



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-M.001/13

## **Estruturas Geômetro-Diferenciais na Superfície da Corda Bosônica**

Édypo Ribeiro de Melo

Orientador

Andrey Yuryevich Mikhailov

Fevereiro de 2013

## Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Andrey Yuryevich Mikhailov, pelo apoio e paciência, os quais foram bastante oportunos durante os últimos dois anos.

Aos meus pais, Evandro e Geovana, pela constante presença e suporte.

Ao meu irmão Emmanuel pela companhia.

Aos demais professores e colegas de estudo, em especial, ao Kelvyn Páterson pela amizade e inúmeras discussões acadêmicas enriquecedoras.

Ao CNPq por ter financiado este trabalho.

## Resumo

Historicamente, as superfícies mínimas foram inicialmente estudadas por Lagrange e Euler no século XVIII. Fisicamente, uma superfície é mínima se ela não pode ser modificada sem conseqüente aumento de sua área. Tais superfícies desempenham papel fundamental na moderna pesquisa em geometria diferencial. Em física relativística e na teoria de cordas, elas são usadas a fim de descrever a formulação matemática de buracos negros e para o estudo de loops de quarks na fronteira do espaço Anti-de-Sitter, sendo estes denominados Wilson loops. Neste trabalho, pretendemos estudar o formalismo necessário para a análise destas superfícies nos espaços Euclidiano, Lorentziano e Anti-de-Sitter sob a ótica da teoria de cordas bosônicas.

**Palavras Chaves:** Formas Fundamentais; Curvatura Média; Superfícies Mínimas; Espaço Anti-de-Sitter

**Áreas do conhecimento:** Geometria Diferencial; Teoria da Relatividade; Teoria de Cordas

## Abstract

Historically, minimal surfaces were first studied by Lagrange and Euler in the eighteenth century. Physically, a surface is minimal if it cannot be modified without consequent increase in your area. Such surfaces play a fundamental role in the modern research in differential geometry. In relativistic physics and string theory, they are used to describe the mathematical formulation of black holes and for the study of quark loops on the boundary of the Anti-de-Sitter space, called Wilson loops. In this work, we intend to study the necessary formalism for the analysis of surfaces in Euclidean, Lorentzian and Anti-de-Sitter spaces from the perspective of bosonic string theory.

# Sumário

<b>1 Geometria das Superfícies</b>	<b>1</b>
1.1 Primeira Forma Fundamental . . . . .	1
1.1.1 Exemplos . . . . .	3
1.1.2 Características Importantes . . . . .	6
1.2 Segunda Forma Fundamental . . . . .	9
1.2.1 Exemplos . . . . .	12
1.2.2 Características Importantes . . . . .	15
1.3 Curvatura . . . . .	17
1.4 Terceira Forma Fundamental . . . . .	23
1.5 Dependência Linear das Três Formas Fundamentais . . . . .	24
<b>2 Superfícies Mínicas</b>	<b>26</b>
2.1 Notação e Conceitos . . . . .	26
2.2 Definição de Superfície Mínima . . . . .	26
2.3 Superfície Mínima Não Paramétrica . . . . .	28
2.4 Exemplos de Superfícies Não Mínicas . . . . .	32
2.5 Exemplos de Superfícies Mínicas . . . . .	33
<b>3 Cordas Relativísticas Clássicas</b>	<b>41</b>
3.1 A Funcional Área para Superfícies Espaciais . . . . .	41
3.2 Reparametrização Invariante da Funcional Área . . . . .	43
3.3 A Funcional Área para Superfícies Espaço-Temporais . . . . .	45
3.4 Ação de Nambu-Goto . . . . .	48
3.5 Equações de Movimento . . . . .	56
<b>4 Aspectos Geômetro-Diferenciais das Superfícies Espaço-Temporais</b>	<b>61</b>
4.1 Helicóide de Primeiro Tipo em $SO(1,2)$ . . . . .	61
4.2 Catenóide de Primeiro Tipo em $SO(1,2)$ . . . . .	64
4.3 Superfície de Enneper de Primeiro Tipo em $SO(1,2)$ . . . . .	66

<b>5</b>	<b>Superfície Mínima em <math>AdS</math></b>	<b>70</b>
5.1	Espaço Anti-de-Sitter ( $AdS$ ) . . . . .	70
5.2	Superfície Hemisférica em $AdS$ . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>76</b>
	<b>Referências</b>	<b>78</b>

# Capítulo 1

## Geometria das Superfícies

Neste capítulo apresentaremos as três formas fundamentais das superfícies em  $\mathbf{R}^3$ , alguns exemplos de seus usos em análises da geometria diferencial, consequências e a relação de dependência linear existente entre elas [1–13].

### 1.1 Primeira Forma Fundamental

**Definição 1.1.1.** *Suponha que uma superfície é dada pela equação  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega, \nu) = r^i(\omega^\alpha)$ , nós denotaremos as derivadas parciais pela seguinte notação*

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\omega &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \\ \mathbf{r}_\nu &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \nu} \\ \mathbf{r}_{\omega\omega} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \omega^2} \\ \mathbf{r}_{\nu\nu} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \nu^2} \\ \mathbf{r}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega^\alpha} \\ \mathbf{r}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \omega^\alpha \partial \omega^\beta}.\end{aligned}$$

Seja  $r^i(\omega^\alpha)$  uma parametrização local de uma superfície qualquer em  $\mathbf{R}^3$ . Assim, o produto interno no espaço Euclidiano induz um produto interno no espaço dos vetores tangentes em cada ponto na superfície e a métrica sobre a superfície pode ser obtida da seguinte maneira [1]:

$$dr^i = \frac{\partial r^i}{\partial \omega^\alpha} d\omega^\alpha. \quad (1.1)$$

Então,

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \delta_{ij} dr^i dr^j \\
 &= \delta_{ij} \frac{\partial r^i}{\partial \omega^\alpha} \frac{\partial r^j}{\partial \omega^\beta} d\omega^\alpha d\omega^\beta \\
 &= g_{\alpha\beta} d\omega^\alpha d\omega^\beta,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{ij} \frac{\partial r^i}{\partial \omega^\alpha} \frac{\partial r^j}{\partial \omega^\beta}. \tag{1.3}$$

Devido ao fato da superfície se encontrar imersa no espaço Euclideano tridimensional surge uma métrica própria (1.2) que denominamos **métrica induzida**. Uma correspondente expressão para a métrica induzida pode ser obtida como segue

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_\omega d\omega + \mathbf{r}_v dv. \tag{1.4}$$

No entanto, sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= (\mathbf{r}_\omega d\omega + \mathbf{r}_v dv) \cdot (\mathbf{r}_\omega d\omega + \mathbf{r}_v dv) \\
 &= (\mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_\omega) d\omega^2 + 2(\mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_v) d\omega dv + (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) dv^2.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ou ainda:

$$ds^2 = E(\omega, v) d\omega^2 + 2F(\omega, v) d\omega dv + G(\omega, v) dv^2, \tag{1.6}$$

onde

$$\begin{aligned}
 E(\omega, v) &= \mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_\omega \\
 F(\omega, v) &= \mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_v \\
 &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_\omega \\
 G(\omega, v) &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta. \tag{1.7}$$

A forma (1.2) é chamada **primeira forma fundamental** da superfície. Desta forma  $E(\omega, v)$ ,  $F(\omega, v)$  e  $G(\omega, v)$  representam os coeficientes da primeira forma fundamental e constituem os meios pelos quais podemos inferir propriedades importantes, tais como a curvatura gaussiana e a curvatura média, conforme será mostrado posteriormente neste capítulo.



### 1.1.1 Exemplos

#### Exemplo 1. Esfera

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (b \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, b \cos \theta)$$

$$\mathbf{r}_\theta(\theta, \varphi) = (b \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -b \sin \theta)$$

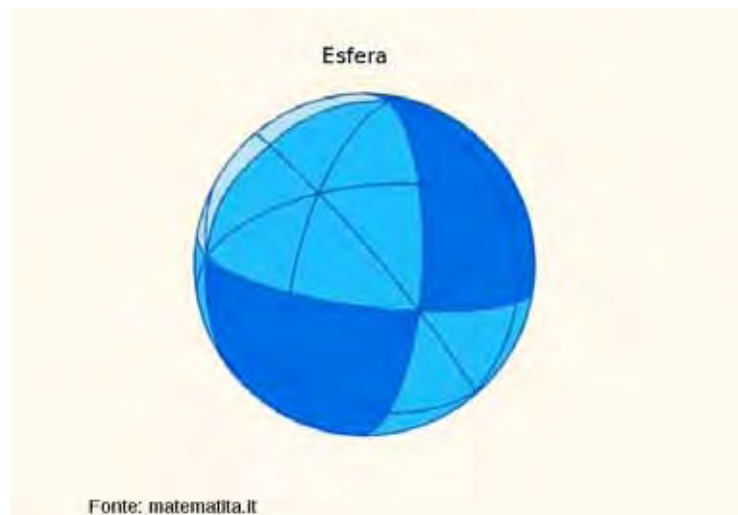
$$\mathbf{r}_\varphi(\theta, \varphi) = (-b \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\begin{aligned} E(\theta, \varphi) &= (b \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -b \sin \theta) \cdot (b \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -b \sin \theta) \\ &= b^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 \theta \\ &= b^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + b^2 \sin^2 \theta \\ &= b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\theta, \varphi) &= (b \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -b \sin \theta) \cdot (-b \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ &= -b^2 \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi + b^2 \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\theta, \varphi) &= (-b \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0) \cdot (-b \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ &= b^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\ &= b^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= b^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$ds^2 = b^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$



#### Exemplo 2. Toro

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(u, v) &= ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u) \\
\mathbf{r}_u(u, v) &= (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u) \\
\mathbf{r}_v(u, v) &= (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0) \\
E(u, v) &= (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u) \cdot (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u) \\
&= b^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u \\
&= b^2 \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + b^2 \cos^2 u \\
&= b^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) \\
&= b^2 \\
F(u, v) &= (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u) \cdot (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0) \\
&= (a + b \cos u) b \sin u \sin v \cos v - (a + b \cos u) b \sin u \sin v \cos v \\
&= 0 \\
G(u, v) &= (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0) \cdot (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0) \\
&= (a + b \cos u)^2 \sin^2 v + (a + b \cos u)^2 \cos^2 v \\
&= (a + b \cos u)^2 (\sin^2 v + \cos^2 v) \\
&= (a + b \cos u)^2 \\
ds^2 &= b^2 du^2 + (a + b \cos u)^2 dv^2
\end{aligned}$$

Toro ou Toróide

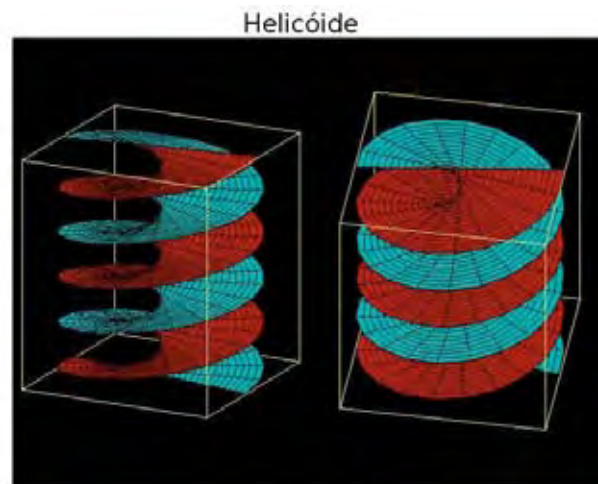


Fonte: Banco Internacional de Objetos Educacionais - MEC

### Exemplo 3. *Helicóide*

*Este exemplo é interessante porque o helicóide também é uma superfície mínima, conforme veremos no próximo capítulo.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, bv) \\
\mathbf{r}_u(u, v) &= (\cos v, \sin v, 0) \\
\mathbf{r}_v(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, b) \\
E(u, v) &= (\cos v, \sin v, 0) \cdot (\cos v, \sin v, 0) \\
&= \cos^2 v + \sin^2 v \\
&= 1 \\
F(u, v) &= (\cos v, \sin v, 0) \cdot (-u \sin v, u \cos v, b) \\
&= -u \cos v \sin v + u \cos v \sin v \\
&= 0 \\
G(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, b) \cdot (-u \sin v, u \cos v, b) \\
&= u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + b^2 \\
&= u^2(\sin^2 v + \cos^2 v) + b^2 \\
&= u^2 + b^2 \\
ds^2 &= du^2 + (u^2 + b^2)dv^2
\end{aligned}$$



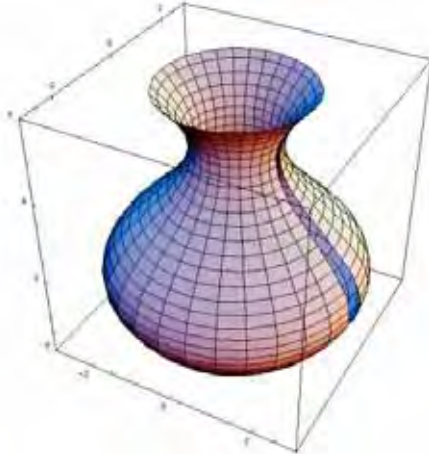
Fonte: Banco Internacional de Objetos Educacionais - MEC

**Exemplo 4.** *Superfície de Revolução*

É bom ressaltar que o toro é uma superfície de revolução e já foi visto anteriormente, no entanto,

analisaremos o caso geral desta situação.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(\rho, \theta) &= (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, f(\rho)) \\
 \mathbf{r}_\rho(\rho, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, f'(\rho)) \\
 \mathbf{r}_\theta(\rho, \theta) &= (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \\
 E(\rho, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, f'(\rho)) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, f'(\rho)) \\
 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + f'(\rho)^2 \\
 &= 1 + f'(\rho)^2 \\
 F(\rho, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, f'(\rho)) \cdot (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \\
 &= -\rho \sin \theta \cos \theta + \rho \sin \theta \cos \theta \\
 &= 0 \\
 G(\rho, \theta) &= (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \cdot (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \\
 &= \rho^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
 &= \rho^2 \\
 ds^2 &= (1 + f'(\rho)^2)d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2
 \end{aligned}$$



Fonte: Banco Internacional de Objetos Educacionais - MEC

### 1.1.2 Características Importantes

De acordo com (1.7) fica evidente que a primeira forma fundamental escrita em termos da base  $\mathbf{r}_\omega$  e  $\mathbf{r}_\nu$  pode ser representada pela matriz simétrica [8]

$$\begin{pmatrix} E(\omega, \nu) & F(\omega, \nu) \\ F(\omega, \nu) & G(\omega, \nu) \end{pmatrix}.$$

Surge agora uma questão. Por qual motivo escrevemos isto como  $E(\omega, v)d\omega^2 + 2F(\omega, v)d\omega dv + G(\omega, v)dv^2$ ? Por enquanto não é preciso preocupar-se com o que precisamente é  $d\omega^2$ , no entanto, vamos analisar como esta forma de escrever se torna conveniente.

Por exemplo, a fim de calcular o comprimento de uma curva sobre uma superfície dada por  $\omega(t), v(t)$ , nós calculamos

$$\int \sqrt{E(\omega, v) \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 + 2F(\omega, v) \frac{d\omega}{dt} \frac{dv}{dt} + G(\omega, v) \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt.$$

Se nós mudarmos a parametrização da superfície usando  $\omega(x, y)$  e  $v(x, y)$  e quisermos calcular o comprimento da curva  $x(t), y(t)$  podemos simplesmente utilizar

$$\begin{aligned} d\omega &= \omega_x dx + \omega_y dy \\ dv &= v_x dx + v_y dy \end{aligned}$$

e substituir em  $E(\omega, v)d\omega^2 + 2F(\omega, v)d\omega dv + G(\omega, v)dv^2$  para encontrar  $E'(x, y)dx^2 + 2F'(x, y)dxdy + G'(x, y)dy^2$ , isto é:

$$\begin{aligned} E(\omega, v)d\omega^2 + 2F(\omega, v)(d\omega dv) + G(\omega, v)dv^2 &= E(\omega, v)(\omega_x dx + \omega_y dy)^2 \\ &+ 2F(\omega, v)(\omega_x dx + \omega_y dy)(v_x dx + v_y dy) \\ &+ G(\omega, v)(v_x dx + v_y dy)^2 \\ &= E(\omega, v)(\omega_x^2 dx^2 + 2\omega_x \omega_y dxdy + \omega_y^2 dy^2) \\ &+ 2F(\omega, v)(\omega_x v_x dx^2 + \omega_x v_y dxdy + \omega_y v_x dxdy + \\ &+ \omega_y v_y dy^2) + G(\omega, v)(v_x^2 dx^2 + 2v_x v_y dxdy + \\ &+ v_y^2 dy^2) \\ &= E'(x, y)dx^2 + 2F'(x, y)dxdy + G'(x, y)dy^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E'(x, y) &= E(\omega, v)\omega_x^2 + 2F(\omega, v)\omega_x v_x + G(\omega, v)v_x^2 \\ F'(x, y) &= E(\omega, v)\omega_x \omega_y + F(\omega, v)\omega_x v_y + F(\omega, v)\omega_y v_x + G(\omega, v)v_x v_y \\ G'(x, y) &= E(\omega, v)\omega_y^2 + 2F(\omega, v)\omega_y v_y + G(\omega, v)v_y^2. \end{aligned}$$

### Exemplo 5. Plano

Para o plano, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y) \\ \mathbf{r}_x &= (1, 0) \\ \mathbf{r}_y &= (0, 1). \end{aligned}$$

Então,

$$E(x, y) = 1, F(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y) = 1.$$

E a primeira forma fundamental para o plano é simplesmente:

$$dx^2 + dy^2.$$

Realizando a mudança para coordenadas polares,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , obtém-se:

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

e

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= dr^2 \cos^2 \theta - 2r \cos \theta \sin \theta dr d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + \\ &+ dr^2 \sin^2 \theta + 2r \cos \theta \sin \theta dr d\theta + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 \\ &= dr^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r^2 d\theta^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

Neste exemplo efetuamos a mudança de variáveis  $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$  e seguindo a prescrição anterior, encontramos que

$$E'(r, \theta) = 1, F'(r, \theta) = 0 \quad \text{e} \quad G'(r, \theta) = r^2.$$



Fonte: <http://commons.wikimedia.org>

**Definição 1.1.2.** *Suponha que duas curvas  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  se interceptem sobre uma superfície, então, o ângulo  $\theta$  entre elas é dado por*

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2}{|\mathbf{r}'_1| \cdot |\mathbf{r}'_2|}.$$

No entanto,  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_\omega \omega'_i + \mathbf{r}_v v'_i$ , daí

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2 &= (\mathbf{r}_\omega \omega'_1 + \mathbf{r}_v v'_1)(\mathbf{r}_\omega \omega'_2 + \mathbf{r}_v v'_2) \\ &= (\mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_\omega) \omega'_1 \omega'_2 + (\mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_v) \omega'_1 v'_2 + (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_\omega) v'_1 \omega'_2 + (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) v'_1 v'_2 \\ &= E(\omega, v) \omega'_1 \omega'_2 + F(\omega, v) (\omega'_1 v'_2 + v'_1 \omega'_2) + G(\omega, v) v'_1 v'_2. \end{aligned}$$

e podemos escrever o ângulo entre as duas curvas em termos de  $E(\omega, v)$ ,  $F(\omega, v)$  e  $G(\omega, v)$ .

Uma outra aplicação para a primeira forma fundamental consiste em usá-la para definir a área de uma região numa superfície em  $\mathbf{R}^3$ :

**Definição 1.1.3.** Dado um domínio  $\mathbf{r}(M) \subset \mathbf{R}^3$  numa superfície, a área é dada por

$$\int_M \|\mathbf{r}_\omega \times \mathbf{r}_v\| d\omega dv = \int_M \sqrt{E(\omega, v)G(\omega, v) - F^2(\omega, v)} d\omega dv.$$

Isto pode ser facilmente verificado mediante o uso da identidade

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{vmatrix}, \quad (1.8)$$

tal que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_\omega \times \mathbf{r}_v\|^2 &= (\mathbf{r}_\omega \times \mathbf{r}_v) \cdot (\mathbf{r}_\omega \times \mathbf{r}_v) \\ &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_\omega & \mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_\omega & \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_\omega)(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_\omega)(\mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_v) \\ &= (\mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_\omega)(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_v)^2 \\ &= E(\omega, v)G(\omega, v) - F^2(\omega, v). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Estes casos ilustram o fato de que apesar de termos introduzido a primeira forma fundamental com o intuito de calcular o comprimento de curvas sobre uma superfície existem outras aplicações interessantes.

## 1.2 Segunda Forma Fundamental

Seja  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega^\alpha)$  uma parametrização local sobre uma superfície  $S$  em  $\mathbf{R}^3$ . Desde que  $\mathbf{r}_\omega$  e  $\mathbf{r}_v$  são ambos tangentes à superfície, nós podemos definir um vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  à superfície da seguinte maneira:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\omega \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_\omega \times \mathbf{r}_v\|}. \quad (1.10)$$

Suponha agora que existe uma curva sobre a superfície  $S$  dada por  $\omega^\alpha = \omega^\alpha(t)$ , onde  $t$  é o parâmetro que a caracteriza. Assim, o vetor unitário tangente  $\mathbf{T}$  à curva é

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\omega^\alpha} \frac{d\omega^\alpha}{dt} = \mathbf{r}_\alpha \frac{d\omega^\alpha}{dt}. \quad (1.11)$$

Claramente o vetor unitário tangente à curva também é tangente à  $S$ , uma vez que a curva localiza-se sobre a superfície. Todavia, em geral, esta propriedade não está presente em  $\mathbf{T}' = d\mathbf{T}/dt$ . É por este motivo que dividimos  $\mathbf{T}'$  em suas componentes tangencial e normal, como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= K_n + K_g \\ &= \kappa_n \mathbf{n} + \kappa_g \mathbf{n}_t. \end{aligned} \quad (1.12)$$

O escalar  $\kappa_n$  é denominado **curvatura normal** da curva,  $K_g$  é chamado de **vetor de curvatura geodésica**,  $\kappa_g$  corresponde à **curvatura geodésica** e  $\mathbf{n}_t = \mathbf{n} \times \mathbf{T}$ .

