

Marcelo Adriano dos Santos Bongarti

**Domínios de Potências Fracionárias de
Operadores Matriciais segundo
Lasiecka-Triggiani**

São José do Rio Preto

2016

Bongarti, Marcelo Adriano dos Santos.

Domínios de potências fracionárias de operadores matriciais
segundo Lasiecka-Triggiani / Marcelo Adriano dos Santos Bongarti. --
São José do Rio Preto, 2016
121 f.

Orientador: German Jesus Lozada Cruz

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Teoria
operacional. 4. Potenciais fracionárias. I. Lozada Cruz, German Jesus.
II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.944

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Marcelo Adriano dos Santos Bongarti

Domínios de Potências Fracionárias de Operadores Matriciais segundo Lasiecka-Triggiani

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz

São José do Rio Preto

2016

Marcelo Adriano dos Santos Bongarti

Domínios de Potências Fracionárias de Operadores Matriciais segundo Lasiecka-Triggiani

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
Professor Adjunto
IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Professor Adjunto
IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto

Profa. Dra. Marcia Cristina Anderson Braz Federson
Professora Titular
ICMC - USP - São Carlos

São José do Rio Preto, 22 de fevereiro de 2016.

Aos meus irmãos,
Antônio e Cássia,
e aos meus pais,
Adão e Divina,
dedico.

Agradecimentos

Muitos são os dilemas vividos por alguém que se submete a fazer um curso de mestrado. Tais dilemas são tão flexíveis que conseguem se fazer presentes em quase todos os setores da vida, em cada metro que caminhamos nessa estrada curvilínea (às vezes circular) rumo a um objetivo nem sempre tão claro. Vencer cada um desses “obstáculos” depende de uma gama de fatores que, no geral, ou se resume a uma pessoa ou envolve fortemente uma delas. Por esse motivo uma página dedicada a agradecer cada uma dessas pessoas faz se necessária, caso contrário este trabalho nunca estaria, de fato, concluído.

Devido ao grande número de pessoas que passaram pela minha vida durante estes anos acadêmicos, eu preciso começar este texto me desculpando com as que eu, por ventura, não me lembrar de citar, pois eu serei eternamente grato a todos que, de alguma forma, mesmo mínima, esteve comigo em algum instante dessa caminhada.

Nada disso seria possível se eu não tivesse vida, portanto eu agradeço primeiramente a Deus, que por Sua imensa bondade e misericórdia me concede todos os dias a benção de estar vivo.

Agradeço aos meus pais, Adão e Divina Bongarti, por terem sido verdadeiros guerreiros na infundável batalha de me educar e de nunca sequer terem pensado em deixar de me apoiar na vida acadêmica, fosse financeiramente, fosse exigindo boas notas, ou simplesmente mantendo intacto o lugar sagrado ao qual eu chamo de “minha casa”, e para onde eu sempre vou querer voltar, independente de onde eu esteja.

Agradeço aos meus irmãos e parceiros, Antônio e Cássia Bongarti, por sempre aplaudirem de pé os meus êxitos e estarem sempre ao meu lado nos fracassos. Vocês constituem parte fundamental desta etapa. Amo vocês.

Agradeço também à cunhada que eu mais amo nesse Mundo, Ana Claudia, por ter sido um anjo na nossa vida e por sempre me apoiar nos meus estudos. Obrigado por sempre confiar na minha capacidade e me encorajar a seguir avançando! Te amo!

O conceito de família é muito subjetivo, então cabe a cada um de nós honrar e valorizar nossa família de sangue e a escolher a dedo aqueles que chamaremos de família, independente de qualquer configuração sanguínea. Por este motivo eu não poderia deixar

de agradecer à minha irmã, Amanda Santos, pelos grandes momentos que passamos juntos, por toda força, confiança, e por fazer parte da minha vida em momentos intensos, seja me aconselhando, me motivando ou simplesmente existindo. Amo você, gata!

E por falar em irmã, eu não poderia deixar de agradecer uma das pessoas mais importantes da minha vida, jóia rara do Nordeste brasileiro, minha irmã e parceira Priscilla Silva, por me segurar todas as vezes que eu fui até ela sem forças para continuar, mergulhado em desânimo, sempre dizendo o que eu precisava ouvir para deixar de ser tonto. Amo você, amor!

Agradeço ao meu grande amigo e parceiro de todas as horas, Guilherme Yabushita, por todo apoio, paciência, e por me lembrar, às vezes, de que embora a Matemática seja parte muito importante da minha vida, nem sempre é interessante pensar matematicamente, pois, entre outros motivos, a vida não tem lógica. Nunca vou esquecer os dias que saíamos de Planalto as 8 da manhã e você me deixava na Unesp exatamente as 9 para o primeiro curso de verão da minha vida. Obrigado por tudo, cara!

Por falar em japoneses, agradeço a minha amiga Luzia Tomiko (adoro esse nome), por me fazer engordar quilos e mais quilos comendo suas pizzas. Pode ter certeza que um dia Deus irá cobrar cada caloria que você me fez ingerir! Muito obrigado pelos bons momentos de descontração e amizade!

Eu não poderia deixar de agradecer à minha amiga Dauana Alves, pela companhia e amizade durante os anos de graduação. Obrigado por todos os momentos de descontração, pela confiança, e por ter me ouvido com paciência e compreensão tantas e tantas vezes. Te amo, linda!

Agradeço ao meu amigo-irmão Alex Honorato, pelas longas horas de conversa, de desabafo, e por ter me aturado por meses cantando no chuveiro toda manhã. Nunca vou esquecer de cada episódio da nossa série favorita que assistíamos enquanto você comia seu pão maravilhoso de três fatias. Agradeço principalmente por você ter sido essa pessoa especial, que sempre me inspirou e que, independente da distância, sempre foi e sempre será um exemplo pra mim. Obrigado por tudo, parceiro!

Agradeço à minha velha amiga Bruna Paula, que por mais que hoje esteja longe, foi de fundamental importância para que eu nunca desistisse dos meus sonhos. Obrigado por sempre confiar em mim, meu anjo, e por nunca ter me excluído das suas orações!

Não posso deixar de agradecer minha anjo-amiga Rafaela Carvalho, por sua existência e unicidade. Às vezes eu paro e penso: “o que seria dos estudantes de graduação e pós-graduação em matemática do Ibilce sem essa menina? Como as gerações anteriores sobreviveram? Como as próximas sobreviverão quando ela se for?” Rafa, muito obrigado por você ser o porto seguro de todo mundo, por ser tão prestativa, tão amiga e por ter todas as listas de Topologia Geral da história do Ibilce! Agradeço a você todos os “corres”

que você fez por mim durante estes seis anos de amizade, por todo carinho e apoio; você é parte fundamental de tudo isso. Te amo muito, gatinha!

Agradeço também à minha amiga e companheira de área, Laura Gambera, pela paciência, por sempre me animar, me motivar, e o mais importante: sempre confiar em mim. Obrigado por ser essa pessoa talentosa, humilde, carinhosa e sempre disposta a ajudar a todos também; se a Rafa é detentora de todas as listas de Topologia da História do Ibilce, você é detentora do resto, todas resolvidas, o que faz a alegria de todos! Obrigado por tudo! Amo você!

Agradeço também ao restante da turminha do barulho, Augusto Furquim, Lucas dos Santos, Paulo Bergamini, Tamara, por todos os momentos de risadas e por juntos tornarmos momentos que seriam de terror, em momentos dignos de sentirmos saudades. Obrigado por tudo meus queridos!

Agradeço também à grande estrela do meu curso de mestrado, a excelentíssima Daniele Gazetta, por todo carinho, todos os momentos de descontração, e por ter estado sempre disposta a passar um momento comigo, fosse nos divertindo, fosse comendo, ou simplesmente ouvindo o meu blá-blá-blá interminável, porque se tem algo em que eu já nasci mestre é em reclamar da vida. Muito obrigado mesmo por tudo, meu anjo, sua amizade é, de longe, o tesouro mais valioso que cultivei durante os meses que passamos juntos. Não sei sobre o futuro, mas independente do lugar que eu esteja o seu lugar na minha vida estará sempre reservado. Amo você demais da conta!

Agradeço ao meu amigo-irmão Eric Busatto, por todo o apoio e amizade durante todo esse tempo; por ter me hospedado em seu apartamento em momentos difíceis e ter sido tão legal comigo todas as vezes. Preciso também agradecer por você ser tão feericamente lindo, afinal não posso perder essa oportunidade. Obrigado por tudo, parceiro!

Falando em pessoas estupendas, quero agradecer meu grande amigo Rodrigo Contreras, por toda sua simplicidade, humildade e boa vontade. Agradeço também por você ter sido meu companheiro gordo durante quase todo o curso de mestrado, inclusive me ensinou várias piadas de gordo, e por ter tornado este período um tanto mais “magic”. Você é muito especial pra mim, cara, adoro você!

Agradeço ao meu grande amigo e parceiro, Daniel Vieira, por nunca ter me deixado na mão quando eu precisei de ajuda, pela humildade de sempre compartilhar o que sabe e por ter sido um verdadeiro irmão pra mim durante os estudos para a dissertação. Muito obrigado por tudo, meu amigo, pra mim você sempre foi e sempre será um gênio!

Agradeço a todo o pessoal da salinha, por todos as risadas, principalmente nos momentos de tensão pré-prova. Valeu pessoal!

Aproveito a oportunidade para dar um salve à equipe do *Reboque Safadão*, primeiro porque pessoas como Natã Genachi e Maximiliano Dionísio não são fáceis de achar,

e segundo porque ser citado nos agradecimentos de uma dissertação de mestrado em Matemática é algo que a concorrência jamais poderá copiar. Parabéns, meus caros, pelo talento *único* de vocês!

Agradeço aos meus professores Rosalina Garcia e Wanilson Freitas por me inspirarem a ter amor pela matemática, e a professores como o Prof. Antonio Carlos (o Caxias) e as professoras Sofia e Fátima Carfane, por estarem sempre torcendo por mim e me encorajando a ir em frente sempre que me veem. Obrigado por tudo, senhores!

Agradeço também a todos os amigos e professores do departamento de Matemática do IBILCE, todos vocês foram parte importante desta conquista.

Um agradecimento especial ao meu orientador de mestrado, Prof. Dr. German Lozada-Cruz, por todo apoio, compreensão e conhecimento compartilhado durante os três anos que trabalhamos juntos, desde a iniciação científica até o mestrado. Muito obrigado por tudo, professor!

Eu gostaria de agradecer também aos professores Irena Lasiecka e Roberto Triggiani, da Universidade de Memphis, Tennessee, Estados Unidos, por cederem um de seus artigos mais atuais para minha dissertação e por darem todo o suporte que precisei para entender o texto.

Agradeço à banca examinadora por aceitarem o convite.

Agradeço à CAPES, pelo auxílio financeiro.

*“É impossível viver sem falhar em
alguma coisa, a não ser que você
viva tão cautelosamente que talvez
nem tenha mesmo vivido de
verdade - caso em que você já teria
falhado por não tentar.”*

(J.K. Rowling)

Resumo

Sejam X um espaço de Banach, α um número complexo tal que $\operatorname{Re} \alpha > 0$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado e não negativo. O objetivo deste trabalho é definir o objeto A^α de modo que as propriedades de potência de números complexos sejam preservadas, ou seja,

- (i) $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$; (aditividade)
- (ii) $A^1 = A$;
- (iii) $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ (quando o primeiro membro faz sentido).

Como aplicação da teoria, caracterizamos o domínio da potência fracionária de um operador definido matricialmente a partir da seguinte Equação Diferencial Parcial abstrata em espaço de Hilbert, protótipo utilizado para modelar sistemas elásticos com forte (ou estrutural) amortecimento:

$$\ddot{x} + A^\alpha \dot{x} + Ax = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

com A sendo um operador positivo e autoadjunto.

Palavras-chave: Operadores não negativos, Potencias Fracionárias, Domínios do Operador Potência Fracionária, Teorema de Baiocchi.

Abstract

Let X be a Banach space, α a complex number such that $\operatorname{Re} \alpha > 0$ and $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ a non-negative closed linear operator. The purpose of this work is to define the object A^α in a way that the properties of powers of complex numbers be preserved, i.e,

- (i) $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$; (additivity)
- (ii) $A^1 = A$;
- (iii) $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ (when the first member makes sense).

As an application of theory, we characterized the domain of fractional power of a matrix-valued operator from the abstract Partial Differential Equation in Hilbert space, prototype used to model elastic systems with strong/structural damping:

$$\ddot{x} + A^\alpha \dot{x} + Ax = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

with A being a positive self-adjoint operator.

Keywords: Non-negative Operators, Fractional Powers, Domains of Fractional Powers, Baiocchi's Theorem.

Sumário

Introdução	10
1 Operadores não negativos	12
1.1 Operadores Setoriais	24
1.2 Operadores m-acretivos	32
2 Potências Fracionárias de Operadores	36
2.1 O Operador de Balakrishnan	36
2.2 Cálculo Funcional	49
2.2.1 As Classes de Funções $\mathcal{T}, \mathcal{T}_0, \mathcal{S}_0, \mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$	49
2.2.2 Cálculo de Hirsch	53
2.3 Potência Fracionária de Operadores	55
2.3.1 Definição e propriedades básicas: Aditividade	55
2.3.2 Teorema da Aplicação Espectral	70
2.3.3 O espectro do Laplaciano Fracionário Unidimensional	73
2.3.4 Setorialidade	75
3 Domínios das Potências Fracionárias de Operadores Definidos Matricialmente	81
3.1 Operadores Elásticos Amortecidos	81
3.2 Demonstração do Teorema 3.5	88
A Resultados Auxiliares	94
A.1 Resultados Básicos de Análise Funcional	94
A.2 Espectro e Resolvente	96
A.3 Análise Complexa	100
A.4 Semigrupos	100
A.5 O Teorema de Representação Radon-Riesz	102

B Teoria de Interpolação em Espaços de Banach	106
B.1 Interpolação Real	107
B.1.1 O K-Método	107
B.2 Espaços Intermediários e Reiteração	110
B.3 Interpolação Complexa	111
B.4 Espaços de Interpolação e Domínio de Operadores	114
B.4.1 O caso em que A é um operador não negativo	115
B.4.2 O caso em que A é gerador de um semigrupo	116
B.4.3 Domínio do Operador Potência Fracionária	117
B.5 Interpolação de Subespaços: Interpolação de Baiocchi	117

Introdução

A teoria de potências fracionárias de operadores fechados foi introduzida na tese de doutorado do matemático americano A. V. Balakrishnan¹ (ver [1]), escrita na Universidade do Sul da Califórnia, Los Angeles, em 1954, sob a orientação de Ralph Phillips². Em particular, Balakrishnan trouxe uma fórmula para calcular a potência fracionária A^α , $0 < \alpha < 1$ de um operador fechado A definido num espaço de Banach X através de uma integral expressa em termos do operador resolvente:

$$A^\alpha \phi = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} A(\lambda + A)^{-1} \phi d\lambda, \quad \phi \in D(A) \subset D(A^\alpha), 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

Esta fórmula pode ser encontrada em livros básicos sobre semigrupos (ver, por exemplo, [26], p. 70), no entanto, um tratamento mais formal e recente pode ser encontrado em [4], a principal referência para este trabalho. Esta teoria tem impacto direto e incisivo no estudo de equações diferenciais, pois nos permite obter melhores propriedades de regularidade para equações diferenciais de diversas dinâmicas, como pode ser visto nos artigos [10], [12] e no livro [15], sobre *regularidade maximal*.

Ainda sobre regularidade, o estudo e a caracterização dos domínios de definição dos operadores potência fracionária são de vital importância. Nesse sentido a professora Irena Lasiecka³ introduziu um método (o qual também utilizaremos neste trabalho) para caracterizar o domínio das potências fracionárias de operadores elípticos (ver [20]) encontrando coincidências que permite o estudo e regularização de Equações Diferenciais Parciais, não apenas elípticas, mas também com outras dinâmicas. Por exemplo, se $(-A)$ denota o operador Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet, então

$$D(A^{\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}}) \equiv H^{\frac{1}{2}-\delta}(\Omega), \quad \delta > 0 \text{ pequeno},$$

ou seja, o domínio da potência $\frac{1}{4} - \frac{\delta}{2}$ do Laplaciano coincide com o espaço de Sobolev de ordem $\frac{1}{2} - \delta$. Uma fórmula geral para operadores elípticos de ordem $2m$ com várias condições de fronteira pode ser encontrada em [21], p. 283-4, e em [18].

Nosso objetivo, no decorrer deste trabalho, foi estudar uma maneira em que fizesse sentido associar um operador fechado A , com domínio e imagem num espaço de Banach X , e um número complexo α ,

¹Matemático americano. Sem informações sobre o nascimento, veio a falecer em março de 2015.

²Matemático americano, 1913 - 1998.

³Matemática polonesa-americana, 1948.

com $\operatorname{Re} \alpha > 0$, a outro operador A^α de modo que as propriedades de potência de números complexos fossem preservadas, ou seja,

- (i) $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$; (aditividade)
- (ii) $A^1 = A$;
- (iii) $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ (quando o primeiro membro faz sentido).

Em seguida, nos baseamos no artigo dos professores Irena Lasiecka e Roberto Triggiani⁴ para estudar brevemente a técnica apresentada por Lasiecka em [20] e a aplicação da mesma na caracterização de um operador definido matricialmente a partir de uma Equação Diferencial Parcial abstrata em espaço de Hilbert, que é o protótipo utilizado para modelar sistemas elásticos com forte (ou estrutural) amortecimento:

$$\ddot{x} + A^\alpha \dot{x} + Ax = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

com A sendo um operador positivo e autoadjunto.

Para isso organizamos este trabalho em 3 capítulos.

No primeiro capítulo, nós conceituamos e estudamos as principais propriedades dos operadores não negativos, base para o desenvolvimento de toda teoria de potência fracionária, do ponto de vista que escolhemos estudar. Neste capítulo, também estudamos brevemente suas subclasses dos operadores não negativos: os operadores setoriais e os operadores m -acretivos e suas equivalências.

No segundo capítulo, estudamos a teoria básica de potências fracionárias de operadores para os três casos possíveis (A limitado, A ilimitado com $0 \in \rho(A)$ e A ilimitado com $0 \in \sigma(A)$). Para isso, iniciamos o capítulo estudando o operador de Balakrishnan, que é o ponto de partida do estudo. Em seguida, falamos brevemente sobre o Cálculo Funcional que subsidia parte importante da teoria e das propriedades do operador potência fracionária e terminamos estudando as resultados importantes como o Teorema da Aplicação Espectral (para potência fracionária) e verificando em que condições o operador potência fracionária preserva a setorialidade do operador A .

O terceiro e último capítulo traz uma apresentação breve acerca dos operadores elásticos amortecidos, a definição do operador matricial no qual tivemos interesse e, por fim, a caracterização detalhada do domínio da potência fracionária do operador matricial que definimos.

Os apêndices trazem resultados básicos de Análise Funcional e de Interpolação de espaços de Banach que constituem o alicerce sobre o qual o trabalho foi desenvolvido.

⁴Matemático italiano-americano, 1942.

Operadores não negativos

Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \mapsto X$ um operador linear.

Definição 1.1. Dizemos que A é **não negativo** se é fechado, $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$, e

$$M = \sup_{\lambda > 0} \{\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|\} < \infty. \quad (1.1)$$

A constante M é chamada de **constante de não-negatividade** de A . Denotamos o conjunto de operadores não negativos definidos em X por $\mathcal{M}(X)$.

Da identidade

$$(\lambda + A)(\lambda + A)^{-1} = 1, \quad (1.2)$$

onde 1 é o operador identidade de X em X , obtemos $A(\lambda + A)^{-1} = 1 - \lambda(\lambda + A)^{-1}$. Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda > 0} \|A(\lambda + A)^{-1}\| &= \sup_{\lambda > 0} \|1 - \lambda(\lambda + A)^{-1}\| \\ &\leq 1 + \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| = 1 + M, \end{aligned}$$

assim, se A é não negativo, $A(\lambda + A)^{-1}$ é uniformemente limitado. Além disso,

$$\left| \sup_{\lambda > 0} \|A(\lambda + A)^{-1}\| - \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \right| < 1. \quad (1.3)$$

De fato, como $\|A(\lambda + A)^{-1}\| \leq 1 + \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|$, temos $\sup_{\lambda > 0} \|A(\lambda + A)^{-1}\| \leq 1 + \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|$, ou seja,

$$\sup_{\lambda > 0} \|A(\lambda + A)^{-1}\| - \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \leq 1.$$

Por outro lado, o fato de que $\lambda(\lambda + A)^{-1} = 1 - A(\lambda + A)^{-1}$, garante que

$$-1 \leq \sup_{\lambda > 0} \|A(\lambda + A)^{-1}\| - \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|.$$

Definição 1.2. Um operador linear fechado é dito positivo se é não negativo e $0 \in \rho(A)$. Denotamos o conjunto dos operadores positivos por $\mathcal{P}(X)$.

A próxima proposição caracteriza os operadores positivos e sua demonstração resumida pode ser encontrada em ([4], p. 2). A demonstração com detalhes vem a seguir.

Proposição 1.3. Um operador linear fechado é positivo se, e somente se, $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$ e

$$\sup_{\lambda > 0} (\lambda + 1) \|(\lambda + A)^{-1}\| < \infty. \quad (1.4)$$

Demonstração. Primeiramente suponhamos A positivo. Como A é não negativo segue que $A(\lambda + A)^{-1}$ é uniformemente limitado com respeito a $\lambda > 0$. Além disso, como $0 \in \rho(A)$, A^{-1} é limitado. Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda > 0} \|(\lambda + A)^{-1}\| &= \sup_{\lambda > 0} \|A^{-1}A(\lambda + A)^{-1}\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \sup_{\lambda > 0} \|A(\lambda + A)^{-1}\| < \infty. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda > 0} (\lambda + 1) \|(\lambda + A)^{-1}\| &= \sup_{\lambda > 0} \|(\lambda + 1)(\lambda + A)^{-1}\| \\ &= \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A)^{-1} + (\lambda + A)^{-1}\| \\ &\leq \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| + \sup_{\lambda > 0} \|(\lambda + A)^{-1}\| < \infty, \end{aligned}$$

donde segue (1.4).

Reciprocamente, suponhamos que $(-\infty, 0) \in \rho(A)$ e (1.4) é válida. Então, A é não negativo, pois temos ainda que

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \sup_{\lambda > 0} (\lambda + 1) \|(\lambda + A)^{-1}\| < \infty$$

o que implica que $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ é uniformemente limitado com relação a $\lambda > 0$ e ainda

$$\sup_{\lambda > 0} \|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \sup_{\lambda > 0} (\lambda + 1) \|(\lambda + A)^{-1}\| < \infty$$

o que implica que $(\lambda + A)^{-1}$ é também uniformemente limitado com relação a $\lambda > 0$.

Resta mostrar, então, que $0 \in \rho(A)$. Para isso considere (λ_n) uma sequência em $(0, +\infty)$ tal que

$\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Pela identidade do resolvente (Proposição A.14) temos

$$\begin{aligned} \|(\lambda_m + A)^{-1} - (\lambda_n + A)^{-1}\| &= \|(\lambda_n - \lambda_m)(\lambda_m + A)^{-1}(\lambda_n + A)^{-1}\| \\ &\leq |\lambda_n - \lambda_m| \|(\lambda_m + A)^{-1}\| \|(\lambda_n + A)^{-1}\| \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Logo, $\{(\lambda_n + A)^{-1}\}$ é uma sequência de Cauchy no espaço dos operadores limitados de X em X , $\mathcal{L}(X)$, e é, portanto, convergente, digamos, para $T \in \mathcal{L}(X)$. Além disso, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\lambda_n + A)^{-1} = 0.T = 0$, pela equação (1.2) temos

$$\begin{aligned} AT\phi &= \lim_{n \rightarrow \infty} A(\lambda_n + A)^{-1}\phi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\phi - \lambda_n(\lambda_n + A)^{-1}\phi] = \phi, \quad \forall \phi \in X \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} TA\phi &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n + A)^{-1}A\phi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\phi - \lambda_n(\lambda_n + A)^{-1}\phi] = \phi, \quad \forall \phi \in D(A). \end{aligned}$$

Logo, $T = A^{-1}$, o que implica que $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e portanto $0 \in \rho(A)$ e A é positivo. $\square$

De agora em diante, salvo sob menção do contrário, A é um operador não negativo e M sua respectiva constante de não-negatividade. Se B é um operador injetivo e $n \in \mathbb{N}$, então, por B^{-n} nós entendemos $(B^{-1})^n$.

No seguinte resultado, provamos que a não-negatividade é uma propriedade estável sobre as operações inversa e adjunta. Um comentário sobre a demonstração pode ser encontrado em ([4], p. 3.)

Proposição 1.4. *Seja $A \in \mathcal{M}(X)$. Então,*

(i) *Se A é injetor e A^{-1} é o inverso de A , então,*

$$\lambda(\lambda + A^{-1})^{-1} = A(\lambda^{-1} + A)^{-1} \quad (\lambda > 0).$$

Portanto, A^{-1} é não negativo.

(ii) *Se A é densamente definido e A^* é o adjunto de A , então,*

$$\left[(\lambda + A)^{-1}\right]^* = (\lambda + A^*)^{-1} \quad (\lambda > 0).$$

Consequentemente, A^ é não negativo no espaço dual X' .*

Demonstração. (i) Como A é não negativo, é fechado, então segue da injetividade que A^{-1} é fechado. Sabemos, ainda, que $A(\lambda^{-1} + A)^{-1}$ é uniformemente limitado com respeito a $\lambda > 0$. Além

disso,

$$\begin{aligned} A(\lambda^{-1} + A)^{-1} &= (A^{-1})^{-1}(\lambda^{-1} + A)^{-1} = \left[(\lambda^{-1} + A)A^{-1} \right]^{-1} \\ &= (\lambda^{-1}A^{-1} + 1)^{-1} = \left[\lambda^{-1}(\lambda + A^{-1}) \right]^{-1} = \lambda(\lambda + A^{-1})^{-1}, \end{aligned}$$

o que implica que $\lambda(\lambda + A^{-1})^{-1}$ é uniformemente limitado com respeito a $\lambda > 0$. Por último, note também que $(\lambda + A^{-1})^{-1}$ é limitado para todo $\lambda > 0$, o que implica que $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$.

Portanto, A^{-1} é não negativo.

É possível mostrar, ainda, utilizando a igualdade que acabamos de mostrar e a desigualdade (1.3), que se M é a constante de não negatividade de A e M' é a constante de não negatividade de A^{-1} , então $|M - M'| \leq 1$.

(ii) Note que

$$\begin{aligned} \left[(\lambda + A)^{-1} \right]^* &= \left[(\lambda + A)^* \right]^{-1} \\ &= (\lambda + A^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Logo A^* é não negativo no espaço dual X' .

Da igualdade mostrada acima segue ainda que a constante de não negatividade de A é igual a constante de não negatividade de A^* , uma vez que a norma de operadores limitados coincidem com as normas de seus respectivos adjuntos. $\square$

Existem exemplos de operadores não negativos com domínio ou imagem não densos. A caracterização a seguir será muito usada neste trabalho; sua demonstração foi retirada de ([4], p. 3) e trazida para este trabalho com todos os detalhes e contas não explícitos lá.

Proposição 1.5. *Seja $A \in \mathcal{M}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\phi \in X$. Então,*

- (i) $\phi \in \overline{D(A)} \iff \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi \iff \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0.$
- (ii) $\phi \in \overline{R(A)} \iff \lim_{\lambda \rightarrow 0} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi \iff \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0.$
- (iii) $\overline{D(A^n)} = \overline{D(A)}, \overline{R(A^n)} = \overline{R(A)}$ e

$$\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = \overline{D(A^n) \cap R(A^n)} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração de cada item em afirmações que facilitarão sua compreensão.

- (i) *Afirmção 1:* $\phi \in \overline{D(A)} \implies \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi.$

Lembremos da conhecida relação

$$x^n - y^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \right) (x - y). \quad (1.5)$$

Utilizando (1.5) e o ítem (i) da Proposição A.22, temos

$$\begin{aligned} \phi - \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi &= (1 - \lambda^n(\lambda + A)^{-n})\phi = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k(\lambda + A)^{-k} \right) (1 - \lambda(\lambda + A)^{-1})\phi \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k(\lambda + A)^{-k} \right) A(\lambda + A)^{-1}\phi = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k(\lambda + A)^{-k} \right) (\lambda + A)^{-1}A\phi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\phi - \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi\| &= \left\| \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k(\lambda + A)^{-k} \right) (\lambda + A)^{-1}A\phi \right\| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|^k \right) \frac{M}{\lambda} \|A\phi\| \leq \frac{\|A\phi\|}{\lambda} \sum_{k=1}^n M^k \longrightarrow 0 \text{ se } \lambda \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Sejam $\phi \in \overline{D(A)}$, $\varepsilon > 0$ arbitrário e $\psi \in D(A)$ tal que $\|\phi - \psi\| < \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{M^n}\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\phi - \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi\| &= \|\phi - \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\psi + \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\psi - \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi\| \\ &\leq \|\phi - \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\psi\| + \|\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\| \|\phi - \psi\| \\ &= \|\phi - \psi + \psi - \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\psi\| + \|\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\| \|\phi - \psi\| \\ &\leq \|\phi - \psi\| + \|\psi - \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\psi\| + \|\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\| \|\phi - \psi\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\tilde{\phi} - \tilde{\phi}\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Desta última desigualdade segue que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi$.

Afirmiação 2: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi \implies \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0$.

Seja $\phi \in X$ e observe que

$$\begin{aligned} \|A^n(\lambda + A)^{-n}\phi\| &= \|A^{n-1}\lambda + A)^{-(n-1)}[A(\lambda + A)^{-1}]\phi\| \leq \|[A(\lambda + A)^{-1}]^{n-1}\| \|\phi - \lambda(\lambda + A)^{-1}\phi\| \\ &\leq (M + 1)^{n-1} \|\phi - \lambda(\lambda + A)^{-1}\phi\| \longrightarrow 0 \text{ se } \lambda \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Se $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em particular, também vale para $n = 1$, então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0$.

Afirmiação 3: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0 \implies \phi \in \overline{D(A)}$.

Lembremos a identidade conhecida por Binômio de Newton

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \quad (1.6)$$

Seja $\phi \in X$ tal que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0$. Utilizando 1.6 temos

$$\begin{aligned} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi &= (1 - \lambda(\lambda + A)^{-1})^n\phi \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-\lambda(\lambda + A)^{-1})^k \phi \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \lambda^k (\lambda + A)^{-k} \phi \\ &= \phi - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \lambda^k (\lambda + A)^{-k} \phi. \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ temos

$$\phi = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \lambda^k (\lambda + A)^{-k} \phi.$$

Agora, como $(\lambda + A)^{-k}\phi \in D(A)$ para todo $1 \leq k \leq n$, segue que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \lambda^k (\lambda + A)^{-k} \phi \in D(A).$$

Portanto, ϕ é o limite de elementos de $D(A)$, ou seja, $\phi \in \overline{D(A)}$.

(ii) *Afirmção 1:* $\phi \in \overline{R(A)} \implies \lim_{\lambda \rightarrow 0} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi$.

Suponha primeiramente que $\phi \in R(A)$, então, $\phi = Au$, para algum $u \in D(A)$. Assim, utilizando (1.5) temos

$$\begin{aligned} \phi - A^n(\lambda + A)^{-n}\phi &= (1 - A^n(\lambda + A)^{-n})\phi = \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k(\lambda + A)^{-k} \right) (1 - A(\lambda + A)^{-1})\phi \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k(\lambda + A)^{-k} \right) \lambda(\lambda + A)^{-1}\phi = \lambda \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k(\lambda + A)^{-k} \right) A(\lambda + A)^{-1}u. \end{aligned}$$

Assim

$$\|\phi - A^n(\lambda + A)^{-n}\phi\| \leq \lambda \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|A(\lambda + A)^{-1}\|^k \right) \|A(\lambda + A)^{-1}\| \|u\| \rightarrow 0 \text{ se } \lambda \rightarrow 0.$$

Suponha agora que $\phi \in \overline{R(A)}$ e seja $\varepsilon > 0$. Considere $\psi \in R(A)$ tal que $\|\phi - \psi\| < \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, \varepsilon/(M +$

1)ⁿ}. Assim temos

$$\begin{aligned}
\|\phi - A^n(\lambda + A)^{-n}\phi\| &= \|\phi - A^n(\lambda + A)^{-n}\psi + A^n(\lambda + A)^{-n}\psi - A^n(\lambda + A)^{-n}\phi\| \\
&\leq \|\phi - A^n(\lambda + A)^{-n}\psi\| + \|A^n(\lambda + A)^{-n}\|\|\phi - \psi\| \\
&= \|\phi - \psi + \psi - A^n(\lambda + A)^{-n}\psi\| + \|A^n(\lambda + A)^{-n}\|\|\phi - \psi\| \\
&\leq \|\phi - \psi\| + \|A^n(\lambda + A)^{-n}\psi - \psi\| + (M + 1)^n\|\phi - \psi\| \\
&< \varepsilon + \|\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\psi - \psi\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi$.

Afirmção 2: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi \implies \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0$.

Seja $\phi \in X$ tal que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi$ e observe que

$$\begin{aligned}
\|\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi\| &= \|[\lambda(\lambda + A)^{-1}]^{n-1}[\lambda(\lambda + A)^{-1}]\phi\| \\
&\leq \|[\lambda(\lambda + A)^{-1}]^{n-1}\|\|\phi - A(\lambda + A)^{-1}\phi\| \\
&\leq M^{n-1}\|\phi - A(\lambda + A)^{-1}\phi\| \rightarrow 0 \text{ se } \lambda \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0$.

Afirmção 3: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0 \implies \phi \in \overline{R(A)}$.

Seja $\phi \in X$ tal que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = 0.$$

Então, utilizando mais uma vez (1.6) temos

$$\begin{aligned}
\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi &= (1 - A(\lambda + A)^{-1})^n\phi \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-A(\lambda + A)^{-1})^k \phi \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^k (\lambda + A)^{-k} \phi \\
&= \phi - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} A^k (\lambda + A)^{-k} \phi.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ temos

$$\phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} A^k (\lambda + A)^{-k} \phi.$$

Portanto $\phi \in \overline{R(A)}$, pois é o limite de termos de $R(A)$.

(iii) *Afirmção 1:* $\overline{D(A^n)} = \overline{D(A)}$

Note primeiramente que $D(A^n) \subset D(A)$, logo, $\overline{D(A^n)} \subset \overline{D(A)}$. Vamos mostrar a inclusão contrária.

Seja $\phi \in \overline{D(A)}$, então, pelo item (i) segue que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi$, ou seja, como $\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi \in D(A^n)$, ϕ pode ser escrito como um limite de termos em $D(A^n)$, donde $\phi \in \overline{D(A^n)}$.

Portanto, $\overline{D(A)} = \overline{D(A^n)}$.

Afirmção 2: $\overline{R(A)} = \overline{R(A^n)}$.

Primeiramente observe que $R(A^n) \subset R(A)$, assim, $\overline{R(A^n)} \subset \overline{R(A)}$. Mostremos a inclusão contrária.

Seja $\phi \in \overline{R(A)}$, então, pelo item (ii) temos $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = \phi$ e uma vez que $A^n(\lambda + A)^{-n}\phi \in R(A^n)$ segue que $\phi \in \overline{R(A^n)}$ pois é o limite de termos em $R(A^n)$.

Portanto, $\overline{R(A^n)} = \overline{R(A)}$.

Afirmção 3: $\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = \overline{D(A^n) \cap R(A^m)} \quad (n, m \in \mathbb{N})$.

Observe que $D(A^n) \cap R(A^m) \subset D(A^n) \subset D(A)$ e $D(A^n) \cap R(A^m) \subset R(A^m) \subset R(A)$. Logo, $\overline{D(A^n) \cap R(A^m)} \subset \overline{D(A)}$ e $\overline{D(A^n) \cap R(A^m)} \subset \overline{R(A)}$, ou seja, $\overline{D(A^n) \cap R(A^m)} \subset \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)}$.

Vamos mostrar a inclusão contrária.

Seja $k = \max\{n, m\}$. Observe que $D(A^k) \subset D(A^n)$ e $R(A^k) \subset R(A^m)$, assim, $D(A^k) \cap R(A^k) \subset D(A^n) \cap R(A^m)$ e, consequentemente, $\overline{D(A^k) \cap R(A^k)} \subset \overline{D(A^n) \cap R(A^m)}$. Logo, é suficiente mostrar que $\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} \subset \overline{D(A^k) \cap R(A^k)}$.

De fato, seja $\phi \in \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)}$. Assim, $\phi \in \overline{D(A)} = \overline{D(A^k)}$, então, existe uma sequência $(\phi_\lambda) \subset D(A^k)$ tal que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_\lambda = \phi$.

Vamos mostrar que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A^k(\lambda + A)^{-k}\phi_\lambda = \phi$. Para isso note que, como $\phi \in \overline{R(A)}$ segue do item (ii) que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A^k(\lambda + A)^{-k}\phi = \phi$ ou seja, $\|\phi - A^k(\lambda + A)^{-k}\phi\| \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Por outro lado, como $A^k(\lambda + A)^{-k}$ é uniformemente limitado e $\phi_\lambda \rightarrow \phi$ quando $\lambda \rightarrow 0$ segue também que $\|A^k(\lambda + A)^{-k}\phi_\lambda - A^k(\lambda + A)^{-k}\phi\| \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \|A^k(\lambda + A)^{-k}\phi_\lambda - \phi\| &= \|A^k(\lambda + A)^{-k}\phi_\lambda - A^k(\lambda + A)^{-k}\phi + A^k(\lambda + A)^{-k}\phi - \phi\| \\ &\leq \|A^k(\lambda + A)^{-k}\phi_\lambda - A^k(\lambda + A)^{-k}\phi\| + \|A^k(\lambda + A)^{-k}\phi - \phi\| \rightarrow 0 \text{ se } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A^k(\lambda + A)^{-k}\phi_\lambda = \phi$.

