



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Daniel Celso Daltin

CONTROLE ÓTIMO E SUB-ÓTIMO DE ESTRUTURA
FLEXÍVEL ROTACIONAL NÃO LINEAR DE ORDEM
FRACIONÁRIA

Bauru

2021

Daniel Celso Daltin

CONTROLE ÓTIMO E SUB-ÓTIMO DE ESTRUTURA
FLEXÍVEL ROTACIONAL NÃO LINEAR DE ORDEM
FRACIONÁRIA

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica na Área de Concentração: Automação, Linha de Pesquisa: Mecatrônica, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Átila Madureira Bueno

Co-Orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar

Bauru

2021

Daltin, Daniel Celso.

Controle ótimo e sub-ótimo de estrutura flexível
rotacional não linear de ordem fracionária /

Daniel Celso Daltin, 2021

129 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Átila Madureira Bueno

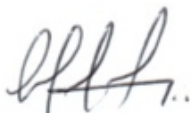
Co-Orientador: Prof. Dr. José Manoel Balthazar

Tese (Doutorado)- Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2021

1. Cálculo fracionário. 2. Controle de vibração.
3. Equações de riccati dependente do estado.
4. Estruturas flexíveis. I. Universidade
Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE DANIEL CELSO DALTIN, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 06 dias do mês de agosto do ano de 2021, às 14:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de DANIEL CELSO DALTIN, intitulada **CONTROLE ÓTIMO E SUB-ÓTIMO DE ESTRUTURA FLEXÍVEL ROTACIONAL NÃO LINEAR DE ORDEM FRACIONÁRIA**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. ATILA MADUREIRA BUENO (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia de Controle e Automação / Instituto de Ciência e Tecnologia - UNESP - Câmpus de Sorocaba, Prof. Dr. ANGELO MARCELO TUSSET (Participação Virtual) do(a) Departamento de Eletrônica / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Prof. Dr. WESLEY ANGELINO DE SOUZA (Participação Virtual) do(a) Departamento Acadêmico de Elétrica (DAELE) / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR / Campus de Cornélio Procopio, Prof. Dr. ANDRE LUIZ ANDREOLI (Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. PAULO JOSÉ AMARAL SERNI (Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia de Controle e Automação / Instituto de Ciência e Tecnologia - UNESP - Câmpus de Sorocaba. Após a exposição pelo doutorando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. ATILA MADUREIRA BUENO

Dedicatória...

*Dedico esse trabalho à minha mãe Augusta Ferreira Daltin, aos meus irmãos e amigos,
que sempre me apoiaram desde o início até o término do Doutorado.*

*Dedico também esse trabalho a todos os Professores do Curso de Pós-Graduação
Engenharia Elétrica, pelo incentivo, dedicação e profissionalismo.*

"Tudo quanto te vier à mão para fazer, faze-o conforme as tuas forças,
porque na sepultura, para onde tu vais, não há obra, nem indústria,
nem ciência, nem sabedoria alguma".

Eclesiastes 9:10

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela minha existência, por me dar saúde, sabedoria, discernimento e muita força para superar todas as dificuldades, e por tudo que ele me proporcionou na minha vida pessoal e profissional, pois sem ele não conseguiria realizar meus sonhos.

Ao meu Orientador Professor Doutor Átila Madureira Bueno pela oportunidade em realizar este estudo. Pelo apoio em todas horas, pelos conselhos técnicos e pessoais e pelo grande apoio e companheirismo durante o decorrer do curso e no desenvolvimento deste trabalho e meu Co-Orientador Professor Doutor José Manoel Balthazar pela paciência, amizade e oportunidade por confiar e ter implantado em mim a semente pelo gosto à pesquisa e por toda atenção para que este trabalho se concretizasse.

Em especial à minha querida Mãe que me acompanhou durante o curso, que em todos os momentos esteve presente nas dificuldades, obstáculos e desafios, que enfrentei durante essa nova trajetória acadêmica em minha vida.

Aos meus Professores, Prof. Dr. André Luiz Andreoli, Prof. Dr. Angelo Marcelo Tusset, Prof. Dr. Clivaldo de Oliveira, Prof. Dr. Maurício Aparecido Ribeiro, Prof. Dr. Paulo José Amaral Serni e o Prof. Dr. Wesley Angelino de Souza.

Aos meus amigos, Rodolfo Galati Machado e Cilene de Oliveira, e aos colegas de laboratório Unesp-Sorocaba que me acompanharam até a conclusão do Doutorado.

À Universidade Estadual Paulista - UNESP, em especial à Faculdade de Engenharia de Bauru - FEB e ao Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba - ICTS, que proporcionaram os meios necessários para a realização e término do Doutorado. Agradeço a todos que de alguma forma colaboraram para a elaboração, execução e finalização desse trabalho e também na conclusão do Doutorado.

Àquelas pessoas que aqui não foram citadas, mas que de alguma forma, colaboraram para o sucesso da conclusão do Doutorado, meus sinceros agradecimentos.

Encerro fazendo um agradecimento especial à banca examinadora pela revisão e sugestões de melhorias para este trabalho.

Resumo

DALTIN, D. C., CONTROLE ÓTIMO E SUB-ÓTIMO DE ESTRUTURA FLEXÍVEL ROTACIONAL NÃO LINEAR DE ORDEM FRACIONÁRIA, Bauru: Faculdade de Engenharia, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 2021, 129 p., Tese de Doutorado.

Esta pesquisa propõe o estudo de sistema de controle em viga flexível rotacional, utilizando os métodos LQR, SDRE, Cálculo Fracionário, LQT, SDRE-TC e LCTF, para sistemas não lineares de vibração, e respectivamente o controle das vibrações, buscando realizar o detalhamento do comportamento dinâmico, identificando os impactos na estrutura flexível. As principais motivações para os estudos propostos vêm das recentes discussões em relação aos problemas que precisam ser mitigados e controlados para tornar os sistemas estáveis e robustos e, com isso, proporcionar maior desempenho estrutural. Analisar essas situações expostas visa, dentro das diversas áreas da engenharia, proporcionar maior margem de segurança e estabilidade do equipamento, da carga e dos usuários. Dessa forma, os objetivos da pesquisa são estudar o comportamento dinâmico não linear de estruturas flexíveis, utilizando os métodos acima supracitado, e o controle das vibrações aplicados em viga flexível rotacional delgada. A metodologia baseou-se no desenvolvimento de modelos matemáticos aplicados em sistemas não lineares de sistema de quarta ordem, que para tanto será utilizado a equação de movimento Euler-Lagrange, as Equações de Riccati Dependente do Estado (SDRE) e o Cálculo Fracionário. Os modelos foram verificados e validados por meio dos resultados simulados numericamente. Os resultados da simulação numérica com os controladores propostos mostraram eficácia para controlar sistemas não lineares e foi possível observar o comportamento dinâmico da viga flexível.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário. Controle de vibração. Equações de Riccati Dependente do Estado (SDRE). Estruturas flexíveis.

Abstract

DALTIN, D. C., OPTIMAL AND SUB-OPTIMAL CONTROL OF FLEXIBLE ROTATIONAL FRACTIONAL FRAMEWORK OF FRACTIONARY ORDER, Bauru: Faculty of Engineering, UNESP - São Paulo State University, 2021, 129 p., PhD.Thesis.

This research proposes the study of a rotational flexible beam control system, using the LQR, SDRE, Fractional Calculus, LQT, SDRE-TC and LCTF methods, for non-linear vibration systems, and respectively the vibration control, seeking to carry out the details dynamic behavior, identifying the impacts on the flexible structure. The main motivations for the proposed studies come from recent discussions regarding the problems that need to be mitigated and controlled in order to make the systems stable and robust and, therefore, provide greater structural performance. Analyzing these exposed situations aims, within the various areas of engineering, to provide a greater margin of safety and stability for the equipment, charge and users. Thus, the objectives of the research are to study the non-linear dynamic behavior of flexible structures, using the methods mentioned above, and the control of vibrations applied to a thin rotational flexible beam. The methodology was based on the development of mathematical models applied to non-linear fourth-order systems, which will use the Euler-Lagrange equation of motion, the State-Dependent Riccati Equations (SDRE) and the Fractional Calculus. The models were verified and validated through numerically simulated results. The results of the numerical simulation with the proposed controllers showed efficiency to control nonlinear systems and it was possible to observe the dynamic behavior of the flexible beam.

Keywords: Fractional Calculation. Vibration Control. State-Dependent Riccati Equation (SDRE). Flexible Structures.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama de Blocos representado Espaço dos Estados.	11
2.2	Fluxograma de cálculo do SDRE.	19
2.3	Diagrama de Blocos da Equação Diferencial de Ordem Fracionária (2.29).	28
2.4	Diagrama de Blocos em Tempo Discreto (2.30).	29
3.1	Sistema <i>Rotary Flexible Link</i>	32
3.2	Representação do movimento da viga flexível.	35
3.3	Circuito da armadura do motor CC e caixa de engrenagens.	36
3.4	Modelo físico da viga flexível.	38
3.5	Representação da curva de resposta de um sistema com não-linearidade cúbica na rigidez.	39
4.1	Diagrama de Blocos (LQT)	61
4.2	Diagrama de Blocos (SDRE-TC)	65
4.3	Diagrama de Blocos (LCTF)	66
4.4	Lugares das Raízes (<i>Root Locus</i>).	67
4.5	Diagrama de Bode.	67
4.6	Resposta ao Degrau Unitário.	68
5.1	Deslocamento angular.	73
5.2	Velocidade angular.	74
5.3	Deslocamento flexível.	74
5.4	Velocidade de deslocamento flexível.	74
5.5	Deslocamento angular / Referência.	75
5.6	Comportamento da entrada de controle à referência aplicada (LQR).	76
5.7	Deslocamento angular.	80

5.8	Velocidade angular.	81
5.9	Deslocamento flexível.	81
5.10	Velocidade de deslocamento flexível.	82
5.11	Deslocamento angular / Referência.	82
5.12	Comportamento da entrada de controle à referência aplicada (SDRE). . .	83
5.13	Deslocamento angular.	84
5.14	Velocidade angular.	85
5.15	Deslocamento flexível.	85
5.16	Velocidade de deslocamento flexível.	86
5.17	Deslocamento angular / Referência.	86
5.18	Comportamento da entrada de controle à referência aplicada (Cálculo Fracionário).	87
5.19	Comportamento da entrada de controle com a realimentação de veloci- dade angular $\dot{\theta}$	87
5.20	Comparação de Ordem Inteira com Fracionária (ordens das derivadas: 0.9 e 1.1) sem controle.	88
5.21	Comparação de Ordem Inteira com Fracionária (ordens das derivadas: 1 e 1) sem controle.	88
5.22	Código para cálculo de coeficientes binomiais.	90
5.23	Código para realizar a soma da memória.	90
5.24	Código da simulação do Controlador LCFT.	91
5.25	Resultados da simulação do Controlador LCFT, $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$	92
5.26	Resultados da simulação do Controlador LCFT, $\mathbf{x}_3(t)$ e $\mathbf{x}_4(t)$	92
5.27	Resultados da simulação do Controlador LCFT, sinal de controle $u(t)$. . .	93
5.28	Código da simulação do Controlador LQT.	94
5.29	Simulação de Validação do Projeto do Controlador LQT. Sinal de refe- rência $z(t)$, posição angular do eixo do motor $x_1(t)$ e velocidade angular $x_2(t)$	95
5.30	Simulação de Validação do Projeto do Controlador LQT. Ângulo de flexão $x_3(t)$ e derivada do ângulo de flexão $x_4(t)$	95
5.31	Simulação de Validação do Projeto do Controlador LQT. Sinal de controle.	96

