saltos, realiza-se sua remoção das séries de coordenada vertical. Para as séries de algumas estações os deslocamentos produzidos são de grande magnitude e, caso não fossem identificados e removidos, poderiam ser interpretados como variações físicas da posição vertical da estação, prejudicando a análise da série. A Figura 26 ilustra a série da estação POVE antes e após a remoção dos saltos.

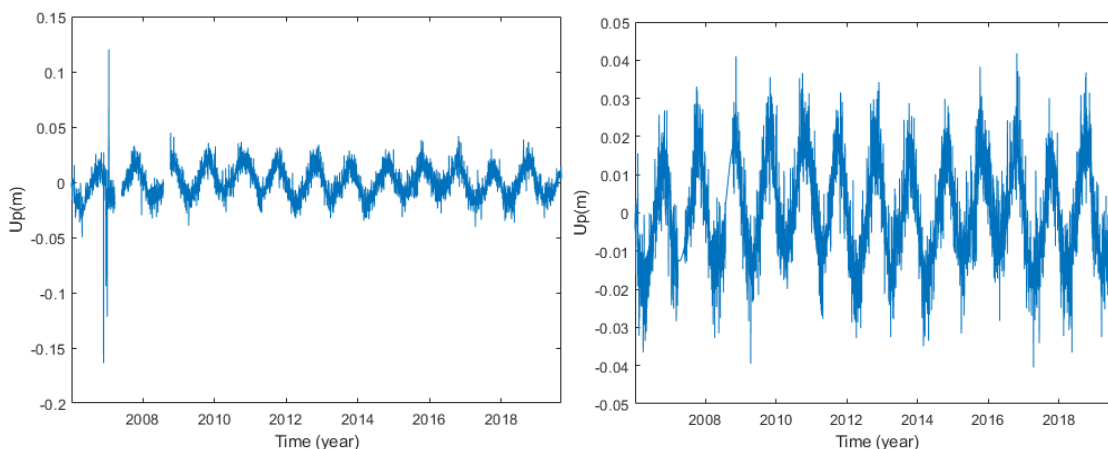
Figura 26 – Série de coordenada vertical da estação POVE, antes (esquerda) e após (direita) remoção dos saltos (identificados pela linha vertical em verde)



Fonte: A autora

Antes da análise tempo-frequência das séries ainda foi realizada a remoção dos *outliers* e a interpolação dos *gaps* das séries. A remoção dos *outliers* faz-se necessária para que a estimativa dos parâmetros do modelo não seja influenciada por dados discrepantes. Quanto aos *gaps*, que são lacunas causadas nas séries devido a intervalos de tempo em que os dados não foram coletados, esses podem contaminar as séries com periodicidades espúrias decorrentes das propriedades espectrais do conjunto de lacunas. Por esse motivo, convém preencher os dados faltantes das séries de modo a garantir uma análise mais realística de seu conteúdo de frequência. A Figura 27 apresenta a série de coordenada U da estação POVE após a realização de ambas as etapas de pré-processamento.

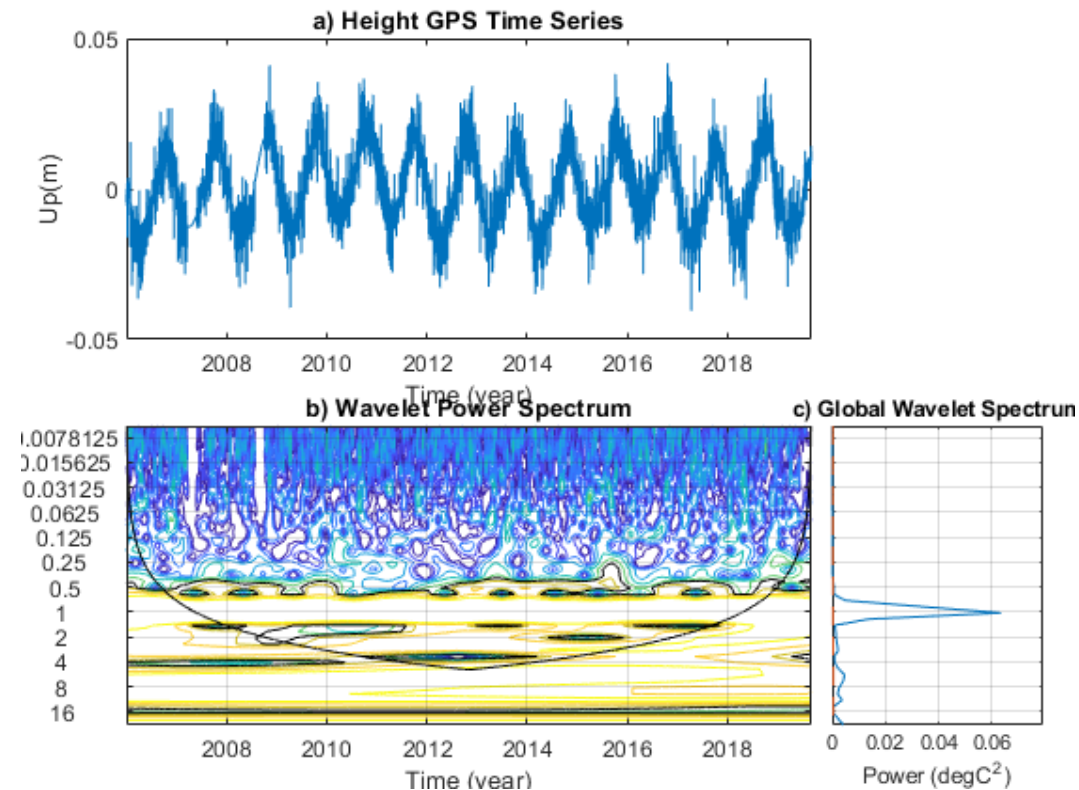
Figura 27 – Série de coordenada vertical da estação POVE, antes (esquerda) e após (direita) remoção dos *outliers* e interpolação dos *gaps*



Cumpridas as etapas do pré-processamento, foi realizada a análise *wavelet* das séries da componente vertical das 65 estações GNSS selecionadas com o objetivo de identificar a frequência dos efeitos periódicos presentes nas séries. Esta tarefa foi executada aplicando-se a TWC (Seção 4.3.1) aos dados, de modo a obter a decomposição da série em multiescala e com localização tempo-frequência. Para exemplificar como é interpretada a análise *wavelet* das séries de coordenada vertical, a Figura 28 apresenta (a) a série relacionada à estação POVE analisada, (b) o periodograma *wavelet* e (c) o espectro *wavelet* global da série gerado aplicando-se a TWC com relação à *wavelet* de Morlet. O periodograma *wavelet* representa a energia associada aos coeficientes *wavelet* da TWC em tempo e escala. Por meio dele, a energia (ou variância) da série é decomposta em diferentes níveis de resolução, estando as variações de baixa frequência da série localizadas nas escalas mais suaves do periodograma (mais abaixo) e as variações de alta frequência, situadas nas escalas mais refinadas (mais acima do periodograma). Para determinar quais amplitudes dos coeficientes *wavelets* apresentados no periodograma são realmente significativos utiliza-se o cone de influência. O cone de influência é a região do periodograma *wavelet* (abaixo da linha preta contínua em forma de arco, na Figura 28 (b)) em que os efeitos da borda se tornam tão importantes, que os períodos encontrados nesta região devem ser negligenciados por não possuírem significado estatístico. Já os contornos em preto do periodograma *wavelet* assinalam as regiões com significância acima de 95%. O espectro *wavelet* global (Figura 28 (c)) completa a análise multiescala da série temporal. Ele constitui-se da soma de todos os coeficientes *wavelet* em cada escala do periodograma e permite calcular a variância da série temporal em cada escala com objetivo de identificar quais delas possuem maior energia. Como cada escala do periodograma está associada a uma periodicidade (em ano), a análise do espectro global possibilita identificar quais os períodos contidos nos dados e quais deles melhor caracterizam a série. Observando, por exemplo, o espectro global da série relacionada à estação POVE, verifica-se um pico principal no período anual (1 ano) e outros menos significativos nos períodos de 5,8 e 13,8 anos (abaixo do cone de influência). Entretanto, o processo de identificação dos períodos envolve ainda a análise do arquivo gerado a partir do espectro global. Através dele é possível identificar outras periodicidades que compõem a série temporal mas não podem ser identificados pela análise visual do espectro global, já que os picos mais significantes “mascaram” a energia dos demais períodos. No caso da série da estação POVE, por exemplo, foram identificados nesse arquivo os períodos de 1,02; 0,86; 1,22; 4,87; 0,72; 4,1; 2,9; 2,44; 3,44; 2,05; 1,72; 0,61; 1,45; 0,5 e 0,43 ano, por ordem de significância. Vale ressaltar que os períodos inferiores à linha vermelha tracejada do espectro global (quase imperceptível no gráfico diante da magnitude do pico de 1 ano e da escala

adotada) e abaixo do cone de influência (como a período de 5,8 e 13,8 anos, por exemplo), são desconsideradas por não possuírem significância ou confiança estatística.

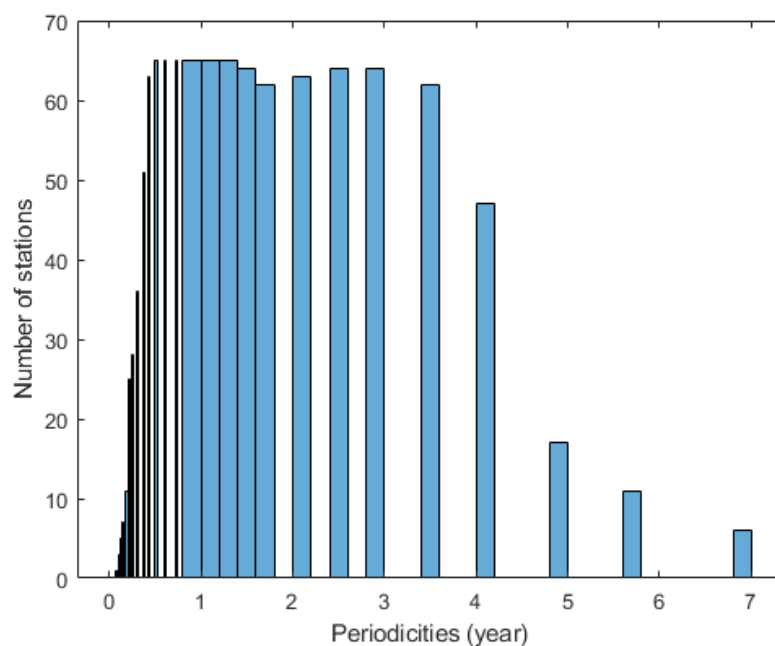
Figura 28 – Análise *wavelet* da série de coordenada vertical (U) da estação POVE



Fonte: A autora

A identificação dos períodos contidos na série, associados a fenômenos geofísicos e efeitos sistemáticos que afetam as observações GNSS, foi realizada para cada uma das 65 estações analisadas, individualmente. A Figura 29 ilustra as periodicidades identificadas nas séries de coordenada vertical analisadas, de forma a agrupá-las de acordo ao número de estações em que estão contidas. A análise do histograma revela que os períodos de 0,5; 0,61; 0,72; 0,86; 1,02 e 1,22 ano fazem parte das séries de todas as 65 estações analisadas. Alguns desses períodos já são conhecidos e podem estar relacionados aos efeitos de maré terrestre (0,5 ano), movimento do polo (1,22 ano $\approx$ 433 dias), efeito draconiano (0,86 $\approx$ 351,6 dias) e carga hidrológica (0,5 e 1,02 ano). Este último efeito, devido principalmente ao número de bacias hidrográficas de significativa relevância pertencentes ao Brasil e aos períodos de seca e chuva.