**Definição 1.2.1.** A curvatura geodésica  $\kappa_g$  de uma curva suave em  $S$  é dada por

$$\kappa_g = \mathbf{T}' \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}). \quad (1.13)$$

Desta forma, multiplicando (1.12) por  $\mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' \cdot \mathbf{n} &= \kappa_n \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \kappa_g (\mathbf{n} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \kappa_n. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\kappa_n = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.14)$$

Desde que  $(A \times B) \cdot A = 0$  e  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ . Logo, a fim de encontrar a expressão para a curvatura normal  $\kappa_n$  explicitamente, devemos diferenciar (1.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r}_\alpha \frac{d\omega^\alpha}{dt} \right) \\ &= \mathbf{r}_\alpha \frac{d^2\omega^\alpha}{dt^2} + \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_\alpha) \frac{d\omega^\alpha}{dt} \\ &= \mathbf{r}_\alpha \frac{d^2\omega^\alpha}{dt^2} + \left( \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{d\omega^\beta} \frac{d\omega^\beta}{dt} \right) \frac{d\omega^\alpha}{dt} \\ &= \mathbf{r}_\alpha \frac{d^2\omega^\alpha}{dt^2} + \mathbf{r}_{\alpha\beta} \frac{d\omega^\alpha}{dt} \frac{d\omega^\beta}{dt}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Realizando o produto interno entre (1.15) e o vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  e considerando que  $\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$ , temos:



$$\begin{aligned}
\mathbf{T}' \cdot \mathbf{n} &= (\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n}) \frac{d^2\omega^\alpha}{dt^2} + (\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}) \frac{d\omega^\alpha}{dt} \frac{d\omega^\beta}{dt} \\
&= (\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}) \frac{d\omega^\alpha}{dt} \frac{d\omega^\beta}{dt}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Lembremos que  $t$  é o comprimento de arco que parametriza a curva sobre a superfície, portanto, o denominador em (1.16) corresponde à primeira forma fundamental que agora chamaremos por  $I$ , ou seja:

$$I = dt^2 = E(\omega, v)d\omega^2 + 2F(\omega, v)d\omega dv + G(\omega, v)dv^2. \tag{1.17}$$

O numerador de (1.16) é a **segunda forma fundamental** da superfície  $S$ . Similarmente, denotaremos a segunda forma fundamental por  $II$

$$II = h_{\alpha\beta}d\omega^\alpha d\omega^\beta, \tag{1.18}$$

onde

$$h_{\alpha\beta} = (\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}). \tag{1.19}$$

Observando (1.19) é fácil notar que  $II$  é simétrica, já que  $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$  devido à  $\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{\beta\alpha}$ . Os coeficientes da segunda forma fundamental serão dados por:

$$\begin{aligned}
L(\omega, v) &= h_{\alpha\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n} \\
M(\omega, v) &= h_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} \\
&= h_{\beta\alpha} = \mathbf{r}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{n} \\
N(\omega, v) &= h_{\beta\beta} = \mathbf{r}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{n}.
\end{aligned}$$

Então, considerando (1.18) e (1.19), podemos escrever  $II$  de maneira análoga à  $I$

$$II = L(\omega, v)d\omega^2 + 2M(\omega, v)d\omega dv + N(\omega, v)dv^2 \tag{1.20}$$

e o escalar  $\kappa_n$

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = \frac{L(\omega, v)d\omega^2 + 2M(\omega, v)d\omega dv + N(\omega, v)dv^2}{E(\omega, v)d\omega^2 + 2F(\omega, v)d\omega dv + G(\omega, v)dv^2} \tag{1.21}$$

é a expressão explícita para a curvatura normal. Cabe aqui ressaltar que assim como a primeira forma fundamental pode ser dada por

$$I = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}, \tag{1.22}$$

podemos escrever a segunda forma fundamental como

$$II = -(d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n}). \quad (1.23)$$

Para visualizar isto, nós devemos diferenciar  $(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n})$  como segue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n})_\alpha &= \mathbf{r}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha \\ (\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n})_\beta &= \mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta \\ (\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{n})_\alpha &= \mathbf{r}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{n}_\alpha \\ (\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{n})_\beta &= \mathbf{r}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{n}_\beta. \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{n}$  é mutuamente perpendicular à  $\mathbf{r}_\alpha$  e  $\mathbf{r}_\beta$ , as derivadas acima são todas iguais a zero. Finalmente, isto implica em

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta). \quad (1.24)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n}) &= (\mathbf{r}_\alpha d\omega^\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta d\omega^\beta) \\ &= (\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta) d\omega^\alpha d\omega^\beta \\ &= -(\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}) d\omega^\alpha d\omega^\beta \\ &= -II. \end{aligned}$$

É instrutivo observar o que cada uma das duas primeiras formas fundamentais descreve. A primeira forma fundamental  $I$  corresponde à métrica sobre a superfície, deste modo, descreve propriedades de caráter intrínseco desta superfície, tais como a área, ângulos e comprimento de curvas. Por outro lado, a segunda forma fundamental  $II$ , descreve como a superfície está “condicionada” em  $\mathbf{R}^3$ .

### 1.2.1 Exemplos

**Exemplo 6.** *Esfera*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta, \varphi) &= (b \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, b \cos \theta) \\ \mathbf{r}_\theta(\theta, \varphi) &= (b \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -b \sin \theta) \\ \mathbf{r}_{\theta\theta}(\theta, \varphi) &= (-b \sin \theta \cos \varphi, -b \sin \theta \sin \varphi, -b \cos \theta) \\ \mathbf{r}_\varphi(\theta, \varphi) &= (-b \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ \mathbf{r}_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi) &= (-b \sin \theta \cos \varphi, -b \sin \theta \sin \varphi, 0) \\ \mathbf{r}_{\theta\varphi}(\theta, \varphi) &= \mathbf{r}_{\varphi\theta}(\theta, \varphi) = (-b \cos \theta \sin \varphi, b \cos \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Vamos agora calcular o vetor unitário normal  $\mathbf{n}$ , a fim de obter os coeficientes da segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b \cos \theta \cos \varphi & b \cos \theta \sin \varphi & -b \sin \theta \\ -b \sin \theta \sin \varphi & b \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}[(b \cos \theta \sin \varphi)(0) - (b \sin \theta \cos \varphi)(-b \sin \theta)] \\
&\quad - \mathbf{j}[(b \cos \theta \cos \varphi)(0) - (-b \sin \theta \sin \varphi)(-b \sin \theta)] \\
&\quad + \mathbf{k}[(b \cos \theta \cos \varphi)(b \sin \theta \cos \varphi) - (-b \sin \theta \sin \varphi)(b \cos \theta \sin \varphi)] \\
&= (b^2 \sin^2 \theta \cos \varphi)\mathbf{i} + (b^2 \sin^2 \theta \sin \varphi)\mathbf{j} + (b^2 \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi))\mathbf{k} \\
&= (b^2 \sin^2 \theta \cos \varphi)\mathbf{i} + (b^2 \sin^2 \theta \sin \varphi)\mathbf{j} + (b^2 \sin \theta \cos \theta)\mathbf{k},
\end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi\| &= \sqrt{b^4 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + b^4 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + b^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\
&= \sqrt{b^4 \sin^4 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + b^4 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)} \\
&= \sqrt{b^4 \sin^4 \theta + b^4 \sin^2 \theta - b^4 \sin^4 \theta} \\
&= b^2 \sin \theta.
\end{aligned}$$

Usando estes resultados,

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{1}{b^2 \sin \theta} [(b^2 \sin^2 \theta \cos \varphi)\mathbf{i} + (b^2 \sin^2 \theta \sin \varphi)\mathbf{j} + (b^2 \sin \theta \cos \theta)\mathbf{k}] \\
&= (\sin \theta \cos \varphi)\mathbf{i} + (\sin \theta \sin \varphi)\mathbf{j} + (\cos \theta)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L(\theta, \varphi) &= (-b \sin \theta \cos \varphi, -b \sin \theta \sin \varphi, -b \cos \theta) \cdot (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\
&= -b \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - b \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - b \cos^2 \theta \\
&= -b \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - b \cos^2 \theta \\
&= -b(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
&= -b \\
M(\theta, \varphi) &= (-b \cos \theta \sin \varphi, b \cos \theta \cos \varphi, 0) \cdot (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\
&= -b \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + b \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \\
&= 0 \\
N(\theta, \varphi) &= (-b \sin \theta \cos \varphi, -b \sin \theta \sin \varphi, 0) \cdot (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\
&= -b \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - b \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \\
&= -b \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\
&= -b \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

Por fim, a segunda forma fundamental  $II$  para a esfera é

$$II = -bd\theta^2 - b\sin^2\theta d\varphi^2.$$

**Exemplo 7. Plano**

Suponha um plano parametrizado pela seguinte equação,

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x(x, y) &= \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y(x, y) = \mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{xx} &= \mathbf{r}_{xy} = \mathbf{r}_{yx} = \mathbf{r}_{yy} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

No caso em que a superfície é plana, a segunda forma fundamental se escreve

$$II = 0.$$

**Exemplo 8. Toro ou Toróide**

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u) \\ \mathbf{r}_u(u, v) &= (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u) \\ \mathbf{r}_{uu}(u, v) &= (-b \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, -b \sin u) \\ \mathbf{r}_v(u, v) &= (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0) \\ \mathbf{r}_{vv}(u, v) &= ((a + b \cos v)(-\cos v), (a + b \cos v)(-\sin v), 0) \\ \mathbf{r}_{uv}(u, v) &= \mathbf{r}_{vu}(u, v) = (b \sin u \sin v, -b \sin u \cos v, 0).\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -b \sin u \cos v & -b \sin u \sin v & b \cos u \\ (a + b \cos u)(-\sin v) & (a + b \cos u)(-\cos v) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}[(-b \sin u \sin v)(0) - ((a + b \cos u)(-\cos v))(b \cos u)] \\ &\quad - \mathbf{j}[(-b \sin u \cos v)(0) - ((a + b \cos u)(-\sin v))(b \cos u)] \\ &\quad + \mathbf{k}[(-b \sin u \cos v)((a + b \cos u)(-\cos v)) - ((a + b \cos u)(-\sin v))(-b \sin u \sin v)] \\ &= [-b(a + b \cos u) \cos u \cos v]\mathbf{i} + [-b(a + b \cos u) \cos u \sin v]\mathbf{j} \\ &\quad + [-b(a + b \cos u) \sin u(\cos^2 v + \sin^2 v)]\mathbf{k} \\ &= [-b(a + b \cos v) \cos u \cos v]\mathbf{i} + [-b(a + b \cos v) \cos u \sin v]\mathbf{j} + [-b(a + b \cos v) \sin u]\mathbf{k}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{b^2(a + b \cos u)^2(\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u)} \\ &= \sqrt{b^2(a + b \cos u)^2 \cos^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + b^2(a + b \cos u)^2 \sin^2 u} \\ &= \sqrt{b^2(a + b \cos u)^2(\cos^2 u + \sin^2 u)} \\ &= b(a + b \cos u).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(u, v) &= \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \\ &= -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).\end{aligned}$$

Lembremos que  $\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta)$ . Então, ao invés de calcular pelo modo realizado no exemplo da esfera, podemos tomar para melhor ilustrar os resultados

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_u(u, v) &= (\sin u \cos v, \sin u \sin v, -\cos u) \\ \mathbf{n}_v(u, v) &= (\cos u \sin v, -\cos u \cos v, 0)\end{aligned}$$

e calcular os coeficientes da segunda forma fundamental da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}L(u, v) &= -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{r}_u \\ &= b(\sin^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + \cos^2 u) \\ &= b \\ M(u, v) &= -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{r}_u = -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{r}_v \\ &= (-b \cos u \cos v \sin u \sin v + b \cos u \cos v \sin u \sin v) \\ &= 0 \\ N(u, v) &= -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{r}_v \\ &= (a + b \cos u) \cos u(\sin^2 v + \cos^2 v) \\ &= (a + b \cos u) \cos u.\end{aligned}$$

Com estes coeficientes, a segunda forma fundamental para o toro é dada por

$$II = bdu^2 + (a + b \cos u) \cos u dv^2.$$

### 1.2.2 Características Importantes

**Proposição 1.** *Se numa dada região de uma superfície, a segunda forma fundamental  $II = 0$ , então tal região será um plano.*

*Demonstração.* Se a segunda forma fundamental  $II = 0$ , têm-se:

$$\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_u = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_v = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u = 0.$$

E desde que  $\mathbf{n}_u$  e  $\mathbf{n}_v$  são combinações lineares de  $\mathbf{r}_u$  e  $\mathbf{r}_v$ , já que também são perpendiculares à  $\mathbf{n}$ ,

$$\mathbf{n}_u = \mathbf{n}_v = \mathbf{0}.$$

No entanto, isso implica que  $\mathbf{n}$  é constante e por este motivo obtemos

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})_u = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})_v = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n} = 0,$$

onde

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \text{constante}$$

e corresponde a equação do plano no espaço Euclidiano. □

Considere agora uma superfície parametrizada como segue

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

Daí

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + z_u(u, v)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + z_v(u, v)\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{r}_{uu} = z_{uu}(u, v)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_{vv} = z_{vv}(u, v)\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_{uv} = z_{uv}(u, v)\mathbf{k}.$$

Desta maneira, a segunda forma fundamental  $II$  é a matriz Hessiana da função  $z(u, v)$  no ponto crítico, ou seja:

$$H = \begin{pmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{uu} & z_{uv} \\ z_{uv} & z_{vv} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 9.** *Matriz Hessiana - Toro*

Foi mostrado anteriormente que os coeficientes da segunda forma fundamental para o toro são  $L(u, v) = b$ ,  $M(u, v) = 0$  e  $N(u, v) = (a + b \cos u) \cos u$ . Portanto, a matriz Hessiana  $H$  para o toro é

$$H = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a + b \cos u) \cos u \end{pmatrix}.$$

É interessante observar que o determinante da matriz Hessiana  $H$  conduz a três possíveis situações. São elas:

$$\det(H) = b(a + b \cos u) \cos u \quad \acute{e} \quad \begin{cases} < 0, & \text{se } \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2} \\ = 0, & \text{se } u = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad u = -\frac{\pi}{2} \\ > 0, & \text{se } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Um aspecto importante da matriz Hessiana é que podemos usá-la para entender o comportamento da segunda forma fundamental  $II$  sobre a superfície em questão. Tal análise pode ser feita através da teoria de pontos críticos de funções de duas variáveis.

### 1.3 Curvatura

O conceito de curvatura desempenha papel fundamental na Física Moderna. Caso seu estudo não fosse exaustivamente realizado ao longo dos séculos, certamente, Einstein não teria desenvolvido a teoria da relatividade geral de forma tão elegante, nem seus desdobramentos mais intrigantes poderiam estar no escrutínio de uma vasta gama de pesquisadores atuais. Na geometria diferencial, a idéia de curvatura evoca todos os resultados que apresentamos até este ponto. Por sua vez, é largamente compreendido que o estudo da curvatura em superfícies constitui um objeto de estudo de extrema relevância tanto na geometria quanto na moderna pesquisa de corpos gravitacionais.

**Definição 1.3.1.** *Sejam  $U$  e  $N$  um campo vetorial sobre uma superfície  $S$  em  $\mathbf{R}^3$  e o campo vetorial unitário normal, respectivamente. Dessa forma, o **mapa de Weingarten**  $W$  é escrito como*

$$WU = -\nabla_U^E N. \quad (1.25)$$

O índice  $E$  em (1.25) serve para denotar que o operador a ele associado não pertence à superfície, mas ao espaço externo a ela.

**Definição 1.3.2.** *O **bracket de Lie** relativo à dois campos vetoriais  $U$  e  $V$  sobre uma superfície  $S$  em  $\mathbf{R}^3$  é dado por*

$$[U, V] = UV - VU. \quad (1.26)$$

**Proposição 2.** *O **bracket de Lie** de dois campos vetoriais  $U$  e  $V$  pertencentes a  $T(S)$ , onde  $T(S)$  corresponde ao espaço tangente à  $S$ , se constitui num outro campo vetorial de  $T(S)$ .*

*Demonstração.* A fim de provar esta afirmação é suficiente mostrar as duas situações abaixo:

Suponha dois campos vetoriais  $U$  e  $V$  pertencentes a  $T(S)$  e duas funções  $f$  e  $g$  suaves em  $S$ , daí

$$\begin{aligned}
[U, V](fg) &= (UV - VU)(fg) \\
&= (UV(fg) - VU(fg)) \\
&= U(V(f)g + fV(g)) - V(U(f)g + fU(g)) \\
&= U(g)V(f) + gU(V(f)) + U(f)V(g) + fU(V(g)) - V(g)U(f) \\
&\quad - gV(U(f)) - V(f)U(g) - fV(U(g)) \\
&= f(U(V(g)) - V(U(g))) + g(U(V(f)) - V(U(f))) \\
&= f(UV - VU)g + g(UV - VU)f \\
&= f[U, V]g + g[U, V]f
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[U, V](f + g) &= (UV - VU)(f + g) \\
&= UV(f + g) - VU(f + g) \\
&= U(V(f) + V(g)) - V(U(f) + U(g)) \\
&= UV(f) - VU(f) + UV(g) - VU(g) \\
&= (UV - VU)(f) + (UV - VU)(g) \\
&= [U, V](f) + [U, V](g).
\end{aligned}$$

□

**Proposição 3.** *O mapa de Weingarten  $W$  corresponde a uma transformação linear em  $T(S)$ .*

*Demonstração.* A linearidade de  $W$  advém da linearidade do operador  $\nabla_U^E$ , portanto, basta mostrar que  $WU$  é um campo vetorial pertencente a  $T(S)$  desde que  $U$  é um campo vetorial que pertence a  $T(S)$ . Desde que  $\mathbf{n}$  corresponde ao campo vetorial unitário normal à superfície, temos  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  e qualquer derivada deste produto interno desaparece. Considerando que a conexão  $\nabla_U^E$  e a métrica são compatíveis, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_U^E(N \cdot N) &= \nabla_U^E N \cdot N + N \cdot \nabla_U^E N \\
&= 2(\nabla_U^E N \cdot N) \\
&= -2(WU \cdot N) = 0.
\end{aligned}$$

Logo,  $WU$  é perpendicular a  $N$  e por isso pertence a  $T(S)$ . □

**Definição 1.3.3.** *A segunda forma fundamental pode ser expressa pelo mapa bilinear*

$$II(U, V) = WU \cdot V. \quad (1.27)$$

É fácil perceber que (1.27) equivale a (1.23). Se escolhermos que  $U$  e  $V$  tenham componentes  $\mathbf{v}_\alpha$  e  $\mathbf{v}_\beta$  respectivamente, as componentes de  $WU$  serão  $-\mathbf{n}_\alpha$ , devido à (1.25). Assim,  $II(U, V) = -\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}$ .



**Definição 1.3.4.** A **torsão** de uma conexão  $\nabla_U^E$  é definida como sendo o operador  $T(U, V)$ , tal que

$$T(U, V) = \nabla_U^E V - \nabla_V^E U - [U, V]. \quad (1.28)$$

Se  $T(U, V) = 0$ , a conexão é dita **livre de torsão**. Neste caso, temos

$$[U, V] = \nabla_U^E V - \nabla_V^E U. \quad (1.29)$$

Como exemplo podemos citar a teoria da relatividade geral, onde a torsão é escolhida ser nula. Por outro lado, existem também pesquisas em gravitação que assumem um valor não nulo para a torsão, tal área de estudo é conhecida como gravitação teleparalela.

**Teorema 1.3.1.** O mapa de Weingarten corresponde a um operador auto-adjunto sobre  $T(S)$ .

*Demonstração.* Um operador  $W$  atuando sobre um espaço linear é auto-adjunto se satisfaz  $WU \cdot V = U \cdot WV$ , então, usando (1.27) e (1.25) podemos calcular a diferença

$$\begin{aligned} II(U, V) - II(V, U) &= WU \cdot V - WV \cdot U \\ &= \nabla_V^E N \cdot U - \nabla_U^E N \cdot V. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Já foi visto que  $U \cdot N = V \cdot N = 0$ , logo

$$\begin{aligned} \nabla_Q^E(N \cdot X) &= \nabla_Q^E N \cdot X + N \cdot \nabla_Q^E X \\ &= 0 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\nabla_Q^E N \cdot X = -N \cdot \nabla_Q^E X, \quad (1.31)$$

onde  $Q$  e  $X$  são dois campos vetoriais quaisquer em  $T(S)$ .

Utilizando o resultado (1.31) em (1.30), encontramos

$$\begin{aligned} II(U, V) - II(V, U) &= N \cdot \nabla_U^E V - N \cdot \nabla_V^E U \\ &= (N \cdot \nabla_U^E V - \nabla_U^E N \cdot V) \\ &= (N \cdot [U, V]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

desde que  $U$  e  $V$  pertençam a  $T(S)$ . □

Vamos analisar agora os possíveis autovalores do operador auto-adjunto  $W$ . Em Álgebra Linear, um importante resultado diz que se deve considerar a equação de autovalores

$$WU = \kappa U. \quad (1.32)$$

E assim, autovetores correspondentes à autovalores distintos serão sempre perpendiculares entre si e os autovalores serão sempre reais. No caso estudado, o espaço vetorial consiste no espaço tangente à superfície em  $\mathbf{R}^3$  e por isso bidimensional. Desta forma,

$$WU_1 = \kappa_1 U_1 \quad (1.33)$$

$$WU_2 = \kappa_2 U_2. \quad (1.34)$$

**Definição 1.3.5.** *Os autovalores de (1.33) e (1.34) são denominados **curvaturas principais** e os autovetores correspondentes são denominados **direções principais**.*

Os autovalores de (1.33) e (1.34) podem ser classificados em cada ponto  $\mathbf{p}$  sobre a superfície de diversas formas diferentes. São elas:

1. Se  $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) \neq 0$ ,  $\mathbf{p}$  é denominado ponto umbílico. Em contrapartida, se  $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = 0$ ,  $\mathbf{p}$  é denominado ponto planar.
2. Se  $\kappa_1(\mathbf{p}) \neq \kappa_2(\mathbf{p})$ , e os autovalores são positivos,  $\mathbf{p}$  é denominado ponto elíptico
3. Se  $\kappa_1(\mathbf{p})\kappa_2(\mathbf{p}) = 0$ ,  $\mathbf{p}$  é denominado ponto parabólico.
4. Se  $\kappa_1(\mathbf{p})\kappa_2(\mathbf{p}) < 0$ ,  $\mathbf{p}$  é denominado ponto hiperbólico.