Agora, note que $A^k(\lambda + A)^{-k}\phi_\lambda \in R(A^k)$. Por outro lado, como $\phi_\lambda \in D(A^k)$ para cada λ segue que $A^k(\lambda + A)^{-k}\phi_\lambda = (\lambda + A)^{-k}A^k\phi_\lambda \in D(A^k)$, o que implica que $\psi_\lambda = A^k(\lambda + A)^{-k}\phi_\lambda \in D(A^k) \cap R(A^k)$ e $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi_\lambda = \phi$, donde, $\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} \subset \overline{D(A^k) \cap R(A^k)} \subset \overline{D(A^n) \cap R(A^m)}$.

Portanto, $\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = \overline{D(A^n) \cap R(A^m)} \quad (n, m \in \mathbb{N})$. □

Para o próximo resultado, que é um corolário da proposição anterior, iremos precisar de um conhecido resultado que enunciaremos no Lema a seguir.

Lema 1.6. *Seja X um espaço de Banach e considere a topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ em X . Então valem as seguintes propriedades:*

(i) *Se C é um subconjunto convexo de X , então C é fechado na topologia $\sigma(X, X^*)$ se, e somente se, C é fechado em X .*

(ii) *Se X é reflexivo, então para toda sequência limitada $(x_n) \subset X$, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge na topologia $\sigma(X, X^*)$.*

Demonstração. Ver [2], p. 60, para o item (i) e p. 69 para o item (ii). □

A demonstração do Corolário abaixo pode ser encontrada em ([4], p.4).

Corolário 1.7. *Seja $A \in \mathcal{M}(X)$. Então,*

(i) $\sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \geq 1$.

(ii) *Se $R(A)$ é denso, então A é injetivo. Em particular, A é positivo se, e somente se, é sobrejetivo.*

(iii) *Se A é contínuo, então, $D(A) = X$, isto é, A é limitado. Consequentemente não existem operadores não negativos com domínio fechado estritamente contido em X .*

(iv) *Se $\overline{D(A)} \subsetneq X$ ou se $\overline{R(A)} \subsetneq X$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $R(A^n) \not\subseteq \overline{D(A)}$ ou $D(A^n) \not\subseteq \overline{R(A)}$, respectivamente.*

(v) *Se X é reflexivo, então $D(A)$ é denso e A é injetivo se, e somente se, $R(A)$ é denso.*

Demonstração. (i) Seja $\phi \in D(A)$ não nulo, então, pelo item (i) da proposição anterior segue que $\phi = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi$, assim,

$$\begin{aligned} \|\phi\| &= \left\| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi \right\| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\phi\| \\ &\leq \|\phi\| \sup_{\lambda > 0} \|\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\|, \end{aligned}$$

ou seja, $1 \leq \sup_{\lambda > 0} \|\lambda^n(\lambda + A)^{-n}\|$.

(ii) Suponhamos que $\overline{R(A)} = X$ e seja $\phi \in D(A) \subset \overline{R(A)}$ tal que $A\phi = 0$. Assim, pelo item (ii) da proposição anterior segue que

$$\phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda + A)^{-1}A\phi = 0,$$

ou seja, A é injetora.

Agora, se A é positivo, $0 \in \rho(A)$, ou seja, $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e, consequentemente, A é sobrejetor. Por outro lado se A é sobrejetor, pela primeira parte da demonstração, segue que A é bijetor. Então $A^{-1} : X \rightarrow X$ existe e, uma vez que A é fechado, A^{-1} também o é. E então, pelo Teorema do Gráfico fechado segue que $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, o que implica que $0 \in \rho(A)$ e, portanto, A é positivo.

(iii) Suponhamos que A é contínuo, então, por definição existe $K > 0$ tal que $\|A\phi\| \leq K\|x\|, \forall x \in D(A)$.

Vamos mostrar que $D(A)$ é fechado. De fato, para todo $\varepsilon > 0$, da continuidade de A segue que existe $\delta > 0$ de maneira que dado $\phi \in D(A)$ com $\|\phi\| < \delta$ teremos $\|A\phi\| < \varepsilon$.

Seja (ϕ_n) uma sequência em $D(A)$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi \in X$, assim, compete a nós mostrarmos que $\phi \in D(A)$. Como $\phi_n \rightarrow \phi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\phi_m - \phi_n\| < \delta$, para todo $m, n \geq N$. Da continuidade de A segue que $\|A\phi_m - A\phi_n\| = \|A(\phi_m - \phi_n)\| < \varepsilon$ para todo $m, n \geq N$, o que implica que $(A\phi_n)$ é sequência de Cauchy em X , que é Banach, logo, existe $y \in X$ tal que $A\phi_n \rightarrow y$ em X . Por fim, como A é fechado, por definição, segue que $\phi \in D(A)$, ou seja, $D(A)$ é fechado.

Mostremos agora que $X \subset D(A)$ para concluirmos que $D(A) = X$. De fato, seja $\phi \in X$, mais uma vez da continuidade de A segue que

$$\|A(\lambda + A)^{-1}\phi\| \leq K\|(\lambda + A)^{-1}\phi\| \leq K\frac{M}{\lambda}\|\phi\|.$$

Fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ temos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A(\lambda + A)^{-1}\phi = 0$, $\forall \phi \in X$. Logo, pelo item (i) da Proposição 1.5, $\phi \in \overline{D(A)} = D(A)$, pois $D(A)$ é fechado. Portanto $D(A) = X$.

Agora, se $D(A) \subset X$ é fechado, então $D(A)$ é uma espaço de Banach com a mesma norma. Assim, como A é fechado segue que o gráfico de A é fechado e portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado segue que A é contínuo, logo, pela primeira parte da demonstração, segue que $D(A) = X$.

(iv) Suponha primeiramente que $D(A)$ não é denso e sejam $\phi \notin \overline{D(A)}$, $-\mu \in \rho(A)$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} A^n[(\mu + A)^{-1}]^n\phi &= [1 - \mu(\mu + A)^{-1}]^n\phi \\ &= \phi + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mu^k [(\mu + A)^{-1}]^k \phi \notin \overline{D(A)}, \end{aligned}$$

logo, $A^n[(\mu + A)^{-1}]^n\phi \notin \overline{D(A)}$, mas $A^n[(\mu + A)^{-1}]^n\phi \in R(A^n)$, o que implica que $R(A^n) \not\subset \overline{D(A)}$.

De modo análogo, suponhamos que $R(A)$ é não denso e sejam $\phi \notin \overline{R(A)}$, $-\mu \in \rho(A)$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, como antes,

$$\begin{aligned} \mu^n[(\mu + A)^{-1}]^n\phi &= [1 - A(\mu + A)^{-1}]^n\phi \\ &= \phi + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^k [(\mu + A)^{-1}]^k \phi \notin \overline{R(A)}, \end{aligned}$$

logo, $\mu^n[(\mu + A)^{-1}]^n\phi \notin \overline{R(A)}$, mas $\mu^n[(\mu + A)^{-1}]^n\phi \in D(A^n)$, o que implica que $D(A^n) \not\subset \overline{R(A)}$.

(v) Mostremos inicialmente que A é $\sigma(X, X^*)$ -fechado. Como $\text{Graf}(A)$ é um subconjunto fechado e convexo (pois A é operador linear) de $X \times X$ segue do item (i) do Lema 1.6 que $\text{Graf}(A) = \overline{\text{Graf}(A)}^{\sigma(X, X^*)}$, ou seja, A é $\sigma(X, X^*)$ -fechado.

Suponhamos que X seja reflexivo e $R(A)$ seja denso. Mostremos que A é densamente definido e injetor. A injetividade já foi mostrada no item (ii) deste resultado. Para a densidade considere $\phi \in X$; Uma vez que a sequência $(n(n + A)^{-1}\phi)$ é limitada, o item (ii) do Lema 1.6 garante a existência de

uma subsequência $(n_j(n_j + A)^{-1}\phi)$ que converge na topologia $\sigma(X, X^*)$ para um elemento $\psi \in X$. Assim,

$$A(n_j + A)^{-1}\phi = \phi - n_j(n_j + A)^{-1}\phi \rightharpoonup \phi - \psi,$$

e além disso, como $\|(n_j + A)^{-1}\phi\| \leq \frac{M}{n_j}\|\phi\| \rightarrow 0$, segue que $(n_j + A)^{-1}\phi \rightarrow 0$, e então, como A é $\sigma(X, X^*)$ -fechado, temos $A(n_j + A)^{-1}\phi \rightarrow 0$, ou seja $\phi - \psi = 0$. Logo, $\phi \in \overline{D(A)}^{\sigma(X, X^*)}$ e então pelo ítem (i) do Lema 1.6, $\overline{D(A)} = \overline{D(A)}^{\sigma(X, X^*)}$, ou seja, $\phi \in \overline{D(A)}$. Portanto $\overline{D(A)} = X$.

Reciprocamente, suponha X reflexivo, densamente definido e injetor. Vamos mostrar que $R(A)$ é denso. De fato, como A é injetor a Proposição 1.4 garante que A^{-1} é não negativo, o que implica que $\overline{D(A^{-1})} = X$, ou seja, $\overline{R(A)} = X$. $\square$

A seguir definimos a *parte* de um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ em um subespaço vetorial $Y \subset X$.

Definição 1.8. *Sejam $Y \subset X$ um subespaço vetorial e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Define $A_Y : D(A_Y) \subset Y \rightarrow Y$ por $A_Y\phi = A\phi$, $\forall \phi \in D(A_Y)$, onde*

$$D(A_Y) = \{\phi \in D(A) \cap Y : A\phi \in Y\}.$$

A_Y é chamado *parte de A em Y* .

O Lema a seguir estabelece uma condição para que a *parte* de um operador não negativo A seja não negativo. Seu enunciado pode ser encontrado, sem a demonstração, em ([4], p.5).

Lema 1.9. *Se Y é fechado em X e A é não negativo, então A_Y é não negativo se, e somente se, $(\lambda + A)^{-1}(Y) \subset Y$*

Demonstração. Suponhamos que A_Y é não negativo, então, por definição, $(0, +\infty) \subset \rho(A_Y)$. Assim, pela Proposição A.21, $(\lambda + A_Y)^{-1}\phi \in D(A_Y) \subset Y$, pra todo $\phi \in Y$, ou seja, $(\lambda + A_Y)^{-1}(Y) \subset Y$. Como $(\lambda + A)^{-1}(\lambda + A_Y)\phi = \phi$, $\forall \phi \in D(A_Y)$, segue que $(\lambda + A_Y)^{-1}(Y) = (\lambda + A)^{-1}(Y)$. Logo $(\lambda + A)^{-1}(Y) \subset Y$.

Reciprocamente, suponha que $(\lambda + A_Y)^{-1}(Y) \subset Y$ e vamos mostrar que $A_Y : D(A_Y) \subset Y \rightarrow Y$ é não negativo. Primeiramente, mostremos que A_Y é fechado. De fato, seja (x_n) uma sequência em $D(A_Y)$ tal que $x_n \rightarrow x \in Y$ e $A_Y x_n \rightarrow y$ em Y . Como A é fechado e $(x_n) \subset D(A)$, então $x \in D(A) \cap Y$ e $Ax = y \in Y$. Logo, da definição de $D(A_Y)$, $x \in D(A_Y)$, o que implica que A_Y é fechado.

Então, para todo $\lambda > 0$, o operador $(\lambda + A_Y)^{-1} : Y \rightarrow Y$ é fechado, pois $\lambda + A_Y$ o é. Portanto, segue do Teorema do Gráfico Fechado que $(\lambda + A_Y)^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$, ou seja, $(0, +\infty) \subset \rho(A_Y)$. Além disso

$$\|\lambda(\lambda + A_Y)^{-1}\phi\|_Y = \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\phi\|_X \leq M\|\phi\|_X = M\|\phi\|_Y,$$

ou seja, $\|\lambda(\lambda + A_Y)^{-1}\|_Y \leq M$ e por consequência $\sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A_Y)^{-1}\|_Y \leq M$, que era o que faltava para concluirmos que A_Y é não negativo. $\square$

Proposição 1.10 ([4], p. 6). *Sejam A um operador não negativo e A_D , A_R e A_0 as partes de A nos subespaços $X_D = \overline{D(A)}$, $X_R = \overline{R(A)}$ e $X_0 = \overline{D(A) \cap R(A)}$. Então esses operadores são não negativos e*

- (i) A_D tem domínio denso em X_D ;
- (ii) A_R tem imagem densa em X_R ;
- (iii) A_0 tem domínio e imagem densos em X_0 .

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar a não negatividade dos operadores. Observe que valem as inclusões $(\lambda + A)^{-1}(D(A)) \subset D(A)$, $(\lambda + A)^{-1}(R(A)) \subset R(A)$ e $(\lambda + A)^{-1}(D(A) \cap R(A)) \subset D(A) \cap R(A)$. A primeira segue da Proposição A.24. Para a segunda, seja $\psi \in R(A)$, então, existe $\phi \in D(A)$ tal que $A\phi = \psi$, assim, $(\lambda + A)^{-1}\psi = (\lambda + A)^{-1}A\phi = A(\lambda + A)^{-1}\phi \in R(A)$. A terceira segue imediatamente das anteriores.

Agora, como $(\lambda + A)^{-1}$ é limitado, podemos estendê-lo continuamente para $\overline{D(A)}$, $\overline{R(A)}$ e $\overline{D(A) \cap R(A)}$. Assim irão valer as inclusões $(\lambda + A)^{-1}(\overline{D(A)}) \subset \overline{D(A)}$, $(\lambda + A)^{-1}(\overline{R(A)}) \subset \overline{R(A)}$ e $(\lambda + A)^{-1}(\overline{D(A) \cap R(A)}) \subset \overline{D(A) \cap R(A)}$.

Logo, do Lema 1.9 segue que A_D , A_R , A_0 são não negativos.

(i) Considere o operador $A_D : D(A_D) \subset X_D \rightarrow X_D$. Como $(0, +\infty) \subset \rho(A_D)$, segue que se $\phi \in \overline{D(A)}$, então $(\lambda + A)^{-1}\phi \in D(A_D)$. Além disso, pela Proposição 1.5, temos $\phi = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda + A)^{-1}\phi$. Segue que $\phi \in \overline{D(A_D)}$. Logo $X_D = \overline{D(A_D)}$, ou seja, A_D é densamente definido.

(ii) Considere agora o operador $A_R : D(A_R) \subset X_R \rightarrow X_R$. Sabemos que A_R é não negativo, e por isso $(0, \infty) \subset \rho(A_R)$. Então para todo $\phi \in \overline{R(A)}$, temos $(\lambda + A)^{-1}\phi \in D(A_R)$, o que implica $A(\lambda + A)^{-1}\phi \in R(A_R)$. Temos pela Proposição $\phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda + A)^{-1}\phi$, i.e., $\phi \in \overline{R(A_R)}$. Portanto $X_R = \overline{R(A_R)}$.

(iii) Já sabemos que $\overline{D(A_0)}$, $\overline{R(A_0)} \subset X_0$. Resta mostrar as inclusões contrárias. Para isso observe primeiramente que $D(A^2) \cap R(A) \subset D(A_0)$. De fato, seja $\phi \in D(A^2) \cap R(A)$, então, $\phi \in D(A)$ e $\phi \in R(A)$, assim, $\phi \in X_0 \cap D(A)$. Agora, como $\phi \in D(A^2)$, segue que $A\phi \in D(A)$, ou seja, $A\phi \in D(A) \cap R(A) \subset X_0$. Portanto, por definição, $\phi \in D(A_0)$.

Além disso, $D(A) \cap R(A^2) \subset R(A_0)$. De fato, se $\phi \in D(A) \cap R(A^2)$ então $\phi = A^2\psi$ (para algum $\psi \in D(A)$) e $\phi \in D(A)$, assim $A\psi \in D(A) \cap R(A)$ e $A(A\psi) \in D(A) \cap R(A)$, o que implica que $A\psi \in D(A_0)$ e $A^2\psi = \phi \in R(A_0)$, o que mostra a inclusão.

Finalmente, pelo item (iii) da Proposição 1.5 segue que $\overline{D(A) \cap R(A)} = \overline{D(A^2) \cap R(A)}$ e $\overline{D(A) \cap R(A)} = \overline{D(A) \cap R(A^2)}$.

Portanto, $\overline{D(A) \cap R(A)} \subset \overline{D(A_0)}$ e $\overline{D(A) \cap R(A)} \subset \overline{R(A_0)}$, o que implica que o domínio e a imagem de A_0 são densos em X_0 . $\square$

O Corolário a seguir diz respeito ao Corolário 1.7 e à Proposição anterior.

Corolário 1.11 ([4], p.6). $\ker A^n = \ker A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Já sabemos $\ker A \subset \ker A^n$. Vamos mostrar a inclusão contrária. Seja $\phi \in \ker A^n$, $n > 1$, então $\phi \in D(A^n)$ e $A^n\phi = 0$. No entanto, se $\phi \in D(A^n)$, então $A^{n-1}\phi \in D(A) \cap R(A) \subset D(A_R)$

e A_R tem imagem densa em X_R , pela Proposição anterior, logo pelo Corolário 1.7, A_R é injetora, donde $A^{n-1}\phi = 0$. Repetindo este argumento $n - 1$ vezes obtemos $A^n\phi = A^{n-1}\phi = \dots = A\phi = 0$. Portanto, $\phi \in \ker A$. $\square$

Nas próximas seções nos dedicaremos a estudar exemplos de operadores não negativos. No que segue trataremos de uma classe de operadores não negativos cujas muitas propriedades a torna importante para o estudo de Equações Diferenciais Parciais.

1.1 Operadores Setoriais

Definição 1.12. Um operador fechado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é chamado de operador setorial do tipo ω , com $\omega \in (0, \pi)$, se

- (i) $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$ onde $S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\}$;
- (ii) para todo $\omega' \in (\omega, \pi)$,

$$\sup \{\|z(z - A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}\} < \infty.$$

A classe de operadores setoriais é, quase que por definição, uma subclasse dos operadores não negativos. Para garantirmos isso, seja A um operador setorial do tipo ω e vamos mostrar que A é não negativo.

Precisamos mostrar que A é fechado (o que já segue por definição), $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$ e que $\sup_{\lambda > 0} \{\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|\} < \infty$.

Seja $z \in (-\infty, 0)$, então, $\arg(z) = -\pi$ o que implica que $z \notin \overline{S_\omega}$, ou seja, $z \notin \sigma(A)$, assim, $z \in \rho(A)$, logo, $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$.

Agora seja $\lambda > 0$, então $-\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}$ para todo $\omega' \in (\omega, \pi)$. E ainda

$$\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| = \|-\lambda(-\lambda - A)^{-1}\| \leq \sup \{\|z(z - A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}\} < \infty,$$

logo, $\sup_{\lambda > 0} \{\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|\} < \infty$.

Portanto, A é não negativo.

Usaremos a notação $\mathbb{S}_\omega(X)$ para representar o conjunto de operadores setoriais do tipo ω definidos em X e então

$$\mathbb{S}(X) = \bigcup_{\omega \in (0, \pi)} \mathbb{S}_\omega(X)$$

será usado para denotar o conjunto de todos os operadores setoriais definidos em X .

Além disso, se $A \in \mathbb{S}(X)$ então o número $\omega_A := \inf\{\omega \in (0, \pi) : A \in \mathbb{S}_\omega(X)\}$ será chamado de ângulo espectral de A e $\mathbb{S}(X, \omega)$ será o conjunto de todos os operadores setoriais cujo ângulo espectral é igual a ω .

Os quatro Lemas a seguir trazem algumas operações que preservam a setorialidade de um operador.

Em ([4], p. 7) o autor comenta a respeito deles, mas as demonstrações que vem a seguir foram feitas por nós.

Lema 1.13. *Se $A \in \mathbb{S}_\omega(X)$ então $A + \lambda \in \mathbb{S}_\omega(X)$, $\forall \lambda > 0$.*

Demonstração. Primeiramente observe que $A + \lambda$ é fechado uma vez que A o é. Note ainda que $\eta \in \rho(A)$ é equivalente $(\eta - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ ou ainda $[\eta + \lambda - (A + \lambda)]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Ou seja,

$$\eta \in \rho(A) \iff \eta + \lambda \in \rho(A + \lambda)$$

o que é equivalente a dizer também que

$$\eta \in \sigma(A) \iff \eta + \lambda \in \sigma(A + \lambda),$$

logo, $\sigma(A + \lambda)$ é o mesmo que $\sigma(A)$ transladado de $\lambda > 0$. Portanto, se $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$ segue que $\sigma(A + \lambda) \subset \overline{S_\omega}$.

Agora sejam $\omega' \in (\omega, \pi)$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}$ e vamos mostrar que

$$\sup \{ \|z[z - (A + \lambda)]^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}} \} < \infty.$$

De fato,

$$\|z(z - (\lambda + A))^{-1}\| = \left| \frac{z}{z - \lambda} \right| \|(z - \lambda)(z - \lambda + A)^{-1}\|.$$

Agora, note que

$$\sup \left\{ \left| \frac{z}{z - \lambda} \right| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}} \right\} < \infty,$$

pois, se não fosse existiria uma sequência $z_n \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}$ tal que $z_n \rightarrow \lambda$, o que é absurdo, já que $\lambda > 0$ é um ponto interior de $S_{\omega'}$. Além disso, como $\lambda > 0$ é real segue que $z - \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}$ o que implica que

$$\sup \{ \|(z - \lambda)(z - \lambda + A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}} \} < \infty.$$

Essas informações eram as que precisávamos para concluir que

$$\sup \{ \|z(z - (\lambda + A))^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}} \} < \infty.$$

Portanto, $A + \lambda$ é setorial do tipo ω . □

Lema 1.14. *Se $A \in \mathbb{S}_\omega(X)$ e é injetor, então $A^{-1} \in \mathbb{S}_\omega(X)$.*

Demonstração. Como A é fechado e injetor segue que A^{-1} é fechado. Sabemos ainda que $\lambda(\lambda +$

$A^{-1})^{-1} = A(\lambda^{-1} + A)^{-1}$, para todo $\lambda > 0$, então,

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(A) &\implies A(\lambda + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \implies \lambda^{-1}(\lambda^{-1} + A^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(X) \\ &\implies (\lambda^{-1} + A^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(X) \implies \lambda^{-1} \in \rho(A^{-1}). \end{aligned}$$

Além disso, como $\lambda > 0$, $\arg \lambda = \arg \lambda^{-1}$ o que implica que $\sigma(A^{-1}) \subset \overline{S_\omega}$.

Agora, observe que $z(z + A^{-1})^{-1} = 1 - A^{-1}(z + A^{-1})^{-1} = 1 - z^{-1}(z^{-1} + A)^{-1}$, assim

$$\begin{aligned} \sup\{\|z(z - A^{-1})^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus S_{\omega'}\} &= \sup\{\|1 - z^{-1}(z^{-1} + A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus S_{\omega'}\} \\ &\leq \sup\{\|1\| : z \in \mathbb{C} \setminus S_{\omega'}\} + \sup\{\|z^{-1}(z^{-1} + A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus S_{\omega'}\} \\ &< \infty, \quad \omega' \in (\omega, \pi). \end{aligned}$$

Portanto, A^{-1} é setorial do tipo ω . □

Lema 1.15. *Se $A \in \mathbb{S}_\omega(X)$ e é densamente definido, então $A^* \in \mathbb{S}_\omega(X^*)$*

Demonstração. Como A é densamente definido, segue que A^* é fechado. De fato seja $\phi_n \in D(A^*)$ tal que $\phi_n \rightarrow \phi$ e $A^*\phi_n \rightarrow \psi$, assim, para todo $\varphi \in D(A)$ temos

$$\begin{aligned} (A^*\phi, \varphi) &= (\phi, A\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n, A\varphi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A^*\phi_n, \varphi) = (\psi, \varphi), \end{aligned}$$

logo, $\phi \in D(A^*)$ e $A^*\phi = \psi$.

Agora, seja $z \in \rho(A)$, então, $(z - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, assim $[(z - A)^{-1}]^* = (\bar{z} - A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*)$. Logo $\sigma(A^*) \subset \{\bar{z} : z \in \sigma(A)\}$, o que implica que $\sigma(A^*) \subset \overline{S_\omega}$.

Considere agora $\omega' \in (\omega, \pi)$ e suponha $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}$, assim, como $|z| = |\bar{z}|$ temos,

$$\begin{aligned} \|z(z - A^*)^{-1}\| &= \|\bar{z}[(\bar{z} - A^*)^{-1}]\| = \|\bar{z}[(\bar{z} - A)^{-1}]^*\| \\ &= \|\bar{z}(\bar{z} - A)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup\{\|z(z - A^*)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}\} = \sup\{\|\bar{z}(\bar{z} - A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}\} < \infty.$$

Portanto, A^* é setorial do tipo ω . □

Lema 1.16. *Se $A \in \mathbb{S}_\omega(X)$ e $U \in \mathcal{L}(X)$ é bijetor, então $B = U^{-1}AU \in \mathbb{S}_\omega(X)$.*

Demonstração. Como $U \in \mathcal{L}(X)$ e bijetor segue que $R(U)$ é fechado em X e portanto, do Teorema do Gráfico Fechado segue que $U^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Além disso, como A é fechado, segue que B é fechado. Vamos mostrar que $\sigma(A) = \sigma(B)$.

De fato, dizer que $\xi \in \rho(A)$ é equivalente a dizer que $(\xi - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, ou ainda, como $U, U^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, $U^{-1}(\xi - A)^{-1}U \in \mathcal{L}(X)$. Mas, observe que

$$\begin{aligned} U^{-1}(\xi - A)^{-1}U &= [U^{-1}(\xi - A)U]^{-1} = [U^{-1}\xi U - U^{-1}AU]^{-1} \\ &= (\xi - U^{-1}AU)^{-1} = (\xi - B)^{-1}, \end{aligned}$$

assim, $\xi \in \rho(A)$ é equivalente a $\xi \in \rho(B)$, logo, $\rho(A) = \rho(B)$, o que implica $\sigma(B) \subset \overline{S_\omega}$.

Agora, seja $z \in \rho(B)$ e observe que

$$\begin{aligned} \|z(z - B)^{-1}\| &= \|z(z - U^{-1}AU)^{-1}\| = \|z[U^{-1}(z - A)U]^{-1}\| \\ &= \|zU(z - A)^{-1}U^{-1}\| = \|U[z(z - A)^{-1}]U^{-1}\| \\ &\leq \|z(z - A)^{-1}\|, \end{aligned}$$

assim, para $\omega' \in (\omega, \pi)$ temos

$$\sup\{\|z(z - B)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus S_{\omega'}\} < \infty, \quad \omega' \in (\omega, \pi).$$

Portanto, $B \in \mathbb{S}_\omega(X)$ □

Já mostramos que todo operador setorial é não negativo. Na Proposição a seguir mostraremos que a recíproca também é verdadeira. Trouxemos aqui, com todos os detalhes, a demonstração encontrada em ([4], p. 7).

Proposição 1.17. *Seja $A \in \mathcal{M}(X)$ com constante de não-negatividade M . Se $\delta = \arcsin(\frac{1}{M})$, então $A \in \mathbb{S}(X)$ e $\omega_A \leq \pi - \delta$.*

Demonstração. Seja $\delta' > \delta$ tal que $|\delta' - \delta| < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ pequeno. Vamos mostrar primeiramente que $\sigma(A) \subset \overline{S_{\pi-\delta'}}$.

De fato, considere $z \notin \overline{S_{\pi-\delta'}}$. Represente z pela fórmula de Euler $z = |z|e^{i\theta}$ e tome $\mu = -\frac{|z|}{\cos \theta}$.

Lembremos que a função $\sin(x)$ é bijetiva quando tem domínio em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e imagem em $[-1, 1]$, logo, a função $\arcsin(x)$ está bem definida com domínio $[-1, 1]$ e imagem em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Como M é sempre positivo e maior do que ou igual a 1, nesse caso em específico estamos considerando a função $\arcsin(x)$ definida com domínio $(0, 1]$ e imagem $(0, \frac{\pi}{2}]$, o que implica que $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ e, em consequência disso, $\frac{\pi}{2} < \pi - \delta' < \pi$. Assim, se $z \notin \overline{S_{\pi-\delta'}}$ então $\theta = \arg z$ é tal que $\frac{\pi}{2} < \pi - \delta' < \theta \leq \pi$, logo, $\cos \theta < 0$ e então $\mu = -\frac{|z|}{\cos \theta} > 0$.

Agora, como $A \in \mathcal{M}(X)$ segue que $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$, assim, $0 \in \rho(\mu + A)$ e ainda $\|\mu(\mu + A)^{-1}\| \leq M$.

Note agora que

$$\begin{aligned}
\frac{|\mu + z|}{\mu} &= \left| \frac{-\frac{|z|}{\cos \theta} + |z|e^{i\theta}}{-\frac{|z|}{\cos \theta}} \right| = |1 - (\cos \theta + i \sin \theta) \cos \theta| \\
&= |1 - (\cos^2 \theta + i \sin \theta \cos \theta)| = |1 - \cos^2 \theta - i \sin \theta \cos \theta| \\
&= |\sin^2 \theta - i \sin \theta \cos \theta| = \sqrt{\sin^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\
&= \sqrt{\sin^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \sqrt{\sin^2 \theta} \\
&= |\sin \theta| = \sin \theta, \text{ pois } \sin \theta > 0.
\end{aligned}$$

Em posse dessa informação, do fato de que $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$, o que implica que $\sin \theta < \sin \delta$ temos

$$\begin{aligned}
\|(\mu + z)(\mu + A)^{-1}\| &= \frac{|\mu + z|}{\mu} \|\mu(\mu + A)^{-1}\| \leq M \sin \theta \\
&< M \sin \delta = M \sin \left(\arcsin \left(\frac{1}{M} \right) \right) = M \cdot \frac{1}{M} = 1,
\end{aligned}$$

então, pela Proposição A.15 a série de Neumann

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu + z)^n [(\mu + A)^{-1}]^n,$$

converge em $\mathcal{L}(X)$ para $[1 - (\mu + z)(\mu + A)^{-1}]^{-1}$.

Multiplicando a série de Neumann acima pelo operador limitado $-(\mu + A)^{-1}$ temos uma nova série

$$\sum_{n=0}^{\infty} -(\mu + z)^n [(\mu + A)^{-1}]^{n+1},$$

que continua convergente em $\mathcal{L}(X)$ com o acréscimo de que agora o limite é a inversa de $z - A$. De fato,

$$\begin{aligned}
-(\mu + A)^{-1}[1 - (\mu + z)(\mu + A)^{-1}]^{-1} &= -\{(\mu + A)[1 - (\mu + z)(\mu + A)^{-1}]\}^{-1} \\
&= -[(\mu + A) - (\mu + z)]^{-1} = -(z - A)^{-1} = (z - A)^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $(z - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, o que garante que $z \in \rho(A)$, logo, $(\overline{S_{\pi-\delta'}})^c \subset \rho(A)$, ou seja, $\sigma(A) \subset \overline{S_{\pi-\delta'}}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|z(z - A)^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} -z(\mu + z)^n [(\mu + A)^{-1}]^{n+1} \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} [(\mu + z)(\mu + A)^{-1}]^n \right\| \|z(\mu + A)^{-1}\| \\
&\leq \left[\sum_{n=0}^{\infty} (M \sin \theta)^n \right] \left| \frac{z}{\mu} \right| \|\mu(\mu + A)^{-1}\| \\
&\leq \frac{1}{1 - M \sin \theta} \left| \frac{|z|}{-\frac{|z|}{\cos \theta}} \right| M \\
&= \frac{M}{1 - M \sin \theta} |\cos \theta| \leq \frac{M}{1 - M \sin \theta}.
\end{aligned}$$

Agora, lembrando que $\frac{\pi}{2} < \pi - \delta' < \theta \leq \pi$ e que a função $\sin(x)$ é decrescente em $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ temos

$$\sin \theta < \sin(\pi - \delta') = \sin \pi \cos \delta' - \sin \delta' \cos \pi = \sin \delta' = \sin(\delta - \varepsilon),$$

assim,

$$\|z(z - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 - M \sin \theta} \leq \frac{M}{1 - M \sin(\arcsin(\frac{1}{M}) - \varepsilon)},$$

logo,

$$\sup\{\|z(z - A)^{-1}\|; z \notin \overline{S_{\pi - \delta'}}\} < \infty,$$

o que implica que A é setorial do tipo $\pi - \delta' = \pi - \delta + \varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ segue que $\omega_A \leq \pi - \delta$.

Portanto, $A \in \mathcal{S}(X)$ e $\omega_A \leq \pi - \delta$. □

Na demonstração da Proposição anterior, observe que se olharmos δ como uma função na variável M , ou seja, $\delta = \delta(M)$, δ é decrescente, logo, $\pi - \delta$ é crescente. Além disso, se $M = 1$, $\omega_A \leq \frac{\pi}{2}$.

A proposição a seguir nos fornece uma condição necessária e suficiente para que um operador seja setorial do tipo ω quando já sabemos de antemão que $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$. Isso mostra que a limitação uniforme exigida no conceito de setorialidade pode ser reduzida a limitação uniforme sobre cada raio exterior a $\overline{S_\omega}$ que começa na origem. Sendo assim, podemos verificar a setorialidade de operadores de uma maneira mais fácil. A demonstração a seguir pode ser encontrada, sem muitos detalhes, em ([4], p. 8).

Proposição 1.18. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado tal que $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$ com $0 < \omega < \pi$.*

Então A é setorial do tipo ω se, e somente se, para todo θ tal que $\omega < |\theta| \leq \pi$,

$$M(\theta) = \sup_{\lambda > 0} \{\|\lambda(\lambda e^{i\theta} - A)^{-1}\|\} < \infty.$$

Demonstração. Suponha que A é setorial do tipo ω e sejam θ tal que $\omega < |\theta| \leq \pi$ e $\omega' \in (\omega, \pi)$ tal

que $\omega < \omega' < |\theta|$, assim, $\lambda e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}$ para todo $\lambda > 0$. logo, por definição segue que

$$\begin{aligned} M(\theta) &= \sup_{\lambda > 0} \{ \|\lambda(\lambda e^{i\theta} - A)^{-1}\| \} \\ &= \sup_{\lambda > 0} \{ \|\lambda e^{i\theta}(\lambda e^{i\theta} - A)^{-1}\| \} < \infty. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha $M(\theta) = \sup_{\lambda > 0} \{ \|\lambda(\lambda e^{i\theta} - A)^{-1}\| \} < \infty$ para todo θ tal que $\omega < |\theta| \leq \pi$ e vamos mostrar que A é setorial do tipo ω .

Primeiramente vamos verificar que $M = M(\theta)$ é uma função contínua.

Sejam θ_0 tal que $\omega < \theta_0 \leq \pi$ e $R_\lambda(\theta) = (\lambda e^{i\theta} - A)^{-1}$. Pela Identidade do Resolvente, temos

$$R_\lambda(\theta) - R_\lambda(\theta_0) = (\lambda e^{i\theta_0} - \lambda e^{i\theta})R_\lambda(\theta)R_\lambda(\theta_0).$$

Multiplicando por $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lambda R_\lambda(\theta) &= \lambda R_\lambda(\theta_0) + \lambda R_\lambda(\theta_0)(e^{i\theta_0} - e^{i\theta})\lambda R_\lambda(\theta), \\ &= \lambda R_\lambda(\theta_0)[1 + (e^{i\theta_0} - e^{i\theta})\lambda R_\lambda(\theta)]. \end{aligned}$$

Tomando a norma, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda R_\lambda(\theta)\| &= \|\lambda R_\lambda(\theta_0)[1 + (e^{i\theta_0} - e^{i\theta})\lambda R_\lambda(\theta)]\| \\ &\leq M(\theta_0)(1 + |e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|M(\theta)) \\ &= M(\theta_0) + M(\theta_0)|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|M(\theta). \end{aligned}$$

Tomando o supremo em $\lambda > 0$, obtemos

$$M(\theta) \leq M(\theta_0) + M(\theta_0)|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|M(\theta),$$

ou ainda,

$$M(\theta) \leq \frac{M(\theta_0)}{1 - M(\theta_0)|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|}.$$

Agora, lembrando da conhecida identidade trigonométrica

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

temos

$$\begin{aligned}
 |e^{i\theta} - e^{i\theta_0}|^2 &= (\cos \theta - \cos \theta_0)^2 + (\sin \theta - \sin \theta_0)^2 \\
 &= \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cos \theta_0 + \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \sin \theta_0 + \sin^2 \theta_0 \\
 &= 2 - 2 \cos(\theta - \theta_0) = 4 \left(\frac{1 - \cos(\theta - \theta_0)}{2} \right) \\
 &= 4 \sin^2 \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| = 2 \left| \sin \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \right|.$$

Como estamos verificando continuidade, podemos supor $\left| \frac{\theta - \theta_0}{2} \right| < \pi/2$, assim

$$|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| = 2 \sin \frac{|\theta - \theta_0|}{2} \leq 2 \frac{|\theta - \theta_0|}{2} = |\theta - \theta_0|.$$

Logo,

$$M(\theta) \leq \frac{M(\theta_0)}{1 - |\theta - \theta_0| M(\theta_0)}. \quad (1.7)$$

Subtraindo M_0 , obtemos

$$\begin{aligned}
 M(\theta) - M(\theta_0) &\leq \frac{M(\theta_0)}{1 - |\theta - \theta_0| M(\theta_0)} - M(\theta_0) \\
 &= \frac{M_0^2 |\theta - \theta_0|}{1 - |\theta - \theta_0| M_0}.
 \end{aligned}$$

Agora, reescrevendo a identidade do resolvente da forma

$$R_\lambda(\theta_0) = R_\lambda(\theta) [1 + (e^{i\theta_0} - e^{i\theta}) \lambda R_\lambda(\theta_0)]$$

e seguindo praticamente o mesmo raciocínio, obtemos

$$M(\theta_0) \leq \frac{M(\theta)}{1 - |\theta - \theta_0| M(\theta)},$$

ou ainda,

$$M(\theta_0) - M(\theta) \leq M(\theta) |\theta - \theta_0| M(\theta_0),$$

e então, usando 1.7, temos

$$\begin{aligned} M(\theta_0) - M(\theta) &\leq M(\theta)|\theta - \theta_0|M(\theta_0) \\ &\leq \frac{M(\theta_0)}{1 - |\theta - \theta_0|M(\theta_0)}|\theta - \theta_0|M(\theta_0) \\ &= \frac{M(\theta_0)^2|\theta - \theta_0|}{1 - |\theta - \theta_0|M(\theta_0)}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$|M(\theta) - M(\theta_0)| \leq \frac{M(\theta_0)^2|\theta - \theta_0|}{1 - |\theta - \theta_0|M(\theta_0)}.$$

Assim, fazendo $\theta \rightarrow \theta_0$, obtemos $M(\theta) \rightarrow M(\theta_0)$, o que mostra que $M(\theta)$ é contínua uma vez que θ_0 é arbitrário.

