

RESSALVA

Atendendo solicitação da autora,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 03/02/2025



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Ana Livia Rodero

Estabilidade estrutural, centros e ciclos limite para
campos de vetores tridimensionais suaves e suaves
por partes com esferas bidimensionais invariantes

São José do Rio Preto
2022

Ana Livia Rodero

Estabilidade estrutural, centros e ciclos limite para
campos de vetores tridimensionais suaves e suaves
por partes com esferas bidimensionais invariantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

Coorientador: Prof. Dr. Joan Torregrosa

Financiadora: FAPESP (Processos 2017/08779-8 e 2019/00440-7) e CAPES

São José do Rio Preto
2022

R688e Rodero, Ana Livia

Estabilidade estrutural, centros e ciclos limite para campos de vetores tridimensionais suaves e suaves por partes com esferas bidimensionais invariantes / Ana Livia Rodero.

-- São José do Rio Preto, 2022

185 p. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi

Coorientador: Joan Torregrosa

1. Sistemas dinâmicos. 2. Campos de vetores em esferas invariantes. 3. Estabilidade estrutural. 4. Problema do centro-foco. 5. Ciclicidade local. I. Título.

Ana Livia Roderó

Estabilidade estrutural, centros e ciclos limite para
campos de vetores tridimensionais suaves e suaves
por partes com esferas bidimensionais invariantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP (Processos 2017/08779-8 e 2019/00440-7) e CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Joan Torregrosa (coorientador)
Departamento de Matemática - Universidade Autônoma de Barcelona

Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto
Departamento de Matemática - UNESP/Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
Departamento de Matemática - UNESP/Câmpus de São José do Rio Preto

Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Rodrigo Donizete Euzebio
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal de Goiás

São José do Rio Preto
03 de fevereiro de 2022

*Aos meus pais, Ana e Pedro;
aos meus avós, Ana, Elvira, Manoel e Pedro (in memoriam)
e Celina.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família por todo suporte, pelo carinho e amor com o qual fui criada e pela base e raízes que levarei sempre comigo. Em especial, aos meus pais, Ana e Pedro.

Ao Luiz Fernando, pelo apoio e amor de sempre, e também à toda sua família.

Aos doguinhos da casa que contribuíram de forma significativa não destruindo este trabalho.

A todos os meus “amiguinhos” ou “abigos” que sempre se fazem presente (mesmo a distância), proporcionando bons momentos de lazer e descontração, estudo e discussões (nem sempre relevantes), rolês aleatórios, boas conversas e altas risadas. Vocês são parte importante desse processo. Não posso deixar de citar os meus companheiros de salinha e de café (convertida em grupo de whatsapp) André, Cheiene, Eliton, Jarne, Helô, Jéssica, Júnior, Lucas, Otávio, Plínio, Raul, Rodrigo I., Rodrigo B., Yagor e Will. À Milena, Poli e Gabi, pela amizade. A alguns dos amigos que o grupo PET-Matemática me proporcionou, Jamiele, Mayara, Fred, Wender e Giane que fizeram com que eu me sentisse em casa no período em Campinas. Aos membros da MAT011 e agregados, em especial à Bruna, Isa, Juliana, Natália e Wesley. E ao melhor apartamento da região, e suas moradoras, Bruna e Pati. A todos os demais queridos amigos, que eu não citei aqui, obrigada!

Aos meus orientadores, professores Cláudio e Joan, por todos os ensinamentos, correções (que não foram poucas rsrs), dedicação no desenvolvimento deste trabalho, oportunidades e receptividade. Boa parte desta tese se deve a vocês. Muito obrigada. Moltes gràcies.

Estendo meu agradecimento ao professor Marco Antônio que, apesar de não figurar como orientador do trabalho, foi também nosso colaborador e ajudou muito no desenvolvimento de parte dele.

Ao Ibilce pelo acolhimento durante esses longos anos. Em particular, aos professores que fizeram parte da minha formação, direta ou indiretamente. Um agradecimento

especial ao professor Weber, que me orientou durante a graduação e mestrado com bastante dedicação e aos professores Gorete e Adalberto, que foram tutores do PET-Matemática nos anos em que fiz parte do grupo. À UAB e aos amigos feito ali, que foram parte importante no meu desenvolvimento pessoal e profissional. Estendo meu agradecimento a todos os membros do grupo de pesquisa de Sistemas Dinâmicos dessas duas instituições, pelas sugestões, discussões matemáticas, congressos e seminários que participei no período.

Aos funcionários do Ibilce, em particular aos das seções técnicas de pós-graduação, de apoio a pesquisa (staepe), da biblioteca e do RU, pelo ótimo atendimento, por sanarem todas as nossas dúvidas e nos auxiliarem com o que foi preciso. Em especial ao Mauro, à Silvia, ao André, à Eliane e à Luciane.

Aos membros da banca, pela disponibilidade e pelas sugestões.

Agradeço à FAPESP pela concessão das bolsas de pesquisa, sob os processos nº 2017/08779-8 e nº 2019/00440-7, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho: Muito obrigada!