**Definição 1.3.6.** *As relações*

$$H = \frac{1}{2}Tr(W) \quad e \quad K = det(W) \quad (1.35)$$

são denominadas **curvatura média** e **curvatura gaussiana** de  $S$ , respectivamente [1]. Todavia,  $W$  é um operador auto-adjunto e sabemos da Álgebra Linear que operadores auto-adjuntos são diagonalizáveis. Escrevendo a matriz que representa o operador  $W$  em termos de uma base diagonal, temos

$$W = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, as expressões em (1.35) podem ser escritas como segue

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad e \quad K = \kappa_1\kappa_2. \quad (1.36)$$

**Proposição 4.** *Sejam  $U$  e  $V$  dois campos vetoriais em  $T(S)$ . Daí:*

$$WU \times WV = K(U \times V) \quad (1.37)$$

$$(WU \times V) + (U \times WV) = 2H(U \times V). \quad (1.38)$$

*Demonstração.* Foi visto que o mapa de Weingarten  $W$  atuando num campo vetorial pertencente a  $T(S)$  leva em outro campo vetorial também pertencente a  $T(S)$ . Isto significa que podemos escrever:

$$\begin{aligned}WU &= a_1U + c_1V \\WV &= a_2U + c_2V\end{aligned}$$

e calculando o produto vetorial (1.37),

$$\begin{aligned}WU \times WV &= (a_1U + c_1V) \times (a_2U + c_2V) \\&= (a_1U + c_1V) \times (a_2U) + (a_1U + c_1V) \times (c_2V) \\&= a_1a_2(U \times U) + c_1a_2(V \times U) + a_1c_2(U \times V) + c_1c_2(V \times V) \\&= c_1a_2(V \times U) + a_1c_2(U \times V) \\&= (a_1c_2 - a_2c_1)(U \times V) \\&= \det(W)(U \times V).\end{aligned}$$

Para (1.38), encontramos

$$\begin{aligned}(WU \times V) + (U \times WV) &= [(a_1U + c_1V) \times V] + [U \times (a_2U + c_2V)] \\&= a_1(U \times V) + c_1(V \times V) + a_2(U \times U) + c_2(U \times V) \\&= (a_1 + c_2)(U \times V) \\&= \text{Tr}(W)(U \times V) \\&= 2H(U \times V).\end{aligned}$$

□

**Proposição 5.** *Podemos ainda definir a curvatura gaussiana  $K$  e a curvatura média  $H$  em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais da seguinte maneira:*

$$H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + LG}{EG - F^2} \quad (1.39)$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (1.40)$$

*Demonstração.* Multipliquemos (1.37) por  $(U \times V)$  em ambos os lados, então

$$(WU \times WV)(U \times V) = K(U \times V)(U \times V), \quad (1.41)$$

daí, utilizando (1.8) no lado direito, obtém-se

$$(U \times V)(U \times V) = \begin{vmatrix} U \cdot U & U \cdot V \\ V \cdot U & V \cdot V \end{vmatrix}$$

e no lado esquerdo

$$(WU \times WV)(U \times V) = \begin{vmatrix} WU \cdot U & WU \cdot V \\ WV \cdot U & WV \cdot V \end{vmatrix}.$$

Como determinantes são números, podemos escrever

$$K = \frac{\begin{vmatrix} WU \cdot U & WU \cdot V \\ WV \cdot U & WV \cdot V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U \cdot U & U \cdot V \\ V \cdot U & V \cdot V \end{vmatrix}}. \quad (1.42)$$

Adotando  $U = \mathbf{r}_\alpha$  e  $V = \mathbf{r}_\beta$ , (1.42) se torna:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\begin{vmatrix} W\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & W\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ W\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & W\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & -\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ -\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & -\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(-\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha)(-\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta) - (-\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta)(-\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha)}{(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha)(\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta) - (\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta)(\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha)} \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Fazendo uso do mesmo procedimento com (1.38),

$$((WU \times V) + (U \times WV))(U \times V) = 2H(U \times V)(U \times V) \quad (1.43)$$

e

$$(WU \times V)(U \times V) + (U \times WV)(U \times V) = \begin{vmatrix} WU \cdot U & WU \cdot V \\ V \cdot U & V \cdot V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U \cdot U & U \cdot V \\ WV \cdot U & WV \cdot V \end{vmatrix}.$$

Portanto

$$2H = \frac{\begin{vmatrix} WU \cdot U & WU \cdot V \\ V \cdot U & V \cdot V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U \cdot U & U \cdot V \\ WV \cdot U & WV \cdot V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U \cdot U & U \cdot V \\ V \cdot U & V \cdot V \end{vmatrix}}. \quad (1.44)$$

Agora, substituindo  $U = \mathbf{r}_\alpha$  e  $V = \mathbf{r}_\beta$  em (1.44),

$$\begin{aligned}
2H &= \frac{\begin{vmatrix} W\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & W\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ W\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & W\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} -\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & -\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ -\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & -\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta \\ \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(-\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha)(\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta) - (\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha)(-\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta) + (\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha)(-\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta) - (-\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha)(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta)}{(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha)(\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta) - (\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta)(\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha)} \\
&= \frac{EN - 2FM + LG}{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

□

## 1.4 Terceira Forma Fundamental

Na seção anterior definimos a segunda forma fundamental como  $II(U, V) = WU \cdot V$ , sendo  $U$  e  $V$  dois campos vetoriais pertencentes à  $T(S)$ . Entretanto, utilizando o conceito do operador auto-adjunto de Weingarten, podemos definir ainda uma outra forma fundamental da superfície, cuja dependência linear com as duas formas fundamentais anteriormente apresentadas será mostrada no fim deste capítulo.

**Definição 1.4.1.** A terceira forma fundamental  $III(U, V)$ , pode ser definida da seguinte forma:

$$III(U, V) = WU \cdot WV, \quad (1.45)$$

onde  $U$  e  $V$  pertencem à  $T(S)$ .

É instrutivo observar que se tomarmos  $U = \mathbf{r}_\alpha$  e  $V = \mathbf{r}_\beta$  em (1.45),

$$\begin{aligned}
III(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) &= W\mathbf{r}_\alpha \cdot W\mathbf{r}_\beta \\
&= \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta.
\end{aligned} \quad (1.46)$$

As equações (1.45) e (1.46) sugerem que assim como a primeira e segunda formas fundamentais, a terceira forma fundamental é uma forma quadrática que pode ser escrita similarmente a (1.6) e (1.20), isto é

$$III(\omega, v) = X(\omega, v)d\omega^2 + 2Y(\omega, v)d\omega dv + Z(\omega, v)dv^2, \quad (1.47)$$

onde a superfície é parametrizada por  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega, v)$ . Os coeficientes da terceira forma fundamental nesta parametrização são dados por

$$\begin{aligned}
X(\omega, \nu) &= \mathbf{n}_\omega \cdot \mathbf{n}_\omega \\
Y(\omega, \nu) &= \mathbf{n}_\omega \cdot \mathbf{n}_\nu \\
&= \mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{n}_\omega \\
Z(\omega, \nu) &= \mathbf{n}_\nu \cdot \mathbf{n}_\nu.
\end{aligned}$$

## 1.5 Dependência Linear das Três Formas Fundamentais

**Proposição 6.** *Em cada ponto sobre uma superfície  $S$  em  $\mathbf{R}^3$ , a igualdade a seguir é válida:*

$$IK - II^2H + III = 0, \quad (1.48)$$

onde  $K$  é a curvatura gaussiana e  $H$  é a curvatura média.

*Demonstração.* Adotando  $U_1 = \mathbf{r}_\alpha$  e  $U_2 = \mathbf{r}_\beta$ , (1.33) e (1.34) nos dão:

$$\kappa_1 \mathbf{r}_\alpha = -\mathbf{n}_\alpha \quad (1.49)$$

$$\kappa_2 \mathbf{r}_\beta = -\mathbf{n}_\beta. \quad (1.50)$$

No entanto, sabe-se que na equação de autovalores do operador de Weingarten  $W$ , autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais entre si. Neste caso,

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = 0. \quad (1.51)$$

Isso implica que  $F = 0$ . Desde que podemos escrever a terceira forma fundamental  $III$  como (1.45) e fazendo uso de (1.25), (1.49) e (1.50), temos

$$\begin{aligned}
III(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) &= W\mathbf{r}_\alpha \cdot W\mathbf{r}_\alpha \\
&= (-\mathbf{n}_\alpha) \cdot (-\mathbf{n}_\alpha) \\
&= \kappa_1^2(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha) \\
&= \kappa_1^2 E
\end{aligned} \quad (1.52)$$

e

$$\begin{aligned}
III(\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\beta) &= W\mathbf{r}_\beta \cdot W\mathbf{r}_\beta \\
&= (-\mathbf{n}_\beta) \cdot (-\mathbf{n}_\beta) \\
&= \kappa_2^2(\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta) \\
&= \kappa_2^2 G.
\end{aligned} \quad (1.53)$$

Utilizando procedimento análogo para (1.27), obtém-se:

$$\begin{aligned}
II(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) &= W\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha \\
&= (-\mathbf{n}_\alpha) \cdot (\mathbf{r}_\alpha) \\
&= \kappa_1(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha) \\
&= \kappa_1 E
\end{aligned} \quad (1.54)$$

e

$$\begin{aligned}
II(\mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\beta) &= W \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta \\
&= (-\mathbf{n}_\beta) \cdot (\mathbf{r}_\beta) \\
&= \kappa_2 (\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_\beta) \\
&= \kappa_2 G.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Agora, vamos adotar a notação “antiga” para as formas fundamentais exibida em (1.6), (1.20) e (1.47). Nesta notação,

$$I(\omega, v) = E(\omega, v)d\omega^2 + G(\omega, v)dv^2. \tag{1.56}$$

Assim, os resultados de (1.52) a (1.55) são interpretados como segue

$$II(\omega, v) = \kappa_1 E(\omega, v)d\omega^2 + \kappa_2 G(\omega, v)dv^2 \tag{1.57}$$

e

$$III(\omega, v) = \kappa_1^2 E(\omega, v)d\omega^2 + \kappa_2^2 G(\omega, v)dv^2. \tag{1.58}$$

Finalmente, substituindo (1.36), (1.56), (1.57) e (1.58) em (1.48),

$$\begin{aligned}
IK - II2H + III &= (E(\omega, v)d\omega^2 + G(\omega, v)dv^2)\kappa_1\kappa_2 \\
&- (\kappa_1 E(\omega, v)d\omega^2 + \kappa_2 G(\omega, v)dv^2)(\kappa_1 + \kappa_2) \\
&+ \kappa_1^2 E(\omega, v)d\omega^2 + \kappa_2^2 G(\omega, v)dv^2 \\
&= E(\omega, v)\kappa_1\kappa_2 d\omega^2 + G(\omega, v)\kappa_1\kappa_2 dv^2 - E(\omega, v)\kappa_1^2 d\omega^2 \\
&- G(\omega, v)\kappa_1\kappa_2 dv^2 - E(\omega, v)\kappa_1\kappa_2 d\omega^2 - G(\omega, v)\kappa_2^2 dv^2 \\
&+ E(\omega, v)\kappa_1^2 d\omega^2 + G(\omega, v)\kappa_2^2 dv^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Os conceitos oriundos da geometria diferencial esmiuçados até este ponto representam uma pequena parcela do vasto campo da geometria das superfícies. Por exemplo, além das três formas fundamentais analisadas neste capítulo, outras formas fundamentais podem ser encontradas. No entanto, não se faz necessário tratar este tópico aqui. Como foi visto, a terceira forma fundamental apresenta dependência linear com as duas anteriores, de modo que já podemos entendê-la adequadamente sem a necessidade de exemplos. Daqui em diante trataremos apenas das duas primeiras formas fundamentais, uma vez que elas são suficientes para definir a curvatura média  $H$  e a curvatura gaussiana  $K$ .

## Capítulo 2

# Superfícies Mínimas

No decorrer deste capítulo abordaremos a definição de superfícies mínimas e sua relação com a curvatura média  $H$  definida no capítulo precedente [14, 15]. Além da análise de superfícies parametrizadas por alguma função  $\mathbf{r}(\omega, v)$  conforme temos feito até aqui, trataremos também de superfícies mínimas não paramétricas. Por fim, ilustraremos os resultados apresentados com alguns exemplos clássicos.

### 2.1 Notação e Conceitos

Os discos fechado e aberto são representados por  $\bar{d}$  e  $d$ , respectivamente. O círculo é representado por  $S^1$ .

$C^0$  significa continuidade e  $C^n$  indica a quantidade de derivadas contínuas existentes.

Consideraremos que superfícies tipo disco são no mínimo  $C^1$  na fronteira e  $C^3$  em  $d$ .

Uma curva de Jordan é uma mapa contínuo  $J$  um a um do círculo  $S^1$  em  $\mathbf{R}^3$ . Uma característica importante da curva de Jordan é que uma reparametrização de  $J$  leva em outra curva de Jordan  $J \circ \Phi$ , onde  $\Phi$  corresponde a um mapa um a um de  $S^1$  em  $S^1$  [14].

### 2.2 Definição de Superfície Mínima

Assim como a curva de Jordan, as superfícies  $\mathbf{r}$  também podem ser reparametrizadas. Definamos  $\phi$  tal que  $\mathbf{r} \circ \phi$  corresponde a uma reparametrização da superfície.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $A$  a funcional denominada área. Então, um ponto crítico de  $A$  corresponde a uma superfície  $\mathbf{r}$  tal que a primeira variação da área é nula.*

**Definição 2.2.2.** *A primeira variação da área  $A$  na direção  $\phi$  é dada por:*

$$DA[\mathbf{r}](\phi) = \frac{d}{d\lambda} A[\mathbf{r}^\lambda]|_{\lambda=0}, \quad (2.1)$$



onde  $\mathbf{r}^\lambda = \mathbf{r} - \lambda\phi N$ .  $N$  corresponde ao campo vetorial normal e  $\lambda$  é uma parâmetro.

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $\mathbf{r}$  uma superfície em  $\mathbf{R}^3$ . Tal superfície será um ponto crítico da funcional área  $A$  se e apenas se sua curvatura média  $H$  for igual a zero.*

*Demonstração.* Seja  $C^3$  em  $d$  e  $\phi = 0$  em  $S^1$ . Considere

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \lambda\phi N. \quad (2.2)$$

Lembremos que vimos que a área pode ser calculada em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental em (1.9), de sorte que

$$A[\mathbf{r}'] = \int_d \sqrt{E'(\omega, v)G'(\omega, v) - F'^2(\omega, v)} d\omega dv. \quad (2.3)$$

Agora, calculando os coeficientes de (2.3) e descartando os termos de segunda ordem em  $\lambda^2$ :

$$\begin{aligned} E'(\omega, v) &= \mathbf{r}'_\omega \cdot \mathbf{r}'_\omega \\ &= (\mathbf{r}_\omega - \lambda\phi_\omega N - \lambda\phi N_\omega) \cdot (\mathbf{r}_\omega - \lambda\phi_\omega N - \lambda\phi N_\omega) \\ &= \mathbf{r}_\omega^2 - \mathbf{r}_\omega \lambda\phi_\omega N - \mathbf{r}_\omega \lambda\phi N_\omega - \lambda\phi_\omega N \mathbf{r}_\omega - \lambda\phi N_\omega \mathbf{r}_\omega + O(\lambda^2) \\ &= \mathbf{r}_\omega^2 - 2\lambda\phi N_\omega \mathbf{r}_\omega \\ &= \mathbf{r}_\omega^2 + 2\lambda\phi h_{\omega\omega}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Note que usamos  $\mathbf{r}_\omega \cdot N = 0$  e  $h_{\omega\omega} = \mathbf{r}_{\omega\omega} \cdot N = -\mathbf{r}_\omega \cdot N_\omega$ . De maneira análoga

$$\begin{aligned} G'(\omega, v) &= \mathbf{r}'_\omega \cdot \mathbf{r}'_v \\ &= \mathbf{r}_\omega^2 + 2\lambda\phi h_{\omega v} \end{aligned} \quad (2.5)$$

e

$$\begin{aligned} F'(\omega, v) &= \mathbf{r}'_\omega \cdot \mathbf{r}'_v \\ &= (\mathbf{r}_\omega - \lambda\phi_\omega N - \lambda\phi N_\omega) \cdot (\mathbf{r}_v - \lambda\phi_v N - \lambda\phi N_v) \\ &= \mathbf{r}_\omega \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\omega \lambda\phi_v N - \mathbf{r}_\omega \lambda\phi N_v - \lambda\phi_\omega N \mathbf{r}_v - \lambda\phi N_\omega \mathbf{r}_v + O(\lambda^2) \\ &= \mathbf{r}_\omega \mathbf{r}_v - \lambda\phi(\mathbf{r}_\omega N_v + N_\omega \mathbf{r}_v) \\ &= \mathbf{r}_\omega \mathbf{r}_v + \lambda\phi(h_{\omega v} + h_{v\omega}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} E'(\omega, v)G'(\omega, v) &= (\mathbf{r}_\omega^2 + 2\lambda\phi h_{\omega\omega})(\mathbf{r}_v^2 + 2\lambda\phi h_{vv}) \\ &= E(\omega, v)G(\omega, v) + 2\mathbf{r}_\omega^2 \lambda\phi h_{vv} + 2\lambda\phi h_{\omega\omega} \mathbf{r}_v^2 + O(\lambda^2) \\ &= E(\omega, v)G(\omega, v) + 2\lambda\phi(g_{\omega\omega} h_{vv} + g_{vv} h_{\omega\omega}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $g_{\omega\omega} = \mathbf{r}_\omega \cdot \mathbf{r}_\omega$  e  $g_{vv} = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$ . Daí,

$$\begin{aligned} F'^2(\omega, v) &= (\mathbf{r}_\omega \mathbf{r}_v + \lambda\phi(h_{\omega v} + h_{v\omega}))(\mathbf{r}_\omega \mathbf{r}_v + \lambda\phi(h_{\omega v} + h_{v\omega})) \\ &= F^2(\omega, v) + \mathbf{r}_\omega \mathbf{r}_v \lambda\phi(h_{\omega v} + h_{v\omega}) + \lambda\phi(h_{\omega v} + h_{v\omega}) \mathbf{r}_\omega \mathbf{r}_v + O(\lambda^2) \\ &= F^2(\omega, v) + 2\lambda\phi(g_{\omega v} h_{v\omega} + g_{v\omega} h_{\omega v}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Utilizando (2.7) e (2.8) no radicando em (2.3), obtemos:

$$\begin{aligned} E'(\omega, v)G'(\omega, v) - F'^2(\omega, v) &= E(\omega, v)G(\omega, v) - F^2(\omega, v) + 2\lambda\phi(g_{\omega\omega}h_{vv} + g_{vv}h_{\omega\omega}) \\ &\quad - 2\lambda\phi(g_{\omega v}h_{v\omega} + g_{v\omega}h_{\omega v}) \\ &= E(\omega, v)G(\omega, v) - F^2(\omega, v) + 2\lambda\phi(g_{\omega\omega}h_{vv} + g_{vv}h_{\omega\omega} \\ &\quad - g_{\omega v}h_{v\omega} - g_{v\omega}h_{\omega v}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Finalmente, usando a equação (1.39), podemos escrever (2.9) de um jeito mais simples,

$$\begin{aligned} E'(\omega, v)G'(\omega, v) - F'^2(\omega, v) &= E(\omega, v)G(\omega, v) - F^2(\omega, v) \\ &\quad + 4\lambda\phi H(E(\omega, v)G(\omega, v) - F^2(\omega, v)) \\ &= Q^2(\omega, v)(1 + 4\lambda\phi H), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde adotamos  $Q^2(\omega, v) = E(\omega, v)G(\omega, v) - F^2(\omega, v)$ . A integral (2.3) pode então ser calculada como segue

$$\begin{aligned} A[\mathbf{r}'] &= \int_d \sqrt{Q^2(\omega, v)(1 + 4\lambda\phi H)} d\omega dv \\ &= \int_d Q(\omega, v)(1 + 2\lambda\phi H) d\omega dv \\ &= \int_d Q(\omega, v) d\omega dv + 2\lambda \int_d Q(\omega, v)\phi H d\omega dv, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde foi utilizado a expansão binomial. A segunda integral em (2.11) é a primeira variação da área, ou seja

$$DA[\mathbf{r}](\phi) = 2\lambda \int_d Q(\omega, v)\phi H d\omega dv \quad (2.12)$$

e o teorema está provado. □

**Definição 2.2.3.** *Se uma superfície  $\mathbf{r}$  tem curvatura média  $H = 0$ , ela é denominada superfície mínima.*

## 2.3 Superfície Mínima Não Paramétrica

As superfícies dadas por uma função  $\mathbf{r}$  de parâmetros  $\omega$  e  $v$  conforme temos tratado são denominadas **superfícies paramétricas**. Todavia, se uma superfície é definida por uma função  $y = h(\omega, v)$ , ela é denominada **superfície não paramétrica**. Tais superfícies não paramétricas podem ser definidas parametricamente assim como mostramos na página 16, isto é, em termos de uma função  $(\omega, v, h(\omega, v))$ .

Vamos então calcular a curvatura média  $H$  para uma superfície parametrizada por  $(\omega, v, h(\omega, v))$  usando a expressão (1.39) como realizado abaixo:

Primeiramente, calculemos as derivadas de primeira e segunda ordem em  $\omega$  e  $v$  e os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais para esta parametrização. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\omega(\omega, v) &= (1, 0, h_\omega(\omega, v)) \\ \mathbf{r}_{\omega\omega}(\omega, v) &= (0, 0, h_{\omega\omega}(\omega, v)) \\ \mathbf{r}_v(\omega, v) &= (0, 1, h_v(\omega, v)) \\ \mathbf{r}_{vv}(\omega, v) &= (0, 0, h_{vv}(\omega, v)) \\ \mathbf{r}_{\omega v}(\omega, v) &= \mathbf{r}_{v\omega}(\omega, v) \\ &= (0, 0, h_{\omega v}(\omega, v))\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}E(\omega, v) &= (1, 0, h_\omega(\omega, v)) \cdot (1, 0, h_\omega(\omega, v)) \\ &= 1 + h_\omega^2(\omega, v) \\ F(\omega, v) &= (1, 0, h_\omega(\omega, v)) \cdot (0, 1, h_v(\omega, v)) \\ &= h_\omega(\omega, v)h_v(\omega, v) \\ G(\omega, v) &= (0, 1, h_v(\omega, v)) \cdot (0, 1, h_v(\omega, v)) \\ &= 1 + h_v^2(\omega, v).\end{aligned}$$

A fim de obter os coeficientes da segunda forma fundamental precisamos obter o vetor unitário normal, portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\omega \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & h_\omega(\omega, v) \\ 0 & 1 & h_v(\omega, v) \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}[(0)(h_v(\omega, v)) - (1)(h_\omega(\omega, v))] - \mathbf{j}[(1)(h_v(\omega, v)) - (0)(h_\omega(\omega, v))] \\ &+ \mathbf{k}[(1)(1) - (0)(0)] \\ &= \mathbf{i}[-h_\omega(\omega, v)] + \mathbf{j}[-h_v(\omega, v)] + \mathbf{k}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_\omega \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{(\mathbf{i}[-h_\omega(\omega, v)] + \mathbf{j}[-h_v(\omega, v)] + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}[-h_\omega(\omega, v)] + \mathbf{j}[-h_v(\omega, v)] + \mathbf{k})} \\ &= \sqrt{1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v)}} (\mathbf{i}[-h_\omega(\omega, v)] + \mathbf{j}[-h_v(\omega, v)] + \mathbf{k}).$$

Desta forma, os coeficientes da segunda forma fundamental serão

$$\begin{aligned} L(\omega, v) &= \frac{1}{\sqrt{1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v)}} (-h_\omega(\omega, v), -h_v(\omega, v), 1) \cdot (0, 0, h_{\omega\omega}(\omega, v)) \\ &= \frac{h_{\omega\omega}(\omega, v)}{\sqrt{1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v)}} \\ M(\omega, v) &= \frac{1}{\sqrt{1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v)}} (-h_\omega(\omega, v), -h_v(\omega, v), 1) \cdot (0, 0, h_{\omega v}(\omega, v)) \\ &= \frac{h_{\omega v}(\omega, v)}{\sqrt{1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v)}} \\ N(\omega, v) &= \frac{1}{\sqrt{1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v)}} (-h_\omega(\omega, v), -h_v(\omega, v), 1) \cdot (0, 0, h_{vv}(\omega, v)) \\ &= \frac{h_{vv}(\omega, v)}{\sqrt{1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v)}}. \end{aligned}$$

Observemos ainda que

$$\begin{aligned} E(\omega, v)G(\omega, v) - F^2(\omega, v) &= (1 + h_\omega^2(\omega, v))(1 + h_v^2(\omega, v)) - (h_\omega(\omega, v)h_v(\omega, v))^2 \\ &= 1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v) + h_\omega^2(\omega, v)h_v^2(\omega, v) - h_\omega^2(\omega, v)h_v^2(\omega, v) \\ &= 1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v). \end{aligned}$$

Por fim, mediante estes resultados, a equação (1.39) nos fornece

$$2H(\omega, v) = \frac{(1 + h_\omega^2(\omega, v))h_{vv}(\omega, v) - 2h_\omega(\omega, v)h_v(\omega, v)h_{\omega v}(\omega, v) + (1 + h_v^2(\omega, v))h_{\omega\omega}(\omega, v)}{(1 + h_\omega^2(\omega, v) + h_v^2(\omega, v))^{\frac{3}{2}}}.$$

Para que tenhamos superfície mínima é preciso  $H = 0$ . Sendo assim, devido a equação acima, a condição para que uma superfície não paramétrica seja mínima é

$$(1 + h_\omega^2(\omega, v))h_{vv}(\omega, v) - 2h_\omega(\omega, v)h_v(\omega, v)h_{\omega v}(\omega, v) + (1 + h_v^2(\omega, v))h_{\omega\omega}(\omega, v) = 0. \quad (2.13)$$

Devido ao grau de complexidade que pode apresentar a função  $h(\omega, v)$ , não é sempre que conseguiremos resolver (2.13) facilmente. Na verdade, normalmente se torna bastante complicado. Entretanto, se a função  $h(\omega, v)$  é separável em outras duas funções tal que cada uma dessas funções dependa somente de  $\omega$  ou  $v$ , nós podemos resolvê-la sem muitas complicações. Além da facilidade de resolução, o caso em que esta separação de variáveis pode ser efetuada é importante porque aparece em alguns modelos físicos interessantes. Em virtude dessas razões, ilustraremos a seguir o método de resolução.