Finalmente, seja $\omega' \in (\omega, \pi)$. Como $M(\theta)$ é contínua em θ para $\omega < |\theta| \leq \pi$, segue que $M(\theta)$ assume valor máximo em $\{\theta : \omega' \leq |\theta| \leq \pi\}$, ou seja,

$$\sup\{\|z(z - A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}\} < \infty.$$

Portanto, A é setorial do tipo ω . □

O Teorema A.37 estabelece uma relação entre operadores densamente definidos cujo ângulo espectral é menor que $\frac{\pi}{2}$ e o negativo de geradores infinitesimais de semigrupos analíticos equilimitados. Esse critério pode ser mais facilmente usado do que o Teorema de Hille-Yosida (Teorema A.34) quando queremos caracterizar tais geradores.

Na próxima seção vamos introduzir uma nova classe de operadores não negativos muito úteis para o estudo de Equações Diferenciais Parciais pois é característica intrínseca de uma classe de operadores que descrevem fenômenos da natureza. Esta classe de operadores também será útil para caracterizarmos o domínio do operador potência fracionária na última parte deste trabalho.

1.2 Operadores m-acretivos

Considere o operador

$$A : D(A) \subset X \rightarrow X$$

onde X é um espaço de Hilbert.

Dizemos que A é **acretivo** se para todo $\phi \in D(A)$, $\operatorname{Re}\langle \phi, A\phi \rangle \geq 0$. Se, além disso, $R(\lambda + A) = X$ para algum λ real positivo, dizemos que A é **maximal acretivo** ou simplesmente **m-acretivo**. Fora de technicalidades, A é um operador maximal acretivo no sentido de que não admite nenhuma extensão acretiva própria.

Muitas vezes na literatura encontramos os termos **dissipativo** e **maximal dissipativo**, por isso faz sentido a definição seguinte.

Definição 1.19. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, X espaço de Hilbert. Dizemos que A*

é dissipativo (resp. maximal dissipativo) se $-A$ é acretivo (resp. maximal acretivo).

Com o interesse em estender o conceito de operador m-acretivo para um espaço de Banach X , definimos, para cada $\phi \in X$, o **conjunto de dualidade** $F(\phi)$ por

$$F(\phi) = \{\phi^* \in X' : \langle \phi^*, \phi \rangle = \|\phi\|^2 = \|\phi^*\|^2\}.$$

Este conjunto goza de algumas propriedades quase imediatas, que são contempladas na Proposição a seguir e que foram demonstradas seguindo os comentários feitos em ([4], p. 9).

Proposição 1.20. (i) $F(\phi) \neq \emptyset$.

(ii) $F(\phi)$ é convexo.

(iii) Se X for um espaço de Hilbert, $F(\phi)$ possui um único elemento ao qual denotamos $\bar{\phi}$, isto é, $F(\phi) = \{\bar{\phi}\}$.

Demonstração. (i) Segue diretamente do Corolário A.12.

(ii) Sejam $\xi, \psi \in F(\phi)$ e $t \in [0, 1]$. Então, para $\varphi = (1-t)\xi + t\psi$, temos,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \phi \rangle &= \langle (1-t)\xi + t\psi, \phi \rangle \\ &= (1-t)\langle \xi, \phi \rangle + t\langle \psi, \phi \rangle \\ &= (1-t)\|\phi\|^2 + t\|\phi\|^2 \\ &= \|\phi\|^2 = \|\phi^*\|^2, \end{aligned}$$

logo, $\varphi \in F(\phi)$. Portanto $F(\phi)$ é convexo.

(iii) Suponhamos que existam $\psi, \xi \in F(\phi)$. Da definição e convexidade de $F(\phi)$ temos $\|\psi\| = \|\xi\| = \left\| \frac{\psi + \xi}{2} \right\|$. Logo, como X é espaço de Hilbert, pelo Teorema A.8, X é estritamente convexo e, portanto, $\psi = \xi$. $\square$

Observe que no terceiro item da Proposição 1.20 não utilizamos propriedades específicas dos espaços de Hilbert, mas apenas sua convexidade estrita. É interessante pontuar, então, que este resultado vale também espaços estritamente convexos e uniformemente convexos no geral.

Um exemplo deste fato são os espaços L^p , $1 < p < \infty$. Sabemos que para $p \neq 2$ o espaço L^p não é de Hilbert, mas é um espaço de Banach estritamente convexo e, portanto, dado $f \in L^p$, o conjunto de dualidade $F(f)$ também é unitário.

Generalizando, dado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ onde X é um espaço de Banach, dizemos que A é acretivo se para cada $\phi \in D(A)$ com $\|\phi\| = 1$, existe $\phi^* \in F(\phi)$ tal que

$$\operatorname{Re} \langle \phi^*, A\phi \rangle \geq 0.$$

Se, além disso, $R(\lambda + A) = X$ para algum λ real positivo, dizemos que A é m-acretivo.

A seguir definimos **imagem numérica**, um conceito bastante utilizado em análise espectral, como veremos brevemente nos resultados seguintes.

Definição 1.21. Dado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, a imagem numérica de A é dada por

$$W(A) = \{ \langle \phi^*, A\phi \rangle, \phi \in D(A), \|\phi\| = 1, \phi^* \in F(\phi) \}.$$

Proposição 1.22 ([4], p. 9 e 10). *Seja A um operador fechado e $T = \mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$. Se $\lambda \in T$, então $\lambda - A$ é injetivo e tem imagem fechada. Além disso, se T_0 é um subconjunto conexo de T tal que $\rho(A) \cap T_0 \neq \emptyset$, então $T_0 \subset \rho(A)$ e para todo $\lambda \in T_0$,*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, \overline{W(A)})}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in T$ fixo. Para $\phi \in D(A)$, $\|\phi\| = 1$ e $\phi^* \in F(\phi)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &< d(\lambda, \overline{W(A)}) \leq |\lambda - \langle \phi^*, A\phi \rangle| \\ &= |\lambda \langle \phi^*, \phi \rangle - \langle \phi^*, A\phi \rangle| = |\langle \phi^*, (\lambda - A)\phi \rangle| \\ &\leq \|\phi^*\| \|(\lambda - A)\phi\| = \|(\lambda - A)\phi\|, \end{aligned}$$

assim, $\|(\lambda - A)\phi\| > 0$ para todo $\phi \in D(A)$, $\|\phi\| = 1$. Logo, $\lambda - A$ é injetivo, pois, dado $\phi \in D(A)$, se $\phi \neq 0$ segue que $\|(\lambda - A)\phi\| = \|\phi\| \left\| (\lambda - A) \frac{\phi}{\|\phi\|} \right\| > 0$. Além disso, $\left\| (\lambda - A) \frac{\phi}{\|\phi\|} \right\| \geq d(\lambda, \overline{W(A)})$, para todo $\phi \in D(A)$, assim, $\|(\lambda - A)\phi\| \geq d(\lambda, \overline{W(A)})\|\phi\|$, o que implica que $R(\lambda - A)$ é fechado, como mostraremos a seguir.

Seja $(y_n) \subset R(\lambda - A)$ uma sequência tal que $y_n \rightarrow y$ em X . Note que para cada n existe x_n tal que $y_n = (\lambda - A)x_n$, assim, uma vez que (y_n) é de Cauchy (pois converge) e temos $\|y_n - y_m\| \geq \|(\lambda - A)(x_n - x_m)\| \geq d(\lambda, \overline{W(A)})\|x_n - x_m\|$, segue que $(x_n) \subset D(A)$ é uma sequência de Cauchy que converge para um ponto $x \in X$ e tal que $(\lambda - A)x_n$ converge para $y \in X$, logo, como $\lambda - A$ é fechado segue que $x \in D(A)$ e $y = (\lambda - A)x$, isto é, $y \in R(\lambda - A)$. Portanto, $R(\lambda - A)$ é fechado.

Logo, o operador $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \rightarrow D(A)$ está bem definido e, se $\lambda \in \rho(A)$, é limitado e vale ainda que,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, \overline{W(A)})}.$$

Mostremos agora que $T_0 \subset \rho(A)$. Observe que, como T_0 é conexo e $\rho(A) \cap T_0 \neq \emptyset$, basta mostrar que $\rho(A) \cap T_0$ é fechado em T_0 , pois, assim sendo, uma vez que o resolvente é sempre aberto, $\rho(A) \cap T_0$ é aberto em T_0 e, portanto, aberto e fechado, daí $\rho(A) \cap T_0 = T_0$ donde $T_0 \subset \rho(A)$.

Seja $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\rho(A) \cap T_0$ convergindo para $\lambda \in T_0$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ temos

$$|\lambda - \lambda_n| < \frac{d(\lambda, \overline{W(A)})}{2} < d(\lambda_n, \overline{W(A)})$$

assim, $\|(\lambda_n - \lambda)(\lambda_n - A)^{-1}\| \leq |\lambda_n - \lambda| \|(\lambda_n - A)^{-1}\| < 1$, logo, pela Proposição A.15 segue que $1 - (\lambda_n - \lambda)(\lambda_n - A)^{-1}$ tem inversa limitada. Então, observando que $(\lambda - A) = (\lambda_n - A)[1 - (\lambda_n - \lambda)(\lambda_n - A)^{-1}]$ segue que $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado e portanto $\lambda \in \rho(A)$. Logo $\lambda \in \rho(A) \cap T_0$ e, portanto, $\rho(A) \cap T_0$ é fechado em T_0 , como queríamos. $\square$

Corolário 1.23 ([4], p. 10 e 11). *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ fechado tal que $W(A) \subset \overline{S_\omega}$ para algum $0 < \omega < \pi$, e assuma que $\rho(A) \not\subset \overline{S_\omega}$. Então A é setorial do tipo ω . Em particular A é não negativo. Se $\omega \leq \frac{\pi}{2}$, então sua constante de não-negatividade é igual a 1.*

Demonstração. Mostremos que A é setorial do tipo ω . Seja $T_0 = \mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}$. Segue da Proposição 1.22 que $T_0 \subset \rho(A)$ o que implica que $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$. Como $\mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega+\varepsilon}} \subset T_0$, $0 < \varepsilon < \pi - \omega$, segue que se $z \notin \overline{S_{\omega+\varepsilon}}$,

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \overline{W(A)})} \leq \frac{1}{d(z, \overline{S_\omega})}. \quad (1.8)$$

Agora note que se $|\arg z| - \omega < \frac{\pi}{2}$, então

$$d(z, \overline{S_\omega}) = |z| \sin(\arg z - \omega) > |z| \sin \varepsilon.$$

Agora, se $|\arg z| - \omega \geq \frac{\pi}{2}$, então $d(z, \overline{S_\omega}) = |z|$. Logo, de (1.8) obtemos

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z| \sin \varepsilon}$$

Assim,

$$\sup\{\|z(z - A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega+\varepsilon}}\} \leq \frac{1}{\sin \varepsilon} < \infty$$

e isso implica que A é setorial do tipo ω e $\omega_A \leq \omega$.

Suponhamos agora que $\omega \leq \frac{\pi}{2}$ e que $z < 0$, então,

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \overline{S_\omega})} = \frac{1}{|z|}$$

o que implica que a constante de não-negatividade de A é igual a 1. $\square$

O Teorema a seguir relaciona a não-negatividade de um operador A com sua m -acretividade. Com ele encerramos este capítulo.

Teorema 1.24. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado. Então A é não negativo (e sua constante de não negatividade é igual a 1) se, e somente se, A é m -acretivo.*

Demonstração. Ver [4], p. 11. $\square$

Potências Fracionárias de Operadores

Neste capítulo, o principal do trabalho, vamos estudar a definição e as principais propriedades das potências fracionárias de operadores fechados. Primeiramente, desenvolveremos as ferramentas para tal.

2.1 O Operador de Balakrishnan

Nesta seção, vamos estudar o operador por meio do qual definiremos potência fracionária.

Para isso, fixamos que $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$, X é um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear não-negativo e M é sua constante de não-negatividade.

Definição 2.1. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}_+$. Então,*

(i) *Se $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, $D(J^\alpha) = D(A)$ e para todo $\phi \in D(J^\alpha)$,*

$$J^\alpha \phi = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda.$$

(ii) *Se $\operatorname{Re} \alpha = 1$, $D(J^\alpha) = D(A^2)$ e para todo $\phi \in D(J^\alpha)$,*

$$J^\alpha \phi = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) A \phi.$$

(iii) *Se $n < \operatorname{Re} \alpha < n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, $D(J^\alpha) = D(A^{n+1})$ e para todo $\phi \in D(J^\alpha)$,*

$$J^\alpha \phi = J^{\alpha-n} A^n \phi.$$

(iv) Se $\operatorname{Re} \alpha = n + 1, n \in \mathbb{N}, D(J^\alpha) = D(A^{n+2})$ e para todo $\phi \in D(J^\alpha)$,

$$J^\alpha \phi = J^{\alpha-n} A^n \phi.$$

Neste trabalho estaremos considerando as integrais impróprias de funções contínuas de $[0, \infty)$ e que toma valores no espaço de Banach X , no sentido de Riemann.

Denotaremos o operador de Balakrishnan referente ao operador A por J_A^α . Quando não houver possibilidade de confusão, usaremos apenas J^α .

Observe que, se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $n \in \mathbb{N}$, $J^n \phi = A^n \phi$.

De fato, se $n = 1$, então, por definição, dado $\phi \in X$,

$$J\phi = \frac{\sin(\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A\phi d\lambda + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) A\phi = 0 + A\phi = A\phi. \quad (2.1)$$

Para $n \in \mathbb{N}, n > 1$, novamente por definição, e por (2.1), dado $\phi \in X$,

$$J^n \phi = J^{n-(n-1)} A^{n-1} \phi = J A^{n-1} \phi = A A^{n-1} \phi = A^n \phi.$$

Vamos mostrar, agora, que o operador de Balakrishnan está bem definido. Para isso, precisamos apenas analisar os casos $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ e $\operatorname{Re} \alpha = 1$, uma vez que os casos $n < \operatorname{Re} \alpha < n + 1$ e $\operatorname{Re} \alpha = n + 1$ são reduzidos aos casos anteriores.

Para $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, observe que $-2 < \operatorname{Re} \alpha - 2 < -1$, assim,

$$\begin{aligned} \|J^\alpha \phi\| &= \left\| \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} A\phi d\lambda \right\| \\ &= \left\| \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left[\int_0^1 \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} A\phi d\lambda + \int_1^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} A\phi d\lambda \right] \right\| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left\| \int_0^1 \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} A\phi d\lambda \right\| + \frac{1}{\pi} \left\| \int_1^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} A\phi d\lambda \right\| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)-1} \|1 - \lambda(\lambda + A)^{-1} \phi\| d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)-1} \|(\lambda + A)^{-1}\| \|A\phi\| d\lambda \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)-1} (M + 1) \|\phi\| d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)-1} \frac{M}{\lambda} \|A\phi\| d\lambda \\ &= \frac{(M + 1) \|\phi\|}{\pi} \int_0^1 \lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)-1} d\lambda + \frac{M \|A\phi\|}{\pi} \int_1^\infty \lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)-2} d\lambda \\ &= \frac{(M + 1) \|\phi\|}{\pi} \frac{\lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)}}{\operatorname{Re}(\alpha)} \Big|_0^1 + \frac{M \|A\phi\|}{\pi} \frac{\lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)-1}}{\operatorname{Re}(\alpha) - 1} \Big|_1^\infty \\ &= \frac{(M + 1)}{\pi \operatorname{Re}(\alpha)} \|\phi\| + \frac{M}{\pi(1 - \operatorname{Re}(\alpha))} \|A\phi\| < \infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Agora, para $\operatorname{Re} \alpha = 1$ temos,

$$\begin{aligned}
\|J^\alpha \phi\| &= \left\| \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A\phi d\lambda + \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) A\phi \right\| \\
&\leq \left\| \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A\phi d\lambda \right\| + \|A\phi\| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\| \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A\phi \right\| d\lambda + \|A\phi\| \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left\| \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A\phi \right\| d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \left\| \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A\phi \right\| d\lambda + \|A\phi\| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[\|\lambda^{\alpha-1}(\lambda + A)^{-1} A\phi\| + \left\| \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^2 + 1} A\phi \right\| \right] d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \left\| \lambda^{\alpha-1} \left[\frac{(\lambda^2 + 1)(\lambda + A)^{-1} - \lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A\phi \right\| d\lambda + \|A\phi\| \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[\|\lambda^{\alpha-1}[1 - \lambda(\lambda + A)^{-1}]\phi\| + \left\| \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^2 + 1} A\phi \right\| \right] d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \left\| \lambda^{\alpha-1} \left[\frac{(1 - \lambda A)(\lambda + A)^{-1}}{\lambda^2 + 1} \right] A\phi \right\| d\lambda + \|A\phi\| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left[(M + 1)\|\phi\| \int_0^1 \lambda^{\operatorname{Re} \alpha - 1} d\lambda + \|A\phi\| \int_0^1 \frac{\lambda^{\operatorname{Re} \alpha}}{\lambda^2 + 1} d\lambda \right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \left\| \lambda^{\alpha-1} \frac{(\lambda + A)^{-1}}{\lambda^2 + 1} A\phi \right\| d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \left\| \lambda^{\alpha-1} \frac{\lambda(\lambda + A)^{-1} A^2}{\lambda^2 + 1} \phi \right\| d\lambda + \|A\phi\| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left[(M + 1)\|\phi\| \int_0^1 d\lambda + \|A\phi\| \int_0^1 \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} d\lambda \right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \left\{ [(M + 1)\|\phi\| + M\|A^2\phi\|] \int_1^\infty \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\lambda \right\} + \|A\phi\| \\
&= \frac{(M + 1)\|\phi\|}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\|A\phi\|}{\pi} \int_1^2 \frac{du}{u} + \frac{((M + 1)\|\phi\| + M\|A^2\phi\|)}{\pi} \arctan(\lambda) \Big|_1^\infty + \|A\phi\| \\
&= \frac{(M + 1)\|\phi\|}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\|A\phi\|}{\pi} \ln(u) \Big|_1^2 + \frac{((M + 1)\|\phi\| + M\|A^2\phi\|)}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] + \|A\phi\| \\
&= \frac{(M + 1)\|\phi\| + \ln(\sqrt{2})\|A\phi\|}{\pi} + \frac{(M + 1)\|\phi\| + M\|A^2\phi\|}{4} + \|A\phi\| \\
&= \frac{(\pi + 4)(M + 1)}{4\pi} \|\phi\| + \frac{(\pi + \ln(\sqrt{2}))}{\pi} \|A\phi\| + \frac{M}{4} \|A^2\phi\| < \infty
\end{aligned}$$

Portanto, o operador de Balakrishnan é bem definido.

A proposição a seguir garante a continuidade da função $\alpha \mapsto J^\alpha$ que pode ser encontrada, sem tantos detalhes, em [[4], p. 58]. Em sua demonstração, faremos uso do seguinte lema.

Lema 2.2 ([4], p. 59). *Se $-1 < \operatorname{Re}(\omega) < 1$, vale a identidade:*

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^\omega}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}. \quad (2.3)$$

Demonstração. A demonstração dessa identidade é o resultado da integração da função $f(z) = \frac{z^\omega}{z^2 + 1}$ sobre as curvas com orientação positiva:

$$\Gamma_1 = \{re^{i\theta}; -\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon\} \quad \Gamma_2 = \{\rho e^{i\theta} / -\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon\}$$

$$\Gamma_2 = \{\rho e^{i\theta} / -\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon\} \quad \Gamma_4 = \{\lambda e^{-i(\pi-\varepsilon)}; \rho \leq \lambda \leq r\},$$

com $\varepsilon, \rho, r > 0$, e tomando os limites quando $\varepsilon, \rho \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. $\square$

Proposição 2.3 ([4], p. 58 e 59). *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}_+$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $n > \operatorname{Re} \alpha$. Se $\phi \in D(A^n)$, então*

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} J^\beta \phi = J^\alpha \phi.$$

Demonstração. Suponhamos que $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, logo, se $\beta \rightarrow \alpha$, podemos considerar $0 < \operatorname{Re}(\beta) < 1$, assim,

$$J^\beta \phi = \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \alpha} J^\beta \phi &= \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda = J^\alpha \phi. \end{aligned}$$

Suponhamos, então, $\operatorname{Re}(\alpha) = 1$. Note que, pelo Lema 2.2, se $0 < \operatorname{Re}(\beta) < 1$ e $\phi \in D(A^2)$,

$$\begin{aligned} &\frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\ &= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda - \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^\beta}{\lambda^2 + 1} d\lambda A \phi + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\ &= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda - \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)} A \phi + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\ &= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda - \frac{2 \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\pi} \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)} A \phi + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\ &= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Portanto, seguindo o mesmo raciocínio anterior, como o integrando 2.4 é contínuo, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} J^\beta \phi &= \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda \\
&= \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) A \phi = J^\alpha \phi.
\end{aligned}$$

Agora, seja $1 < \operatorname{Re}(\beta) < 2$ e $\phi \in D(A^2)$ e observe que $\sin(\beta\pi) = \sin(\beta - 1)\pi$. Além disso, $-1 < \operatorname{Re}(\beta) - 2 < 0$, então pelo lema 2.2 segue que

$$\begin{aligned}
J^\beta \phi &= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \tag{2.5} \\
&= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda - \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^\beta}{\lambda^2 + 1} A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-2} \lambda (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda - \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^\beta}{\lambda^2 + 1} A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-2} [1 - (\lambda + A)^{-1} A] A \phi d\lambda - \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^\beta}{\lambda^2 + 1} A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \left[\int_0^\infty \lambda^{\beta-2} A \phi d\lambda - \int_0^\infty \lambda^{\beta-2} (\lambda + A)^{-1} A^2 \phi d\lambda - \int_0^\infty \frac{\lambda^\beta}{\lambda^2 + 1} A \phi d\lambda \right] + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{\lambda^{\beta-2}}{\lambda^2 + 1} A \phi d\lambda - \int_0^\infty \lambda^{\beta-2} (\lambda + A)^{-1} A^2 \phi d\lambda \right] + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\beta - 1)\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-2} (\lambda + A)^{-1} A^2 \phi d\lambda + \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\beta-2}}{\lambda^2 + 1} d\lambda A \phi + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\beta - 1)\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-2} (\lambda + A)^{-1} A^2 \phi d\lambda + \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{(\beta-2)\pi}{2}\right)} + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\beta - 1)\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-2} (\lambda + A)^{-1} A^2 \phi d\lambda - \frac{2 \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\pi} \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)} + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\beta - 1)\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-2} (\lambda + A)^{-1} A^2 \phi d\lambda.
\end{aligned}$$

Finalmente, como o integrando em 2.5 é contínuo, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \alpha^+} J^\beta \phi &= \lim_{\beta \rightarrow \alpha^+} J^{\beta-1} A \phi \\
&= \lim_{\beta \rightarrow \alpha^+} \frac{\sin(\beta - 1)\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-2} (\lambda + A)^{-1} A^2 \phi d\lambda \\
&= \lim_{\beta \rightarrow \alpha^+} \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) A \phi \\
&= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) A \phi = J^\alpha \phi
\end{aligned}$$

Portanto, como para cada $\phi \in D(A^2)$, $\lim_{\beta \rightarrow \alpha^+} J^\beta \phi$, $\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} J^\beta \phi$ existem e $\lim_{\beta \rightarrow \alpha^+} J^\beta \phi = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} J^\beta \phi = J^\alpha \phi$ segue que $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} J^\beta \phi$ existe e

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} J^\beta \phi = J^\alpha \phi.$$

Agora, suponha $n < \operatorname{Re} \alpha < n + 1$, então, $0 < \operatorname{Re} \alpha - n < 1$. Logo, para cada $\phi \in D(A^{n+1})$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} J^\beta \phi = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} J^{\beta-n} A^n \phi = J^{\alpha-n} A^n \phi = J^\alpha \phi.$$

Por último, suponha $\operatorname{Re} \alpha = n + 1$, assim, se $n < \operatorname{Re}(\beta) < n + 1$ temos

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} J^\beta \phi = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} J^{\beta-n} A^n \phi = J^{\alpha-n} A^n \phi = J^\alpha \phi$$

enquanto que se $n + 1 < \operatorname{Re}(\beta) < n + 2$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha^+} J^\beta \phi = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^+} J^{\beta-n} A^n \phi = J^{\alpha-n} A^n \phi = J^\alpha \phi.$$

Portanto,

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} J^\beta \phi = J^\alpha \phi.$$

□

A proposição a seguir mostra que o operador J^α pode ser definido por uma única fórmula. Essa maneira de definir será muito útil quando estivermos interessados no domínio das potências fracionárias.

Antes disso, lembremos que a função Gamma é uma extensão do conceito de fatorial para números reais e complexos e é definida da seguinte forma: se n é um número inteiro definimos

$$\Gamma(n + 1) = n! \tag{2.6}$$

Para números complexos com parte real positiva a função Gamma é definida através de uma integral imprópria convergente. Se $t \in \mathbb{C}_+$ definimos

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

A propriedade mais importante da função Gamma é que para cada complexo z ,

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1). \tag{2.7}$$

Outra propriedade é dada no Lema a seguir, conhecida como a **Fórmula dos Complementos de Euler**, e será usada na demonstração do próximo resultado.

Lema 2.4 ([4], p. 60). *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, então*

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}. \quad (2.8)$$

Proposição 2.5 ([4], p. 59). *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}_+$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re} \alpha$. Se $\phi \in D(A^n)$ e se $m \geq n$ é um inteiro positivo, então,*

$$J^\alpha \phi = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^m \phi d\lambda. \quad (2.9)$$

Demonstração. Suponha primeiramente que $n-1 < \operatorname{Re} \alpha < n$. Note que se $p \in \mathbb{N}$, então, $\frac{d}{d\lambda}(\lambda + A)^{-p} = -p(\lambda + A)^{-p-1}$, e ainda,

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-n+p}(\lambda + A)^{-p} A^n \phi &= \lambda^{\alpha-n} \lambda^p [(\lambda + A)^{-1}]^p A^n \phi \\ &= \lambda^{\alpha-n+1} [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^{p-1} (\lambda + A)^{-1} A A^{n-1} \phi \\ &= \lambda^{\alpha-n+1} [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^{p-1} (1 - \lambda(\lambda + A)^{-1}) A^{n-1} \phi, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-n+p}(\lambda + A)^{-p} A^n \phi = 0. \quad (2.10)$$

De fato, como $0 < \operatorname{Re} \alpha - n + 1 < 1$ temos,

$$\begin{aligned} \|\lambda^{\alpha-n+p}(\lambda + A)^{-p} A^n \phi\| &= \|\lambda^{\alpha-n+1} [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^{p-1} (1 - \lambda(\lambda + A)^{-1}) A^{n-1} \phi\| \\ &\leq \lambda^{\operatorname{Re} \alpha - n + 1} M^{p-1} (M + 1) \|A^{n-1} \phi\| \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Agora, se $1 \leq p \leq n-1$ temos

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-n+p}(\lambda + A)^{-p} A^n \phi &= \lambda^{\alpha-n} [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^p A^n \phi \\ &= \lambda^{\alpha-n} [1 - (\lambda + A)^{-1} A]^p A^n \phi, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{\alpha-n+p}(\lambda + A)^{-p} A^n \phi = 0. \quad (2.11)$$

De fato, como $-1 < \operatorname{Re} \alpha - n < 0$ segue que

$$\begin{aligned} \|\lambda^{\alpha-n+p}(\lambda + A)^{-p} A^n \phi\| &= \|\lambda^{\alpha-n} [1 - (\lambda + A)^{-1} A]^p A^n \phi\| \\ &\leq \lambda^{\operatorname{Re} \alpha - n} (M + 1)^p \|A^n \phi\| \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Então, integrando por partes a definição do operador de Balakrishnan para $n - 1 < \operatorname{Re} \alpha < n$ e utilizando (2.10) e (2.11) temos

$$\begin{aligned}
J^\alpha \phi &= J^{\alpha-n+1} A^{n-1} \phi \\
&= \frac{\sin(\alpha - n + 1)\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-n} (\lambda + A)^{-1} A^n \phi d\lambda \\
&= \frac{\sin(\alpha - n + 1)\pi}{\pi} \left[\frac{\lambda^{\alpha-n+1}}{\alpha - n + 1} (\lambda + A)^{-1} A^n \phi \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha-n+1}}{\alpha - n + 1} (\lambda + A)^{-2} A^n \phi d\lambda \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha-n+1}}{\alpha - n + 1} (\lambda + A)^{-2} A^n \phi d\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)(\alpha - n + 1)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-n+1} (\lambda + A)^{-2} A^n \phi d\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 2)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-n+1} (\lambda + A)^{-2} A^n \phi d\lambda. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Fazendo $u = (\lambda + A)^{-2} A^n$ e $dv = \lambda^{\alpha-n+1} d\lambda$, integrando 2.12 por partes e usando 2.10 e 2.11 temos,

$$\begin{aligned}
J^\alpha \phi &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 2)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-n+1} (\lambda + A)^{-2} A^n \phi d\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 2)\Gamma(n - \alpha)} \left[\frac{\lambda^{\alpha-n+2}}{\alpha - n + 2} (\lambda + A)^{-2} A^n \phi \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha-n+2}}{\alpha - n + 2} (\lambda + A)^{-3} A^n \phi d\lambda \right] \\
&= \frac{1.2}{\Gamma(\alpha - n + 2)(\alpha - n + 2)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-n+2} (\lambda + A)^{-3} A^n \phi d\lambda \\
&= \frac{1.2}{\Gamma(\alpha - n + 3)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-n+2} (\lambda + A)^{-3} A^n \phi d\lambda.
\end{aligned}$$

Integrando por partes novamente até a $n - 1$ -ésima vez e utilizando repetidamente 2.10, 2.11, o Lema 2.4 e a definição da função Gamma temos,

$$\begin{aligned}
J^\alpha \phi &= \frac{1.2. \prod_{i=3}^{n-1} i}{\Gamma(\alpha - n + 3) \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha - n + i)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(\lambda + A)^{-1} A]^n \phi d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(\lambda + A)^{-1} A]^n \phi d\lambda.
\end{aligned}$$

Obteremos (2.9) por indução sobre m . Pelos cálculos que fizemos acima, já concluímos que (2.9) vale para $m = n$, que é a primeira exigência da prova por indução.

Suponhamos que a igualdade seja válida para $m \in \mathbb{N}$, ou seja, se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $n > \operatorname{Re} \alpha$ e $m \geq n$ então

$$J^\alpha \phi = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(\lambda + A)^{-1} A]^m d\lambda, \tag{2.13}$$

e vamos mostrar que também é válida para $m + 1$.

De fato, note que, integrando por partes a integral que aparece em (2.13) e observando que o fato de que

$$\lambda^\alpha [A(\lambda + A)^{-1}]^m \phi = \lambda^{\alpha-n} [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n [A(\lambda + A)^{-1}]^{m-n} \phi$$

garante que $\lambda^\alpha [A(\lambda + A)^{-1}]^m \phi \rightarrow 0$ tanto quando $\lambda \rightarrow 0$ quanto quando $\lambda \rightarrow \infty$, temos,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(\lambda + A)^{-1} A]^m d\lambda &= \frac{\lambda^\alpha}{\alpha} (\lambda + A)^{-m} A^m \phi \Big|_0^\infty + \frac{m}{\alpha} \int_0^\infty \lambda^\alpha (\lambda + A)^{-m-1} A^m \phi d\lambda \\ &= \frac{m}{\alpha} \int_0^\infty \lambda^\alpha [(\lambda + A)^{-1}]^{m+1} A^m \phi d\lambda \\ &= \frac{m}{\alpha} \int_0^\infty \lambda^\alpha A^m [(\lambda + A)^{-1}]^{m+1} \phi d\lambda \end{aligned}$$

Assim, como

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha A^m [(\lambda + A)^{-1}]^{m+1} \phi &= \lambda^{\alpha-1} A^m [(\lambda + A)^{-1}]^m \lambda (\lambda + A)^{-1} \phi \\ &= \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^m (1 - A(\lambda + A)^{-1}) \phi \\ &= \lambda^{\alpha-1} \{ [A(\lambda + A)^{-1}]^m - [A(\lambda + A)^{-1}]^{m+1} \} \phi \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(\lambda + A)^{-1} A]^m \phi d\lambda &= \frac{m}{\alpha} \int_0^\infty \lambda^\alpha A^m [(\lambda + A)^{-1}]^{m+1} \phi d\lambda \\ &= \frac{m}{\alpha} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^m \phi d\lambda - \frac{m}{\alpha} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^{m+1} \phi d\lambda. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{m-\alpha}{\alpha} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^m \phi d\lambda = \frac{m}{\alpha} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^{m+1} \phi d\lambda,$$

assim, utilizando a hipótese de indução e as propriedades da função Gamma, temos,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^{m+1} \phi d\lambda &= \frac{\alpha}{m} \frac{m-\alpha}{\alpha} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^m \phi d\lambda \\ &= \frac{m-\alpha}{m} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m)} J^\alpha \phi \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1-\alpha)}{\Gamma(m+1)} J^\alpha \phi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$J^\alpha \phi = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^{m+1} \phi d\lambda,$$

que era o que faltava para concluirmos (2.9). □

Observação 2.6. Se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ e $n > \operatorname{Re} \alpha$, então a fórmula

$$z^\alpha \phi = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [z(\lambda + z)^{-1}]^n \phi d\lambda \quad (2.14)$$

é um caso particular de (2.9).

A Observação acima será útil para a demonstração da Proposição que vem a seguir.

Proposição 2.7 ([4], p. 59). Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Então:

(i) $\overline{D(J^\alpha)} = \overline{D(A)}$.

(ii) $R(J^\alpha) \subset \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = \overline{D(A) \cap R(A)}$.

(iii) J^α comuta com $(\mu + A)^{-1}$, $\mu \in \rho(A)$. Em geral J^α comuta com qualquer operador limitado que comuta com o resolvente.

(iv) Se ϕ é um autovetor de A associado ao autovalor $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, então ϕ também é autovetor de J^α associado ao autovalor μ^α . Se 0 é um autovalor de A , então ele é também um autovalor de J^α e, além disso, os autovetores associados a 0 em ambos os operadores, são iguais.

Demonstração. (i) Observe que, independente de $\alpha \in \mathbb{C}_+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D(J^\alpha) = D(A^n)$. Então, segue diretamente do item (iii) da Proposição 1.5 que $\overline{D(J^\alpha)} = \overline{D(A^n)} = \overline{D(A)}$.

(ii) Basta que analisemos os casos $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ e $\operatorname{Re}(\alpha) = 1$.

Suponha primeiramente que $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ e seja $\psi \in R(J^\alpha)$, então, existe $\phi \in D(J^\alpha) = D(A)$ tal que $J^\alpha \phi = \psi$, ou seja,

$$\psi = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda,$$

e então, uma vez que $(\lambda + A)^{-1} A \phi \in D(A)$ e $A(\lambda + A)^{-1} \phi \in R(A)$ segue que $\psi \in \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = \overline{D(A) \cap R(A)}$, pelo item (iii) da Proposição 1.5.

Agora, se $\operatorname{Re}(\alpha) = 1$, então, existe $\phi \in D(J^\alpha) = D(A^2)$ tal que $J^\alpha \phi = \psi$, ou seja,

$$\psi = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[(\lambda + A)^{-1} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] A \phi d\lambda + \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) A \phi,$$

e então, uma vez que $\phi \in D(A^2)$ segue que $A \phi \in D(A) \cap R(A)$ e assim, utilizando o mesmo argumento do caso anterior, segue que $\psi \in \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)}$.

(iii) Seja $\mu \in \rho(A)$. Já sabemos, pela identidade do resolvente, que se $\mu, \lambda \in \rho(A)$, então $(\mu + A)^{-1}$ e $(\lambda + A)^{-1}$ comutam. Assim, como $(\mu + A)^{-1}$ é limitado, se $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ temos,

$$\begin{aligned}
(\mu + A)^{-1} J^\alpha \phi &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\mu + A)^{-1} (\lambda + A)^{-1} A \phi d\lambda \\
&= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} (\mu + A)^{-1} A \phi d\lambda \\
&= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda + A)^{-1} A (\mu + A)^{-1} \phi d\lambda = J^\alpha (\mu + A)^{-1} \phi,
\end{aligned}$$

ou seja, $(\mu + A)^{-1}$ comuta com o operador de Balakrishnan. Um argumento totalmente análogo mostra que o operador de Balakrishnan comuta com qualquer operador limitado.

(iv) Observe que

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu)(\lambda + A)^{-1} A \phi &= \lambda(\lambda + A)^{-1} A \phi + \mu(\lambda + A)^{-1} A \phi \\
&= (1 - A(\lambda + A)^{-1}) A \phi + \mu(\lambda + A)^{-1} A \phi \\
&= A \phi + (\lambda + A)^{-1} A (\mu - A) \phi = A \phi = \mu \phi,
\end{aligned}$$

assim, $(\lambda + A)^{-1} A \phi = (\lambda + \mu)^{-1} \mu \phi$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re} \alpha$, então, utilizando nossos cálculos acima e (2.14) temos

$$\begin{aligned}
J^\alpha \phi &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(\lambda + A)^{-1} A]^n \phi d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(\lambda + \mu)^{-1} \mu]^n \phi d\lambda = \mu^\alpha \phi.
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.8. *Seja $0 < \operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \beta < m$, $m \in \mathbb{N}$ e $\phi \in D(A^m)$. Então*

$$J^\alpha \phi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} J_{A(\lambda+A)^{-1}}^\beta \phi d\lambda.$$

Demonstração. Ver [4], p. 61.

□

Lema 2.9 (Desigualdade do Momento). *Seja $\alpha \in \mathbb{C}_+$ e $n > \operatorname{Re} \alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Então existe uma função positiva $C(\alpha, n, M)$ (que é crescente em relação a M) tal que*

$$\|J^\alpha \phi\| \leq C(\alpha, n, M) \|A^n \phi\|^{\frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}} \|\phi\|^{\frac{(n-\operatorname{Re} \alpha)}{n}} \quad \phi \in D(A^n). \quad (2.15)$$

Demonstração. A demonstração deste lema consiste em minimizar uma função em uma variável e pode ser encontrada em detalhes em [4], p. 61.

