

RESSALVA

Atendendo a solicitação do autor, o texto completo desta tese será disponibilizado somente a partir de 03/05/2026.

Talita Tozetto Esteves Bolandim

**Projeto de controladores robustos chaveados baseado na
decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares
de tempo discreto**

Ilha Solteira
2024



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Talita Tozetto Esteves Bolandim

**Projeto de controladores robustos chaveados baseado na
decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares
de tempo discreto**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do
Campus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutora em
Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto
Teixeira

Ilha Solteira
2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

B687p Bolandim, Talita Tozetto Esteves.
Projeto de controladores robustos chaveados baseado na decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares de tempo discreto / Talita Tozetto Esteves Bolandim. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2024
79 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2024

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Sistemas não lineares incertos discretos no tempo. 2. Soma de Quadrados (SOS). 3. Controle chaveado. 4. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). 5. Funções polinomiais. 6. Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno.


Amanda Sertori dos Santos

Bibliotecária - CRB/8-9061
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao
Usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: "Projeto de controladores robustos chaveados baseado na decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares de tempo discreto"

AUTORA: TALITA TOZETTO ESTEVES BOLANDIM

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Doutora em Engenharia Elétrica, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

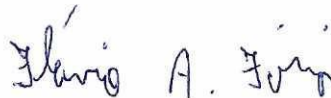
Prof. Dr. FLAVIO ANDRADE FARIA (Participação Presencial)
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA (Participação Virtual)
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA (Participação Virtual)
Departamento de Eletroeletrônica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS

Ilha Solteira, 03 de maio de 2024

 Documento assinado digitalmente
WALLYSONN ALVES DE SOUZA
Data: 03/05/2024 18:06:05-0300
Verifique em <https://validar.ti.gov.br>



 Documento assinado digitalmente
DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA
Data: 03/05/2024 18:16:54 0300
Verifique em <https://validar.ti.gov.br>



Dedico este trabalho ao meu marido Emerson, aos meus pais Manoel e Marlene, à minha irmã Milena e às minhas tias Hilda, Mary e Marly, por todo suporte, companheirismo e amor.

Em especial eu dedico para minha filha Sarah e meu filho Samuel por me fazer sentir todo amor, esperança e felicidade.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, pela sabedoria, saúde e todas as bênçãos alcançadas até aqui.

Ao meu pai Manoel pelo apoio, conselhos e compreensão, minha mãe Marlene por ser meu alicerce e pelo seu amor em todos os momentos principalmente cuidando de minha filha Sarah para eu poder trabalhar. Minha irmã Milena pela paciência, amor e ajuda nos momentos em que mais precisei.

As minhas tias Hilda, Mary e Marly, pelas orações, ensinamentos e não medirem esforços para me dar todo o suporte para poder finalizar este trabalho.

Ao meu marido Emerson pelo amor, paciência, companheirismo e assistência em todos os momentos.

A minha filha Sarah de 5 anos, por entender a ausência da mamãe sempre que preciso trabalhar e me dar todo o amor e esperança para eu querer ser melhor a cada dia. Ao meu filho Samuel por me fazer acreditar ainda mais em milagres, no amor e propósito de Deus em nossas vidas.

A todos os meus familiares e amigos que torceram, oraram ou contribuíram para a realização deste trabalho, em especial minha prima Nathália, meu cunhado Filipe, minha sogra Izabel Cristina e minha cunhada Ellen.

A empresa Tecfuse Indústria Elétrica Ltda. pela compreensão nos momentos em que precisei me ausentar e todo o suporte dado para finalizar essa tese.

Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela confiança, paciência, empatia e todos os aprendizados dados desde à minha graduação até hoje. Saiba que o senhor é um exemplo de ser humano e profissional.

Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pelos ensinamentos, experiências, pelas palavras sábias e por poder contar em todos os momentos durante esses anos.

Aos professores e funcionários do grupo de pesquisa em controle em especial o Prof. Dr. Rodrigo Cardim pelo apoio, incentivo e ensinamentos.

Aos colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) que contribuíram em especial o Igor, Ary, Hugo, Diogo e Gilberto.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) pela oportunidade e estrutura.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino.”
(Leonardo da Vinci)

Resumo

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento de novas teorias de projetos de controle chaveado robusto, para sistemas não lineares discretos no tempo utilizando a decomposição em soma de quadrados (do inglês *Sum of Squares* - SOS). Inicialmente, é apresentada uma pequena revisão dos conceitos existentes na literatura de projeto de controladores baseados em desigualdades matriciais lineares - do inglês *Linear Matrix Inequalities* - LMIs, que são importantes para entender a motivação pelo projeto com SOS, no qual é mostrado suas principais vantagens através de novos teoremas em que se reduz o conservadorismo das condições de projeto de controle, com resultados satisfatórios que melhoraram o desempenho do sistema não se limitando a uma região de operação como quando é utilizado os modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S). A tese aborda métodos que podem ser descritos por funções polinomiais, não sendo necessário conhecer as funções de pertinência do sistema quando é implementada a lei de controle chaveada utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno, o que é uma vantagem pois, elas podem depender de parâmetros incertos ou ser complexas, inviabilizando a implementação do projeto. Portanto são considerados sistemas não lineares incertos discretos no tempo e propostos controladores com ganhos chaveados polinomiais. Os resultados obtidos mostraram uma maior flexibilidade e menor conservadorismo em relação as teorias existentes e isso foi demonstrado através de exemplos numéricos e simulações computacionais.