“Sempre teremos ciência, tecnologia, engenharia e matemática conosco. Algumas coisas vão desaparecer, mas sempre haverá ciência, engenharia e tecnologia. E sempre, sempre haverá matemática. Tudo é física e matemática.”

Frase atribuída à Katherine Johnson em [15], 2020 (tradução nossa).

RESUMO

O primeiro objetivo deste trabalho foi estudar problemas relacionados a estabilidade estrutural dentro das classes de campos de vetores suaves por partes e suaves por partes refrativos tridimensionais que admitam integral primeira que deixe invariante todas as esferas bidimensionais centradas na origem. Condições sobre estabilidade e famílias genéricas a um parâmetro na esfera bidimensional foram usadas para provar os resultados que estabelecem as condições necessárias para a estabilidade estrutural dentro destas classes. Além disso, estudamos o problema do centro-foco e de ciclicidade nas classes de campos suaves e suaves por partes tridimensionais que admitam integral primeira que deixe invariante todas as esferas bidimensionais centradas na origem. Provamos que sistemas lineares nessas classes não admitem ciclo limite nas esferas invariantes. Finalmente, obtemos 4 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando de um foco-fraco para sistemas quadráticos (suaves) definido na esfera unitária e também mostramos que existe uma perturbação suave por partes quadrática tal que pelo menos 10 ciclos limite de pequena amplitude bifurcam de um centro quadrático suave nessa esfera.

Palavras-chave: Campos de vetores em esferas invariantes, estabilidade estrutural, integrabilidade, problema do centro-foco, ciclicidade local.

ABSTRACT

The first goal of this work was to study structural stability problems in the classes of piecewise smooth and piecewise smooth refractive vector fields that admit a first integral that leaves invariant any two-dimensional sphere centered at the origin. Stability conditions and generic one-parameter families in the two-dimensional sphere were used to prove the results that establish the necessary conditions for structural stability in these classes. Furthermore, we study the center-focus and the cyclicity problems in the classes of smooth and piecewise smooth vector fields that admit a first integral that leaves invariant any two-dimensional spheres centered at the origin. We prove that linear systems into these classes do not admit limit cycle on invariant spheres. Finally, we obtain 4 small amplitude limit cycles bifurcating from a weak-focus of a (smooth) quadratic system defined on the unit sphere and we also show that there exists a piecewise smooth quadratic perturbation such that at least 10 small amplitude limit cycles bifurcate from a smooth quadratic center on this sphere.

Keywords: Vector fields on invariant spheres, structural stability, integrability, center-focus problem, local cyclicity.

Lista de Figuras

2.1	Regiões de costura (a), deslize (b) e escape (c) para campo de vetores suaves por partes tridimensionais.	34
2.2	Exemplo de pseudo-conexão.	35
2.3	Σ -dobra para campos de vetores suaves por partes bidimensionais.	36
2.4	Pontos de equilíbrio hiperbólicos para o campo deslizante de campos de vetores suaves por partes bidimensionais.	36
2.5	Poli-trajetórias elementares do tipo I e do tipo III.	37
2.6	Exemplos de pseudo-poli-trajetórias fechadas.	38
3.1	Primeiro retorno associado a poli-trajetória fechada do tipo I.	59
3.2	Possível conexão de separatrizes podem surgir no rompimento de uma poli-trajetória do tipo I não elementar.	62
3.3	Poli-trajetória do tipo III contendo um segmento de deslize e um de escape.	63
3.4	Possíveis conexões de separatrizes que podem surgir no rompimento de uma poli-trajetória do tipo III.	64
3.5	Exemplo de poli-trajetória do tipo III.	64
3.6	Poli-trajetória do tipo III contendo uma conexão de dobras.	65
3.7	(a) <i>Buckling bifurcation</i> , (b) <i>sliding-crossing-bifurcation</i> , (c) <i>crossing-crossing-bifurcation</i>	68
3.8	Loop de sela intersectando Σ de forma transversal.	69
3.9	Poli-trajetórias fechadas não elementares do tipo III.	72
3.10	Pseudo-poli-trajetória em campo refrativo.	74
3.11	Pseudo-conexões que não contém segmentos de deslize ou escape.	75
3.12	Pseudo-poli-trajetórias fechadas.	75
4.1	(a) Dobra-dobra visível-invisível; (b) dobra-dobra visível-visível; (c) dobra-dobra invisível-invisível; (d) região de costura.	81
4.2	Pontos de dobra-sela e seus desdobramentos.	83
4.3	Pontos de dobra-nó e seus desdobramentos.	83
4.4	Pontos de dobra-foco e seus desdobramentos.	84