5.32	Código da simulação do controlador SDRE-TC.	97
5.33	Simulação de Validação do Projeto do Controlador SDRE-TC. Sinal de referência $z(t)$, posição angular do eixo do motor $x_1(t)$ e velocidade angular $x_2(t)$	98
5.34	Simulação de Validação do Projeto do Controlador SDRE-TC. Ângulo de flexão $x_3(t)$ e derivada do ângulo de flexão $x_4(t)$	98
5.35	Simulação de Validação do Projeto do Controlador SDRE-TC. Sinal de controle.	99
5.36	Simulação do Controlador LQT, $x_1(t)$, $x_2(t)$	100
5.37	Simulação do Controlador LQT, $x_3(t)$, $x_4(t)$	100
5.38	Simulação do Controlador LQT, sinal de controle.	101
5.39	Simulação SDRE-TC, $x_1(t)$, $x_2(t)$	102
5.40	Simulação SDRE-TC, $x_3(t)$, $x_4(t)$	102
5.41	Simulação SDRE-TC, sinal de controle.	103

LISTA DE TABELAS

3.1	Parâmetros físicos do sistema <i>Rotary Flexible Link</i>	33
-----	---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivo	5
1.2	Estrutura da Tese	6
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	8
2.1	Vibrações Mecânicas	8
2.2	Representação no Espaço dos Estados	10
2.2.1	Observador de Estados	12
2.3	Regulador Linear Quadrático (LQR)	14
2.4	Método da Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE)	16
2.4.1	Formulação SDRE	17
2.4.2	Coeficiente Dependente do Estado	17
2.4.3	Características do SDRE	19
2.4.4	Aplicações do SDRE	20
2.5	Método do Cálculo Fracionário	23
2.5.1	Definição da Derivada de Ordem Fracionária	23
2.5.2	Aplicações do Cálculo Fracionário	25
2.5.3	Simulação Numérica de Sistema de Ordem Fracionária	27
3	MODELO MATEMÁTICO	32
3.1	Descrição do sistema <i>Rotary Flexible Link</i>	32
3.2	Modelo Matemático de Parâmetros Concentrados	34
3.2.1	Modelo do Motor de Corrente Contínua	35

3.2.2	Modelo Matemático da Viga Flexível Rotacional com o método SDRE	37
3.3	Modelo Matemático do Cálculo Fracionário	44
3.3.1	Modelo Matemático da Viga Flexível Rotacional com o método do Cálculo Fracionário	46
4	PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE DA VIGA FLEXÍVEL ROTACIONAL COM OS MÉTODOS LQT, SDRE-TC E O LCTF	53
4.1	Projeto do Sistema de Controle	58
4.1.1	Controlador (LQT) <i>Linear Quadratic Tracking</i>	59
4.1.2	Controlador (SDRE-TC) <i>State Dependent Riccati Equation Tracking</i>	63
4.1.3	Controlador (LCTF) <i>Lead Compensator with Tachometer Feedback</i>	66
5	RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA	69
5.1	Simulação com Regulador Quadrático Linear (LQR)	69
5.2	Simulação com a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) . .	76
5.3	Simulação com Cálculo Fracionário	83
5.4	Simulação com <i>Lead Compensator with Tachometer Feedback</i> (LCTF) . .	89
5.5	Validação do Projeto do Sistema de Controle LQT	93
5.6	Validação do Projeto do Sistema de Controle SDRE-TC	96
5.7	Controle da Viga Flexível Rotacional com o Cálculo Fracionário	99
6	CONCLUSÃO	104
7	TRABALHOS FUTUROS	105
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	106

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a introdução geral sobre vibração, controle e o método da Equação de Riccati Dependente do Estado (*State-Dependent Riccati Equation*, SDRE) e também o método do Cálculo Fracionário. O objetivo dessa introdução é tornar familiar as teorias que explicam a abordagem utilizada na realização do projeto, assim como apresenta as principais aplicações do estudo. Há também uma breve descrição de aplicação do que consiste o método do Regulador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator*, LQR).

O estudo de vibração corresponde aos movimentos oscilatórios de corpos e às forças que estão associadas. Todos os corpos dotados de massa e elasticidade são capazes de vibrar. Desta maneira, a maior parte das máquinas, equipamentos e estruturas estão sujeitas a certos graus de vibração, sendo assim, é importante determinar estratégias de controle para alcançar movimentos periódicos. Na maioria dos casos, é desejado que estes sistemas mecânicos que são excitados por forças dinâmicas, apresentem respostas com níveis de vibração os mais baixos possíveis, a fim de manter a integridade física de máquinas, equipamentos, estruturas e componentes eletrônicos (TUSSET; MOLTER, 2009).

O controle automático desempenha um papel vital no avanço da engenharia e do desenvolvimento científico. Além de ser extremamente importante para espaçonaves, sistemas de orientação de mísseis e sistemas robóticos, o controle automático tornou-se uma parte importante dos processos modernos da indústria e de fabricação. Levando em consideração os avanços nos aspectos teóricos e práticos do controle automático,

fornece os meios para alcançar o melhor desempenho de sistemas dinâmicos e aumentar a produtividade, engenheiros e cientistas devem, na maioria dos casos, ter um vasto conhecimento nesta área. O primeiro trabalho importante de controle automático foi James Watt, que construiu um Controlador centrífugo no século XVIII para controlar a velocidade do motor a vapor. A partir de 1960, a disponibilidade de computadores digitais tornou possível a análise no domínio do tempo em sistemas complexos, o que levou ao desenvolvimento da moderna teoria de controle baseada na análise de variáveis de estado e tecnologia integrada. A teoria foi desenvolvida para abordar a crescente complexidade dos sistemas modernos e atender a requisitos rigorosos em relação ao peso, precisão e custo de aplicações militares, espaciais e industriais. No intervalo entre 1960 a 1980, o controle ótimo de sistemas determinísticos e estocásticos foi amplamente pesquisado, bem como o controle adaptativo e o controle de aprendizagem de sistemas complexos. De 1980 até o presente, o desenvolvimento da teoria moderna de controle se concentrou no controle robusto, no controle H_∞ e em tópicos relacionados (OGATA, 2003).

Sistemas de estrutura flexível rotacional são comumente encontrados em Engenharia e Ciências Físicas, em aplicações como geradores de turbinas eólicas, guindastes de lança, sistemas aeroespaciais, sistemas micro e nano eletromecânicos, microscopia de força atômica e assim por diante. O movimento vibratório em estruturas flexíveis deve ser controlado e bem amortecido, proporcionando estabilidade e robustez à operação do sistema (BUENO; BALTHAZAR; PIQUEIRA, 2012; ABDEL-RAHMAN; NAYFEH; MASOUD, 2003; LARSEN, 2005).

Na microscopia de força atômica, um micro-cantilever é deliberadamente vibrado em uma amplitude e frequência predefinidas, o sistema de controle é usado para controlar a amplitude e a frequência do micro-cantilever e para demodular o sinal usado para gerar as imagens topográficas (BUENO; BALTHAZAR; PIQUEIRA, 2011).

Em robótica e sistemas aeroespaciais, uma série de aplicações envolve estruturas flexíveis rotacionais. Neste caso, as estruturas são delgadas, pois os sistemas são geralmente projetados para otimizar o peso (KOMATSU *et al.*, 1991).

A geração de energia elétrica por aerogeradores eólicos depende do comprimento da asa, conseqüentemente, o comprimento das asas dos aerogeradores estão se tornando

maiores e otimizados em relação à estrutura, sem um aumento proporcional na rigidez da asa. Como resultado, as asas estão se tornando mais flexíveis e dinamicamente sensíveis, resultando no aumento de fenômenos de vibrações indesejáveis na estrutura (LARSEN, 2005).

Diversas técnicas têm sido usadas para controle de vibração de estruturas flexíveis, incluindo controle ótimo e robusto, controle linear clássico e malha de captura de fase (*Phase-Locked Loop*, PLL) (LOPES; BUENO; BALTHAZAR, 2014; KARKOUB *et al.*, 2000; SETO; K, 2000; YANG; SEDAGHATI, 2014).

Os sistemas de controle de veículos espaciais, satélites artificiais, manipuladores robóticos, guindastes rotativos, entre outros, mesmo se considerados rígidos, apresentam comportamento não linear. Dessa forma, o Projeto de Sistemas de Controle de estruturas flexíveis confronta dificuldades adicionais (BUENO; FERREIRA; PIQUEIRA, 2010).

Çimen (2008) explica que, durante as décadas de 1950 e 1960, as aplicações de engenharia aeroespacial estimularam muito o desenvolvimento da teoria de controle ideal, onde o objetivo era conduzir os estados do sistema para minimizar algumas funções de custo definidas fossem minimizadas. Com isso, tornou possível ter aplicações muito úteis no Projeto dos Reguladores (no qual algum estado estacionário deve ser mantido) e no rastreamento de estratégias de controle (no qual alguma trajetória predeterminada de estado deve ser seguida). Por exemplo, aplicações como o problema das rotas de voo, ideal para aeronaves e veículos espaciais. Um dos métodos populares na comunidade de controle é a estratégia da Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE), que fornece um algoritmo muito eficaz para sintetizar controles de realimentação não lineares, permitindo não linearidades nos estados do sistema e, ao mesmo tempo, oferecendo excelente *design* de flexibilidade através de matrizes de ponderação dependentes do estado. Este método foi proposto inicialmente por Pearson (1962) e posteriormente expandido por (WERNLI; COOK, 1975), (MRACEK; CLOUTIER, 1998) e (FRIEDLAND, 1996).

Desde a década de 1990, as estratégias da Equação de Riccati Dependentes do Estado (SDRE) surgiram como métodos gerais de projeto que fornecem um meio sistemático e eficaz de projetar Controladores, Observadores e filtros não lineares. Esses métodos superaram muitas das dificuldades e deficiências das metodologias existentes no controle

de sistemas e fornecem algoritmos computacionalmente simples que foram altamente eficazes em uma variedade de aplicações práticas e significativas (ÇIMEN, 2008).

Erdem e Alleyne (2004) expõe que, até a publicação do trabalho de Cloutier, D'Souza e Mracek (1996), não se dispunha de um bom método de projeto que permitisse estabelecer um compromisso entre erro de estado e o esforço do controle para sistemas não lineares, como o método do Regulador Linear Quadrático (LQR) ((ANDERSON; MOORE, 1989; ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996)). Desde a sua concepção, na década de 1960, o método LQR tem sido muito pesquisado por Lublin e Athans (1996). O LQR nada mais é do que a solução de um problema convexo de otimização por mínimos quadrados que tem algumas propriedades muito interessantes. Em outras palavras, o controle ótimo automaticamente assegura um sistema em malha fechada estável e é simples de ser calculado. O objetivo do controle ótimo pode essencialmente ser visto como a escolha de um controle que traga o sistema à sua posição de equilíbrio tão rápido quanto possível minimizando o erro de estado e sem usar esforço de controle excessivo. Este método tem sido usado com sucesso em diversas aplicações, entretanto sua aplicabilidade é praticamente restrita a sistemas lineares ou linearizados.

Cloutier, D'Souza e Mracek (1996), dentro do Regulador LQR, aplicou a Equação de Riccati a sistemas não lineares desenvolvendo a metodologia da Equação de Riccati Dependente do Estado (State Dependent Riccati Equation – SDRE). O nome SDRE vem da construção da lei de controle, esta construção utiliza a solução da Equação Algébrica de Riccati, que depende do estado.

A maioria das técnicas de controle mencionadas são apenas para sistemas lineares. Para sistemas não lineares, a Equação de Ricatti Dependente de Estado (SDRE) foi usada com sucesso (LIMA *et al.*, 2016).

Souza, Bigot e Souza (2017) concluíram que o Controlador SDRE permite obter um desempenho melhor que o Regulador LQR.

No desenvolvimento de Projeto de Sistemas de Controle utilizando (SDRE) para que haja uma interface entre a planta e o sistema é comum a aplicação de *softwares*, sendo que o mais utilizado é o MATLAB® / SIMULINK®.

O desafio de controlar vibrações em estruturas flexíveis rotacionais, foi abordado com métodos muito diferentes, desde esquemas clássicos proposto por Cannon e Schmitz

(1984), a métodos não lineares, como controle deslizante, apresentado por Chen e Hsu (2001) ou redes neurais, conforme Su e Khorasani (2001).