Figura 29 – Histograma dos períodos contidos nas séries de coordenadas das 65 estações analisadas

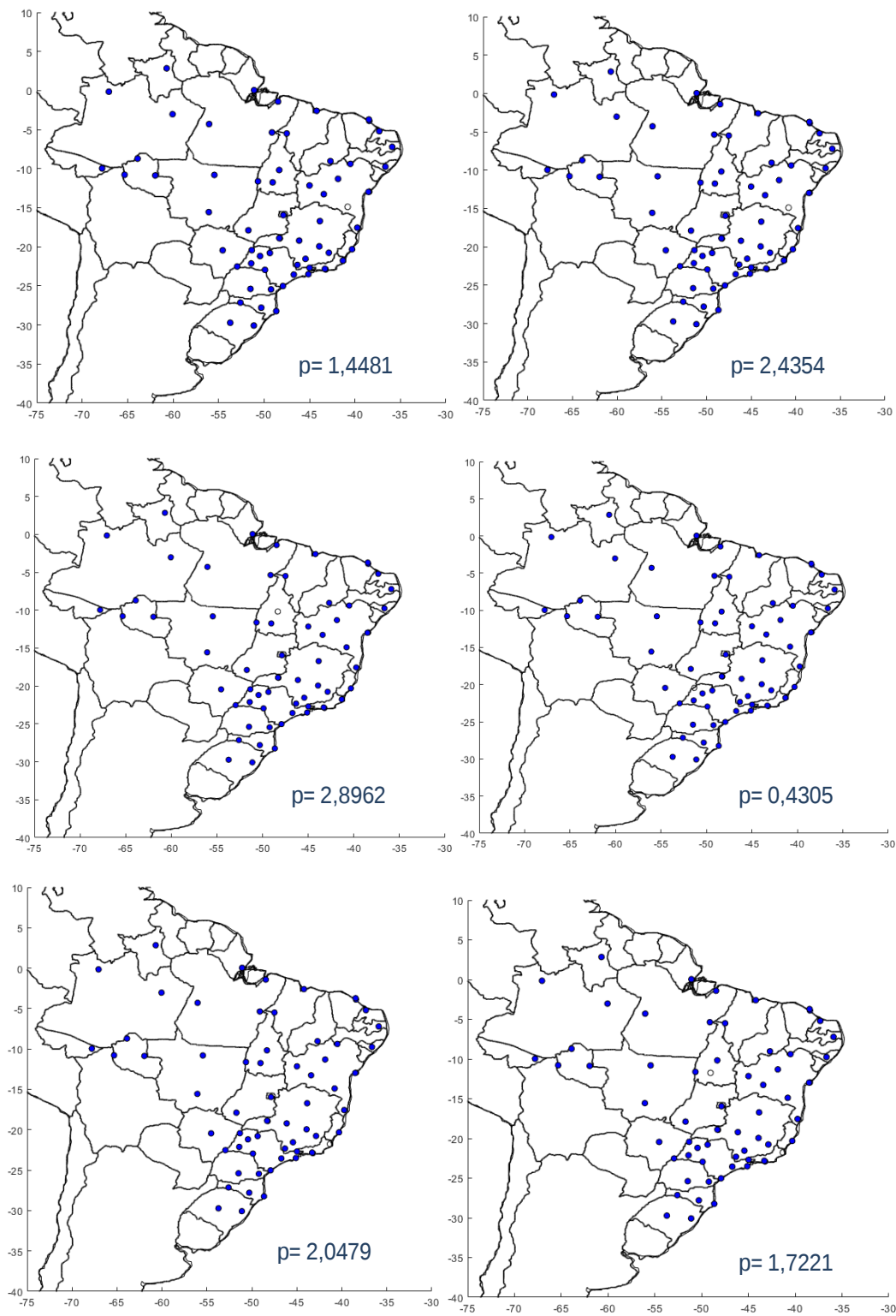


Fonte: A autora

A seguir, para cada período identificado será apresentada a distribuição das estações que o contém em sua respectiva série (Figuras 30 a 33). Esta análise possibilita identificar periodicidades comuns entre as séries de coordenadas analisadas e definir quais efeitos cíclicos caracterizam cada região de estudo. Na Figura 30, observa-se que o período identificado em cada subfigura aparece na série de quase todas as 65 estações analisadas. Não é possível identificar qualquer padrão entre as estações que não possuem tais períodos. Já na Figura 31, a partir do mapa relacionado ao período de 0,3620 ano, é possível notar um padrão de agrupamento das estações cuja série contém cada periodicidade identificada. Em relação aos períodos de 0,3044; 0,2560 e 0,2153 ano, por exemplo, que correspondem aproximadamente aos períodos de 111, 93 e 78 dias, respectivamente, nota-se que as séries de estações que contêm tais períodos estão localizadas predominantemente no Nordeste, Sudeste e Sul do Brasil. Ou seja, fica evidente que os efeitos cíclicos que possuem tais periodicidades, pouco afetam as séries de estações pertencentes à região amazônica. Pela análise das Figuras 32 (a partir do período de 0,1810 ano) e 33, por sua vez, é possível identificar períodos menos significantes, cuja efeito aparecem nas séries de poucas estações, dentre as 65 analisadas. Cabe ressaltar aqui, o período de 8,1917 anos (Figura 33), que está presente somente nas séries de três estações, sendo elas BRAZ, PPTE e UFPR. Isso se deve ao fato de que estas estações são as únicas cujas

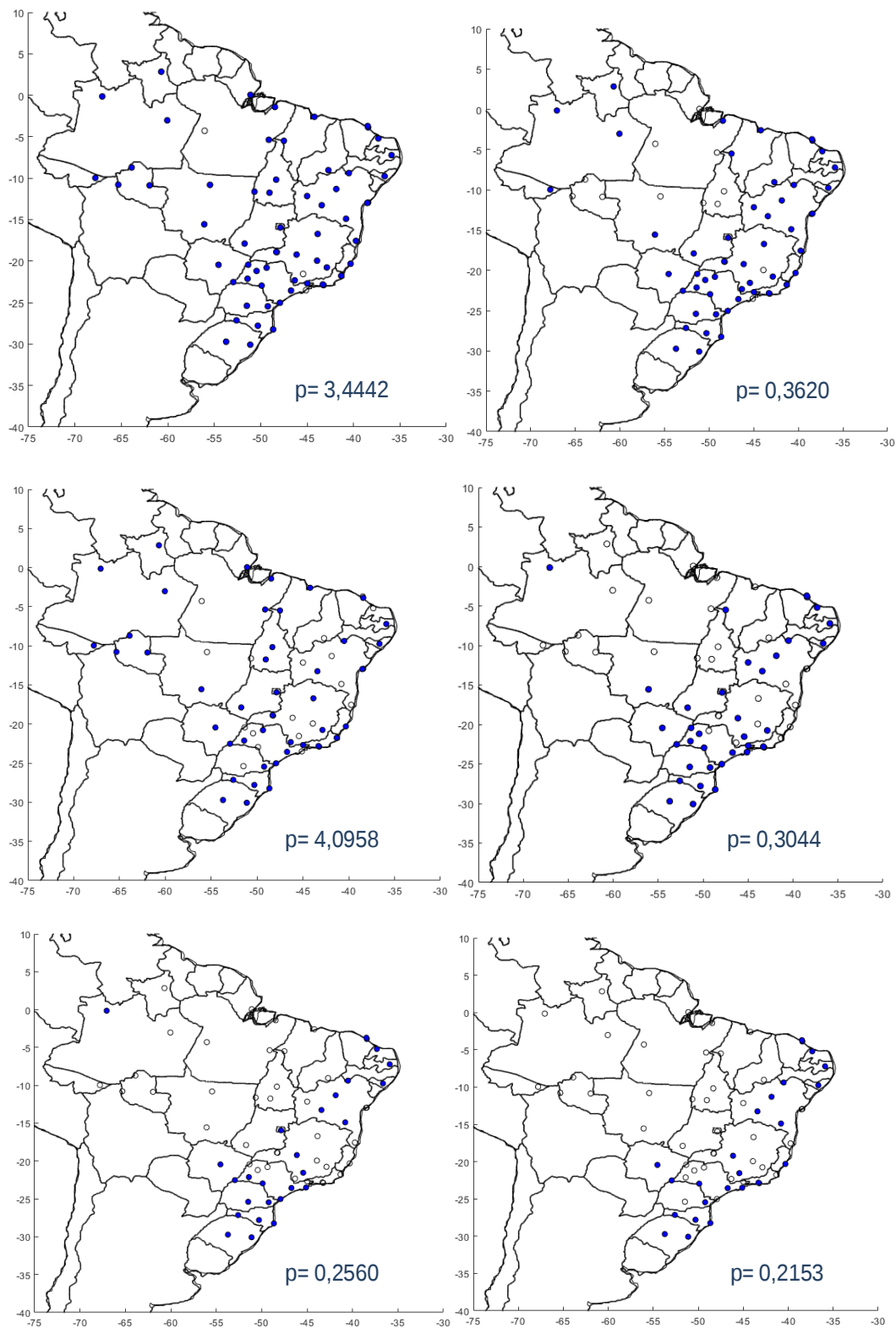
séries possuem mais de 20 anos de observação e possibilitam a identificação de tal periodicidade.

Figura 30 – Distribuição das estações cuja série de coordenada vertical (U) contém o período p em ano (em azul), bem como das estações que não o contém (em branco)



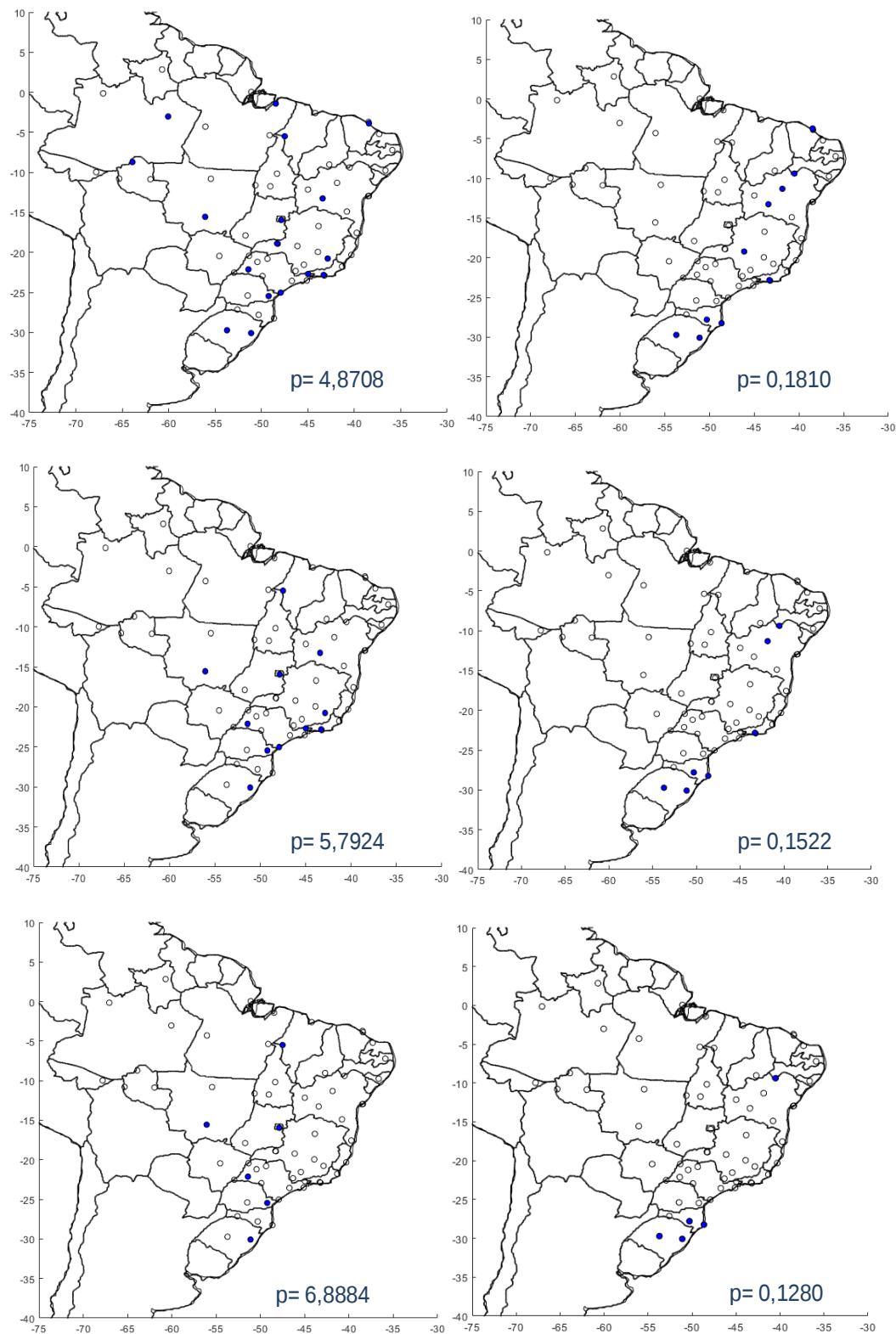
Fonte: A autora

Figura 31 – Distribuição das estações cuja série de coordenada vertical (U) contém o período p em ano (em azul), bem como das estações que não o contém (em branco)



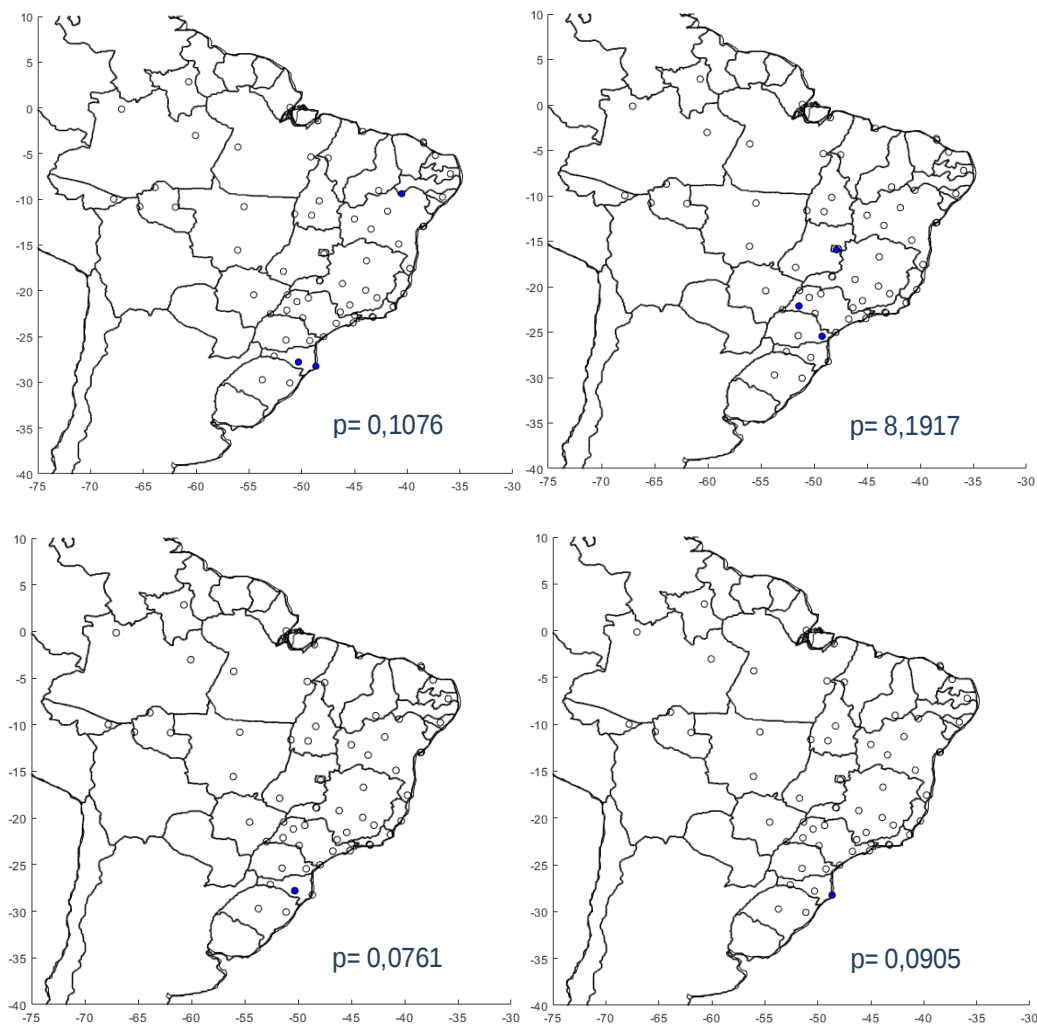
Fonte: A autora

Figura 32 – Distribuição das estações cuja série de coordenada vertical (U) contém o período p em ano (em azul), bem como das estações que não o contém (em branco)