□

O resultado a seguir garante a analiticidade da função $\alpha \mapsto J^\alpha$.

Teorema 2.10 (Analiticidade). *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\phi \in D(A^n)$. A função*

$$\alpha \mapsto J^\alpha \phi$$

é analítica em $\{\alpha \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} \alpha < n\}$.

Demonstração. Ver [4], p. 61. □

É interessante observar que o Lema 2.9 garante que J_A^α é limitado quando A é limitado.

Teorema 2.11 ([4], p. 64). *J^α é fechável.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \operatorname{Re} \alpha < n$ e $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset D(A^n)$ uma sequência tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m = 0$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} J^\alpha \phi_m = \psi$.

Precisamos mostrar que $\psi = 0$. De fato, como $A(\mu + A)^{-1}$ é um operador uniformemente limitado, a Desigualdade do Momento garante que $J^\alpha[(\mu + A)^{-1}]^n$ é limitado. Então, como $(\mu + A)^{-1}$, $\mu > 0$ comuta com J^α , temos

$$[(\mu + A)^{-1}]^n \psi = \lim_{m \rightarrow \infty} [(\mu + A)^{-1}]^n J^\alpha \phi_m = J^\alpha [(\mu + A)^{-1}]^n \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m = 0.$$

Portanto, $\psi = 0$ já que $(\mu + A)^{-1}$ é um operador injetivo. □

Como J^α é fechável, podemos definir a extensão $\overline{J^\alpha}$ como $G(\overline{J^\alpha}) = \overline{G(J^\alpha)}$. O domínio do operador $\overline{J^\alpha}$ é dado por

$$D(\overline{J^\alpha}) = \{\phi \in X; \exists (\phi_n)_{n=1}^\infty \subset D(J^\alpha) \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} J^\alpha \phi_n \text{ existe}\}.$$

Assim, se $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$, define-se

$$\overline{J^\alpha} \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} J^\alpha \phi_n.$$

Proposição 2.12 ([4], p. 64). *Seja $\alpha \in \mathbb{C}_+$. Então, $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$ se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ e $-\mu \in \rho(A)$ tal que*

$$[A(\mu + A)^{-1}]^n \phi \in D(\overline{J^\alpha}).$$

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re}(\alpha)$. Suponha que $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$, então, existe $(\phi_k)_{k=1}^\infty \subset D(J^\alpha)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k = \phi$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} J^\alpha \phi_k$ existe. Seja $-\mu \in (-\infty, 0) \subset \rho(A)$, assim, $\mu > 0$ e segue que

$A(\mu + A)^{-1}$ é limitado. Além disso, A comuta com $(\mu + A)^{-1}$, então,

$$\begin{aligned} [A(\mu + A)^{-1}]^n \phi &= [A(\mu + A)^{-1}]^n \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [A(\mu + A)^{-1}]^n \phi_k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu + A)^{-n} A^n \phi_k, \end{aligned}$$

e como $(\mu + A)^{-n}(A^n \phi_k) \in D(A^n) \subset D(J^\alpha)$, fazendo $\psi_k = (\mu + A)^{-n}(A^n \phi_k)$ segue que

$$[A(\mu + A)^{-1}]^n \phi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k. \quad (2.16)$$

E ainda, pela parte (iii) da proposição 2.7 segue que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} J^\alpha \psi_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} J^\alpha (\mu + A)^{-n} A^n \phi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu + A)^{-n} A^n J^\alpha \phi_k \\ &= (\mu + A)^{-n} A^n \lim_{k \rightarrow \infty} J^\alpha \phi_k \\ &= (\mu + A)^{-n} A^n \overline{J^\alpha} \phi, \end{aligned} \quad (2.17)$$

ou seja, o limite existe. Logo, de (2.16) e (2.17) segue que

$$[A(\mu + A)^{-1}]^n \phi \in D(\overline{J^\alpha}).$$

Reciprocamente, na demonstração do Corolário 1.7 vimos identidade

$$[\mu(\mu + A)^{-1}]^n \phi = \phi + \sum_{1 \leq p \leq n} (-1)^p \binom{n}{p} [A(\mu + A)^{-1}]^p \phi,$$

ou seja,

$$\phi = [\mu(\mu + A)^{-1}]^n \phi - \sum_{1 \leq p \leq n} (-1)^p \binom{n}{p} [A(\mu + A)^{-1}]^p \phi,$$

e como cada termo da soma está em $D(\overline{J^\alpha})$, o resultado segue. $\square$

O último resultado sobre operador de Balakrishnan estabelece um critério para que $\phi \in X$ pertença a $D(\overline{J^\alpha})$.

Teorema 2.13. *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}_+$ e $\phi \in X$. Se o limite*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^n \phi \lambda = \psi \quad (2.18)$$

existe apara algum inteiro positivo $n > \operatorname{Re}(\alpha)$, então $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$ e

$$\overline{J^\alpha}\phi = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\psi.$$

Demonstração. Ver [4] p. 65. □

2.2 Cálculo Funcional

Nesta seção vamos apresentar o que chamamos de *Cálculo Funcional*, termo que também é conhecido na literatura por *Cálculo Simbólico* ou *Cálculo Operacional*. Vamos começar definindo o termo.

Definição 2.14. *Sejam $\mathfrak{L}$ o conjunto de todos os operadores lineares sobre o espaço de Banach X e $\Omega \subset \mathbb{C}$. Para uma classe $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{L}$ que contenha os operadores da forma zI , $z \in \Omega$, e para uma classe $\mathcal{H}$ de funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{C}$ diremos que uma aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathfrak{R} &\rightarrow \mathfrak{L} \\ (f, A) &\mapsto f(A) \end{aligned}$$

é um *Cálculo Funcional* sobre $\mathfrak{R}$ se para toda função $f \in \mathcal{H}$ se verifica

$$f(zI) = f(z)I, \quad \forall z \in \Omega.$$

A seguir descreveremos brevemente a classe de funções sobre as quais definiremos nosso Cálculo Funcional.

2.2.1 As Classes de Funções $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$

Definição 2.15. *Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das medidas de Radon complexas μ sobre $\mathbb{R}_+$ satisfazendo*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{d|\mu|(t)}{t+1} < \infty, \tag{2.19}$$

onde $|\mu|$ representa a variação total da medida μ como na definição A.39.

Denotamos por $\mathcal{T}$ o conjunto das funções $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$f(z) = a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+zt} d\mu(t), \tag{2.20}$$

onde $\mu \in \mathcal{M}$ e $a \in \mathbb{C}$.

Mostremos que a integral (2.19) implica na existência da integral em (2.20).

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{z}{1+zt} d\mu(t) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|z|}{|1+tz|} d|\mu|(t) = |z| \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{1}{1+tz} \right| d|\mu|(t) \\ &= |z| \int_{\mathbb{R}_+} \left| \left(\frac{t(1-z)}{1+tz} + 1 \right) \frac{1}{1+t} \right| d|\mu|(t) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} |z| \int_{\mathbb{R}_+} M(z) \frac{1}{1+t} d|\mu|(t) \leq |z| M(z) \int_{\mathbb{R}_+} \frac{d|\mu|(t)}{t+1} < \infty. \end{aligned}$$

Na passagem (*) utilizamos o fato de que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t(1-z)}{1+tz} = \frac{1-z}{z}$ e portanto o termo $\left(\frac{t(1-z)}{1+tz} + 1 \right)$ pode ser majorado por um número que só depende de z e ao qual chamamos $M(z)$.

Denotamos por $\mathcal{M}_+$ o subconjunto de $\mathcal{M}$ composto de medidas positivas e por $\mathcal{T}_+$ o subconjunto de $\mathcal{T}$ tal que $a \geq 0$ e $\mu \in \mathcal{M}_+$.

Definição 2.16. Dizemos que a função $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ pertence a $\mathcal{S}_0$ se existe uma medida $\mu \in \mathcal{M}$ tal que

$$f(z) = a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t} d\mu(t),$$

onde μ satisfaz que

$$\mu(\{0\}) = 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{t} d|\mu|(t) < \infty.$$

Se $f \in \mathcal{S}_0$, então, para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, f pode ser escrita como

$$f(z) = b + \int_{\mathbb{R}_+} d\nu(s),$$

onde, para $s \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\nu(s) = -s^2 d\mu\left(\frac{1}{s}\right) \quad e \quad b = a + \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{t} d|\mu|(t) < \infty \quad (\nu(\{0\}) = 0)$$

o que implica que $f \in \mathcal{T}$, logo, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{T}$.

Um subconjunto de $\mathcal{T}$ muito útil é o conjunto composto pelas funções analíticas definidas em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ que satisfazem as condições:

(i) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-1} F(z) = 0$, e os seguintes limites

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z), \lim_{\theta \rightarrow \pi} F(\lambda e^{i\theta}), \lim_{\theta \rightarrow -\pi} F(\lambda e^{i\theta}) \quad (\lambda > 0)$$

existem.

(ii) A função

$$F_\pi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left(\lim_{\theta \rightarrow \pi} F(\lambda e^{i\theta}) - \lim_{\theta \rightarrow -\pi} F(\lambda e^{i\theta}) \right) \quad (\lambda > 0). \quad (2.21)$$

satisfaz que

$$\lambda^{-1}F_{\pi} \in L^1([0, 1]) \quad \text{e} \quad \lambda^{-2}F_{\pi} \in L^1([1, \infty[).$$

Denotaremos esse conjunto por $\mathcal{H}_0$. Aplicando a fórmula integral de Cauchy em $\frac{F(u)}{u}$ no caminho considerado na demonstração do Lema 2.2 obtemos

$$\begin{aligned} F(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} F(z) + \int_0^{\infty} \frac{z}{\lambda + z} \lambda^{-1} F_{\pi}(\lambda) d\lambda \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} F(z) + \int_0^{\infty} \frac{z}{1 + tz} d\mu(t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $\mu(t) = F_{\pi}(\frac{1}{t})dt$. Disto concluímos que de fato $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{T}$.

Denotaremos também por $\mathcal{H}_1$ o conjunto das funções analíticas $F : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\lim_{z \rightarrow 0} zF(z) = 0$, e os seguintes limites

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z), \lim_{\theta \rightarrow \pi} F(\lambda e^{i\theta}), \lim_{\theta \rightarrow -\pi} F(\lambda e^{i\theta}) \quad (\lambda > 0)$$

existem, com a condição adicional de que $\lambda^{-1}F_{\pi} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$. Utilizando um raciocínio análogo (a aplicação da fórmula de Cauchy), concluímos que

$$F(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) - \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda + z} F_{\pi}(\lambda) d\lambda,$$

e que $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{T}$.

Exemplo 2.17 ([4], p. 75). *Se $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, então $F(z) = z^{\alpha}$ pertence a $\mathcal{H}_0$ e*

$$F_{\pi}(\lambda) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \lambda^{\alpha}.$$

Se $0 < \alpha < 1$, então z^{α} pertence a $\mathcal{T}_+$.

Solução. Mostremos que $F \in \mathcal{H}_0$. De fato,

$$(i) \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-1}F(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{\alpha-1} = 0. \text{ Além disso, } \lim_{z \rightarrow 0} F(z) = 0,$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} F(\lambda e^{i\theta}) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} (\lambda e^{i\theta})^{\alpha} = \lambda^{\alpha} e^{i\alpha \lim_{\theta \rightarrow \pi} \theta} = \lambda^{\alpha} e^{i\alpha\pi},$$

e por último,

$$\lim_{\theta \rightarrow -\pi} F(\lambda e^{i\theta}) = \lim_{\theta \rightarrow -\pi} (\lambda e^{i\theta})^{\alpha} = \lambda^{\alpha} e^{i\alpha \lim_{\theta \rightarrow -\pi} \theta} = \lambda^{\alpha} e^{-i\alpha\pi},$$

ou seja, todos os limites pedidos existem.

(ii) Note que, para $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
 F_\pi(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\lim_{\theta \rightarrow \pi} F(\lambda e^{i\theta}) - \lim_{\theta \rightarrow -\pi} F(\lambda e^{i\theta}) \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} (\lambda^\alpha e^{i\alpha\pi} - \lambda^\alpha e^{-i\alpha\pi}) = \frac{\lambda^\alpha}{2\pi i} (e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}) \\
 &= \frac{\lambda^\alpha}{2\pi i} [\cos(\alpha\pi) + i \sin(\alpha\pi) - (\cos(-\alpha\pi) + i \sin(-\alpha\pi))] \\
 &= \frac{\lambda^\alpha}{2\pi i} [\cos(\alpha\pi) + i \sin(\alpha\pi) - \cos(\alpha\pi) + i \sin(\alpha\pi)] \\
 &= \frac{\lambda^\alpha}{2\pi i} 2i \sin(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \lambda^\alpha.
 \end{aligned}$$

Observe que $\lambda^{-1} F_\pi \in L^1(]0, 1[)$, pois

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |\lambda^{-1} F_\pi(\lambda)| d\lambda &= \int_0^1 \left| \lambda^{-1} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \lambda^\alpha \right| d\lambda \\
 &\leq \left| \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \right| \int_0^1 \lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)-1} d\lambda \\
 &= \left| \frac{\sin(\alpha\pi)}{\operatorname{Re}(\alpha)\pi} \right|.
 \end{aligned}$$

Observe ainda que $\lambda^{-2} F_\pi \in L^1(]1, \infty[)$, pois

$$\begin{aligned}
 \int_1^\infty |\lambda^{-2} F_\pi(\lambda)| d\lambda &= \int_1^\infty \left| \lambda^{-2} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \lambda^\alpha \right| d\lambda \\
 &\leq \left| \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \right| \int_1^\infty \lambda^{\operatorname{Re}(\alpha)-2} d\lambda \\
 &= \left| \frac{\sin(\alpha\pi)}{(1 - \operatorname{Re}(\alpha))\pi} \right|.
 \end{aligned}$$

Portanto, por (i) e (ii), $F \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{T}$. E ainda nesse caso, por (2.22), temos

$$z^\alpha = \lim_{z \rightarrow 0} z^\alpha + \int_0^\infty \frac{z}{1+tz} d\mu(t) = \int_0^\infty \frac{z}{1+tz} d\mu(t),$$

onde

$$\mu(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} t^{-\alpha} dt.$$

Com isso, é evidente que se $0 < \alpha < 1$ teremos que $F \in \mathcal{T}_+$, pois, nesse caso, teríamos $0 < \alpha\pi < 1$ e portanto $\mu(t) \geq 0$ para todo $t > 0$, ou seja μ seria uma medida positiva. $\square$

Exemplo 2.18. Seja $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ e $v \in \mathbb{C}^*$, $|\arg v| < \frac{\pi}{2} - \alpha\pi$. A função $F(z) = e^{-vz^\alpha} \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_1$ e

$$F_\pi(\lambda) = -\frac{1}{\pi} e^{-v\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} \sin(v\lambda^\alpha \sin \alpha\pi)$$

Solução. Veja [4], p. 76. □

Exemplo 2.19 ([4], p. 77). *Dado $\alpha \in \mathbb{C}_+$ tal que $\operatorname{Re}(\alpha) < 1$, as funções*

$$F_1(z) = (z + \varepsilon)^{-\alpha} \quad e \quad F_2(z) = [z(z + \varepsilon)^{-1}]^\alpha$$

pertencem a $\mathcal{S}_0$.

Solução. Basta observar que

$$F_i(z) = a_i + \int \frac{d\mu_i(t)}{t + z} \quad (i = 1, 2),$$

onde

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt,$$

$$d\mu_1 = \begin{cases} 0, & t \in [0, \varepsilon] \\ \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} (t - \varepsilon)^{-\alpha} dt, & t \in]\varepsilon, \infty[\end{cases}$$

e

$$d\mu_2 = \begin{cases} -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} t^\alpha (t - \varepsilon)^{-\alpha} dt, & t \in [0, \varepsilon] \\ 0, & t \in]\varepsilon, \infty[\end{cases}$$

□

O próximo resultado garante a unicidade da medida $\mu \in \mathcal{M}$ que aparece na definição 2.15, por isso no caso de $f \in \mathcal{T}$ denotamos simplesmente $f = (a, \mu)$.

Proposição 2.20. *Sejam $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$. Se*

$$\int \frac{1}{x+t} d\mu_1(t) = \int \frac{1}{x+t} d\mu_2(t), \quad (x > 0),$$

então $\mu_1 = \mu_2$.

Demonstração. Ver [4], Proposição 4.1.1, página 77.

2.2.2 Cálculo de Hirsch

No decorrer desta seção, A será um operador não negativo sobre o espaço de Banach X .

Definição 2.21. *Seja $f = (a, \mu) \in \mathcal{T}$. Considere os operadores limitados*

$$T = \int_{[0,1]} (1+tA)^{-1} d\mu(t) \quad e \quad S = \int_{]1,\infty[} A(1+tA)^{-1} d\mu(t).$$

Definimos

$$f(A) = a + AT + S$$

no domínio

$$D[f(A)] = \{\phi \in X : T\phi \in D(A)\}.$$

Como A é fechado, $f(A)$ é fechado. Se A é limitado, então $f(A)$ é limitado. Se A tem inversa limitada então o operador

$$V = aA^{-1} + \int (1 + tA)^{-1} d\mu(t)$$

é limitado. Além disso, $f(A) = AV$.

Se

$$f(z) = a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t} d\mu(t) \in \mathcal{S}_0,$$

não é difícil mostrar que $f(A)$ é um operador limitado que pode ser escrito como

$$f(A) = a + \int_{\mathbb{R}_+^*} (t + A)^{-1} d\mu(t).$$

Teorema 2.22. *Seja $f = (a, \mu) \in \mathcal{T}$. Então*

- (i) $D[f(A)] = D[f(A + \varepsilon)], \forall \varepsilon > 0$,
- (ii) $f(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(A + \varepsilon)$.
- (iii) $f(A) = (1 + A)^n W (1 + A)^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$W = a + TA + S.$$

(iv) Se $D(A)$ é denso, então

$$[f(A)]^* = f(A^*).$$

Demonstração. Ver [4], Teorema 4.2.1, página 85. □

O próximo exemplo nos será muito útil no próximo capítulo.

Exemplo 2.23 ([4], p. 108). *Considere $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$,*

$$f(z) = z^\alpha, \quad g(z) = [(z + \varepsilon)^{-1}]^\alpha \text{ e } h(z) = [z(z + \varepsilon)^{-1}]^\alpha.$$

$$\text{Então, } f(A) = J_A^\alpha, \quad g(A) = J_{(A+\varepsilon)^{-1}}^\alpha, \quad h(A) = J_{A(A+\varepsilon)^{-1}}^\alpha.$$

Solução. Pelos Exemplos 2.17 e 2.19, $f, g, h \in \mathcal{T}$ (a propósito $g, h \in \mathcal{S}_0$). Seja A um operador não-negativo limitado. Mostremos que $f(A) = J_A^\alpha$.

De fato, pelo Exemplo 2.17, $f = (0, \mu)$, onde $d\mu(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} t^{-\alpha} dt$. Assim, fazendo a mudança de

variáveis $\frac{1}{t} = \lambda$ temos,

$$\begin{aligned} f(A) &= AT + S = A \int_{[0,1]} (1+tA)^{-1} d\mu(t) + \int_{]1,\infty[} A(1+tA)^{-1} d\mu(t) \\ &= \int_0^\infty A(1+tA)^{-1} \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} t^{-\alpha} dt = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha} A(1+tA)^{-1} dt \\ &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} A(\lambda + A)^{-1} d\lambda = J_A^\alpha. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$g(A) = J_{(A+\varepsilon)^{-1}}^\alpha \quad \text{e} \quad h(A) = J_{A(A+\varepsilon)^{-1}}^\alpha.$$

□

Teorema 2.24 (Fórmula do Produto). *Seja $f, g \in \mathcal{T}$ tal que $h = fg \in \mathbb{T}$. Se $\phi \in D(A^2)$, então $g(A)\phi \in D(A)$ e*

$$f(A)g(A)\phi = h(A)\phi. \quad (2.23)$$

Consequentemente,

$$\overline{f(A)g(A)} \subset h(A).$$

Se A é densamente definido então $\overline{f(A)g(A)} = h(A)$.

Se $D[h(A)] \subset D[g(A)]$ (em particular, se $g(A)$ é limitado ou $g \in \mathcal{S}_0$), então, $f(A)g(A) = h(A)$.

Demonstração. Ver [4], Teorema 4.2.3, página 89. □

2.3 Potência Fracionária de Operadores

Nesta seção queremos definir o objeto A^α , com $\alpha \in \mathbb{C}_+$ nas três situações possíveis para A . Para isso, A será um operador não negativo sobre um espaço de Banach localmente convexo.

2.3.1 Definição e propriedades básicas: Aditividade

Os três casos possíveis que abordaremos serão:

- (i) A é um operador limitado.
- (ii) A é um operador ilimitado e $0 \in \rho(A)$.
- (iii) A é um operador ilimitado e $0 \in \sigma(A)$.

Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador limitado. Então, para $\alpha \in \mathbb{C}_+$, definimos

$$A^\alpha = J_A^\alpha, \quad (2.24)$$

onde J_A^α é o operador de Balakrishnan.

Quando estudamos as propriedades do operador de Balakrishnan vimos que se $A \in \mathcal{L}(X)$ então $J_A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$ e, como consequência de (2.24) segue que A^α é limitado. Além disso, se $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, então A^α coincide com o operador $z^\alpha(A)$ associado à função $f(z) = z^\alpha \in \mathcal{T}$ (ver exemplos 2.17 e 2.23).

Se $n > \operatorname{Re} \alpha > n - 1$, então $D(A^\alpha) = D(A^n) \subset D(A)$. É interessante observar, também, que o Teorema 2.10 garante que a função $\alpha \mapsto A^\alpha \phi$ ($\phi \in X$) é analítica.

Um comentário sobre a demonstração da Proposição a seguir pode ser encontrado em ([4], p. 105).

Proposição 2.25. *Se A é limitado e $\alpha \in \mathbb{C}_+$, então*

$$A^\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha,$$

com tal limite sendo calculado com respeito a norma de X .

Demonstração. Seja M a constante de não-negatividade de A , assim

$$\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \leq M, \quad \forall \lambda > 0.$$

Como vale para todo $\lambda > 0$, em particular, dado $\varepsilon > 0$ temos

$$\|(\lambda + \varepsilon)[(\lambda + \varepsilon) + A]^{-1}\| \leq M, \quad \forall \lambda > 0,$$

então, multiplicando a desigualdade acima por $\lambda > 0$ segue que

$$\|\lambda(\lambda + A + \varepsilon)^{-1}\| \leq \frac{\lambda}{\lambda + \varepsilon} M < M.$$

Como $A + \varepsilon$ é limitado, segue por definição que $(A + \varepsilon)^\alpha = J_{A+\varepsilon}^\alpha$, ou seja,

$$(A + \varepsilon)^\alpha = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(A + \varepsilon)(\lambda + A + \varepsilon)^{-1}]^n d\lambda, \quad (2.25)$$

onde $n > \operatorname{Re} \alpha > n - 1$.

Observe que a integral que aparece em (2.25) converge absolutamente uma vez que,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|\lambda^{\alpha-1} [(A + \varepsilon)(\lambda + A + \varepsilon)^{-1}]^n\| d\lambda &\leq (M + 1)^n \int_0^1 \lambda^{\operatorname{Re} \alpha - 1} d\lambda + \|A + \varepsilon\|^n \int_1^\infty \lambda^{\operatorname{Re} \alpha - 1} \frac{M^n}{\lambda^n} d\lambda \\ &= \frac{(M + 1)^n}{\operatorname{Re} \alpha} + \frac{M^n \|A + \varepsilon\|^n}{n - \operatorname{Re} \alpha}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Considere, agora, uma sequência $(\varepsilon_m) \subset \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Pelo item

(ii) da Proposição 1.5, e pela identidade do resolvente, para cada $\phi \in X$ e $\lambda > 0$ temos,

$$\begin{aligned} \|(A + \varepsilon_m + \lambda)^{-1}\phi - (A + \lambda)^{-1}\phi\| &= \|\varepsilon_m(A + \lambda)^{-1}(A + \varepsilon_m + \lambda)^{-1}\phi\| \\ &\leq \|(A + \lambda)^{-1}\| \|\varepsilon_m(A + \lambda + \varepsilon_m)^{-1}\phi\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Denote $T_m\phi = (\lambda + A + \varepsilon_m)^{-1}\phi$ e observe que, para cada $\lambda > 0$,

$$\|T_m\phi\| = \|(\lambda + A + \varepsilon_m)^{-1}\phi\| \leq \frac{M}{\lambda} \|\phi\| = C_\phi.$$

Então pelo Princípio da Limitação Uniforme, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(\lambda + A + \varepsilon_m)^{-1}\| < \infty$. Assim,

$$\|(A + \varepsilon_m + \lambda)^{-1} - (A + \lambda)^{-1}\| \leq \varepsilon_m \|(A + \lambda)^{-1}\| \|(A + \varepsilon_m + \lambda)^{-1}\| \rightarrow 0.$$

Considere a sequência (Φ_m) de operadores dada por

$$\Phi_m(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}[(A + \varepsilon_m)(\lambda + A + \varepsilon_m)^{-1}]^n$$

e note que $\Phi_m \rightarrow \lambda^{\alpha-1}[A(\lambda + A)^{-1}]^n$ quando $m \rightarrow \infty$.

Agora, defina

$$\begin{aligned} \Psi : [0, \infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \Psi(\lambda) = \begin{cases} (M + 1)^n \lambda^{\operatorname{Re} \alpha - 1}, & \lambda \in [0, 1[\\ \|A + 1\|^n \lambda^{\operatorname{Re} \alpha - 1} \frac{M^n}{\lambda^n}, & \lambda \in [1, \infty[\end{cases}. \end{aligned}$$

Observe que o fato de que $\varepsilon_m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ garante que a partir de um certo índice, $\|\Phi_m(\lambda)\| \leq \|\Psi(\lambda)\|$ e, como 2.26 garante que Ψ é integrável, pelo Teorema da Convergência Dominada temos,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha &= \lim_{m \rightarrow \infty} (A + \varepsilon_m)^\alpha \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(A + \varepsilon_m)(\lambda + A + \varepsilon_m)^{-1}]^n d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \lim_{m \rightarrow \infty} (A + \varepsilon_m)^n (\lambda + A + \varepsilon_m)^{-n} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^n d\lambda = A^\alpha. \end{aligned}$$

□

A seguir mostramos que uma das propriedades mais básicas de potenciação também vale para potencia fracionária de operadores limitados.

Teorema 2.26 (Aditividade, [4], p. 106). *Suponha A um operador limitado. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+$, então*

$$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}. \quad (2.27)$$

Demonstração. Suponha que $0 < \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1$. Pelo Exemplo 2.23,

$$A^\alpha = z^\alpha(A), \quad A^\beta = z^\beta(A) \quad \text{e} \quad A^{\alpha+\beta} = z^{\alpha+\beta}(A).$$

Já sabemos que as funções $f(z) = z^\alpha$, $f(z) = z^\beta$ e $h(z) = z^{\alpha+\beta}$ pertencem a $\mathcal{T}$, e $h = fg$, então, pela fórmula do produto (Teorema 2.24) temos

$$A^\alpha A^\beta = z^\alpha(A) z^\beta(A) = z^{\alpha+\beta}(A) = A^{\alpha+\beta}.$$

Agora, lembremos que a função $\alpha \mapsto A^\alpha$ é analítica em $\mathbb{C}_+$.

Defina a função $\varphi : \mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+ \rightarrow X$ por $\varphi(\alpha, \beta) = A^\alpha A^\beta - A^{\alpha+\beta}$. Note que φ é analítica em $\mathbb{C}_+$ quando fixamos α ou β e que $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+; 0 < \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1\} \subset \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+; \varphi(\alpha, \beta) = 0\}$, assim, o fato do primeiro conjunto ser aberto garante que o segundo tem um ponto de acumulação. Portanto, pelo Teorema A.31 segue que $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+$, isto é, a aditividade também vale para os demais expoentes em $\mathbb{C}_+$. $\square$

Suponhamos agora que A seja um operador não limitado com inversa limitada, ou seja, tal que $0 \in \rho(A)$. Se $\alpha \in \mathbb{C}_+$, então $(A^{-1})^\alpha$ é injetivo. De fato, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re} \alpha$ e $\phi \in \operatorname{Ker}(A^{-1})^\alpha$, então

$$(A^{-1})^n \phi = (A^{-1})^{n-\alpha} (A^{-1})^\alpha \phi = 0.$$

Aplicando A^n de ambos os lados da identidade acima obtemos $\phi = 0$. Esta observação nos permite definir potência fracionária de um operador não limitado A com $0 \in \rho(A)$ como faremos a seguir.

Definição 2.27. *Se A é não limitado com $0 \in \rho(A)$, definimos*

$$A^\alpha = [(A^{-1})^\alpha]^{-1}, \quad (\alpha \in \mathbb{C}_+).$$

Como $(A^{-1})^\alpha$ é limitado, também é fechado, então, pelo Teorema A.19, A^α é fechado. Além disso $D(A^\alpha) \subset \overline{D(A)}$. De fato, pelo item (ii) da Proposição 2.7 segue que $R((A^{-1})^\alpha) \subset \overline{D(A^{-1})} \cap R(A^{-1})$. Mas observe que, como $0 \in \rho(A)$, A^{-1} é limitado e assim $D(A^{-1}) = X$, e ainda, $R(A^{-1}) = D(A)$. Logo, $D(A^{-1}) \cap R(A^{-1}) = X \cap D(A) = D(A)$. Então $R((A^{-1})^\alpha) \subset \overline{D(A)}$. Mas

$$R((A^{-1})^\alpha) = D([(A^{-1})^\alpha]^{-1}) = D(A^\alpha).$$

Portanto, $D(A^\alpha) \subset \overline{D(A)}$.

Proposição 2.28 ([4], p. 106). *Se A é não limitado, $0 \in \rho(A)$ e se $\alpha \in \mathbb{C}_+$, então A^α estende $\overline{J^\alpha}$.*

Demonstração. Observe que como A^α é fechado, basta mostrar que A^α estende J^α , pois, se assim for, $\overline{A^\alpha} = A^\alpha$ estende $\overline{J^\alpha}$.

Mostremos primeiramente que $D(J^\alpha) \subset D(A^\alpha)$. Para isso, considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < \operatorname{Re} \alpha < n$. Por definição, $D(J^\alpha) = D(A^n)$ e como $R[(A^{-1})^n] = D(A^n)$, dado $\phi \in D(A^n)$ existe $\psi \in X$ tal que $(A^{-1})^n \psi = \phi$, assim, $(A^{-1})^\alpha (A^{-1})^{n-\alpha} \psi = (A^{-1})^n \psi = \phi$, o que garante que $\phi \in R[(A^{-1})^\alpha] = D(A^\alpha)$. Logo, $D(J^\alpha) \subset D(A^\alpha)$.

Mostremos, então, que $J^\alpha \phi = A^\alpha \phi$ para todo $\phi \in D(J^\alpha)$. De fato, se $\phi \in D(J^\alpha)$ temos,

$$\begin{aligned} A^\alpha \phi &= [(A^{-1})^\alpha]^{-1} \phi = [(A^{-1})^\alpha]^{-1} (A^{-1})^n A^n \phi \\ &= [(A^{-1})^\alpha]^{-1} (A^{-1})^\alpha (A^{-1})^{n-\alpha} A^n \phi = (A^{-1})^{n-\alpha} A^n \phi \end{aligned}$$

E então, pela Proposição 2.5 e lembrando que $\lambda(\lambda + A^{-1})^{-1} = A(\lambda^{-1} + A)^{-1}$ (item (ii) da Proposição 1.4) temos,

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{n-\alpha} A^n \phi &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-(n-\alpha))} \int_0^\infty \mu^{n-\alpha-1} [A^{-1}(\mu + A^{-1})^{-1}]^n A^n \phi d\mu \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \mu^{-\alpha-1} \left[A^{-1} A \left(\frac{1}{\mu} + A \right)^{-1} \right]^n A^n \phi d\mu \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \mu^{-\alpha-1} \left[\left(\frac{1}{\mu} + A \right)^{-1} A \right]^n \phi d\mu. \end{aligned}$$

Por fim, fazendo a mudança de variáveis $\mu = \lambda^{-1}$, segue que $d\mu = -\lambda^{-2} d\lambda$ e assim, uma vez que A comuta com $(\lambda + A)^{-1}$ temos,

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{n-\alpha} A^n \phi &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_\infty^0 (\lambda^{-1})^{-\alpha-1} \left[\left(\frac{1}{\lambda^{-1}} + A \right)^{-1} A \right]^n \phi (-\lambda^{-2}) d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^n \phi d\lambda = J^\alpha \phi. \end{aligned}$$

Portanto, A^α estende J^α . □

Teorema 2.29 (Aditividade, [4], 106). *Se A é não limitado, $0 \in \rho(A)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+$, então*

$$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.26

$$(A^{-1})^\alpha (A^{-1})^\beta = (A^{-1})^{\alpha+\beta},$$

logo,

$$A^\alpha A^\beta = [(A^{-1})^\alpha]^{-1} [(A^{-1})^\beta]^{-1} = [(A^{-1})^\alpha (A^{-1})^\beta]^{-1} = [(A^{-1})^{\alpha+\beta}]^{-1} = A^{\alpha+\beta}.$$

□

Por último, seja A um operador não limitado com inversa não limitada, ou seja, tal que $0 \in \rho(A)$. Considere $\varepsilon > 0$. Como o operador A é não negativo, então $A + \varepsilon$ é não-negativo e, além disso, como $-\varepsilon \in \rho(A)$ segue que $0 \in \rho(A + \varepsilon)$. Logo, está bem definido $(A + \varepsilon)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}_+$.

Esta observação é importante para definirmos potência fracionária no terceiro e último caso, como faremos a seguir.

Definição 2.30. *Se A é não limitado e $0 \in \sigma(A)$, definimos*

$$A^\alpha = s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha.$$

Observe que $D(A^\alpha)$, neste caso, é formado pelos elementos $\phi \in X$ tais que $\phi \in D[(A + \varepsilon)^\alpha]$ para todo $\varepsilon > 0$ suficiente próximo de 0 e tais que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha \phi$ existe. Nestes termos,

$$A^\alpha \phi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha \phi.$$

Observe ainda que $D(A^\alpha) \subset \overline{D(A)}$. De fato, $R[(A + \varepsilon)^\alpha] = D\{[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha\}$ e como $(A + \varepsilon)^{-1}$ é limitado segue que $[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha$ é limitado e portanto, $D\{[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha\} = X$.

Agora, note que $R[(A + \varepsilon)^{-1}] = D(A + \varepsilon) = D(A)$, assim, pela Proposição 2.7 segue que

$$\begin{aligned} D[(A + \varepsilon)^\alpha] &= R\{[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha\} \subset \overline{D[(A + \varepsilon)^{-1}] \cap R[(A + \varepsilon)^{-1}]} \\ &= \overline{X \cap D(A)} = \overline{D(A)}. \end{aligned}$$

Portanto, se $\phi \in D(A^\alpha)$, então $\phi \in D[(A + \varepsilon)^\alpha]$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente próximo de 0, logo, $\phi \in \overline{D(A)}$. Portanto, $D(A^\alpha) \subset \overline{D(A)}$.

Proposição 2.31 ([4], p. 107). *Se A é não limitado, $0 \in \sigma(A)$ e $\alpha \in \mathbb{C}_+$, então A^α estende J^α .*

Demonstração. Mostremos primeiramente que $D(J^\alpha) \subset D(A^\alpha)$. Para isso seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \operatorname{Re} \alpha < n$. Como já vimos, $D(J_A^\alpha) = D(A^n)$ e, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $D(J_{A+\varepsilon}^\alpha) = D[(A + \varepsilon)^n]$. Então, pela Proposição A.24 temos

$$D(J_A^\alpha) = D(A^n) = D[(A + \varepsilon)^n] = D(J_{A+\varepsilon}^\alpha). \quad (2.28)$$

Além disso, pela Proposição 2.28,

$$D(A^n) = D(J_{A+\varepsilon}^\alpha) \subset D[(A + \varepsilon)^\alpha].$$

Seja $\phi \in D(J^\alpha)$. Mostrar que $\phi \in D(A^\alpha)$ é equivalente a mostrar duas coisas:

(i) $\phi \in D[(A + \varepsilon)^\alpha]$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

(ii) O limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha \phi$ existe.

Observe que (i) é automaticamente satisfeita uma vez que $D(J^\alpha) = D(A^n)$ e $D(A^n) \subset D[(A + \varepsilon)^\alpha]$.

Agora, do fato de que $(A + \varepsilon)^\alpha$ estende $J_{A+\varepsilon}^\alpha$ e lembrando que $D(J_A^\alpha) = D(J_{A+\varepsilon}^\alpha)$, obtemos que para todo $\phi \in D(J_A^\alpha)$, $J_{A+\varepsilon}^\alpha \phi = (A + \varepsilon)^\alpha \phi$, ou seja,

$$(A + \varepsilon)^\alpha \phi = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n - \alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(A + \varepsilon)(A + \varepsilon + \lambda)^{-1}]^n d\lambda.$$

Então, por um raciocínio análogo ao que fizemos na demonstração da Proposição 2.25, o Teorema da Convergência Dominada garante a existência do limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha \phi$. Logo, $\phi \in D(A^\alpha)$.

Resta mostrar, então, que, para todo $\phi \in D(J^\alpha)$, $A^\alpha \phi = J^\alpha \phi$, ou seja, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha \phi = J^\alpha \phi$. Mas, ainda pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$A^\alpha \phi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha \phi = J^\alpha \phi,$$

o que encerra a prova. □

Os resultados que estudamos até agora nos permite relacionar os domínios dos operadores A e A^α para $\alpha \in \mathbb{C}_+$ da seguinte forma:

(i) $D(A^\alpha) \subset D(A)$, se A é limitado.

(ii) $D(A^\alpha) \subset \overline{D(A)}$, se A é não limitado.

Além disso, em ambos os casos, se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ vale $A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ vezes}}$.