Suponha que

$$h(\omega, v) = f(\omega) + g(v), \quad (2.14)$$

então,

$$h_\omega(\omega, v) = f_\omega(\omega), \quad h_{\omega\omega}(\omega, v) = f_{\omega\omega}(\omega) \quad (2.15)$$

$$h_v(\omega, v) = g_v(v), \quad h_{vv}(\omega, v) = f_{vv}(\omega) \quad (2.16)$$

$$h_{\omega v}(\omega, v) = h_{v\omega}(\omega, v) = 0. \quad (2.17)$$

Agora, substituindo (2.15), (2.16) e (2.17) em (2.13)

$$\begin{aligned} f_{\omega\omega}(\omega)(1 + g_v^2(v)) - 2f_\omega(\omega)g_v(v)(0) + g_{vv}(v)(1 + f_\omega^2(\omega)) &= f_{\omega\omega}(\omega)(1 + g_v^2(v)) \\ &+ g_{vv}(v)(1 + f_\omega^2(\omega)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{1 + g_v^2(v)}{g_{vv}(v)} = -\frac{1 + f_\omega^2(\omega)}{f_{\omega\omega}(\omega)}. \quad (2.18)$$

A expressão (2.18) implica que se mantivermos  $v$  fixo enquanto variamos  $\omega$ , o lado esquerdo permanece o mesmo seja qual for o valor que  $\omega$  possa assumir. Da mesma forma, se fixarmos  $\omega$  e variarmos  $v$ , o lado direito de (2.18) será o mesmo para qualquer valor possível de  $v$ . Ou seja, os lados direito e esquerdo são iguais a uma mesma constante  $b$ , tal que

$$1 + g_v^2(v) = bg_{vv}(v). \quad (2.19)$$

Para calcularmos (2.19) adotaremos  $\varphi(v) = g_v(v)$ . Assim, (2.19) se torna

$$1 + \varphi^2(v) = b \frac{d\varphi(v)}{dv},$$

de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \int dv &= b \int \frac{d\varphi}{1 + \varphi^2} \\ &= b \tan^{-1}(\varphi) + C, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Rearranjando (2.20) e tomando a tangente em ambos os lados da equação, obtemos

$$\varphi(v) = \tan\left(\frac{v - C}{b}\right). \quad (2.21)$$

Adotando, por simplicidade,  $C = 0$  e  $b = 1$ , (2.21) se reduz a

$$\varphi(v) = \tan(v). \quad (2.22)$$

Contudo, definimos que  $\varphi(v) = g_v(v)$ , portanto

$$\begin{aligned} \int dg(v) &= \int \varphi(v)dv \\ &= \int \tan(v)dv \\ &= -\ln |\cos(v)| + C', \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $C'$  é uma constante de integração que novamente consideraremos como sendo igual a zero. Realizando procedimento análogo para o lado direito de (2.18), encontraremos

$$f(\omega) = \ln |\cos(\omega)|. \quad (2.24)$$

E, usando estes resultados em (2.14)

$$\begin{aligned} h(\omega, v) &= \ln |\cos(\omega)| - \ln |\cos(v)| \\ &= \ln \left( \frac{\cos(\omega)}{\cos(v)} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

A equação (2.25) corresponde a equação para a superfície duplamente periódica de Scherks.

## 2.4 Exemplos de Superfícies Não Mínimas

### Exemplo 10. Esfera

No capítulo anterior calculamos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais para a esfera como sendo

$$E(\theta, \varphi) = b^2, \quad F(\theta, \varphi) = 0 \quad \text{e} \quad G(\theta, \varphi) = b^2 \cos^2 \theta$$

e

$$L(\theta, \varphi) = -b, \quad M(\theta, \varphi) = 0 \quad \text{e} \quad N(\theta, \varphi) = -b \sin^2 \theta.$$

Daí,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + LG}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{b^2(-b \sin^2 \theta) - 2(0)(0) + (-b)(b^2 \cos^2 \theta)}{b^2(b^2 \cos^2 \theta) - (0)^2} \\ &= \frac{-b^3(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{2(b^4 \cos^2 \theta)} \\ &= -\frac{1}{2b \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (2.26)$$

e como  $H \neq 0$ , concluímos que a esfera não é uma superfície mínima.

### Exemplo 11. Toro

Nós também já mostramos que os coeficientes das duas primeiras formas fundamentais para o toro são dadas por

$$E(u, v) = b^2, \quad F(u, v) = 0 \quad \text{e} \quad G(u, v) = (a + b \cos u)^2$$

e

$$L(u, v) = b, \quad M(u, v) = 0 \quad \text{e} \quad N(u, v) = (a + b \cos u) \cos u.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + LG}{EG - F^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{b^2(a + b \cos u) \cos u - 2(0)(0) + b(a + b \cos u)^2}{b^2(a + b \cos u)^2 - (0)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\cos u}{a + b \cos u} + \frac{1}{b} \right). \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

Devido a  $H \neq 0$  em (2.27), o toro não pode ser uma superfície mínima.

## 2.5 Exemplos de Superfícies Mínimas

### Exemplo 12. Plano

Vimos no capítulo 1 que todos os coeficientes da segunda forma fundamental para o plano são nulos, desta forma

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + LG}{EG - F^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{E(0) - 2F(0) + (0)G}{EG - F^2} \\
 &= 0 \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

e o plano é uma superfície mínima, como já era esperado.

### Exemplo 13. Helicóide

Foi calculado na página 5 que os coeficientes da primeira forma fundamental para esta superfície são

$$E(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0 \quad \text{e} \quad G(u, v) = u^2 + b^2.$$

Vamos então obter os coeficientes da segunda forma fundamental para podermos aplicar (1.39) como segue:

Para o helicóide, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, bv) \\
 \mathbf{r}_u(u, v) &= (\cos v, \sin v, 0) \\
 \mathbf{r}_{uu}(u, v) &= (0, 0, 0) \\
 \mathbf{r}_v(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, b) \\
 \mathbf{r}_{vv}(u, v) &= (-u \cos v, -u \sin v, 0) \\
 \mathbf{r}_{uv}(u, v) &= \mathbf{r}_{vu}(u, v) \\
 &= (-\sin v, \cos v, 0).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & b \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}[(\sin v)(b) - (u \cos v)(0)] - \mathbf{j}[(\cos v)(b) - (-u \sin v)(0)] \\
&+ \mathbf{k}[(\cos v)(u \cos v) - (-u \sin v)(\sin v)] \\
&= \mathbf{i}[b \sin v] + \mathbf{j}[-b \cos v] + \mathbf{k}[u(\cos^2 v + \sin^2 v)] \\
&= \mathbf{i}[b \sin v] + \mathbf{j}[-b \cos v] + \mathbf{k}[u]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{b^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v + u^2} \\
&= \sqrt{b^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2} \\
&= \sqrt{b^2 + u^2}.
\end{aligned}$$

Assim, o vetor unitário normal é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + u^2}}(\mathbf{i}[b \sin v] + \mathbf{j}[-b \cos v] + \mathbf{k}[u])$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental serão escritos como

$$\begin{aligned}
L(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{b^2 + u^2}}(b \sin v, -b \cos v, u) \cdot (0, 0, 0) \\
&= 0 \\
M(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{b^2 + u^2}}(b \sin v, -b \cos v, u) \cdot (-\sin v, \cos v, 0) \\
&= \frac{-b(\sin^2 v + \cos^2 v)}{\sqrt{b^2 + u^2}} \\
&= \frac{-b}{\sqrt{b^2 + u^2}} \\
N(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{b^2 + u^2}}(b \sin v, -b \cos v, u) \cdot (-u \cos v, -u \sin v, 0) \\
&= \frac{-bu \cos v \sin v + bu \cos v \sin v}{\sqrt{b^2 + u^2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Enfim,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + LG}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(1)(0) - 2(0)(-b/\sqrt{b^2 + u^2}) + (0)(u^2 + b^2)}{(1)(u^2 + b^2) - (0)^2} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Uma vez que  $H = 0$  em (2.29), o helicóide é uma superfície mínima conforme havíamos adiantado no capítulo precedente.



**Exemplo 14. Catenóide**

Para o catenóide a parametrização e suas derivadas são

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(u, v) &= (b \cosh v \cos u, b \cosh v \sin u, bv) \\
 \mathbf{r}_u(u, v) &= (-b \cosh v \sin u, b \cosh v \cos u, 0) \\
 \mathbf{r}_{uu}(u, v) &= (-b \cosh v \cos u, -b \cosh v \sin u, 0) \\
 \mathbf{r}_v(u, v) &= (b \sinh v \cos u, b \sinh v \sin u, b) \\
 \mathbf{r}_{vv}(u, v) &= (b \cosh v \cos u, b \cosh v \sin u, 0) \\
 \mathbf{r}_{uv}(u, v) &= \mathbf{r}_{vu}(u, v) \\
 &= (-b \sinh v \sin u, b \sinh v \cos u, 0).
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 E(u, v) &= (-b \cosh v \sin u, b \cosh v \cos u, 0) \cdot (-b \cosh v \sin u, b \cosh v \cos u, 0) \\
 &= b^2 \cosh^2 v \sin^2 u + b^2 \cosh^2 v \cos^2 u \\
 &= b^2 \cosh^2 v (\sin^2 u + \cos^2 u) \\
 &= b^2 \cosh^2 v \\
 F(u, v) &= (-b \cosh v \sin u, b \cosh v \cos u, 0) \cdot (b \sinh v \cos u, b \sinh v \sin u, b) \\
 &= -b^2 \sinh v \cosh v \sin u \cos u + b^2 \sinh v \cosh v \sin u \cos u \\
 &= 0 \\
 G(u, v) &= (b \sinh v \cos u, b \sinh v \sin u, b) \cdot (b \sinh v \cos u, b \sinh v \sin u, b) \\
 &= b^2 \sinh^2 v \cos^2 u + b^2 \sinh^2 v \sin^2 u + b^2 \\
 &= b^2 \sinh^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + b^2 \\
 &= b^2 (1 + \sinh^2 v) \\
 &= b^2 \cosh^2 v.
 \end{aligned}$$

Precisamos calcular o vetor unitário normal para encontrarmos os coeficientes da segunda forma fundamental, daí

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -b \cosh v \sin u & b \cosh v \cos u & 0 \\ b \sinh v \cos u & b \sinh v \sin u & b \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i}[(b \cosh v \cos u)(b) - (b \sinh v \sin u)(0)] - \mathbf{j}[(-b \cosh v \sin u)(b) - (b \sinh v \cos u)(0)] \\
 &+ \mathbf{k}[(-b \cosh v \sin u)(b \sinh v \sin u) - (b \sinh v \cos u)(b \cosh v \cos u)] \\
 &= \mathbf{i}[b^2 \cosh v \cos u] + \mathbf{j}[b^2 \cosh v \sin u] + \mathbf{k}[-b^2 \cosh v \sinh v (\cos^2 v + \sin^2 v)] \\
 &= \mathbf{i}[b^2 \cosh v \cos u] + \mathbf{j}[b^2 \cosh v \sin u] + \mathbf{k}[-b^2 \cosh v \sinh v]
 \end{aligned}$$

e tomando a norma

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{b^4 \cosh^2 v \cos^2 u + b^4 \cosh^2 v \sin^2 u + b^4 \cosh^2 v \sinh^2 v} \\
&= \sqrt{b^4 \cosh^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + b^4 \cosh^2 v \sinh^2 v} \\
&= \sqrt{b^4 \cosh^2 v + b^4 \cosh^2 v \sinh^2 v} \\
&= \sqrt{b^4 \cosh^2 v (1 + \sinh^2 v)} \\
&= b^2 \cosh^2 v,
\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{1}{b^2 \cosh^2 v} (\mathbf{i}[b^2 \cosh v \cos u] + \mathbf{j}[b^2 \cosh v \sin u] + \mathbf{k}[-b^2 \cosh v \sinh v]) \\
&= \mathbf{i} \begin{bmatrix} \cos u \\ \cosh v \end{bmatrix} + \mathbf{j} \begin{bmatrix} \sin u \\ \cosh v \end{bmatrix} + \mathbf{k} \begin{bmatrix} -\sinh v \\ \cosh v \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Usando os resultados precedentes, obtém-se:

$$\begin{aligned}
L(u, v) &= \left( \frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, -\frac{\sinh v}{\cosh v} \right) \cdot (-b \cosh v \cos u, -b \cosh v \sin u, 0) \\
&= -\frac{b \cosh v \cos^2 u}{\cosh v} - \frac{b \cosh v \sin^2 u}{\cosh v} \\
&= -b(\cos^2 u + \sin^2 u) \\
&= -b \\
M(u, v) &= \left( \frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, -\frac{\sinh v}{\cosh v} \right) \cdot (-b \sinh v \sin u, b \sinh v \cos u, 0) \\
&= -\frac{b \sinh v \sin u \cos u}{\cosh v} + \frac{b \sinh v \sin u \cos u}{\cosh v} \\
&= 0 \\
N(u, v) &= \left( \frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, -\frac{\sinh v}{\cosh v} \right) \cdot (b \cosh v \cos u, b \cosh v \sin u, 0) \\
&= \frac{b \cosh v \cos^2 u}{\cosh v} + \frac{b \cosh v \sin^2 u}{\cosh v} \\
&= b(\cos^2 u + \sin^2 u) \\
&= b.
\end{aligned}$$

Em posse dos coeficientes das duas primeiras formas fundamentais, a curvatura média  $H$  é dada por

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + LG}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(b^2 \cosh^2 v)(b) - 2(0)(0) + (-b)(b^2 \cosh^2 v)}{(b^2 \cosh^2 v)^2 - (0)^2} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Mediante (2.30) constatamos que o catenóide é uma superfície mínima.

**Exemplo 15.** *Superfície de Enneper*

Para esta superfície,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(u, v) &= \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right) \\
 \mathbf{r}_u(u, v) &= (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u) \\
 \mathbf{r}_{uu}(u, v) &= (-2u, 2v, 2) \\
 \mathbf{r}_v(u, v) &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \\
 \mathbf{r}_{vv}(u, v) &= (2u, -2v, -2) \\
 \mathbf{r}_{uv}(u, v) &= \mathbf{r}_{vu}(u, v) \\
 &= (2v, 2u, 0).
 \end{aligned}$$

Agora, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental encontramos

$$\begin{aligned}
 E(u, v) &= (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u) \cdot (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u) \\
 &= (1 - u^2 + v^2)(1 - u^2 + v^2) + 4u^2v^2 + 4u^2 \\
 &= 1 - u^2 + v^2 - u^2 + u^4 - u^2v^2 + v^2 - u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\
 &= 1 - 2u^2 + 2v^2 + u^4 + v^4 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\
 &= 1 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4 \\
 F(u, v) &= (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u) \cdot (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \\
 &= 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2uv - 2uv^3 + 2u^3v - 4uv \\
 &= 0 \\
 G(u, v) &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \cdot (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \\
 &= 4u^2v^2 + (1 - v^2 + u^2)(1 - v^2 + u^2) + 4v^2 \\
 &= 4u^2v^2 + 1 - v^2 + u^2 - v^2 + v^4 - u^2v^2 + u^2 - u^2v^2 + u^4 + 4v^2 \\
 &= 2u^2v^2 + 1 + u^4 + v^4 - 2v^2 + 2u^2 + 4v^2 \\
 &= 1 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4.
 \end{aligned}$$

Calculemos agora o vetor unitário normal usando o mesmo procedimento dos exemplos anteriores, isto é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 - u^2 + v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1 - v^2 + u^2 & -2v \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i}[(2uv)(-2v) - (1 - v^2 + u^2)(2u)] - \mathbf{j}[(1 - u^2 + v^2)(-2v) - (2uv)(2u)] \\
 &+ \mathbf{k}[(1 - u^2 + v^2)(1 - v^2 + u^2) - (2uv)(2uv)] \\
 &= \mathbf{i}[-4uv^2 - 2u + 2uv^2 - 2u^3] + \mathbf{j}[2v - 2u^2v + 2v^3 + 4u^2v] \\
 &+ \mathbf{k}[1 - v^2 + u^2 - u^2 + u^2v^2 - u^4 + v^2 - v^4 + u^2v^2] \\
 &= \mathbf{i}[-2uv^2 - 2u - 2u^3] + \mathbf{j}[2u^2v + 2v + 2v^3] + \mathbf{k}[1 + 2u^2v^2 - u^4 - v^4]
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= (4u^2v^4 + 4u^2v^2 + 4u^4v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 + 4u^4 + 4u^4v^2 + 4u^4 + 4u^6 + 4u^4v^2 \\
&\quad + 4u^2v^2 + 4u^2v^4 + 4u^2v^2 + 4v^2 + 4v^4 + 4u^2v^4 + 4v^4 + 4v^6)^{\frac{1}{2}} \\
&= (12u^2v^4 + 16u^2v^2 + 12u^4v^2 + 4u^2 + 4v^2 + 8u^4 + 8v^4 + 4u^6 + 4v^6)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Por conveniência chamaremos (2.31) de  $A$ . Usando esta notação, obtemos

$$\mathbf{n} = \frac{1}{A}(-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2u^2v + 2v + 2v^3, 1 + 2u^2v^2 - u^4 - v^4)$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned}
L(u, v) &= \frac{1}{A}(-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2u^2v + 2v + 2v^3, 1 + 2u^2v^2 - u^4 - v^4) \cdot (-2u, 2v, 2) \\
&= \frac{(-2u)(-2uv^2 - 2u - 2u^3) + (2v)(2u^2v + 2v + 2v^3) + (2)(1 + 2u^2v^2 - u^4 - v^4)}{A} \\
&= \frac{4u^2v^2 + 4u^2 + 4u^4 + 4u^2v^2 + 4v^2 + 4v^4 + 2 + 4u^2v^2 - 2u^4 - 2v^4}{A} \\
&= \frac{2 + 12u^2v^2 + 4u^2 + 4v^2 + 2u^4 + 2v^4}{A} \\
M(u, v) &= \frac{1}{A}(-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2u^2v + 2v + 2v^3, 1 + 2u^2v^2 - u^4 - v^4) \cdot (2v, 2u, 0) \\
&= \frac{(2v)(-2uv^2 - 2u - 2u^3) + (2u)(2u^2v + 2v + 2v^3) + (0)(1 + 2u^2v^2 - u^4 - v^4)}{A} \\
&= \frac{-4uv^3 - 4uv - 4u^3v + 4u^3v + 4uv + 4uv^3}{A} \\
&= 0 \\
N(u, v) &= \frac{1}{A}(-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2u^2v + 2v + 2v^3, 1 + 2u^2v^2 - u^4 - v^4) \cdot (2u, -2v, -2) \\
&= \frac{(2u)(-2uv^2 - 2u - 2u^3) + (-2v)(2u^2v + 2v + 2v^3) + (-2)(1 + 2u^2v^2 - u^4 - v^4)}{A} \\
&= \frac{-4u^2v^2 - 4u^2 - 4u^4 - 4u^2v^2 - 4v^2 - 4v^4 - 2 - 4u^2v^2 + 2u^4 + 2v^4}{A} \\
&= -\frac{2 + 12u^2v^2 + 4u^2 + 4v^2 + 2u^4 + 2v^4}{A}.
\end{aligned}$$

Observando-se os resultados obtidos concluímos que  $E = G$  e  $L = -N$ . Para que a curvatura média  $H$  seja igual a zero é necessário que

$$EN - 2FM + LG = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
EN - 2FM + LG &= -EL - 2(0)(0) + LE \\
&= 0. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Ou seja, a superfície de Enneper é uma superfície mínima, desde que apresenta  $H = 0$ .

**Exemplo 16.** *Superfície Duplamente Periódica de Scherks*

Neste caso,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(u, v) &= \left( u, v, \ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right) \right) \\
\mathbf{r}_u(u, v) &= (1, 0, -\tan u) \\
\mathbf{r}_{uu}(u, v) &= (0, 0, -\sec^2 u) \\
\mathbf{r}_v(u, v) &= (0, 1, \tan v) \\
\mathbf{r}_{vv}(u, v) &= (0, 0, \sec^2 v) \\
\mathbf{r}_{uv}(u, v) &= \mathbf{r}_{vu}(u, v) \\
&= (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Desta maneira, os coeficientes da primeira forma fundamental podem ser escritos como segue

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= (1, 0, -\tan u) \cdot (1, 0, -\tan u) \\
&= 1 + \tan^2 u \\
&= \sec^2 u \\
F(u, v) &= (1, 0, -\tan u) \cdot (0, 1, \tan v) \\
&= -\tan u \tan v \\
G(u, v) &= (0, 1, \tan v) \cdot (0, 1, \tan v) \\
&= 1 + \tan^2 v \\
&= \sec^2 v.
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\tan u \\ 0 & 1 & \tan v \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}[(0)(\tan v) - (1)(-\tan u)] - \mathbf{j}[(1)(\tan v) - (0)(-\tan u)] + \mathbf{k}[(1)(1) - (0)(0)] \\
&= \mathbf{i}[\tan u] + \mathbf{j}[-\tan v] + \mathbf{k}[1]
\end{aligned}$$

e

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}. \quad (2.33)$$

Vamos nomear (2.33) por  $B$  para simplificar a análise. Então, o vetor normal unitário é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{B}(\tan u, -\tan v, 1)$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned}
L(u, v) &= \frac{1}{B}(\tan u, -\tan v, 1) \cdot (0, 0, -\sec^2 u) \\
&= \frac{-\sec^2 u}{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(u, v) &= \frac{1}{B}(\tan u, -\tan v, 1) \cdot (0, 0, 0) \\
&= 0 \\
N(u, v) &= \frac{1}{B}(\tan u, -\tan v, 1) \cdot (0, 0, \sec^2 v) \\
&= \frac{\sec^2 v}{B}.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
EN - 2FM + LG &= \frac{\sec^2 u \sec^2 v}{B} - 2(-\tan u \tan v)(0) - \frac{\sec^2 u \sec^2 v}{B} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Já que  $H = 0$ , a superfície duplamente periódica de Scherks é uma superfície mínima.

## Capítulo 3

# Cordas Relativísticas Clássicas

Neste capítulo introduziremos a idéia de cordas relativísticas clássicas [16–24], isto é, abordaremos o estudo da corda no espaço-tempo sem quantizá-la. Dedicaremos especial atenção à superfície gerada pelo movimento da corda no espaço-tempo. A área própria desta superfície será utilizada como a ação que é conhecida por **ação de Nambu-Goto**. Assim, poderemos também efetuar um paralelo com os resultados expostos ao longo dos dois capítulos anteriores, nos quais tratamos de alguns aspectos da geometria de superfícies e como definir e entender o que é uma superfície mínima. Tal conexão de idéias e resultados mostrar-se-á bastante fortuita, principalmente, por fornecer um melhor entendimento das características geometro-diferenciais da superfície traçada pela corda.

### 3.1 A Funcional Área para Superfícies Espaciais

Em Relatividade Especial, uma partícula movendo-se no espaço tempo traça uma linha denominada **linha de mundo** da partícula. Similarmente, cordas movendo-se no espaço-tempo formam uma superfície chamada **folha de mundo** da corda.