Para implementar Projetos de Controladores podem ser também por meio do Cálculo Fracionário, onde o mesmo é aplicado em várias áreas da ciência e da engenharia. Controladores de Ordem Fracionária são a generalização dos Controladores de Ordem Inteira em que as funções derivada e / ou integral são de ordem não uniforme que pode ser um número real ou complexo (AL-SAGGAF *et al.*, 2017).

O Controle de Ordem Fracionária (FOC), ou seja, o uso de derivados e integrais de Ordem Fracionária no campo de controle, foi reconhecido como uma estratégia alternativa para resolver problemas de Controle Robustos. Verificou-se que em campos interdisciplinares, muitos sistemas podem ser descritos por equações diferenciais fracionárias (DELAVERI; LANUSSE; SABATIER, 2013).

Um exemplo de aplicação com o Cálculo Fracionário em estruturas flexíveis, foi pesquisado por Monje *et al.* (2007), no qual resultou em um Projeto de Controlador de Cálculos Fracionários, onde o sinal de controle foi menos ruidoso do que com um Controlador Proporcional-Derivativo (PD) padrão, pois o integrador fracionário age como um filtro passa-baixo e reduz os efeitos do ruído introduzido no circuito de controle. Além disso, com essa estratégia de controle, alterações na carga útil implicam apenas pequenas variações no valor máximo do sinal de controle, evitando possíveis problemas de saturação.

Nos últimos anos, várias aplicações de sistemas de Ordem Fracionária tornaram-se interessantes em muitas áreas. As derivadas de Ordem Fracionária permitem modelar fenômenos complexos com maior exatidão, melhorando os modelos de parâmetros concentrados ou distribuídos (PETRÁŠ, 2011a; FREUNDLICH, 2016; TRZASKA, 2011).

1.1 OBJETIVO

Diante desse contexto, este trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo matemático para sistemas rotacionais em estrutura flexíveis e projetar Controladores para atenuar as vibrações através dos métodos LQR, SDRE, Cálculo Fracionário, LQT, SDRE-TC e LCTF. Além disso, objetiva-se realizar simulação numérica no sistema *Ro-*

tary Flexible Link para validar o Projeto dos Controladores, de modo a controlar a posição angular da viga e atenuar as vibrações oriundas da flexão.

1.2 ESTRUTURA DA TESE

Esta pesquisa encontra-se dividido e organizado de acordo com a numeração nos capítulos e seções exibidos no sumário.

No Capítulo 1 encontra-se a Introdução, no qual explica e contextualiza o problema a ser tratado, assim como apresenta as principais aplicações do estudo. Há também uma breve descrição do que consiste o método LQR, SDRE e também o método do Cálculo Fracionário e o objetivo da pesquisa.

Já o Capítulo 2, apresenta a Revisão Bibliográfica que contém as teorias envolvidas no estudo da viga flexível rotacional, e as técnicas de controle de vibração utilizados em diversos métodos aplicados em sistemas dinâmicos.

O Capítulo 3 consta o desenvolvimento do Modelo Matemático, e está exposta a descrição do equipamento experimental, incluindo parâmetros do *Rotary Flexible Link* necessários para a modelagem do sistema. Nesse capítulo também está contido os procedimentos tomados para alcançar um modelo matemático para uma viga flexível rotacional. Para a obtenção desse modelo foram utilizadas as equações de Euler-Lagrange e as equações do movimento, assim como a matriz de espaço de estados que governam o comportamento do sistema.

Capítulo 4 é demonstrado o Projeto do Sistema de Controle de uma viga flexível rotacional, utilizando os modelos matemáticos baseadas nas três estratégias de controle, que são: o *Linear Quadratic Tracking* (LQT), o *State Dependent Riccati Equation Tracking Controller* (SDRE-TC) e o *Classical Lead Compensator with Tachometer Feedback* (LCTF).

No Capítulo 5 é apresentado os resultados da Simulação Numérica utilizando os métodos LQR, SDRE, Cálculo Fracionário, LQT, SDRE-TC e LCTF, por meio dos gráficos plotados no *software* MATLAB® / SIMULINK®, analisando as variáveis de deslocamento angular e deslocamento flexível na viga e o comportamento da entrada de controle.

O Capítulo 6 é exposta a conclusão sobre os resultados obtidos com as simulações numéricas e o desenvolvimento da modelagem do sistema em uma viga rotacional flexível, utilizando os Controladores LQR, SDRE, Cálculo Fracionário, LQT, SDRE-TC e LCTF.

Por último, no Capítulo 7 é descrita a sugestão para trabalhos futuros, propõe-se a obtenção de dados experimentais aplicando os LQR, SDRE, Cálculo Fracionário, LQT, SDRE-TC e LCTF no sistema *Rotary Flexible Link*.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na Revisão Bibliográfica é apresentada as teorias envolvidas no estudo da viga flexível rotacional, e as técnicas de controle de vibração, sendo respectivamente, o Regulador Linear Quadrático (LQR), a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) e o Cálculo Fracionário, aplicados em sistemas dinâmicos.

2.1 VIBRAÇÕES MECÂNICAS

O estudo de vibrações surgiu a partir de Galileu Galilei (1564-1642) em sua obra *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*, publicado em 1638, no qual Galileu discutiu corpos vibratórios, com enfoque científico. Isaac Newton (1642-1727) publicou sua obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* em 1686, na qual descreveu a lei da gravitação universal, bem como as três leis do movimento. A segunda lei do movimento de Newton é usada em vibrações para derivar as equações de movimento de um corpo em vibração. Brook Taylor (1685-1731) em 1713 apresentou o famoso teorema de Taylor para séries infinitas. A frequência natural de vibrações obtida pela equação de movimento derivada por Taylor concordava com os experimentos de Galileu e Mersenne. Daniel Bernoulli (1700-1782) por meio das equações dinâmicas em suas memórias publicadas pela Berlin Academy em 1755 definiu o princípio da coexistência de pequenas oscilações, no qual é conhecido como princípio da superposição, onde esse princípio é importante para o desenvolvimento da teoria das vibrações. D'Alembert (1717-1783) e Leonard Euler (1707-1783) duvidaram da validade desse princípio, entre-

tanto, J.B.J. Fourier (1768-1830) em sua obra *Analytical theory of heat* (Teoria analítica do calor) em 1822, validou sua expansão sendo provada por ele. Joseph Lagrange (1736-1813) encontrou uma solução analítica da corda vibratória. Tal método para estabelecer a equação diferencial do movimento de uma corda (denominada equação de onda) sobre a teoria da vibração foi desenvolvida primeiro por D'Alembert em suas memórias publicadas pela Academia de Berlim em 1750. Sendo que as vibrações de vigas delgadas apoiadas e engastadas foram estudadas primeiramente por Euler em 1744 e Bernoulli em 1751. Essa abordagem ficou conhecida como a teoria de Euler-Bernoulli ou de viga delgada. Nas abordagens mecânicas muitos problemas básicos incluindo os de vibrações, são não lineares. Lord Baron Rayleigh (1842-1919) publicou um livro sobre a teoria do som, no qual é considerado um clássico tanto no assunto do som quanto na vibração. Rayleigh determinou a frequência fundamental de vibração de um sistema conservativo utilizando o princípio da conservação de energia, conhecido atualmente como método de Rayleigh. Esse método apresentou ser extremamente útil para soluções de difíceis problemas de vibrações. Observa-se que a teoria matemática de vibrações não lineares começou com o trabalho de Poincaré (1854-1912) e Lyapunov (1857-1918). Poincaré desenvolveu o método das perturbações em 1892 em conexão com a solução de problemas de mecânica celeste não lineares. Lyapunov lançou as bases da teoria de estabilidade em 1892, que é aplicável a todos os tipos de sistemas dinâmicos. No século XX, os trabalhos de Duffing e Van der Pol (1889-1959) resultaram nas primeiras soluções definidas da teoria de vibrações não lineares e apresentaram sua importância para a área de engenharia, sendo que qualquer movimento que se repete em um intervalo de tempo é denominado de vibração ou oscilação (RAO, 2008).

Um sistema mecânico de movimento oscilatório é geralmente referido como vibração, a questão básica da vibração é como o sistema responde a vários estímulos ou excitações. A derivação da equação do movimento pode ser realizada por meio de métodos da mecânica Newtoniana ou por métodos de dinâmica analítica, também conhecida mecânica Lagrangiana (MEIROVITCH, 1970).

2.2 REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DOS ESTADOS

O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de valores de variáveis de modo que o conhecimento destes valores em $t = t_0$, e os valores do sinal de entrada para $t \geq t_0$, determina o comportamento do sistema em qualquer instante $t \geq t_0$. Sendo que as variáveis de estado de um sistema dinâmico são as grandezas destes conjuntos de valores que determinam o estado do sistema, onde as variáveis de estado não precisam ser grandezas fisicamente mensuráveis ou observáveis. Variáveis que não representam grandezas físicas e aquelas que não são nem mensuráveis e nem observáveis podem ser escolhidas como variáveis de estados. Se n variáveis de estado são necessárias para descrever o comportamento de um dado sistema, então estas n variáveis de estado podem ser consideradas as n componentes de um vetor x , este vetor é chamado de vetor de estado. O espaço n -dimensional cujos eixos coordenados consistem nos eixos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é chamado Espaço de Estados. As equações no Espaço de Estados são representadas por três tipos de variáveis na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado (OGATA, 2003).

Utilizando-se a notação vetorial-matricial, uma equação de ordem n pode ser representada por uma equação diferencial vetorial-matricial, de primeira ordem. A representação de um sistema físico no Espaço dos Estados é dada por:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

$$y = Cx(t) + Du(t) \quad (2.2)$$

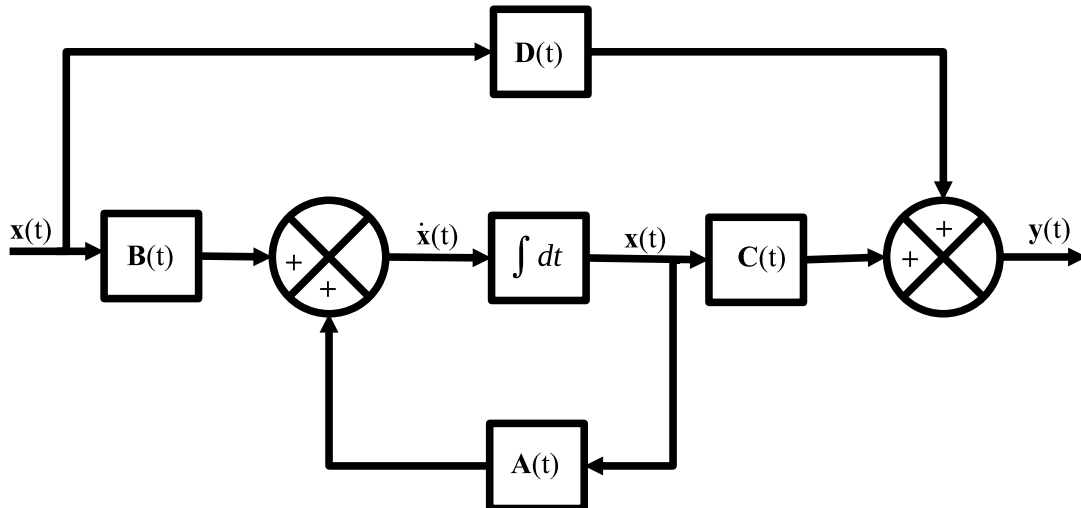
Na qual A é a matriz de estado, B a matriz de entrada, C a matriz de saída ou de observação e D matriz de transmissão direta.

Na abordagem por alocação de pólos no Projeto de Sistemas de Controle, nem todas as variáveis estão disponíveis para realimentação, e por isso, precisa-se estimar as variáveis de estado não disponíveis, sendo que a estimativa de variáveis de estado que não são mensuráveis é denominada observação. Nesse contexto, é necessário que um dispositivo ou programa de computador que estime ou observe as variáveis de estado,

no qual é denominado Observador de Estado (OGATA, 2003).