Palavras-chave: sistemas não lineares incertos discretos no tempo; soma de quadrados (SOS); controle chaveado; desigualdades matriciais lineares (LMIs); funções polinomiais; modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

Abstract

This work presents the development of new theories for robust switched control design for discrete-time nonlinear systems using Sum of Squares (SOS) decomposition. Initially, a brief review of existing concepts in the literature on controller design based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) is provided. These concepts are important for understanding the motivation behind the SOS-based design, which demonstrates its main advantages through new theorems that reduce the conservatism of control design conditions, yielding satisfactory results that improve system performance without being limited to an operating region as in the case of Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models. The thesis addresses methods that can be described by polynomial functions, making it unnecessary to know the membership functions of the system when the switched control law is implemented using Takagi-Sugeno fuzzy models. This is an advantage because these functions can depend on uncertain parameters or be complex, making the design implementation unfeasible. Therefore, uncertain discrete-time nonlinear systems are considered, and controllers with switched polynomial gains are proposed. The obtained results showed greater flexibility and less conservatism compared to existing theories, which was demonstrated through numerical examples and computer simulations.

Keywords: discrete-time uncertain nonlinear systems; sum of squares (SOS); switched control; linear matrix inequalities (LMIs); polynomial functions; Takagi-Sugeno fuzzy models (T-S).

Lista de figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Interpretação geométrica de estabilidade: a , estável; b , assintoticamente estável; c , instável. | 25 |
| Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema de controle de modelos fuzzy. | 35 |
| Figura 3 – Classes de modelos fuzzy. | 36 |
| Figura 4 – Trajetória da variável de estado $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$ | 47 |
| Figura 5 – Trajetórias da variável de estado $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$ | 47 |
| Figura 6 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$ | 48 |
| Figura 7 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$ | 48 |
| Figura 8 – Trajetória da variável de estado $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$ | 50 |
| Figura 9 – Trajetórias da variável de estado $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$ | 51 |
| Figura 10 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$ | 51 |
| Figura 11 – Representação da lei de controle chaveado para a condição inicial $[1 \ -0,5]$, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$ | 52 |
| Figura 12 – Trajetória da variável de estado $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$ | 53 |
| Figura 13 – Trajetórias da variável de estado $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ -0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$ | 54 |

| | |
|--|----|
| Figura 14 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ -0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$. | 54 |
| Figura 15 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$. | 55 |
| Figura 16 – Trajetória da variável de estado x_1 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$. | 62 |
| Figura 17 – Trajetória da variável de estado x_2 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$. | 62 |
| Figura 18 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo $\sigma(k) = 1$ (x) e $\sigma(k) = 2$ (□) | 63 |
| Figura 19 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$. | 63 |
| Figura 20 – Trajetória da variável de estado x_1 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,55 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$. | 65 |
| Figura 21 – Trajetória da variável de estado x_2 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,55 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$. | 66 |
| Figura 22 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ -0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,55 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$. | 66 |
| Figura 23 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$. | 67 |
| Figura 24 – Trajetória da variável de estado x_1 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,95 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$. | 68 |
| Figura 25 – Trajetórias da variável de estado x_2 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,95 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$. | 69 |
| Figura 26 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,95 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$. | 69 |

Figura 27 – Representação da lei de controle chaveado, sendo $(x) = \sigma(k) = 1$ e
 $(\square) = \sigma(k) = 2$ 70

Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|--------|----------------------------------|
| MATLAB | Matrix Laboratory |
| LMIs | Linear Matrix Inequalities |
| CDP | Compensação Distribuída Paralela |
| T-S | Takagi-Sugeno |
| SOS | Sum of Squares |
| FLF | Funções de Lyapunov Fuzzy |
| FLP | Funções de Lyapunov Polinomiais |
| DA | Domínio de Atração |

Lista de símbolos

| | |
|---------------------------|--|
| \mathbb{N} | Conjunto dos números naturais |
| \mathbb{Q} | Conjunto dos números racionais |
| \mathbb{R} | Conjunto dos números reais |
| \mathbb{R}^n | Espaço dos vetores coluna de dimensão n com entradas reais |
| $\mathbb{R}^{n \times m}$ | Espaço das matrizes de dimensão n por m com entradas reais |
| I | Matriz Identidade com dimensão apropriada |
| $M \geq (>)0$ | Matriz M simétrica e semi-definida (definida) positiva |
| $M \leq (>)0$ | Matriz M simétrica e semi-definida (definida) negativa |