Sabemos ainda que no caso de uma partícula relativística, o tempo próprio multiplicado pela velocidade da luz  $c$  corresponde ao “comprimento próprio”  $ds$  invariante de Lorentz relativo à linha de mundo. Seguindo este raciocínio, definiremos a “área própria” da folha de mundo da corda que também será um invariante de Lorentz. E será na análise desta folha de mundo que explicitaremos algumas das principais características geométricas estudadas nos capítulos 1 e 2, como por exemplo, as duas primeiras formas fundamentais e as curvaturas gaussiana e média. Sendo a curvatura média  $H$  o que mostra se uma dada superfície é ou não é uma superfície mínima em  $\mathbf{R}^3$ . A ação de Nambu-Goto será, portanto, uma ação para a corda relativística clássica que estará relacionada a esta área própria.

No entanto, a fim de possibilitar um melhor entendimento das etapas que antecedem a formulação da ação de Nambu-Goto iremos considerar numa primeira análise que a superfície descrita pela movimentação da corda estende-se por apenas duas dimensões espaciais.

Ao contrário de uma linha, uma superfície no espaço não pode ser parametrizada por um único

parâmetro; de fato, uma superfície nestas condições requer dois parâmetros que denotaremos por  $\chi^1$  e  $\chi^2$ . Então, uma vez que tenhamos uma superfície parametrizada por esses dois parâmetros, podemos “revestir” a superfície como uma grade com linhas  $\chi^1$  e  $\chi^2$  constantes. É conveniente aqui a realização de algumas definições, a saber:

**Definição 3.1.1.** *O espaço no qual a superfície bidimensional “habita” será denominado **espaço alvo**.*

**Definição 3.1.2.** *Em termos de  $\chi^1$  e  $\chi^2$ , a superfície parametrizada é dada por*

$$\mathbf{r}(\chi^1, \chi^2) = (r^1(\chi^1, \chi^2), r^2(\chi^1, \chi^2), r^3(\chi^1, \chi^2)), \quad (3.1)$$

onde o **espaço dos parâmetros** é determinado pelo domínio ao qual pertence  $\chi^1$  e  $\chi^2$ .

É importante perceber também que ao menos localmente  $\chi^1$  e  $\chi^2$  podem ser entendidos como coordenadas sobre a superfície física, isto é, a superfície que se localiza no espaço alvo.

Para calcularmos a área de um elemento infinitesimal de uma superfície no espaço alvo vamos denotar os lados de um paralelogramo por  $d\mathbf{u}_1$  e  $d\mathbf{u}_2$  que são a imagem sob o mapa (3.1) de  $(d\chi^1, 0)$  e  $(0, d\chi^2)$  que estão no espaço dos parâmetros. Assim,

$$d\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1} d\chi^1 \quad \text{e} \quad d\mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2} d\chi^2. \quad (3.2)$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} dA &= \|d\mathbf{u}_1\| \|d\mathbf{u}_2\| |\sin \theta| \\ &= \|d\mathbf{u}_1\| \|d\mathbf{u}_2\| \sqrt{\sin^2 \theta} \\ &= \|d\mathbf{u}_1\| \|d\mathbf{u}_2\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{\|d\mathbf{u}_1\|^2 \|d\mathbf{u}_2\|^2 - \|d\mathbf{u}_1\|^2 \|d\mathbf{u}_2\|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{(d\mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{u}_1)(d\mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{u}_2) - (d\mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{u}_2)^2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $\theta$  corresponde ao ângulo entre  $d\mathbf{u}_1$  e  $d\mathbf{u}_2$ . Agora, substituindo (3.2) em (3.3),

$$\begin{aligned} dA &= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2}\right) (d\chi^1)^2 (d\chi^2)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2}\right)^2 (d\chi^1)^2 (d\chi^2)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2}\right)^2} ((d\chi^1)^2 (d\chi^2)^2) \\ &= d\chi^1 d\chi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Integrando (3.4), obtém-se

$$A = \int d\chi^1 d\chi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^2}\right)^2}, \quad (3.5)$$

onde  $A$  representa a funcional área total da região em estudo.



## 3.2 Reparametrização Invariante da Funcional Área

A área de qualquer região da superfície ou mesmo de toda a superfície deve ser invariante por reparametrização, ou seja, deve ser independente da parametrização adotada para efetuar-se o cálculo. Deste modo, nós podemos adotar uma parametrização adequada para uma determinada situação sem perda de conteúdo físico.

Neste íterim, nossa próxima tarefa consiste em mostrar que a funcional área expressa por (3.5) é realmente invariante por reparametrização. Faremos isso como segue:

De forma geral, precisamos mostrar que (3.5) permanece o mesmo se ao invés de  $\chi^1$  e  $\chi^2$  utilizarmos  $\chi'^1(\chi^1, \chi^2)$  e  $\chi'^2(\chi^1, \chi^2)$ . Contudo, para tornarmos esta característica evidente teremos que escrever (3.5) de um modo distinto.

Existe um teorema do cálculo que nos informa que para realizarmos uma mudança de variáveis é necessário calcular o módulo do determinante do Jacobiano da transformação, como exibido abaixo

$$\begin{aligned} d\chi'^1 d\chi'^2 &= \left| \det \left( \frac{\partial \chi'^j}{\partial \chi^k} \right) \right| d\chi^1 d\chi^2 \\ &= |\det N| d\chi^1 d\chi^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $N$  corresponde a matriz dada por  $N_{jk} = \partial \chi'^j / \partial \chi^k$ . Analogamente, temos

$$\begin{aligned} d\chi^1 d\chi^2 &= \left| \det \left( \frac{\partial \chi^j}{\partial \chi'^k} \right) \right| d\chi'^1 d\chi'^2 \\ &= |\det N'| d\chi'^1 d\chi'^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde  $N'$  corresponde a matriz dada por  $N'_{jk} = \partial \chi^j / \partial \chi'^k$ . Substituindo (3.7) em (3.6),

$$d\chi'^1 d\chi'^2 = |\det N| (|\det N'| d\chi'^1 d\chi'^2),$$

ou ainda,

$$|\det N| |\det N'| = 1. \quad (3.8)$$

Consideremos agora um superfície  $S$  no espaço alvo parametrizada por  $\mathbf{r}(\chi^1, \chi^2)$ . Então, tomando um  $d\mathbf{r}$  tangente à superfície obtemos que  $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$  assim como (1.22). No capítulo 1 vimos também que podemos escrever  $d\mathbf{r}$  como (1.1), onde usamos a convenção de soma. Desta maneira, também encontramos uma métrica induzida,

$$g_{jk} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^k}$$

que pode ser escrita como a matriz simétrica dos coeficientes da primeira forma fundamental exposta anteriormente. Em suma, até o presente momento, ao analisarmos a superfície bidimensional espacial traçada pelo movimento da corda apenas encontramos a primeira forma fundamental, isto é, encontramos a métrica sobre a superfície tal que assim como antes, nós podemos definir área, comprimentos e ângulos entre curvas na superfície em questão.

Portanto, a forma para a funcional área exibida em (3.5) possui em seu radicando a forma  $E(\chi^1, \chi^2)G(\chi^1, \chi^2) - F^2(\chi^1, \chi^2)$ .

Logo, denotando o determinante da forma matricial para  $g_{jk}$  por  $g$ , ou seja,  $g = \det(g_{jk})$ , escrevemos (3.5) como

$$A = \int d\chi^1 d\chi^2 \sqrt{g}. \quad (3.9)$$

É conveniente expressar (3.9) como acima, pois, conforme veremos neste capítulo, a ação de Nambu-Goto assume uma forma analogamente elegante o que facilita sua compreensão.

Mediante (3.9) podemos analisar a invariância por reparametrização da funcional área desde que sabemos que  $ds^2$  é um invariante e por este motivo não depende da parametrização escolhida. Tendo em vista este fato, a relação abaixo deve ser sempre verdadeira:

$$g_{jk}(\chi) d\chi^j d\chi^k = g'_{lm}(\chi') d\chi'^l d\chi'^m. \quad (3.10)$$

Assim,

$$g_{jk}(\chi) d\chi^j d\chi^k = g'_{lm}(\chi') \frac{\partial \chi'^l}{\partial \chi^j} \frac{\partial \chi'^m}{\partial \chi^k} d\chi^j d\chi^k. \quad (3.11)$$

A expressão (3.11), por sua vez, implica em

$$g_{jk}(\chi) = g'_{lm}(\chi') \frac{\partial \chi'^l}{\partial \chi^j} \frac{\partial \chi'^m}{\partial \chi^k}. \quad (3.12)$$

Usando a notação apresentada em (3.6) em (3.12),

$$\begin{aligned} g_{jk}(\chi) &= g'_{lm}(\chi') N_{lj} N_{mk} \\ &= (N^T)_{jl} g'_{lm}(\chi') N_{mk}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde o sobrescrito  $T$  na equação precedente significa *matriz transposta*. Tomando o determinante em ambos os lados de (3.13),

$$\begin{aligned} \det(g_{jk}(\chi)) &= \det((N^T)_{jl} g'_{lm}(\chi') N_{mk}) \\ &= \det((N^T)_{jl}) \det(g'_{lm}(\chi')) \det(N_{mk}), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} g &= \det(N^T) g' \det(N) \\ &= g' (\det(N))^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Então, substituindo (3.14) em (3.9)

$$\begin{aligned} A &= \int d\chi^1 d\chi^2 \sqrt{g' (\det(N))^2} \\ &= \int d\chi^1 d\chi^2 \sqrt{g'} |\det(N)|. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Finalmente, usando (3.7) e (3.8),

$$\begin{aligned}
A &= \int d\chi^1 d\chi'^2 |\det(N')| \sqrt{g'} |\det(N)| \\
&= \int d\chi^1 d\chi'^2 |\det(N')| |\det(N)| \sqrt{g'} \\
&= \int d\chi^1 d\chi'^2 \sqrt{g'}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

e a reparametrização invariante torna-se manifesta.

### 3.3 A Funcional Área para Superfícies Espaço-Temporais

Estamos agora em posição de analisar as características da folha de mundo gerada pela corda no espaço-tempo. Da mesma maneira que nós precisamos anteriormente, a fim de estudar essas superfícies espaço-temporais faz-se necessário o uso de dois parâmetros, os quais denotaremos por  $\tau$  e  $\sigma$ . Ainda, seguindo uma notação da teoria de cordas adotaremos

$$X^\mu(\tau, \sigma) \tag{3.17}$$

como sendo a parametrização da folha de mundo.

Uma vez que efetuamos a mudança nos parâmetros, tal que  $(\chi^1, \chi^2) \rightarrow (\tau, \sigma)$ , temos que o espaço dos parâmetros para a folha de mundo será dado pelo domínio ao qual  $\tau$  e  $\sigma$  pertencem. E o espaço alvo será o espaço no qual “vive” a superfície bidimensional espaço-temporal em analogia com o caso de superfícies bidimensionais espaciais. Por conseguinte, dado um ponto no espaço dos parâmetros, tal ponto será mapeado por

$$(X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), X^2(\tau, \sigma), \dots, X^N(\tau, \sigma)). \tag{3.18}$$

Outra convenção que adotaremos neste estudo será representar as coordenadas espaço-temporais por

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^N). \tag{3.19}$$

No caso de superfícies espaciais bidimensionais tratadas na última seção afirmamos que os parâmetros  $\chi^1$  e  $\chi^2$  podiam ser vistos localmente como coordenadas; na superfícies abordadas na seção atual, os parâmetros  $\tau$  e  $\sigma$  também podem ser entendidos localmente como sendo coordenadas sobre a folha de mundo da corda.

Como antes, nós desejamos calcular o elemento infinitesimal de área no espaço alvo. A diferença será que ao invés de usarmos a notação anterior, utilizaremos a notação apresentada em (3.18) e (3.19). Assim, similarmente a (3.2)

$$d\omega_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau \quad \text{e} \quad d\omega_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma \tag{3.20}$$

correspondem aos lados do paralelogramo no espaço alvo.

Neste momento, em virtude das similaridades entre as convenções e técnicas adotadas com a

seção anterior seria esperado, à primeira vista, um elemento infinitesimal de área dado da seguinte maneira

$$dA = d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right) - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (3.21)$$

e uma funcional área total escrita como

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right) - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2}. \quad (3.22)$$

Entretanto, surge aqui uma importante questão. Podemos realmente denotar o elemento de área infinitesimal e a funcional área total mediante (3.21) e (3.22)? Para obter esta resposta é preciso estudar o sinal no radicando de (3.21). O radicando em (3.21) é negativo e por isso as expressões corretas para o elemento de área e a funcional área total no espaço alvo são dadas por:

$$dA = d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right)} \quad (3.23)$$

e

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right)}. \quad (3.24)$$

Vamos agora mostrar isto.

Suponha um ponto  $P$  sobre a superfície no espaço-tempo e o conjunto dos vetores contidos no plano tangente à superfície em  $P$ , tal que obtemos um espaço vetorial bidimensional. Uma importante asserção diz respeito ao fato de que no espaço vetorial formado pelos vetores tangentes à superfície no ponto  $P$  há uma base constituída por um vetor tipo-tempo e um vetor tipo-espaço. Isto é, em cada ponto sobre a superfície existirá direções tangentes tipo-espaço e tipo-tempo.

Existe um detalhe importante agora. A teoria de cordas tem por premissa que a corda é uma entidade fundamental, ou seja, ela não apresenta constituintes os quais podemos determinar as posições, exceto as extremidades da corda aberta. Então, a ocorrência da base vetorial formada pelo vetor tipo-espaço e pelo vetor tipo-tempo representa uma condição para que a corda realize um movimento físico.

Essa condição pode ser facilmente compreendida, pois, desde que a corda é uma entidade fundamental, a não existência de um vetor tangente tipo-tempo à superfície espaço-temporal gerada por uma corda fechada impossibilitaria que observadores lorentzianos pudessem afirmar que o ponto onde estão encontra-se em repouso, o que claramente constitui-se numa situação fora da realidade física.

Por outro lado, o aparecimento do vetor tangente tipo-espaço como integrante da base vetorial se torna evidente quando, por exemplo, observamos a corda em um dado instante fixo no tempo, uma vez que todos os vetores tangentes ao longo do comprimento da corda estarão na direção tipo-espaço, ou seja, serão vetores tipo-espaço conforme introduzimos.

**Proposição 7.** *Desde que sempre exista uma direção tipo-espaço e uma direção tipo-tempo em todos os pontos sobre uma superfície  $S$  espaço-temporal, temos que*

$$\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right) > 0. \quad (3.25)$$

*Demonstração.* No caso abordado possuímos três formas de classificar um dado vetor  $\omega$  quanto ao fato deste vetor ser tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz. Tal classificação é feita mediante as condições abaixo.

Vetor tipo-espaço:

$$\omega^2 = g_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu > 0. \quad (3.26)$$

Vetor tipo-luz:

$$\omega^2 = g_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu = 0. \quad (3.27)$$

Vetor tipo-tempo:

$$\omega^2 = g_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu < 0. \quad (3.28)$$

Considere agora que podemos determinar todos os vetores tangentes  $\omega^\mu(C)$  à superfície num dado ponto  $P$ , onde  $-\infty < C < \infty$ , por

$$\omega^\mu(C) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + C \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (3.29)$$

Como mostrado acima, a fim de determinar se um vetor  $\omega$  é tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz precisamos tomar seu quadrado, daí, o quadrado de (3.29) fornece

$$\begin{aligned} \omega^2(C) &= \omega^\mu(C) \omega_\mu(C) \\ &= \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + C \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\right) \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} + C \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right) \\ &= \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) + C \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right) \\ &+ C \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) + C^2 \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right) \\ &= \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) + 2C \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right) \\ &+ C^2 \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

ou ainda, fazendo uso da notação de produto interno relativístico,

$$\omega^2(C) = C^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2C \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2. \quad (3.31)$$

Observemos que se aplicarmos a mesma notação para o produto interno relativístico exibida em (3.31) na expressão (3.25) encontramos

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 > 0. \quad (3.32)$$

Se nós queremos ter vetores tangentes tipo-espaço e tipo-tempo num dado ponto sobre a superfície, a equação (3.31) deve satisfazer as relações (3.26) e (3.28), respectivamente. Para que isto ocorra é necessário que

$$C^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2C \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 = 0 \quad (3.33)$$

possua duas raízes reais à medida que variarmos o parâmetro  $C$ . Isto será possível apenas se o discriminante  $\Delta$  de (3.33) for positivo, ou seja

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - 4\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - 4\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 > 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

uma vez que as soluções para  $C$  desta equação quadrática são

$$\begin{aligned} C &= \frac{-2\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) \pm 2\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2}}{2\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \\ &= \frac{-\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2}}{\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Portanto, nós podemos escrever a condição (3.34) simplesmente por

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 > 0 \quad (3.36)$$

e a asserção (3.25) está provada.  $\square$

### 3.4 Ação de Nambu-Goto

Vimos na seção precedente que (3.24) corresponde a forma correta para a funcional área total na folha de mundo da corda. Então, assim como afirmamos no começo deste capítulo, podemos relacionar (3.24) com a ação para a corda relativística clássica.

Para obtermos unidade de ação, a funcional área deve ser multiplicada por alguma constante. Tal constante como será mostrado em breve está relacionada à tensão na corda.

Como  $X^\mu$  tem unidade de comprimento  $L$ , a expressão (3.24) para a área funcional total possui unidades de comprimento ao quadrado  $L^2$ , conforme já era esperado. Assim, desde que a ação deve ter unidade  $ML^2/T$ , onde  $M$  seria a unidade de massa e  $T$  a unidade de tempo, faz-se necessário que a constante multiplicativa tenha unidade  $M/T$ .

Agora, recordemos que a tensão  $T_0$  possui unidade de força  $F$ ; a força dividida pela velocidade, por sua vez, apresenta a unidade requerida, isto é, possui unidade  $M/T$ . A fim de organizar estas idéias, vamos exprimi-las como segue

$$[\tau] = T, \quad [\sigma] = L, \quad [X^\mu] = L, \quad [A] = L^2, \quad (3.37)$$

$$[S] = ML^2/T, \quad [v] = L/T, \quad [F] = ML/T^2. \quad (3.38)$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{[F]}{[v]} &= \left(\frac{ML}{T^2}\right) \left(\frac{T}{L}\right) \\ &= \frac{M}{T}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Logo, como  $T_0$  tem unidade de força e a velocidade é dada pela velocidade da luz  $c$ , podemos reescrever (3.39) da seguinte forma

$$\frac{[T_0]}{[c]} = \frac{M}{T}. \quad (3.40)$$

Utilizaremos também uma notação para facilitar a visualização e compreensão sem perda de conteúdo físico. Tal notação é descrita abaixo

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad \text{e} \quad \bar{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (3.41)$$

**Proposição 8.** *A ação de Nambu-Goto será o produto de (3.24) por uma constante com unidade  $M/T$ , podendo ser escrita como*

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot \bar{X})^2 - (\dot{X})^2 (\bar{X})^2}. \quad (3.42)$$

*A ação (3.42) é a ação para a corda relativística clássica.*

*Demonstração.* Vamos justificar o sinal negativo na ação de Nambu-Goto e identificar apropriadamente  $T_0$  como a tensão na corda usando as idéias discutidas até aqui para resolver uma situação física simples, porém bastante instrutiva.

Suponhamos que as extremidades de uma corda aberta estejam fixas em  $x^1 = 0$  e  $x^1 = b$ , onde  $b > 0$  e todas as coordenadas para outras dimensões espaciais sejam nulas. Dessa forma, usando o denominado *gauge estático*  $X^0 = c\tau$ , as coordenadas da corda  $X^\mu$  se tornam

$$X^2 = X^3 = X^4 = \dots = X^N = 0 \quad (3.43)$$

e

$$X^1(\tau, \sigma) = h(\sigma), \quad (3.44)$$

de modo que

$$h(\sigma = 0) = 0 \quad \text{e} \quad h(\sigma = \sigma_f) = b. \quad (3.45)$$

Assim,

$$\dot{X}^0 = c, \quad \bar{X}^0 = 0, \quad \dot{X}^1 = 0, \quad \bar{X}^1 = \bar{h}(\sigma) \quad (3.46)$$

$$\dot{X}^2 = \dot{X}^3 = \dot{X}^4 = \dots = \dot{X}^N = 0 \quad (3.47)$$

$$\bar{X}^2 = \bar{X}^3 = \bar{X}^4 = \dots = \bar{X}^N = 0. \quad (3.48)$$

Pode-se por conveniência escrever (3.46), (3.47) e (3.48) de maneira compacta como segue

$$\dot{X}^\mu = (c, 0, \vec{0}) \quad \text{e} \quad \bar{X}^\mu = (0, \bar{h}(\sigma), \vec{0}). \quad (3.49)$$

Então,

$$\begin{aligned} (\dot{X})^2 &= \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu \\ &= (c, 0, \vec{0})(-c, 0, \vec{0}) \\ &= -c^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} (\bar{X})^2 &= \bar{X}^\mu \bar{X}_\mu \\ &= (0, \bar{h}(\sigma), \vec{0})(0, \bar{h}(\sigma), \vec{0}) \\ &= \bar{h}^2(\sigma) \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{X} \cdot \bar{X} &= \dot{X}^\mu \bar{X}_\mu \\ &= (c, 0, \vec{0})(0, \bar{h}(\sigma), \vec{0}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Com estes resultados podemos calcular (3.42) conforme realizado a seguir:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} d\sigma \sqrt{(0)^2 - (-c^2)^2 (\bar{h}^2(\sigma))^2} \\ &= -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} d\sigma c \sqrt{(\bar{h}^2(\sigma))^2} \\ &= -T_0 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} d\sigma \bar{h}(\sigma). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Contudo, lembremos que  $\bar{h}(\sigma) = dh(\sigma)/d\sigma$ , e por isso (3.53) fica



$$\begin{aligned}
S &= -T_0 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} d\sigma \frac{dh(\sigma)}{d\sigma} \\
&= -T_0 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} dh(\sigma) \\
&= -T_0 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [h(\sigma_f) - h(0)] \\
&= (-T_0 b) \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

A equação (3.54) nos informa bastante a respeito da física do problema. Neste ponto, deve-se recordar que a ação  $S$  é dada por

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L dt, \tag{3.55}$$

onde fizemos a identificação  $\tau = t$ . Em (3.55),  $L$  representa a lagrangeana do sistema que, por sua vez, é escrita como sendo

$$L = K_c - V \tag{3.56}$$

com  $K_c$  correspondendo à energia cinética e  $V$  é a energia potencial. No entanto, desde que a corda é estática, a energia cinética desaparece, isto é,  $K_c = 0$ . Consequentemente, sabendo que a energia cinética é nula e comparando (3.54) e (3.55), encontramos

$$S = \int_{t_i}^{t_f} (-V) dt, \tag{3.57}$$

onde  $V = T_0 b$ . É importante salientar que a tensão  $T_0$ , como já dissemos, apresenta unidade de força, todavia, a força possui unidade de energia por comprimento e a energia  $E$  têm unidade de massa multiplicada pela velocidade ao quadrado, ou seja

$$\begin{aligned}
[T_0] &= \frac{[E]}{L} \\
&= \frac{M[c]^2}{L} \\
&= [\mu_0][c]^2,
\end{aligned} \tag{3.58}$$

onde  $\mu_0$  corresponde à massa de repouso por unidade de comprimento. Agora, como relacionar isto com o fato de que a energia potencial  $V = T_0 b$ ? Tendo em vista os resultados apresentados e as condições às quais a corda está submetida a resposta para esta pergunta é fácil, pois, se  $T_0$

corresponde à tensão na corda estática, a quantidade  $T_0 b$  representa a porção de trabalho requerido para gerar uma corda de comprimento  $b$ . Outrossim, à medida que a corda recebe energia por este mecanismo, ela está adquirindo massa de repouso. Por fim, de (3.58), obtemos para a massa de repouso por unidade de comprimento  $\mu_0$ :

$$\mu_0 c^2 = \frac{V}{b} \rightarrow \mu_0 = \frac{T_0}{c^2} \quad (3.59)$$

Neste íterim concluímos que  $T_0$  corresponde realmente a tensão na corda conforme afirmamos anteriormente. Além disso, o sinal negativo na equação de Nambu-Goto (3.42) encontra-se agora justificado, já que, se o sinal negativo não aparecesse em (3.42), a energia potencial  $V = T_0 b$  seria negativa!