Fonte: A autora

Figura 33 – Distribuição das estações cuja série de coordenada vertical (U) contém o período p em ano (em azul), bem como das estações que não o contém (em branco)



Fonte: A autora

Após a análise *wavelet* das séries de coordenada vertical, em que são estimadas as frequências do sinal cíclico contido nas séries e, consequentemente, identificada a matriz *design* A do modelo funcional de cada série, foi realizada a análise de ruídos das 65 séries de coordenadas baseado no NNLS-VCE (Seção 3.2.1). A Tabela 4 apresenta os resultados das estimativas das componentes de variância associadas a cada um dos ruídos presentes nas séries de coordenadas (*white noise*, *flicker noise* e *random walk*), bem como o teste estatístico para a identificação do modelo estocástico que melhor representa a componente ruidosa de cada uma das séries analisadas. O NNLS-VCE possibilita estimar a amplitude dos três ruídos simultaneamente, de modo que, caso seja improvável que uma componente de ruído σ esteja presente na série, sua amplitude é automaticamente estimada como zero. O teste- w completa a

análise estocástica da série, permitindo identificar o modelo que melhor caracteriza as componentes de ruído da série: se a combinação de *white noise* e *flicker noise* ou de *white noise* e *random walk*, a que apresentar maior valor de w .

Tabela 4 – Estimativa de componentes de variância e teste- w das séries de coordenadas

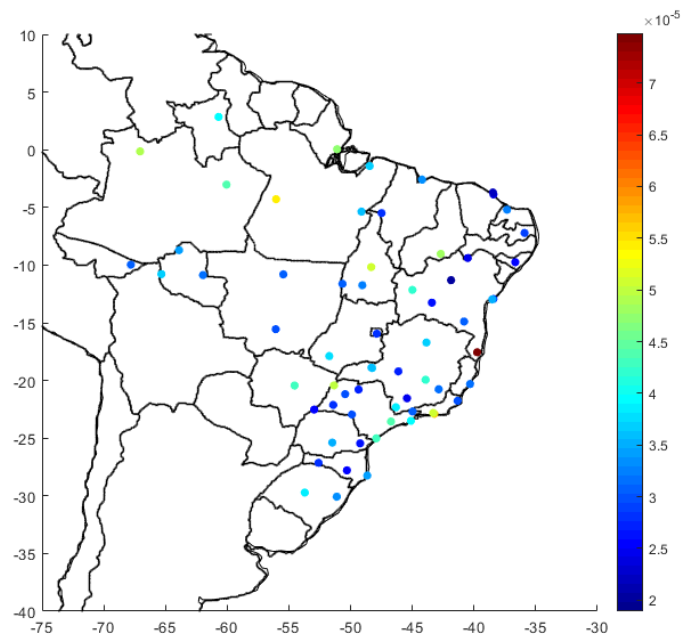
Estação	Componente de variância			Teste - w	
	σ_{wn}^2	σ_{fn}^2	σ_{rw}^2	$Q_y = \sigma_w^2 I + \sigma_f^2 Q_f$	$Q_y = \sigma_w^2 I + \sigma_{rw}^2 Q_{rw}$
ALAR	2,5427E-05	1,6144E-05	1,1733E-05	4532,13	922,08
BABR	4,1912E-05	1,6137E-04	1,5429E-05	796,49	131,27
BAIR	1,9906E-05	2,3823E-05	1,2229E-05	165,68	13,78
BATF	7,4821E-05	8,4006E-05	8,7837E-06	5209,07	1429,58
BAVC	3,0541E-05	2,4525E-05	2,3506E-05	6972,77	2678,58
BELE	3,7234E-05	1,9732E-04	0	14532,12	2902,89
BOAV	3,9706E-05	1,8588E-04	0	4623,08	2862,17
BOMJ	2,6659E-05	2,2383E-04	0	13162,32	4102,41
BRAZ	2,8326E-05	3,8913E-04	0	3704,82	3543,61
BRFT	1,8928E-05	2,6851E-05	5,5605E-06	20035,34	6466,61
CEEU	2,3399E-05	9,4538E-06	9,9889E-06	3211,94	890,91
CEFE	3,1842E-05	4,4965E-05	1,6939E-05	401,69	132,84
CEFT	2,1750E-05	1,1874E-05	7,0625E-06	553,52	164,00
CHPI	3,0672E-05	7,3905E-05	1,4570E-05	1713,94	1907,89
CUIB	3,0244E-05	3,1840E-04	0	3625,82	1053,90
GOJA	3,7333E-05	1,2957E-04	7,2185E-06	9168,43	2876,07
ILHA	4,9744E-05	7,1518E-05	3,4711E-05	2686,77	1015,78
IMBT	3,3973E-05	0	2,8517E-05	440,23	1178,53
IMPZ	2,8041E-05	3,8731E-04	0	261370,94	76753,51
MABA	3,5608E-05	2,5073E-04	0	1025,15	286,92
MAPA	4,7122E-05	4,6995E-05	1,8008E-05	4230,75	1267,27
MGBH	4,2320E-05	1,4244E-04	1,3500E-05	80920,89	19316,03
MGIN	3,8776E-05	8,0514E-05	1,5428E-05	36348,39	7272,29
MGMC	3,6427E-05	1,1944E-04	1,3036E-06	16287,95	2849,30
MGRP	2,6825E-05	1,0903E-04	1,4398E-05	1505,40	1047,09
MGUB	3,6752E-05	1,8895E-04	6,8471E-06	115941,75	28629,96
MGV1	2,4639E-05	8,5352E-05	2,8409E-06	874,64	1127,59
MSCG	4,3096E-05	2,3111E-04	3,0101E-06	81859,92	23087,16
MTCO	3,1065E-05	2,3679E-04	0	1279,19	141,78

MTSF	3,0334E-05	1,9180E-04	3,9150E-07	3696,73	768,35
NAUS	4,3883E-05	1,7225E-03	0	795751,13	233649,64
NEIA	4,2871E-05	3,9776E-05	2,0887E-05	3108,13	1665,57
ONRJ	5,5763E-05	7,6462E-05	1,8135E-05	35892,40	7466,53
OURI	3,0168E-05	2,5488E-05	1,6926E-05	207,30	42,20
PAIT	5,4472E-05	4,5486E-04	0	1446,70	246,39
PBCG	2,9142E-05	4,3390E-05	9,9677E-06	1019,56	162,26
PEPE	2,4869E-05	4,3254E-05	1,4147E-05	646,83	84,47
PISR	4,7824E-05	1,1790E-04	0	153827,08	40012,01
POAL	3,3525E-05	5,1044E-05	2,8503E-05	65879,41	18584,29
POLI	4,3740E-05	1,0868E-04	1,1860E-05	3631,49	1699,68
POVE	3,4640E-05	4,8321E-04	0	281711,25	91484,90
PPTE	2,8494E-05	1,4470E-04	9,6349E-06	35028,14	12395,77
PRGU	3,5390E-05	1,1393E-05	2,2907E-05	27613,51	9664,71
RIOB	3,1074E-05	2,5447E-04	1,5281E-06	4463,08	1500,25
RIOD	5,1043E-05	8,7130E-05	2,7773E-05	14975,28	5768,80
RJCG	3,0100E-05	1,7192E-05	1,6524E-05	26088,90	6010,84
RNMO	3,2472E-05	6,9962E-06	1,3609E-05	18394,62	4871,04
ROGM	3,7088E-05	2,9674E-04	0	175508,25	50347,63
ROJI	3,1444E-05	2,3242E-04	2,1430E-07	41919,52	15112,13
ROSA	2,5043E-05	8,8931E-05	9,6515E-06	4301,42	1788,23
SAGA	4,8904E-05	1,9716E-04	1,9118E-06	14176,62	5007,25
SALU	3,3764E-05	1,4332E-04	2,7430E-07	661,37	279,20
SAVO	2,9285E-05	2,3507E-05	1,0844E-05	1661,21	686,69
SCCH	2,8256E-05	1,0654E-06	2,0935E-05	23711,16	6998,85
SCLA	2,5242E-05	6,7017E-06	2,1084E-05	15289,63	3937,72
SJRP	2,6883E-05	1,2696E-04	6,2508E-06	11784,04	2709,86
SMAR	3,8503E-05	8,3144E-06	3,7240E-05	3551,04	1380,67
SPAR	2,9614E-05	1,1843E-04	1,3195E-05	2195,70	325,53
SSA1	3,5472E-05	3,5294E-05	9,3295E-06	2065,61	750,00
TOGU	3,2074E-05	2,0274E-04	0	35624,02	9851,35
TOPL	5,0855E-05	1,7313E-04	0	26088,38	5014,80
UBA1	3,9385E-05	2,1095E-05	1,0788E-05	783,30	199,16
UBE1	3,5744E-05	2,5726E-04	0	22684,99	9350,29
UFPR	2,6212E-05	4,7190E-05	1,2543E-05	5810,97	3369,11
VICO	3,1627E-05	1,6985E-04	5,8379E-06	1732,24	626,18

Fonte: A autora

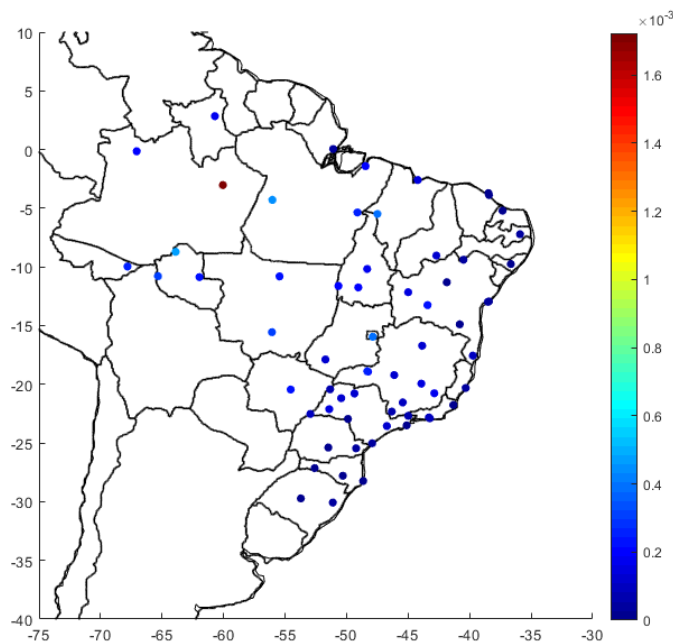
Para melhor visualização e análise dos resultados mostrados na Tabela 4, as Figuras 34 a 36 mostram a amplitude σ de ruído presente nas séries de coordenadas analisadas, considerando cada componente de ruído (*white noise*, *flicker noise* e *random walk*) de acordo à distribuição espacial das estações. Pela análise da Figura 34, é possível observar que o nível de *white noise* independe da localização espacial da estação, já que está associado ao ruído de hardware e erros de medida. Já em relação ao *flicker noise* (Figura 35), observa-se que as séries de estações localizadas na região norte e centro-oeste do Brasil, são as que possuem maior amplitude de *flicker noise* (a diferença é bem sutil). De acordo com a literatura a presença desse ruído nas séries de coordenadas pode estar relacionada aos efeitos ionosféricos de segunda ordem (WILLIAMS et al., 2004). Por último, analisando a Figura 36, verifica-se que as estações que possuem maior amplitude de *random walk* estão localizadas nas regiões nordeste, sudeste e sul do Brasil. Este ruído, por sua vez, está associado a pequenos movimentos aleatórios de monumentos geodésicos em relação à crosta terrestre, ou a saltos não detectados na série temporal, que podem simular o ruído *random walk*. Ao comparar as Figura 35 e 36, nota-se que, apesar do nível de *random walk* possuir maior variabilidade entre as estações analisadas, este ruído possui menor amplitude que o *flicker noise*.