A Equação (2.1) é chamada de equação de estado e a Equação (2.2) é a equação de saída, ambas as equações são representados em forma de Diagramas de Blocos conforme Figura 2.1.

Figura 2.1: Diagrama de Blocos representado Espaço dos Estados.



Fonte: (OGATA, 2003)

Geralmente em sistemas de controle, o MATLAB[®] é uma ferramenta utilizada para realizar os cálculos, devido a grande probabilidade de ocorrência de erro quando realizados de forma manual, o MATLAB[®] também tem uma excelente interface gráfica que auxilia o engenheiro de controle a verificar se o sistema compensado com o Controlador projetado satisfaz as especificações de projeto. Aliado ao programa têm-se o SIMULINK[®], que faz simulações de sistemas lineares e não-lineares, discretos e contínuos no tempo. Ao projetar um Controlador, pode-se inseri-lo no sistema e realizar a simulação numérica, no qual é possível verificar se tal Controlador satisfaz as especificações de desempenho do sistema (BASILIO, 2004).

Um Projeto de Controle para estimar as variáveis de estado que não são disponíveis por medição direta e uma aplicação do Projeto de Controle em que estima um do vetor de estado para um sistema com Observador de Estado e substituiu um vetor de estado real em modelos de realimentação linear ou não linear sem perder a estabilidade, e concluiu que os Observadores podem efetivamente superar as dificuldades associadas com Projeto de Controle quando o vetor de estado não é mensurável (LUENBERGER,

1966).

A aplicação do Observador de Estado é amplamente utilizado na realimentação de estados em malhas de controle projetadas e representada em Espaço de Estados.

2.2.1 OBSERVADOR DE ESTADOS

A maior parte dos Projetos de Sistemas de Controle está baseada na suposição de que o vetor de estado está disponível por medição direta, mas nem sempre as variáveis de estado estão disponíveis, necessitando assim, estimar as variáveis que não são disponíveis por medição direta, a estimativa de variáveis de estado não mensuráveis é comumente denominada observação, através de um dispositivo (ou programa de computador) que estima ou observa essas variáveis de estado (OGATA, 2003).

No Projeto de Sistemas de Controle utilizando Observadores de Estado, os mesmos podem reconstruir os estados não medidos ou os valores provenientes de pontos de difícil acesso no sistema a partir das variáveis de estado disponíveis (MEIROVITCH, 1990).

O projeto de um sistema que produz uma aproximação para o vetor de estado é chamado de Observador de Estado ou Observador de Luenberger (LUENBERGER, 1966; LUENBERGER, 1964; LUENBERGER, 1971).

Observadores de Estados podem ser projetados se, e somente se, a condição de Observabilidade for satisfeita. Os Observadores de Estados será utilizada a notação $\tilde{x}$ para representar o vetor de estado observado.

Considere a planta definida por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.3)$$

$$y = Cx \quad (2.4)$$

Onde: x = vetor de estados (vetor n)

u = vetor de controle (escalar)

y = sinal de saída (escalar)

A = matriz constante $n \times n$

B = matriz constante $n \times 1$

C = matriz constante $1 \times n$

O Observador é um subsistema para reconstruir o vetor de estado da planta. O modelo matemático do Observador é basicamente o mesmo que o da planta, exceto por um termo adicional, que inclui o erro de estimação para compensar imprecisões nas matrizes A e B e a falta do erro inicial. O erro de estimativa ou erro de observação é a diferença entre as saídas medida e estimada. O erro inicial é a diferença entre o estado inicial e o estado inicial estimado. Assim, define-se o modelo matemático do Observador como:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x}) = (A - K_eC)\tilde{x} + Bu + K_ey \quad (2.5)$$

O estado x é aproximado pelo estado $\tilde{x}$ que é o estado estimado e $C\tilde{x}$ é a saída estimada, as entradas do Observador são a saída y e a entrada de controle u . A matriz K_e , que é denominada de matriz de ganho de Observador, é uma matriz de ponderação para o termo de correção envolvendo a diferença entre a saída medida y e a saída estimada $C\tilde{x}$. Este termo corrige continuamente a saída do modelo e melhora o desempenho do Observador (OGATA, 2003).

O Observador de Estados pode ser projetado e implementado um modelo de controle de modo de deslocamento com base em um Observador de atraso inercial, onde o Observador estima os estados, bem como as incertezas e perturbações de forma integrada. Para avaliar o desempenho do Observador e do Controlador, a experimentação foi realizada sem incertezas e perturbações e em seguida, adicionado 20% de incertezas e distúrbios no sistema. As incertezas de modelagem e as perturbações presentes no sistema proporcionam melhores resultados em comparação com o Observador proporcional clássico. A metodologia foi validada através da experimentação do servomecanismo da Quanser® e os resultados mostraram a eficácia da combinação entre Controlador-Observador (GINOYA *et al.*, 2011).

Normalmente os modos flexíveis presentes nos manipuladores com vigas flexíveis (*Flexible Link Manipulator - FLM*) causam vibrações que limitam o desempenho do FLM, sendo necessário controlar e atenuar essas vibrações. Desta forma o controle do

manipulador flexível utilizando os Modos Discretos de Deslocamento (*Discrete Sliding Mode - DSM*) e o Observador de Modo Discreto de Deslocamento (*Discrete Sliding Mode Observer - DSMO*) foram projetados para a estimar os estados onde o erro de estimativa de saída tende a zero em tempo finito. O DSMC com DSMO foi implementado experimentalmente para posicionar a ponta da viga flexível, onde o deslocamento angular almejado foi mantido em $\theta = 25^\circ$. Os autores validaram o método por meio de simulações numéricas (KURODE; MERCHANT, 2013).

Daltin (2017) aplicou-se os conceitos de Observador de Estados em uma viga flexível rotacional, e com isso estimou-se em tempo real as variáveis de estado, e determinou a velocidade angular de corpo rígido, no eixo do motor de Corrente Contínua (CC), bem como a amplitude de flexão da viga. Dessa forma, foi eliminada a necessidade de utilização do tacômetro e do *strain gauge*, na malha de controle. Os principais resultados experimentais nesta pesquisa podem ser visualizada por meio do canal do YouTube, Modelagem e Controle de Sistemas Dinâmicos ModCon", <<https://www.youtube.com/watch?v=8LGhPWKB-IY>>.

2.3 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO (LQR)

O método *LQR* é baseado na teoria de Controle Ótimo, e permite modelar a razão de retorno do compensador na saída ou na entrada da planta, para atingir requisitos de desempenho e/ou robustez pré-especificados. A estabilidade da planta compensada é obtida naturalmente, sendo desnecessárias atenções às características de mudança de fase do sistema (MACIEJOWSKI, 1989).

Bosgra, Kwakernaak e Meinsma (2001) apresentam sistemas lineares com critérios de desempenho quadrático e considera um sistema linear invariante no tempo, representado na forma de Espaço de Estados como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & t \geq 0 \\ z(t) &= Dx(t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Para controlar o sistema a partir de qualquer estado inicial $x(0)$ de modo que a saída z de um sistema seja o mais próximo possível de um valor de referência (normalmente

zero) sem tornar a entrada u indevidamente grande. Com isso, define-se então um funcional de custo quadrático dado por

$$J = \int_0^\infty [z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (2.7)$$

Q e R são matrizes simétricas, isto é, $Q = Q^T$ e $R = R^T$. Muitas vezes, é adequado permitir que as duas matrizes sejam simplesmente diagonais.

Os dois termos $z^T(t)Qz(t)$ e $u^T(t)Ru(t)$ são formas quadráticas nas componentes da saída z , e da entrada u , respectivamente. O primeiro termo da integral da Equação (2.7) mede o desvio acumulado da saída para zero. O segundo termo mede a amplitude acumulada da entrada de controle. Se as matrizes são diagonais, então isso significa que suas entradas diagonais não podem ser negativas. É mais prático escolher as matrizes Q e R de tal forma que os dois termos não sejam negativos, onde Q é uma matriz semi-definida positiva ($Q \geq 0$) que penaliza os estados e R é uma matriz definida positiva ($R > 0$) que penaliza as entradas de controle.

Utilizando as seguintes condições:

- O vetor de estados $x(t)$ está disponível para a realimentação;
- $[AB]$ controlável e $[AC]$ é observável (MACIEJOWSKI, 1989).

então existe um controle linear quadrático único e ótimo dado por:

$$u(t) = -K_{LQR}x(t) \quad (2.8)$$

que minimiza o funcional J , sujeito ao vínculo dinâmico imposto pela Equação (2.7), onde K_{LQR} é o ganho do Controlador, dado por:

$$K_{LQR} = R^{-1}B^T S \quad (2.9)$$

A matriz S de solução única, simétrica e semi-definida positiva, equação algébrica de Riccati dada por:

$$SA + A^T S + C^T Q C - S B R^{-1} B^T S = 0 \quad (2.10)$$

Substituindo a Equação (2.8) na Equação (2.6), o controle da dinâmica do sistema em malha fechada resulta em:

$$\dot{x}(t) = (A - BK_{LQR})x(t) \quad t \geq 0 \quad (2.11)$$

É estável, isto é, todos os autovalores da matriz $A - BK$ têm partes reais negativas.

O valor mínimo do custo J na Equação (2.7) é:

$$J = x_0^T S_{x_0} \quad (2.12)$$

Um estudo detalhado sobre o Regulador Linear Quadrático LQR pode ser encontrado em (ANDERSON; MOORE, 1989) e (KWAKERNAAK; SIVAN, 1972).

2.4 MÉTODO DA EQUAÇÃO DE RICCATI DEPENDENTE DO ESTADO (SDRE)

Çimen (2008) explana que durante as décadas de 1950 e 1960, as aplicações de engenharia aeroespacial estimularam muito o desenvolvimento da teoria de controle ideal, onde o objetivo era conduzir os estados do sistema de forma que algumas funções de custo definidas fossem minimizadas. Com isso, possibilitou ter aplicações muito úteis no projetar Reguladores (onde algum estado estacionário deve ser mantido) e no rastreamento de estratégias de controle (onde alguma trajetória predeterminada de estado deve ser seguida). Por exemplo, aplicações tais como, problema de trajetórias de voos ideais para aeronaves e veículos espaciais. Um dos métodos populares na comunidade de controle é a estratégia da Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE), que fornece um algoritmo muito eficaz para sintetizar controles de realimentação não lineares, permitindo não linearidades nos estados do sistema e, ao mesmo tempo, oferecendo excelente *design* de flexibilidade por meio de matrizes de ponderação dependentes do estado. Esse método foi proposto inicialmente por Pearson (1962) e posteriormente expandido por Wernli e Cook (1975), Mracek e Cloutier (1998) e Friedland (1996).

Segundo Cloutier (1997), as técnicas da Equação de Riccati Dependente do Estado

(SDRE) são utilizados como métodos gerais de projeto, que fornecem um meio sistemático e eficaz de projetar Controladores, Observadores e filtros não lineares.

Dessa forma, o método SDRE é uma abordagem que é aplicada em plantas não lineares; no qual lineariza a planta em torno do ponto instantâneo de operação e com isso, resulta em um modelo de Espaço de Estado constante do sistema equivalente à técnica de controle LQR (SOUZA, 2006) e (SOUZA; GONZALES, 2012).

2.4.1 FORMULAÇÃO SDRE

Considere o problema geral do Regulador não linear autônomo de horizonte infinito da forma: Minimizar

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} x^T Q(x) x + u^T R(x) u dt \quad (2.13)$$

Em relação ao estado x e controle u sujeito à restrição diferencial não linear, têm-se

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.14)$$

onde $x \in R^n$, $u \in R^m$, $f(x) \in C^k$, $Q(x) \in C^k$, $R(x) \in C^k$, $k \geq 1$, e onde $Q(x) = C^T(x) C(x) \geq 0$, e $R(x) > 0$ para todo x . Assume-se que $f(0) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo x . Também pode ser desejável selecionar $Q(x)$ e $R(x)$ tal que o índice de desempenho $J(x, u)$ no (1) é globalmente convexo. Busca-se estabilizar soluções aproximadas de problemas. (1)-(2) da forma $u = \phi(x)$ onde ϕ é um função não linear de x (CLOUTIER, 1997).