Um detalhe importante desta demonstração diz respeito a saber se (3.43) e (3.44) são situações físicas possíveis para corda relativística clássica. Em outras palavras, precisamos averiguar se estas condições satisfazem ou não as equações de movimento. No entanto, após introduzirmos as equações de movimento associadas à ação de Nambu-Goto no final deste capítulo junto com as condições de contorno necessárias isto se tornará claro.  $\square$

Foi verificado na seção (3.2) do presente capítulo que a funcional área total escrita da maneira elegante (3.9) para superfícies bidimensionais espaciais era invariante por reparametrização. Do mesmo modo, é simples notar que a invariância por reparametrização se mantém para a equação de Nambu-Goto, o que mostra que a funcional área para superfícies espaço-temporais também possui esta propriedade de invariância, desde que a ação de Nambu-Goto é fundamentalmente a funcional área total para a folha de mundo da corda relativística clássica multiplicada por uma constante, na qual foi identificadas informações a respeito da tensão na corda. Dito isto, vamos também escrever a seguir a equação de Nambu-Goto elegantemente, tal que seu manuseio e entendimento se tornem mais simples.

Analogamente ao caso de superfícies bidimensionais no espaço, temos:

$$\begin{aligned} dX_\mu dX^\mu &= \eta_{\nu\mu} dX^\nu dX^\mu \\ &= \eta_{\nu\mu} \frac{\partial X^\nu}{\partial \chi^\alpha} \frac{\partial X^\mu}{\partial \chi^\beta} d\chi^\alpha d\chi^\beta \\ &= \gamma_{\alpha\beta} d\chi^\alpha d\chi^\beta, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde  $\eta_{\nu\mu} = \eta_{\mu\nu}$  corresponde à métrica no espaço alvo. E

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\nu\mu} \frac{\partial X^\nu}{\partial \chi^\alpha} \frac{\partial X^\mu}{\partial \chi^\beta}, \quad (3.61)$$

ou simplesmente

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X}{\partial \chi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \chi^\beta}, \quad (3.62)$$

onde novamente foi utilizada a notação para o produto interno relativístico.

Assim, fazendo uso da notação exibida em (3.41) e adotando  $\chi^1 = \tau$  e  $\chi^2 = \sigma$ , podemos escrever (3.62) na forma matricial como feito abaixo

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot \bar{X} \\ \bar{X} \cdot \dot{X} & (\bar{X})^2 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Tomando o determinante da matriz (3.63), encontramos

$$\begin{aligned} \gamma &= (\dot{X})^2(\bar{X})^2 - (\bar{X} \cdot \dot{X})(\dot{X} \cdot \bar{X}) \\ &= (\dot{X})^2(\bar{X})^2 - (\dot{X} \cdot \bar{X})^2, \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde usamos  $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$ .

Comparando (3.64) com o radicando da equação de Nambu-Goto (3.42), obtemos

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}. \quad (3.65)$$

Como podemos ver a equação compacta acima possui toda a informação física discutida neste capítulo até o momento. De fato, a equação de Nambu-Goto nesta forma compacta, além de ser demasiada simples para ser manuseada, apresenta ainda a invariância por reparametrização de maneira clara e possui informações relacionadas as propriedades geométricas da folha de mundo da corda.

Esta última asserção merece uma atenção especial, uma vez que no primeiro capítulo introduzimos os conceitos de primeira e segunda formas fundamentais, curvatura e superfícies mínimas em  $\mathbf{R}^3$ .

A curvatura média e o conceito de superfícies mínimas serão melhor explorados após estudarmos as equações de movimento para a ação (3.65). No entanto, nós podemos discutir agora alguns aspectos que conectam os tópicos discutidos neste capítulo, principalmente a equação de Nambu-Goto, a idéia de formas fundamentais e as curvaturas normal e gaussiana denotadas respectivamente por  $\kappa_n$  e  $K$ . Para cumprir este intento, vamos olhar a informação contida no radicando de (3.65) cuidadosamente.

Sabemos que a funcional área total para a folha de mundo é dada por (3.24), porém, podemos reescrevê-la usando (3.64) como segue

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}. \quad (3.66)$$

Então, ao compararmos a expressão para a área de uma região em  $\mathbf{R}^3$  em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental calculada na página 9 do capítulo 1 à equação (3.64) e (3.66), podemos notar a similaridade. Dessa semelhança concluímos que (3.66) também pode ser escrito em função dos coeficientes  $E(\tau, \sigma)$ ,  $F(\tau, \sigma)$  e  $G(\tau, \sigma)$ , isto é

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{F^2(\tau, \sigma) - E(\tau, \sigma)G(\tau, \sigma)}, \quad (3.67)$$

onde

$$E(\tau, \sigma) = (\dot{X})^2, \quad F(\tau, \sigma) = (\dot{X} \cdot \bar{X}) \quad \text{e} \quad G(\tau, \sigma) = (\bar{X})^2. \quad (3.68)$$

Ciente destes resultados, podemos encontrar os coeficientes  $L(\tau, \sigma)$ ,  $M(\tau, \sigma)$  e  $N(\tau, \sigma)$  da segunda forma fundamental. A fim de obter estes coeficientes é preciso calcular-se o vetor unitário normal à folha de mundo. Portanto, já que as coordenadas da corda são  $X^\mu$ , obtém-se que

$$\dot{X} \bar{\times} \bar{X}, \quad (3.69)$$

onde  $\bar{\times}$  será a notação para o produto vetorial lorentziano. O produto vetorial de  $B$  e  $R$  pertencentes ao espaço-tempo de Lorentz com a métrica exposta em (3.50) é definido por [20]

$$B \bar{\times} R = \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix}$$

e portanto, (3.69) corresponde ao vetor normal num determinado ponto da superfície, e

$$\|\dot{X} \bar{\times} \bar{X}\| \quad (3.70)$$

é a norma do vetor normal. Daí, o vetor unitário normal num ponto dado da folha de mundo que denotaremos simplesmente por  $V_n$  será

$$V_n = \frac{\dot{X} \bar{\times} \bar{X}}{\|\dot{X} \bar{\times} \bar{X}\|}. \quad (3.71)$$

Entretanto, antes de prosseguirmos existem detalhes importantes que devem ser observados, pois haverá algumas diferenças relevantes quanto aos resultados similares que foram esmiuçados no primeiro capítulo.

Olhando (3.67) e a definição (1.1.3.) da página 9 com atenção, torna-se manifesto que a identidade (1.8) não é aplicável em (3.70). Em outras palavras, de (3.67) percebemos que a identidade (1.8) para o caso em que lidamos com a superfície espaço-temporal bidimensional gerada por uma corda deve ser apresentada da seguinte maneira:

$$(A \bar{\times} B) \cdot (C \bar{\times} D) = \begin{vmatrix} A \cdot D & B \cdot D \\ A \cdot C & B \cdot C \end{vmatrix}. \quad (3.72)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \|\dot{X} \bar{\times} \bar{X}\|^2 &= (\dot{X} \bar{\times} \bar{X}) \cdot (\dot{X} \bar{\times} \bar{X}) \\ &= \det \begin{bmatrix} \dot{X} \cdot \bar{X} & \bar{X} \cdot \bar{X} \\ \dot{X} \cdot \dot{X} & \bar{X} \cdot \dot{X} \end{bmatrix} \\ &= (\dot{X} \cdot \bar{X})(\bar{X} \cdot \dot{X}) - (\dot{X} \cdot \dot{X})(\bar{X} \cdot \bar{X}) \\ &= (\dot{X} \cdot \bar{X})^2 - (\dot{X} \cdot \dot{X})(\bar{X} \cdot \bar{X}) \\ &= F^2(\tau, \sigma) - E(\tau, \sigma)G(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Usando (3.73) podemos escrever (3.67) de modo similar ao feito no capítulo 1 para superfícies em  $\mathbf{R}^3$ , ou seja

$$A = \int d\tau d\sigma \|\dot{X} \bar{\times} \bar{X}\|. \quad (3.74)$$

Tendo explicado isto, nós vamos agora retornar ao detalhamento do procedimento para a obtenção dos coeficientes da segunda forma fundamental para a folha de mundo da corda.

Uma vez que possuímos o vetor unitário normal (3.71), os coeficientes  $L(\tau, \sigma)$ ,  $M(\tau, \sigma)$  e  $N(\tau, \sigma)$  serão obtidos como mostrado abaixo:

$$L(\tau, \sigma) = V_n \cdot \ddot{X}, \quad M(\tau, \sigma) = V_n \cdot \dot{\bar{X}} \quad \text{e} \quad N(\tau, \sigma) = V_n \cdot \ddot{\bar{X}}, \quad (3.75)$$

onde

$$\ddot{X} = \frac{\partial \dot{X}}{\partial \tau}, \quad \dot{\bar{X}} = \frac{\partial \dot{X}}{\partial \sigma} \quad \text{e} \quad \ddot{\bar{X}} = \frac{\partial \dot{\bar{X}}}{\partial \sigma}. \quad (3.76)$$

Notemos também que  $\dot{\bar{X}} = \dot{X}$ .

Utilizando estes resultados, a primeira e a segunda forma fundamental da folha de mundo denotadas respectivamente por  $I$  e  $II$  é escrita como feito a seguir:

$$I = E(\tau, \sigma)d\tau^2 + 2F(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + G(\tau, \sigma)d\sigma^2 \quad (3.77)$$

e

$$II = L(\tau, \sigma)d\tau^2 + 2M(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + N(\tau, \sigma)d\sigma^2. \quad (3.78)$$

Lembremos que a curvatura normal  $\kappa_n$  corresponde a razão entre as duas primeiras formas fundamentais, isto é

$$\kappa_n = \frac{L(\tau, \sigma)d\tau^2 + 2M(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + N(\tau, \sigma)d\sigma^2}{E(\tau, \sigma)d\tau^2 + 2F(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + G(\tau, \sigma)d\sigma^2}. \quad (3.79)$$

No primeiro capítulo definimos também o mapa de Weingarten  $W$  em (1.25) para o caso de superfícies espaciais. Este mapa foi de fundamental relevância para a construção das idéias de formas fundamentais, curvatura e superfícies mínimas vislumbradas nos capítulos 1 e 2 de maneira introdutória. Pois bem, analogamente ao que foi apresentado em (1.25), temos que o mapa de Weingarten  $W$  para a folha de mundo será definido por

$$WU = -\nabla_U^E V_n, \quad (3.80)$$

onde  $U = \dot{X}$  ou  $U = \bar{X}$ ,  $V_n$  é o vetor unitário normal exibido em (3.71) e o sobrescrito  $E$  serve para indicar que esta operação está situada no espaço externo ao da folha de mundo. Similarmente a (1.27), podemos escrever a segunda forma fundamental para a folha de mundo da corda utilizando o mapa de Weingarten (3.80), obtendo

$$\begin{aligned} II(\dot{X}, \bar{X}) &= W\dot{X} \cdot \bar{X} \\ &= -(V_n)_\tau \cdot X_\sigma \\ &= X_{\tau\sigma} \cdot V_n. \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde adotamos a notação  $\dot{X} = X_\tau$  e  $\bar{X} = X_\sigma$ .

De acordo com (AKUTAGAWA, NISHIKAWA, 1990 [24]), nós podemos ainda usar (1.37) para

obter a curvatura gaussiana  $K$  para o presente caso adicionando apenas um sinal negativo no lado direito, sendo que o mesmo se aplica a expressão (1.38), se a superfície em  $SO(1, 2)$  é tipo-espaço, logo, para esta situação as relações (1.36) podem ser denotadas por

$$H = -\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad \text{e} \quad K = -\kappa_1\kappa_2.$$

No entanto, neste caso estamos considerando que o vetor unitário normal será sempre tipo-espaço, então podemos usar (1.37) para determinar a curvatura gaussiana  $K$  [21], desde que utilizemos (3.72) ao invés da identidade (1.8) e substituamos  $U$  e  $V$  por  $X_\tau$  e  $X_\sigma$  conforme mostraremos agora. Considere:

$$WX_\tau \bar{\times} WX_\sigma = K(X_\tau \bar{\times} X_\sigma). \quad (3.82)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.82) por  $(X_\tau \bar{\times} X_\sigma)$ , obtém-se

$$(WX_\tau \bar{\times} WX_\sigma)(X_\tau \bar{\times} X_\sigma) = K(X_\tau \bar{\times} X_\sigma)(X_\tau \bar{\times} X_\sigma). \quad (3.83)$$

Então, utilizando a identidade (3.72) em (3.83),

$$(X_\tau \bar{\times} X_\sigma)(X_\tau \bar{\times} X_\sigma) = \begin{vmatrix} X_\tau \cdot X_\sigma & X_\sigma \cdot X_\sigma \\ X_\tau \cdot X_\tau & X_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix} \quad (3.84)$$

e

$$(WX_\tau \bar{\times} WX_\sigma)(X_\tau \bar{\times} X_\sigma) = \begin{vmatrix} WX_\tau \cdot X_\sigma & WX_\sigma \cdot X_\sigma \\ WX_\tau \cdot X_\tau & WX_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix}. \quad (3.85)$$

Já que determinantes são números, obtemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{\begin{vmatrix} WX_\tau \cdot X_\sigma & WX_\sigma \cdot X_\sigma \\ WX_\tau \cdot X_\tau & WX_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_\tau \cdot X_\sigma & X_\sigma \cdot X_\sigma \\ X_\tau \cdot X_\tau & X_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -(V_n)_\tau \cdot X_\sigma & -(V_n)_\sigma \cdot X_\sigma \\ -(V_n)_\tau \cdot X_\tau & -(V_n)_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_\tau \cdot X_\sigma & X_\sigma \cdot X_\sigma \\ X_\tau \cdot X_\tau & X_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(X_{\sigma\tau} \cdot V_n)(X_{\tau\sigma} \cdot V_n) - (X_{\tau\tau} \cdot V_n)(X_{\sigma\sigma} \cdot V_n)}{(X_\tau \cdot X_\sigma)(X_\sigma \cdot X_\tau) - (X_\tau \cdot X_\tau)(X_\sigma \cdot X_\sigma)} \\ &= \frac{(X_{\sigma\tau} \cdot V_n)^2 - (X_{\tau\tau} \cdot V_n)(X_{\sigma\sigma} \cdot V_n)}{(X_\tau \cdot X_\sigma)^2 - (X_\tau \cdot X_\tau)(X_\sigma \cdot X_\sigma)} \\ &= \frac{M^2(\tau, \sigma) - L(\tau, \sigma)N(\tau, \sigma)}{F^2(\tau, \sigma) - E(\tau, \sigma)G(\tau, \sigma)}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

### 3.5 Equações de Movimento

A fim de encontrar as equações de movimento, nós devemos tomar o variacional da equação (3.42), tal que  $\delta S = 0$ . Para tal empreitada, escrevamos (3.42) da seguinte maneira:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} \mathbf{L}(\dot{X}^\mu, \bar{X}^\mu) d\sigma, \quad (3.87)$$

onde

$$\mathbf{L}(\dot{X}^\mu, \bar{X}^\mu) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot \bar{X})^2 - (\dot{X})^2 (\bar{X})^2}. \quad (3.88)$$

A expressão (3.88) é denominada **densidade lagrangeana**. Portanto, aplicando  $\delta S = 0$  em (3.87),

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} \left[ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{X}^\mu} \delta \bar{X}^\mu \right] d\sigma \quad (3.89)$$

tal que

$$\delta \dot{X}^\mu = \frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \tau} = \frac{\delta \partial X^\mu}{\partial \tau} \quad \text{e} \quad \delta \bar{X}^\mu = \frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \sigma} = \frac{\delta \partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (3.90)$$

Utilizando (3.90) reescrevemos (3.89) como

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} \left[ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{X}^\mu} \frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \sigma} \right] d\sigma, \quad (3.91)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{X}^\mu} &= -\frac{T_0}{c} \frac{2(\dot{X} \cdot \bar{X}) \bar{X}_\mu - 2\dot{X}_\mu (\bar{X})^2}{2\sqrt{(\dot{X} \cdot \bar{X})^2 - (\dot{X})^2 (\bar{X})^2}} \\ &= -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot \bar{X}) \bar{X}_\mu - \dot{X}_\mu (\bar{X})^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot \bar{X})^2 - (\dot{X})^2 (\bar{X})^2}} \end{aligned} \quad (3.92)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{X}^\mu} &= -\frac{T_0}{c} \frac{2(\dot{X} \cdot \bar{X}) \dot{X}_\mu - 2\bar{X}_\mu (\dot{X})^2}{2\sqrt{(\dot{X} \cdot \bar{X})^2 - (\dot{X})^2 (\bar{X})^2}} \\ &= -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot \bar{X}) \dot{X}_\mu - \bar{X}_\mu (\dot{X})^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot \bar{X})^2 - (\dot{X})^2 (\bar{X})^2}}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Vamos nomear (3.92) por  $\dot{Q}_\mu$  e (3.93) por  $\bar{Q}_\mu$  para obtermos uma melhor compreensão sobre a física envolvida. Fazendo uso desta notação e de alguma manipulação matemática, temos que (3.91) se torna

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} \left[ \dot{Q}_\mu \frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \tau} + \bar{Q}_\mu \frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \sigma} \right] d\sigma \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} \left[ -\delta X^\mu \left( \frac{\partial \dot{Q}_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{Q}_\mu}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial (\dot{Q}_\mu \delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial (\bar{Q}_\mu \delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Uma vez que os estados final e inicial da corda são determinados, nós podemos sempre escolher

$$\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0, \quad (3.95)$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} \left[ -\delta X^\mu \left( \frac{\partial \dot{Q}_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{Q}_\mu}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial (\bar{Q}_\mu \delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] d\sigma \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} \left[ -\delta X^\mu \left( \frac{\partial \dot{Q}_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{Q}_\mu}{\partial \sigma} \right) \right] d\sigma + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\bar{Q}_\mu \delta X^\mu]_0^{\sigma_f}.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Agora, olhando para o segundo termo em (3.96) percebe-se que podemos impor condições de contorno sobre as extremidades da corda. Notemos ainda que estamos lidando com cordas abertas e por isso há a necessidade de condições de contorno, todavia, não haverão condições de contorno a serem impostas no caso de cordas fechadas [16].

Tais condições são mostradas a seguir:

Condição de Contorno de Dirichlet

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma = 0) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma = \sigma_f) = 0. \tag{3.97}$$

Ou seja, as extremidades da corda permanecem fixas no decorrer do tempo. Logo,

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma = 0) = \delta X^\mu(\tau, \sigma = \sigma_f) = 0. \tag{3.98}$$

Condição de Contorno Livre

$$\bar{Q}_\mu(\tau, \sigma = 0) = \bar{Q}_\mu(\tau, \sigma = \sigma_f) = 0. \tag{3.99}$$

A condição (3.99) representa o caso em que as extremidades da corda são livres.

Um detalhe importante a ser mencionado a respeito destas condições é que elas não precisam ser as mesmas para todas as coordenadas da corda  $X^\mu$ , como aliás seria de se esperar.

Mediante as condições de contorno explicitadas acima, (3.96) fica

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_f} \left[ -\delta X^\mu \left( \frac{\partial \dot{Q}_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{Q}_\mu}{\partial \sigma} \right) \right] d\sigma. \tag{3.100}$$

De (3.100) conclui-se que as equações de movimento tanto para cordas abertas que obedecem as condições (3.97) e (3.99) quanto para cordas fechadas são dadas simplesmente por

$$\frac{\partial \dot{Q}_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{Q}_\mu}{\partial \sigma} = 0, \tag{3.101}$$

desde que  $\delta S = 0$ .

A relevância da expressão (3.101) no estudo de superfícies mínimas no espaço-tempo é manifestamente clara, já que sabemos da Mecânica Analítica que a condição  $\delta S = 0$  juntamente com os tópicos discutidos nesta seção nos informam que a superfície definida por equações que satisfazem



a equação de movimento (3.101) para cordas relativísticas não quantizadas corresponde a uma superfície minimal.

Em resumo, ao estudarmos a folha de mundo de uma corda, se nós queremos saber se a superfície espaço-temporal em questão corresponde a uma superfície mínima é suficiente verificar se as equações de movimento acima citadas são satisfeitas. Em contrapartida, assim como foi feito no primeiro capítulo desta dissertação, nós podemos definir a curvatura média  $H$  como uma forma de analisar propriedades de uma dada superfície em  $SO(1,2)$ .

Para concluir este capítulo vamos estudar como a curvatura média  $H$  é definida quando a superfície está no espaço-tempo, de forma que tenhamos que levar em consideração o produto vetorial lorentziano  $\bar{\times}$  mostrado na seção 3.4.

Considere

$$(WX_\tau \bar{\times} X_\sigma) + (X_\tau \bar{\times} WX_\sigma) = 2H(X_\tau \bar{\times} X_\sigma), \quad (3.102)$$

onde  $W$  é o mapa de Weingarten (3.80) e a  $H$  é a curvatura média. Multiplicando ambos os lados de (3.102) por  $(X_\tau \bar{\times} X_\sigma)$ , encontramos

$$[(WX_\tau \bar{\times} X_\sigma) + (X_\tau \bar{\times} WX_\sigma)](X_\tau \bar{\times} X_\sigma) = 2H(X_\tau \bar{\times} X_\sigma)(X_\tau \bar{\times} X_\sigma). \quad (3.103)$$

Daí, fazendo uso da identidade (3.72) e de (3.80),

$$\begin{aligned} (WX_\tau \bar{\times} X_\sigma)(X_\tau \bar{\times} X_\sigma) &= \begin{vmatrix} WX_\tau \cdot X_\sigma & X_\sigma \cdot X_\sigma \\ WX_\tau \cdot X_\tau & X_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix} \\ &= (WX_\tau \cdot X_\sigma)(X_\sigma \cdot X_\tau) - (WX_\tau \cdot X_\tau)(X_\sigma \cdot X_\sigma) \\ &= (-(V_n)_\tau \cdot X_\sigma)(X_\sigma \cdot X_\tau) - (-(V_n)_\tau \cdot X_\tau)(X_\sigma \cdot X_\sigma) \\ &= (X_{\tau\sigma} \cdot V_n)(X_\sigma \cdot X_\tau) - (X_{\tau\tau} \cdot V_n)(X_\sigma \cdot X_\sigma) \\ &= M(\tau, \sigma)F(\tau, \sigma) - L(\tau, \sigma)G(\tau, \sigma) \end{aligned} \quad (3.104)$$

e

$$\begin{aligned} (X_\tau \bar{\times} WX_\sigma)(X_\tau \bar{\times} X_\sigma) &= \begin{vmatrix} X_\tau \cdot X_\sigma & WX_\sigma \cdot X_\sigma \\ X_\tau \cdot X_\tau & WX_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix} \\ &= (X_\tau \cdot X_\sigma)(WX_\sigma \cdot X_\tau) - (X_\tau \cdot X_\tau)(WX_\sigma \cdot X_\sigma) \\ &= (X_\tau \cdot X_\sigma)(-(V_n)_\sigma \cdot X_\tau) - (X_\tau \cdot X_\tau)(-(V_n)_\sigma \cdot X_\sigma) \\ &= (X_\tau \cdot X_\sigma)(X_{\tau\sigma} \cdot V_n) - (X_\tau \cdot X_\tau)(X_{\sigma\sigma} \cdot V_n) \\ &= F(\tau, \sigma)M(\tau, \sigma) - E(\tau, \sigma)N(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Agora, através de (3.86), (3.104) e (3.105), (3.103) pode ser denotado por

$$2H = \frac{\begin{vmatrix} WX_\tau \cdot X_\sigma & X_\sigma \cdot X_\sigma \\ WX_\tau \cdot X_\tau & X_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_\tau \cdot X_\sigma & WX_\sigma \cdot X_\sigma \\ X_\tau \cdot X_\tau & WX_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_\tau \cdot X_\sigma & X_\sigma \cdot X_\sigma \\ X_\tau \cdot X_\tau & X_\sigma \cdot X_\tau \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M(\tau, \sigma)F(\tau, \sigma) - L(\tau, \sigma)G(\tau, \sigma) + F(\tau, \sigma)M(\tau, \sigma) - E(\tau, \sigma)N(\tau, \sigma)}{F^2(\tau, \sigma) - E(\tau, \sigma)G(\tau, \sigma)} \\
&= \frac{2M(\tau, \sigma)F(\tau, \sigma) - L(\tau, \sigma)G(\tau, \sigma) - E(\tau, \sigma)N(\tau, \sigma)}{F^2(\tau, \sigma) - E(\tau, \sigma)G(\tau, \sigma)}. \tag{3.106}
\end{aligned}$$

## Capítulo 4

# Aspectos Geômetro-Diferenciais das Superfícies Espaço-Temporais

Neste capítulo trataremos da análise de aspectos geômetro-diferenciais de algumas superfícies no espaço-tempo apresentadas no capítulo 3, tais como as formas fundamentais e curvaturas normal, gaussiana e média, considerando entretanto que o vetor unitário normal será sempre tipo-tempo. Os casos abordados serão o helicóide, catenóide e superfície de Enneper de primeiro tipo no espaço-tempo [20, 21, 24, 25].