Proposição 2.32. *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}_+$, $\mu \in \rho(A)$. Então*

$$(A - \mu)^{-1} A^\alpha \subset A^\alpha (A - \mu)^{-1}.$$

Demonstração. Ver [4], p. 107 □

Observação 2.33. *Dado $\varepsilon > 0$, o operador $A(A + \varepsilon)^{-1}$ é limitado e não negativo uma vez que se $\eta > 0$, então,*

$$\begin{aligned} A(A + \varepsilon)^{-1} + \eta &= A(A + \varepsilon)^{-1} + \eta(A + \varepsilon)(A + \varepsilon)^{-1} \\ &= A(A + \varepsilon)^{-1} + \eta A(A + \varepsilon)^{-1} + \varepsilon \eta (A + \varepsilon)^{-1} \\ &= (\eta + 1)A(A + \varepsilon)^{-1} + \varepsilon \eta (A + \varepsilon)^{-1} \\ &= (\eta + 1) \left(A + \frac{\varepsilon \eta}{\eta + 1} \right) (A + \varepsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

Teorema 2.34 ([4], p. 108). *Seja $\alpha \in \mathbb{C}_+$, então*

$$D[(A + \varepsilon)^\alpha] = D(A^\alpha) \quad (2.29)$$

e

$$[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha = A^\alpha[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha. \quad (2.30)$$

Demonstração. Faremos a demonstração considerando as três configurações possíveis para o operador A :

- (i) A limitado.
- (ii) A não limitado com $0 \in \rho(A)$.
- (iii) A não limitado com $0 \in \sigma(A)$.

Para (i), primeiramente considere $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$. Nesse caso $D[(A + \varepsilon)^\alpha] = D(A^\alpha) = X$. Agora, se

$$f(z) = z^\alpha, \quad g(z) = [(z + \varepsilon)^{-1}]^\alpha \text{ e } h(z) = [z(z + \varepsilon)^{-1}]^\alpha = f(z)g(z).$$

o Exemplo 2.23 garante que

$$f(A) = A^\alpha, \quad g(A) = [(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha \text{ e } h(A) = [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha.$$

Logo (2.30), para $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, segue da Fórmula do Produto (Teorema 2.24). Para os demais expoentes em $\mathbb{C}_+$ estendemos por analiticidade como fizemos na demonstração do Teorema 2.26.

Para (ii) observe que o item (i) da Proposição 1.4 garante a relação

$$(A + \varepsilon)^{-1} = \varepsilon^{-1}A^{-1}(A^{-1} + \varepsilon^{-1})^{-1}.$$

Então, como $0 \in \rho(A)$ segue que A^{-1} é limitado, assim, do item anterior,

$$[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha = \varepsilon^{-\alpha}(A^{-1})^\alpha[(A^{-1} + \varepsilon^{-1})^{-1}]^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}_+ \quad (2.31)$$

Agora note que $0 \in \rho\left([(A^{-1} + \varepsilon^{-1})^{-1}]^\alpha\right)$. De fato, como $[(A^{-1} + \varepsilon^{-1})^{-1}]^\alpha$ é fechado, basta que ele seja bijetor. Já sabemos que ele é injetor, além disso, note que

$$R\left([(A^{-1} + \varepsilon^{-1})^{-1}]^\alpha\right) = D[(A^{-1} + \varepsilon^{-1})^{-1}] = X,$$

pois $\varepsilon^{-1} \in \rho(A^{-1})$ donde $(A + \varepsilon)^{-1}$ é limitado.

Assim, segue da Equação (2.31) que $R[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha = R(A^{-1})^\alpha$. Logo, pela Definição 2.27 temos $D(A^\alpha) = R(A^{-1})^\alpha = R[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha = D[(A + \varepsilon)^\alpha]$.

Portanto, aplicando A^α de ambos os lados da Equação (2.31) e levando em conta o ítem (i) da Proposição 1.4 segue que

$$\begin{aligned} A^\alpha[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha &= \varepsilon^{-\alpha} A^\alpha (A^{-1})^\alpha [(A^{-1} + \varepsilon^{-1})^{-1}]^\alpha \\ &= [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha. \end{aligned}$$

Para (iii) observe que se $\varepsilon, \eta > 0$, então $0 \in \rho\left(A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}\right)$ e como $\frac{\varepsilon\eta}{\eta+1} + \frac{\varepsilon}{\eta+1} = \varepsilon$, a prova que fizemos para o caso (ii) garante que

$$D\left[\left(A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}\right)^\alpha\right] = D[(A + \varepsilon)^\alpha],$$

o que significa que $D[(A + \varepsilon)^\alpha]$ não depende de $\varepsilon > 0$.

Pela Observação 2.33 vale a relação

$$A(A + \varepsilon)^{-1} + \eta = (\eta + 1) \left(A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}\right) (A + \varepsilon)^{-1}.$$

Então, ainda pelo que fizemos no ítem (ii), mas agora para o operador $A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}$, temos

$$[A(A + \varepsilon)^{-1} + \eta]^\alpha = (\eta + 1)^\alpha \left(A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}\right)^\alpha [(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha, \quad (2.32)$$

ou ainda

$$\left(A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}\right)^\alpha = (\eta + 1)^{-\alpha} [A(A + \varepsilon)^{-1} + \eta]^\alpha (A + \varepsilon)^\alpha. \quad (2.33)$$

Mostremos agora que $D[(A + \varepsilon)^\alpha] = D(A^\alpha)$.

De fato, dado $\phi \in D[(A + \varepsilon)^\alpha]$, temos $\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}\right)^\alpha \phi$ existe, pois o limite do lado direito da equação (2.33) existe levando em conta a Observação 2.33 e a Proposição 2.25. Disto segue que $\phi \in D(A^\alpha)$.

Por outro lado, se $\psi \in D(A^\alpha)$ então $\psi \in D\left[\left(A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}\right)^\alpha\right]$, para η suficientemente pequeno, isto é, $\psi \in D[(A + \varepsilon)^\alpha]$. Portanto

$$D[(A + \varepsilon)^\alpha] = D(A^\alpha).$$

Por fim, mostremos (2.30). Considere $\phi \in X$, então,

$$\begin{aligned} [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha \phi &= \lim_{\eta \rightarrow 0} [A(A + \varepsilon)^{-1} + \eta]^\alpha \phi \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} (\eta + 1)^\alpha \left(A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}\right)^\alpha [(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha \phi. \end{aligned}$$

Note que o último limite existe, pois $[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha \phi \in D(A + \varepsilon) = \left[\left(A + \frac{\varepsilon\eta}{\eta+1}\right)^\alpha\right]$, para todo $\eta > 0$.

Portanto, pela Definição 2.30

$$[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha \phi = A^\alpha [(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha \phi$$

donde segue (2.30). □

Corolário 2.35 ([4], p. 109). A^α é um operador linear fechado.

Demonstração. Como A^α comuta com $[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha$ e pelo Teorema 2.34 segue que

$$\begin{aligned} A^\alpha &= (A + \varepsilon)^\alpha [(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha A^\alpha = (A + \varepsilon)^\alpha A^\alpha [(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha \\ &= (A + \varepsilon)^\alpha [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha. \end{aligned}$$

Então, como $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha$ é limitado (Observação 2.33) e $(A + \varepsilon)^\alpha$ é fechado, pois $[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha$ é limitado, segue que A^α é fechado. □

Lema 2.36. As funções Γ e B se relacionam da seguinte maneira:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Corolário 2.37 ([4], 109). Se A é não limitado, $0 \in \rho(A)$ e $\alpha \in \mathbb{C}_+$, então

$$A^\alpha \phi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A + \varepsilon)^\alpha \phi \quad (\phi \in D(A^\alpha) = D[(A + \varepsilon)^\alpha]).$$

Demonstração. Note que $A + \varepsilon = A(1 + \varepsilon A^{-1})$, assim, como $D(A^{-1}) = X$ pois A^{-1} é limitado, segue que $A^{-1}(A + \varepsilon) = 1 + \varepsilon A^{-1}$, ou ainda, $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^{-1} = 1 + \varepsilon A^{-1}$. Logo, pelo Teorema 2.34 segue que

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon A^{-1})^\alpha &= \{[A(A + \varepsilon)^{-1}]^{-1}\}^\alpha = \{[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha\}^{-1} \\ &= \{A^\alpha [(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha\}^{-1} = (A^{-1})^\alpha \{[(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha\}^{-1} \\ &= (A^{-1})^\alpha (A + \varepsilon)^\alpha. \end{aligned}$$

Então, para $\phi \in D(A^\alpha) = D[(A + \varepsilon)^\alpha]$, temos

$$(A + \varepsilon)^\alpha \phi = (1 + \varepsilon A^{-1})^\alpha A^\alpha \phi. \quad (2.34)$$

Agora, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re} \alpha$. Assim, como $1 + \varepsilon A^{-1}$ é limitado, pela Proposição 2.5 para

cada $\phi \in X$,

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon A^{-1})^\alpha \phi &= J_{1+\varepsilon A^{-1}}^\alpha \phi \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(1 + \varepsilon A^{-1})(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1}]^n \phi d\lambda. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Mostremos, agora, que $(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1} \rightarrow (\lambda + 1)^{-1}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato, note que $(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1} = 1$, assim,

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1} = 1 - \varepsilon A^{-1}(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1} \quad (2.36)$$

Então, como $(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1}$ é limitado segue que o lado esquerdo da Equação (2.36) converge para 1 quando $\varepsilon \rightarrow 0$, assim,

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1} \rightarrow 1,$$

logo, $(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1} \rightarrow (\lambda + 1)^{-1}$.

Agora, já mostramos que a integral que aparece 2.35 é absolutamente convergente, então, por um raciocínio análogo ao que fizemos na demonstração da Proposição 2.25 e pelo Teorema da Convergência dominada segue que,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon A^{-1})^\alpha \phi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(1 + \varepsilon A^{-1})(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1}]^n \phi d\lambda \right] \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(1 + \varepsilon A^{-1})(\lambda + 1 + \varepsilon A^{-1})^{-1}]^n \phi d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [(\lambda + 1)^{-1}]^n \phi d\lambda. \end{aligned}$$

Então, fazendo a mudança de variáveis $\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}$, observe que se $\lambda \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$ e se $\lambda \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 1$ e ainda $d\lambda = \frac{1}{(1-\mu)^2} d\mu$. Logo, utilizando o Lema 2.36, temos,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon A^{-1})^\alpha \phi &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{\mu}{1-\mu} \right)^{\alpha-1} \left[\left(\frac{\mu}{1-\mu} + 1 \right)^{-1} \right]^n \left(\frac{1}{(1-\mu)^2} \right) \phi d\mu \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{\mu}{1-\mu} \right)^{\alpha-1} \left[\left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{-1} \right]^n \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^2 \phi d\mu \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \mu^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{-n} \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^2 \phi d\mu \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \mu^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{\alpha-n+1} \phi d\mu \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \mu^{\alpha-1} (1-\mu)^{n-\alpha-1} \phi d\mu = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)} \phi = \phi. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando o limite de ambos os lados da Equação (2.34) segue o resultado. $\square$

Para demonstrar a aditividade para o caso em que A é não limitado e $0 \in \sigma(A)$ iremos fazer uso do lema a seguir.

Lema 2.38 ([4], p. 109). *Sejam $\gamma, \delta \in \mathbb{C}_+$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então $\phi \in D(A^\gamma)$ se, e somente se, $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta \phi \in D(A^\gamma)$ e*

$$(A + \varepsilon)^\gamma [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta \phi = [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta (A + \varepsilon)^\gamma \phi. \quad (2.37)$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $\phi \in D(A^\gamma)$, então, $\phi \in D[(A + \varepsilon)^\gamma]$ para $\varepsilon > 0$ pequeno e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A + \varepsilon)^\gamma \phi$ existe.

Mostremos que $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta \phi \in D(A^\gamma)$. Observe primeiramente que, como $[A(A + \varepsilon)^{-1}]$ e $(A + \varepsilon)^{-1}$ são limitados e $[(A + \varepsilon)^{-1} + \lambda]^{-1}$ e $[A(A + \varepsilon)^{-1} + \mu]^{-1}$ comutam, da definição do Operador de Balakrishnan segue que $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta$ e $[(A + \varepsilon)^{-1}]^\gamma$ comutam. Assim,

$$\begin{aligned} [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta (A + \varepsilon)^\gamma \phi &= (A + \varepsilon)^\gamma [(A + \varepsilon)^{-1}]^\gamma [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta (A + \varepsilon)^\gamma \phi \\ &= (A + \varepsilon)^\gamma [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta [(A + \varepsilon)^{-1}]^\gamma (A + \varepsilon)^\gamma \phi \\ &= (A + \varepsilon)^\gamma [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta \phi. \end{aligned}$$

Logo, como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A + \varepsilon)^\gamma [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta \phi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta (A + \varepsilon)^\gamma \phi$ existe, segue que $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta \phi \in D(A^\gamma)$ e que vale (2.37).

Reciprocamente, suponhamos que $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta \phi \in D(A^\gamma)$. Considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re} \delta$ e tome $\eta = (n - \operatorname{Re} \delta) - i \operatorname{Im} \delta$. Note que $\eta \in \mathbb{C}_+$ e ainda $\delta + \eta = \operatorname{Re} \delta + i \operatorname{Im} \delta + (n - \operatorname{Re} \delta) - i \operatorname{Im} \delta = n$. Logo, como $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta \phi \in D(A^\gamma)$, pela primeira parte deste lema segue que $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\eta [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\delta \phi \in D(A^\gamma)$, então, pela aditividade da potência fracionária do operador $A(A + \varepsilon)^{-1}$ concluímos que $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^n \phi \in D(A^\gamma)$.

Vamos mostrar que se $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^n \phi \in D(A^\gamma)$, então $\phi \in D(A^\gamma)$.

Faremos por indução sobre n . Para $n = 1$, ou seja, $\operatorname{Re} \delta > 1$, considere $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \operatorname{Re} \gamma$ e observe a já conhecida identidade,

$$[\varepsilon(\varepsilon + A)^{-1}]^m \phi = \phi + \sum_{1 \leq p \leq m} (-1)^p \binom{m}{p} [A(\varepsilon + A)^{-1}]^p \phi,$$

ou seja,

$$\phi = [\varepsilon(\varepsilon + A)^{-1}]^m \phi - \sum_{1 \leq p \leq m} (-1)^p \binom{m}{p} [A(\varepsilon + A)^{-1}]^p \phi.$$

Para concluirmos a prova, basta mostrar que $[\varepsilon(A + \varepsilon)^{-1}]^m \phi \in D(A^\gamma)$, pois, uma vez que $A(A +$

$\varepsilon)^{-1}\phi \in D(A^\gamma)$, pela primeira parte deste lema segue que $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^p \phi \in D(A^\gamma)$ para todo $p \in \mathbb{N}$, então, ϕ pode ser escrito como a soma de dois elementos de $D(A^\gamma)$ e portanto, está em $D(A^\gamma)$.

Para mostrarmos que $[\varepsilon(A + \varepsilon)^{-1}]^m \phi \in D(A^\gamma)$ observe que $[(A + \varepsilon)^{-1}]^m \phi \in D[(A + \varepsilon)^m] \subset D[(A + \varepsilon)^\gamma] = D(A^\gamma)$ pelo Teorema 2.34.

Os demais casos seguem de maneira análoga. $\square$

Teorema 2.39 (Aditividade, [4], p. 110). *Seja A um operador não negativo, não limitado tal que $0 \in \sigma(A)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+$. Então*

$$A^{\alpha+\beta} = A^\beta A^\alpha.$$

Demonstração. Seja $\phi \in D(A^{\alpha+\beta})$. Pelo Teorema 2.34, $\phi \in D[(A + \varepsilon)^{\alpha+\beta}]$ para todo $\varepsilon > 0$. Agora, pela aditividade de $A + \varepsilon$, segue que

$$(A + \varepsilon)^{\alpha+\beta} \phi = (A + \varepsilon)^\beta (A + \varepsilon)^\alpha \phi, \quad (2.38)$$

assim, $\phi \in D[(A + \varepsilon)^\alpha] = D(A^\alpha)$ e ainda $A^\alpha \phi = [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha (A + \varepsilon)^\alpha \phi$ também pelo Teorema 2.34.

Agora observe que, pela equação (2.38) segue que $(A + \varepsilon)^\alpha \phi \in D[(A + \varepsilon)^\beta]$, então, pelo Lema 2.38 segue que $A^\alpha \phi = [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha (A + \varepsilon)^\alpha \phi \in D[(A + \varepsilon)^\beta] = D(A^\beta)$. e

$$(A + \varepsilon)^\beta A^\alpha \phi = [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha (A + \varepsilon)^{\alpha+\beta} \phi. \quad (2.39)$$

Aplicando $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^\beta$ de ambos os lados da Equação (2.39), temos

$$\begin{aligned} [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\beta (A + \varepsilon)^\beta A^\alpha \phi &= A^\beta A^\alpha \phi \\ &= [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\beta [A(A + \varepsilon)^{-1}]^\alpha (A + \varepsilon)^{\alpha+\beta} \phi \\ &= [A(A + \varepsilon)^{-1}]^{\alpha+\beta} (A + \varepsilon)^{\alpha+\beta} \phi = A^{\alpha+\beta} \phi. \end{aligned}$$

Logo, $D(A^{\alpha+\beta}) \subset D(A^\alpha A^\beta)$ e $A^{\alpha+\beta} \phi = A^\beta A^\alpha \phi$ para todo $\phi \in D(A^{\alpha+\beta})$.

Por outro lado, seja $\phi \in D(A^\alpha)$ tal que $A^\alpha \phi \in D(A^\beta)$. Uma vez que $[(A + \varepsilon)^{-1}]^{\alpha+\beta} \phi \in D[(A + \varepsilon)^{\alpha+\beta}] = D(A^{\alpha+\beta})$, temos

$$\begin{aligned} [(A + \varepsilon)^{-1}]^{\alpha+\beta} A^\beta A^\alpha \phi &= A^\beta A^\alpha [(A + \varepsilon)^{-1}]^{\alpha+\beta} \phi \\ &= A^{\alpha+\beta} [(A + \varepsilon)^{-1}]^{\alpha+\beta} \phi \\ &= [A(A + \varepsilon)^{-1}]^{\alpha+\beta} \phi. \end{aligned}$$

Assim, $[A(A + \varepsilon)^{-1}]^{\alpha+\beta} \phi \in D[(A + \varepsilon)^{\alpha+\beta}] = D(A^{\alpha+\beta})$ e portanto, pelo Lema 2.38, $\phi \in D(A^{\alpha+\beta})$ o que completa a prova, pois já mostramos que para $\phi \in D(A^{\alpha+\beta})$,

$$A^{\alpha+\beta} \phi = A^\beta A^\alpha \phi.$$

□

Corolário 2.40 ([4], p. 110 e 111). *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+$. Então,*

(i) *$\phi \in D(\overline{J^\alpha})$ se, e somente se $\phi \in D(A^\alpha)$ e $A^\alpha \phi \in \overline{D(A)}$. Além disso,*

$$\overline{J^\alpha} = A_D^\alpha,$$

onde A_D é a parte do operador A em $\overline{D(A)}$.

(ii) $\overline{J^\alpha} = A^\alpha$ se, e somente se, $\overline{D(A)} = X$.

(iii) $\overline{J^\alpha J^\beta} = \overline{J^{\alpha+\beta}}$.

Demonstração. Observe que pelo Corolário 2.35 e as Proposições 2.28 e 2.31 segue que A^α é uma extensão de $\overline{J^\alpha}$. Assim, $D(\overline{J^\alpha}) \subset D(A^\alpha)$ e $\overline{J^\alpha} \phi = A^\alpha \phi$ para todo $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$.

(i) Suponha que $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$, assim, pela observação acima, $\phi \in D(A^\alpha)$.

Além disso, note que $R(\overline{J^\alpha}) \subset \overline{D(A)}$. De fato, dado $\psi \in R(\overline{J^\alpha})$, existe $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$ tal que

$$\overline{J^\alpha} \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} J^\alpha \phi_n = \psi,$$

onde $(\phi_n) \subset D(J^\alpha)$ é uma sequência tal que $\phi_n \rightarrow \phi$ quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, pela Proposição 2.7 segue que $R(J^\alpha) \subset \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} \subset \overline{D(A)}$, assim, ψ é o limite de uma sequência cujos elementos estão em $\overline{D(A)}$, logo, $\psi \in \overline{D(A)}$.

Portanto, como A^α estende $\overline{J^\alpha}$ e $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$, segue que $\overline{J^\alpha} \phi = A^\alpha \phi \in \overline{D(A)}$.

Suponha agora que $\phi \in D(A^\alpha) \subset \overline{D(A)}$ e $A^\alpha \phi \in \overline{D(A)}$. Fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re} \alpha$, então, pelo item (i) da Proposição 1.5 segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n \phi = \phi.$$

Sabemos que para cada $\lambda > 0$, $[\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n \phi \in D[(\lambda + A)^n] = D(A^n) = D(J^\alpha)$, assim, ϕ pode ser visto como o limite de uma sequência cujos elementos estão em $D(J^\alpha)$. Resta mostrarmos que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J^\alpha [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n \phi$ existe para concluirmos que $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$.

De fato, como $[\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n \phi \in D(J^\alpha) \subset D(\overline{J^\alpha})$, $\phi \in D(A^\alpha) = D[(\lambda + A)^{-1} A^\alpha]$ e $A^\alpha \phi \in \overline{D(A)}$, levando em conta a Proposição 2.32 e o item (i) da Proposição 1.5 temos

$$\begin{aligned} \overline{J^\alpha} \phi &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} J^\alpha [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n \phi = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \overline{J^\alpha} [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n \phi \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A^\alpha [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n \phi \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n A^\alpha \phi = A^\alpha \phi, \end{aligned}$$

ou seja, o limite $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J^\alpha [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^n \phi$, logo, $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$.

Além disso, observe que $D(A_D^\alpha) = \left\{ \phi \in D(A^\alpha) \cap \overline{D(A)}; A^\alpha \phi \in \overline{D(A)} \right\} = \left\{ \phi \in D(A^\alpha); A^\alpha \phi \in \overline{D(A)} \right\}$. Mostramos, então, que $D(\overline{J^\alpha}) = D(A_D^\alpha)$ e ainda $\overline{J^\alpha} \phi = A_D^\alpha \phi$ para todo $\phi \in D(\overline{J^\alpha}) = D(A_D^\alpha)$. Portanto,

$$\overline{J^\alpha} = A_D^\alpha.$$

(ii) Suponhamos que $\overline{J^\alpha} = A^\alpha$ e $\overline{D(A)} \neq X$. Assim, $D(A_D^\alpha) \neq \{ \phi \in D(A^\alpha); A^\alpha \phi \in X \}$, assim, existe $\phi \in D(A^n)$ tal que $A^n \phi \notin \overline{D(A)}$ com $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re} \alpha$. Assim, como $A^\alpha A^{n-\alpha} \phi = A^n \phi \notin \overline{D(A)}$, segue que $\phi \in D(\overline{J^\alpha})$ mas $\phi \notin D(A_D^\alpha)$, o que implica que A^α é uma extensão estrita de $\overline{J^\alpha}$. Absurdo.

Agora, se $\overline{D(A)} = X$, $\overline{J^\alpha} = A^\alpha$ pelo item anterior.

(iii) Pela aditividade da potência fracionária e pelo item (i) temos

$$\overline{J^\alpha J^\beta} = A_D^\alpha A_D^\beta = A_D^{\alpha+\beta} = \overline{J^{\alpha+\beta}}.$$

□

Proposição 2.41. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}_+$. Assuma que T é um operador limitado tal que*

$$T(\mu - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}T, \quad (2.40)$$

para algum $\mu \in \rho(A)$. Então

$$TA^\alpha \subset A^\alpha T.$$

Demonstração. Ver [4], p. 115. □

Os dois últimos resultados dessa seção dizem respeito ao operador adjunto e à multiplicidade dos expoentes do operador potência fracionária. Por motivos técnicos, omitiremos estas demonstrações.

Proposição 2.42. (i) *Se A é densamente definido, então para $\alpha \in \mathbb{C}_+$*

$$(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*.$$

(ii) *Se A é injetivo, então para todo $\alpha \in \mathbb{C}_+$, A^α também é e*

$$(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1}.$$

Demonstração. Ver [4], p. 116. □

Proposição 2.43 (Multiplicabilidade). *Se $0 < \alpha < 1$, então A^α é não negativo. Além disso, para todo $\beta \in \mathbb{C}_+$*

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}.$$

Demonstração. Ver [4], p. 116. □

2.3.2 Teorema da Aplicação Espectral

Nosso objetivo nessa seção é mostrar um Teorema Espectral para a potência fracionária de operadores. Os resultados a seguir estabelecem fórmulas integrais que definem o operador resolvente da potência fracionária; estes serão necessários para a demonstração não só desse Teorema, como também do resultado que garante que, sob certas condições sobre α , se A é setorial então A^α também o é. Por quesitos técnicos omitiremos as suas demonstrações que podem ser vistas em [4], Cap. 4.

Proposição 2.44. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} \alpha > |\alpha|^2$. O conjunto*

$$\Omega_\alpha = \mathbb{C}^* \setminus \{\lambda^\alpha e^{i\theta\alpha}; \lambda > 0, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

é não vazio e se $-\mu \in \Omega_\alpha$,

$$(\mu + A^\alpha)^{-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^{2\alpha} + 2\lambda^\alpha \mu \cos \alpha\pi + \mu^2} (\lambda + A)^{-1} d\lambda. \quad (2.41)$$

Proposição 2.45. *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} \alpha > |\alpha|^2$ e $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. $s^\alpha \notin \sigma(A^\alpha)$ se, e somente se $s \notin \sigma(A)$ e*

$$(A^\alpha - s^\alpha)^{-1} = \frac{1}{\alpha} s^{1-\alpha} (A - s)^{-1} + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^{2\alpha} - 2\lambda^\alpha s^\alpha \cos \alpha\pi + s^{2\alpha}} (\lambda + A)^{-1} d\lambda. \quad (2.42)$$

Proposição 2.46. *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} \alpha > |\alpha|^2$ e $r > 0$. Então $r^\alpha e^{\pm i\alpha\pi} \notin \sigma(A^\alpha)$ e*

$$\begin{aligned} (A^\alpha - r^\alpha e^{\pm i\alpha\pi})^{-1} &= -r^{1-\alpha} e^{\mp i\pi\alpha} (A + r)^{-1} \\ &+ \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\lambda - r)\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda^\alpha - r^\alpha)(\lambda^\alpha - e^{\pm 2\pi i\alpha} r^\alpha)} A(\lambda + A)^{-1} (r + A)^{-1} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Lema 2.47. *Se $\operatorname{Re} \alpha > 0$, então $0 \in \sigma(A)$ se, e somente se $0 \in \sigma(A^\alpha)$.*

Lema 2.48. *Se um operador linear fechado A tem conjunto resolvente não vazio então A^n é um operador linear fechado para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 2.49. *Seja A um operador linear fechado com conjunto resolvente não vazio. Se $\sigma(A) \neq \emptyset$, então*

$$\sigma(A^n) = \{z^n; z \in \sigma(A)\}$$

e se $\sigma(A) = \emptyset$ então $\sigma(A^n) = \emptyset$.

Estamos prontos para o Teorema.

Teorema 2.50 (Teorema da Aplicação Espectral, [4], p. 121). *Seja $\alpha \in \mathbb{C}_+$. Se $\sigma(A)$ é não vazio então*

$$\sigma(A^\alpha) = \{z^\alpha; z \in \sigma(A)\}.$$

Nós consideramos o argumento principal de z^α e convencionamos que $0^\alpha = 0$.

Se $\sigma(A) = \emptyset$ então $\sigma(A^\alpha) = \emptyset$.

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{C}_+$ tal que $\operatorname{Re} \alpha > |\alpha|^2$ e considere os seguintes conjuntos:

$$\Omega_1 = \{s^\alpha; s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-\} \quad \Omega_2 = \{\lambda^\alpha e^{\pm i\pi\alpha}; \lambda > 0\} \quad \Omega_3 = \mathbb{C}^* \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

Observe que $\Omega_2 \cap \sigma(A^\alpha) = \emptyset$ uma vez que pela Proposição 2.46 temos $r^\alpha e^{\pm i\pi\alpha} \notin \sigma(A^\alpha)$ para $r > 0$. Observe ainda que $\Omega_3 \cap \sigma(A^\alpha) = \emptyset$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \mathbb{C}^* \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathbb{C}^* \cap (\Omega_1 \cup \Omega_2)^c \\ &= \mathbb{C}^* \cap (\Omega_1^c \cap \Omega_2^c) = (\mathbb{C}^* \cap \Omega_1^c) \cap (\mathbb{C}^* \cap \Omega_2^c) \\ &= (\mathbb{C}^* \setminus \Omega_1) \cap (\mathbb{C}^* \setminus \Omega_2) \subset \mathbb{C}^* \setminus \Omega_1; \end{aligned}$$

Repare agora que $(\mathbb{C}^* \setminus \Omega_1) \cap \sigma(A^\alpha) = \emptyset$ uma vez que

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^* \setminus \Omega_1) \cap \sigma(A^\alpha) = \emptyset &\iff [(\mathbb{C}^* \setminus \Omega_1) \cap \sigma(A^\alpha)]^c = \mathbb{C} \\ &\iff \Omega_1 \cup \rho(A^\alpha) = \mathbb{C}^* \\ &\iff \sigma(A^\alpha)^* \cap [\Omega_1 \cup \rho(A^\alpha)] = \sigma(A^\alpha)^* \cap \mathbb{C}^* \\ &\iff \sigma(A^\alpha)^* \cap \Omega_1 = \sigma(A^\alpha)^*, \end{aligned} \tag{2.44}$$

e a equação (2.44) se verifica pois, dado $\mu \in \sigma(A^\alpha)$, pela Proposição 2.45 segue que $\mu^{\frac{1}{\alpha}} \in \sigma(A)$ e como A é não negativo, $\mu^{\frac{1}{\alpha}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ e, portanto, $\mu = (\mu^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha \in \Omega_1$.

Portanto, $\Omega_3 \cap \sigma(A^\alpha) = \emptyset$ e, novamente pela equação (2.44),

$$\sigma(A^\alpha)^* \subset \Omega_1. \tag{2.45}$$

Por outro lado, observe que, se $\sigma(A) \neq \emptyset$, então $\Omega_1 \cap \sigma(A^\alpha) = \{s^\alpha; s \neq 0 \text{ e } s \in \sigma(A)\}$.

De fato, seja $\mu \in \Omega_1 \cap \sigma(A^\alpha)$, então, $\mu \in \Omega_1$ e $\mu \in \sigma(A^\alpha)$, logo, $\mu = s^\alpha$ para algum $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ e $s \in \sigma(A)$, logo, $\mu = s^\alpha$ com $s \neq 0$ e $s \in \sigma(A)$, o que implica que $\Omega_1 \cap \sigma(A^\alpha) \subset \{s^\alpha; s \neq 0 \text{ e } s \in \sigma(A)\}$. Reciprocamente, seja $\mu \in \{s^\alpha; s \neq 0 \text{ e } s \in \sigma(A)\}$, então, $\mu = s^\alpha$ com $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ e $\mu \in \sigma(A^\alpha)$ pois $s \in \sigma(A)$, o que implica que $\{s^\alpha; s \neq 0 \text{ e } s \in \sigma(A)\} \subset \Omega_1 \cap \sigma(A^\alpha)$. Portanto, $\Omega_1 \cap \sigma(A^\alpha) = \{s^\alpha; s \neq 0 \text{ e } s \in \sigma(A)\}$.

E ainda, da Proposição 2.45 segue que $\Omega_1 \cap \sigma(A^\alpha) = \emptyset$ caso $\sigma(A) = \emptyset$.

Consequentemente, de (2.45) segue que, para $\sigma(A) \neq \emptyset$, $\sigma(A^\alpha)^* = \{s^\alpha; s \neq 0 \text{ e } s \in \sigma(A)\}$, e para $\sigma(A) = \emptyset$, $\sigma(A^\alpha) = \emptyset$.

Por fim, pelo Lema 2.47, $\sigma(A^\alpha) = \{z^\alpha; z \in \sigma(A)\}$, se $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Para o caso em que $\alpha \in \mathbb{N}$ o Lema 2.49 garante o resultado.

Agora, observe na figura 2.1 a representação geométrica do conjunto de números complexos $\{\alpha \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \alpha > |\alpha|^2\} \subset \mathbb{C}_+$.

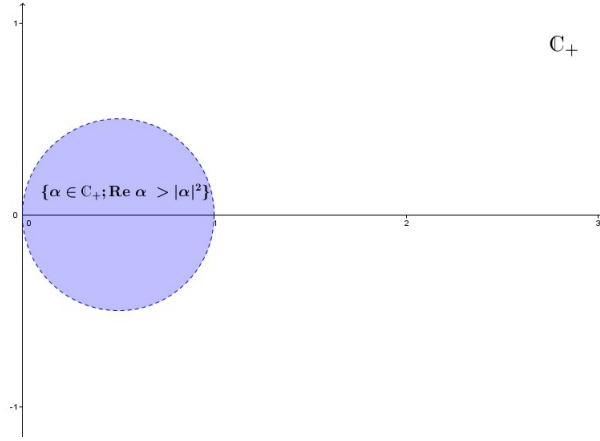


Figura 2.1: Representação geométrica do conjunto $\{\alpha \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \alpha > |\alpha|^2\}$

Então para cada $\alpha \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{N}$, podemos encontrar um número natural n tal que $\beta = \frac{\alpha}{n}$ é tal que $\operatorname{Re} \beta > |\beta|^2$, como indica a figura 2.2.

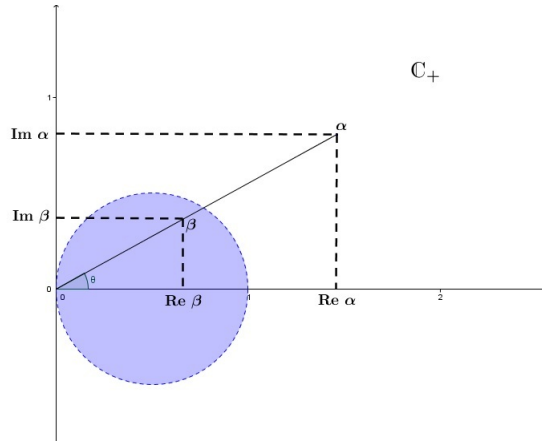


Figura 2.2: Representação geométrica de α e $\beta = \frac{\alpha}{n}$

E então, nesse caso, pela aditividade da potência fracionária (observe que estamos usando a aditividade e não a multiplicabilidade), temos,

$$\sigma(A^\alpha) = \sigma \left[\left(A^{\frac{\alpha}{n}} \right)^n \right] = \{z^n; z \in \sigma(A^{\frac{\alpha}{n}})\} = \{z^\alpha; z \in \sigma(A)\}.$$

□

2.3.3 O espectro do Laplaciano Fracionário Unidimensional

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto limitado, vamos supor $\Omega = (0, L)$, $L > 0$ para facilitar os cálculos. Nesta seção iremos mostrar que $\sigma[(-\Delta_2)^\alpha] = \{z^\alpha; z \in \sigma(-\Delta_2)\}$ onde Δ_2 é a parte do operador Laplaciano distribucional em $L^2(\Omega)$ tal como foi definido em [4], p. 37. Considere o seguinte problema de autovalor do Laplaciano com condições de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_2 u = \lambda u & \text{em } \bar{\Omega} \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Os fatos a seguir foram mostrados em [4], p. 37, 38 e 39.

- (i) $-\Delta_2$ é fechado e m-acretivo.
- (ii) $-\Delta_2$ é injetivo e tem domínio e imagem densos.
- (iii) $-\Delta_2$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e de contrações.
- (iv) $-\Delta_2$ é simétrico, ou seja, $\langle -\Delta_2 u, v \rangle = \langle u, -\Delta_2 v \rangle$ para toda $u, v \in L^2(\Omega)$. Isso implica que todos os seus auto valores são reais.
- (v) $-\Delta_2$ é positivo no sentido de que $\langle -\Delta_2 u, u \rangle \geq 0$ para toda $u \in L^2(\Omega)$.
- (vi) $-\Delta_2$ admite uma extensão auto-adjunta. Isso implica que $-\Delta_2$ admite uma base ortonormal de autofunções. Além disso, nessas condições $D(-\Delta_2) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Observe que $\lambda \in \sigma(-\Delta_2)$ se, e somente se existe $u \in D(-\Delta_2)$ tal que $-\Delta_2 u = \lambda u$, e ainda,

$$\begin{aligned} -\Delta_2 u = \lambda u &\iff -u''(x) = \lambda u(x) \iff u''(x) = -\lambda u(x) \\ &\iff u(x) = K_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + K_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \end{aligned}$$

Pelas condições de Dirichlet, temos $u(0) = u(L) = 0$, ou seja, $u(0) = K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0) = K_2$ donde segue que $K_2 = 0$ e $u(L) = K_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ donde segue que $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$, ou seja, $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$. Logo o conjunto $\left\{\lambda_n; \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n = 1, 2, 3, \dots\right\}$ é o espectro do operador $-\Delta_2$. Além disso, as funções u_n associadas a cada autovalor λ_n são dadas por $u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

Agora, pelo Corolário 2.40, como $-\Delta_2$ é densamente definido, dado $\alpha \in \mathbb{C}_+$ segue que

$$(-\Delta_2)^\alpha = \overline{J^\alpha},$$

isto é $(-\Delta_2)^\alpha : D[(-\Delta_2)^\alpha] \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ onde $D[(-\Delta_2)^\alpha] = D(\overline{J^\alpha})$.

Mostraremos, agora, alguns fatos sobre o operador $(-\Delta_2)^\alpha$.

Proposição 2.51. $(-\Delta_2)^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}_+$ é autoadjunto.

Demonstração. Como $-\Delta_2$ é densamente definido e autoadjunto, segue da Proposição 2.42 que

$$[(-\Delta_2)^\alpha]^* = [(-\Delta_2)^*]^\alpha = (-\Delta_2)^\alpha,$$

logo, $(-\Delta_2)^\alpha$ é autoadjunto. $\square$

Proposição 2.52. $[(-\Delta_2)^\alpha]^{-1}$ é limitado.