Figura 34 – Amplitude de *white noise* σ_{wn}^2 nas séries de coordenadas verticais das estações analisadas



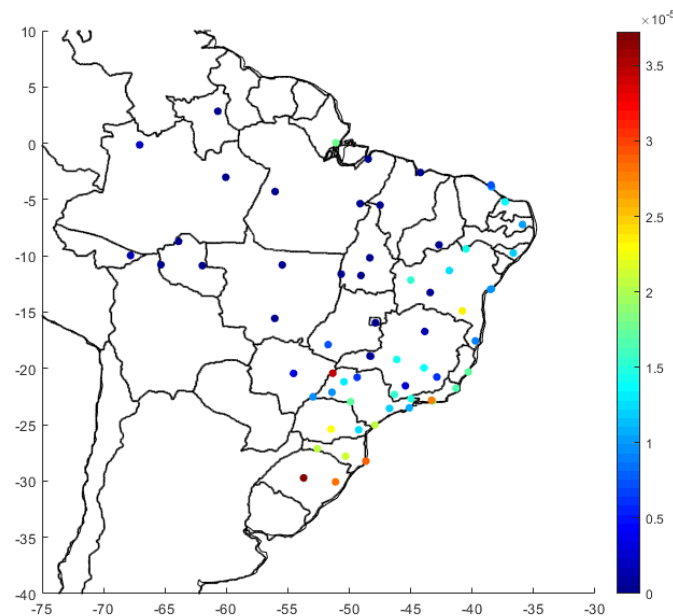
Fonte: A autora

Figura 35 – Amplitude de *flicker noise* σ_{fn}^2 nas séries de coordenadas verticais das estações analisadas



Fonte: A autora

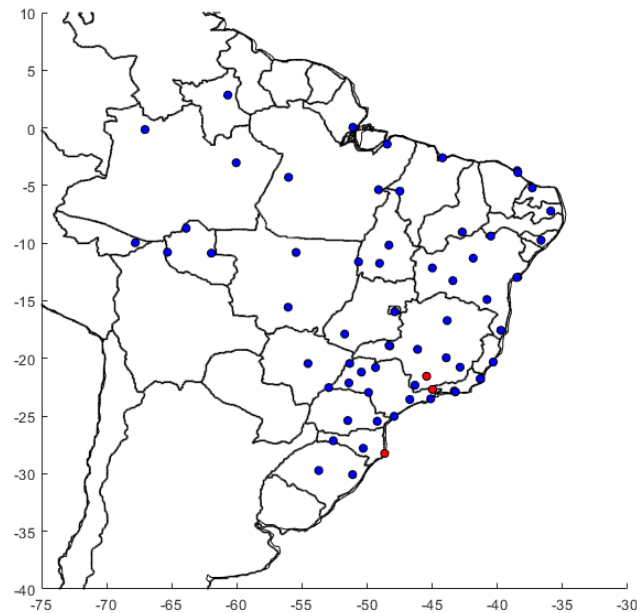
Figura 36 – Amplitude de *random walk* σ_{rw}^2 presente nas séries de coordenadas verticais das estações analisadas



Fonte: A autora

Após analisar a amplitude de *white noise*, *flicker noise* e *random walk* presentes nas séries de coordenada vertical, serão explorados agora os resultados relacionados à adoção do modelo estocástico em cada série, segundo o teste-w. A Figura 37, ilustra a distribuição das estações cujas séries foram analisadas, apresentando o modelo estocástico adotado em cada uma delas. O modelo estocástico composto pela combinação de *white noise* e *random walk* foi adotado em apenas 3 (4,6%) dentre as 65 séries analisadas, relacionadas às estações CHPI, IMBT e MGV1. O resultado confirma o que já foi relatado em trabalhos anteriores, que os ruídos nas séries de coordenadas GNSS são compostos principalmente pela combinação de *white noise* e *flicker noise*.

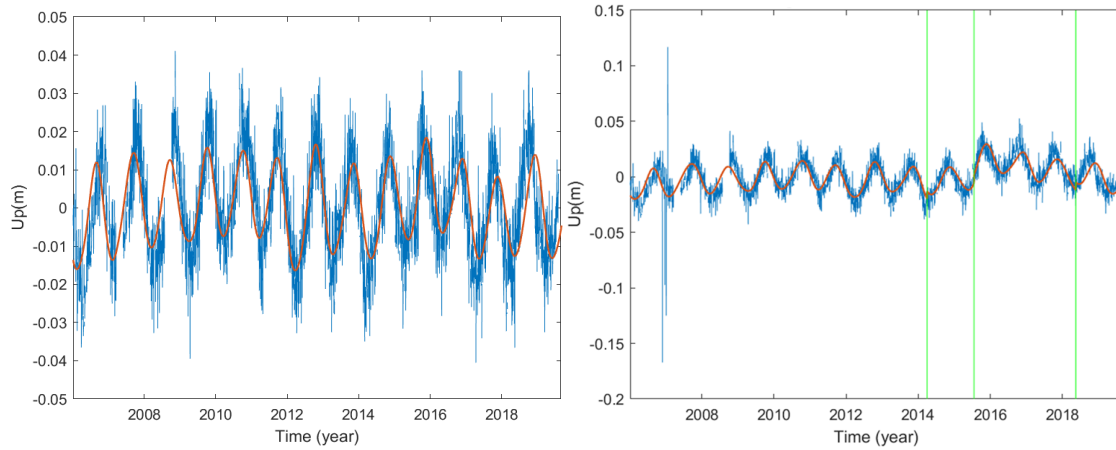
Figura 37 – Modelo estocástico adotado nas séries das estações analisadas. Combinação de *white noise* e *flicker noise* representada pelo círculo azul; combinação de *white noise* e *random walk*, em vermelho



Fonte: A autora

Identificado o modelo estocástico que caracteriza os ruídos presentes nas séries de coordenada vertical analisadas, tal modelo, na forma de MVC, passa então a integrar o modelo funcional da série. Os parâmetros do modelo funcional (Eq. 3) são estimados a partir do MMQ, de modo que a matriz peso da estimativa é obtida pela inversa da MVC. A Figura 38 (à esquerda) ilustra o modelo estimado para a série de coordenada vertical da estação POVE. Nessa etapa, os saltos podem ainda ser incluídos no modelo (Eq. 5) pela implementação da função de *heaviside* (Eq. 6) de modo que as magnitudes dos saltos também sejam estimadas. Observa-se, à direita da Figura 38, que o modelo estimado se adapta à variabilidade da série e na ocorrência de salto o modelo se ajusta ao salto dado pela série.

Figura 38 – Modelo estimado para a série de coordenada vertical da estação POVE com (à esquerda) e sem correção dos saltos (à direita). Série de coordenada vertical da estação POVE (azul), modelo estimado sobreposto à série (vermelho) e identificação dos saltos (linha vertical verde)



Fonte: A autora

Devido ao grande número de parâmetros estimados (cerca de 42 para cada série) e o grande número de séries modeladas (séries de 65 estações GNSS), seria inviável apresentar os resultados das estimativas e respectivas precisões para cada uma das séries. Por isso, analisaremos apenas a acurácia do modelo estimado para cada uma das séries de coordenada vertical. As medidas de acurácia utilizadas para avaliar a qualidade do modelo estimado foram o *Mean Absolute Error* (MAE) e o *Root Mean Square Error* (RMSE).

O erro médio absoluto (MAE) representa o desvio médio entre os valores observados y_i e preditos $\hat{y}_i$, sendo calculado por

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|, \quad (57)$$

em que n é o número de observações. Já a raiz do erro médio quadrático (RMSE), é calculada pela seguinte fórmula:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}. \quad (58)$$

Ambas as medidas são escala-dependente, isto é, o valor da estatística do MAE e do RMSE são dados na mesma unidade de medida (metro, no caso das séries de coordenadas verticais) que os valores observados e preditos. Comparando-se o RMSE e o MAE, o primeiro

dá um peso maior para desvios grandes, já que são elevados ao quadrado, enquanto o MAE dá um peso igual a todos os desvios.

As duas medidas de acurácia apresentadas acima foram calculadas para cada uma das séries modeladas com o objetivo de avaliar a qualidade do modelo ajustado. A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos. A média e desvio-padrão dos MAE's calculados foram 0,0054 m e 0,0013 m, respectivamente, indicando que os modelos ajustados, em geral, apresentam erro dentro do intervalo 4,1 mm e 6,5 mm. Já os RMSE's calculados apresentaram valor médio de $0,0069 \pm 0,0015$ m. A diferença das métricas MAE e RMSE pode auxiliar no diagnóstico das previsões e de *outliers* nas séries. Os valores de RMSE obtidos na Tabela 5 foram, em média, 29,6% maiores que os do MAE. Como no cálculo do RMSE os desvios são elevados ao quadrado (Eq. 58) é esperado que o valor do RMSE seja maior que o do MAE. Obtém-se $RMSE \leq MAE$ somente quando os desvios estão entre 0 e 1 (mm, nesse caso), sendo este um indicativo da alta acurácia do modelo estimado. A distribuição dos erros e suas variâncias também podem interferir na discrepância entre os resultados dessas métricas, fazendo com que a presença de *outliers* nas séries modeladas acarrete num RMSE duas vezes maior que o MAE. Esse não é o caso de nenhum dos modelos analisados.

Tabela 5 – Análise da acurácia do modelo estimado para cada série de coordenada vertical analisada

Estação	MAE (m)	RMSE (m)
ALAR	0,0039	0,0052
BABR	0,0044	0,0058
BAIR	0,0035	0,0045
BATF	0,0074	0,0091
BAVC	0,0044	0,0058
BELE	0,0061	0,0078
BOAV	0,0063	0,0080
BOMJ	0,0050	0,0066
BRAZ	0,0072	0,0093
BRFT	0,0033	0,0045
CEEU	0,0036	0,0049
CEFE	0,0045	0,0060
CEFT	0,0036	0,0048
CHPI	0,0058	0,0076
CUIB	0,0060	0,0077
GOJA	0,0052	0,0068
ILHA	0,0063	0,0082
IMBT	0,0042	0,0055

IMPZ	0,0064	0,0079
MABA	0,0061	0,0077
MAPA	0,0052	0,0070
MGBH	0,0060	0,0076
MGIN	0,0057	0,0075
MGMC	0,0056	0,0071
MGRP	0,0045	0,0059
MGUB	0,0058	0,0076
MGV1	0,0053	0,0069
MSCG	0,0058	0,0076
MTCO	0,0055	0,0070
MTSF	0,0053	0,0068
NAUS	0,0102	0,0125
NEIA	0,0051	0,0069
ONRJ	0,0073	0,0094
OURI	0,0042	0,0056
PAIT	0,0082	0,0104
PBCG	0,0044	0,0057
PEPE	0,0040	0,0052
PISR	0,0061	0,0074
POAL	0,0047	0,0061
POLI	0,0061	0,0077
POVE	0,0069	0,0088
PPTE	0,0050	0,0065
PRGU	0,0048	0,0062
RIOB	0,0055	0,0071
RIOD	0,0062	0,0082
RJCG	0,0044	0,0057
RNMO	0,0045	0,0057
ROGM	0,0060	0,0077
ROJI	0,0055	0,0070
ROSA	0,0042	0,0056
SAGA	0,0061	0,0079
SALU	0,0051	0,0068
SAVO	0,0042	0,0056
SCCH	0,0039	0,0052
SCLA	0,0037	0,0049
SJRP	0,0050	0,0065
SMAR	0,0049	0,0064
SPAR	0,0048	0,0062
SSA1	0,0046	0,0063
TOGU	0,0055	0,0070
TOPL	0,0078	0,0100
UBA1	0,0046	0,0063
UBE1	0,0060	0,0078

UFPR	0,0043	0,0056
VICO	0,0056	0,0072

Fonte: A autora

Outra forma de avaliar a qualidade do modelo estimado para cada série de coordenada vertical é pela análise do resíduo resultante entre a série e o modelo ajustado. Nesse sentido, foram verificadas a normalidade e autocorrelação dos resíduos das séries por meio dos testes *Jarque-Bera* e *Durbin-Watson*, respectivamente. A estatística de *Jarque-Bera* testa a hipótese de normalidade dos dados (H_0) contra a hipótese alternativa (H_1) de que as observações não possuem distribuição normal, a um nível de significância α . A estatística do teste é avaliada por meio da comparação entre o p -valor e o nível de significância adotado. Se $p\text{-valor} < \alpha$, rejeita-se a hipótese de normalidade. Já o teste *Durbin-Watson* pressupõe a hipótese de que os dados são distribuídos de forma independente (H_0). Negar a hipótese nula a um nível de significância α ($p\text{-valor} < \alpha$) significa assumir que os dados são autocorrelacionados. A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos de ambos os testes para os resíduos das 65 séries modeladas. Os resíduos das séries de apenas quatro estações passaram no teste de normalidade (estações POVE, RNMO, SPAR e TOPL). Já em relação ao teste de independência das observações, observa-se que os resíduos de todos os modelos apresentaram $p\text{-valor} < 0,05$, ou seja, a hipótese nula é rejeitada em todos os casos indicando que os resíduos são autocorrelacionados. Os resultados obtidos no teste de *Durbin-Watson* indicam que, apesar do bom ajuste dos modelos às séries, os resíduos ainda possuem algum efeito cíclico remanescente. Pela análise dos resíduos é possível verificar que esses efeitos cíclicos, apesar de mesmo período, possuem fase distinta dos efeitos já identificados na análise *wavelet* das séries. Portanto, para que todos os efeitos cíclicos presentes nas séries da componente altimétrica sejam estimados efetivamente será necessário considerar abordagens da análise *wavelet* que possibilite caracterizar o comportamento oscilatório das séries em amplitude e fase. Isso será realizado em trabalhos futuros.