2.4.2 COEFICIENTE DEPENDENTE DO ESTADO

A dinâmica não linear conforme a Equação (2.14), pode ser representada pela seguinte estrutura linear com coeficientes dependentes do estado:

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u \quad (2.15)$$

$$f\dot{x} = A(x)x \quad B(x)g = (x) \quad (2.16)$$

Segundo Cloutier, D’Souza e Mracek (1996) no caso multivariável, há um número infinito de possibilidade de levar o sistema não linear à forma SDC (*State Dependent Coefficient*). Associado ao formulário SDC, têm-se as seguintes definições:

A (x) é uma parametrização observável (detectável) do sistema não linear [em uma região Ω] se o par C (x), A (x) for observável em sentido horário (detectável) no sentido linear para todos os x $[\epsilon\Omega]$.

A (x) é uma parametrização controlável (estabilizável) do sistema não linear [em uma região Ω] se o par A (x), B (x) é controlável por pontos (estabilizável) no sentido linear para todos os x $[\epsilon\Omega]$.

A abordagem SDRE é utilizada para obter uma solução subótimo dos problemas (2.13) ; (2.14) é:

- Uso direto da parametrização para trazer a dinâmica não linear para o SDC (2.15).
- Resolver a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE)

$$A^T(x)P + PA(x) - PB(x)R^{-1}(x)B^T(x)P + Q(x) = 0 \quad (2.17)$$

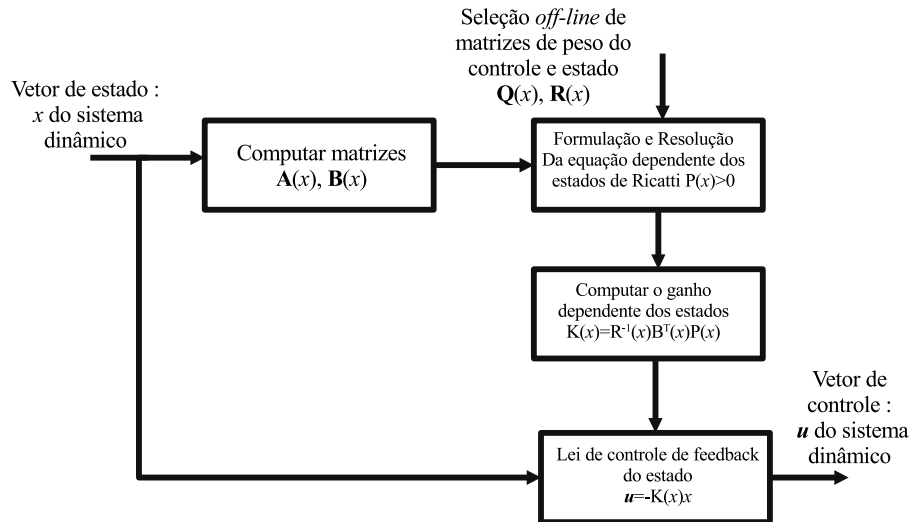
Para obter $P \geq 0$. Observe que P é uma função de x .

- Construção de um Controlador não linear via realimentação.

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x \quad (2.18)$$

De acordo com Menon *et al.* (2002) um fluxograma que ilustra as etapas envolvidas no cálculo das leis de controle do SDRE é apresentado na Figura 2.2, em cada amostra, o vetor de estado obtido do sensores ou estimadores de *feedback* é usado para calcular as matrizes SDC, que são usadas para encontrar o estado dependente dos ganhos. O produto do ganho dependente do estado e o vetor de estado produz as variáveis de controle.

Figura 2.2: Fluxograma de cálculo do SDRE.



Fonte: Adaptado de (MENON *et al.*, 2002)

Portanto, as duas principais etapas no método de Projeto do Sistema de Controle não linear SDRE são o cálculo das matrizes SDC, $A(x)$ e $B(x)$ e a solução da Equação de Riccati da matriz algébrica para $P(x)$. As etapas restantes envolvem inversão e multiplicação de matrizes.

2.4.3 CARACTERÍSTICAS DO SDRE

O controle SDRE é considerado uma abordagem sistemática, sendo utilizado em sistemas dinâmicos não lineares. Existem infinitas opções para a parametrização ($A(x)$, $B(x)$) entre as quais um par estabilizável ponto a ponto deve ser escolhido. Portanto, é uma tarefa acessível para sistemas de ordem inferior, e em casos de sistemas de ordem superior torna-se complexo. Por outro lado, os graus extras de liberdade de projeto decorrentes da não exclusividade da parametrização do coeficiente dependente do estado podem ser utilizados para aprimorar o desempenho do Controlador (ERDEM, 2001).

O controle SDRE exibe maior estabilidade e melhor desempenho do que as leis de controle linear (por exemplo, LQR), e a experiência empírica geralmente mostra que, em muitos casos, o domínio de atração é tão grande quanto o domínio de interesse (CLOUTIER; D'SOUZA; MRACEK, 1996; BOGDANOV, 2010).

2.4.4 APLICAÇÕES DO SDRE

Desde os anos 90, as estratégias da Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) surgiram como métodos gerais de design que fornecem um meio sistemático e eficaz de projetar Controladores, Observadores e filtros não lineares. Esses métodos superaram muitas das dificuldades e deficiências das metodologias existentes no controle de sistemas e fornecem algoritmos computacionalmente simples que foram altamente eficazes em uma variedade de aplicações práticas e significativas (ÇİMEN, 2008).

Parrish e Ridgely (1997) mostraram o uso da Equação de Riccati Dependente do Estado no uso efetivo do controle para orientação estável de um satélite. Os resultados do Controlador implementado apresentou uma frequência suficientemente alta, e esse método de regulação não-linear forneceu mais uma alternativa para o controle de satélites estabilizados internamente.

Um outro exemplo é apresentado nos casos em que naves espaciais são necessárias para remover detritos espaciais ou coletar satélites desativados, pois os mesmos devem ser capazes de atingir a atitude do alvo enquanto está posicionado a uma distância desejada do alvo. Uma nave espacial possui o movimento de seis graus de liberdade e realiza manobras de rotação e translação utilizando equações de movimento não lineares. Dessa forma, o método de regulação não linear da Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) foi usado para controlar a posição e a altitude de uma espaçonave na proximidade de um alvo em queda. Uma simulação de seis graus de liberdade da espaçonave e do alvo foi utilizada para demonstrar a eficácia do Controlador (STANSBERRY; CLOUTIER, 2000).

Erdem e Alleyne (2001) realizaram uma pesquisa em que o controle não-linear da Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) foi usado para regular um *Pendubot*, um robô subativado de dois elos. E os autores afirmaram que o SDRE pode ter um desempenho melhor que o LQR para a mesma escolha de matrizes Q e R, e o desempenho do SDRE pode ser melhorado ainda mais, ajustando Q e R como certas funções dos estados. Observaram também as vantagens oferecidas pelo controle SDRE que superaram a complexidade computacional. O método de controle não-linear SDRE ofereceu uma excelente flexibilidade de projeto e que pode ser explorada para atender

às características de desempenho desejadas.

Menon *et al.* (2002) discutem o desenvolvimento de algoritmos numéricos para a implementação prática da tecnologia de controle SDRE em problemas de controle de voo de mísseis e utilizando o MATLAB® / SIMULINK®, e também o *software* baseado no algoritmo Schur e no método Kleinman, onde a pesquisa mostrou que as leis de controle SDRE podem ser implementadas em determinadas velocidades em problemas de controle de voo de mísseis.

Bogdanov e Wan (2007) detalharam o desenvolvimento de um Controlador utilizando a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) para pequenos helicópteros. As simulações demonstraram um desempenho aprimorado do controle SDRE em comparação com o projeto baseado em um Regulador Quadrático Linear (LQR). Os resultados da robustez também mostraram que o SDRE supera o LQR em trajetórias mais agressivas, mesmo quando os parâmetros do modelo não são conhecidos exatamente. O SDRE exige mais recursos computacionais e a viabilidade de uma implementação em tempo real foi demonstrada com testes de voo nos helicópteros XCell-90 e Yamaha R-MAX (GT-MAX), e concluíram que as equações desenvolvidas podem ser facilmente generalizadas para uma ampla gama de modelos de helicóptero.

Jadlovská e Sarnovský (2013) apresentaram a aplicação da técnica de Projeto de Controle não linear baseada na Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) em um sistema de pêndulo invertido generalizado (*n-link*) acoplado a um braço rotativo, os autores construíram um modelo matemático em duas equações diferenciais não lineares de segunda ordem que descrevem tais movimentos, onde as simulações foram realizadas usando blocos adequados na biblioteca do *software* MATLAB® GUI / SIMULINK®. Os resultados apresentados foram comparados com os obtidos pelo Projeto de Controle LQR padrão, e foi mostrado que o Controlador baseado em SDRE, preserva a dinâmica não linear do sistema original, e supera gradualmente o algoritmo LQR convencional em tempo discreto sempre que a distância de o ponto de equilíbrio aumenta.

Bigot e Souza (2013) estudaram uma viga flexível rotacional no qual foi modelado pela hipótese de Euler-Bernoulli e sua posição angular foi controlada. Os autores afirmam que esse tipo de modelo é, na maioria das vezes, altamente não linear, tendo como resultado, o Controlador projetado pela técnica de controle linear pode ter seu desempe-

nho e robustez prejudicados, e dessa forma, para lidar com esse problema, eles utilizaram o método da Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE), para projetar e testar um algoritmo de controle de posição para o modelo não linear rígido-flexível. O modelo foi simulado no MATLAB® / SIMULINK®, baseado nas características de um equipamento real. A estratégia de controle utilizou um motor elétrico de corrente contínua. O trabalho serviu para validar o modelo do simulador numérico, e essa técnica permitiu projetar e testar um algoritmo de controle de posição para o modelo não linear para o sistema e com isso estabeleceram uma relação direta entre os parâmetros de ajuste do método SDRE e os estados do sistema como posição angular, velocidade angular e deslocamento flexível.

Cabral e Chavarette (2015) propuseram dois Projetos de Controle: linear e não linear, onde aplicaram o Regulador Quadrático Linear (LQR) para projetar o Controlador linear e a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) usada para projetar o Controlador não linear. Sendo aplicado em trens Maglev (transporte de levitação magnética). Os resultados demonstraram que na simulação computacional o Controlador SDRE teve melhor desempenho geral do que o Controlador LQR.

Souza, Bigot e Souza (2017) estudaram um Regulador da Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE), sendo que um Regulador Quadrático Linear adaptativo (LQR) permite lidar com as não linearidades do sistema a ser controlado. O Controlador SDRE foi aplicado a um modelo não linear de um braço robótico rotativo rígido-flexível formado por uma haste flexível acoplada a um servomotor. O modelo elaborado considerou uma viga do tipo Euler-Bernoulli, e utilizou o método dos Modos Assumidos com dois modos de vibração, consideraram as não linearidades de primeira ordem e amortecimento estrutural do tipo Rayleigh, onde o modelo poderia ser adaptado para permitir a simulação de satélites com apêndices flexíveis, como antenas ou painéis solares. O modelo matemático foi validado comparando os resultados de malha aberta com os resultados reais do sistema. Os autores concluíram que o Controlador SDRE permite obter um desempenho melhor que o regulador LQR.

2.5 MÉTODO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

O estudo dos sistemas dinâmicos de Ordem Fracionária têm sido um tópico de pesquisa intensa na última década. Diversos sistemas de controle têm sido modelados considerando relações constitutivas que envolvem derivadas de Ordem Fracionária, estratégias de controle também têm sido desenvolvidas utilizando derivadas de Ordem Fracionária.