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 16 |
| 1.1 | OBJETIVOS | 20 |
| 1.2 | ESTRUTURA DO TEXTO | 20 |
| 2 | CONCEITOS PRELIMINARES | 21 |
| 2.1 | DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMIs) | 21 |
| 2.1.1 | Estabilidade de acordo com o método direto de Lyapunov em sistemas contínuos no tempo | 22 |
| 2.1.2 | Estabilidade de acordo com o método direto de Lyapunov em sistemas discretos no tempo | 24 |
| 2.2 | SOMA DE QUADRADOS (SOS) | 27 |
| 2.2.1 | Não Negatividade Global | 28 |
| 2.2.2 | Decomposição em soma de quadrados | 28 |
| 2.2.3 | Estabilidade | 31 |
| 2.3 | MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR E POLINOMIAL | 35 |
| 2.3.1 | MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR | 37 |
| 2.3.2 | MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE POLINOMIAL | 38 |
| 2.4 | LEI DE CONTROLE CHAVEADA | 40 |
| 2.5 | FUNÇÃO DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICA | 40 |
| 3 | CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DISCRETO NO TEMPO DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA SOS | 42 |
| 3.1 | SISTEMAS NÃO LINEARES POLINOMIAIS DISCRETOS NO TEMPO | 42 |
| 3.1.1 | EXEMPLOS NUMÉRICOS | 45 |
| 3.2 | CONCLUSÕES PARCIAIS | 55 |
| 4 | CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DISCRETO NO TEMPO DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA SOS COM TAXA DE DECAIMENTO | 57 |
| 4.1 | ESTABILIDADE COM TAXA DE DECAIMENTO | 57 |
| 4.1.1 | EXEMPLOS NUMÉRICOS | 60 |
| 4.2 | CONCLUSÕES PARCIAIS | 70 |
| 5 | CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS | 72 |
| 5.1 | CONCLUSÕES | 72 |
| 5.2 | PESQUISAS FUTURAS | 73 |

| | |
|-----------------------|----|
| REFERÊNCIAS | 74 |
|-----------------------|----|

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de diversos sistemas físicos vem sendo estudada dentro da teoria de controle e há um aumento crescente de pesquisas nesta área, devido sua relevância em aprimorar e acompanhar o desenvolvimento da tecnologia em busca de melhores resultados para a humanidade. O grande desafio é descrever adequadamente esses sistemas, na maioria dos casos modelos não lineares, visando a sua estabilização e o atendimento de índices de desempenho previamente especificados, através do projeto de controladores.

A análise da estabilidade é essencial quando um sistema chaveado é desenvolvido (Geromel; Deaecto, 2009; Deaecto; Geromel; Daafouz, 2011). O chaveamento, elaborado cuidadosamente, pode tornar estável um sistema que possui modos instáveis, porém, por outro lado, é capaz de tornar instável um sistema com todos seus modos estáveis. As desigualdades matriciais lineares - LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) são utilizadas para análise de sistemas dinâmicos, e através delas podem ser escritas as condições de estabilidade de um sistema e iniciou-se há mais de 100 anos (Boyd *et al.*, 1994) quando Lyapunov introduziu a teoria de Lyapunov, sendo uma ferramenta poderosa para os sistemas contínuos e discretos no tempo. Entretanto, foi em meados de 1980 que os problemas de controle puderam ser convertidos em problemas convexos (Bernussou; Peres; Geromel, 1989). Desde então, a estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo realimentados é garantida se uma matriz de Lyapunov P (número de linhas e colunas igual à ordem do sistema) simétrica definida positiva for encontrada para satisfazer uma LMI.

A natureza de todo sistema, no mundo real e não idealizado é não linear (Slotine; Li *et al.*, 1991), mesmo diante deste fato, a análise da estabilidade e o projetos de controladores para esses sistemas ainda são complexos e desafiadores. Para os sistemas não lineares foram introduzidas novas condições que garantissem a estabilidade assintótica local e global, considerando funções de Lyapunov quadráticas, modelos locais lineares e as LMIs para analisar a estabilidade e o projeto dos controladores com restrições, incertezas e índices de desempenho, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (Tanaka; Ikeda; Wang, 1998; Taniguchi *et al.*, 2001; Teixeira; Žak, 1999; Teixeira; Assunção; Avelar, 2003; Cardim *et al.*, 2007), pois podem descrever uma classe de sistemas não lineares como a combinação de um certo número de modelos locais normalmente lineares (Takagi; Sugeno, 1985). A combinação é feita através de funções de pertinência fuzzy em uma região de operação específica, e nesta região limitada no espaço de estados pode-se assegurar que a planta é representada exatamente por um modelo fuzzy T-S. Quanto maior o número de não linearidades do sistema, maior a quantidade de modelos locais (regras fuzzy) e como consequência, maior a complexidade numérica dos algoritmos de controle, dificultando as implementações (Lam, 2011a).

Diferentes técnicas de projeto de controle foram propostas nas últimas décadas para o controle de sistemas não lineares representados através de modelos fuzzy T-S baseados na compensação distribuída paralela (CDP) (Wang; Tanaka; Griffin, 1996; Teixeira; Žak, 1999; Taniguchi *et al.*, 2001; Teixeira; Assunção; Avellar, 2003; Guerra; Vermeiren, 2004; Ding; Sun; Yang, 2006; Guerra; Kruszewski; Bernal, 2008; Chen *et al.*, 2012; Santim *et al.*, 2012; Lee; Joo; Tak, 2013; Lee; Joo, 2014; Klug *et al.*, 2015; Klug; Castelan; Coutinho, 2015; Márquez *et al.*, 2017) e nas LMIs. O sistema não linear pode ter parâmetros incertos (como por exemplo representando uma falha na estrutura, perda de potência ou desgastes dos componentes mecânicos), e mesmo assim ter seu respectivo modelo fuzzy T-S representando exatamente o sistema em uma região de operação.

As funções de pertinência fuzzy são utilizadas para combinar os modelos locais, e dependendo a forma como as incertezas são descritas nos modelos fuzzy T-S, elas podem ser indeterminadas, pois podem depender de parâmetros desconhecidos do sistema. Quando isso ocorrer, são necessárias outras metodologias de projeto de controladores que não utilizarão diretamente a CDP.