Demonstração. Como $0 \notin \sigma(-\Delta_2)$, então, pelo Lema 2.47, $0 \notin \sigma[(-\Delta_2)^\alpha]$. Logo, $0 \in \rho[(-\Delta_2)^\alpha]$ donde segue que $[(-\Delta_2)^\alpha]^{-1}$ é limitado. $\square$

Proposição 2.53. $\sigma[(-\Delta_2)^\alpha] = \sigma_p[(-\Delta_2)^\alpha] \subset \mathbb{R}$.

Demonstração. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta (Ver [13], p. 10). Agora, observe que $D(-\Delta_2) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, o que garante que $D(-\Delta_2)$ é um espaço de Banach.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re} \alpha$. Sabemos que $(-\Delta_2)^\alpha = \overline{J^\alpha}$, assim, $D[(-\Delta_2)^\alpha] = D(\overline{J^\alpha}) = \{\phi \in L^2(\Omega); \exists(\phi_m) \subset D(J^\alpha) \text{ tal que } \phi_m \rightarrow \phi, m \rightarrow \infty \text{ e } (J^\alpha \phi_m) \text{ converge}\}$. Mas, se $n > \operatorname{Re} \alpha$ então $D(J^\alpha) = D[(-\Delta_2)^n] \subset D(-\Delta_2) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e como $D(-\Delta_2)$ é espaço de Banach segue que $D(\overline{J^\alpha}) \subset D(-\Delta_2) \subset H_0^1(\Omega)$, logo, como a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta segue que a imersão de $D(-\Delta_2)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta.

Pelo Teorema A.20 segue que $\sigma[(-\Delta_2)^\alpha] = \sigma_p[(-\Delta_2)^\alpha] \subset \mathbb{R}$. $\square$

Teorema 2.54. Se ξ é um autovalor de $-\Delta_2$ associado a autofunção φ , então ξ^α é um autovalor de $(-\Delta_2)^\alpha$ associado a autofunção φ .

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \operatorname{Re} \alpha$. Observe que, como φ é autofunção de $(-\Delta_2)$ associada ao autovalor ξ , então, segue que $(-\Delta_2)\varphi = \xi\varphi$, logo, $(-\Delta_2)^n\varphi = \xi^n\varphi$, portanto, $\varphi \in D[(-\Delta_2)^n] = D(J^\alpha)$ e ainda $(-\Delta)^\alpha = J^\alpha$ em $D(J^\alpha)$.

Note agora que $[\lambda + (-\Delta_2)]\varphi = \lambda\varphi + (-\Delta_2)\varphi = \lambda\varphi + \xi\varphi = (\lambda + \xi)\varphi$. Assim, $[\lambda + (-\Delta_2)]^{-n} = (\lambda + \xi)^{-n}\varphi$. Assim,

$$\begin{aligned}
 (-\Delta_2)^\alpha \varphi &= J^\alpha \varphi = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (-\Delta_2)^n (\lambda + \xi)^{-n} \varphi d\lambda \\
 &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \xi^n (\lambda + \xi)^{-n} \varphi d\lambda \\
 &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \xi^n (\lambda + \xi)^{-n} \varphi d\lambda \\
 &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{\xi\mu}{1-\mu} \right)^{\alpha-1} \xi^n \left(\frac{\xi\mu}{1-\mu} + \xi \right)^{-n} \xi \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^2 \varphi d\mu \\
 &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \mu^{\alpha-1} \xi^{\alpha-1} \xi^n \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{\alpha-1} \xi^{-n} \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{-n} \xi \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^2 \varphi d\mu \\
 &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \mu^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{\alpha-n+1} \xi^\alpha \varphi d\mu \\
 &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \mu^{\alpha-1} (1-\mu)^{n-\alpha-1} \xi^\alpha \varphi d\mu \\
 &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)} \xi^\alpha \varphi = \xi^\alpha \varphi.
 \end{aligned}$$

onde fizemos a mudança de variáveis $\lambda = \frac{\xi\mu}{1-\mu}$, observamos que se $\lambda \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$ e se $\lambda \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 1$ e ainda $d\lambda = \frac{\xi}{(1-\mu)^2}d\mu$ e utilizamos o Lema 2.36.

Portanto, ξ^α é autovalor de $(-\Delta_2)^\alpha$ associado a autofunção φ . $\square$

De maneira análoga mostramos que se ξ é autovalor do operador $(-\Delta_2)^\alpha$ então existe um autovalor μ do operador $(-\Delta_2)$ tal que $\mu^\alpha = \xi$. Acabamos de verificar, portanto, que o Teorema Espectral de fato vale para a parte do operador Laplaciano distribucional em $L^2(\Omega)$, com condições de Dirichlet e com Ω limitado.

2.3.4 Setorialidade

Teorema 2.55 ([4], p. 123). *Se A é um operador ω -setorial, $\omega \in [0, \pi]$, e $\alpha > 0$ é tal que $\alpha\omega \leq \pi$, então A^α é $\alpha\omega$ -setorial.*

Demonstração. Suponhamos $\alpha > 0$ e observe que

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{\alpha}} &= e^{\ln(z^{\frac{1}{\alpha}})} = e^{\frac{1}{\alpha} \ln(z)} = e^{\frac{1}{\alpha} (\ln(|z|) + i \arg z)} \\ &= e^{\ln(|z|^{\frac{1}{\alpha}})} e^{i \frac{\arg z}{\alpha}} = |z|^{\frac{1}{\alpha}} e^{i \frac{\arg z}{\alpha}}, \end{aligned}$$

logo, $|z^{\frac{1}{\alpha}}| = |z|^{\frac{1}{\alpha}}$ e $\arg z^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \arg z$.

Afirmção 1: $\sigma(A^\alpha) \subset \overline{S_{\alpha\omega}}$.

De fato, seja $z \in \sigma(A^\alpha)$, então, pelo Teorema da Aplicação Espectral, $z^{\frac{1}{\alpha}} \in \sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$, ou seja, $0 \leq |\arg z^{\frac{1}{\alpha}}| \leq \omega$, logo, $0 \leq \frac{1}{\alpha} |\arg z| \leq \omega$, donde $0 \leq |\arg z| \leq \alpha\omega$. Portanto, $z \in \overline{S_{\alpha\omega}}$.

Afirmção 2: $M(\theta) = \sup_{\lambda > 0} \{ \|\lambda(\lambda e^{i\theta} - A^\alpha)^{-1}\| \} < \infty$ para todo $\alpha\omega \leq |\theta| \leq \pi, 0 < \alpha < 1$.

Considere $M = \sup_{\lambda > 0} \{ \|\lambda(\lambda e^{i\theta} - A)^{-1}\| \}$ para todo $\omega \leq |\theta| \leq \pi$, que existe pelo fato de A ser ω -setorial. Como $0 < \alpha < 1$, então, $\operatorname{Re} \alpha > |\alpha|^2$ o que garante a validade das fórmulas integrais (2.41), (2.42) e (2.43). Dividiremos a prova dessa afirmação em três casos.

Caso 2.1: $\alpha\pi \leq |\theta| \leq \pi$.

Nesse caso, se $z = \lambda e^{i\theta}$ então $z \in \Omega_\alpha$, logo, pela fórmula integral da proposição 2.44 temos,

$$\begin{aligned} \|\lambda(\lambda e^{i\theta} - A^\alpha)^{-1}\| &= \left\| \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda t^\alpha}{t^{2\alpha} + 2t^\alpha \lambda e^{i\theta} \cos \alpha\pi + \lambda^2 e^{2i\theta}} (t + A)^{-1} dt \right\| \\ &\leq \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \left\| \frac{\lambda t^\alpha}{t^{2\alpha} + 2t^\alpha \lambda e^{i\theta} \cos \alpha\pi + \lambda^2 e^{2i\theta}} (t + A)^{-1} \right\| dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} r$ temos $dt = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} dr$, e como esta mudança não altera o

domínio de integração segue que,

$$\begin{aligned}
\|\lambda(\lambda e^{i\theta} - A^\alpha)^{-1}\| &\leq \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \left\| \frac{\lambda t^\alpha}{t^{2\alpha} + 2t^\alpha \lambda e^{i\theta} \cos \alpha \pi + \lambda^2 e^{2i\theta}} (t + A)^{-1} \right\| dt \\
&= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \left\| \frac{\lambda(\lambda^{\frac{1}{\alpha}} r)^\alpha}{(\lambda^{\frac{1}{\alpha}} r)^{2\alpha} + 2(\lambda^{\frac{1}{\alpha}} r)^\alpha \lambda e^{i\theta} \cos \alpha \pi + \lambda^2 e^{2i\theta}} (\lambda^{\frac{1}{\alpha}} r + A)^{-1} \right\| \lambda^{\frac{1}{\alpha}} dr \\
&= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \left\| \frac{\lambda^2 r^{\alpha-1}}{\lambda^2 r^{2\alpha} + 2\lambda^2 r^\alpha e^{i\theta} \cos \alpha \pi + \lambda^2 e^{2i\theta}} \lambda^{\frac{1}{\alpha}} r (\lambda^{\frac{1}{\alpha}} r + A)^{-1} \right\| dr \\
&\leq \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{\alpha-1}}{|r^{2\alpha} + 2r^\alpha e^{i\theta} \cos \alpha \pi + e^{2i\theta}|} \left\| \lambda^{\frac{1}{\alpha}} r (\lambda^{\frac{1}{\alpha}} r + A)^{-1} \right\| dr \\
&\leq M \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{\alpha-1}}{|r^{2\alpha} + 2r^\alpha e^{i\theta} \cos \alpha \pi + e^{2i\theta}|} dr \\
&= M \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} \int_0^\infty \frac{\alpha r^{\alpha-1}}{(e^{i\theta} \sin \alpha \pi)^2 + (r^\alpha + e^{i\theta} \cos \alpha \pi)^2} dr \\
&= \frac{M}{\alpha \pi e^{i\theta}} \arctan \left(\frac{r^\alpha + e^{i\theta} \cos \alpha \pi}{e^{i\theta} \sin \alpha \pi} \right) \Big|_0^\infty \\
&= \frac{M}{\alpha \pi e^{i\theta}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\cot \alpha \pi) \right] \leq \infty.
\end{aligned}$$

Caso 2.2: $|\theta| = \alpha \pi$.

Nesse caso, $\theta = \pm \alpha \pi$, assim, tomando $r = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}$ segue que $z = r^\alpha e^{\pm \alpha \pi}$ e então pela fórmula integral da proposição 2.46 temos

$$\begin{aligned}
\|\lambda(\lambda e^{\pm \alpha \pi} - A^\alpha)^{-1}\| &\leq \left\| e^{\pm i \pi \alpha} \lambda^{\frac{1}{\alpha}} (A + \lambda^{\frac{1}{\alpha}})^{-1} \right\| \\
&\quad + \left\| \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda(t - \lambda^{\frac{1}{\alpha}})t^{\alpha-1}}{(t^\alpha - \lambda)^\alpha (t^\alpha - e^{\pm 2\pi i \alpha} \lambda)} A(t + A)^{-1} (\lambda^{\frac{1}{\alpha}} + A)^{-1} dt \right\|.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} s$ temos $dt = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} ds$, e como esta mudança não altera o domínio de integração segue que,

$$\begin{aligned}
\|\lambda(\lambda e^{\pm \alpha \pi} - A^\alpha)^{-1}\| &\leq M + \left\| \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{(s-1)s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - 1)(s^\alpha - e^{\pm 2\pi i \alpha})} A(\lambda^{\frac{1}{\alpha}} s + A)^{-1} \lambda^{\frac{1}{\alpha}} (\lambda^{\frac{1}{\alpha}} + A)^{-1} ds \right\| \\
&\leq M + (M+1)M \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{(s-1)s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - 1)(s^\alpha - e^{\pm 2\pi i \alpha})} \right| ds < \infty.
\end{aligned}$$

Caso 2.3: $\alpha \omega \leq |\theta| < \alpha \pi$.

Nesse caso, $z \in \rho(A^\alpha)$, então $z = \lambda e^{i\theta} = s^\alpha$ para algum $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \cap \rho(A)$, logo, para $\lambda > 0$ temos,

$$\begin{aligned} \|\lambda(\lambda e^{\pm i\alpha\pi} - A^\alpha)^{-1}\| &\leq \left\| \lambda \frac{1}{\alpha} (\lambda^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{i\theta}{\alpha}})^{1-\alpha} (A - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{i\theta}{\alpha}})^{-1} \right\| \\ &+ \left\| \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda t^\alpha}{t^{2\alpha} - 2t^\alpha \lambda e^{i\theta} \cos \alpha\pi + \lambda^2 e^{2i\theta}} (t + A)^{-1} dt \right\| \\ &\leq \frac{M}{\alpha} + \left\| \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda t^\alpha}{t^{2\alpha} - 2t^\alpha \lambda e^{i\theta} \cos \alpha\pi + \lambda^2 e^{2i\theta}} (t + A)^{-1} dt \right\|. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} r$ temos $dt = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} dr$, e como esta mudança não altera o domínio de integração segue que,

$$\begin{aligned} \|\lambda(\lambda e^{i\theta} - A^\alpha)^{-1}\| &\leq \frac{M}{\alpha} + \left\| \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 r^\alpha}{\lambda^2 r^{2\alpha} - 2\lambda^2 r^\alpha e^{i\theta} \cos \alpha\pi + \lambda^2 e^{2i\theta}} (\lambda^{\frac{1}{\alpha}} r + A)^{-1} \lambda^{\frac{1}{\alpha}} dr \right\| \\ &\leq \frac{M}{\alpha} + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{\alpha-1}}{|r^{2\alpha} - 2r^\alpha e^{i\theta} \cos \alpha\pi + e^{2i\theta}|} \left\| \lambda^{\frac{1}{\alpha}} r (\lambda^{\frac{1}{\alpha}} r + A)^{-1} \right\| dr \\ &\leq \frac{M}{\alpha} + M \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^{\alpha-1}}{|r^{2\alpha} - 2r^\alpha e^{i\theta} \cos \alpha\pi + e^{2i\theta}|} dr \\ &= \frac{M}{\alpha} + \frac{M}{\alpha\pi e^{i\theta}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\cot \alpha\pi) \right] \leq \infty. \end{aligned}$$

Afirmção 3: $\sup \{\|z(z - A^\alpha)^{-1}\|, z \notin S_{\alpha\omega}\} < \infty$ para todo $\alpha > 1$.

De fato, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \alpha$. Considere $z_k, k = 1, 2, \dots, n$, as raízes n -ésimas de z . Assim, pela fórmula do produto para polinômios aplicada ao operador $A^{\frac{\alpha}{n}}$ temos

$$\|z(z - A^\alpha)^{-1}\| = \|z(z - (A^{\frac{\alpha}{n}})^n)^{-1}\| \leq \prod_{k=1}^n \|z_k(z_k - A^{\frac{\alpha}{n}})^{-1}\|$$

e uma vez que $z_k \notin S_{\frac{\alpha\omega}{n}}$ os cálculos feitos na afirmação 2 garantem a limitação necessária para concluirmos que A^α é $\alpha\omega$ -setorial. $\square$

Se A é ω -setorial, densamente definido e $\alpha\omega < \frac{\pi}{2}$ então $-A^\alpha$ é gerador infinitesimal de um analítico cuja aptitude é igual a $\frac{\pi}{2} - \alpha\omega$. A seguir veremos a representação desses semigrupos para o caso em que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Denotaremos por $D^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$ e $R^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^\infty R(A^n)$.

Seja $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ e para cada $t > 0$ considere a seguinte função $G_{\alpha,t}(z) = e^{-tz^\alpha}$ a qual aparece previamente no Exemplo 2.18. Por este exemplo e pelo cálculo funcional o operador $G_{\alpha,t}(A)$, o qual denotaremos por $S_\alpha(t)$ está bem definido, ou seja, é convergente em $\mathcal{L}(X)$ e é dado por

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} \sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi) (A + \lambda)^{-1} d\lambda. \quad (2.46)$$

Nosso próximo passo consiste em mostrar que a família de operadores $\{S_\alpha(t); t > 0\}$ é um C_0 -semigrupo que pode ser estendido para um semigrupo analítico de amplitude $\frac{\pi}{2} - \alpha\omega$ e que $-A^\alpha$ é o seu gerador infinitesimal.

Proposição 2.56 ([4], p. 129 e 130). *Para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ existe uma constante $M_\alpha > 0$ tal que $\|S_\alpha(t)\| \leq M_\alpha$ para todo $t > 0$.*

Demonstração. Se M é a constante de não negatividade de A , temos,

$$\begin{aligned} \|S_\alpha(t)\| &= \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} \sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi) (A + \lambda)^{-1} d\lambda \right\| \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} |\sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi)| \lambda^{-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi = u$ teremos $\alpha t \lambda^{\alpha-1} \cos \alpha\pi d\lambda = du$ e como esta mudança não altera o domínio de integração temos,

$$\begin{aligned} \|S_\alpha(t)\| &\leq \frac{M}{\alpha\pi} \int_0^\infty e^{-u} |\sin(u \tan \alpha\pi)| u^{-1} du \\ &= \frac{M}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} |\sin(u \tan \alpha\pi)| u^{-1} du \\ &\leq M \frac{\tan \alpha\pi}{\alpha\pi} \int_0^\infty e^{-u} du = M \frac{\tan \alpha\pi}{\alpha\pi} = M_\alpha. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.57 ([4], p. 129 e 130). *Para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $t > 0$, $R[S_\alpha(t)] \subset D^\infty(A)$.*

Demonstração. Seja $\mu \in \rho(A)$, então $(\mu - A)^{-1}$ é limitado, então,

$$S_\alpha(t)(\mu - A)^{-1}\phi = (\mu - A)^{-1}S_\alpha(t)\phi$$

pois os resolventes comutam. Então, pela Proposição 2.41 segue que $S_\alpha(t)A^\beta \subset A^\beta S_\alpha(t)$ para todo $\beta \in \mathbb{C}_+$, logo, $R[S_\alpha(t)] \subset D(A^\beta)$ para todo $\beta \in \mathbb{C}_+$, e em particular para $\beta \in \mathbb{N}$. Logo, $R[S_\alpha(t)] \subset \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n) = D^\infty(A)$. □

Proposição 2.58 ([4], p. 129 e 130). *Para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $S_\alpha(t_1)S_\alpha(t_2) = S_\alpha(t_1+t_2)$, para $t_1, t_2 > 0$.*

Demonstração. Sejam $t_1, t_2 > 0$ e observe que

$$G_{\alpha, t_1}(z)G_{\alpha, t_2}(z) = e^{-t_1 z^\alpha} e^{-t_2 z^\alpha} = e^{-(t_1+t_2)z^\alpha} = G_{\alpha, t_1+t_2}(z),$$

logo pela Fórmula do Produto (Teorema 2.24) segue que

$$G_{\alpha, t_1}(z)G_{\alpha, t_2}(A) = G_{\alpha, t_1+t_2}(A),$$

ou seja, $S_\alpha(t_1)S_\alpha(t_2) = S_\alpha(t_1+t_2)$. □

Proposição 2.59 ([4], p. 129 e 130). *Para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\lim_{t \rightarrow 0} S_\alpha(t)\phi = \phi$, para todo $\phi \in \overline{D(A)}$. Consequentemente $\overline{D^\infty(A)} = \overline{D(A)}$.*

Demonstração. Note que $G_{\alpha,t}(1) = e^{-t}$, logo, podemos escrever

$$e^{-t} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} \sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi) (1+\lambda)^{-1} d\lambda.$$

Seja $\phi \in \overline{D(A)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|S_\alpha(t)\phi - e^{-t}\phi\| &= \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} \sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi) [(A+\lambda)^{-1}\phi - (1+\lambda)^{-1}\phi] d\lambda \right\| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} |\sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi)| \|(A+\lambda)^{-1}\phi - (1+\lambda)^{-1}\phi\| d\lambda. \end{aligned}$$

Agora seja $H(\lambda) = \lambda(A+\lambda)^{-1}\phi - \lambda(1+\lambda)^{-1}\phi$. Sabemos, pela Proposição 1.5 que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} H(\lambda) = 0$, logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que se $\xi > N$ então $\|H(\xi)\| < \varepsilon$.

Seja $\varepsilon > 0$, assim,

$$\begin{aligned} \|S_\alpha(t)\phi - e^{-t}\phi\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} |\sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi)| \|(A+\lambda)^{-1}\phi - (1+\lambda)^{-1}\phi\| d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^N e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} |\sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi)| \lambda^{-1} \|(A+\lambda)^{-1}\phi - (1+\lambda)^{-1}\phi\| d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_N^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} |\sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi)| \lambda^{-1} \|(A+\lambda)^{-1}\phi - (1+\lambda)^{-1}\phi\| d\lambda \\ &\leq \frac{M+1}{\pi} \|\phi\| \int_0^N e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} |\sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi)| \lambda^{-1} d\lambda \\ &\quad + \sup_{\xi > N} \|H(\xi)\| \frac{1}{\pi} \int_N^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} |\sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi)| \lambda^{-1} d\lambda \\ &\leq \frac{M+1}{\alpha\pi} \|\phi\| \int_0^{tN^\alpha \cos \alpha\pi} e^{-u} |\sin(u \tan \alpha\pi)| u^{-1} du \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\alpha\pi} \int_{tN^\alpha \cos \alpha\pi}^\infty e^{-u} |\sin(u \tan \alpha\pi)| u^{-1} du \\ &\leq (M+1) \frac{\tan \alpha\pi}{\alpha\pi} \|\phi\| \int_0^{tN^\alpha \cos \alpha\pi} e^{-u} du + \varepsilon \frac{\tan \alpha\pi}{\alpha\pi} \int_{tN^\alpha \cos \alpha\pi}^\infty e^{-u} du \\ &\leq (M+1) \frac{\tan \alpha\pi}{\alpha\pi} \|\phi\| (1 - e^{-tN^\alpha \cos \alpha\pi}) + \varepsilon \frac{\tan \alpha\pi}{\alpha\pi} e^{-tN^\alpha \cos \alpha\pi}, \end{aligned}$$

onde usamos mais uma vez a mudança de variáveis $t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi = u$.

Portanto,

$$\|S_\alpha(t)\phi - e^{-t}\phi\| \leq (M+1) \frac{\tan \alpha\pi}{\alpha\pi} \|\phi\| (1 - e^{-tN^\alpha \cos \alpha\pi}),$$

logo, fazendo $t \rightarrow 0$ segue que $S_\alpha(t)\phi \rightarrow \phi$.

Mostremos agora que $\overline{D^\infty(A)} = \overline{D(A)}$. De fato, seja $\phi \in \overline{D(A)}$ então, pelo que fizemos acima, $\phi = \lim_{t \rightarrow 0} S_\alpha(t)\phi$, ou seja, ϕ é o limite de elementos que, pela Proposição 2.57, estão em $\overline{D^\infty(A)}$, logo, $\phi \in \overline{D^\infty(A)}$. Reciprocamente, se $\phi \in \overline{D^\infty(A)}$ então $\phi \in \overline{D(A)}$, donde segue a igualdade. $\square$

Proposição 2.60 ([4], p. 129 e 130). *Para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $S_\alpha(t)A^\beta\phi = A^\beta S_\alpha(t)\phi$, para todo $\beta \in \mathbb{C}_+$ e $\phi \in D(A^\beta)$.*

Demonstração. A Proposição 2.41 e a Proposição 2.57 garantem que $S_\alpha(t)A^\beta\phi \subset A^\beta S_\alpha(t)\phi$, para todo $\beta \in \mathbb{C}_+$. Em particular, se $\phi \in D(A^\beta)$ a igualdade se verifica por $D[A^\beta S_\alpha(t)] \cap D(A^\beta) \subset D(A^\beta) = [S_\alpha(t)A^\beta]$. $\square$

Combinado todas as proposições acima, temos o Teorema a seguir. Em sua demonstração utilizaremos a seguinte identidade, obtida através do cálculo da Transformada de Laplace da função seno:

$$\int_0^\infty e^{-at} \sin(bt) dt = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}. \quad (2.47)$$

Teorema 2.61 ([4], p. 129 e 130). *Se $D(A)$ é denso, para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ a família $\{S_\alpha(t); t \geq 0\}$, com $S_\alpha(0) = I$, é um C_0 -semigrupo equilimitado que pode ser estendido a um semigrupo analítico de amplitude $\frac{\pi}{2} - \alpha\omega$. O gerador infinitesimal deste semigrupo é $-A^\alpha$.*

Demonstração. Seja $\mu > 0$. Aplicando a transformada de Laplace da função $S_\alpha(t)$ e o Teorema de Tonelli temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S_\alpha(t)) &= \int_0^\infty e^{-\mu t} S_\alpha(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu t} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\lambda^\alpha \cos \alpha\pi} \sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi) (A + \lambda)^{-1} d\lambda \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-(\mu + \lambda^\alpha \cos \alpha\pi)t} \sin(t\lambda^\alpha \sin \alpha\pi) dt \right] (A + \lambda)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{(\mu + \lambda^\alpha \cos \alpha\pi)^2 + \lambda^{2\alpha} \sin^2 \alpha\pi} (A + \lambda)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\mu^2 + 2\mu\lambda^\alpha \cos \alpha\pi + \lambda^{2\alpha}} (A + \lambda)^{-1} d\lambda = (\mu + A^\alpha)^{-1} \end{aligned}$$

Se A é densamente definido, então A^α também é densamente definido e então, pelo Teorema de Hille-Yosida (Teorema A.34) segue que $-A^\alpha$ é gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo equilimitado $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$.

O fato de que este semigrupo pode ser estendido a um semigrupo analítico de amplitude $\frac{\pi}{2} - \alpha\omega$ é uma consequência direta do Teorema A.37. $\square$

Domínios das Potências Fracionárias de Operadores Definidos Matricialmente

Nosso objetivo nesse capítulo é apresentar de maneira breve alguns resultados acerca do domínio da potência fracionária de um operador definido matricialmente. A ideia consiste em comparar a vantagem de se utilizar os resultados de Baiocchi ([24]) para tais caracterizações e como isso é feito para o operador em questão. Esse problema foi abordado no artigo [22], dos professores Irena Lasiecka e Roberto Triggiani, e é deste trabalho que retiramos todos os resultados e as respectivas demonstrações deste capítulo, completando apenas as contas.

Começamos apresentando os operadores com os quais trabalharemos.

3.1 Operadores Elásticos Amortecidos

Seja H espaço de Hilbert.

Considere os operadores $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ e $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset H \rightarrow H$ sujeitos às seguintes condições:

C_1 : $\mathcal{A}$ (operador elástico) e $\mathcal{B}$ (operador dissipação) são operadores densamente definidos, estritamente positivos e autoadjuntos.

C_2 : Existe uma constante $0 < \alpha \leq 1$ e duas constantes $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$ tais que

$$\rho_1 \mathcal{A}^\alpha \leq \mathcal{B} \leq \rho_2 \mathcal{A}^\alpha, \quad \text{em } D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}),$$

o que significa explicitamente que

$$\rho_1 (\mathcal{A}^\alpha x, x)_H \leq (\mathcal{B}x, x)_H \leq \rho_2 (\mathcal{A}^\alpha x, x)_H \quad \forall x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) \subset D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}), \quad (3.1)$$

ou ainda, como $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ são autoadjuntos, para $x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}})$ temos

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathcal{A}^\alpha x, x)_H &= \rho_1(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}} x, x)_H = \rho_1(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x, x)_H \\ &= \rho_1(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x, \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x)_H = \rho_1 \|\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x\|_H^2 \leq (\mathcal{B}, x)_H \\ &= (\mathcal{B}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} x, x)_H = (\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}^{\frac{1}{2}} x, x)_H = (\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} x, \mathcal{B}^{\frac{1}{2}} x)_H \\ &= \|\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} x\|_H^2 \leq \rho_2(\mathcal{A}^\alpha x, x)_H = \rho_2(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}} x, x)_H \\ &= \rho_2(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x, x)_H = \rho_2(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x, \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x)_H = \rho_2 \|\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x\|_H^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{\rho_1} \|\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x\|_H \leq \|\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} x\|_H \leq \sqrt{\rho_2} \|\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x\|_H, \quad x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}),$$

ou, com $y = \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x \in H$ para $x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}})$ temos $x = \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} y$, logo,

$$\rho_1 \|y\|_H^2 \leq (\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B}^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} y, y)_H \leq \rho_2 \|y\|_H^2, \quad y \in H. \quad (3.2)$$

Observe ainda que $(\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}})^* = \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}$ então, por 3.2 segue que o operador $\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}$ é autoadjunto, limitado e tem inverso limitado em H .

É interessante observar que, em espaços de Hilbert, operador positivo significa positivo definido, ou seja, $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ é positivo definido se existe um número positivo $a > 0$ tal que $(Tx, x)_H \geq a(x, x)_H$ para todo $x \in H$. No entanto, o termo positivo no nosso contexto pode ser interpretado como na definição 1.2. Para maiores detalhes a respeito dessa afirmação veja [27], p. 91.

A proposição a seguir contém uma situação onde a condição C_2 é verificada.

Proposição 3.1. *Se $D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}) = D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}})$, então, (3.1) é satisfeita.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em três afirmações.

Afirmação 1: Os operadores $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}$ e $\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B}^{-\frac{1}{2}}$ são limitados.

Observe que uma vez que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e $0 \in \rho(\mathcal{B})$ temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} : D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) &\subset H \rightarrow H \\ \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} : D(\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}) &= R(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) = H \rightarrow D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) \subset H \\ \mathcal{B}^{\frac{1}{2}} : D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}) &\subset H \rightarrow H \\ \mathcal{B}^{-\frac{1}{2}} : D(\mathcal{B}^{-\frac{1}{2}}) &= R(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}) = H \rightarrow D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}) \subset H, \end{aligned}$$

assim como

$$D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}) = \{x \in H; x \in D(\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}) = H, \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} x \in D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}) = D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}})\} = H$$

segue que $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} : H \rightarrow H$. Além disso, $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}$ é fechado uma vez que é uma composição de operadores fechados. Logo, pelo Teorema do Gráfico Fechado segue que $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}$ é limitado.

Por um raciocínio completamente análogo, $\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}^{-\frac{1}{2}}$ é também limitado.

Afirmção 2: Existe uma constante ρ_1 tal que $\rho_1(\mathcal{A}^\alpha x, x)_H \leq (\mathcal{B}x, x)_H$ para todo $x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) = D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}})$.

Seja $x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) = D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}})$, então existe um único $y \in H$ tal que $\mathcal{B}^{-\frac{1}{2}}y = x$. Como $\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}^{-\frac{1}{2}}$ é limitado, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\|\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}^{-\frac{1}{2}}y\|^2 \leq K_1\|y\|^2,$$

ou seja,

$$\left(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}^{-\frac{1}{2}}y, \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}^{-\frac{1}{2}}y\right)_H \leq K_1(y, y)_H,$$

ou ainda,

$$\left(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}x, \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}x\right)_H \leq K_1(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}x, \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}x)_H,$$

donde o fato de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ serem autoadjuntos garante que

$$\rho_1(\mathcal{A}^\alpha x, x)_H \leq (\mathcal{B}x, x)_H$$

para todo $x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) = D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}})$ com $\rho_1 = \frac{1}{K_1}$.

Afirmção 3: Existe $\rho_2 > 0$ tal que $(\mathcal{B}x, x)_H \leq \rho_2(\mathcal{A}^\alpha x, x)_H$ para todo $x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) = D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}})$.

Seja $x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) = D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}})$, então existe um único $y \in H$ tal que $\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}y = x$. Como $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}$ é limitado, existe $K_2 > 0$ tal que

$$\|\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}y\|^2 \leq K_2\|y\|^2,$$

ou seja,

$$\left(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}y, \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}y\right)_H \leq K_2(y, y)_H,$$

ou ainda,

$$\left(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}x, \mathcal{B}^{\frac{1}{2}}x\right)_H \leq K_2(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}x, \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}x)_H,$$

donde o fato de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ serem autoadjuntos garante que

$$(\mathcal{B}x, x)_H \leq \rho_2(\mathcal{A}^\alpha x, x)_H$$

para todo $x \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) = D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}})$ com $\rho_2 = K_2$. □

O objeto de nosso interesse e estudo é a equação de segunda ordem abstrata

$$\ddot{x} + \mathcal{B}\dot{x} + \mathcal{A}x = 0 \quad \text{em } H. \tag{3.3}$$

Sobre o espaço de energia E definido por $E = D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \times H$ podemos reescrever (3.3) como a equação

de primeira ordem

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = A_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde $A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & -\mathcal{B} \end{bmatrix}$ com domínio $D(A_{\mathcal{B}})$ contendo $D(\mathcal{A}) \times D(\mathcal{B})$ onde o produto interno em E é dado por

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right)_E = \left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} x_1, \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} y_1 \right)_H + (x_2, y_2)_H.$$

Como $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são densamente definidos segue que $A_{\mathcal{B}}$ é densamente definido e portanto, fechável (ver [26], p. 15). No entanto, $A_{\mathcal{B}}$ não precisa ser fechado, como é o caso em que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, para detalhes veja [5], p. 436.

Além disso, $-A_{\mathcal{B}}$ é acretivo. De fato, para $\phi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(A_{\mathcal{B}})$, temos

$$\begin{aligned} (\phi, -A_{\mathcal{B}}\phi)_E &= \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, -A_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right)_E = \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -v \\ \mathcal{A}u + \mathcal{B}v \end{bmatrix} \right)_E \\ &= - \left(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} u, \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} v \right)_H + (v, \mathcal{A}u + \mathcal{B}v)_H \\ &= - \left(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} u, \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} v \right)_H + (v, \mathcal{A}u)_H + (v, \mathcal{B}v)_H \\ &= -(\mathcal{A}u, v)_H + \overline{(\mathcal{A}u, v)_H} + \left(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} v, \mathcal{B}^{\frac{1}{2}} v \right)_H. \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{Re} (\phi, -A_{\mathcal{B}}\phi)_E = \left(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} v, \mathcal{B}^{\frac{1}{2}} v \right)_H = \|\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} v\|^2 \geq 0, \quad \phi \in D(A_{\mathcal{B}}).$$

Observe que vale a identidade

$$\mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}x_2 = \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} \left[\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}} x_1 + \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B}x_2 \right] = \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} \left[\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}} x_1 + \left(\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \right) \left(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} x_2 \right) \right]$$

Agora, tomando $A_{\mathcal{B}}$ com domínio

$$D(A_{\mathcal{B}}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D(\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}}), x_2 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \subset D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}), \mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}x_2 \in H \right\} \quad (3.5)$$

segue que $A_{\mathcal{B}}x$ com $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in D(A_{\mathcal{B}})$ é dado por

$$A_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} \left[\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}} x_1 + \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} x_2 \right] \end{bmatrix}$$

É imediato que $A_{\mathcal{B}}$ é densamente definido. A proposição a seguir garante que $A_{\mathcal{B}}$, nessas condições, é fechado.

Proposição 3.2. *Sob as condições C_1 e C_2 anunciadas no início da seção, o operador $A_{\mathcal{B}} : D(A_{\mathcal{B}}) \subset E \rightarrow E$, com $D(A_{\mathcal{B}})$ definido em 3.5, é fechado.*

Demonstração. Seja $\xi_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \in D(A_{\mathcal{B}})$ tal que

$$(i) \quad \xi_n \rightarrow \xi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in E$$

$$(ii) \quad A_{\mathcal{B}} \xi_n \rightarrow v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Temos que mostrar $\xi \in D(A_{\mathcal{B}})$ e $A_{\mathcal{B}} \xi = v$.

Como $\xi_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \in D(A_{\mathcal{B}})$, por definição, $y_n \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \subset D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}) \subset D(\mathcal{B}^{\frac{1}{2}})$ por (3.1). Assim, $\mathcal{B}^{\frac{1}{2}} y_n$ está bem definido e, por aditividade e pelo fato de que $\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}$ é limitado segue a boa definição de $\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B}^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}^{\frac{1}{2}} y_n = \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} y_n \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}})$. Em adição, ainda por definição, $x_n \in D(\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}})$ e $\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}} x_n + \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} y_n \in D(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}})$.

Note que, por (i) segue que $x_n \rightarrow x$ em $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ e $y_n \rightarrow y$ em H .

Agora, por (ii) temos

$$A_{\mathcal{B}} \xi_n = A_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ -\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} \left[\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}} x_n + \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} y_n \right] \end{bmatrix} \rightarrow v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ em } E,$$

logo $y_n \rightarrow v_1$ em $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ donde concluímos que $y = v_1 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$. É importante observar, nessa altura, que $y_n \rightarrow v_1$ em $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ o que significa que $\|y_n - v_1\|_{D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, ou ainda, $\|y_n - v_1\|_H + \|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} y_n - \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} v_1\|_H \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} y_n \rightarrow \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} v_1$ em H .

Além disso, $-\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} \left[\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}} x_n + \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} y_n \right] \rightarrow v_2$ em H . Logo, como $\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}$ é limitado, segue que

$$\left[\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}} x_n + \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{B} y_n \right] \rightarrow -\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}} v_2 \text{ em } H. \quad (3.6)$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}y_n &= \left(\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}y_n = \left(\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\left(\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}y_n \\ &= \left(\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\mathcal{A}^{\frac{\alpha-1}{2}}\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}y_n;\end{aligned}$$

Assim, por (3.2) e pelo fato de que $\frac{\alpha-1}{2} \leq 0$ (pois $\alpha \in [0, 1]$), segue que os operadores $\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}$ e $\mathcal{A}^{\frac{\alpha-1}{2}}$ são limitados, logo,

$$\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}y_n \rightarrow \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}v_1. \quad (3.7)$$

Note ainda que, por 3.6 e 3.7 temos

$$\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}}x_n \rightarrow -\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}v_2 - \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}v_1,$$

assim como $\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}}$ é fechado segue que $x \in D(\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}})$ e $\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}}x = -\mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}v_2 - \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}v_1$, ou ainda, como $y = v_1$, temos

$$-\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}\left[\mathcal{A}^{1-\frac{\alpha}{2}}x + \mathcal{A}^{-\frac{\alpha}{2}}\mathcal{B}y\right] = v_2.$$

Portanto, $\xi \in D(A_{\mathcal{B}})$ e $A_{\mathcal{B}}\xi = v$, como queríamos. $\square$

Um importante resultado sobre os operadores $A_{\mathcal{B}}$ é dado a seguir.