O Cálculo Fracionário se deu praticamente com o início do cálculo integral e diferencial, em uma carta escrita por L'hôpital a Leibniz em 1695. Nela, o autor indaga ao pai da notação moderna do cálculo qual seria o significado de $D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$ quando n for $\frac{1}{2}$ (PODLUBNY, 1999).

De acordo com Oldham e Spanier (1974), Abel foi o primeiro a apresentar uma aplicação de operações fracionárias em 1823, quando aplicou o Cálculo Fracionário à resolução de uma equação integral que aparece na formulação do chamado problema tautocrônico, que busca determinar a equação da trajetória percorrida por uma partícula que desliza sob a ação da gravidade ao longo de uma curva sem atrito, para que o tempo de descida seja independente do ponto de partida.

2.5.1 DEFINIÇÃO DA DERIVADA DE ORDEM FRACIONÁRIA

Existem muitas definições de derivadas de Ordem Fracionária, como as definições de Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov. Em geral, essas definições são compatíveis para uma ampla classe de funções. Nesta pesquisa, a definição de Grünwald-Letnikov é considerada uma vez que pode ser facilmente usada para desenvolver uma técnica de simulação numérica. Textos abrangentes sobre as definições de derivadas e integrais de Ordem Fracionária podem ser vistas detalhadamente em (PETRÁŠ, 2011a; PODLUBNY, 1999).

A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov foi proposta por Anton Karl Grünwald, em 1867, e Aleksey Vasilievich Letnikov, em 1868.

A ideia da derivada de Ordem Fracionária consiste em estender o conceito de derivada de ordem $n \in \mathbb{I}$ para uma derivada de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, considera-se uma função $f(t)$ contínua em um intervalo $I \in \mathbb{R}$. A primeira derivada de $f(t)$ é dada por:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \dot{f}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \quad (2.19)$$

a segunda derivada de $f(t)$ é

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}f(t) &= \ddot{f}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{f}(t) - \dot{f}(t-h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Seguindo o mesmo procedimento, a derivada de terceira ordem é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3}f(t) &= \ddot{\dot{f}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ddot{f}(t) - \ddot{f}(t-h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Generalizado esse procedimento tem-se:

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) = f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh), \quad (2.22)$$

sendo que os coeficientes binomiais são dados por:

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}, \quad n, j \in \mathbb{N}. \quad (2.23)$$

Pode-se notar na Equação (2.23) que todos os coeficientes do numerador serão nulos a partir de $\binom{n}{n}$, ou seja, para $j \geq n$ Podlubny (1999). Dessa forma, a Equação (2.22) pode ser reescrita de uma forma mais geral na Equação (2.24).

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) = f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh), \quad (2.24)$$

Considerando as Equações (2.19) e (2.24), o conceito de derivada é generalizada para o conceito de derivada de Ordem Fracionária, de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$, com relação a t , dada

pela notação utilizada com a de Leibniz verifica-se que: $\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t)$:

$$\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = f^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad (2.25)$$

com os coeficientes binomiais Spiegel (1992) e Petráš (2011a) definidos pela Equação (2.26),

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha - j)!} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(\alpha - j + 1)}, \quad (2.26)$$

sendo $\binom{\alpha}{0} = 1$, e a função Gama $\Gamma(n)$ definida na Equação (2.27).

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt. \quad (2.27)$$

Considerando o intervalo $I = (a, t) \in \mathbb{R}$, e definindo $n = \left[\frac{t-a}{h} \right]$, a derivada de Ordem Fracionária de Grünwald-Letnikov é definida de acordo com a Equação (2.28),

$${}_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad (2.28)$$

sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, e $[x]$ definida como a parte inteira de x .

A função Gama, $\Gamma(n)$, pode ser considerada a mais importante função utilizada pelo cálculo diferencial fracionário, pois permite a generalização do fatorial de um número, ou seja, $\Gamma(\eta) = (\eta - 1)!$ para $\eta \in \mathbb{R}$, logo, $\eta! = \eta\Gamma(\eta) = \Gamma(\eta + 1)$ (SPIEGEL, 1992).

As diversas outras definições de derivadas de Ordem Fracionária, tais como as definições de Riemann-Liouville e a de Caputo são compatíveis com a definição de Grünwald-Letnikov para uma ampla classe de funções (PETRÁŠ, 2011a; PODLUBNY, 1999).

2.5.2 APLICAÇÕES DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

A aplicação do Cálculo Fracionário foi estudado por Caputo e Mainardi (1971) e é fundamentada fisicamente por Bagley e Torvik (1983). Os modelos fracionários são facilmente analisados usando a transformada de Fourier ou Laplace.

O Cálculo Fracionário têm sido amplamente utilizado na aplicação moderna de equações diferenciais e integrais para modelar vários tipos de problemas em ciências e engenharia, como:

- Processamento de sinais (Barbosa, Machado e Silva (2006); Bultheel, Martínez-Sulbaran *et al.* (2007));
- Redes elétricas (Yifei *et al.* (2005));
- Mecânica dos fluidos (Amaral (2003));
- Viscoelasticidade (Bagley e Torvik (1983); Gloeckle e Nonnenmacher (1991); Maia, Silva e Ribeiro (1998); Adolfsson, Enelund e Olsson (2005); Bagley (2007) e Jia, Shen e Hua (2007));
- Biologia matemática (Anastasio (1994));
- Eletroquímica (Goto e Ishii (1975));
- Reologia (Cavazos *et al.* (2007));
- Transferência de calor (Agrawal (2004));
- Economia (Meerschaert (2006));
- Eletromagnetismo (Engheta (1996); Machado *et al.* (2006));
- Problemas de difusão (Pedron (2003); Gonçalves *et al.* (2005)); (Andrade (2006));
- Teoria de controle (Hartley e Lorenzo (2002); Valério e Costa (2006)).

A principal motivação para a aplicação prática do Cálculo Fracionário é a possibilidade de obter uma modelagem mais precisa de alguns fenômenos físicos à custa de uma maior complexidade analítica e numérica em comparação com as ferramentas tradicionais de cálculo.

No Brasil, os trabalhos de pesquisa relacionados ao Cálculo Fracionário aplicado a problemas de Engenharia e Controle de Vibração com o uso de modelos fracionários aplicados a absorvedores dinâmicos de vibrações viscoelásticos (Mendez (2004); Espíndola, Silva e Lopes (2005); Espíndola, Bavastri e Oliveira (2008)) , as implementações de

modelos viscoelásticos fracionários associados a modelos de elementos finitos, realizadas por Lima (2003), além do estudo preliminar de Avila *et al.* (2009), voltado ao uso de Controladores ativos de Ordem Fracionária.

O uso de materiais viscoelásticos está aumentando quando se trata de controlar vibrações e ruídos em várias áreas de engenharia, especialmente no espaço aéreo e marítimo. Equipamentos feitos de materiais viscoelásticos, como isoladores, neutralizadores dinâmicos, painéis sanduíche e conexões estruturais, podem ser projetados para um controle altamente eficaz (MENDEZ, 2004).

Para um projeto eficaz, é necessário conhecer o comportamento dinâmico ou as características dinâmicas dos materiais viscoelásticos. A determinação desse comportamento é o principal objetivo de vários métodos (método da viga vibrante, método de rigidez direta, método caracterizado por transmissão etc.), e cada método tem suas vantagens e limitações. Portanto, é conveniente usar módulos complexos para descrever seu comportamento (ESPINDOLA; SILVA; LOPES, 2005); (ESPÍNDOLA; BAVASTRI; OLIVEIRA, 2008).

O material, nos modelos viscoelásticos, se comporta como se tivesse uma memória; os princípios elementares e o comportamento desses modelos em função do tempo foram apresentados por (CHRISTENSEN, 2012).

2.5.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMA DE ORDEM FRACIONÁRIA

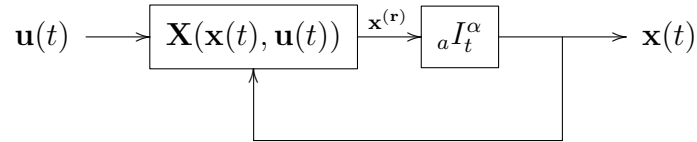
O procedimento para a simulação numérica de sistemas de Ordem Fracionária depende da discretização das equações diferenciais de Ordem Fracionária. Para entender esse procedimento considera-se a equação diferencial de Ordem Fracionária da Equação (2.29) e sua representação na forma de Diagrama de Blocos na Figura 2.3.

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha x(t) = X(x(t), u(t)) \quad (2.29)$$

onde $\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial conforme Guckenheimer e Holmes (1983), $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é uma função com valor vetorial chamada vetor de estado, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ é uma função com valor vetorial chamada vetor de entrada, e $\alpha \in \mathbb{R}^n$ é o vetor que indica a ordem das derivadas.

O Diagrama de Blocos na Figura 2.3 descreve a solução, ou integração, da Equação (2.29).

Figura 2.3: Diagrama de Blocos da Equação Diferencial de Ordem Fracionária (2.29).



Fonte: (AUTOR, 2021)

Observa-se que na Figura 2.3, o símbolo ${}_aI_t^\alpha$, representa a integração de Ordem Fracionária, ou seja, para alguma função $f(t)$ tem-se: $f(t) = {}_aI_t^\alpha [{}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t)] = {}_a\mathcal{D}_t^\alpha [{}_aI_t^\alpha f(t)]$.

Tanto no caso de sistemas amostrados como no caso de equações diferenciais discretas pode-se supor a existência de um amostrador impulsivo e de um circuito segurador (OGATA, 1995). De forma geral, pode-se considerar que o amostrador impulsivo é o dispositivo que discretiza o sinal (variáveis) contínuo a cada instante kT , $k = 0, 1, 2, \dots$. O circuito segurador pode ser considerado como uma memória que mantém os valores das variáveis lidas pelo amostrador disponível por algum tempo, para que o computador possa realizar os cálculos necessários, até o próximo período $(k + 1)T$.

No Diagrama de Blocos da Figura 2.4 foi incluído um bloco representando o acesso a memória necessário para a simulação de sistemas discretos, gerando o atraso de um período T no cálculo de X se comparado com a Figura 2.3.

A equação de diferenças de Ordem Fracionária do Diagrama de Blocos da Figura 2.4, ou seja, do sistema discretizado, pode ser vista na Equação (2.30), que tem a forma usual de sistemas de controle discretos (DZIELIŃSKI; SIEROCIUK, 2006).

$${}_a\mathcal{D}_{kT}^\alpha x(kT) = X(x((k-1)T), u((k-1)T)) \quad (2.30)$$

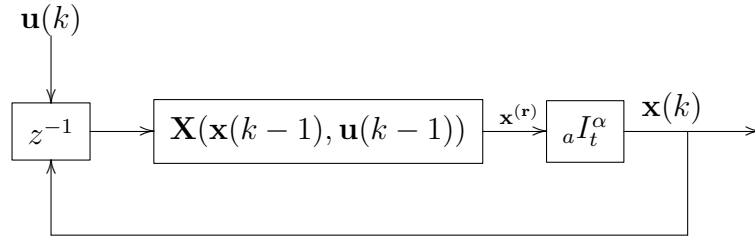
O procedimento para resolver numericamente a Equação (2.29) requer uma discretização de tempo. Para isso, sempre pode ser considerado a inclusão de um circuito de amostra e retenção conforme Diagrama de Blocos da Figura 2.3, que consiste em um

amostrador impulsivo e de um circuito de suporte (OGATA, 1995).

O sinal é amostrado a uma taxa constante kT , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, e os valores amostrados mantêm disponíveis por algum tempo, até que o computador finalize os cálculos do período kT , e o ciclo é repetido por $(k + 1)T$, e assim por diante.

O Diagrama de Blocos apresentado na Figura 2.4 mostra a representação em tempo discreto da Figura 2.3, onde z^{-1} é o z que é operador de atraso de transformação, representando o atraso de período da unidade causado pelo circuito. Consequentemente, a Equação Diferencial de Ordem Fracionária em (2.29), agora é representado pela Equação de diferença de Ordem Fracionária em (2.30).