4.5	Dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica e seus desdobramentos, com $\beta < 0$	85
4.6	Pontos de cups-cusp e seus desdobramentos.	86
4.7	(a) Conexão entre dobras-dobras distintas; (b) conexão sela-dobra; (c) Conexão entre duas selas distintas; (d) loop de sela.	90
4.8	Poli-trajetórias fechadas do tipo III.	91
4.9	Função distância para poli-trajetórias fechadas do tipo III.	91
4.10	(a) Órbita periódica tangente à Σ ; (b) poli-trajetória fechada do tipo III conectando separatrizes estáveis e instáveis de uma mesma dobra.	92
4.11	Aplicação de primeiro retorno.	93
4.12	Vizinhança $\mathcal{V}_T$ do Lema 4.33 (Lema 4.34, respectivamente) em (a) ((b), respectivamente).	103
5.1	Extensão de h para campo de vetores que apresenta conexão de separatrizes.	119
6.1	Retrato de fase de (6.12) para $a = 0$ (esquerda) e $a > 0$ (direita).	137
7.1	Comportamento das curvas de nível de $Y \in \mathfrak{X}_1$, com relação a admissibilidade dos pontos de equilíbrio.	161
7.2	Possíveis comportamentos das trajetórias de $Y \in \mathfrak{X}_1$	162
7.3	Possíveis comportamentos das trajetórias de $Y \in \mathfrak{X}_1$ (continuação).	163

Sumário

Sumário	17
1 Introdução	21
2 Resultados preliminares	27
2.1 Campos de vetores suaves	27
2.1.1 Teorema Clássico de Peixoto no plano	29
2.1.2 Teorema Clássico de Peixoto em variedades bidimensionais	30
2.1.3 Espaço de campos de codimensão-1 em variedades bidimensionais sem bordo	31
2.1.4 Espaço de campos de codimensão-1 em variedades bidimensionais com bordo	32
2.2 Campos de vetores suaves por partes	32
2.3 Integrabilidade	42
2.4 Reversibilidade	44
2.5 Análise local a partir de cartas locais	44
3 Análise de elementos de codimensão-1 e de órbitas não trivialmente recorrentes	49
3.1 Introdução	49
3.2 Análise de elementos de codimensão-1	51
3.2.1 Σ -singularidades quase-elementares e colisão de pontos de equilíbrio hiperbólicos com a descontinuidade Σ	51
3.2.2 Poli-trajetória fechada semi-hiperbólica e trajetória fechada tan- gente à descontinuidade Σ	56
3.2.3 Conexão de separatrizes quase-genéricas	66
3.3 Recorrência não trivial	70
4 Campos de vetores suaves por partes refrativos parcialmente integráveis	77
4.1 Introdução	77

4.2	Resultados preliminares	78
4.2.1	Algumas considerações sobre campos de vetores suaves por partes refrativos	79
4.3	Análise local	81
4.3.1	Condições de estabilidade estrutural local para campos de vetores refrativos	81
4.3.2	Análise local de elementos de codimensão-1 para campos de vetores refrativos	82
4.3.3	Conexões de separatrizes e poli-trajetórias	89
4.4	Espaço de campos estruturalmente estáveis em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$	95
4.5	Espaço de campos de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$	100
4.6	Estabilidade estrutural em $\mathfrak{R}$	106
5	Campos de vetores suaves por partes parcialmente integráveis	111
5.1	Introdução	111
5.2	Espaço de campos estruturalmente estáveis em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$	112
5.3	Espaço de campos de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$	116
6	Centros e ciclicidade para campos suaves definidos em esferas	123
6.1	Introdução	123
6.2	Preliminares	126
6.2.1	Introduzindo o problema	126
6.2.2	Constantes de Lyapunov e ciclicidade local	128
6.3	Centros para campos lineares e quadráticos homogêneos	132
6.3.1	Caso linear	133
6.3.2	Caso quadrático homogêneo	134
6.4	Centros e ciclicidade para campos de vetores quadráticos	138
6.4.1	Caracterização de centros	139
6.4.2	Bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude	145
6.4.3	Ciclicidade em campos de vetores complexos	147
7	Centros e ciclicidade para campos suaves por partes definidos em esferas	153
7.1	Introdução	153
7.2	Preliminares	155
7.2.1	Mudança de coordenadas ortogonais e projeção estereográfica.	155
7.2.2	Constantes de Lyapunov e ciclicidade local para campos de vetores planares suaves por partes	156
7.3	Campos de vetores lineares com superfícies invariantes	158
7.3.1	Campos de vetores suave por partes lineares com esferas invariantes	158
7.3.2	Campos de vetores lineares com outras superfícies invariantes	167

7.4	Campos de vetores suaves por partes quadráticos homogêneos e contínuos .	170
7.5	Ciclicidade local para campos de vetores quadráticos em $\mathcal{X}_2$	174
8	Conclusões e trabalhos futuros	179
	Referências	181