Teorema 3.3. (i) *Assuma que as condições C_1 e C_2 são satisfeitas. Então o operador $-A_{\mathcal{B}}$ é m -acretivo e, portanto, pelo Teorema de Lummer-Phillips $A_{\mathcal{B}}$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{A_{\mathcal{B}}t}$ sobre $E = D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \times H$.*

(ii) *Se o parâmetro α na condição C_2 satisfaz $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, então o C_0 -semigrupo $e^{A_{\mathcal{B}}t}$ do item (i) é, além disso, analítico em E .*

(iii) *Para todo $0 < \alpha \leq 1$ o C_0 -semigrupo $e^{A_{\mathcal{B}}t}$ é uniformemente estável em E , isto é, existem constantes $M \geq 1$ e $a > 0$ (de fato, $-a = \sup \operatorname{Re} \sigma(A_{\mathcal{B}})$) tais que*

$$\|e^{A_{\mathcal{B}}t}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{-at}, t \geq 0.$$

Demonstração. Veja a série de artigos [6]-[9]. $\square$

Observação 3.4. *Observe que o item (iii) do Teorema 3.3 garante que $0 \in \rho(A_{\mathcal{B}})$ pois se $-a = \sup \operatorname{Re} \sigma(A_{\mathcal{B}})$ então $0 \notin \sigma(A_{\mathcal{B}})$.*

A condição C_2 expressa tecnicamente a noção de que $\mathcal{B}$ é comparável com $\mathcal{A}^{\alpha}$. Um caso canônico

de tal *comparaçāo* é obtido quando $\mathcal{B} = \rho\mathcal{A}^\alpha$, assim,

$$A_{\mathcal{B}} = A_{\rho\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & -\rho\mathcal{A}^\alpha \end{bmatrix}$$

com

$$D(A_{\rho\alpha}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D(\mathcal{A}^{1-\alpha}); x_2 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}); \mathcal{A}^\alpha[\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2] \in H \right\}. \quad (3.8)$$

O operador $A_{\rho\alpha}$, cujo domínio contém $D(\mathcal{A}) \times D(\mathcal{A}^\alpha)$ é densamente definido e fechado.

Além disso, de acordo com o Teorema 3.3, $A_{\rho\alpha}$ gera um C_0 –semigrupo de contrações $e^{\mathcal{A}_{\rho\alpha}t}$ em E , que é analítico quando $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Nosso objetivo é caracterizar os domínios $D((-A_{\rho\alpha})^\theta)$ das potências fracionárias com $0 \leq \theta \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, $\rho > 0$.

Em 1990, no artigo [8], o professor Roberto Triggiani em coautoria do professor Shuping Chen, fizeram uso da definição de potência fracionária via operador de Balakrishnan, tal como estudamos no decorrer deste trabalho, para caracterizar tais domínios. No entanto, tal abordagem tem uma desvantagem computacional (em especial no caso de operadores definidos matricialmente), pois faz uso do operador resolvente.

Então, recentemente, em 2014 os professores Irena Lasiecka e Roberto Triggiani reprovaram os resultados em [8] apresentando uma abordagem mais elegante e mais “barata” do ponto de vista computacional. Esta abordagem é baseada na teoria de interpolação de subespaços introduzida em 1966 pelo matemático C. Baiocchi que, embora tenhamos apresentado brevemente, pode ser encontrada com mais detalhes em [24].

Antes de enunciarmos e mostrarmos o resultado formalmente, observe que se restringirmos o parâmetro α ao caso em que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, teremos $-1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2}$ e daí $0 \leq 1 - \alpha \leq \frac{1}{2}$. Então, o domínio do operador $A_{\rho\alpha}$ dado em (3.8) pode ser reescrito como

$$D(A_{\rho\alpha}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+1-\alpha}); x_2 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}); \mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^\alpha) \right\} \quad (3.9)$$

uma vez que agora $x_1 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \subset D(\mathcal{A}^{1-\alpha})$, $x_2 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ e o fato de que $\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^\alpha) \subset D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$ implica que $\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$.

A seguir enunciamos o resultado que caracteriza o domínio das potências fracionárias do operador $A_{\rho\alpha}$. A demonstração é baseada no artigo [22] e será feita na próxima seção.

Teorema 3.5. *Sejam $\rho > 0$ e $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.*

(i) *Se $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, então*

$$D((-A_{\rho\alpha})^\theta) = D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}) \times D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}).$$

(ii) Se $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, então,

$$D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); x_2 \in D\left(\mathcal{A}^{\alpha-\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); \mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}) \right\}.$$

Se $\theta = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = \frac{1}{2}$ então a condição $\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta})$ é satisfeita automaticamente.

3.2 Demonstração do Teorema 3.5

Proposição 3.6. Sejam $\rho > 0, 0 \leq \theta \leq 1, \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, tal que $\frac{1}{2} + \theta(1-\alpha) \geq (1-\alpha)$. Então a seguinte representação para $D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right)$ pode ser dada:

$$D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); x_2 \in D\left(\mathcal{A}^{\frac{\theta}{2}}\right); \mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}) \right\}.$$

Demonstração. A ideia da demonstração consiste basicamente em aplicar o Teorema de Interpolação de Baiocchi (Teorema B.34). Para isso vamos definir os espaços necessários.

Defina $X \equiv D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha}) \times D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$, $\mathcal{X} \equiv D(\mathcal{A}^\alpha)$ e defina a aplicação $\partial : X \rightarrow \mathcal{X}$ por

$$\partial \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2.$$

Das definições acima segue que

$$(X)_{\partial, \mathcal{X}} = \{x \in X; \partial x \in \mathcal{X}\} = D(-A_{\rho\alpha}).$$

Agora, defina $Y \equiv E \equiv D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \times H$, $\mathcal{Y} = H$ e defina $\partial : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ por

$$\partial \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathcal{A}^{1-\alpha}y_1 + \rho y_2.$$

Observe que como $\frac{1}{2} \leq \alpha$ temos $1-\alpha \leq \frac{1}{2}$, assim, $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \subset D(\mathcal{A}^{1-\alpha})$. Logo,

$$(Y)_{\partial, \mathcal{Y}} = \{y \in Y; \partial y \in \mathcal{Y}\} = E.$$

Agora, pela Observação 3.4 e pelo Teorema B.33 segue que

$$D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) = [D(-A_{\rho\alpha}), E]_{1-\theta} = [(X)_{\partial, \mathcal{X}}, (Y)_{\partial, \mathcal{Y}}]_{1-\theta}.$$

Vamos verificar as hipóteses do Teorema B.34;

Defina $\Phi = H \times H$, assim, $X \subset \Phi$ e $Y \subset \Phi$. Defina também $\overline{\mathcal{X}} = D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})$, $\overline{\mathcal{Y}} = H$ e $\Psi = H$, assim, uma vez que $D(\mathcal{A}^\alpha) \subset D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \subset H$ temos

$$\mathcal{X} \subset \overline{\mathcal{X}} \subset \Psi$$

e

$$\mathcal{Y} \subset \overline{\mathcal{Y}} \subset \Psi.$$

Note agora que podemos reescrever a aplicação $\partial : X \rightarrow \overline{\mathcal{X}}$ e $\partial : Y \rightarrow \overline{\mathcal{Y}}$ como

$$\partial \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathcal{A}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha} x_1 + \rho x_2$$

e

$$\partial \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathcal{A}^{-(\alpha-\frac{1}{2})} \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} y_1 + \rho y_2.$$

respectivamente.

Observe ainda que $\partial \in \mathcal{L}(X, \overline{\mathcal{X}}) \cap \mathcal{L}(Y, \overline{\mathcal{Y}})$. De fato,

$$\begin{aligned} \left\| \partial \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_{\overline{\mathcal{X}}} &= \|\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha} x_1 + \rho x_2\|_{D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})} \\ &= \|\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha} x_1 + \rho x_2\|_H + \|\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha} x_1 + \rho \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} x_2\|_H \\ &\leq K_1 \|\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha} x_1\|_H + K_2 \|x_2\|_H + K_3 \|\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha} x_1\|_H + K_4 \|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} x_2\|_H \\ &\leq \max\{K_1, K_3, 1\} \left(\|x_1\|_H + \|\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha} x_1\|_H \right) + \max\{K_2, K_4\} \left(\|x_2\|_H + \|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} x_2\|_H \right) \\ &\leq \max\{K_1, K_2, K_3, K_4, 1\} \left(\|x_1\|_{D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha})} + \|x_2\|_{D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})} \right) \leq K \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_X. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \left\| \partial \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\|_{\overline{\mathcal{Y}}} &= \|\mathcal{A}^{-(\alpha-\frac{1}{2})} \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} y_1 + \rho y_2\|_H \\ &\leq K_1 \|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} y_1\|_H + K_2 \|y_2\|_H \\ &\leq \max\{K_1, 1\} \left(\|y_1\|_H + \|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} y_1\|_H \right) + K_2 \|y_2\|_H \\ &\leq \max\{K_1, K_2, 1\} \left(\|y_1\|_H + \|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} y_1\|_H + \|y_2\|_H \right) \leq K \left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\|_Y. \end{aligned}$$

E ainda, defina $\mathcal{G} : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow X$ e $\mathcal{G} : \overline{\mathcal{Y}} \rightarrow Y$ pela mesma lei de formação dada por

$$\mathcal{G}x = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{-(1-\alpha)}x \\ 0 \end{bmatrix}$$

e observe que $\mathcal{G} \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{X}}, X) \cap \mathcal{L}(\overline{\mathcal{Y}}, Y)$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}x\|_X &= \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{-(1-\alpha)}x \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_{D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha}) \times D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})} = \|\mathcal{A}^{-(1-\alpha)}x\|_{D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha})} + 0 \\ &\leq K_1 \|x\|_H + \|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}x\|_H \leq K \|x\|_{D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}})} = K \|x\|_{\overline{\mathcal{X}}}. \end{aligned}$$

De maneira análoga $\|\mathcal{G}x\|_Y \leq K \|x\|_{\overline{\mathcal{Y}}}$.

Por último tome $\mathcal{R} : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ e $\mathcal{G} : \overline{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$ dado por $\mathcal{R} \equiv 0$ e observe que $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}) \cap \mathcal{L}(\overline{\mathcal{Y}}, \mathcal{Y})$.

Finalmente, como $\overline{\mathcal{X}} + \overline{\mathcal{Y}} = D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) + H = H$, temos

$$\partial \mathcal{G}x = \partial \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{-(1-\alpha)}x \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{A}^{1-\alpha} \mathcal{A}^{-(1-\alpha)}x + \rho 0 = x = x + \mathcal{R}x \quad \forall x \in \overline{\mathcal{X}} + \overline{\mathcal{Y}}$$

o que garante que todas as hipóteses do Teorema B.34 estão satisfeitas e então segue que

$$D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) = [D(-A_{\rho\alpha}), E]_{1-\theta} = [(X)_{\partial, \mathcal{X}}, (Y)_{\partial, \mathcal{Y}}]_{1-\theta} = ([X, Y]_{1-\theta})_{\partial, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{1-\theta}}.$$

Então, pelo Teorema B.33 segue que

$$\begin{aligned} [X, Y]_{1-\theta} &= \left[D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha}) \times D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}), D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \times H \right]_{1-\theta} \\ &= \left[D(\mathcal{A}^{\frac{3}{2}-\alpha}), D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) \right]_{1-\theta} \times \left[D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}), H \right]_{1-\theta} \\ &= D\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}(1-\theta)+\theta(\frac{3}{2}-\alpha)}\right) \times D\left(\mathcal{A}^{0(1-\theta)+\theta\frac{1}{2}}\right) \\ &= D\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right) \times D\left(\mathcal{A}^{\frac{\theta}{2}}\right). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{1-\theta} = [D(\mathcal{A}^\alpha, H)]_{1-\theta} = D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) &= [D(-A_{\rho\alpha}), E]_{1-\theta} \\
&= [(X)_{\partial, \mathcal{X}}, (Y)_{\partial, \mathcal{Y}}]_{1-\theta} \\
&= ([X, Y]_{1-\theta})_{\partial, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{1-\theta}} \\
&= \{u \in E; u \in [X, Y]_{1-\theta}; \partial u \in [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{1-\theta}\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); x_2 \in D\left(\mathcal{A}^{\frac{\theta}{2}}\right); \mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}) \right\}.
\end{aligned}$$

□

A Proposição a seguir restringe o parâmetro θ de maneira a tornar a expressão do espaço $D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right)$ mais explícita e concluir o item (i) do Teorema 3.5.

Proposição 3.7. *Assuma $\rho > 0$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$. Então,*

$$D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) = D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}) \times D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}).$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \theta(1-\alpha) \geq 1-\alpha + \alpha\theta &\iff \theta(1-2\alpha) \geq \frac{1}{2} - \alpha \\
&\iff \theta(2\alpha-1) \leq \frac{1}{2}(2\alpha-1) \iff 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, suponha que $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}) \times D(\mathcal{A}^{\alpha\theta})$, então, pelos cálculos acima $x_1 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}) \subset D(\mathcal{A}^{1-\alpha+\alpha\theta})$, o que implica que $\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta})$. Além disso, $x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}) \subset D(\mathcal{A}^{\frac{\theta}{2}})$ pois $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. Assim, $\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta})$, logo, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right)$.

Por outro lado, suponha que $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right)$, então, $x_1 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}) \subset D(\mathcal{A}^{1-\alpha+\alpha\theta})$, o que implica que $\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta})$. Somando a isso o fato de que $\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta})$, concluímos que $x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta})$. Logo, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}) \times D(\mathcal{A}^{\alpha\theta})$.

Portanto,

$$D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) = D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}) \times D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}).$$

□

A proposição a seguir restringe mais uma vez o parâmetro θ afim de obter o item (iii) do Teorema 3.5.

Proposição 3.8. *Assuma $\rho > 0$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ e $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. Então,*

$$D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); x_2 \in D\left(\mathcal{A}^{\alpha-\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); \mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}) \right\}.$$

Demonstração. Observe primeiramente que para $\theta \in [0, 1]$ temos

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \theta(1 - \alpha) - \frac{\theta}{2} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \theta\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \geq \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = 0,$$

o que implica que

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \theta(1 - \alpha) \geq \frac{\theta}{2}$$

para todo $\theta \in [0, 1]$. Assim, $D(\mathcal{A}^{(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)}) \subset D(\mathcal{A}^{\frac{\theta}{2}})$. Logo,

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); x_2 \in D\left(\mathcal{A}^{\alpha-\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); \mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}) \right\} \subset D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right).$$

Por outro lado, seja $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right)$, então, $\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta})$, assim, $\mathcal{A}^{\alpha\theta}[\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2] \in H$. Observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\alpha\theta}[\mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2] &= [\mathcal{A}^{\alpha\theta-(\alpha-\frac{1}{2})-\theta(1-\alpha)}]\mathcal{A}^{1-\alpha+(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)}x_1 + [\mathcal{A}^{\alpha\theta-(\alpha-\frac{1}{2})-\theta(1-\alpha)}]\mathcal{A}^{(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)}\rho x_2 \\ &= [\mathcal{A}^{\alpha\theta-(\alpha-\frac{1}{2})-\theta(1-\alpha)}][\mathcal{A}^{1-\alpha+(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)}x_1 + \mathcal{A}^{(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)}\rho x_2] \in H. \end{aligned}$$

Agora, como

$$\alpha\theta - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - \theta(1 - \alpha) = \theta(2\alpha - 1) - \alpha + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}(2\alpha - 1) - \alpha + \frac{1}{2} = 0$$

segue que $\mathcal{A}^{1-\alpha+(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)}x_1 + \mathcal{A}^{(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)}\rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta-(\alpha-\frac{1}{2})-\theta(1-\alpha)}) \subset H$.

Então, como

$$(1 - \alpha) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \theta(1 - \alpha) = \frac{1}{2} + \theta(1 - \alpha),$$

segue que $\mathcal{A}^{1-\alpha+(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)}x_1 = \mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}x_1 \in H$ pois $x_1 \in D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)})$ por hipótese.

Assim, $\mathcal{A}^{(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)}\rho x_2 \in H$, e daí, $x_2 \in D(\mathcal{A}^{(\alpha-\frac{1}{2})+\theta(1-\alpha)})$. Logo,

$$D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) \subset \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); x_2 \in D\left(\mathcal{A}^{\alpha-\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); \mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}) \right\}.$$

Portanto,

$$D\left((-A_{\rho\alpha})^\theta\right) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in E; x_1 \in D\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); x_2 \in D\left(\mathcal{A}^{\alpha-\frac{1}{2}+\theta(1-\alpha)}\right); \mathcal{A}^{1-\alpha}x_1 + \rho x_2 \in D(\mathcal{A}^{\alpha\theta}) \right\}.$$

□

Resultados Auxiliares

Este capítulo traz algumas definições e resultados clássicos da Análise Funcional que serviram como alicerce para o desenvolvimento desta dissertação de Mestrado.

A maioria dos resultados discutidos aqui fazem parte do conteúdo de cursos básicos de Álgebra Linear, Teoria da Medida e Integração e Análise Funcional e podem ser encontrados em bibliografias básicas sobre tais temas, portanto, aceitaremos a maioria deles sem demonstração. Para uma consulta mais direta, sugerimos as referências clássicas [2] e [19].

A.1 Resultados Básicos de Análise Funcional

Definição A.1. *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma norma sobre E é uma aplicação $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- (i) $\|x\| \geq 0, \forall x \in E$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$.

Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial munido de uma norma.

Definição A.2. *Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ é dita de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ se $n, m > n_0$.*

Definição A.3. *Um espaço normado X é chamado de **Espaço de Banach** se toda sequência de Cauchy em X converge.*

Definição A.4. *Seja X um espaço vetorial. Um **produto interno** em X é uma forma $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in X$.
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in X$, sendo nula apenas quando $x = 0$.

Proposição A.5. *Seja X um espaço vetorial com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$. Então a função $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é uma norma em X chamada de **norma induzida do produto interno**.*

Definição A.6. *Um espaço vetorial X dotado de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ é chamado de **Espaço de Hilbert** se for um espaço de Banach com respeito à norma induzida deste produto interno.*

Definição A.7. *Um espaço normado X é estritamente convexo se para quaisquer $x, y \in X$ tais que $\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = k$, tem-se $x = y$.*

Teorema A.8. *Todo espaço de Hilbert é estritamente convexo.*

Demonstração. Seja X um espaço de Hilbert e $x, y \in X$ tais que $\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|$. Pela identidade do paralelogramo, obtemos que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4k.$$

Assim,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = k.$$

Logo, como $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = k$ segue que $\left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = 0$ donde $x = y$. □

Denotamos por $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares limitados de X em X . Para nós, o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é limitado se é contínuo e definido e $D(A) = X$. O espaço $\mathcal{L}(X)$ com a norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup\{\|A\phi\|; \phi \in X; \|\phi\| = 1\}$$

é um espaço de Banach.

Definição A.9 (Operador densamente definido). *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dizemos que o operador A é densamente definido quando $D(A)$ é denso em X , ou seja, quando $\overline{D(A)} = X$.*

Teorema A.10 (Helly, Hahn-Banach (forma analítica)). *Seja $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo*

$$1. \ p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda > 0,$$

$$2. \ p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Seja $G \subset E$ um subespaço vetorial e seja $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G.$$

Sob estas condições, existe um funcional linear f definido em todo E que estende g , isto é, $g(x) = f(x) \quad \forall x \in G$, e tal que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

Corolário A.11. *Seja $G \subset E$ um subespaço vetorial. Se $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe $f \in E^*$ que estende g e é tal que*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} |g(x)| = \|g\|_{G^*}.$$

Corolário A.12. *Para todo $x_0 \in E$ existe $f_0 \in E^*$ tal que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \text{ e } \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

A.2 Espectro e Resolvente

Seja X um espaço de Banach e considere um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$.

Definição A.13. *O conjunto resolvente de A , denotado por $\rho(A)$, é dado por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - A \text{ é bijetivo e } (\lambda - A)^{-1} \text{ é limitado}\}.$$

*O operador $(\lambda - A)^{-1}$, que também pode ser denotado por $R_\lambda(A)$, é chamado de **operador resolvente**.*

Observe que para definir o conjunto resolvente é necessário assumir que o operador A é fechado. Por outro lado, pelo Teorema do gráfico fechado, para provar que um número complexo λ pertence a $\rho(A)$ é suficiente garantir que $\lambda - A$ é bijetivo.

Proposição A.14 (Identidade do Resolvente). *Dados $\lambda, \mu \in \rho(A)$,*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

Proposição A.15. *Se $A \in \mathcal{L}(X)$ satisfaz que $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, então a série de Neumann*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

é convergente em $\mathcal{L}(X)$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}.$$

É uma consequência da Proposição A.15 o fato de que o conjunto resolvente é aberto.

Definição A.16. *O espectro de A , denotado por $\sigma(A)$, é dado por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.*

Observação A.17. *Segue da definição de espectro e resolvente que, $\lambda \in \sigma(A)$ se, e somente se uma das condições valem:*

(i) *O operador $\lambda - A$ não é injetivo. Nesse caso, λ é chamado de autovalor de A . Os vetores $x \in \text{Ker}(\lambda - A), x \neq 0$, são chamados de autovetores correspondentes ao autovalor λ . O conjunto de autovalores é denotado por $\sigma_p(A)$ e é chamado de **espectro pontual** de A .*

(ii) *O operador $\lambda - A$ é injetivo, mas $R(\lambda - A)$ é não denso. Estes valores constituem o que chamamos de **espectro residual** de A e o denotamos por $\sigma_r(A)$.*

(iii) *O operador $\lambda - A$ é injetivo e $R(\lambda - A)$ é um subespaço próprio e denso de X . Estes números complexos constituem o que chamamos de espectro contínuo ou essencial de A e denotamos por $\sigma_c(A)$.*

Se X é um espaço vetorial normado, X' denota o **dual topológico de X** , isto é, o conjunto de todos os funcionais lineares limitados $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, que a cada $\phi \in X$ associa $f(\phi) = (f, \phi) \in \mathbb{C}$.

A aplicação $\|\cdot\| : X' \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $\|f\| = \sup\{|(f, \phi)|; \phi \in X, \|\phi\| = 1\}$ é uma norma em X' e se X é uma espaço de Banach então X' também o é.

Se A é um operador densamente definido, sobre o domínio

$$D(A^*) = \{f \in X'; \exists g \in X'; (f, A\phi) = (g, \phi) \forall \phi \in D(A)\},$$

o operador **adjunto** é definido como $A^*f = g$.

O operador adjunto é bem definido, pois g (caso exista) é único. Se A é um operador limitado então A^* também é limitado.

Definição A.18. Dizemos que um operador densamente definido A é auto adjunto se $A = A^*$.

Teorema A.19. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear injetor. Então A é fechado se, e somente se, A^{-1} é fechado.

Seja X um espaço de Hilbert complexo e considere A um operador autoadjunto não limitado em X com domínio $D(A)$ denso em X . Equipamos $D(A)$ com a norma do gráfico ($\|\phi\|_{D(A)} = \|\phi\|_X + \|A\phi\|_X$) fazendo dele um espaço de Hilbert e tomamos como hipótese que a imersão de $D(A)$ em X é compacta, isto é, toda sequência $(x_n) \subset D(A)$ limitada possui subsequência convergente em X .

Teorema A.20. Com a hipótese anterior sobre A , se A^{-1} é limitado então $\sigma(A) = \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver [11], Theorem 6, p. 38. □

Proposição A.21. Se A é fechado e $\lambda \in \rho(A)$ então $(\lambda - A)^{-1}\phi \in D(A)$, $\forall \phi \in X$. Consequentemente $\lambda - A$ é sobrejetora.

Demonstração. Sejam $\phi \in X$ e $u = (\lambda - A)^{-1}\phi$. Mostremos que $u \in D(A)$. Seja $(\phi_k) \subset R(\lambda - A)$ tal que $\phi_k \rightarrow \phi$. Denotemos $u_k := (\lambda - A)^{-1}\phi_k \in D(A)$. Como $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, temos $u_k \rightarrow u \in X$. Logo,

$$(u_k, (\lambda - A)u_k) = (u_k, \phi_k) \rightarrow (u, \phi)$$

na norma da soma. Como A é fechado, segue que $\lambda - A$ fechado, logo $(u, \phi) \in \text{Graf}(\lambda - A)$. Consequentemente, $u \in D(A)$. □

Proposição A.22. Se A é fechado, $-\lambda \in \rho(A)$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(i) \quad A(\lambda + A)^{-n}\phi = (\lambda + A)^{-n}A\phi, \quad \forall \phi \in D(A).$$

$$(ii) \quad A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = [A(\lambda + A)^{-1}]^n\phi, \quad \forall \phi \in X.$$

Demonstração. (i) A prova será feita por indução sobre n . Suponha primeiramente que $\phi \in D(A)$ então

$$\begin{aligned} A\phi &= (\lambda + A - \lambda)\phi = (\lambda + A)[1 - \lambda(\lambda + A)^{-1}]\phi \\ &= (\lambda + A)A(\lambda + A)^{-1}\phi. \end{aligned}$$

Aplicando $(\lambda + A)^{-1}$ a ambos os lados, obtemos

$$A(\lambda + A)^{-1}\phi = (\lambda + A)^{-1}A\phi.$$

Suponha agora que a relação vale para n . Como $(\lambda + A)^{-1}\phi \in D(A)$, pela hipótese de indução e pelo caso $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} A(\lambda + A)^{-(n+1)}\phi &= [A(\lambda + A)^{-n}](\lambda + A)^{-1}\phi = [(\lambda + A)^{-n}]A(\lambda + A)^{-1}\phi \\ &= [(\lambda + A)^{-n}](\lambda + A)^{-1}A\phi = (\lambda + A)^{-(n+1)}A\phi. \end{aligned}$$

Portanto, $A(\lambda + A)^{-n}\phi = (\lambda + A)^{-n}A\phi$, $\forall \phi \in D(A)$ para todo n natural.

(ii) A prova também será feita por indução. Seja $\phi \in X$. Para $n = 1$ é imediato. Suponha que seja válido n e mostremos que vale para $n + 1$. Como $(\lambda + A)^{-1}\phi \in D(A)$, então pela parte (i), temos

$$\begin{aligned} [A(\lambda + A)^{-1}]^{n+1}\phi &= [A(\lambda + A)^{-1}]^n A(\lambda + A)^{-1}\phi = [A^n(\lambda + A)^{-n}]A(\lambda + A)^{-1}\phi \\ &= A^n[(\lambda + A)^{-n}A](\lambda + A)^{-1}\phi = A^n[A(\lambda + A)^{-n}](\lambda + A)^{-1}\phi \\ &= A^{n+1}(\lambda + A)^{-(n+1)}\phi. \end{aligned}$$

Portanto, $A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = [A(\lambda + A)^{-1}]^n\phi$, $\forall \phi \in X$ para todo n natural. □

Corolário A.23. *Nas condições da Proposição A.22, se $\phi \in D(A^n)$, então*

$$A^n(\lambda + A)^{-n}\phi = (\lambda + A)^{-n}A^n\phi.$$

Demonstração. Como $\phi, A\phi, \dots, A^{n-1}\phi \in D(A)$, basta aplicarmos o item (i) da Proposição A.22 n vezes. □

Proposição A.24. *Se $-\lambda \in \rho(A)$ e A é fechado, então $D[(A + \lambda)^n] = D(A^n)$.*

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n . Note que para $n = 1$ é imediato uma vez que $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ para quaisquer operadores A, B cuja soma faça sentido.

Suponhamos que $D[(A + \lambda)^n] = D(A^n)$ para algum $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Mostremos que o resultado também é válido para $n + 1$.

De fato, seja $\phi \in D[(A + \lambda)^{n+1}] \subset D[(A + \lambda)^n]$. Pela hipótese de indução, $\phi \in D(A^n)$. Como $(A + \lambda)^{-1}(A + \lambda)A^n\phi \in D(A + \lambda) = D(A)$ segue que $A^n\phi \in D(A)$, o que garante que $\phi \in D(A^{n+1})$. Logo, $D[(A + \lambda)^{n+1}] \subset D(A^{n+1})$

Por outro lado, se $\phi \in D(A^{n+1}) \subset D(A^n)$, pela hipótese de indução, $\phi \in D[(A + \lambda)^n]$. Agora, como $(A + \lambda)^{-1}(A + \lambda)^{n+1}\phi = (A + \lambda)^n\phi \in D(A + \lambda)$ segue que $\phi \in D[(A + \lambda)^{n+1}]$. Logo, $D[(A + \lambda)^{n+1}] \supset D(A^{n+1})$.

Portanto, $D[(A + \lambda)^{n+1}] = D(A^{n+1})$ e, pelo Princípio da Indução Finita segue o resultado. □

Proposição A.25 (Identidade do Resolvente). *Sejam $\lambda, \mu \in \rho(A), \lambda \neq \mu$, então*

$$(\lambda + A)^{-1} - (\mu + A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda + A)^{-1}(\mu + A)^{-1}.$$

A.3 Análise Complexa

Definição A.26. Se $G \subset \mathbb{C}$ um aberto, então $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável em um ponto $a \in G$ se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. Se o limite existir, seu valor é denotado por $f'(a)$.

Definição A.27. Uma função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ aberto, é analítica se f é continuamente diferenciável, isto é, $f' : G \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua.

Teorema A.28 (Goursat). Sejam $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Então f é analítica em G .

Teorema A.29. Se D é um domínio e $f(z)$ é uma função analítica em D não identicamente nula, então os zeros de $f(z)$ são isolados.

Demonstração. Ver [16], página 156. □

Como um corolário do Teorema anterior, temos o resultado a seguir que também é conhecido como **Princípio da Identidade**.

Teorema A.30 (Princípio da Unicidade). Se $f(z)$ e $g(z)$ são analíticas sobre um domínio D e se $f(z) = g(z)$ para z pertencendo a um conjunto com um ponto de acumulação, então $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D$.

O Princípio da Unicidade possui uma extensão natural para funções de duas variáveis complexas, o qual é às vezes chamado de **Princípio de Permanência de Equações Funcionais**.

Teorema A.31 (Princípio de Permanência de Equações Funcionais). Seja D um domínio, e seja E um subconjunto de D que possui um ponto de acumulação. Seja $F(z, w)$ uma função definida para $z, w \in D$ tal que $F(z, w)$ é analítica em z para cada $w \in D$ fixo e analítica em w para cada $z \in D$ fixo. Se $F(z, w) = 0$ sempre que $z, w \in E$, então $F(z, w) = 0$ para todo $z, w \in D$.

A.4 Semigrupos

Definição A.32. Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados definidos no espaço de Banach X é chamado de **semigrupo a um parâmetro** sobre X se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $T(0) = I$, (I sendo o operador identidade em X .)
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ ($t, s \geq 0$).

Se (i) e (ii) valem para todo $t, s \in \mathbb{R}$ nós dizemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um **grupo a um parâmetro** sobre X .

Dizemos que o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é **fortemente contínuo** ou simplesmente C_0 -**semigrupo** se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)\phi = \phi \quad (\phi \in X)$$

Um C_0 - semigrupo é dito ser **equilimitado** se existe uma constante positiva M tal que

$$\|T(t)\| \leq M \quad (t \geq 0,$$

e se, além disso $M = 1$, o semigrupo é chamado de **semigrupo de contrações**.

Definição A.33. O operador linear definido sobre o domínio

$$D(A) = \left\{ \phi \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\phi - \phi}{t} \text{ existe} \right\}$$

como

$$A\phi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\phi - \phi}{t} \quad (\phi \in D(A))$$

é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$

Teorema A.34 (Hille-Yosida). Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um equilimitado C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq M$ se e somente se,

(i) A é fechado e densamente definido.

(ii) $]0, \infty[\subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{\lambda^n} \quad (\lambda > 0, n \in \mathbb{N}).$$

Se $M = 1$, ou seja, se o semigrupo é de contrações, então (ii) pode ser substituído por,

(ii') $]0, \infty[\subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

Por (ii) segue que $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda)^n} \quad (\lambda \in \mathbb{C}_+, n \in \mathbb{N}),$$

uma vez que o resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ é dado através da transformada de Laplace do semigrupo, ou seja,

$$(\lambda - A)^{-1}\phi = \mathcal{L}(T(t))\phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\phi dt, \quad (\lambda \in \mathbb{C}_+, n \in \mathbb{N}).$$

Definição A.35. Um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é chamado de **semigrupo diferenciável** se para cada $\phi \in X$ a aplicação $t \mapsto T(t)\phi$ é diferenciável, ou equivalentemente, $R(T(t)) \subset D(A)$ para todo $t \geq 0$.

Definição A.36. Seja $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$. Dizemos que a família de operadores limitados $\{T(z); z \in S_\tau\}$ é um **semigrupo analítico** de amplitude τ se:

- (i) $T(0) = I$ e $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ ($z_1, z_2 \in S_\tau$).
- (ii) $\lim_{z \rightarrow 0, z \in S_\tau} T(z)\phi = \phi$ ($\phi \in X$).
- (iii) A função $z \mapsto T(z)$ é analítica de $\mathbb{C}$ em $\mathcal{L}(X)$.

O semigrupo analítico será chamado de **equilimitado** se:

- (iv) Dado $0 < \varepsilon \leq \tau$, os operadores $T(z)$ são uniformemente limitados em $\{z \in \mathbb{C}^*; |\arg(z)| \leq \tau - \varepsilon\}$.

Teorema A.37. Seja A um operador linear sobre o espaço de Banach X . São equivalentes:

- (i) $-A$ gera um C_0 -semigrupo equilimitado diferenciável $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ tal que

$$\sup_{t > 0} t \|AT(t)\| = C < \infty.$$

- (ii) Existe um número real $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ tal que o operador $-A$ gera um semigrupo analítico equilimitado de amplitude τ .

- (iii) A é densamente definido e existe um número real $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ tal que A é setorial com ângulo espectral menor ou igual a $\frac{\pi}{2} - \tau$.

A.5 O Teorema de Representação Radon-Riesz

Seja X um espaço topológico. A σ -álgebra gerada pela família de subconjuntos abertos em X é chamada de **σ -álgebra de Borel** sobre X . Denotamos essa classe por $\mathcal{B}(X)$ e seus elementos são chamados de **conjuntos de Borel**. Cada medida definida em $\mathcal{B}(X)$ é chamada de **medida de Borel**.

Se X é um espaço topológico e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, o suporte de f é definido por

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}^X.$$

A partir de agora, nessa sessão, X será um espaço métrico localmente compacto e separável. A classe de funções complexas definidas X com suporte compacto é denotada por $C_0(X)$. Dizemos que uma sequência de funções $\{f_i\}_{i \in I} \subset C_0(X)$ converge para f no **sentido do espaço** $C_0(X)$, e escrevemos $C_0(X) - \lim_{i \in I} f_i = f$, se valem as seguintes condições:

- (i) Existe um compacto $K \subset X$ tal que $\text{supp} f_i \subset K$.
- (ii) A sequência $\{f_i\}_{i \in I}$ converge uniformemente para f em X .

Denotamos por $[C_0(X)]'$ o dual topológico de $C_0(X)$, isto é, o espaço das formas lineares em $C_0(X)$ tais que se $C_0(X) - \lim_{i \in I} f_i = f$, então $\lim_{i \in I} \langle F, f_i \rangle = \langle F, f \rangle$.

Se $f \in C(X)$, dizemos que f **se anula em** ∞ se para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $\{x \in X; |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é compacto. Definimos

$$C_\infty(X) = \{f \in C(X); f \text{ se anula em } \infty\}.$$

O espaço $C_\infty(X)$ com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|; x \in X\}$$

é um espaço de Banach.

Uma medida de Borel positiva é dita **regular** se para cada conjunto de Borel A ,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K); K \subset A, K \text{ compacto}\} \\ &= \inf\{\mu(G); A \subset G, G \text{ aberto}\}. \end{aligned}$$

Uma **medida de Radon positiva** sobre X é uma medida de Borel positiva regular a qual é **localmente finita**, ou seja, finita sobre conjuntos compactos. Denotamos a classe dessas medidas por $M^+(X)$ e a subclasse de medidas de Radon positivas e finitas por $M_F^+(X)$.

Teorema A.38. *Seja X um espaço localmente compacto e separável. Então, toda medida de Borel positiva sobre X que é localmente finita é regular e, portanto, é também uma medida de Radon.*

Se $\mu \in M^+(X)$, a função $f : X \rightarrow \mathbb{X}$ é dita localmente μ -integrável sobre X se

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

para todo compacto $K \subset X$. Nesse caso escrevemos $f \in L_1^{loc}(\Omega)$. **Observe que $C(\Omega) \subset L_1^{loc}(\Omega)$ e $L^p(\Omega) \subset L_1^{loc}(\Omega) (1 \leq p \leq \infty)$.**

Dizemos que μ é uma **medida de Radon complexa** e escrevemos $\mu \in M(X)$ se existem medidas de Radon positivas $\mu_i (1 \leq i \leq 4)$ tais que $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$.

No caso de que as medidas $\mu_i (1 \leq i \leq 4)$ são finitas nós dizemos que μ é uma **medida de Radon complexa finita** e escrevemos $\mu \in M_F(X)$.

Seja f uma função Borel mensurável. Dizemos que f é integrável com respeito a μ e escrevemos $f \in L^1(\mu)$ se f é integrável com respeito a cada $\mu_i (1 \leq i \leq 4)$. Nesse caso,

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\mu_1 - \int_X f d\mu_2 + i \left(\int_X f d\mu_3 - \int_X f d\mu_4 \right).$$

Se $\mu \in M_F(X)$ e f é limitada então $f \in L^1(\mu)$. Em particular definimos a medida de cada

subconjunto A de X como

$$\mu(A) = \int_X \mathcal{X}_A d\mu,$$

onde $\mathcal{X}_A$ é a função característica de A .

Seja $\mu \in M(X)$. Dizemos que o conjunto de Borel A é μ -mensurável se $\mathcal{X}_A \in L^1(\mu)$ e sua respectiva medida é dado da mesma maneira.