Tabela 6 – Análise do resíduo resultante entre a série e o modelo ajustado. Estatística e p-valor para os testes *Jarque-Bera* e *Durbin-Watson*

Estação	Teste <i>Jarque-Bera</i> ($\alpha = 0,05$)		Teste <i>Durbin-Watson</i> ($\alpha = 0,05$)	
	Estatística	p-valor	Estatística	p-valor
ALAR	94,7069	< 0,001	1,5929	< 0,001
BABR	126,6610	< 0,001	1,4830	< 0,001
BAIR	41,2289	< 0,001	1,5648	< 0,001
BATF	37,7191	< 0,001	1,7099	< 0,001
BAVC	54,2562	< 0,001	1,3894	< 0,001
BELE	19,6936	< 0,001	1,2359	< 0,001
BOAV	39,0907	< 0,001	1,2610	< 0,001
BOMJ	114,3777	< 0,001	1,2225	< 0,001
BRAZ	41,3731	< 0,001	0,6727	< 0,001
BRFT	275,0587	< 0,001	1,6989	< 0,001
CEEU	71,8838	< 0,001	1,7049	< 0,001
CEFE	41,5107	< 0,001	1,4947	< 0,001
CEFT	67,5540	< 0,001	1,6944	< 0,001
CHPI	105,1056	< 0,001	0,8751	< 0,001
CUIB	48,8616	< 0,001	1,0314	< 0,001
GOJA	90,1179	< 0,001	1,5054	< 0,001
ILHA	30,1203	< 0,001	1,1092	< 0,001
IMBT	44,1763	< 0,001	1,5993	< 0,001
IMPZ	18,7342	< 0,001	0,9091	< 0,001
MABA	21,8154	< 0,001	1,2164	< 0,001
MAPA	1025,4505	< 0,001	1,6890	< 0,001
MGBH	39,8806	< 0,001	1,2845	< 0,001
MGIN	15,4215	< 0,001	1,2045	< 0,001
MGMC	7,7078	0,02198	1,4382	< 0,001
MGRP	39,1956	< 0,001	1,3134	< 0,001
MGUB	46,3253	< 0,001	1,2091	< 0,001
MGV1	39,6427	< 0,001	1,0027	< 0,001
MSCG	58,3971	< 0,001	1,4414	< 0,001
MTCO	39,2513	< 0,001	1,2739	< 0,001
MTSF	56,7532	< 0,001	1,3074	< 0,001
NAUS	13,5443	0,002	0,5515	< 0,001
NEIA	695,6118	< 0,001	1,4797	< 0,001
ONRJ	28,5741	< 0,001	1,1119	< 0,001
OURI	42,7932	< 0,001	1,5897	< 0,001
PAIT	7,2262	0,027723	1,0204	< 0,001
PBCG	11,8038	0,003711	1,5892	< 0,001
PEPE	9,0430	0,011939	1,5165	< 0,001
PISR	18,5740	< 0,001	1,7739	< 0,001
POAL	40,0665	< 0,001	1,2710	< 0,001
POLI	82,8460	< 0,001	1,3444	< 0,001
POVE	4,0773	0,12803	0,8873	< 0,001

PPTE	47,9197	< 0,001	1,2006	< 0,001
PRGU	12,9015	0,002484	1,4604	< 0,001
RIOB	54,5693	< 0,001	1,1988	< 0,001
RIOD	153,6062	< 0,001	1,2672	< 0,001
RJCG	42,8583	< 0,001	1,4692	< 0,001
RNMO	2,7871	0,24368	1,6936	< 0,001
ROGM	41,4432	< 0,001	1,2544	< 0,001
ROJI	25,5624	< 0,001	1,2760	< 0,001
ROSA	49,4531	< 0,001	1,3886	< 0,001
SAGA	30,3341	< 0,001	1,5540	< 0,001
SALU	133,1163	< 0,001	1,4473	< 0,001
SAVO	74,5277	< 0,001	1,6314	< 0,001
SCCH	31,9874	< 0,001	1,5866	< 0,001
SCLA	45,2940	< 0,001	1,5180	< 0,001
SJRP	22,2022	< 0,001	1,1933	< 0,001
SMAR	47,9991	< 0,001	1,2679	< 0,001
SPAR	3,8632	0,14163	1,3326	< 0,001
SSA1	120,4245	< 0,001	1,6481	< 0,001
TOGU	27,9966	< 0,001	1,3352	< 0,001
TOPL	2,5546	0,27666	1,0450	< 0,001
UBA1	109,7336	< 0,001	1,7524	< 0,001
UBE1	78,0659	< 0,001	1,1721	< 0,001
UFPR	46,1823	< 0,001	1,3966	< 0,001
VICO	54,5138	< 0,001	1,1283	< 0,001

Fonte: A autora

6.2 Modelo de variação vertical

Para a validação do modelo proposto, consideremos cinco pontos distribuídos em diferentes regiões do Brasil, cujas coordenadas geodésicas resultaram do processamento dos arquivos RINEX de observação obtidos no banco de dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) <<https://www.ibge.gov.br/geociencias/downloads-geociencias.html>>, por meio do serviço de PPP on-line do IBGE. A Tabela 7 apresenta as coordenadas resultantes do processamento, que estão em SIRGAS2000, época 2020,1752 (referente à data 05/03/2020 do levantamento). O objetivo desse experimento é a atualização dessas coordenadas para a época 2000,4 (época de referência 25/05/2000). Para a atualização das coordenadas esféricas foi utilizado o modelo VEMOS2017 (DREWES et al., 2020; SÁNCHEZ et al., 2020). A atualização da coordenada altimétrica, por sua vez, será realizada por meio do modelo de variação vertical estimado para cada ponto, conforme descrito na Seção 5.2. Para posterior comparação dos resultados obtidos, os pontos escolhidos são estações GNSS permanentes da

rede RBMC e processados pelo NGL, cujas séries temporais de coordenada vertical não foram analisadas neste trabalho devido ao pouco tempo de observação (menos de 10 anos de dados). Deste modo, além da comparação das coordenadas atualizadas com as coordenadas oficiais da estação, é possível ainda contrapor o modelo de variação vertical obtido para cada um dos pontos com suas respectivas séries de coordenadas processadas pelo NGL.

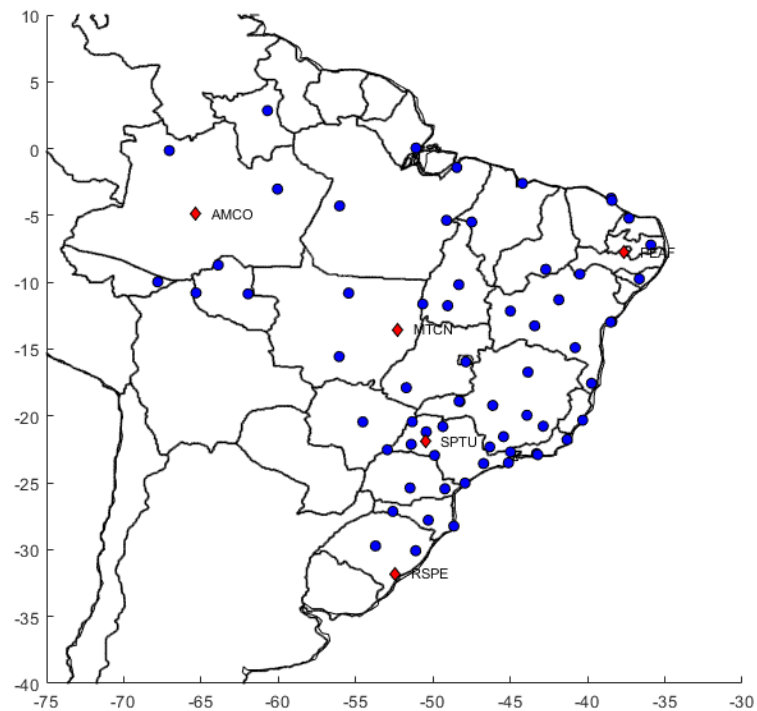
Tabela 7 – Coordenadas e respectivas precisões obtidas pelo serviço de PPP-IBGE em SIRGAS2000, época 2020,1752

Estação	Lat (gms)	σ Lat (m)	Lon (gms)	σ Lon (m)	Alt (m)	σ Alt (m)
AMCO	-4° 52' 19,1537	0,001	-65° 20' 02,3260	0,002	75,89	0,004
PEAF	-7° 45' 50,7949	0,001	-37° 37' 55,0408	0,002	533,03	0,003
MTCN	-13° 33' 20,9682	0,001	-52° 16' 16,8866	0,002	423,23	0,004
SPTU	-21° 55' 44,8158	0,001	-50° 29' 32,5331	0,002	508,78	0,003
RSPE	-31° 48' 08,8104	0,001	-52° 25' 03,4649	0,001	37,11	0,003

Fonte: A autora

O modelo de variação vertical para a posição de cada ponto foi estimado a partir dos resultados da modelagem das séries de coordenada vertical das 65 estações GNSS selecionando as estações mais próximas de cada ponto, distribuídas homogeneamente pela área ao redor dele. A Figura 39 ilustra a distribuição dos pontos escolhidos para esse experimento junto das estações GNSS modeladas na primeira etapa dessa pesquisa (Seção 6.1). Já a Tabela 8 mostra a distância e azimute das 65 estações com relação à posição dos cinco pontos a serem modelados.

Figura 39 – Pontos escolhidos para atualização das coordenadas (losango vermelho) e as 65 estações GNSS modeladas (círculo azul)



Fonte: A autora

Tabela 8 – Distância (d) e azimute (az) das 65 estações GNSS analisadas com relação a posição dos pontos modelados

Estações	Pontos modelados									
	AMCO		PEAF		MTCN		SPTU		RSPE	
	d (Km)	az (graus)	d (Km)	az (graus)	d (Km)	az (graus)	d (km)	az (graus)	d (km)	az (graus)
ALAR	3177,3	101,4	244,5	154,1	1748,3	77,7	1992,7	49,6	2907,8	3177,3
BABR	2364,2	111,2	940,9	238,2	804,5	79,6	1228,1	29,1	2292,9	2364,2
BAIR	2662,2	106,9	607,0	229,3	1157,6	78,7	1489,3	39,2	2499,4	2662,2
BATF	3089,5	118,9	1105,8	191,7	1411,5	109,9	1224,0	68,5	2021,5	3089,5
BAVC	2880,8	114,3	860,1	203,3	1244,5	98,2	1283,8	54,2	2203,3	2880,8
BELE	1906,6	78,9	1389,0	300,0	1404,6	17,6	2268,6	5,8	3349,6	1906,6
BOAV	995,8	31,0	2795,0	293,9	2030,1	332,4	2930,7	336,8	3870,7	995,8
BOMJ	2561,3	112,7	877,0	225,5	958,1	89,0	1216,2	39,0	2238,6	2561,3
BRAZ	2255,6	124,2	1433,6	229,8	541,9	119,9	716,8	22,9	1809,3	2255,6
BRFT	2961,3	89,0	438,6	348,5	1853,9	56,0	2370,9	34,7	3378,9	2961,3