### 4.1 Helicóide de Primeiro Tipo em $SO(1, 2)$

A parametrização para esta superfície é dada por [20]

$$X(u, v) = (-v, -\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v), \quad (4.1)$$

então, lembrando que a métrica adotada neste estudo é  $(-, +, +)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} X_v(u, v) &= (-1, \cosh u \sin v, -\cosh u \cos v) \\ X_{vv}(u, v) &= (0, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v) \\ X_u(u, v) &= (0, -\sinh u \cos v, -\sinh u \sin v) \\ X_{uu}(u, v) &= (0, -\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v) \\ X_{vu}(u, v) &= X_{uv}(u, v) \\ &= (0, \sinh u \sin v, -\sinh u \cos v). \end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  e  $G(u, v)$  serão

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (-1, \cosh u \sin v, -\cosh u \cos v) \cdot (1, \cosh u \sin v, -\cosh u \cos v) \\ &= -1 + \cosh^2 u \sin^2 v + \cosh^2 u \cos^2 v \\ &= -1 + \cosh^2 u (\sin^2 v + \cos^2 v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + \cosh^2 u \\
&= \sinh^2 u \\
F(u, v) &= (-1, \cosh u \sin v, -\cosh u \cos v) \cdot (0, -\sinh u \cos v, -\sinh u \sin v) \\
&= 0 - \sinh u \cosh u \sin v \cos v + \sinh u \cosh u \sin v \cos v \\
&= 0 \\
G(u, v) &= (0, -\sinh u \cos v, -\sinh u \sin v) \cdot (0, -\sinh u \cos v, -\sinh u \sin v) \\
&= \sinh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u \sin^2 v \\
&= \sinh^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) \\
&= \sinh^2 u.
\end{aligned}$$

Desta maneira, a primeira forma fundamental  $I$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
I &= \sinh^2 u dv^2 + 2(0)dvdu + \sinh^2 u du^2 \\
&= \sinh^2 u dv^2 + \sinh^2 u du^2 \\
&= \sinh^2 u (dv^2 + du^2).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

O vetor normal à superfície é dado por

$$\begin{aligned}
X_u \bar{\times} X_v &= \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & -\sinh u \cos v & -\sinh u \sin v \\ -1 & \cosh u \sin v & -\cosh u \cos v \end{vmatrix} \\
&= -e_0 [(-\sinh u \cos v)(-\cosh u \cos v) - (\cosh u \sin v)(-\sinh u \sin v)] \\
&\quad - e_1 [(0)(-\cosh u \cos v) - (-1)(-\sinh u \sin v)] \\
&\quad + e_2 [(0)(\cosh u \sin v) - (-1)(-\sinh u \cos v)] \\
&= e_0 [-\sinh u \cosh u (\cos^2 v + \sin^2 v)] + e_1 [(\sinh u \sin v)] \\
&\quad + e_2 [(-\sinh u \cos v)] \\
&= e_0 [-\sinh u \cosh u] + e_1 [(\sinh u \sin v)] + e_2 [(-\sinh u \cos v)].
\end{aligned}$$

Cabe aqui ressaltar que mediante [20, 21], sabe-se que a norma do vetor normal consiste em  $\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}$ , desde que tal vetor normal será sempre tipo-tempo nesta análise. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
\|X_u \bar{\times} X_v\| &= \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \\
&= \sqrt{(\sinh^2 u)(\sinh^2 u) - (0)^2} \\
&= \sinh^2 u.
\end{aligned}$$

Com estes resultados, o vetor unitário normal  $V_n$  denota-se como:

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{1}{\sinh^2 u} (e_0 [-\sinh u \cosh u] + e_1 [(\sinh u \sin v)] + e_2 [(-\sinh u \cos v)]) \\
&= e_0 \left( -\frac{\cosh u}{\sinh u} \right) + e_1 \left( \frac{\sin v}{\sinh u} \right) + e_2 \left( -\frac{\cos v}{\sinh u} \right).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Logo, os coeficientes da segunda forma fundamental  $L(u, v)$ ,  $M(u, v)$  e  $N(u, v)$  são

$$\begin{aligned}
L(u, v) &= (0, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v) \cdot \left( -\frac{\cosh u}{\sinh u}, \frac{\sin v}{\sinh u}, -\frac{\cos v}{\sinh u} \right) \\
&= +\frac{\cosh u \cos v \sin v}{\sinh u} - \frac{\cosh u \cos v \sin v}{\sinh u} \\
&= 0 \\
M(u, v) &= (0, \sinh u \sin v, -\sinh u \cos v) \cdot \left( -\frac{\cosh u}{\sinh u}, \frac{\sin v}{\sinh u}, -\frac{\cos v}{\sinh u} \right) \\
&= \sin^2 v + \cos^2 v \\
&= 1 \\
N(u, v) &= (0, -\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v) \cdot \left( -\frac{\cosh u}{\sinh u}, \frac{\sin v}{\sinh u}, -\frac{\cos v}{\sinh u} \right) \\
&= -\frac{\cosh u \cos v \sin v}{\sinh u} + \frac{\cosh u \cos v \sin v}{\sinh u} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, a segunda forma fundamental  $II$  para a superfície é

$$\begin{aligned}
II &= (0)dv^2 + 2(1)dvdu + (0)du^2 \\
&= 2dvdu.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Outrossim, conforme afirmado no capítulo anterior, no caso em que o vetor unitário normal é sempre tipo-tempo um sinal negativo deve ser adicionado às relações (1.36). Este feito conduz ao fato de que para a situação analisada neste capítulo, as curvatura gaussiana  $K$  e média  $H$  se tornam simplesmente

$$K = -\frac{M^2(u, v) - L(u, v)N(u, v)}{F^2(u, v) - E(u, v)G(u, v)} \tag{4.5}$$

e

$$H = -\frac{1}{2} \frac{2M(u, v)F(u, v) - L(u, v)G(u, v) - E(u, v)N(u, v)}{F^2(u, v) - E(u, v)G(u, v)}. \tag{4.6}$$

Por fim, a curvatura normal  $\kappa_n = II/I$  é

$$\kappa_n = \frac{2dvdu}{\sinh^2 u (dv^2 + du^2)} \tag{4.7}$$

e as relações (4.5) e (4.6) resultam em

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{(1)^2 - (0)(0)}{(0)^2 - (\sinh^2 u)(\sinh^2 u)} \\
&= \frac{1}{\sinh^4 u}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

e

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2} \frac{2(1)(0) - (0)(\sinh^2 u) - (\sinh^2 u)(0)}{(0)^2 - (\sinh^2 u)(\sinh^2 u)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Contudo, é importante deixar claro que diferentemente do que viemos estudando ao longo desta dissertação,  $H = 0$  para o helicóide, catenóide e superfície de Enneper de primeiro tipo em  $SO(1, 2)$  não significa que as superfícies em questão sejam mínimas; de fato, tais superfícies foram denominadas por Kobayashi(1983) [25] como **superfícies máximas**.

## 4.2 Catenóide de Primeiro Tipo em $SO(1, 2)$

De acordo com [20], a parametrização para esta superfície é dada como segue

$$X(u, v) = (u, -\sin v \sinh u, \cos v \sinh u). \quad (4.10)$$

Daí,

$$\begin{aligned} X_v(u, v) &= (0, -\cos v \sinh u, -\sin v \sinh u) \\ X_{vv}(u, v) &= (0, \sin v \sinh u, -\cos v \sinh u) \\ X_u(u, v) &= (1, -\sin v \cosh u, \cos v \cosh u) \\ X_{uu}(u, v) &= (0, -\sin v \sinh u, \cos v \sinh u) \\ X_{vu}(u, v) &= X_{uv}(u, v) \\ &= (0, -\cos v \cosh u, -\sin v \cosh u). \end{aligned}$$

Por conseguinte, os coeficientes da primeira forma fundamental  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  e  $G(u, v)$  são escritos como

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (1, -\sin v \cosh u, \cos v \cosh u) \cdot (-1, -\sin v \cosh u, \cos v \cosh u) \\ &= -(1)^2 + \sin^2 v \cosh^2 u + \cos^2 v \cosh^2 u \\ &= -1 + (\sin^2 v + \cos^2 v) \cosh^2 u \\ &= -1 + \cosh^2 u \\ &= \sinh^2 u \\ F(u, v) &= (1, -\sin v \cosh u, \cos v \cosh u) \cdot (0, -\cos v \sinh u, -\sin v \sinh u) \\ &= \sin v \cos v \sinh u \cosh u - \sin v \cos v \sinh u \cosh u \\ &= 0 \\ G(u, v) &= (0, -\cos v \sinh u, -\sin v \sinh u) \cdot (0, -\cos v \sinh u, -\sin v \sinh u) \\ &= \cos^2 v \sin^2 u + \sin^2 v \sinh^2 u \\ &= (\cos^2 v + \sin^2 v) \sinh^2 u \\ &= \sinh^2 u. \end{aligned}$$

Diante destes resultados, a primeira forma fundamental  $I$  é

$$\begin{aligned} I &= \sinh^2 u du^2 + 2(0)dudv + \sinh^2 dv^2 \\ &= \sinh^2 u (du^2 + dv^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Agora, a fim de encontrar os coeficientes da segunda forma fundamental, nós precisamos determinar o vetor normal unitário. Todavia, da mesma forma que foi feito na seção anterior, a norma do vetor normal pode ser calculada de forma simples, isto é

$$\begin{aligned}\|X_u \bar{\times} X_v\| &= \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \\ &= \sqrt{(\sinh^2 u)(\sinh^2 u) - (0)^2} \\ &= \sinh^2 u.\end{aligned}$$

Neste íterim, obtemos também que

$$\begin{aligned}X_u \bar{\times} X_v &= \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 \\ 1 & -\sin v \cosh u & \cos v \cosh u \\ 0 & -\cos v \sinh u & -\sin v \sinh u \end{vmatrix} \\ &= -e_0[(-\sin v \cosh u)(-\sin v \sinh u) - (-\cos v \sinh u)(\cos v \cosh u)] \\ &\quad - e_1[(1)(-\sin v \sinh u) - (0)(\cos v \cosh u)] \\ &\quad + e_2[(1)(-\cos v \sinh u) - (0)(-\sin v \cosh u)] \\ &= e_0[-\sinh u \cosh u(\cos^2 v + \sin^2 v)] + e_1[(\sinh u \sin v)] \\ &\quad + e_2[(-\sinh u \cos v)] \\ &= e_0[-\sinh u \cosh u] + e_1[(\sinh u \sin v)] + e_2[(-\sinh u \cos v)].\end{aligned}$$

Consequentemente, o vetor unitário normal é expresso por

$$\begin{aligned}V_n &= \frac{1}{\sinh^2 u}(e_0[-\sinh u \cosh u] + e_1[(\sinh u \sin v)] + e_2[(-\sinh u \cos v)]) \\ &= e_0\left(-\frac{\cosh u}{\sinh u}\right) + e_1\left(\frac{\sin v}{\sinh u}\right) + e_2\left(-\frac{\cos v}{\sinh u}\right),\end{aligned}\tag{4.12}$$

isto é, do mesmo modo que foi feito na seção precedente.

Em posse de (4.12), os coeficientes  $L(u, v)$ ,  $M(u, v)$  e  $N(u, v)$  se denotam como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}L(u, v) &= (0, -\sin v \sinh u, \cos v \sinh u) \cdot \left(-\frac{\cosh u}{\sinh u}, \frac{\sin v}{\sinh u}, -\frac{\cos v}{\sinh u}\right) \\ &= -\sin v \sinh u \left(\frac{\sin v}{\sinh u}\right) + \cos v \sinh u \left(-\frac{\cos v}{\sinh u}\right) \\ &= -(\sin^2 v + \cos^2 v) \\ &= -1 \\ M(u, v) &= (0, -\cos v \cosh u, -\sin v \cosh u) \cdot \left(-\frac{\cosh u}{\sinh u}, \frac{\sin v}{\sinh u}, -\frac{\cos v}{\sinh u}\right) \\ &= -\cos v \cosh u \left(\frac{\sin v}{\sinh u}\right) - \sin v \cosh u \left(-\frac{\cos v}{\sinh u}\right) \\ &= -\cos v \cosh u \left(\frac{\sin v}{\sinh u}\right) + \cos v \cosh u \left(\frac{\sin v}{\sinh u}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(u, v) &= (0, \sin v \sinh u, -\cos v \sinh u) \cdot \left( -\frac{\cosh u}{\sinh u}, \frac{\sin v}{\sinh u}, -\frac{\cos v}{\sinh u} \right) \\
&= \sin v \sinh u \left( \frac{\sin v}{\sinh u} \right) - \cos v \sinh u \left( -\frac{\cos v}{\sinh u} \right) \\
&= \sin^2 v + \cos^2 v \\
&= 1
\end{aligned}$$

e a segunda forma fundamental  $II$  será

$$\begin{aligned}
II &= (-1)du^2 + 2(0)dudv + (1)dv^2 \\
&= dv^2 - du^2.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

De (4.11) e (4.13), a curvatura normal  $\kappa_n$  para a superfície é

$$\kappa_n = \frac{dv^2 - du^2}{\sinh^2 u (du^2 + dv^2)}. \tag{4.14}$$

Finalmente, utilizando as equações (4.5) e (4.6), obtemos

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{(0)^2 - (-1)(1)}{(0)^2 - (\sinh^2 u)(\sinh^2 u)} \\
&= \frac{1}{\sinh^4 u}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2} \frac{2(0)(0) - (-1)(\sinh^2 u) - (\sinh^2 u)(1)}{(0)^2 - (\sinh^2 u)(\sinh^2 u)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

### 4.3 Superfície de Enneper de Primeiro Tipo em $SO(1,2)$

Segundo [20], esta superfície pode ser parametrizada da maneira exposta a seguir:

$$X(u, v) = \left( u^2 - v^2, u + \frac{u^3}{3} - uv^2, -v + u^2v - \frac{v^3}{3} \right). \tag{4.17}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
X_u(u, v) &= (2u, 1 + u^2 - v^2, 2uv) \\
X_{uu}(u, v) &= (2, 2u, 2v) \\
X_v(u, v) &= (-2v, -2uv, -1 + u^2 - v^2) \\
X_{vv}(u, v) &= (-2, -2u, -2v) \\
X_{uv}(u, v) &= X_{vu}(u, v) \\
&= (0, -2v, 2u).
\end{aligned}$$



Sendo assim, nós temos que os coeficientes da primeira forma fundamental  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  e  $G(u, v)$  são

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= (2u, 1 + u^2 - v^2, 2uv) \cdot (-2u, 1 + u^2 - v^2, 2uv) \\
&= -4u^2 + 1 + u^2 - v^2 + u^2 + u^4 - u^2v^2 - v^2 - u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 \\
&= 1 - 2u^2 - 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4 \\
&= (u^2 + v^2 - 1)^2 \\
F(u, v) &= (2u, 1 + u^2 - v^2, 2uv) \cdot (2v, -2uv, -1 + u^2 - v^2) \\
&= 4uv - 2uv - 2u^3v + 2uv^3 - 2uv + 2u^3v - 2uv^3 \\
&= 0 \\
G(u, v) &= (-2v, -2uv, -1 + u^2 - v^2) \cdot (2v, -2uv, -1 + u^2 - v^2) \\
&= -4v^2 + 4u^2v^2 + 1 - u^2 + v^2 - u^2 + u^4 - u^2v^2 + v^2 - u^2v^2 + v^4 \\
&= 1 - 2u^2 - 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4 \\
&= (u^2 + v^2 - 1)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a primeira forma fundamental  $I$  é

$$\begin{aligned}
I &= (u^2 + v^2 - 1)^2 du^2 + 2(0) dudv + (u^2 + v^2 - 1)^2 dv^2 \\
&= (u^2 + v^2 - 1)^2 (du^2 + dv^2).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Calculemos agora o vetor unitário normal  $V_n$  conforme realizado nos dois casos anteriores, ou seja

$$\begin{aligned}
X_u \bar{\times} X_v &= \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 \\ 2u & 1 + u^2 - v^2 & 2uv \\ -2v & -2uv & -1 + u^2 - v^2 \end{vmatrix} \\
&= -e_0[(1 + u^2 - v^2)(-1 + u^2 - v^2) - (-2uv)(2uv)] \\
&\quad - e_1[(2u)(-1 + u^2 - v^2) - (-2v)(2uv)] \\
&\quad + e_2[(2u)(-2uv) - (-2v)(1 + u^2 - v^2)] \\
&= -e_0[-1 + u^2 - v^2 - u^2 + u^4 - u^2v^2 + v^2 - u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2] \\
&\quad - e_1[-2u + 2u^3 - 2uv^2 + 4uv^2] + e_2[-4u^2v + 2v + 2u^2v - 2v^3] \\
&= e_0[1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4] + e_1[2u - 2u^3 - 2uv^2] + e_2[2v - 2v^3 - 2u^2v]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|X_u \bar{\times} X_v\| &= \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \\
&= \sqrt{((u^2 + v^2 - 1)^2)((u^2 + v^2 - 1)^2) - (0)^2} \\
&= (u^2 + v^2 - 1)^2.
\end{aligned}$$

Tal que  $V_n$  é dado por

$$V_n = \frac{1}{(u^2 + v^2 - 1)^2} (1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4, 2u - 2u^3 - 2uv^2, 2v - 2v^3 - 2u^2v). \tag{4.19}$$

Então, os coeficientes da segunda forma fundamental  $L(u, v)$ ,  $M(u, v)$  e  $N(u, v)$  serão

$$\begin{aligned}
L(u, v) &= (-2, 2u, 2v) \cdot \frac{(1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4, 2u - 2u^3 - 2uv^2, 2v - 2v^3 - 2u^2v)}{(u^2 + v^2 - 1)^2} \\
&= \frac{1}{(u^2 + v^2 - 1)^2} (-2 + 4u^2v^2 + 2u^4 + 2v^4 + 4u^2 - 4u^4 - 4u^2v^2 + 4v^2 - 4v^4 - 4u^2v^2) \\
&= -\frac{2}{(u^2 + v^2 - 1)^2} (1 - 2u^2 - 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4) \\
&= -2 \frac{(u^2 + v^2 - 1)^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2} \\
&= -2 \\
M(u, v) &= (0, -2v, 2u) \cdot \frac{(1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4, 2u - 2u^3 - 2uv^2, 2v - 2v^3 - 2u^2v)}{(u^2 + v^2 - 1)^2} \\
&= \frac{1}{(u^2 + v^2 - 1)^2} [(-2v)(2u - 2u^3 - 2uv^2) + (2u)(2v - 2v^3 - 2u^2v)] \\
&= \frac{1}{(u^2 + v^2 - 1)^2} (-4uv + 4u^3v + 4uv^3 + 4uv - 4uv^3 - 4u^3v) \\
&= 0 \\
N(u, v) &= (2, -2u, -2v) \cdot \frac{(1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4, 2u - 2u^3 - 2uv^2, 2v - 2v^3 - 2u^2v)}{(u^2 + v^2 - 1)^2} \\
&= \frac{1}{(u^2 + v^2 - 1)^2} (2 - 4u^2v^2 - 2u^4 - 2v^4 - 4u^2 + 4u^4 + 4u^2v^2 - 4v^2 + 4v^4 + 4u^2v^2) \\
&= \frac{2}{(u^2 + v^2 - 1)^2} (1 - 2u^2 - 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4) \\
&= 2 \frac{(u^2 + v^2 - 1)^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Fazendo uso dos coeficientes mencionados acima, a segunda forma fundamental  $II$  se escreve como

$$\begin{aligned}
II &= -2du^2 + 2(0)dudv + 2dv^2 \\
&= 2(dv^2 - du^2).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

De (4.18) e (4.20), obtemos:

$$\kappa_n = \frac{2(dv^2 - du^2)}{(u^2 + v^2 - 1)^2(du^2 + dv^2)}, \tag{4.21}$$

onde  $\kappa_n$  representa a curvatura normal.

Utilizando (4.5) e (4.6), as curvaturas gaussianas  $K$  e média  $H$  são

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{(0)^2 - (-2)(2)}{(0)^2 - ((u^2 + v^2 - 1)^2)((u^2 + v^2 - 1)^2)} \\
&= \frac{4}{(u^2 + v^2 - 1)^4}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

e

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \frac{2(0)(0) - (-2)((u^2 + v^2 - 1)^2) - ((u^2 + v^2 - 1)^2)(2)}{(0)^2 - ((u^2 + v^2 - 1)^2)((u^2 + v^2 - 1)^2)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2(u^2 + v^2 - 1)^2 - 2(u^2 + v^2 - 1)^2}{(u^2 + v^2 - 1)^4} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

## Capítulo 5

# Superfície Mínima em $AdS$

Neste capítulo continuaremos analisando superfícies minimais, no entanto, ao contrário do que foi apresentado nos capítulos anteriores desta dissertação, abordaremos a questão da superfície mínima no espaço anti-de-Sitter ( $AdS$ ). Notadamente, trataremos do importante caso do Wilson loop circular nesta condição. Ao longo do capítulo introduziremos o conceito de espaço  $AdS$  e mostraremos que ao contrário do que seria esperado no espaço Euclidiano, uma superfície hemisférica gerada pela folha de mundo de uma corda que termina numa fronteira  $AdS$  é minimal [23, 26–32].

### 5.1 Espaço Anti-de-Sitter ( $AdS$ )

O espaço  $AdS_n$  é dado pelo conjunto de todos os pontos que obedecem à

$$X \cdot X = -1, \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{R}^{(2,n-1)}$  corresponde ao espaço real  $(n+1)$  dimensional dotado do produto interno usual  $(\cdot)$  [23]. Dessa maneira, as componentes do vetor  $X$  pertencente a  $\mathbf{R}^{(2,n-1)}$  serão indexadas por  $i$  que pertence a  $(-1, 0, 1, 2, \dots, n-1)$ .