1 Introdução

Equações diferenciais e sistemas dinâmicos podem ser utilizados para modelar fenômenos naturais e podemos obter informações sobre isso através das soluções desses sistemas. Uma ferramenta interessante para entender o comportamento das soluções de um sistema dinâmico é a existência de *integrais primeiras*, pois quando existem as trajetórias do campo vetorial permanecem restritas às superfícies de nível dessas funções. Quando trabalhamos com um sistema n -dimensional, dizemos que ele é completamente integrável quando tem $n - 1$ integrais primeiras independentes e as órbitas de um sistema completamente integrável são obtidas apenas intersectando os conjuntos de nível das integrais primeiras. Outros conceitos importantes no entendimento do comportamento das soluções de um sistema diferencial e na classificação de retratos de fase de campos de vetores suaves são os de equivalência topológica (ver Definição 2.1) e estabilidade estrutural (ver Definição 2.3), que buscam responder sob quais hipóteses campos de vetores tem o mesmo comportamento. Nesse sentido, os Teoremas de Peixoto [42, 43] classificam os campos de vetores estruturalmente estáveis em regiões planares e variedades bidimensionais. Além disso, em [47, 51] foram exibidas classificações dos campos de vetores de codimensão-1 definidos em variedades bidimensionais sem e com bordo, respectivamente. Mais detalhes podem ser vistos na Seção 2.1.

Em 1880s o conceito de *ciclo limite* (i.é. órbita periódica isolada) foi introduzido por H. Poincaré e o problema em aberto mais importante relacionado a esse tema foi apresentado por D. Hilbert, em 1900, no *International Congress of Mathematicians - ICM*, em Paris. A segunda parte do décimo sexto problema de Hilbert busca uma estimativa para o número máximo de ciclos limite que um campo vetorial polinomial planar pode ter. Para mais detalhes, indicamos [30].

Nos últimos anos, o comportamento de sistemas dinâmicos suaves por partes também tem sido estudado e uma formulação rigorosa do problema foi dada por Filippov, em [21]. Esta teoria é muito importante em aplicações físicas e biológicas, veja [16] por exemplo.

Nesse sentido, consideramos

$$Y(x, y, z) = \begin{cases} X^+(x, y, z), & z \geq 0, \\ X^-(x, y, z), & z \leq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

um campo de vetores suave por partes 3-dimensional com região de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z); z = 0\}$. Assumimos que Y pode ser multivaluado em Σ e seguimos as convenções de Filippov nas regiões de escape e deslize. As definições precisas podem ser vistas na Seção 2.2.

No caso suave por partes, assim como no caso suave, a integrabilidade dos campos de vetores $X^\pm$ é uma ferramenta importante para entender o comportamento das trajetórias de $Y = (X^+, X^-)$, na classificação de retratos de fase e também para responder a questões relacionadas com a existência de ciclos limite costurantes (órbita periódica de costura isolada). Veja [39] para mais detalhes.

Outro conceito importante na classificação de retratos de fase de campos de vetores suaves por partes é a Σ -equivalência. Dizemos que dois campos de vetores suaves por partes $Y = (X^+, X^-)$ e $\tilde{Y} = (\tilde{X}^+, \tilde{X}^-)$ são Σ -equivalentes se existe um homeomorfismo h que leva órbitas de Y em órbitas de $\tilde{Y}$ preservando a orientação das órbitas e tal que $h(\Sigma) = \Sigma$. Para mais detalhes, veja Seção 2.2. Nesse sentido, podemos encontrar uma caracterização local dos elementos estruturalmente estáveis e de codimensão-1, para sistemas suaves por partes planares, em [28, 34], por exemplo.

Denotamos por $\mathcal{X}$ a classe dos campos de vetores suaves $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que admitem $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ como integral primeira, munido da topologia C^r . Isso significa que todas as esferas centradas na origem e com raio ρ , $\mathbb{S}_\rho^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$, são invariantes pelo fluxo de X . Denotamos por $\mathcal{X}_n$ quando as componentes de $X \in \mathcal{X}$ são polinômios de grau n . Também consideramos a classe de campos de vetores suaves por partes dada por (1.1) tais que $X^+, X^- \in \mathcal{X}$. Denotamos esta classe por $\mathfrak{X}$ e por $\mathfrak{X}_n$ quando $X^+, X^- \in \mathcal{X}_n$. Portanto se $Y \in \mathfrak{X}$, então qualquer esfera centrada na origem é invariante pelo fluxo do sistema suave por partes Y . Munimos a classe $\mathfrak{X}$ com a topologia produto de classe C^r , como usual.

Também consideramos o caso em que $Y \in \mathfrak{X}$ é *refrativo*, veja Definição 4.6. Em suma, significa que a primeira derivada de Lie de $f(x, y, z) = z$ nas direções de X e de Y em $p = (x, y, 0) \in \Sigma$ coincidem, conforme definido com mais detalhes na Seção 4.2. A principal motivação para estudar este caso reside em aspectos da Teoria do Controle onde enfatizamos o notável trabalho de I. Ekeland em [19], no qual o principal problema no cálculo clássico de variações foi estudado. Denotamos por $\mathfrak{R}$ o espaço de todos os campos de vetores refrativos $Y = (X^+, X^-)$ em $\mathfrak{X}$ e munimos $\mathfrak{R}$ com a topologia induzida da topologia produto de classe C^r . Para $\lambda > 0$, suficientemente pequeno, consideramos o conjunto $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$ formado por todos os campos de vetores suaves por partes refrativos definidos em $\mathbb{S}_\lambda^2$ tendo $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}_\lambda^2; z = 0\}$ como região de descontinuidade. Note que se $Z \in \mathfrak{R}$, então para cada $\lambda > 0$ a restrição $Z|_{\mathbb{S}_\lambda^2} \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$.