Figura 2.4: Diagrama de Blocos em Tempo Discreto (2.30).



Fonte: (AUTOR, 2021)

Para a simulação numérica das derivadas de Ordem Fracionária utiliza-se uma aproximação discretizada, apropriada para implementação computacional, mostrada na Equação (2.31), que é obtida a partir da definição da derivada de Ordem Fracionária de Grünwald-Letnikov, Equação (2.28) (PETRÁŠ, 2011a; TRZASKA, 2011; VINAGRE; CHEN; PETRÁŠ, 2003).

Um algoritmo para a solução numérica aproximada da Equação (2.30) é derivado da definição de Grünwald-Letnikov conforme Vinagre, Chen e Petráš (2003), Petráš (2011a), consistindo em aproximar a definição em (2.28) para a relação na Equação (2.31).

$${}_{(k-L)}\mathcal{D}_{kT}^{\alpha}x(kT) \approx \frac{1}{T^{\alpha}} \sum_{j=0}^L (-1)^j \binom{\alpha}{j} x((k-j)T) \quad (2.31)$$

sendo T o passo de integração dado em segundos, ou o período de amostragem no caso de sistemas amostrados. L é o tamanho da memória, sendo calculado pela relação,

$$L \leq \left\lceil \frac{S_T}{T} \right\rceil, \quad (2.32)$$

onde S_T é o tempo total de simulação dado em segundos (TRZASKA, 2011). Em sistemas amostrados S_T pode ser considerado o tempo de execução ou operação do sistema.

Os coeficientes binomiais $b_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$, são calculados de acordo com as fórmulas de Vinagre, Chen e Petráš (2003) dada pela Equação (2.33).

$$b_0^{(\alpha)} = 1, \quad b_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) b_{j-1}^{(\alpha)} \quad (2.33)$$

Considerando as substituições das Equações (2.31), (2.32) e (2.33), a Equação da diferença de Ordem Fracionária em (2.30) pode ser resolvido numericamente com o método fornecido pela Equação (2.34).

$$x(kT) = T^\alpha X(x((k-1)T), u((k-1)T)) - \sum_{j=1}^L b_j^{(\alpha)} x((k-j)T) \quad (2.34)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$, e

$$b_j^{(\mathbf{r})} = [b_j^{(r_1)} \dots b_j^{(r_n)}] \quad (2.35)$$

$$T^{(\mathbf{r})} = \begin{bmatrix} T^{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T^{r_n} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

As Equações (2.32), (2.33) e (2.34) são utilizadas para a implementação computacional de simulações numéricas de sistemas de controle de Ordem Fracionária.

O método apresentado para a discretização e solução numérica de equações diferenciais de Ordem Fracionária, considera a inclusão de uma amostra fictícia e retém circuitos, permitindo obter uma solução explícita para $\mathbf{x}(kT)$, diferente da solução implícita usual

mostrada em (PETRÁŠ, 2011a; TRZASKA, 2011).

É importante ressaltar que a escolha da etapa de integração T e o tamanho da memória, que está relacionado pela Equação (2.32), com impactos na eficiência da solução numérica.

Consequentemente, valores maiores de T requer menos tamanho de memória L e potência computacional, no entanto, a precisão da solução pode ser insuficiente. Em contrapartida, pequenos valores de T implica em uma solução de alto consumo de energia computacional.

Uma característica importante da formulação apresentada consiste na escolha das variáveis T , S_T e L . A desigualdade na relação da Equação (2.32) para a determinação de L deve analisada tendo em conta as questões conflitantes relacionadas ao desempenho computacional e limitação física de memória do computador, e as incertezas numéricas geradas pelas aproximações do método.

Com isso, a Revisão Bibliográfica é uma contribuição teórica para o desenvolvimento do Modelo Matemático, no qual é abordado no próximo Capítulo, onde também está descrito os parâmetros físicos do equipamento *Rotary Flexible Link*, necessários para a modelagem do sistema, assim como, está contido os procedimentos tomados para alcançar um modelo matemático para uma viga flexível rotacional. Para a obtenção desse modelo foram utilizadas as equações de Euler-Lagrange, as equações do movimento e a matriz de espaço de estados que governam o comportamento do sistema.

CAPÍTULO 3

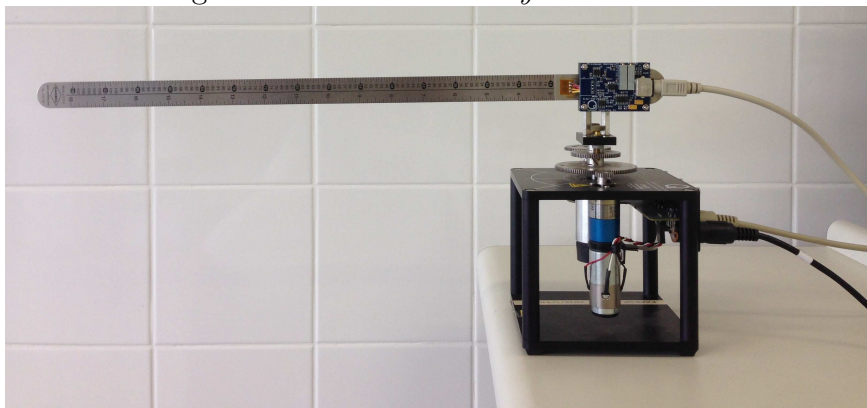
MODELO MATEMÁTICO

O material utilizado nessa pesquisa foi o sistema *Rotary Flexible Link*, fabricado pela empresa Canadense Quanser, utilizado para realizar os testes experimentais, assim como o *software* MATLAB® / SIMULINK®, para demonstrar os cálculos e os gráficos resultantes do experimento, para posterior análise dos dados do modelo matemático e simulações numéricas para controle de vibrações em estruturas flexíveis com interface em tempo real usando o *software* QUARC®.

3.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA *Rotary Flexible Link*

O equipamento utilizado na pesquisa foi o sistema *Rotary Flexible Link* do fabricante Quanser, mostrado na Figura 3.1, obtido através do auxílio regular a pesquisa FAPESP, (processo: 2013/04101-6).

Figura 3.1: Sistema *Rotary Flexible Link*.



Fonte: (AUTOR, 2021)

O equipamento pode ser dividido em dois módulos principais, sendo um servomecanismo e um *link* flexível. O servomecanismo é composto por um motor CC equipado com um conjunto de engrenagens, o qual é acoplado a uma estrutura sólida de alumínio. São acoplados três sensores no servomecanismo, um potenciômetro para medir a posição angular da saída, o tacômetro para medida de velocidade, e um encoder para uma medida com maior exatidão do ângulo de deslocamento. O *link* flexível consiste em uma viga de aço inoxidável fixo em uma extremidade, contendo um sensor do tipo *strain gauge*, o qual tem a função de gerar um sinal de saída proporcional a flexão da viga.

Os parâmetros do sistema com seus valores são mencionados na Tabela 3.1, conforme (QUANSER, 2011).

Tabela 3.1: Parâmetros físicos do sistema *Rotary Flexible Link*

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
B_{eq}	Coefficiente de fricção do motor	0.015	$N.m/(rad/s)$
J_{eq}	Momento de inércia (eixo do motor)	2.08×10^{-3}	$kg.m^2$
m	Massa da viga	0.065	kg
l	Comprimento da viga	0.419	m
J_l	Momento de inércia (centro de massa)	0.0038	$kg.m^2$
K_s	Constante de rigidez	1.3	$N.m/rad$
K_g	Relação das engrenagens	70	
η_m	Rendimento do motor	0.69	
η_g	Rendimento da caixa de engrenagem	0.90	
k_b	Coefficiente de amortecimento da viga	1×10^{-3}	$N.m/(rad/s)$
k_m	Constante da força contra-eletromotriz	7.68×10^{-3}	$V/(rad/s)$
k_t	Constante de torque do motor	7.68×10^{-3}	$N.m/A$
V_{nom}	Tensão de entrada nominal no motor	6.0	V
R_m	Resistência da armadura	2.6	Ω
L_m	Indutância da armadura	0.18	mH
ω_n	Frequência natural	18.5	rad/s
ρ	Densidade linear da viga	0.1333	kg/m
EI	Rigidez à flexão da viga	0.1621	$N.m^2$
K_{nl}	Constante de rigidez não linear	0.5	$N.m/rad$

Fonte: (QUANSER, 2011)

O encoder é utilizado para medir o deslocamento angular da viga (carga) é do tipo óptico, com uma resolução de 4096 contagens em quadratura e mede o ângulo relativo da viga (carga).

O *strain gauge* é utilizado para medir a flexão da viga, é montado na base do apêndice, ou haste, e calibrado de tal modo que gere um sinal de aproximadamente 1 volt para

cada polegada deslocada em um sentido ou em outro.

O conjunto do *link* flexível e o servomecanismo resultam em uma viga flexível com rotação horizontal, essa montagem se torna ideal para experimentos de sistemas de estruturas flexíveis, onde constata-se problemas ocasionados por vibrações, no qual podem ser atenuadas através de técnicas de controle. O *software* utilizado na coleta de dados e análise dos gráficos para a interface do sistema *Rotary Flexible Link* foi o MATLAB® / SIMULINK® versão 2011, sendo popular em computação técnica e científica, sua popularidade deve-se a facilidade de utilização desse programa.

Geralmente em sistemas de controle, o MATLAB® é uma ferramenta utilizada para realizar os cálculos, devido a grande probabilidade de ocorrência de erro quando realizados de forma manual, aliado ao programa têm-se o SIMULINK® que faz simulações de sistemas lineares e não-lineares, discretos e contínuos no tempo (BASILIO, 2004).

3.2 MODELO MATEMÁTICO DE PARÂMETROS CONCENTRADOS

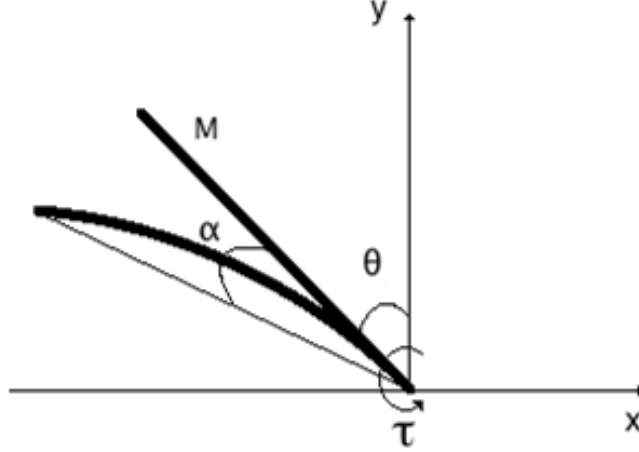
O propósito da modelagem matemática é representar todos os aspectos importantes do sistema com objetivo de obter as equações matemáticas que governam o comportamento do sistema. O modelo matemático pode ser linear ou não linear, dependendo do comportamento dos componentes do sistema. Modelos lineares permitem soluções rápidas e são simples de simular. Modelos não lineares às vezes revelam certas características do sistema que não podem ser previstas usando modelos lineares (RAO, 2008).

O modelo matemático considera a viga como um sistema a parâmetros concentrados bastante simples. Esse sistema consiste de uma viga metálica flexível acoplada a um servomecanismo que permite o movimento rotacional no plano horizontal. O sistema é instrumentado com um *strain gauge* que pode medir a flexão na ponta da viga. Esse sistema é similar a estruturas flexíveis de grandes estruturas espaciais, como os painéis em satélites artificiais ou estações espaciais, ou mesmo uma estrutura flexível como um manipulador robótico, um guindaste giratório, ou até mesmo ser utilizado para estudar o sistema de controle do Microscópio de Força Atômica. O sistema *Rotary Flexible Link*

permite o estudo e análise de vibrações mecânicas em estruturas flexíveis.