Existem muitas formas de parametrizar o espaço  $AdS_n$ , entretanto, no nosso caso, estamos interessados numa forma particularmente útil de fazê-lo. Trata-se do uso das **coordenadas de Poincaré**.

Tais coordenadas são definidas como segue [23, 30]

$$X^\mu = \frac{x^\mu}{z}, \quad \text{onde } \mu \text{ pertence a } (0, 1, \dots, n-2) \quad (5.2)$$

$$X_{-1} - X_{n-1} = \frac{z^2 - x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2}{z} \quad (5.3)$$

$$X_{-1} + X_{n-1} = \frac{1}{z}. \quad (5.4)$$

De modo que a métrica induzida neste espaço pode ser denotada como sendo

$$ds^2 = \frac{-dx_0^2 + dz^2 + dx_1^2 + \dots + dx_{n-2}^2}{z^2}. \quad (5.5)$$

Utilizando este sistema de coordenadas percebe-se das expressões acima que ocorre divergência quando  $z \rightarrow 0$ . Então, a fim de introduzirmos a borda conforme, devemos tomar o limite  $z \rightarrow 0$  e adotarmos a métrica na mesma classe conforme, mas sem o termo que diverge, ou seja,  $1/z^2$  [23].

Uma importante asserção para superfícies no espaço Anti-de-Sitter está relacionada com a segunda forma fundamental  $II$  já exaustivamente analisada durante esta dissertação. Antes de explicitarmos esta característica importante para superfícies em  $AdS$ , devemos observar as seguintes definições:

**Definição 5.1.1.** *Uma imersão é geodésica se e apenas se a segunda forma fundamental  $II$  correspondente à esta imersão se anula.*

Relembremos agora que no capítulo 1, nós escrevemos a segunda e terceira formas fundamentais em termos do operador ou mapa de Weingarten  $W$  como pode ser visto em (1.27) e (1.45), respectivamente. Essa forma de representar  $II$  mostrar-se-á bastante útil neste ponto.

**Definição 5.1.2.** *O operador ou mapa de Weingarten  $W$  dado em (1.25) sobre  $\mathbf{R}^n$  torna-se a derivada habitual e podemos escrever, portanto,*

$$\nabla_U^E N = U \cdot dN, \quad (5.6)$$

onde  $U$  e  $N$  representam campos vetoriais,  $E = \mathbf{R}^n$  e  $d$  denota a derivada exterior.

**Proposição 9.** *A imersão  $AdS_{n-1} \subset AdS_n \subset \mathbf{R}^{2,n-1}$  de  $AdS_{n-1}$  em  $AdS_n$  é geodésica, ou seja, qualquer superfície minimal em  $AdS_{n-1}$  será mínima também em  $AdS_n$  [23].*

*Demonstração.* Da definição 5.1.1 temos que verificar que a segunda forma fundamental se anulará nesta imersão. Assim, usando (1.27) e (5.6), encontramos

$$\begin{aligned} II(U, V) &= WU \cdot V \\ &= -\nabla_U^E N \cdot V \\ &= -(U \cdot dN) \cdot V. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Entretanto,  $N$  corresponde ao campo vetorial unitário normal à superfície, daí

$$\begin{aligned} dN &= d(0, \dots, 1) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ou seja,

$$II = 0. \quad (5.9)$$

Logo, qualquer superfície mínima em  $AdS_{n-1}$  também será minimal em  $AdS_n$ .  $\square$

## 5.2 Superfície Hemisférica em $AdS$

Uma vez visto as características básicas do espaço Anti-de-Sitter, vamos analisar o caso em que temos uma superfície hemisférica num espaço  $AdS$  de coordenadas  $x_1, x_2$  e  $z$ , tal que quando  $z = 0$

obtemos um círculo de raio  $b$ , isto é,  $z = 0$  corresponde à fronteira.

A métrica para esta situação é dada por

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dz^2}{z^2}. \quad (5.10)$$

O círculo de raio  $b$  em  $z = 0$  na fronteira Anti-de-Sitter é um Wilson loop circular. De fato, em  $AdS$ , um Wilson loop é geralmente descrito por uma corda macroscópica estendendo-se até a fronteira [32].

Assim como fizemos em outros capítulos, iremos agora estudar se esta folha de mundo gerada pela corda em  $AdS$  constitui ou não, uma superfície mínima. Recordemos que no exemplo 10 da página 32 desta dissertação, a curvatura média  $H$  para a esfera em  $\mathbf{R}^3$  foi mostrada ser diferente de zero, portanto, a esfera em  $\mathbf{R}^3$  não é uma superfície minimal. No entanto, será demonstrado a seguir que um hemisfério em  $AdS$ , ao contrário do que seria esperado no espaço Euclidiano, representa uma superfície mínima.

No terceiro capítulo foi dito que caso desejemos saber se uma dada folha de mundo corresponde a uma superfície mínima, é suficiente observar se a equação que caracteriza esta superfície satisfaz a equação de movimento para cordas relativísticas não quantizadas (3.101). Porém, esta equação de movimento pode ser escrita de outra forma, ou seja, podemos usar a equação de Euler-Lagrange para o sistema em evolução [26]; observando também que estamos lidando, na presente análise, apenas com dimensões espaciais.

Para que esta superfície hemisférica seja mínima, faz-se necessário que sejam satisfeitas três equações de Euler-Lagrange, a saber

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\bar{x}}_1} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1} = 0, \quad (5.11)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\bar{x}}_2} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_2} = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{z}} \right) + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\bar{z}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial z} = 0, \quad (5.13)$$

onde  $0 \leq z \leq b$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Além disso, as equações que modelam esta superfície serão

$$x_1 = \sqrt{b^2 - z^2} \cos \phi \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{b^2 - z^2} \sin \phi \quad (5.14)$$

e a densidade de lagrangeana  $\mathbf{L}$ , por sua vez, terá a forma apresentada abaixo

$$\mathbf{L} = \frac{\sqrt{((\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{z})^2)((\bar{x}_1)^2 + (\bar{x}_2)^2 + (\bar{z})^2) - (\dot{x}_1 \bar{x}_1 + \dot{x}_2 \bar{x}_2 + \dot{z} \bar{z})^2}}{z^2} \quad (5.15)$$

e

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial z}, \quad \bar{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial \phi}, \quad \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial z} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{\partial z}{\partial \phi}. \quad (5.16)$$

$i = 1, 2$ .

Em outras palavras, resolvendo o variacional  $\delta S = 0$ , no qual  $S$  corresponde à ação de Nambu-Goto para folhas de mundo espaciais determinaremos que o hemisfério  $AdS$  ilustrado acima é uma

superfície mínima.

Contudo, antes de mostrarmos este fato, calcularemos o elemento de área  $dA$  para o caso abordado.

**Proposição 10.** *O elemento de área  $dA$  para um hemisfério no espaço AdS, denotado por (5.14) é*

$$dA = \frac{b}{z^2} d\phi dz. \quad (5.17)$$

*Demonstração.* De (3.4), temos que

$$dA = d\phi dz \frac{\sqrt{((\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{z})^2)((\bar{x}_1)^2 + (\bar{x}_2)^2 + (\bar{z})^2) - (\dot{x}_1\bar{x}_1 + \dot{x}_2\bar{x}_2 + \dot{z}\bar{z})^2}}{z^2}, \quad (5.18)$$

onde, mediante (5.16), encontra-se

$$\dot{x}_1 = -\frac{z \cos \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{z \sin \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}}, \quad \dot{z} = 1 \quad (5.19)$$

$$\bar{x}_1 = -\sqrt{b^2 - z^2} \sin \phi, \quad \bar{x}_2 = \sqrt{b^2 - z^2} \cos \phi, \quad \bar{z} = 0. \quad (5.20)$$

Então, substituindo (5.19) e (5.20) no radicando de (5.18),

$$\begin{aligned} (\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{z})^2 &= \frac{z^2}{b^2 - z^2} + 1 \\ (\bar{x}_1)^2 + (\bar{x}_2)^2 + (\bar{z})^2 &= b^2 - z^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\dot{x}_1\bar{x}_1 + \dot{x}_2\bar{x}_2 + \dot{z}\bar{z})^2 &= \left( -\frac{z \cos \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}} \right) (-\sqrt{b^2 - z^2} \sin \phi) + \left( -\frac{z \sin \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}} \right) (\sqrt{b^2 - z^2} \cos \phi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí, (5.18) fica

$$\begin{aligned} dA &= \frac{d\phi dz}{z^2} \sqrt{\left( \frac{z^2}{b^2 - z^2} + 1 \right) (b^2 - z^2) - (0)^2} \\ &= \frac{d\phi dz}{z^2} \sqrt{z^2 + b^2 - z^2} \\ &= \frac{bd\phi dz}{z^2}. \end{aligned}$$

E a proposição está provada.  $\square$

**Proposição 11.** *A superfície hemisférica no espaço Anti-de-Sitter definida por (5.14) satisfaz as equações (5.11), (5.12) e (5.13), sendo por consequência, uma superfície mínima.*

*Demonstração.* Consideremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}_1} &= \frac{2\dot{x}_1(\bar{x}_1)^2 + 2\dot{x}_1(\bar{x}_2)^2 + 2\dot{x}_1(\bar{z})^2 - 2\bar{x}_1\dot{x}_1\bar{x}_1 - 2\bar{x}_1\dot{x}_2\bar{x}_2 - 2\bar{x}_1\dot{z}\bar{z}}{2z^2b} \\ &= \frac{1}{z^2b} \left[ \left( -\frac{z \cos \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}} \right) (b^2 - z^2) \cos^2 \phi - (-\sqrt{b^2 - z^2} \sin \phi) \left( -\frac{z \sin \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}} (\sqrt{b^2 - z^2} \cos \phi) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{z \cos \phi \sqrt{b^2 - z^2} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}{z^2 b} \\
&= -\frac{\sqrt{b^2 - z^2} \cos \phi}{z b}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) &= -\frac{1}{z^2 b^2} \left[ z b \frac{\cos \phi}{2\sqrt{b^2 - z^2}} (-2z) - b \cos \phi \sqrt{b^2 - z^2} \right] \\
&= \frac{z^2 \cos \phi + \cos \phi (b^2 - z^2)}{z^2 b \sqrt{b^2 - z^2}} \\
&= \frac{z^2 \cos \phi + b^2 \cos \phi - z^2 \cos \phi}{z^2 b \sqrt{b^2 - z^2}} \\
&= \frac{b \cos \phi}{z^2 \sqrt{b^2 - z^2}}. \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Calculando agora a derivada parcial da densidade de lagrangeana em relação à  $\bar{x}_1$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{x}_1} &= \frac{2\bar{x}_1 (\dot{x}_1)^2 + 2\bar{x}_1 (\dot{x}_2)^2 + 2\bar{x}_1 (\dot{z})^2 - 2\dot{x}_1 \dot{x}_1 \bar{x}_1 - 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \bar{x}_2 - 2\dot{x}_1 \dot{z} \bar{z}}{2z^2 b} \\
&= \frac{1}{z^2 b} \left[ (-\sqrt{b^2 - z^2} \sin \phi) \left( \frac{z^2 \sin^2 \phi}{b^2 - z^2} \right) + (-\sqrt{b^2 - z^2} \sin \phi) \right. \\
&\quad \left. - \left( -\frac{z \cos \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}} \right) \left( -\frac{z \sin \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}} \right) (\sqrt{b^2 - z^2} \cos \phi) \right] \\
&= -\frac{1}{z^2 b} \left[ \frac{z^2 \sin \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)}{\sqrt{b^2 - z^2}} + \sqrt{b^2 - z^2} \sin \phi \right] \\
&= -\frac{z^2 \sin \phi + (b^2 - z^2) \sin \phi}{z^2 b \sqrt{b^2 - z^2}} \\
&= -\frac{z^2 \sin \phi + b^2 \sin \phi - z^2 \sin \phi}{z^2 b \sqrt{b^2 - z^2}} \\
&= -\frac{b \sin \phi}{z^2 \sqrt{b^2 - z^2}}.
\end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{x}_1} \right) = -\frac{b \cos \phi}{z^2 \sqrt{b^2 - z^2}} \tag{5.22}$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1} = 0. \tag{5.23}$$

De (5.21), (5.22) e (5.23), a expressão (5.11) é satisfeita como segue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{x}_1} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1} &= \frac{b \cos \phi}{z^2 \sqrt{b^2 - z^2}} - \frac{b \cos \phi}{z^2 \sqrt{b^2 - z^2}} - 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$



Do procedimento executado acima a fim de mostrar que (5.11) é satisfeita, torna-se claro que por analogia, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{x}_2} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_2} &= \frac{b \sin \phi}{z^2 \sqrt{b^2 - z^2}} - \frac{b \sin \phi}{z^2 \sqrt{b^2 - z^2}} - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração da proposição 11, consideremos agora

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{z}} &= \frac{2\dot{z}(\bar{x}_1)^2 + 2\dot{z}(\bar{x}_2)^2 + 2\dot{z}(\bar{z})^2 - 2\bar{z}\dot{x}_1\bar{x}_1 - 2\bar{z}\dot{x}_2\bar{x}_2 - 2\bar{z}\dot{z}\bar{z}}{2z^2b} \\ &= \frac{(\bar{x}_1)^2 + (\bar{x}_2)^2}{z^2b} \\ &= \frac{b^2 - z^2}{z^2b} \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{z}} \right) &= \frac{z^2b(-2z) - (b^2 - z^2)2zb}{z^4b^2} \\ &= \frac{-2z^3b - 2zb^3 + 2z^3b}{z^4b^2} \\ &= -\frac{2b}{z^3}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Realizando a derivada parcial da densidade de lagrangeana com respeito à  $\bar{z}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}} &= \frac{2\bar{z}(\dot{x}_1)^2 + 2\bar{z}(\dot{x}_2)^2 + 2\bar{z}(\dot{z})^2 - 2\dot{x}_1\bar{x}_1 - 2\dot{x}_2\bar{x}_2 - 2\dot{z}\bar{z}}{2z^2b} \\ &= -\frac{\dot{x}_1\bar{x}_1 + \dot{x}_2\bar{x}_2}{zb} \\ &= \frac{1}{zb} \left[ -\left( -\frac{z \cos \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}} \right) (-\sqrt{b^2 - z^2} \sin \phi) - \left( -\frac{z \sin \phi}{\sqrt{b^2 - z^2}} \right) (\sqrt{b^2 - z^2} \cos \phi) \right] \\ &= \frac{-\cos \phi \sin \phi + \cos \phi \sin \phi}{b} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}} \right) = 0. \tag{5.25}$$

Por último,

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial z} = -\frac{2b}{z^3}. \tag{5.26}$$

Substituindo (5.24), (5.25) e (5.26) em (5.13) têm-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{z}} \right) + \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial z} &= -\frac{2b}{z^3} + 0 - \left( -\frac{2b}{z^3} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conforme foi visto, as equações (5.11), (5.12) e (5.13) são satisfeitas para o hemisfério no espaço  $AdS$  e a atual proposição encontra-se provada, isto é, o hemisfério é uma superfície mínima em Anti-de-Sitter.  $\square$

# Capítulo 6

## Conclusão

Este trabalho tratou do estudo e implementação de estruturas e conceitos oriundos da geometria diferencial nos espaços Euclidiano, Lorentziano e Anti-de-Sitter sob a ótica da teoria de cordas bosônicas. Em especial, encontrando superfícies mínimas nestes espaços.

Para este fim, desenvolvemos no capítulo 1 a base teórica para a análise deste tipo de superfícies em  $\mathbf{R}^3$  através das três primeiras formas fundamentais, destacando algumas de suas propriedades mais relevantes. Abordamos ainda a idéia de curvatura em geometria diferencial e definimos o mapa ou operador de Weingarten  $W$  atuando sobre um campo vetorial pertencente ao espaço tangente às superfícies. Mediante o uso deste operador autoadjunto, verificamos que seus autovalores em  $\mathbf{R}^3$  fornecem a curvatura gaussiana  $K$  e a curvatura média  $H$ , sendo esta última que determina se uma dada superfície é ou não é mínima no espaço Euclidiano.

No capítulo 2, foi mostrado a relação entre a curvatura média  $H$  e as superfícies mínimas em  $\mathbf{R}^3$  considerando a primeira variação da funcional área numa dada direção  $\phi$ . De fato, vimos que se  $H = 0$  neste espaço, a superfície em questão será minimal. Ao longo do capítulo 1 estudamos superfícies paramétricas, todavia, no capítulo 2, realizamos também o estudo de superfícies não paramétricas e obtemos a equação para a superfície duplamente periódica de Scherks.

Nos dois primeiros capítulos desta dissertação exibimos uma série de exemplos a fim de melhor ilustrar as idéias apresentadas. No capítulo 1, apresentamos exemplos dos aspectos geometro-diferenciais, tais como os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Entretanto, no capítulo 2, em posse da definição de superfícies mínimas em  $\mathbf{R}^3$  pela geometria diferencial, tratamos de exemplos clássicos deste tipo de superfícies no espaço Euclidiano, tais como o plano, o helicóide, o catenóide, a superfície de Enneper e a superfície duplamente periódica de Scherks. Cabe ressaltar também que mostramos que uma esfera neste espaço não representa superfície mínima.

No capítulo 3, foi introduzido o conceito de cordas relativísticas clássicas mediante a análise da funcional área para superfícies espaciais e espaço-temporais. Nesse ínterim, vimos a necessidade da reparametrização invariante e da mudança de sinal no radicando de (3.22) para o caso das superfícies no espaço-tempo. Dessa forma, obtemos a ação de Nambu-Goto e a escrevemos em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, destacando as diferenças em relação ao que seria esperado no espaço Euclidiano. Em seguida, variamos a ação de Nambu-Goto para determinarmos

as equações de movimento. No espaço-tempo, o fato da curvatura média  $H$  ser igual a zero para uma dada superfície não leva a conclusão que se trata de uma superfície mínima [20, 25]. Agora, utilizamos a idéia do princípio variacional para encontrarmos superfícies mínimas geradas pela folha de mundo da corda relativística clássica.

No capítulo 4, realizamos três exemplos da obtenção das estruturas geometro-diferenciais para superfícies em  $SO(1, 2)$ , como os coeficientes das duas primeiras formas fundamentais e as curvaturas gaussianas  $K$  e média  $H$ .

No capítulo 5, introduzimos a noção de espaço Anti-de-Sitter ( $AdS$ ) e de Wilson loop. Em  $AdS$ , um Wilson loop é descrito por uma corda macroscópica estendendo-se até a fronteira deste espaço. Assim, abordamos o caso do Wilson loop circular e ao observar que as equações que descrevem esta superfície satisfazem as equações de Euler-Lagrange, determinamos que a superfície hemisférica no espaço Anti-de-Sitter é mínima. Este fato representa o oposto do que seria esperado se a superfície hemisférica estivesse em  $\mathbf{R}^3$ . Pode-se ainda estudar diversos casos de Wilson loop, como por exemplo, o Wilson loop retangular, no qual a fronteira  $AdS$  possui duas linhas anti-paralelas representando dois quarks [33].

# Referências Bibliográficas

- [1] G. Lugo. *Differential Geometry in Physics*. Technical report, University of North Carolina, 1998.
- [2] Gray. A. “*The Three Fundamental Forms.*” §16.6 in *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, pp. 368-371 and 380-382, 1997.
- [3] V.F. Kagan, “*Foundations of the theory of surfaces in a tensor setting*”, **1** , Moscow-Leningrad(1947) (*In Russian*)
- [4] P.K. Rashevskii, “*A course of differential geometry*”, Moscow(1956) (*In Russian*)
- [5] W. Klingenberg, “*A course in differential geometry*”, Springer(1978)
- [6] M. Spivak, “*A comprehensive introduction to differential geometry*”, **1979**, Publish or Perish pp. 1-5
- [7] N.J. Hicks, “*Notes on differential geometry*”, v. Nostrand(1965)
- [8] N. Hitchin. *Geometry of Surfaces*. University of Oxford, 2004.
- [9] Gray, A. “*The Shape Operator,*” “*Calculation of the Shape Operator,*” and “*The Eigenvalues of the Shape Operator.*” §16.1, 16.3, and 16.4 in *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, pp. 360-363 and 367-372, 1997.
- [10] Reckziegel, H. *In Mathematical Models from the Collections of Universities and Museums*(Ed. G. Fischer). Braunschweig, Germany: Vieweg, p. 30, 1986.
- [11] Weisstein, Eric W. “*Shape Operator.*” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ShapeOperator.html>
- [12] V. A. Topogonov. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: A Concise Guide*. Birkhäuser(2005)
- [13] *Fundamental forms of a surface*. A.B. Ivanov (*originator*), Encyclopedia of Mathematics. [http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Fundamental\\_forms\\_of\\_a\\_surface&oldid=13236](http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Fundamental_forms_of_a_surface&oldid=13236)

- [14] M. Beeson. *Notes on Minimal Surfaces*. San José 2001
- [15] M. Dorff. *Notes on Minimal Surfaces*. Brigham Young University 2006
- [16] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press 2004
- [17] G. Matsas. *Notes on General Relativity*. IFT-Unesp 2011
- [18] Todd A. Drumm and William M. Goldman (Communicated by Gregory Margulis). *Crooked Planes*. Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society 1995
- [19] Seongil Park, Byung Hak Kim, Jin Hyuk Choi, and Young Ok Lee. *On Volumes of Parallel  $2n$ -Hedron in a Lorentz Vector Space*. The Korean Mathematical Society 2009
- [20] Ismael Teixeira da Silva. *Geometria das Superfícies Mínimas em  $\mathbf{R}^3$  e Superfícies Máximas Tipo-espaço em  $\mathbf{L}^3$* . Dissertação (Mestrado em Matemática e Estatística) - Universidade Vale do Rio Verde-Unincor, Três Corações(MG) 2007
- [21] Adriana A. Cintra. *Representação de Weierstrass e Problema de Björling*. Unicamp 2012
- [22] Juan A. Aledo, José M. Espinar and José A. Gálvez. *Timelike Surfaces in the Lorentz-Minkowski Space with Prescribed Gaussian Curvature and Gauss Map*. University of Castilla-La Mancha and University of Granada. Spain
- [23] Sebastian Johannes Wuttke. *Minimal Surfaces in  $AdS_n$  and Gluon scattering amplitudes via  $AdS/CFT$* . Thesis - University of Humboldt, Berlin. 2009
- [24] Akutagawa, K.; Nishikawa, S. *The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space*. Thoku Math. J., Thoku(Jp), n. 42, p. 67-82, 1990
- [25] Kobayashi, O. *Maximal Surfaces in the 3-Dimensional Minkowski Space em  $L^3$* . Tokyo J. Math., Tokyo (Jp), v.6, n.2, p. 297-309, 1983
- [26] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Universidade Federal Fluminense, Niterói-RJ. 2004
- [27] David Berenstein; Richard Corrado; Willy Fischler; Juan Maldacena. *The Operator Product Expansion for Wilson Loops and Surfaces in the Large  $N$  Limit*. 1998
- [28] Andrei Mikhailov. *Special contact Wilson loops*. 2002
- [29] Stefano Mori. *Supersymmetric Wilson loops in the  $AdS/CFT$  correspondence*. Universit Degli Studi di Parma. 2007/2008
- [30] Nastase, H.: *Introduction to  $AdS-CFT$* . arxiv:0712.0689
- [31] Kobayashi, Shoshichi and Nomizu, Katsumi (1996(*New edition*)). *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1. Wiley Interscience. ISBN 0-471-15733-3
- [32] Nadav Drukker. *Comments on Wilson loops*. Niels Bohr Institute, Copenhagen. 2006
- [33] Juan Maldacena. *Wilson loops in large  $N$  field theories*. Harvard University. 1998