Neste contexto, as pesquisas em busca de novas técnicas de controle para encontrar soluções que garantem a estabilidade robusta de sistemas que possuem em seus modelos as não linearidades e também os parâmetros incertos vem aumentando e trazendo resultados satisfatórios, relaxando mais as restrições e buscando melhores índices de desempenho. Os trabalhos de Guerra e Vermeiren (2004), Ding, Sun e Yang (2006), Guerra, Kruszewski e Bernal (2008), Chen *et al.* (2012) apresentam resultados para o problema de estabilização de sistemas fuzzy T-S discreto no tempo, em que utilizam uma lei de controle que não tem estrutura CDP e depende das funções de pertinência, mas para obter resultados menos conservadores, Guerra e Vermeiren (2004) propuseram uma nova função de Lyapunov não quadrática, a função de Lyapunov fuzzy (FLF, do inglês *Fuzzy Lyapunov Function*).

Na prática há muitos casos em que os parâmetros dos sistemas não lineares são incertos e as variáveis de estados não estão completamente disponíveis para realimentação, por isso há importância em estudar e avançar com os trabalhos que envolvem métodos que permitem utilizar modelos com essas incertezas.

Em Souza (2013) são propostos novos métodos de projeto de controle chaveado para sistemas não lineares incertos, descritos por modelos fuzzy T-S, baseado na lei de controle chaveada em que há a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov, por meio da seleção do ganho do controlador, que pertence a um conjunto de ganhos. Com a lei de controle chaveada proposta em Souza (2013), não é necessário ter acesso às funções de pertinência do modelo não linear na estrutura do controlador, que é uma vantagem pois as funções de pertinência podem ser incertas desconhecidas ou dependentes de parâmetros incertos. Alguns dos resultados foram obtidos utilizando a restrição da norma dos controladores, proposta em (Šiljak; Stipanović, 2000).

Baseado na lei de controle chaveada de Souza (2013) e no teorema proposto em Souza *et al.* (2014), na dissertação de mestrado de Buzetti (2017) é proposto o teorema considerando matrizes simétricas auxiliares e então é definido um novo controlador chaveado. Neste trabalho também é utilizada a minimização da norma dos controladores chaveados com base na metodologia proposta em Assunção *et al.* (2007).

Em Oliveira (2017) são propostas novas técnicas de projetos de controle chaveado considerando a minimização da norma \mathcal{H}_∞ para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy T-S para uma classe de sistemas não lineares, considerando funções de pertinência desconhecidas. É considerada uma lei de controle sujeita à saturação do atuador devido às restrições operacionais dos equipamentos e através da lei de controle chaveado é escolhido um ganho de realimentação que pertence a um conjunto de ganhos conhecidos e minimiza a derivada da função de Lyapunov do tipo quadrática. Sendo assim, não é necessário encontrar as funções de pertinência e o desempenho do controle \mathcal{H}_∞ é garantido. Em Oliveira *et al.* (2018) foi proposta uma lei de controle chaveado em sistemas não lineares discretos no tempo descritos por modelos fuzzy T-S para tratar do problema de estabilização.

Em Santos (2020) foi desenvolvido projetos de controle chaveado e \mathcal{H}_∞ chaveado para o problema de estabilização local de sistema não lineares incertos discretos no tempo descritos por modelos fuzzy T-S, considerando região de operação e funções de pertinência dependentes de parâmetros incertos limitados fazendo um estudo baseado no trabalho realizado em Oliveira *et al.* (2018), em que mostrou que todas as restrições propostas foram satisfeitas e a representação do sistema fuzzy T-S foi assegurada.

Um método alternativo é proposto em Parrilo (2000) que fez a decomposição de funções não lineares polinomiais multivariadas em soma de quadrados (do inglês *sum of squares* - SOS). Até então a análise da estabilidade e o projeto de controladores se restringiam as funções de Lyapunov quadráticas ou compostas (Tanaka *et al.*, 2008; Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004).

Se a dinâmica de um sistema não linear pode ser descrita somente por funções polinomiais dependentes do vetor de estado do sistema (sistemas polinomiais), a análise da estabilidade e projeto de controladores não precisam utilizar os modelos fuzzy T-S (Papachristodoulou; Prajna, 2002; Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004). Quando é utilizado a decomposição em soma de quadrados o projeto dos controladores não se restringe a nenhuma condição inicial, ou seja, o sistema não é limitado a uma região de operação, como ocorre utilizando modelos fuzzy T-S.

O SOS, assim como as LMIs transformam diversos problemas de controle em restrições que são resolvidas por algoritmos computacionais. Com o surgimento da teoria SOS, novas propostas de projeto e estudos na área de controle também foram surgindo, em Xu,

Xie e Wang (2009), Jennawasin, Narikiyo e Kawanishi (2010) são propostos projetos de controladores robustos para sistemas polinomiais com incertezas politópicas. No trabalho de Nguang, Saat e Krug (2011) no projeto do controlador são consideradas incertezas limitadas em norma para realimentação estática da saída de sistemas polinomiais. Também foram propostos controladores com garantia da norma \mathcal{H}_∞ para sistemas polinomiais incertos (HUANG; Hong-Fei; Jian-Ping, 2013) e em Lam *et al.* (2013) foram estudadas condições de estabilidade em sistemas baseados em modelos fuzzy polinomiais utilizando funções de Lyapunov fuzzy chaveadas.