Nossos principais objetivos são:

1. Estudar o problema de estabilidade estrutural e bifurcações de codimensão-1 na classe

$\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. Utilizar os resultados obtidos para estudar, localmente, o problema de estabilidade estrutural na classe $\mathfrak{R}$.

2. Estudar o problema de estabilidade estrutural e bifurcações de codimensão-1 na classe $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$.
3. Estudar o problema de centro foco e ciclicidade na classe $\mathcal{X}_n$, $n = 1, 2$.
4. Estudar o problema de centro foco e ciclicidade na classe $\mathfrak{X}_n$, $n = 1, 2$.

A seguir, descrevemos os resultados obtidos. Os enunciados, detalhados, estão no corpo do texto.

No que diz respeito ao primeiro objetivo, buscamos caracterizar os conjuntos $\Sigma_0^{S_\lambda}$ e $\Sigma_1^{S_\lambda}$ dos campos estruturalmente estáveis e de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$ e também buscamos caracterizar um subconjunto $\Sigma_0 \subset \mathfrak{R}$ tendo uma descrição simples e compreensiva de modo que se $Z \in \mathfrak{R}$ é localmente estruturalmente estável, então $Z \in \Sigma_0$. Estabelecemos esse resultado no Teorema 4.1, na Seção 4.6. O Teorema 4.1 não é de caráter global em $\mathbb{R}^3$ mas no desenvolvimento de sua prova precisaremos estabelecer alguns resultados globais envolvendo estabilidade estrutural e bifurcações genéricas de campos de vetores suaves por partes refrativos definidos em uma esfera bidimensional $\mathbb{S}_\lambda^2$, com $\lambda > 0$ finito. Na verdade, lidamos com um campo de vetores suave por partes refrativo tridimensional definido em um conjunto folheado por esferas bidimensionais.

Os seguintes passos devem ser levados em consideração para obtermos o Teorema 4.1. Primeiramente, analisamos os aspectos locais da estabilidade estrutural e das bifurcações de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, nas Seções 4.3.1 e 4.3.2. Depois disso, estudamos os aspectos globais em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, nas Seções 4.4 e 4.5, provando os Teoremas 4.2 e 4.3, que são descritos a seguir. O Teorema 4.2 é uma versão do Teorema de Peixoto sobre $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. O resultado clássico pode ser encontrado em [43], e o Teorema 4.3 é inspirado nos resultados sobre bifurcações genéricas de campos de vetores suaves definidos em variedades bidimensionais, que podem ser encontrados em [47, 51]. Observamos que sistemas refrativos são estruturalmente instáveis no contexto geral de sistemas suaves por partes. Os resultados comentados são baseados em [8].

No que diz respeito ao segundo objetivo, estudamos os conjuntos $\Xi_0^{S_\lambda}$ e $\Xi_1^{S_\lambda}$ dos campos estruturalmente estáveis e de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Os resultados obtidos são detalhados nos Capítulos 3 e 5. A abordagem é semelhante à do objetivo anterior.

No que diz respeito ao terceiro objetivo. Seja $X \in \mathcal{X}_1$ um campo de vetores linear. Logo $\langle x, X(x) \rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e, portanto, X é homogêneo e pode ser escrito na forma

$$X(x; a_1, a_2, a_3) = (-a_1y - a_2z, a_1x - a_3z, a_2x + a_3y), \quad (1.2)$$

com $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. No Capítulo 6 demos uma classificação qualitativa dos pontos de equilíbrio de (1.2), provando que se $p \in \mathbb{S}_\rho^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$ é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (1.2) em $\mathbb{S}_\rho^2$, então p é um centro. Além disso, o sistema é completamente integrável.

Inspirados pela homogeneidade dos campos de vetores $X \in \mathcal{X}_1$ estudamos e classificamos os pontos de equilíbrio do tipo centro na classe dos campos de vetores quadráticos homogêneos $X \in \mathcal{X}_2^H$. Na Seção 6.3 veremos que o comportamento dos campos lineares e quadráticos homogêneos é o mesmo em todas as esferas invariantes. Essa propriedade não é válida para campos quadráticos não homogêneos. Nesse caso, pela dificuldade do problema, faremos o estudo restrito a esfera unitária $\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, exibindo algumas famílias de centros para campos de vetores $X \in \mathcal{X}_2$ na esfera $\mathbb{S}_1^2$.