CEEU	2961,3	89,0	438,6	348,5	1853,9	56,0	2370,9	34,7	3378,9	2961,3
CEFE	3167,7	124,6	1415,2	191,4	1472,2	122,2	1070,5	82,2	1748,6	3167,7
CEFT	2957,3	88,6	457,7	348,3	1860,4	55,4	2383,5	34,3	3393,1	2957,3
CHPI	2919,8	134,1	1823,2	204,5	1268,6	143,9	573,4	99,5	1247,0	2919,8
CUIB	1552,9	140,2	2174,9	245,0	465,2	241,0	917,5	319,4	1830,9	1552,9
GOJA	2056,6	135,4	1887,1	232,2	482,3	173,2	466,1	343,8	1539,8	2056,6
ILHA	2280,0	140,1	2027,3	224,9	766,5	172,8	188,3	332,0	1262,7	2280,0
IMBT	3098,5	147,7	2528,3	205,6	1663,2	167,7	722,3	165,6	536,5	3098,5
IMPZ	1970,7	92,8	1118,0	282,5	1033,2	30,7	1840,7	10,4	2930,8	1970,7
MABA	1792,4	92,5	1295,9	281,2	969,0	21,0	1832,6	4,8	2920,7	1792,4
MAPA	1669,0	71,3	1720,8	299,6	1506,4	5,0	2417,2	358,4	3482,5	1669,0
MGBH	2832,9	127,7	1505,3	206,0	1134,5	129,8	717,3	73,2	1560,3	2832,9
MGIN	2790,9	135,3	1854,3	209,0	1154,4	148,0	431,8	96,5	1209,7	2790,9
MGMC	2665,2	121,0	1197,8	213,6	968,5	112,3	904,0	51,4	1874,9	2665,2
MGRP	2600,9	129,1	1560,6	214,9	905,5	134,7	545,1	57,1	1527,0	2600,9
MGUB	2405,5	131,6	1681,3	221,7	732,0	144,8	406,8	35,2	1483,7	2405,5
MGV1	2807,8	132,6	1734,5	207,8	1141,8	141,8	524,8	86,2	1329,2	2807,8
MSCG	2072,1	147,0	2286,4	230,5	798,9	197,2	451,4	290,8	1274,4	2072,1
MTCO	1269,1	121,8	1978,7	258,8	461,2	311,1	1337,7	336,1	2332,8	1269,1
MTSF	1773,6	115,9	1488,6	252,3	276,4	39,2	1139,7	359,1	2230,6	1773,6
NAUS	620,6	70,8	2522,4	280,8	1442,7	323,2	2320,3	332,5	3248,1	620,6
NEIA	2878,7	142,1	2190,1	208,5	1346,0	161,0	431,2	143,2	870,1	2878,7
ONRJ	3072,3	132,3	1772,4	198,9	1404,8	138,7	755,4	99,6	1338,5	3072,3
OURI	2581,4	141,9	2121,9	216,5	1068,4	166,8	128,6	151,7	1011,1	2581,4
PAIT	1032,6	86,8	2064,0	279,7	1104,0	337,8	2032,8	342,3	3039,4	1032,6
PBCG	3231,9	96,1	199,9	72,3	1916,2	70,1	2247,6	45,9	3182,7	3231,9
PEPE	2764,6	101,8	363,6	240,1	1361,2	71,4	1746,0	39,0	2748,4	2764,6
PISR	2525,3	101,7	575,6	255,5	1156,6	65,3	1648,4	31,3	2693,4	2525,3
POAL	3131,6	153,6	2819,5	207,8	1826,7	176,5	903,8	183,8	228,2	3131,6
POLI	2850,0	138,0	1991,4	207,9	1249,5	153,1	426,3	115,8	1070,7	2850,0
POVE	453,1	159,7	2870,5	266,0	1375,3	291,8	2040,6	313,7	2796,1	453,1
PPTE	2413,1	143,3	2158,8	221,3	951,4	174,6	96,9	257,2	1076,3	2413,1
PRGU	2688,6	148,5	2427,9	215,2	1309,8	176,6	395,9	194,6	716,8	2688,6
RIOB	625,5	205,5	3289,1	263,5	1733,0	281,6	2261,8	303,0	2866,9	625,5
RIOD	3060,8	132,2	1767,4	199,3	1392,9	138,7	746,1	99,0	1339,6	3060,8

RJCG	3159,8	128,2	1595,0	193,9	1470,1	129,8	946,7	90,6	1560,4	3159,8
RNMO	3075,3	91,9	285,1	6,8	1875,5	61,9	2318,9	39,2	3300,4	3075,3
ROGM	653,6	180,0	3031,4	261,5	1450,6	280,8	1997,7	305,7	2660,1	653,6
ROJI	759,5	151,1	2673,9	260,8	1094,1	284,8	1725,0	313,4	2501,4	759,5
ROSA	2351,0	147,0	2302,4	223,3	994,2	184,0	262,0	254,9	1028,5	2351,0
SAGA	556,7	339,9	3333,3	283,2	2193,2	311,3	2978,8	321,3	3770,5	556,7
SALU	2346,1	84,6	926,0	307,9	1498,7	36,7	2232,9	18,4	3307,1	2346,1
SAVO	3057,2	108,7	578,9	188,6	1497,8	89,0	1616,4	53,9	2514,8	3057,2
SCCH	2788,0	152,7	2644,2	214,4	1500,7	181,2	614,9	199,8	517,3	2788,0
SCLA	2967,5	149,7	2570,0	209,3	1585,5	173,0	649,6	178,4	489,1	2967,5
SJRP	2451,2	137,1	1908,3	219,8	857,3	159,4	172,7	42,9	1256,0	2451,2
SMAR	2981,6	157,5	2929,0	212,4	1790,0	184,5	920,7	199,7	262,3	2981,6
SPAR	2403,4	139,8	2016,6	221,3	865,8	167,4	82,6	3,8	1191,0	2403,4
SSA1	3049,6	108,8	584,3	189,4	1488,4	89,1	1606,9	53,8	2506,8	3049,6
TOGU	1939,7	114,1	1325,3	249,6	403,2	60,4	1135,8	7,9	2236,0	1939,7
TOPL	1957,5	108,4	1204,4	256,4	569,5	49,1	1319,2	10,3	2417,1	1957,5
UBA1	2965,4	135,7	1909,0	203,7	1331,7	146,8	578,6	108,6	1166,0	2965,4
UBE1	2398,5	131,6	1683,4	221,9	725,6	145,1	405,9	34,2	1485,2	2398,5
UFPR	2829,2	144,8	2299,8	210,7	1352,0	166,9	410,4	162,1	769,6	2829,2
VICO	2970,9	128,1	1541,0	200,7	1276,5	130,0	800,6	82,1	1545,6	2970,9

Fonte: A autora

A partir das informações de distância e azimute (Tabela 8) são selecionadas as estações a serem utilizadas na estimativa do modelo de cada ponto considerado. Os efeitos atmosféricos e fenômenos geofísicos afetam semelhantemente as coordenadas de estações próximas, de modo que os efeitos encontrados nas séries das estações de uma pequena região de estudo podem ser estendidos a um ponto a ser modelado dentro dessa região. Para isso, deve-se selecionar preferencialmente estações que estejam até 50 km distantes do ponto, de modo garantir que ambos possuam a mesma realidade atmosférica e geofísica. No entanto, nem sempre é possível atender esse critério, principalmente em algumas regiões do país onde há uma baixa densidade de estações GNSS disponíveis, como na região Norte (Figura 39). Nesse caso, incrementa-se o raio em 100 km até encontrar a primeira estação mais próxima em cada quadrante ao redor do ponto a ser modelado, considerando o raio máximo de 1000 km (que não é o ideal, mas é o possível nessa situação). A Figura 40 ilustra as estações selecionadas para

Tabela 9 – Períodos de efeitos cíclicos considerados na estimativa do modelo de variação vertical para a posição de cada ponto

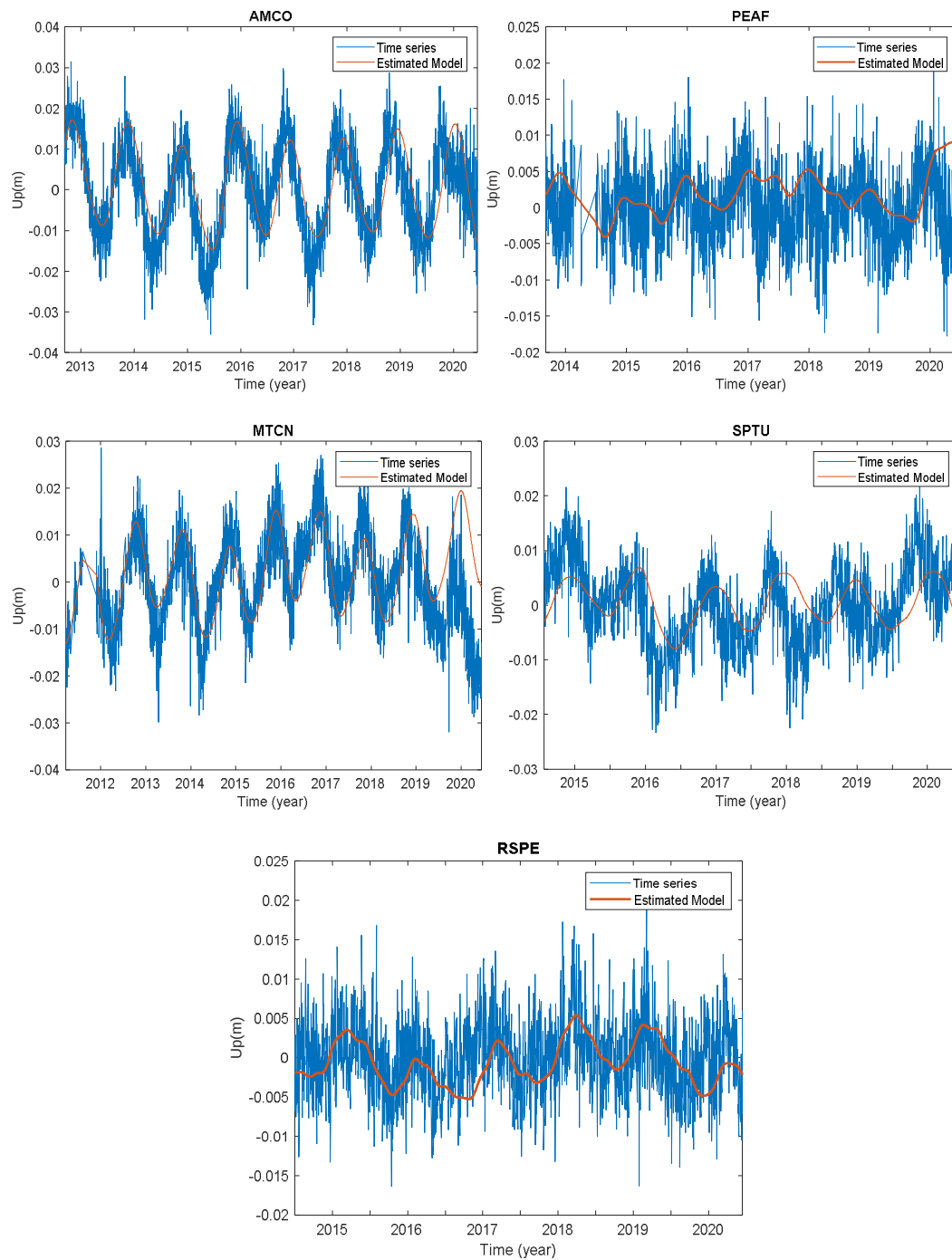
	Pontos modelados				
	AMCO	PEAF	MTCN	SPTU	RSPE
Períodos considerados na modelagem de cada ponto	-	-	-	-	0,1280
	-	-	-	-	0,1522
	-	-	-	-	0,1810
	-	0,2153	-	-	0,2153
	-	0,2560	-	-	0,2560
	-	0,3044	-	0,3044	0,3044
	-	0,3620	-	0,3620	0,3620
	0,4305	0,4305	0,4305	-	0,4305
	0,5120	0,5120	0,5120	0,5120	0,5120
	0,6089	0,6089	0,6089	0,6089	0,6089
	0,7240	0,7240	0,7240	0,7240	0,7240
	0,8610	0,8610	0,8610	0,8610	0,8610
	1,0240	1,0240	1,0240	1,0240	1,0240
	1,2177	1,2177	1,2177	1,2177	1,2177
	1,4481	1,4481	1,4481	1,4481	1,4481
	1,7221	1,7221	1,7221	1,7221	1,7221
	2,0479	-	2,0479	2,0479	2,0479
	2,4354	2,4354	2,4354	2,4354	2,4354
	2,8962	2,8962	2,8962	2,8962	2,8962
	3,4442	3,4442	3,4442	3,4442	3,4442
	4,0958	-	-	-	4,0958
	-	-	-	-	4,8708

Fonte: A autora

Por meio dos períodos identificados nas séries das estações na região de cada ponto e os parâmetros (do modelo estimado para a série de cada estação) a eles associados, estima-se (conforme seção 5.2) o modelo que descreve a variação da componente altimétrica para a posição de cada ponto. A Figura 41 ilustra o modelo estimado para cada uma das cinco estações consideradas nesse experimento (em vermelho) em comparação com a série temporal de

coordenada vertical da estação (em azul). Nota-se que os modelos de variação vertical estimados, em geral, estão em concordância com a série de coordenada vertical de cada estação modelada. Por meio de uma análise visual, tem-se que os modelos estimados para as estações AMCO e MTCN foram os que melhor se ajustaram às séries. Ambas as estações estão localizadas na região Amazônica, onde efeitos periódicos são bem característicos, decorrentes principalmente do efeito de carga hidrológica, e afetam significativamente a variabilidade da componente vertical, até 4 cm para AMCO (Figura 41). As demais regiões de estudo mostraram-se mais difíceis de ser modeladas. O modelo da estação SPTU, por exemplo, apesar de estimado por meio dos parâmetros de estações razoavelmente próximas dessa posição (125 km em média), não se ajusta bem a alguns pontos da série. O modelo da estação RSPE foi estimado a partir dos dados de apenas duas estações pertencentes a essa região de estudo (Figura 40). Nesse caso, um grande número de períodos comuns a essas estações foi identificado e considerado nessa estimativa do modelo para a posição de RSPE. Nem por isso o modelo estimado ajustou-se perfeitamente à série da estação. Por outro lado, a utilização de um maior número de estações na estimativa do modelo também não é garantia de bom ajuste. Como exemplo, tem-se o modelo estimado para a posição PEAFF que, mesmo sendo gerado a partir das informações de 5 estações, foi um dos que mais se afastou dos dados da série. Apesar dessas constatações feitas visualmente, os resultados mostram que a acurácia de todos os modelos estimados foi da ordem de 7 milímetros (na média), como pode ser conferido na Tabela 10. Vale destacar que, como a acurácia (RMSE) do modelo é calculada com base na diferença entre o valor predito e o observado (dado da série), essa medida é afetada pelos saltos presentes na série da componente vertical. Portanto, foi necessário corrigir as séries afetadas pelos *saltos* para comparação com o modelo estimado.