Foram estudados para analisar a estabilidade, sistemas utilizando modelos fuzzy polinomiais (Tanaka *et al.*, 2007b) e também projetos de controladores via compensação paralela distribuída polinomial (Tanaka *et al.*, 2007a; Cao *et al.*, 2014). Na pesquisa de resultados de trabalhos usando decomposição em SOS dos sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy polinomiais e funções de Lyapunov polinomiais (FLP) o conservadorismo do sistema é reduzido comparado as LMIs (Tanaka *et al.*, 2008).

O progresso das pesquisas referente à análise da estabilidade e do projeto dos controladores de sistemas não lineares via SOS fez com que aumentasse a complexidade e tornaram os projetos dos controladores mais próximos da realidade, incluindo análise da estabilidade com garantia de taxa de decaimento (Yum; Wang, 2013) , utilização de múltiplas funções de Lyapunov (Guelton *et al.*, 2013), controle com custo garantido de modelos fuzzy polinomiais (Tanaka; Ohtake; Wang, 2008), controle de sistemas não lineares através de modelos fuzzy polinomiais considerando atraso no vetor de estado do sistema e sujeito a saturação (Gassara; Hajjaji; Chaabane, 2016), projeto de controladores robustos considerando a redução da norma \mathcal{H}_∞ para modelos fuzzy polinomiais (Yu; Huang; Cheng, 2016) e controle robusto com custo garantido de modelos fuzzy polinomiais considerando atraso no vetor de estados do sistema (Li; Wang, 2012b; Li; Wang, 2012a). O trabalho de Chen *et al.* (2014) apresenta uma abordagem de SOS para controle estável e controle com custo garantido descritos por sistemas fuzzy polinomiais mostrando que esses sistemas possuem uma abordagem mais geral e eficaz comparado aos modelos fuzzy T-S discretos no tempo.

Seguindo com alguns dos avanços na área, buscando diminuir o conservadorismo dos sistemas por meios de aprimorações das técnicas existentes e buscando novas metodologias para melhores resultados, em Ramos (2018), são propostos controladores com ganhos polinomiais chaveados para sistemas não lineares incertos utilizando SOS. Com SOS é possível obter a estabilidade global dos sistemas não lineares incertos ao invés da estabilidade local que os modelos fuzzy T-S oferecem. Em (Xiao *et al.*, 2020) foi investigada a estabilidade e desempenho do intervalo tipo 2 (IT2) baseado em um modelo fuzzy polinomial sendo que os conjuntos fuzzy IT2 são utilizados para capturar as incertezas da planta não linear e com a implementação digital apenas as saídas do sistemas estão

disponíveis, foi considerado índice de desempenho H_∞ e a estabilidade foi analisada em termos da soma de quadrados e teoria de Lyapunov. Já em (Li; Mehran; Bao, 2022), foi explorada a estabilização η exponencial e positividade de um controlador considerando um modelo fuzzy polinomial discreto no tempo utilizando soma de quadrados.

Todos os projetos e simulações apresentados neste trabalho foram realizados no software Matlab/Simulink®. Os problemas com restrições LMIs foram implementados através da interface YALMIP (Lofberg, 2004), com o solver SeDuMi (Sturm, 1999). Os problemas com restrições SOS foram implementados através da interface SOSTOOLS (Papachristodoulou *et al.*, 2013) com o solver SDPT3 e SeDuMi.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é contribuir para o avanço do controle chaveado com metodologias que propõem novas leis de controle considerando uma classe de sistemas não lineares incertos discretos no tempo utilizando SOS, baseado principalmente nos trabalhos de Ramos (2018), Oliveira *et al.* (2018), Santos (2020).

Serão propostos novos teoremas, pretendendo diminuir o conservadorismo dos sistemas incertos discretos no tempo utilizando funções polinomiais dependentes do vetor de estados do sistema e também modelos fuzzy polinomiais, aumentando a flexibilidade do sistema com os métodos propostos neste estudo.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

- Capítulo 1: Apresenta uma introdução do tema que foi abordado na tese, os objetivos do trabalho e também a organização do texto.
- Capítulo 2: Neste capítulo, são mostrados os conceitos preliminares que serão obtidos como base e referência em todo o trabalho.
- Capítulo 3: São propostos novos teoremas para projetar controladores chaveados robustos utilizando matrizes polinomiais para sistemas não lineares discretos no tempo. Os resultados foram satisfatórios e são comprovados através de dois exemplos.
- Capítulo 4: É introduzido um índice de desempenho nos teoremas do Capítulo 3 que é a taxa de decaimento. Foram ilustrados os resultados em dois exemplos.
- Capítulo 5: Apresenta as conclusões e perspectivas futuras.

5 CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

5.1 CONCLUSÕES

Uma teoria moderna de controle para sistemas contínuos no tempo já vem se estabelecendo há décadas, porém a busca por novos métodos que se aproximem mais do sistema real com projetos de sistemas de controle que alcancem o desempenho ideal de sistemas dinâmicos está cada vez maior.

Os modelos fuzzy T-S vem sendo estendidos para os modelos fuzzy polinomiais e, com isso, uma gama mais ampla de plantas não lineares podem ser representadas. Um controlador fuzzy polinomial foi proposto para controlar uma planta não linear baseado no modelo fuzzy polinomial. A dificuldade é a existência dos termos não lineares nos sistemas dos controladores, sendo que a abordagem baseada em LMIs é substituída pela abordagem em decomposição em soma de quadrados (SOS) para analisar a estabilidade do sistema polinomial que são mais complexos.