Finalmente, analisamos a ciclicidade local das famílias de centros obtidas para $X \in \mathcal{X}_2$ e também de focos-fracos, estudando bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude a partir de um foco-fraco ou de um centro em $\mathbb{S}_1^2$. Nesse sentido, exibimos um sistema quadrático para o qual existem 4 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando do ponto $(0, 1, 0)$, na esfera $\mathbb{S}_1^2$ (no Teorema 6.4). Essa foi a melhor cota obtida. Os resultados comentados são baseados em [10].

No que diz respeito ao quarto objetivo, consideramos, primeiramente, $X \in \mathcal{X}_1$. Como vimos, X é dado por (1.2). Assim, $Y = (X^+, X^-) \in \mathfrak{X}_1$ é um campo de vetores suave por partes 3-dimensional da forma

$$Y(x, y, z) = \begin{cases} X^+(x; a_1^+, a_2^+, a_3^+), & z \geq 0, \\ X^-(x; a_1^-, a_2^-, a_3^-), & z \leq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

com

$$X^\pm(x; a_1^\pm, a_2^\pm, a_3^\pm) = (-a_1^\pm y - a_2^\pm z, a_1^\pm x - a_3^\pm z, a_2^\pm x + a_3^\pm y).$$

No Teorema 7.1 provamos que nenhum campo de vetores suave por partes $Y \in \mathfrak{X}_1$, dado por (1.3) admite ciclos limite na esfera $\mathbb{S}_\rho^2$.

Inspirados pela propriedade de homogeneidade dos campos de vetores lineares em $\mathfrak{X}$, estudamos e fornecemos algumas famílias de centros para os campos de vetores suave por partes homogêneos que sejam contínuos em Σ . Essas famílias são exibidas na Seção 7.4.

Finalmente, também analisamos a ciclicidade local de pontos de equilíbrio do tipo centro em $\mathfrak{X}_2$. Além disso, estudamos bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude a partir de centros e de um foco-fraco, em $\mathbb{S}_1^2$, com perturbações suaves por partes em $\mathfrak{X}_2$. No Teorema 7.2 mostramos que existe ao menos 10 ciclos limite costurantes hiperbólicos na família quadrática $\mathfrak{X}_2$ em $\mathbb{S}_1^2$. Esse foi o maior número de ciclos limite em torno de um ponto de equilíbrio monodrômico na família quadrática $\mathfrak{X}_2$ que encontramos. Os resultados obtidos são baseados em [9].

O Capítulo 8 é dedicado às conclusões e trabalhos futuros.

Os cálculos apresentados neste trabalho foram realizados utilizando o sistema algébrico computacional *Maple*, versão 2018, [40].

8 Conclusões e trabalhos futuros

No Capítulo 4 estendemos os resultados de Peixoto [42, 43] para campos de vetores suaves por partes refrativos definidos em esferas bidimensionais, no Teorema 4.2. Também caracterizamos, no Teorema 4.3, o conjunto de codimensão-1 para tais sistemas. Esses resultados foram fundamentais para obtermos o Teorema 4.1, isto é, para exibirmos condições necessárias para que campos de vetores suaves por partes refrativos sejam estruturalmente estáveis na classe de campos parcialmente integráveis $\mathfrak{R}$, com a integral primeira $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. A volta do Teorema 4.1 é um objetivo mais difícil de ser alcançado. Isso porque, mesmo se pedirmos que $Z \in \Sigma_0^{S^\lambda}$, para todo $\lambda > 0$, não é imediato que conseguimos estender a Σ -equivalência para abertos de $\mathbb{R}^3$, mesmo se trabalharmos em abertos do $\mathbb{R}^3$ que não contenham a origem. Outra questão em aberto é a densidade do conjunto Σ_0 . Além disso, ressaltamos que o Teorema 4.1 não tem caráter global em $\mathbb{R}^3$ e, dessa forma, a discussão não engloba o infinito nem a origem do $\mathbb{R}^3$.

No Capítulo 3 estudamos bifurcações locais de codimensão-1 no espaço $\mathfrak{X}$ e órbitas não trivialmente recorrentes. No Capítulo 5 obtemos respostas sobre a caracterização do espaço de campos estruturalmente estáveis e de codimensão-1, nos Teoremas 5.1 e 5.2. A volta do item (2) dos Teoremas 5.1 e 5.2 requer um melhor entendimento do comportamento das pseudo-poli-trajetórias fechadas e pseudo-poli-trajetórias recorrentes.

No Capítulo 6 consideramos campos de vetores na classe $\mathcal{X}$. O Teorema 6.1 nos dá uma classificação geral dos campos lineares nessa classe. Além disso, classificamos os centros em $\mathcal{X}_2^H$ e exibimos famílias de centros para campos em $\mathcal{X}_2$. Infelizmente, não pudemos concluir a recíproca do Teorema 6.3 por causa do enorme custo computacional para fazer todos os cálculos necessários. A Proposição 6.19 e o Teorema 6.5 fornecem as melhores cotas que obtivemos perturbando um centro (3 ciclos limite) e um foco-fraco (4 ciclos limite, respectivamente) na família $\mathfrak{X}_2$. Vimos também que campos de vetores homogêneos nessa família apresentam comportamento semelhante em todas as esferas. Isso não ocorre para campos quadráticos. Então uma pergunta interessante é entender como o comportamento do campo varia quando consideramos o raio como um parâmetro.