Figura 41 – Modelo de variação vertical estimado e série temporal de coordenada vertical para cada estação (com correção dos saltos)



Fonte: A autora

Tabela 10 – Análise da qualidade dos modelos estimados

Estação	Média das discrepâncias (m)	Desvio-padrão das discrepâncias (m)	RMSE (m)
AMCO	-0,0012	0,0080	0,0080
PEAF	-0,0020	0,0057	0,0060
MTCN	-0,0018	0,0085	0,0087
SPTU	-0,0005	0,0068	0,0068
RSPE	0,0007	0,0049	0,0049

Fonte: A autora

Por meio do modelo estimado é possível se obter a variação vertical da coordenada em qualquer época desejada, permitindo fazer previsões futuras ou até mesmo obter a coordenada em uma época passada. A compatibilização da coordenada altimétrica entre épocas distintas foi realizada utilizando a Equação (56). Já as coordenadas esféricas foram compatibilizadas utilizando-se o VEMOS2017. Deste modo, atualizou-se as coordenadas dos pontos modelados da época 2020,1752 (Tabela 7) para a época 2000,4. A Tabela 11 mostra as coordenadas oficiais das estações GNSS em SIRGAS2000, época 2000,4. Já a Tabela 12 apresenta as coordenadas atualizadas das estações (de 2020,1752 para 2000,4) e suas respectivas discrepâncias (em metro, no SGL) com relação à posição de referência das estações (Tabela 11). As coordenadas esféricas atualizadas apresentaram discrepância milimétrica (1 a 2 mm) com relação às coordenadas oficiais. Já a coordenada altimétrica apresentou uma maior discrepância. A acurácia da coordenada estimada depende da qualidade do modelo interpolado para a posição do usuário na época de interesse (2000,4 nesse caso). O modelo estimado para a posição da estação PEAF, de modo geral, não se ajustou tão bem à série de coordenada vertical dessa estação (Figura 41). No entanto, para a época 2000,4 a estimativa obtida foi bem acurada, já que a coordenada atualizada dessa estação apresentou discrepância menor que 1 milímetro (-0,0001m) com relação à coordenada oficial. Por outro lado, a coordenada estimada pelo modelo vertical da estação AMCO, que apresentou melhor ajuste à série do que o da estação PEAF (Figura 41), por exemplo, resultou em uma discrepância de 1 cm com relação à coordenada verdadeira. A pior discrepância foi a obtida entre a coordenadas atualizada e oficial da estação RSPE, cerca de -2,5 cm.

Tabela 11– Coordenadas oficiais em SIRGAS2000, época 2000,4, e suas respectivas precisões

Estação	Latitude (gms)	σ_{lat} (m)	Longitude (gms)	σ_{lon} (m)	Altitude (m)	σ_{alt} (m)
AMCO	-4° 52' 19,16155"	0,001	-65° 20' 2,32413"	0,001	75,875	0,005
PEAF	7° 45' 50,80349"	0,003	- 37° 37' 55,03882"	0,004	533,016	0,0018
MTCN	- 13° 33' 20,97718"	0,002	- 52° 16' 16,88443"	0,002	423,210	0,0011
SPTU	- 21° 55' 44,82410"	0,001	-50° 29' 32,53061"	0,001	508,783	0,007
RSPE	- 31° 48' 8,81800"	0,002	- 52° 25' 3,46276"	0,001	37,130	0,008

Fonte: A autora

Tabela 12 – Coordenadas atualizadas de SIRGAS2000, época 2020,1752 para a época 2000,4 e discrepância (no SGL) em relação às coordenadas de referência

Estação	Latitude (gms)	Δlat (m)	Longitude (gms)	Δlon (m)	Altitude (m)	Δalt (m)
AMCO	-4° 52' 19,16148"	-0,001	-65° 20' 2,32416"	0,002	75,887	0,0118
PEAF	-7° 45' 50,80344"	-0,001	-37° 37' 55,03902"	0,001	533,016	-0,0001
MTCN	-13° 33' 20, 97709"	0,001	-52° 16' 16,88448	0,001	423,215	0,0058
SPTU	-21° 55' 44,82406"	-0,001	-50° 29' 32, 53074	-0,002	508,775	-0,0076
RSPE	-31° 48' 8, 81790"	-0,001	-52° 25' 3,46289	-0,001	37,104	-0,0258

Fonte: A autora

Algo que deve ser chamado a atenção é o fato de que as análises foram realizadas apenas comparando os valores estimados com os de referências, que em termos de acurácia representa o efeito sistemático (*bias*). Isso não será viável em aplicações práticas, em que a posição a ser atualizada não possui valor de referência. Para superar esse problema, todo o processo deverá ser acompanhado de propagação de MVC, algo que não foi tratado neste trabalho, mas será priorizado em investigações futuras.

7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1 Conclusões

Nesta pesquisa foi proposta uma nova metodologia para a atualização da componente altimétrica no Brasil baseada na análise de séries temporais de coordenadas GNSS vertical e na estimativa do modelo de variação vertical para a posição de um usuário GNSS no território brasileiro.

A revisão bibliográfica apresenta o estado da arte em análise de séries de coordenadas GNSS mostrando quais fenômenos geofísicos e efeitos sistemáticos afetam as coordenadas de estações GNSS, os ruídos presentes nas séries de coordenadas e as etapas envolvidas na construção de um modelo (funcional e estocástico) adequado para a série. Adicionalmente, também foram apresentados os conceitos básicos da análise *wavelet*, indispensáveis para o entendimento da aplicação dessa teoria na análise de séries temporais de coordenadas GNSS.

A metodologia proposta, por sua vez, tem por objetivo propiciar a construção de um modelo que descreva a variação da componente altimétrica de um ponto dentro do território brasileiro, ao longo do tempo, e viabilize a atualização da componente vertical entre épocas distintas. Para tanto, foram analisadas as séries temporais de coordenada vertical de 65 estações GNSS distribuídas pelo Brasil, com o intuito de identificar os efeitos sistemáticos e fenômenos geofísicos (de natureza periódica) que afetam a componente altimétrica das estações. Essa análise foi realizada no domínio tempo-frequência pela TWC com relação à *wavelet* de *Morlet* que, por proporcionar redundância de informações e fácil identificação dos efeitos periódicos nas séries, mostrou-se mais adequada para a análise das séries de coordenada vertical. A análise de ruídos das séries, cujo objetivo é estimar as componentes de variância dos ruídos que compõem as séries, foi realizada por meio do NNLSE-VCE. Desta forma, o modelo estocástico da série pôde ser estimado e empregado na estimativa do modelo funcional, obtendo assim, um modelo que descrevesse a variação temporal da coordenada altimétrica para cada uma das estações analisadas. A partir dos efeitos identificados (que geralmente afetam semelhantemente a coordenada altimétrica de pontos próximos uns dos outros, caracterizando uma dada região de estudo) e dos parâmetros associados a cada um deles (que compõem o modelo estimado para cada estação analisada nessa região) foi possível construir um modelo de deformação vertical para a posição interpolada, viabilizando a compatibilização da componente de coordenada altimétrica entre épocas distintas.

Pela análise *wavelet* das séries mostrou-se que alguns efeitos cíclicos afetam as coordenadas de todas as estações GNSS, já que os períodos associados a esses efeitos (de 0,5; 0,61; 0,72; 0,86; 1,02 e 1,22 ano) foram identificados nas séries das 65 estações analisadas. Alguns desses períodos já são conhecidos e podem estar relacionados aos efeitos de maré terrestre (0,5 ano), movimento do polo (1,22 ano $\approx$ 433 dias), efeito draconiano (0,86 $\approx$ 351,6 dias) e carga hidrológica (0,5 e 1,02 ano). Outros períodos identificados variam de acordo a localização geográfica da estação. Alguns deles, como por exemplo os períodos de 0,3044; 0,2560 e 0,2153 ano, foram identificados em estações localizadas mais à costa do continente, estando ausentes nas séries de estações pertencentes à região amazônica.

A análise de ruídos, por sua vez, avalia o nível de ruído presente nas séries de coordenada vertical (considerando as componentes *white noise*, *flicker noise* e *random walk*) de acordo à localização espacial das estações. Os resultados mostram que o nível de *white noise* nas séries, por estar relacionado a erros de *hardware*, independem da localização espacial da estação. Já em relação ao *flicker noise* e *random walk* verifica-se um certo padrão de agrupamento entre as estações cujas séries possuem maior amplitude desses ruídos. As séries de estações localizadas na região norte e centro-oeste do Brasil são as que possuem maior amplitude de *flicker noise*. A maior amplitude de *random walk*, por sua vez, é identificado nas séries de estações localizadas nas regiões nordeste, sudeste e sul do Brasil. Ainda em relação aos ruídos presentes nas séries, conclui-se que o modelo estocástico composto pela combinação de *white noise* e *flicker noise*, é o que melhor descreve o conteúdo de ruído das séries de coordenada vertical, sendo adotado na modelagem de 95,4% das séries de estações analisadas.

Após a análise das séries, foi realizada a estimativa do modelo (composto pela parte funcional e estocástica) que descreve a variação da coordenada vertical de cada uma das 65 estações analisadas. A qualidade do modelo estimado foi avaliada por meio das medidas de acurácia MAE e o RMSE e da análise do resíduo resultante entre a série e o modelo ajustado. Os resultados apontaram um MAE e RMSE médio de $0,0054 \pm 0,0013$ m e $0,0069 \pm 0,0015$ m, respectivamente, mostrando que a acurácia dos modelos estimados é de ordem milimétrica. A análise dos resíduos, por sua vez, cujo objetivo foi verificar a normalidade e autocorrelação dos resíduos das séries por meio dos testes *Jarque-Bera* e *Durbin-Watson*, respectivamente, mostrou que apenas 6,2% dos resíduos possui distribuição normal e que nenhum deles é puro *white-noise*. Isso mostra que, apesar de obter um modelo que forneça um bom ajuste das observações, os resíduos ainda possuem efeitos cíclicos remanescentes que não foram

identificados na análise *wavelet*, provavelmente por se tratarem de efeitos cíclicos com fase distinta.

Os modelos construídos para cada uma das 65 estações GNSS analisadas são a base da estimativa do modelo de variação vertical para um usuário GNSS dentro do Brasil, cuja principal aplicação é a compatibilização da coordenada vertical de sua posição entre épocas distintas. Nesse sentido, foi realizado um experimento cujo objetivo era atualizar as coordenadas de cinco pontos distribuídos em diferentes regiões do Brasil, da época de coleta de dados (2020,1752) para época de referência do SIRGAS2000 (2000,4). As coordenadas esféricas foram atualizadas por meio do modelo VEMOS2017 e a altimétrica, pelo modelo de variação vertical interpolado para a posição do ponto. A qualidade das estimativas foi avaliada por meio das discrepâncias das coordenadas atualizadas com relação às coordenadas oficiais dos pontos (estações GNSS permanentes da rede RBMC e NGL) na época de referência, ficando na ordem milimétrica para as coordenadas esféricas e variando de menos de 1 mm até -2,5 cm para a componente altimétrica. A validação dos modelos estimados foi realizada por meio da comparação desses modelos com as séries de coordenada vertical das estações em questão. Os resultados mostraram que os modelos estimados, de modo geral, descrevem bem a variação da componente vertical da estação, sendo a acurácia obtida para os modelos em torno de 7 mm, na média.

Diante das análises apresentadas, conclui-se que a metodologia proposta para a atualização da componente de coordenada vertical é promissora. No entanto, algumas investigações ainda devem ser realizadas. Como a acurácia da componente altimétrica predita está diretamente relacionada à qualidade do modelo de variação vertical estimado para a posição do usuário, e esta, por sua vez, depende da correta modelagem das séries das estações no entorno dessa posição, investir em melhorias na modelagem das séries de coordenada vertical dessas 65 estações utilizadas como base da estimativa é o ponto chave para se alcançar resultados mais satisfatórios.