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre as teorias existentes na literatura para análise e projeto de controle de sistemas não lineares incertos discretos no tempo com objetivo de propor novos teoremas que apresentassem melhores desempenhos para encontrar controladores que estabilizem o sistema do que os existentes na literatura.

No Capítulo 3, foi proposto o Teorema 8 em que foi projetado um controlador utilizando sistemas polinomiais discretos no tempo e matrizes simétricas definidas positivas P_i , utilizando a lei de controle chaveada e uma função candidata de Lyapunov não quadrática. Foram realizadas simulações considerando três exemplos. O primeiro exemplo é comumente encontrado na literatura e o objetivo é encontrar o maior valor de β que estabilize o sistema. Foi utilizado esse exemplo com o intuito de comparar os novos teoremas com restrições SOS e analisar o seu desempenho. Os resultados obtidos foram satisfatórios, pois, apesar de ser encontrado o mesmo valor de β existente na literatura ($\beta = 1,0161$) por estar utilizando funções polinomiais já é uma vantagem inclusive nos ganhos das matrizes. No Exemplo 4 foi acrescentado $x_2(k)$ na planta do Exemplo 3 e foram obtidos novos controladores para o valor de $\beta \leq 1,6$ e $x_2(k) \in [-\infty, \infty]$. No Exemplo 5 foi utilizada a planta do Exemplo 3, substituindo β por $x_1(k)$, tornando a planta polinomial e foi encontrada factibilidade para $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$, ou seja, não foi necessário restringir a região de operação do sistema como acontece nos modelos fuzzy T-S, deixando os resultados muito satisfatórios e menos conservadores.

No Capítulo 4, foi adicionado a taxa de decaimento no Teorema 8, sendo apresentado o Teorema 9. Assim como no capítulo anterior, foram comprovados os resultados pelos Exemplos 6, 7 e 8 com figuras que comprovaram seus desempenhos satisfatórios.

As programações foram feitas com taxas de decaimento de 0,1 até 0,9 e foram encontrados controladores que estabilizassem o sistema discreto no tempo utilizando as restrições SOS do Teorema 9. Considerando o Exemplo 6 todos os valores de β encontrados foram melhores do que os apresentados utilizando o Teorema 10 (Santos, 2020), os resultados comparativos podem ser observados na Tabela 2.

No Exemplo 7 foi incluído $x_2(k)$ na planta não linear discreta no tempo do Exemplo 6, tornando a planta do Exemplo 7 polinomial, porém, como ainda foi mantido β , ele foi modelado a partir do modelo fuzzy T-S do Exemplo 6. Foi encontrada factibilidade para as taxas de decaimento de $\lambda = 0,9$ até $\lambda = 0,1$ e os resultados foram ilustrados através das figuras. No Exemplo 8 foi considerada a planta polinomial com $x_1(k)$ e realizada as programações através do Teorema 9. Mesmo com a restrição de desempenho que foi considerada (taxa de decaimento λ) os resultados obtidos foram satisfatórios utilizando a planta não linear discreta no tempo polinomial com as restrições SOS do Teorema 9 e encontrados novos controladores que tornaram o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado assintoticamente estável para todos os valores de λ e não limitando a região de operação, sendo factível para $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$

A utilização do SOS nos teoremas de controle mostraram resultados vantajosos e menos conservadores do que os existentes na literatura utilizando modelos fuzzy T-S. Isto porque quando se utiliza as restrições SOS com funções polinomiais a factibilidade do sistema é encontrada para $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$ e $x_2(k) \in [-\infty, \infty]$. Também pode-se observar que dependendo do valor da taxa de decaimento houve mais chaveamento quando projetado o controlador e também uma melhor resposta do sistema como pode-se analisar nas figuras dos Capítulos 3 e 4. Portanto deve-se verificar qual o objetivo ao projetar o novo controlador e analisar todas as circunstâncias afim de encontrar o melhor projeto do controlador que estabilize a planta de acordo com o interesse do projetista.

5.2 PESQUISAS FUTURAS

Como continuidade do trabalho pode-se listar os seguintes tópicos para sistemas discretos no tempo com restrições SOS:

- Incrementar os teoremas obtidos considerando custo garantido.
- Considerar nos teoremas redução da norma H_∞ e também saturação no atuador comprovando os resultados através de exemplos.
- Utilizar outros exemplos existentes na literatura para estudo e comparação dos resultados.

Referências

- ASSUNÇÃO, E. *et al.* Robust state-derivative feedback LMI based designs for multivariable linear systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems Control Letters**, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, jul. 1989.
- BOSE, N.; LI, C. A quadratic form representation of polynomials of several variables and its applications. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 13, n. 4, p. 447–448, 1968.
- BOYD, S. *et al.* **Linear matrix inequalities in system and control theory**. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. v. 15. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- BUZETTI, A. S. **Projeto de Controle Robusto Chaveado com Falhas nos Sensores**. 2017. 88 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017.
- CAMPELLO, R. J. G. B. Arquiteturas e metodologias para modelagem e controle de sistemas complexos utilizando ferramentas clássicas e modernas. Campinas: Biblioteca Digital da Unicamp, 2002.
- CAO, K. *et al.* Analysis of stability and robust stability of polynomial fuzzy model-based control systems using a sum-of-squares approach. **Soft Computing**, Springer, v. 18, n. 3, p. 433–442, 2014.
- CARDIM, R. *et al.* Controle de um levitador magnético utilizando modelos fuzzy e derivada de estado da planta. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI, 8., 2007, Florianópolis. **Anais ...** Florianópolis: Sociedade Brasileira de Automática - SBA, 2007.
- CASTRO, J. Fuzzy logic controllers are universal approximators. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, New York, v. 25, n. 4, p. 629–635, abr. 1995.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. [*S.l.*: *s.n.*]: Saunders college publishing, 1984.
- CHEN, Y.-J. *et al.* Relaxed stabilisation criterion for discrete T-S fuzzy systems by minimum-type piecewise non-quadratic Lyapunov function. **IET Control Theory & Applications**, IET, v. 6, n. 12, p. 1918–1925, 2012.
- CHEN, Y.-J. *et al.* Discrete polynomial fuzzy systems control. **IET Control Theory & Applications**, Wiley Online Library, v. 8, n. 4, p. 288–296, 2014.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, 2011.