No Capítulo 7, provamos que campos na classe $X \in \mathfrak{X}_1$ não possuem ciclos limite nas esferas invariantes. Além disso, perturbando as famílias de centros exibidas no Capítulo 6 com perturbação suave por partes provamos que existe $X \in \mathcal{X}_2$ que admite ao menos 10

ciclos limite costurantes na esfera $\mathbb{S}_1^2$. Essa é uma boa cota de ciclos limite na família $\mathcal{X}_2$, em relação ao número de parâmetros livres. Além disso, como observamos na Seção 7.3.2 o problema de centros ciclicidade para sistemas suaves e suaves por partes pode ser estudado para campos tridimensionais com hiperboloides ou outras superfícies invariantes, utilizando técnicas semelhantes as utilizadas neste trabalho.

Referências

- [1] ANDRONOV, A. A., LEONTOVICH, E. A., GORDON, I. I., AND MAĬER, A. G. *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont.; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1971. Translated from the Russian.
- [2] BASTOS, J. L. R., BUZZI, C. A., AND TORREGROSA, J. Orbitally symmetric systems with applications to planar centers. *Communications on Pure & Applied Analysis* 20, 10 (2021), 3319–3346.
- [3] BAUTIN, N. N. On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type. *American Math. Soc. Translation 1954*, 100 (1954), 19.
- [4] BROUCKE, M. E., PUGH, C. C., AND SIMIĆ, S. N. Structural stability of piecewise smooth systems. *Comput. Appl. Math.* 20, 1-2 (2001), 51–89.
- [5] BUZZI, C. A. Generic one-parameter families of reversible vector fields. In *Real and complex singularities*, vol. 412 of *Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000, pp. 202–214.
- [6] BUZZI, C. A., CARVALHO, T., AND EUZÉBIO, R. D. On Poincaré-Bendixson theorem and non-trivial minimal sets in planar nonsmooth vector fields. *Publicacions Matemàtiques* 62, 1 (2018), 113–131.
- [7] BUZZI, C. A., ROBERTO, L. A. F., AND TEIXEIRA, M. A. Stability conditions for reversible and partially integrable systems. *Port. Math.* 78, 1 (2021), 43–63.
- [8] BUZZI, C. A., RODERO, A. L., AND TEIXEIRA, M. A. Stability conditions for piecewise refractive vector fields partially integrable. Preprint, December 2021.
- [9] BUZZI, C. A., RODERO, A. L., AND TORREGROSA, J. Centers and limit cycles for piecewise linear and quadratic vector fields on invariant spheres. Preprint, October 2021.

-
- [10] BUZZI, C. A., RODERO, A. L., AND TORREGROSA, J. Centers and limit cycles of vector fields defined on invariant spheres. *Journal of Nonlinear Science* 31 (2021), 92, 28.
- [11] CASTILLO, J., LLIBRE, J., AND VERDUZCO, F. The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems. *Nonlinear Dynamics* 90, 3 (2017), 1829–1840.
- [12] CAUBERGH, M., LLIBRE, J., AND TORREGROSA, J. Global phase portraits of some reversible cubic centers with collinear or infinitely many singularities. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22, 11 (2012), 1250273, 20.
- [13] CHICONE, C., AND JACOBS, M. Bifurcation of critical periods for plane vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* 312, 2 (1989), 433–486.
- [14] CHRISTOPHER, C. Estimating limit cycle bifurcations from centers. In *Differential equations with symbolic computation. Trends in Mathematics*. Birkhäuser Basel, 2005, pp. 23–35.
- [15] DEISS, H. S. Katherine Johnson: A lifetime of STEM. *National Aeronautics and Space Administration (NASA)*. Available on <https://www.nasa.gov/audience/foreducators/a-lifetime-of-stem.html>, 2020. Online. Accessed in November 12, 2021.
- [16] DI BERNARDO, M., BUDD, C. J., CHAMPNEYS, A. R., AND KOWALCZYK, P. *Piecewise-smooth dynamical systems. Theory and applications*, vol. 163 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, London, 2008.
- [17] DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, Rio de Janeiro, 6^a ed, 2014.
- [18] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., AND ARTÉS, J. C. *Qualitative theory of planar differential systems*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [19] EKELAND, I. Discontinuités de champs hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 47 (1977), 5–32.
- [20] FALCONI, M., AND LLIBRE, J. $n-1$ independent first integrals for linear differential systems in $\mathbf{R}^n$ and $\mathbf{C}^n$. *Qualitative theory of dynamical systems* 4 (2004), 233–254.
- [21] FILIPPOV, A. F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. 18 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Springer, Dordrecht, 1988. Originally published in Russian.