7.2 Recomendações

Na busca por aprimorar os resultados alcançados nessa pesquisa, as recomendações para trabalhos futuros são:

- Considerar a aplicação da função *gapped wavelet* (*wavelet* de Morlet modificada) na análise das séries de coordenada vertical, visto que essa *wavelet* é ideal para lidar com dados que apresentam *gaps*, não necessitando do preenchimento das lacunas da série através de um método de interpolação;
- Considerar abordagens da análise *wavelet* que possibilite caracterizar o comportamento oscilatório das séries de coordenada vertical em amplitude e fase;
- Realizar a estimativa das componentes de ruído pela análise multivariada das séries, ou seja, estimar as componentes de variância de um grupo de estações simultaneamente, possibilitando obter estimativas mais acuradas e a correlação espacial entre os ruídos das séries do grupo de estações;
- Estender a metodologia proposta de modo a estimar um campo de deformação vertical para o Brasil e disponibilizá-lo à comunidade científica e usuários em geral na forma de *grid* ou aplicação *web* interativa;
- Fornecer a precisão da coordenada altimétrica estimada por meio do *grid*;
- Promover a constante atualização do campo de deformação vertical por meio da inclusão de novas estações (com número considerável de observações) na estimativa dos parâmetros, alcançando resultados cada vez mais acurados inclusive para regiões do Brasil em que hoje há uma baixa densidade de estações GNSS analisadas;

REFERÊNCIAS

- ALTAMIMI, Z.; REBISCHUNG, P.; MÉTIVIER, L.; COLLILIEUX, X. **ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions**. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, v. 121, n. 8, p. 6109-6131, 2016.
- ALVES, D.B.M.; SOUZA, E.M.; MONICO, J.F.G. **Movimento do polo terrestre: aspectos físicos, modelagem matemática e análises**. TEMA-Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, v. 9, n. 1, p. 1-10, 2008.
- AMIRI-SIMKOOEI, A. R. **Least-squares variance component estimation theory and GPS applications**. Ph.D. Thesis, Delft: Netherlands Geodetic Commission, 2007.
- AMIRI-SIMKOOEI, A. R. **Noise in multivariate GPS position time-series**. Journal of Geodesy, v. 83, n. 2, p. 175-187, 2008.
- AMIRI-SIMKOOEI, A. R. **Non-negative least-squares variance component estimation with application to GPS time series**. Journal of Geodesy, v. 90, n. 5, p. 451-466, 2016.
- AMIRI-SIMKOOEI, A. R.; TIBERIUS, C. C. J. M.; TEUNISSEN, P. J. G. **Assessment of noise in GPS coordinate time series: methodology and results**. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, v. 112, n. B7, 2007.
- AMIRI-SIMKOOEI, A. R.; MOHAMMADLOO, T. H.; ARGUS, D. F. **Multivariate analysis of GPS position time series of JPL second reprocessing campaign**. Journal of Geodesy, v. 91, n. 6, p. 685-704, 2017.
- BAKER, T.F. **Ocean tide loading and GPS**. GPS world, 1995.
- BERTIGER, W.; BAR-SEVER, Y.E.; DORSEY, A.; HAINES, B.; HARVEY, N.; HEMBERGER, D.; HEFLIN, M.; LU, W.; MILLER, M.; MOORE, A.W.; MURPHY, D.; RIES, P.; ROMANS, L.; SIBOIS, A.; SIBTHORPE, A.; SZILAGYI, B.; VALLISNERI, M.; WILLIS, P. **GipsyX/RTGx, a new tool set for space geodetic operations and research**, Advances in Space Research, in press. [doi:10.1016/j.asr.2020.04.015](https://doi.org/10.1016/j.asr.2020.04.015), 2020.
- BEVIS, M.; ALSDORF, D.; KENDRICK, E.; FORTES, L.P.; FORSBERG, B.; SMALLEY, R.; BECKER, J. **Seasonal fluctuations in the mass of the Amazon River system and Earth's elastic response**. Geophysical Research Letters, v.32, n.16, 2005.
- BLEWITT, G.; HAMMOND, W. C.; KREEMER, C. **Harnessing the GPS data explosion for interdisciplinary science**. Eos, v. 99, p.1-2, 2018.
- BOGUSZ, J.; KLOS, A. **On the significance of periodic signals in noise analysis of GPS station coordinates time series**. GPS Solutions, p.1-10, 2015.
- COSTA, S. M. A.; SILVA, A. L. D.; LIMA, M. A. D. A.; JÚNIOR, M.; DE, N. J. **Centro de análise SIRGAS-IBGE: novas estratégias de processamento e combinação, e a influência da mudança do referencial global nos resultados**. Boletim de Ciências Geodésicas, v. 18, n. 1, p. 63-85, 2012.

COSTA, S.M.A.; MATOS, A.C.O.C.; BLITZKOW, D. **Validation of the land water storage from gravity recovery and climate experiment (GRACE) with gauge data in the amazon basin.** Boletim de Ciências Geodésicas, v.18, n. 2, p. 262-281, 2012.

DAUBECHIES, I. **Orthonormal bases of compactly supported wavelets.** Communications on pure and applied mathematics, v. 41, n. 7, p. 909-996, 1988.

DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets.** SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

DILL, R.; DOBSLAW, H. **Numerical simulations of global-scale high-resolution hydrological crustal deformations.** Journal of Geophysical Research: Solid Earth, v. 118, n. 9, p. 5008-5017, 2013.

DMITRIEVA, K.; SEGALL, P; DEMETS, C. **Network-based estimation of time-dependent noise in GPS position time series.** Journal of Geodesy, v. 89, n. 6, p. 591-606, 2015.

DOMINGUES, M. O.; MENDES, O.; KAIBARA, M. K.; MENCONI, V. E.; BERNARDES, E. **Explorando a transformada wavelet contínua.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 38, n. 3, 2016.

DOMINGUES, M. O.; MENDES JR, O.; DA COSTA, A. M. **On wavelet techniques in atmospheric sciences.** Advances in Space Research, v. 35, n. 5, p. 831-842, 2005.

DREWES, H.; SÁNCHEZ, L. **Velocity model for SIRGAS 2017: VEMOS2017,** doi: [10.1594/PANGAEA.912350](https://doi.org/10.1594/PANGAEA.912350), Technische Universitaet Muenchen, Deutsches Geodaetisches Forschungsinstitut (DGFI-TUM), IGS RNAAC SIRGAS, 2020.

FRANC, V.; HLAVÁČ, V.; NAVARA, M. **Sequential coordinate-wise algorithm for the non-negative least squares problem.** International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.

FREITAS, S. R. C. **Marés gravimétricas: implicações para a placa sul-americana.** Tese de (Doutorado em Geofísica) – Instituto Astronômico e Geofísico, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.

GAZEAUX, J.; WILLIAMS, S.; KING, M.; BOS, M.; DACH, R.; DEO, M.; TEFERLE, F. N. **Detecting offsets in GPS time series: First results from the detection of offsets in GPS experiment.** Journal of Geophysical Research: Solid Earth, v. 118, n. 5, p. 2397-2407, 2013.

GEMAEL, C. **Marés Terrestres: Aplicações Geodésicas.** Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPR, Curitiba, 1986,

GLOOR, M. R. J. W.; BRIENEN, R. J.; GALBRAITH, D.; FELDPAUSCH, T. R.; SCHÖNGART, J.; GUYOT, J. L.; PHILLIPS, O. L. **Intensification of the Amazon hydrological cycle over the last two decades.** Geophysical Research Letters, v. 40, n. 9, p. 1729-1733, 2013.

GRIFFITHS, J.; RAY, J. R. **Sub-daily alias and draconitic errors in the IGS orbits**. GPS solutions, v. 17, n. 3, p. 413-422, 2013.

GRODECKI, J. **Estimation of variance-covariance components for geodetic observations and implications on deformation trend analysis**. Ph.D. Thesis. University of New Brunswick, 1997.

ITRF. **Transformation Parameters**. Disponível em: <http://itrf.ensg.ign.fr/trans_para.php>. Acesso em: jan. 2020.

JEKELI, C. **Geometric reference systems in geodesy (2012 edition)**. Division of Geodetic Science, School of Earth Sciences, Ohio State University, 2012.

JOHNSON, H. O.; AGNEW, D. C. **Monument motion and measurements of crustal velocities**. Geophysical Research Letters, v. 22, n. 21, p. 2905-2908, 1995.

JPL. **GPS Time Series**. Disponível em: <ftp://sideshow.jpl.nasa.gov/pub/JPL_GPS_Timeseries/repro2011b/>. Acesso em: jan. 2020.

MALLAT, S. G. **A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation**. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, v. 11, n. 7, p. 674-693, 1989.

MAO, A.; HARRISON, C.G.A; DIXON, T.H. **Noise in GPS coordinate time series**. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, v. 104, n. B2, p. 2797-2816, 1999.

MARQUES, H. A. S. **Modelo Estocástico para dados GNSS e séries temporais de coordenadas GNSS**. Tese (Doutorado em Ciências Cartográficas) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2013.

MELCHIOR, P. **The tides of the planet Earth**. Organic Photonics and Photovoltaics, v. 1, 1983.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: Fundamentos, Definição e Aplicação**. 2 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2008, 476p.

MONTILLET, J.P.; WILLIAMS, S. D. P.; KOULALI, A.; McCLUSKY, S. C. **Estimation of offsets in GPS time-series and application to the detection of earthquake deformation in the far-field**. Geophysical Journal International, v. 200, n. 2, p. 1207-1221, 2015.

MOREIRA, D. M.; CALMANT, S.; PEROSANZ, F.; XAVIER, L.; ROTUNNO FILHO, O. C.; SEYLER, F.; MONTEIRO, A. C. **Comparisons of observed and modeled elastic responses to hydrological loading in the Amazon basin**. Geophysical Research Letters, v. 43, n. 18, p. 9604-9610, 2016.

MORETIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais**. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.

MORETTIN, P. A. **Ondas e Ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas**. 2 ed. EDUSP, São Paulo, 2014.

NASON, G.P. **Wavelet methods in statistics with R**. Springer Science & Business Media, 2010.

NASON, G. P.; SILVERMAN, B. W. **The stationary wavelet transform and some statistical applications**. In Wavelets and statistics, n. 103, Springer-Verlag, 1995, 281-299.

NGL. **Nevada Geodetic Laboratory GPS Networks Map**. Disponível em: <http://geodesy.unr.edu/NGLStationPages/gpsnetmap/GPSNetMap_MAG.html>. Acesso em: jan. 2020.

NIKOLAIDIS, R. **Observation of geodetic and seismic deformation with the Global Positioning System**, Ph.D. thesis, Univ. of Calif., San Diego, La Jolla, Calif., 2002.

PAGIATAKIS, S. D. **Ocean tide loading, body tide and polar motion effects on very long baseline interferometry**. Fredericton, NB, Canada: Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, 1982.

PENNA, N. T.; KING, M. A.; STEWART, M. P. **GPS height time series: Short-period origins of spurious long-period signals**. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, v. 112, n. B2, 2007.

PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. T. **Wavelet methods for time series analysis**. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, England, 2000.

PEREZ, J. A. S. **Campo de velocidade para as estações da RBMC e do IGS localizadas na placa Sul-Americana: estimativa a partir do processamento de dados GPS**, Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) – Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual de Paulista, Presidente Prudente – SP, 2002.

RAST, M.; JOHANNESSEN, J.; MAUSER, W. **Review of understanding of earth's hydrological cycle: Observations, theory and modelling**. Surveys in Geophysics, v. 35, n. 3, p. 491-513, 2014.

ROSA, G.P.S.; MONICO, J.F.G; CHAVES, J.C. **Análise de séries temporais de coordenadas estimadas com GPS: uma proposta metodológica para detecção, remoção e recuperação de efeitos sazonais**. Boletim de Ciências Geodésicas, 2009.

SÁNCHEZ L.; DREWES H. **Geodetic monitoring of the variable surface deformation in Latin America**, International Association of Geodesy Symposia Series, v. 152, 2020.

SAPUCCI, L. F.; MONICO, J. F. G. **Transformação de Helmert Generalizada no posicionamento de alta precisão: fundamentação teórica e aplicações**. Revista Brasileira de Geofísica, Rio de Janeiro, v. 18, n. 2, p. 161-172, 2000.

SANTAMARÍA-GÓMEZ, A.; BOUIN, M. N.; COLLILIEUX, X.; WOEPPELMANN, G. **Correlated errors in GPS position time series: Implications for velocity estimates**. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, v. 116, n. B1, 2011.

- SEARLE, S. R. **An Overview of Variance Component Estimation**. *Metrika*, v.42, p. 215-230, 1995.
- SIRGAS-CON. **Posições semanais das estações SIRGAS-CON**. Disponível em: <<ftp://ftp.sirgas.org/pub/gps/SIRGAS/>>. Acesso em: jan 2020.
- SWELDENS, W.; SCHRÖDER, P. **Building your own wavelet at home**. *Wavelets in the Geosciences*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000, p. 72-107.
- TEUNISSEN, P. J. G. **Towards a Least-Squares Framework for Adjusting and Testing of both Functional and Stochastic Models Mathematical Geodesy and Positioning Series**. Delft University of Technology, The Netherlands, 1988.
- TEUNISSEN, P. J. G. **Adjustment theory. An Introduction**. *Series on Mathematical Geodesy and Positioning*, v. 193, 2000.
- TEUNISSEN, P.J.G.; AMIRI-SIMKOOEI, A. R. **Least-squares variance component estimation**. *Journal of Geodesy*, v. 82, n. 2, p. 65-82, 2008.
- TORRENCE, C.; COMPO, G.P. **A Practical Guide to Wavelet Analysis**, *Bulletin of the American Meteorological society*, v. 79, n. 1, p. 61-78, 1998.
- VAN DAM, T. M.; WAHR, J. **Modeling environment loading effects: a review**. *Physics and Chemistry of the Earth*, v. 23, n. 9-10, p. 1077-1087, 1998.
- VAN DAM, T.; WAHR, J.; MILLY, P. C. D.; SHMAKIN, A. B.; BLEWITT, G.; LAVALLEE, D.; LARSON, K. M. **Crustal Displacements due to Continental Water Loading**. *Geophysical Research Letters*, v. 28, n. 4, p. 651-654, 2001.
- VANICEK, P.; KRAKIWSKY, E. **Geodesy: the concepts**. Elsevier, 2015.
- WAHR, J. M. **Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth**. *Geophysical Journal International*, v. 64, n. 3, p. 677-703, 1981.
- WILLIAMS, S. D. P.; BOCK, Y.; FANG, P.; JAMASON, P.; NIKOLAIDIS, R. M.; PRAWIRODIRDJO, L.; MILLER, M.; JOHNSON, D. J. **Error analysis of continuous GPS position time series**. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 109, n. B3, 2004.
- WILLIAMS, S.D.P. **Offsets in global positioning system time series**. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 108, n. B6, 2003.
- ZHANG, J.; BOCK, Y.; JOHNSON, H; FANG, P.; WILLIAMS, S.; GENRICH, J.; WDOWINSKI, S.; BEHR, J. **Southern California permanent GPS geodetic array: error analysis of daily position estimates and sites velocities**. *Journal of Geophysical Research*. v. 102, 1997, n. B8, p. 18035-18055.