- DING, B.; SUN, H.; YANG, P. Further studies on lmi-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form. **Automatica**, Elsevier, v. 42, n. 3, p. 503–508, 2006.
- DRIANKOV, D.; HELLENDORRN, H.; REINFRANK, M. **An introduction to fuzzy control**. New York: Springer-Verlag, 1993.
- DUTTA, S. Fuzzy logic applications: Technological and strategic issues. **IEEE Transactions on Engineering Management**, New York, v. 40, n. 3, p. 237–254, ago. 1993.
- ELIA, N.; MITTER, S. Stabilization of linear systems with limited information. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 46, n. 9, p. 1384–1400, 2001.
- GASSARA, H.; HAJJAJI, A. E.; CHAABANE, M. Control of time delay polynomial fuzzy model subject to actuator saturation. **International Journal of Fuzzy Systems**, Springer, v. 18, n. 5, p. 763–772, 2016.
- GATERMANN, K.; PARRILO, P. A. Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares. **Journal of Pure and Applied Algebra**, Elsevier, v. 192, n. 1-3, p. 95–128, 2004.
- GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S. Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. **Automatica**, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 593–597, 2009.
- GRAHAM, A. **Kronecker products and matrix calculus with applications**. [S.l.: s.n.]: Courier Dover Publications, 2018.
- GUELTON, K. *et al.* Sum-of-squares stability analysis of Takagi-Sugeno systems based on multiple polynomial lyapunov functions. **International Journal of Fuzzy Systems**, v. 15, n. 1, 2013.
- GUERRA, T. M.; KRUSZEWSKI, A.; BERNAL, M. Control law proposition for the stabilization of discrete Takagi-Sugeno models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 17, n. 3, p. 724–731, 2008.
- GUERRA, T. M.; VERMEIREN, L. LMI based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. **Automatica**, v. 40, n. 5, p. 823–829, 2004. ISSN 0005-1098. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109803003972>.
- HUANG, W.-C.; HONG-FEI, S.; JIAN-PING, Z. Robust control synthesis of polynomial nonlinear systems using sum of squares technique. **Acta Automatica Sinica**, Elsevier, v. 39, n. 6, p. 799–805, 2013.
- JENNAWASIN, T.; NARIKIYO, T.; KAWANISHI, M. An improved SOS based stabilization condition for uncertain polynomial systems. *In*: **Proceedings of SICE Annual Conference 2010**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 3030–3034.
- KALMAN, R.; BERTRAM, J. Control system analysis and design via the second method of Lyapunov:(i) continuous-time systems (ii) discrete time systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 4, n. 3, p. 112–112, 1959.

-
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T–S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, v. 26, p. 191–200, 2015.
- KLUG, M. *et al.* Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, v. 263, p. 92–111, 2015.
- KOSKO, B. **Fuzzy engineering**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1997.
- LAM, H. K. Lmi-based stability analysis for fuzzy-model-based control systems using artificial T–S fuzzy model. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 19, n. 3, p. 505–513, 2011.
- LAM, H.-K. Polynomial fuzzy model based control systems: Stability analysis via piecewise-linear membership functions. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 19, n. 3, p. 588–593, 2011.
- LAM, H. K. *et al.* Stability analysis of polynomial-fuzzy-model-based control systems using switching polynomial lyapunov function. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 21, n. 5, p. 800–813, 2013.
- LEE, C. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. I. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, New York, v. 20, n. 2, p. 404–418, 1990.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H. On the generalized local stability and local stabilization conditions for discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 22, n. 6, p. 1654–1668, 2014.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. Linear matrix inequality approach to local stability analysis of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IET Control Theory & Applications**, Wiley Online Library, v. 7, n. 9, p. 1309–1318, 2013.
- LFBERG, J. A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *In: Proceedings of the Conference on Computer-Aided Control System Design (CACSD)* p. [S.l.: s.n.], 2004. v. 284289.
- LI, W.; WANG, W. Guaranteed cost control for polynomial discrete fuzzy time delay systems by sum-of-squares approach. *In: 2012 Fifth International Conference on Information and Computing Science*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 178–181.
- LI, W.; WANG, W. Guaranteed cost control for polynomial fuzzy time delay systems by sum-of-squares approach. *In: IEEE. Proceedings of the 10th World congress on intelligent control and automation*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1806–1811.
- LI, X.; MEHRAN, K.; BAO, Z. Membership function, time delay-dependent η -exponential stabilization of the positive discrete-time polynomial fuzzy model control system. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 30, n. 7, p. 2197–2209, 2022.
- MÁRQUEZ, R. *et al.* Asymptotically necessary and sufficient conditions for Takagi-Sugeno models using generalized non-quadratic parameter-dependent controller design. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, v. 306, p. 48–62, 2017.
- MENDEL, J. Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial. New York, v. 83, n. 3, p. 345–377, 1995.