-
- [22] FREIRE, E., PONCE, E., AND TORRES, F. On the critical crossing cycle bifurcation in planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations* 259, 12 (2015), 7086–7107.
 - [23] GASULL, A., AND TORREGROSA, J. Center-focus problem for discontinuous planar differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13, 7 (2003), 1755–1765.
 - [24] GINÉ, J., GOUVEIA, L. F., AND TORREGROSA, J. Lower bounds for the local cyclicity for families of centers. *Journal of Differential Equations* 275 (2021), 309–331.
 - [25] GOMIDE, O. M. L. *On stability conditions for Filippov and hamiltonian systems*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, 2019.
 - [26] GOUVEIA, L. F., AND TORREGROSA, J. The local cyclicity problem. Melnikov method using Lyapunov constants. Preprint, March 2020.
 - [27] GOUVEIA, L. F., AND TORREGROSA, J. Lower bounds for the local cyclicity of centers using high order developments and parallelization. *Journal of Differential Equations* 271 (2021), 447–479.
 - [28] GUARDIA, M., SEARA, T. M., AND TEIXEIRA, M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations* 250, 4 (2011), 1967–2023.
 - [29] HAN, M. Liapunov constants and Hopf cyclicity of Liénard systems. *Ann. Differential Equations* 15, 2 (1999), 113–126.
 - [30] ILIEV, I. D. The number of limit cycles due to polynomial perturbations of the harmonic oscillator. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 127, 2 (1999), 317–322.
 - [31] ILYASHENKO, Y. Centennial history of Hilbert’s 16th problem. *Bulletin of the American Mathematical Society* 39, 3 (2002), 301–354.
 - [32] JACQUEMARD, A., AND TEIXEIRA, M. A. Invariant varieties of discontinuous vector fields. *Nonlinearity* 18 (2005), 21–43.
 - [33] JUCÁ, J. D. S. *Conjuntos limite e transitividade de campos vetoriais suaves por partes em variedades Riemannianas bi-dimensionais*. PhD thesis, Universidade Federal de Goiás. Instituto de Matemática e Estatística, 2020.

-
- [34] KUZNETSOV, Y. A., RINALDI, S., AND GRAGNANI, A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13, 8 (2003), 2157–2188.
 - [35] LAMB, J. S. W., AND ROBERTS, J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 112, 1-2 (1998), 1–39. Proceedings of the Workshop on Time-Reversal Symmetry in Dynamical Systems.
 - [36] LARROSA, J. F. *Generic bifurcation in planar Filippov systems*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2015.
 - [37] LLIBRE, J., AND PESSOA, C. Homogeneous polynomial vector fields of degree 2 on the 2-dimensional sphere. *Extracta Mathematicae* 21, 2 (2006), 167–190.
 - [38] LLIBRE, J., AND PESSOA, C. Invariant circles for homogeneous polynomial vector fields on the 2-dimensional sphere. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* 55 (2006), 63–81.
 - [39] LLIBRE, J., AND TEIXEIRA, M. A. Periodic orbits of continuous and discontinuous piecewise linear differential systems via first integrals. *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences* 12 (2018), 121–135.
 - [40] MAPLESOFT, A DIVISION OF WATERLOO MAPLE INC. Maple.
 - [41] NOVAES, D. D., TEIXEIRA, M. A., AND ZELI, I. O. The generic unfolding of a codimension-two connection to a two-fold singularity of planar Filippov systems. *Nonlinearity* 31, 5 (2018), 2083–2104.
 - [42] PEIXOTO, M. C., AND PEIXOTO, M. M. Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 31, 2 (1959), 135–160.
 - [43] PEIXOTO, M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* 1, 2 (1962), 101–120.
 - [44] QUISPE, J. E. A. *Estabilidade estrutural de campos de vetores suave por partes*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2014.
 - [45] ROMANOVSKI, V. G., AND SHAFER, D. S. *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach*. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2009.
 - [46] ROUSSARIE, R. *Bifurcation of planar vector fields and Hilbert’s sixteenth problem*, vol. 164 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

-
- [47] SOTOMAYOR, J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 43 (1974), 5–46.
 - [48] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, vol. 11 of *Projeto Euclides*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
 - [49] SOTOMAYOR, J., AND MACHADO, A. L. F. Structurally stable discontinuous vector fields in the plane. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* 3, 37 (2002), 227–250.
 - [50] SOTOMAYOR, J., AND TEIXEIRA, M. A. Regularization of discontinuous vector fields. In *International Conference on Differential Equations (Equadiff 95), Lisboa, 1995*. World Scientific, pp. 207–223.
 - [51] TEIXEIRA, M. A. Generic bifurcation in manifolds with boundary. *Journal of Differential Equations* 25, 1 (1977), 65–89.
 - [52] TEIXEIRA, M. A. Generic singularities of discontinuous vector fields. *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 53, 2 (1981), 257–260.
 - [53] ZHANG, X. *Integrability of dynamical systems: algebra and analysis*, vol. 47 of *Developments in Mathematics*. Springer, Singapore, 2017.