Definição A.39. *Dada uma medida de Radon complexa μ , definimos a variação total de μ como a medida positiva $|\mu|$ definida como segue: como X é um espaço métrico separável e μ é uma medida localmente finita, dado um conjunto de Borel A , existem sequencias de elementos disjuntos $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ de conjuntos de Borel μ -mensuráveis tal que $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Definimos $|\mu|(A)$ como o número*

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^\infty |\mu(A_k)|; A_k \text{ são conjuntos de Borel } \mu\text{-mensuráveis disjuntos e } A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \right\}.$$

Proposição A.40. (i) $|\mu|$ é uma medida positiva.

(ii) $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ para todo conjunto de Borel μ -mensurável A .

(iii) Seja η uma medida positiva tal que para cada conjunto de Borel μ -mensurável A , $|\mu(A)| \leq \eta(A)$. Então, para todo conjunto de Borel A ,

$$|\mu|(A) \leq \eta(A).$$

(iv) $f \in L^1(\mu)$ se, e somente se $|f| \in L^1(|\mu|)$ e

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d|\mu|.$$

O funcional linear F sobre $C_\infty(X)$ ($C_0(X)$) é dito positivo se $F(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$.

Teorema A.41 (Radon-Riesz para $C_\infty(X)$). *Dado um espaço métrico X localmente compacto e separável e um funcional F em $C_\infty(X)$ positivo e contínuo, existe uma única medida $\mu \in M_F^+(X)$ tal que*

$$F(f) = \int_X f d\mu.$$

Se $F \in [C_\infty(X)]'$, então existe uma única medida $\mu \in M_F(X)$ tal que

$$F(f) = \int_X f d\mu.$$

Teorema A.42 (Radon-Riesz para $C_0(X)$). *Dado um espaço métrico X localmente compacto e separável e um funcional F em $C_0(X)$ positivo e contínuo, existe uma única medida $\mu \in M^+(X)$ tal que*

$$F(f) = \int_X f d\mu.$$

Se $F \in [C_0(X)]'$, então existe uma única medida $\mu \in M(X)$ tal que

$$F(f) = \int_X f d\mu.$$

Teoria de Interpolação em Espaços de Banach

Nosso maior objetivo nesta parte do trabalho é estabelecer, de maneira simplificada e sem muito peso técnico, a relação entre o domínio do operador potência fracionária A^α , $0 < \alpha \leq 1$ e os espaços de interpolação.

Essa importante relação foi estudada por H. Triebel em [27] e pela professora Alessandra Lunardi em [25]. A parte de interpolação de espaços de Banach, tanto real quanto complexa, foi quase totalmente retirada de [25], com exceção das definições iniciais, que nos baseamos em [27].

A parte de interpolação de subespaços, bem como o Teorema de Interpolação de Baiocchi, foi retirada de [24].

Sejam X, Y dois espaços de Banach reais ou complexos. A identidade $X = Y$ significa que X e Y possuem os mesmos elementos e normas equivalentes e a sentença $X \hookrightarrow Y$ significará que X está continuamente imerso em Y .

Definição B.1. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. O par (X, Y) é chamado de **par de interpolação** se existe um espaço vetorial topológico de Hausdorff Z tal que*

$$X, Y \hookrightarrow Z$$

com imersões contínuas.

A existência do espaço de Hausdorff Z na definição anterior é necessária para garantir que o espaço $X \cap Y$ é um espaço de Banach. Além disso, se $D = \{(x, -x); x \in X \cap Y\}$, então $X + Y$ é isométrico ao espaço $X \times Y/D$, e como Z é espaço de Hausdorff segue que $X + Y$ é também um espaço de Banach. O lema a seguir formaliza estas idéias.

Lema B.2. *Seja (X, Y) um par de interpolação. Então $X \cap Y$ com a norma*

$$\|a\|_{X \cap Y} = \max(\|a\|_X, \|a\|_Y), \quad a \in X \cap Y,$$

e $X + Y$ com a norma

$$\|a\|_{X+Y} = \inf_{x \in X, y \in Y} (\|x\|_X + \|y\|_Y), \quad a = x + y \in X + Y.$$

são espaços de Banach. Além disso

$$X \cap Y \hookrightarrow X_j \hookrightarrow X + Y, \quad j = 0, 1.$$

Demonstração. Ver [27], p. 18. □

Se (X, Y) é um par de interpolação, um **espaço intermediário** é qualquer espaço de Banach E que satisfaz

$$X \cap Y \hookrightarrow E \hookrightarrow X + Y.$$

Além disso, um **espaço de interpolação** entre X e Y é qualquer espaço intermediário E tal que para todo $T \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(Y)$ (isto é, para todo $T \in \mathcal{L}(X + Y)$ cuja restrição em X pertence a $\mathcal{L}(X)$ e a restrição em Y pertence a $\mathcal{L}(Y)$), a restrição em E pertence a $\mathcal{L}(E)$.

A Teoria de Interpolação de espaços de Banach não tem como objetivo principal a caracterização de todos os espaços de interpolação entre X e Y , mas de construir algumas famílias de interesse e estudar suas propriedades. As duas famílias mais conhecidas de espaços de interpolação são os espaços de interpolação real, a qual trataremos rapidamente na seção B.1 e os espaços de interpolação complexa, o qual abordaremos na seção B.3.

De um modo geral o domínio das potências de operadores positivos em espaços de Banach não são espaços de interpolação. No entanto, em alguns casos interessantes e de vasta aplicabilidade estes coincidem com espaços de interpolação complexa adequados.

B.1 Interpolação Real

Seja (X, Y) um par (real ou complexo) de interpolação.

Se I é qualquer intervalo contido em $(0, +\infty)$, $L_*^p(I)$ é o espaço de Lebesgue $L^p(I)$ com respeito da medida $\frac{dt}{t}$ em I . Em particular, $L_*^\infty(I) = L^\infty(I)$.

B.1.1 O K-Método

Definição B.3. *Para cada $x \in X + Y$ e $t > 0$ defina*

$$K(t, x, X, Y) = \inf_{x=a+b, a \in X, b \in Y} (\|a\|_X + t\|b\|_Y). \quad (\text{B.1})$$

Quando não há risco de confusão, denotamos $K(t, x, X, Y)$ apenas por $K(t, x)$.

É interessante observar que $K(1, x) = \|x\|_{X+Y}$ e que para cada $t > 0$, $K(t, \cdot)$ define uma norma em $X + Y$ equivalente a $K(1, x)$.

A seguir, com a ajuda da função K definimos uma família de espaços de Banach.

Definição B.4. *Sejam $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Defina*

$$(X, Y)_{\theta, p} = \left\{ x \in X + Y; t \mapsto t^{-\theta} K(t, x, X, Y) \in L_*^p(0, +\infty) \right\}; \quad (\text{B.2})$$

$$\|x\|_{(X, Y)_{\theta, p}} = \left\| t^{-\theta} K(t, x, X, Y) \right\|_{L_*^p(0, +\infty)}; \quad (\text{B.3})$$

$$(X, Y)_{\theta} = \left\{ x \in X + Y; \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-\theta} K(t, x, X, Y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\theta} K(t, x, X, Y) = 0 \right\} \quad (\text{B.4})$$

Tais espaços são chamados de **espaços de interpolação real**.

A aplicação $x \mapsto \|x\|_{(X, Y)_{\theta, p}}$ é uma norma em $(X, Y)_{\theta, p}$ e quando não houver chance de confusão será chamada apenas de $\|x\|_{\theta, p}$.

Pela definição da função K não é difícil observar que $K(t, x, X, Y) = tK(t^{-1}, x, Y, X)$ para cada $t > 0$, assim, ainda da definição segue que

$$(X, Y)_{\theta, p} = (Y, X)_{1-\theta, p} \quad 0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty, \quad (\text{B.5})$$

e

$$(X, Y)_{\theta} = (Y, X)_{1-\theta} \quad (\text{B.6})$$

A seguir alguns casos particulares.

(i) Se $X = Y$, então $X + Y = X$ e $K(t, x) \leq \min\{t, 1\}\|x\|$. Portanto,

$$(X, Y)_{\theta, p} = X \quad 0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty,$$

com a equivalência das respectivas normas.

(ii) Se $X \cap Y = \{0\}$ então $(X, Y)_{\theta, p} = (X, Y)_{\theta} = \{0\}$ para todo $p \in [1, \infty]$ e $\theta \in (0, 1)$.

(iii) Se $Y \hookrightarrow X$ temos $K(t, x) \leq \|x\|_X$ para todo $x \in X$, assim $t \mapsto t^{-\theta} K(t, x) \in L_*^p(a, \infty)$ para todo $a > 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\theta} K(t, x) = 0$. Portanto, apenas o comportamento de $t^{-\theta} K(t, x)$ importa na definição de $(X, Y)_{\theta, p}$ e $(X, Y)_{\theta}$ uma vez que podemos substituir $(0, +\infty)$ por $(0, a)$ na definição B.4 e obter normas equivalentes.

O item (iii) anterior é muito importante para teoria de interpolação em geral como veremos nos resultados posteriores.

A proposição a seguir contém a relação entre os espaços de interpolação real $(X, Y)_{\theta, p_1}$ e $(X, Y)_{\theta, p_2}$ quando $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$.

Proposição B.5. Para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ temos

$$X \cap Y \hookrightarrow (X, Y)_{\theta, p_1} \hookrightarrow (X, Y)_{\theta, p_2} \hookrightarrow (X, Y)_{\theta} \hookrightarrow (X, Y)_{\theta, \infty} \hookrightarrow X + Y. \quad (\text{B.7})$$

Além disso,

$$(X, Y)_{\theta, \infty} \hookrightarrow \overline{X} \cap \overline{Y},$$

onde o fecho de X e Y foram tomados em $X + Y$.

Demonstração. Ver [25], p. 6. □

Se $Y \hookrightarrow X$ outras relações de imersão valem e são dadas na proposição a seguir.

Proposição B.6. Se $Y \hookrightarrow X$, para $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ temos

$$(X, Y)_{\theta_2, \infty} \hookrightarrow (X, Y)_{\theta_1, 1}. \quad (\text{B.8})$$

Portanto, $(X, Y)_{\theta_2, p} \hookrightarrow (X, Y)_{\theta_1, q}$ para todo $p, q \in [1, \infty]$.

Demonstração. Ver [25], p. 9. □

A proposição anterior não é verdade, no geral, veja [25], exemplo 1.1.10, p. 17.

Proposição B.7. Para todo $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$, $(X, Y)_{\theta, p}$ é um espaço de Banach. Para todo $\theta \in (0, 1)$, $(X, Y)_{\theta}$ é um espaço de Banach com a norma de $(X, Y)_{\theta, \infty}$.

Demonstração. Ver [25], p. 9. □

O Teorema a seguir garante que os espaços $(X, Y)_{\theta, p}$ e $(X, Y)_{\theta}$ são espaços de interpolação.

Teorema B.8. Sejam $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ pares de interpolação. Se $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2) \cap \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$ então $T \in \mathcal{L}((X_1, Y_1)_{\theta, p}, (X_2, Y_2)_{\theta, p}) \cap \mathcal{L}((X_1, Y_1)_{\theta}, (X_2, Y_2)_{\theta})$ para todo $\theta \in (0, 1)$ e $p \in [1, \infty]$. Além disso,

$$\|T\|_{\mathcal{L}((X_1, Y_1)_{\theta, p}, (X_2, Y_2)_{\theta, p})} \leq (\|T\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)})^{1-\theta} (\|T\|_{\mathcal{L}(Y_1, Y_2)})^{\theta}. \quad (\text{B.9})$$

Demonstração. Ver [25], p. 10. □

Tomando $X_1 = X_2 = X$ e $Y_1 = Y_2 = Y$ no Teorema anterior segue que $(X, Y)_{\theta, p}$ e $(X, Y)_{\theta}$ são espaços de interpolação. Outra importante consequência é dada abaixo.

Corolário B.9. Seja (X, Y) um par de interpolação. Para $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ existe $c = c(\theta, p)$ tal que

$$\|y\|_{(X, Y)_{\theta, p}} \leq c(\theta, p) \|y\|_X^{1-\theta} \|y\|_Y^{\theta}, \quad \forall y \in X \cap Y. \quad (\text{B.10})$$

Demonstração. Ver [25], p. 11. □

B.2 Espaços Intermediários e Reiteração

Vamos introduzir duas classes de espaços intermediários para o par de interpolação (X, Y) .

Definição B.10. *Sejam $0 \leq \theta \leq 1$ e E um espaço de Banach tal que $X \cap Y \hookrightarrow E \hookrightarrow X + Y$.*

(i) *Dizemos que E pertence à classe J_θ entre X e Y se existe uma constante c tal que*

$$\|x\|_E \leq c \|x\|_X^{1-\theta} \|x\|_Y^\theta, \quad \forall x \in X \cap Y,$$

e nesse caso dizemos que $E \in J_\theta(X, Y)$.

(ii) *Dizemos que E pertence à classe K_θ entre X e Y se existe $k > 0$ tal que*

$$K(t, x) \leq kt^\theta \|x\|_E, \quad \forall x \in E, t > 0,$$

e nesse caso dizemos que $E \in K_\theta(X, Y)$.

Se $\theta \in (0, 1)$ isso significa que E é continuamente imerso em $(X, Y)_{\theta, \infty}$.

A proposição a seguir fornece uma caracterização muito útil do espaço $J_\theta(X, Y)$.

Proposição B.11. *Sejam $0 < \theta < 1$ e E um espaço de Banach tal que $X \cap Y \hookrightarrow E \hookrightarrow X + Y$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) $E \in J_\theta(X, Y)$.

(ii) $(X, Y)_{\theta, 1} \hookrightarrow E$

Demonstração. Ver [25], p. 27 e 28. □

A Definição B.10 e a Proposição B.11 garantem que, para $0 < \theta < 1$ um espaço $E \in K_\theta(X, Y) \cap J_\theta(X, Y)$ se, e somente se,

$$(X, Y)_{\theta, 1} \hookrightarrow E \hookrightarrow (X, Y)_{\theta, \infty}.$$

Em particular, $(X, Y)_{\theta, p}$ e $(X, Y)_\theta$ pertencem à $K_\theta(X, Y) \cap J_\theta(X, Y)$ para todo $p \in [1, \infty]$. No entanto, existem espaços intermediários que pertencem a $K_\theta(X, Y) \cap J_\theta(X, Y)$ e que não são espaços de interpolação, como apontamos no exemplo a seguir.

Exemplo B.12. $C^1(\mathbb{R}^n) \in J_{\frac{1}{2}}(C(\mathbb{R}^n), C^2(\mathbb{R}^n)) \cap K_{\frac{1}{2}}(C(\mathbb{R}^n), C^2(\mathbb{R}^n))$, mas $C^1(\mathbb{R}^n)$ não é um espaço de interpolação entre $C(\mathbb{R}^n)$ e $C^2(\mathbb{R}^n)$.

A seguir apresentamos uma das principais ferramentas para a Teoria de Interpolação no geral.

Teorema B.13 (Teorema de Reiteração). *Sejam $0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$. Seja $\theta \in (0, 1)$ e defina $\omega = (1 - \theta)\theta_0 + \theta\theta_1$. Valem as seguintes afirmações:*

(i) Se $E_i \in K_\theta(X, Y)$, $i = 0, 1$, então

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} \hookrightarrow (X, Y)_{\omega, p}, \quad \forall p \in [1, \infty],$$

e

$$(E_0, E_1)_\theta \hookrightarrow (X, Y)_\omega.$$

(ii) Se $E_i \in J_\theta(X, Y)$, $i = 0, 1$, então

$$(X, Y)_{\omega, p} \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\theta, p}, \quad \forall p \in [1, \infty],$$

e

$$(X, Y)_\omega \hookrightarrow (E_0, E_1)_\theta.$$

Consequentemente, se $E_i \in J_\theta(X, Y) \cap K_\theta(X, Y)$ então,

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} = (X, Y)_{\omega, p}, \quad \forall p \in [1, \infty],$$

e

$$(E_0, E_1)_\theta = (X, Y)_\omega,$$

com a equivalência das respectivas normas.

Demonstração. Ver [25], p. 31, 32 e 33. □

B.3 Interpolação Complexa

Iniciamos essa seção enunciando um importante resultado.

Proposição B.14 (Princípio do Máximo). Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto e limitado e $f : \overline{\Omega} \rightarrow X$ é holomorfa em Ω e contínua em $\overline{\Omega}$ então

$$\|f(\xi)\|_X \leq \max\{\|f(z)\|_X; z \in \partial\Omega\}$$

para todo $\xi \in \overline{\Omega}$.

O Princípio do Máximo também vale para funções definidas em faixas. Em razão de nosso interesse nesse trabalho, vamos considerar a faixa

$$S = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; 0 \leq x \leq 1\}.$$

Se $f : S \rightarrow X$ é holomorfa no interior de S , contínua e limitada em S então o Princípio do Máximo garante que para cada $\xi \in S$

$$\|f(\xi)\|_X \leq \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_X, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1+it)\| \right\}.$$

Seja (X, Y) um par de interpolação de espaços de Banach.

Definição B.15. Definimos por $\mathcal{F}(X, Y)$ o espaço de todas as funções $f : S \rightarrow X + Y$ tais que

(i) f é holomorfa no interior de S e contínua até sua fronteira.

(ii) $t \mapsto f(it) \in C(\mathbb{R}; X)$, $t \mapsto f(1+it) \in C(\mathbb{R}; Y)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{F}(X, Y)} = \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_X, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1+it)\|_Y \right\}.$$

Definimos também $\mathcal{F}_0(X, Y)$ como o subespaço de $\mathcal{F}(X, Y)$ que consiste das funções $f : S \rightarrow X + Y$ tais que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|f(it)\|_X = 0 = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|f(1+it)\|_Y.$$

Uma aplicação direta do Princípio do Máximo garante que $\mathcal{F}(X, Y)$ e $\mathcal{F}_0(X, Y)$ são espaços de Banach.

Lema B.16. O espaço gerado pelas funções $e^{(\delta z^2 + \lambda z)a}$, $\delta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in X \cap Y$ é denso em $\mathcal{F}_0(X, Y)$.

Demonstração. Ver [3], p. 132. □

Os espaços de interpolação complexa $[X, Y]_\theta$ são definidos através do traço das funções em $\mathcal{F}(X, Y)$.

Definição B.17. Para todo $\theta \in [0, 1]$ define

$$[X, Y]_\theta = \{f(\theta); f \in \mathcal{F}(X, Y)\}, \|a\|_{[X, Y]_\theta} = \inf_{f \in \mathcal{F}(X, Y), f(\theta)=a} \|f\|_{\mathcal{F}(X, Y)}.$$

$[X, Y]_\theta$ é isomorfo ao espaço quociente $\mathcal{F}(X, Y)/\mathcal{N}_\theta$, onde $\mathcal{N}_\theta$ é o subconjunto de $\mathcal{F}(X, Y)$ que consiste das funções que se anulam em $z = \theta$. Como $\mathcal{N}_\theta$ é fechado, o espaço quociente é um espaço de Banach e, por consequência disso, $[X, Y]_\theta$ também o é.

As propriedades a seguir seguem diretamente da definição de $[X, Y]_\theta$.

(i) Para todo $\theta \in (0, 1)$,

$$[X, Y]_\theta = [Y, X]_{1-\theta}.$$

(ii) Conseguimos uma definição equivalente de $[X, Y]_\theta$ substituindo o espaço $\mathcal{F}(X, Y)$ pelo espaço $\mathcal{F}_0(X, Y)$. De fato para cada $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ e $\delta > 0$ a função $f_\delta(z) = e^{\delta(z-\theta)^2} f(z)$ está em $\mathcal{F}_0(X, Y)$,

satisfaz $f_\delta(\theta) = f(\theta)$ e $\|f_\delta\|_{\mathcal{F}(X,Y)} \leq \max \left\{ e^{\delta\theta^2}, e^{\delta(1-\theta)^2} \right\} \|f\|_{\mathcal{F}(X,Y)}$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ segue que

$$\inf_{f \in \mathcal{F}(X,Y), f(\theta)=a} \|f\|_{\mathcal{F}(X,Y)} = \inf_{f \in \mathcal{F}_0(X,Y), f(\theta)=a} \|f\|_{\mathcal{F}(X,Y)}$$

(iii) Se $Y = X$ então $[X, X]_\theta = X$.

(iv) Para todo $t \in \mathbb{R}$ e para toda $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, temos $f(\theta + it) \in [X, Y]_\theta$ para cada $\theta \in (0, 1)$ e $\|f(\theta + it)\|_{[X,Y]_\theta} = \|f(\theta)\|_{[X,Y]_\theta}$. Para isso basta substituir a função f por $g(z) = f(z + it)$.

Finalmente, o Lema B.16 garante que $X \cap Y$ é denso em $[X, Y]_\theta$ para todo $\theta \in (0, 1)$.

Proposição B.18. *Seja $\theta \in (0, 1)$. Então*

$$X \cap Y \hookrightarrow [X, Y]_\theta \hookrightarrow X + Y.$$

Demonstração. Ver [25], p. 45. □

A observação a seguir apresenta uma maneira alternativa de calcular a norma em $[X, Y]_\theta$ para os elementos de $X \cap Y$.

Observação B.19. *Seja $\nu(X, Y)$ o espaço gerado pelas funções do tipo $\varphi(z)x$, com $\varphi \in \mathcal{F}_0(X, Y)$ e $x \in X \cap Y$. Se $a \in X \cap Y$, sua $[X, Y]_\theta$ -norma pode ser obtida também através da fórmula,*

$$\|a\|_{[X,Y]_\theta} = \inf_{f \in \nu(X,Y), f(\theta)=a} \|f\|_{\mathcal{F}(X,Y)}. \quad (\text{B.11})$$

Demonstração. Ver [25], p. 46. □

Finalmente, o teorema a seguir garante que $[X, Y]_\theta$ são espaços de interpolação.

Teorema B.20. *Sejam $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ pares de interpolação complexa. Se $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2) \cap \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$, então a restrição de T a $[X_1, Y_1]_\theta$ pertence a $\mathcal{L}([X_1, Y_1]_\theta, [X_2, Y_2]_\theta)$ para todo $\theta \in (0, 1)$. Além disso,*

$$\|T\|_{\mathcal{L}([X_1, Y_1]_\theta, [X_2, Y_2]_\theta)} \leq (\|T\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)})^{1-\theta} (\|T\|_{\mathcal{L}(Y_1, Y_2)})^\theta. \quad (\text{B.12})$$

Demonstração. Ver [25], p. 46 e 47. □

Assim como na interpolação real, temos o seguinte corolário, cuja demonstração é análoga ao caso da interpolação real.

Corolário B.21. *Para todo $\theta \in (0, 1)$ temos*

$$\|y\|_{[X,Y]_\theta} \leq \|y\|_X^{1-\theta} \|y\|_Y^\theta, \quad \forall y \in X \cap Y. \quad (\text{B.13})$$

Demonstração. Ver [25], p. 48. □

O corolário anterior garante que $[X, Y]_\theta \in J_\theta(X, Y)$ e então, graças à proposição B.11 $(X, Y)_{\theta,1} \hookrightarrow [X, Y]_\theta$. Além disso, $[X, Y]_\theta \hookrightarrow (X, Y)_{\theta,\infty}$ como é dito na proposição a seguir.

Proposição B.22. *Para todo $\theta \in (0, 1)$, $[X, Y]_\theta \in K_\theta(X, Y)$, isto é, $[X, Y]_\theta \hookrightarrow (X, Y)_{\theta,\infty}$.*

Demonstração. Ver [25], p. 49. □

Assim, combinando o Corolário B.21 e a Proposição B.5 concluímos que $[X, Y]_\theta \in J_\theta(X, Y) \cap K_\theta(X, Y)$. Logo, pela proposição B.6 segue que $[X, Y]_{\theta_2} \hookrightarrow [X, Y]_{\theta_1}$ para $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, sempre que $Y \hookrightarrow X$.

Além disso, o Teorema da Reiteração nos permite caracterizar os espaços de interpolação real entre espaços de interpolação complexa. Para $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$,

$$([X, Y]_{\theta_1}, [X, Y]_{\theta_2})_{\theta,p} = (X, Y)_{(1-\theta)\theta_1 + \theta\theta_2, p}.$$

Ainda a respeito de propriedades de reiteração, Calderon (ver [3]) mostrou que se um dos espaços X, Y está continuamente imerso no outro, ou se X, Y são espaços reflexivos e $X \cap Y$ é denso em ambos, X e Y , então

$$[[X, Y]_{\theta_1}, [X, Y]_{\theta_2}]_\theta = [X, Y]_{(1-\theta)\theta_1 + \theta\theta_2}.$$

Se X e Y são espaços reflexivos, Lions (ver [23]) mostrou que para $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, $\theta \in (0, 1)$ e $p \in]0, \infty[$,

$$[(X, Y)_{\theta_1, p}, (X, Y)_{\theta_2, p}]_\theta = (X, Y)_{(1-\theta)\theta_1 + \theta\theta_2}.$$

A respeito dos casos em que os espaços de interpolação complexa coincidem com os espaços de interpolação real não existe resposta geral. No entanto, prova-se que, se X e Y são espaços de Hilbert, então

$$[X, Y]_\theta = (X, Y)_{\theta, p}.$$

Na próxima seção vamos relacionar as definições e resultados das seções anteriores com o domínio de operadores lineares.

Nosso interesse, como já dito, está em caracterizar o domínio do operador A^α , A sendo um operador positivo e $\alpha \in (0, 1)$.

B.4 Espaços de Interpolação e Domínio de Operadores

Vamos começar vendo alguns resultados a respeito do domínio do operador A e depois estenderemos para a potência fracionária.

Definição B.23. *Para $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, +\infty]$ definimos*

$$D_A(\theta, p) = (X, D(A))_{\theta, p}.$$

Além disso, se $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$D_A(\theta + k, p) = \{x \in D(A^k); A^k x \in D_A(\theta, p)\},$$

$$\|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\| + \|A^k\|_{D_A(\theta,p)},$$

isto é, $D_A(\theta + k, p)$ é o domínio da parte de A^k em $D_A(\theta, p)$.

Segue dessa definição o seguinte corolário.

Corolário B.24. Para $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, +\infty]$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$D_A(\theta + k, p) = (D(A^k), D(A^{k+1}))_{\theta,p}.$$

Demonstração. Ver [25], p. 59. □

B.4.1 O caso em que A é um operador não negativo

Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear não negativo.

Proposição B.25.

$$(X, D(A))_{\theta,p} = \{x \in X; \lambda \mapsto \varphi(\lambda) = \lambda^\theta \|A(\lambda + A)^{-1}x\| \in L_*^p(0, +\infty)\}$$

e as normas $\|x\|_{\theta,p}$ e

$$\|x\|_{\theta,p}^* = \|x\| + \|\varphi\|_{L_*^p(0, +\infty)}$$

são equivalentes.

Demonstração. Ver [25], p. 57 e 58. □

Proposição B.26. Se $r, m \in \mathbb{N}$ são tais que $r > m$, então,

$$D(A^r) \in J_{\frac{r}{m}}(X, D(A^m)) \cap K_{\frac{r}{m}}(X, D(A^m)).$$

Proposição B.27. Se $m \in \mathbb{N}$, então, para $\theta \in (0, 1)$ tal que $m\theta \notin \mathbb{N}$ e para $p \in [1, \infty]$ segue

$$(X, D(A^m))_{\theta,p} = D_A(m\theta, p).$$

Proposição B.28. Se $\theta \in (0, 1)$ e $p \in [1, +\infty]$.

$$(X, D(A^2))_{\theta,p} = \{x \in X; \lambda \mapsto \bar{\varphi}(\lambda) = \lambda^{2\theta} \|A^2(\lambda + A)^{-2}x\| \in L_*^p(0, +\infty)\}$$

e as normas $\|x\|_{(X, D(A^n))_{\theta, p}}$ e

$$\|x\|_{\theta, p}^- = \|x\| + \|\bar{\varphi}\|_{L_*^p(0, +\infty)}$$

são equivalentes.

Demonstração. Ver [25], p. 62. □

B.4.2 O caso em que A é gerador de um semigrupo

Suponhamos que A é gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Proposição B.29.

$$(X, D(A))_{\theta, p} = \{x \in X; t \mapsto \psi(t) = t^{-\theta} \|T(t)x - x\| \in L_*^p(0, +\infty)\}$$

e as normas $\|x\|_{\theta, p}$ e

$$\|x\|_{\theta, p}^{**} = \|x\| + \|\psi\|_{L_*^p(0, +\infty)}$$

são equivalentes.

Demonstração. Ver [25], p. 70. □

Proposição B.30. Para todo $\theta \in (0, 1)$ e $p \in [1, +\infty]$ temos,

$$(X, D(A^2))_{\theta, p} = \{x \in X; t \mapsto \bar{\psi}(t) = t^{-2\theta} \|(T(t) - I)^2 x\| \in L_*^p(0, +\infty)\}$$

e as normas $\|x\|_{\theta, p}$ e

$$\|x\|_{\theta, p}^- = \|x\| + \|\bar{\psi}\|_{L_*^p(0, +\infty)}$$

são equivalentes.

Demonstração. Ver [25], p. 70. □

Teorema B.31. Seja $T(t)$ um semigrupo em X . Além disso, assuma que existe um espaço de Banach $E \subset X$ e $m \in \mathbb{N}$, $\beta \in (0, 1)$, $C > 0$ tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X, E)} \leq \frac{C}{t^{m\beta}}, \quad t > 0,$$

e que $t \mapsto T(t)x$ é mensurável com valores em E , para cada $x \in X$. Então $E \in J_\beta(X, D(A^m))$, assim $(X, D(A^m))_{\theta\beta, p} \hookrightarrow (X, E)_{\theta, p}$ para cada $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$.

Demonstração. Ver [25], p. 73 e 74. □

B.4.3 Domínio do Operador Potência Fracionária

Proposição B.32. Para $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$,

$$D(A^\alpha) \in J_{\operatorname{Re} \alpha}(X, D(A)) \cap K_{\operatorname{Re} \alpha}(X, D(A)),$$

isto é,

$$(X, D(A))_{\operatorname{Re} \alpha, 1} \hookrightarrow D(A^\alpha) \hookrightarrow (X, D(A))_{\operatorname{Re} \alpha, \infty}$$

Demonstração. Ver [25], p. 89 e 90.

Em espaços de Hilbert o seguinte Teorema é Válido.

Teorema B.33. Seja H um espaço de Hilbert. Se $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é m -acretivo e $0 \in \rho(A)$ então para $0 \leq \operatorname{Re} \alpha \leq \operatorname{Re} \beta$ e para cada $\theta \in (0, 1)$ temos

$$[D(A^\alpha), D(A^\beta)]_\theta = D(A^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta}).$$

Demonstração. Ver [25], p. 119 e 120. □

Observe que tomando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ no teorema acima obtemos que, em espaços de Hilbert,

$$[D(A), X]_{1-\theta} = D(A^\theta),$$

e é com essa caracterização que iniciaremos a nossa discussão no capítulo seguinte.

A próxima seção nos dá uma alternativa para caracterizar os domínios de potências fracionárias de operadores. No próximo capítulo discutiremos as suas vantagens.

B.5 Interpolação de Subespaços: Interpolação de Baiocchi

Sejam X, Y dois espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow \Phi$ e $Y \hookrightarrow \Phi$, onde Φ é um espaço topológico localmente convexo.

Considere ainda outro espaço topológico localmente convexo Ψ e seja $\partial \in \mathcal{L}(\Phi, \Psi)$.

Tome $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espaços de Banach tais que $\mathcal{X} \subset \Psi$, $\mathcal{Y} \subset \Psi$ (em particular podemos tomar $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0\}$). Defina os seguintes subespaços de X e Y ,

$$(X)_{\partial, \mathcal{X}} = \{u \in X; \partial u \in \mathcal{X}\},$$

$$(Y)_{\partial, \mathcal{Y}} = \{u \in Y; \partial u \in \mathcal{Y}\}$$

equipados com a norma do gráfico

$$\|u\|_{(X)_{\partial, \mathcal{X}}} = \|u\|_X + \|\partial u\|_{\mathcal{X}},$$

$$\|u\|_{(Y)_{\partial, \mathcal{Y}}} = \|u\|_Y + \|\partial u\|_{\mathcal{Y}}.$$

Nosso interesse, nessa seção, é apresentar um resultado que compare os espaços de interpolação complexa dos subespaços supradefinidos. Isto é, queremos comparar os espaços

$$[(X)_{\partial, \mathcal{X}}, (Y)_{\partial, \mathcal{Y}}]_{\theta} \quad \text{e} \quad ([X, Y]_{\theta})_{\partial, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{\theta}}.$$

Para isso devemos fazer as hipóteses de que existem espaços de Banach $\overline{\mathcal{X}}$ e $\overline{\mathcal{Y}}$ tais que,

- (i) $\mathcal{X} \subset \overline{\mathcal{X}} \subset \Psi$, $\mathcal{Y} \subset \overline{\mathcal{Y}} \subset \Psi$,
- (ii) $\partial \in \mathcal{L}(X, \overline{\mathcal{X}}) \cap \mathcal{L}(Y, \overline{\mathcal{Y}})$,
- (iii) Existem $\mathcal{G} \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{X}}, X) \cap \mathcal{L}(\overline{\mathcal{Y}}, Y)$ e $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{X}) \cap \mathcal{L}(\overline{\mathcal{Y}}, \mathcal{Y})$ tais que

$$\partial \mathcal{G} \chi = \chi + \mathcal{H} \chi, \quad \forall \chi \in \overline{\mathcal{X}} + \overline{\mathcal{Y}}.$$

A relação desejada é estabelecida no Teorema abaixo.

Teorema B.34. *Assuma que todas as condições acima são satisfeitas. Então*

$$[(X)_{\partial, \mathcal{X}}, (Y)_{\partial, \mathcal{Y}}]_{\theta} = ([X, Y]_{\theta})_{\partial, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{\theta}}, \quad \forall \theta \in (0, 1),$$

com a equivalência das respectivas normas.

Demonstração. Ver [24], p. 97 e 98. □

Referências Bibliográficas

- [1] BALAKRISHNAN, A.V.; *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them*, Pacific J. Math. 10 (1960), 419–437.
- [2] BREZIS, H.; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [3] CALDERÓN, A. P.; *Intermediate Spaces and Interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), 113-190.
- [4] CARRACEDO C. M., ALIX M. S.; *The Theory of Fractional Powers of Operators*, Elsevier, Amsterdam, 2001.
- [5] CHEN, G., RUSSEL, D. L.; *A mathematical model for linear elastic systems with structural damping*, Quart. Appl. Math. 39 (1982), 433–454.
- [6] CHEN, S., TRIGGIANI, R.; *Proof of two conjectures of G. Chen and D. L. Russell on structural damping for elastic systems: The case $\alpha = \frac{1}{2}$ (with S. Chen)*, Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics 1354 (1988), 234-256. Proceedings of Seminar on Approximation and Optimization, University of Havana, Cuba (January 1987).
- [7] CHEN, S., TRIGGIANI, R.; *Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems: The case $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$* , Pacific J. Math. 136 (1989), 15-55.
- [8] CHEN, S., TRIGGIANI, R.; *Characterization of domains of fractional powers of certain operators arising in elastic systems, and applications*, J. Diff. Eqns. 88 (1990), 279-293.
- [9] CHEN, S., TRIGGIANI, R.; *Gevrey class semigroups arising from elastic systems with gentle perturbation*, Proceedings Amer. Math. Soc. 110 (1990), 401-415.
- [10] DA PRATO, G.; GRISVARD, P.; *Maximal regularity for evolution equations by interpolation and extrapolation*, J. Funct. Anal., 58(1984), 107–124.
- [11] DAUTRAY, R., LIONS, J.; *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Springer, New York, 1990.

-
- [12] DE SIMON, L.; *Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. 34 (1964), 205–223.
- [13] DLOTKO, T.; *Sobolev Spaces and Embedding Theorems*, Silesian University, Poland. Disponível em:

<<http://http://www.icmc.usp.br/~andcarva/sobolew.pdf>>

Data de acesso: 08/04/2015.
- [14] ELDREDGE, N.; *Friedrichs Extension Theorem*, May 6, 2010. Disponível em:

<http://www.math.cornell.edu/~gross/Nates_notes_on_Friedrichs.pdf>.

Data de acesso: 18/03/2014.
- [15] FATTORINI, H. O.; *The Cauchy Problem*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Massachussets, 1983.
- [16] GAMELIN, T. W.; *Complex Analysis*, Springer, New York, 2003.
- [17] GARRET, P.; *Unbounded operators, Friedrichs' extension theorem*, march 7, 2011. <<http://www.math.umn.edu/~garrett/m/v/friedrichs.pdf>>. Data de acesso: 18/03/2014.
- [18] GRISVARD, P.; *Caracterization de quelques espaces d'interpolation*, Arch. Rational Mech. Anal., 25(1967), 40–63.
- [19] KREYSZIG, E.; *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.
- [20] LASIECKA, I.; *Unified theory for abstract parabolic boundary problems - a semigroup approach*, Appl. Math and Optimiz, 6 (1980), 31-62.
- [21] LASIECKA, I.; TRIGGIANI, R.; *Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories, I. Abstract Parabolic Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 74. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [22] LASIECKA, I.; TRIGGIANI, R.; *Domains of fractional powers of matrix-valued operators: a general approach*, In: W. ARENDT, R. CHILL, Y. TOMILOV (Ed(s)) *Operator Semigroups Meet Complex Analysis, Harmonic Analysis and Mathematical Physics*, New York, Springer, 2014, p. 297–311.
- [23] LIONS, J. L.; *Théoremes de traces et d'interpolation*, (I),..., (V); (I),(II) Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 13 (1959), 389-403; 14 (1960), 317-331. (III) J. Maths. Pures Appl. 42 (1963), 196-203; (IV) Math. Annalen 151 (1963), 42-56; (V) Anais de Acad. Brasileira de Ciencias 35 (1963), 1-110.

- [24] LIONS, J. L.; MAGENES, E.; *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [25] LUNARDI, A.; *Interpolation Theory*, Appunti, Scuola Normale Superiore, Pisa (1999).
- [26] PAZY, A.; *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [27] TRIEBEL H.; *Interpolation Theory and Function Spaces, Differential Operators*, North Holland, 1978.
- [28] YOSIDA, K.; *Functional Analysis*, 6nd ed. Springer-Verlag, New York (1980).

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, ____/____/____

Assinatura do autor