- MENDEL, J. M.; JOHN, R. I.; LIU, F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. **IEEE transactions on fuzzy systems**, IEEE, v. 14, n. 6, p. 808–821, 2006.
- NGUANG, S. K.; SAAT, S.; KRUG, M. Static output feedback controller design for uncertain polynomial systems: an iterative sums of squares approach. **Control Theory Applications, IET**, IET, Stevenage, v. 5, n. 9, p. 1079–1084, June 2011.
- OLIVEIRA, D. R. de. **Controle \mathcal{H}_∞ Chaveado para Sistemas Não Lineares Incertos Descritos por Modelos Fuzzy T-S Considerando Região de Operação e Saturação do Sinal de Controle**. 2017. 2017. 108 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Unversidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017.
- OLIVEIRA, D. R. de *et al.* On switched control of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with unknown membership functions. *In*: IEEE. **2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)**. [*S.l.*: *s.n.*], 2018. p. 1–8.
- PAPACHRISTODOULOU, A. *et al.* Sum of squares optimization toolbox for MATLAB user’s guide. **arXiv preprint arXiv:1310.4716**, 2013.
- PAPACHRISTODOULOU, A.; PRAJNA, S. On the construction of lyapunov functions using the sum of squares decomposition. *In*: IEEE. **Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002**. [*S.l.*: *s.n.*], 2002. v. 3, p. 3482–3487.
- PARRILO, P. A. **Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization**. 2000. 209 f. 2000. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 2000.
- PARRILO, P. A. Sum of squares programs and polynomial inequalities. *In*: **SIAG/OPT Views-and-News: A Forum for the SIAM Activity Group on Optimization**. [*S.l.*: *s.n.*], 2004. v. 15, n. 2, p. 7–15.
- PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; WU, F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach. *In*: **ASIAN CONTROL CONFERENCE, 5.**, 2004, Melbourne. **Proceedings...** Melbourne: IEEE, 2004. v. 1, p. 157–165.
- RAMOS, I. T. M. **Projeto de Controladores Robustos Chaveados para Sistemas Não Lineares Baseados na Decomposição em Soma de Quadrados**. 2018. 2018. 103 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2018.
- REZNICK, B. Extremal psd forms with few terms. **Duke mathematical journal**, Duke University Press, v. 45, n. 2, p. 363–374, 1978.
- ROCHA, T. C. T. **Domínios positivamente invariantes de sistemas lineares com restrições nas variáveis de controle**. 1994. 1994. 117 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1994.
- SANTIM, M. P. A. *et al.* Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2012, p. 17, apr. 2012.

- SANTOS, G. R. dos. **Controle Chaveado e \mathcal{H}_∞ Chaveado De Sistemas Não Lineares Incertos Discretos No Tempo Descritos Por Modelos Fuzzy T-S Considerando Região De Operação e Saturação Dos Atuadores**. 2020. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2020.
- SEILER, P. SOSOPT: a toolbox for polynomial optimization. [S. l.: s. n.], 2013.
- ŠILJAK, D. D.; STIPANOVIĆ, D. M. Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 6, n. 5, p. 461–493, jun. 2000.
- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. *et al.* **Applied nonlinear control**. [S.l.: s.n.]: prentice-Hall, 1991. v. 199. 461 p.
- SOUZA, W. A. d. *et al.* On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014.
- SOUZA, W. A. de. **Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno**. 2013. 2013. 93 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Unversidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013.
- STURM, J. F. Using SEDUMI 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Taylor Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10556789908805766>.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, feb. 1985.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, may 1998.
- TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Guaranteed cost control of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)**, IEEE, v. 39, n. 2, p. 561–567, 2008.
- TANAKA, K. *et al.* Stabilization of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach. *In: IEEE. 2007 IEEE 22nd International Symposium on Intelligent Control*. [S.l.: s.n.], 2007a. p. 160–165.
- TANAKA, K. *et al.* A sum of squares approach to stability analysis of polynomial fuzzy systems. *In: 2007 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2007b. p. 4071–4076.
- TANAKA, K. *et al.* A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy systems**, IEEE, v. 17, n. 4, p. 911–922, 2008.
- TANIGUCHI, T. *et al.* Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, aug. 2001.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, out. 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, abr. 1999.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 4, n. 1, p. 14–23, Feb 1996. ISSN 1063-6706.

XIAO, B. *et al.* Sampled-data output-feedback tracking control for interval type-2 polynomial fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 28, n. 3, p. 424–433, 2020.

XU, J.; XIE, L.; WANG, Y. Simultaneous stabilization and robust control of polynomial nonlinear systems using SOS techniques. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, n. 8, p. 1892–1897, 2009.

YU, G.-R.; HUANG, Y.-C.; CHENG, C.-Y. Robust h controller design for polynomial fuzzy control systems by sum-of-squares approach. **IET Control Theory & Applications**, Wiley Online Library, v. 10, n. 14, p. 1684–1695, 2016.

YUM, G.-R.; WANG, W.-Y. SOS based fuzzy control of a wheeled mobile robot with decay rate. *In: 2013 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. [*S.l.: s.n.*], 2013. p. 4700–4705.