Na Figura 3.2 são descritas as posições angulares da viga. A posição da viga rígida é dada pelo ângulo α , equivalente ao ângulo do servomotor, sendo representada pela linha reta. A posição da viga flexível, representada pela curva, é dada pela soma do ângulo do eixo do motor θ com a posição angular devido à flexão α .

Figura 3.2: Representação do movimento da viga flexível.



Fonte: (LOPES; BUENO; BALTHAZAR, 2014)

3.2.1 MODELO DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

Um motor de corrente contínua de imã permanente é utilizado no sistema de controle. O circuito da armadura do motor é composto por uma tensão de entrada V_m , resistência da armadura R_m , indutância da armadura L_m , e a corrente I_m do circuito da armadura. O motor de CC é usado para gerar o torque necessário. O circuito da armadura do motor e a caixa de engrenagens são mostrados na Figura 3.3.

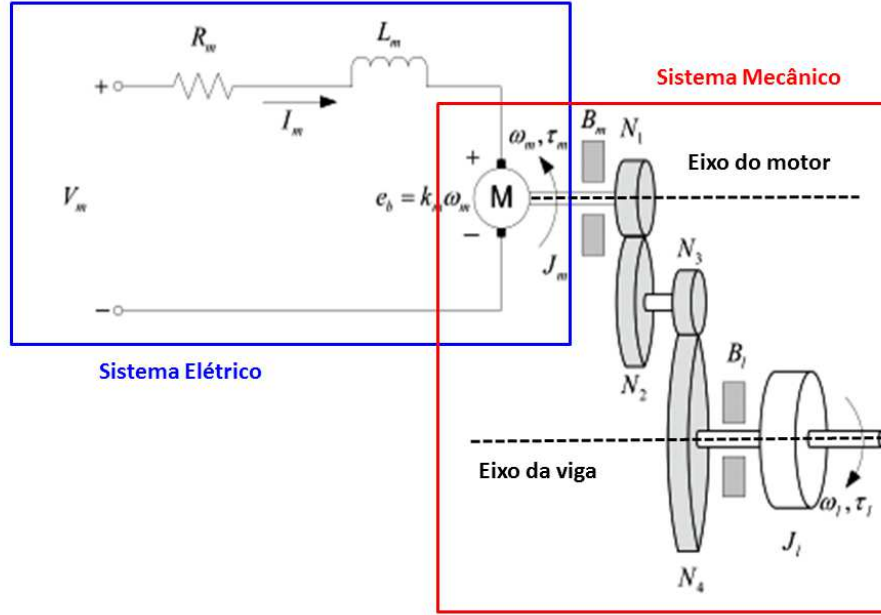
A força contra-eletromotriz *back-emf*, depende da velocidade do eixo do motor ω_m e da constante de *back-emf* do motor k_m . Ele se opõe ao fluxo da corrente. A força contra-eletromotriz é dada por:

$$e_b(t) = k_m \omega_m(t) \quad (3.1)$$

Usando a lei de tensão de Kirchhoff, pode-se escrever a seguinte equação:

$$V_m(t) - R_m I_m(t) - L_m \frac{dI_m(t)}{dt} - k_m \omega_m(t) = 0 \quad (3.2)$$

Figura 3.3: Circuito da armadura do motor CC e caixa de engrenagens.



Fonte: Adaptado de (QUANSER, 2011)

No motor CC a indutância L_m da armadura é muito pequena conforme Castrucci (2006) e Ogata (2003), de modo que:

$$L_m \frac{dI_m(t)}{dt} \ll R_m I_m(t) \quad (3.3)$$

assim a Equação (3.2) pode ser simplificada para:

$$V_m(t) - R_m I_m(t) - k_m \omega_m(t) = 0 \quad (3.4)$$

A corrente do motor $I_m(t)$ pode ser escrita conforme a equação abaixo:

$$I_m(t) = \frac{V_m(t) - k_m \omega_m(t)}{R_m} \quad (3.5)$$

Lembrando que $\omega_m = \dot{\theta}_m$, e a força contra-eletromotriz gerada pelo motor é proporcional à velocidade do motor.

O torque do motor τ_m varia proporcionalmente com a corrente I_m aplicada em sua armadura da seguinte maneira:

$$\tau_m(t) = \eta_m k_t I_m(t) \quad (3.6)$$

Onde k_t é a constante da relação corrente-torque em $(N.m/A)$, η_m é o rendimento do motor e I_m é a corrente da armadura.

O torque τ_l que é aplicado na base da viga flexível é:

$$\tau_l(t) = \eta_g K_g \tau_m(t) \quad (3.7)$$

Onde K_g é a relação das engrenagens e η_g é o rendimento da caixa de engrenagens. O conjunto da engrenagem planetária é montada diretamente no servomecanismo do sistema *Rotary Flexible Link* é representada pelas engrenagens N_1 , N_2 , N_3 e N_4 conforme a Figura 3.3 tem uma relação de engrenagem de:

$$K_g = \frac{N_2 N_4}{N_1 N_3} \quad (3.8)$$

Da mesma forma a velocidade angular de corpo rígido (θ) da viga, é proporcional à velocidade angular do eixo do motor ($\dot{\theta}_m = \omega_m$), ou seja:

$$\dot{\theta}_m = K_g \dot{\theta}_l \quad (3.9)$$

A partir das Equações (3.5), (3.6), (3.7) e (3.9), obtém-se:

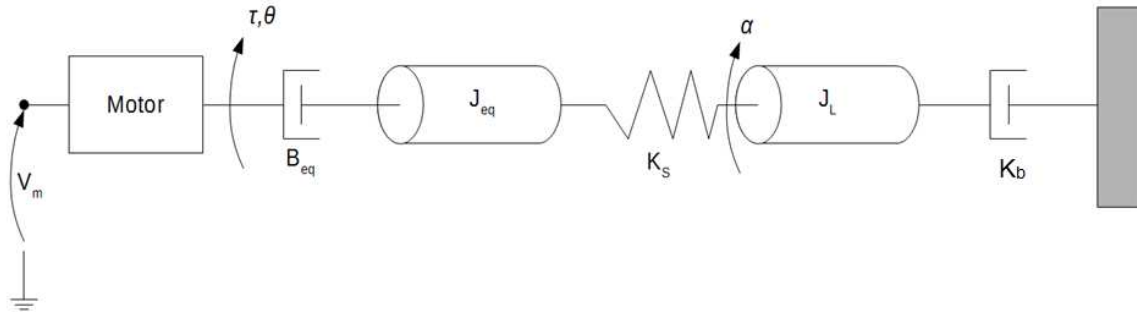
$$\tau_l = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t (V_m - K_g k_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (3.10)$$

que é o torque aplicado na base da viga flexível.

3.2.2 MODELO MATEMÁTICO DA VIGA FLEXÍVEL ROTACIONAL COM O MÉTODO SDRE

O sinal de entrada do servomotor V_m gera um torque na engrenagem de carga, rotacionando a viga flexível. O atrito viscoso e o momento de inércia do eixo do servomotor são B_{eq} e J_{eq} respectivamente. O modelo físico da viga em rotação é descrito na Figura 3.4.

Figura 3.4: Modelo físico da viga flexível.

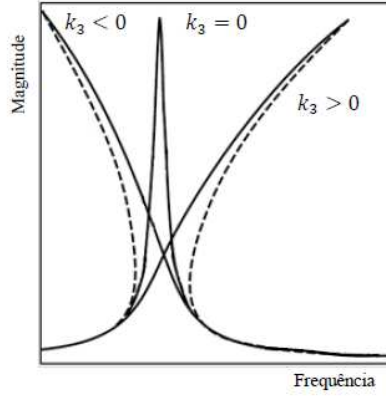


Fonte: Adaptado de (QUANSER, 2011)

Conforme as equações para o deslocamento devido à flexão da viga, deve-se encontrar as equações que representam a dinâmica do sistema. Para isso, utilizando a formulação de Euler-Lagrange (JUNKINS; KIM, 1993).

Segundo Bronkhorst (2017) a não linearidade do sistema pode ser representada de diferentes formas, sendo que alguns deles são geometria de construção, materiais utilizados e tipo de excitação. Para incluí-los em análises e simulações, os termos são frequentemente adicionados à equação de movimento do sistema de interesse para modelagem. Um exemplo é a rigidez cúbica, representado pelo termo K_3 (Figura 3.5), que é o termo não linear, sendo que k_3 pode ser positivo ou negativo. Quando $k_3 > 0$, tem-se que quanto maior o nível de excitação, maior a rigidez no sistema, com o consequente aumento em sistemas com um grau de liberdade da frequência de ressonância. Essa propriedade pode ser observada em vigas e placas engastadas. Se $k_3 < 0$, a rigidez diminui e a frequência de ressonância decai à medida que a força de excitação aumenta. Para maior aprofundamento da rigidez cúbica por ser vista em (BRENNAN; KOVACIC, 2011).

Figura 3.5: Representação da curva de resposta de um sistema com não-linearidade cúbica na rigidez.



Fonte: (BRONKHORST, 2017)

A partir das Figuras 3.2 e 3.4, a energia potencial V é adicionado um termo não linear conforme Equação $F_k = k_s x + K_{nl} x^3$ do trabalho Balthazar *et al.* (2013), onde a rigidez da mola é composta por partes lineares k_s e não lineares K_{nl} , desta forma a energia potencial é dada por:

$$V = \frac{1}{2} K_l \alpha^2 + \frac{1}{4} K_{ln} \alpha^4 \quad (3.11)$$

A energia cinética total T é dada pela soma da energia cinética devido ao deslocamento do corpo rígido com a energia cinética devido ao deslocamento flexível da viga:

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \quad (3.12)$$

Onde J_{eq} é o momento de inércia do eixo do motor, e J_l é o momento de inércia de corpo rígido da viga.

O Lagrangeano é dado por:

$$L = T - V \quad (3.13)$$

e com isso:

$$L = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2} K_l \alpha^2 - \frac{1}{4} K_{ln} \alpha^4 \quad (3.14)$$

As coordenadas generalizadas do sistema são o ângulo de corpo rígido θ e o ângulo da flexão α . Com isso, aplicando a equação de Lagrange para cada coordenada generalizada tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_l - B_{eq} \dot{\theta} \quad (3.15)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.16)$$

Fazendo as derivadas de acordo com a Equação (3.15):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J_{eq} \dot{\theta} + J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})] &= \tau_l - B_{eq} \dot{\theta} \\ (J_{eq} + J_l) \ddot{\theta} + J_l \ddot{\alpha} + B_{eq} \dot{\theta} &= \tau_l \end{aligned} \quad (3.17)$$

Fazendo as derivadas de acordo com a Equação (3.16):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})] + K_s \alpha + K_{nl} \alpha^3 &= 0 \\ J_l \ddot{\alpha} + J_l \ddot{\theta} + K_s \alpha + K_{nl} \alpha^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Substituindo a Equação (3.10) na Equação (3.17) têm-se:

$$(J_{eq} + J_l) \ddot{\theta} + J_l \ddot{\alpha} + B_{eq} \dot{\theta} = K_1 V_m - K_2 \dot{\theta} \quad (3.19)$$

onde K_1 e K_2 são:

$$K_1 = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t}{R_m} \quad K_2 = K_1 K_g K_m \quad (3.20)$$

Dessa forma, a dinâmica de corpo rígido é dada por:

$$(J_{eq} + J_l) \ddot{\theta} + J_l \ddot{\alpha} + (B_{eq} + K_2) \dot{\theta} = K_1 V_m \quad (3.21)$$

A dinâmica da flexão é dada pela equação:

$$J_l \ddot{\alpha} + J_l \ddot{\theta} + K_s \alpha + K_{nl} \alpha^3 = 0 \quad (3.22)$$

Resumindo, as equações do movimento do sistema são:

$$\begin{aligned} (J_{eq} + J_l) \ddot{\theta} + J_l \ddot{\alpha} + (B_{eq} + K_2) \dot{\theta} &= K_1 V_m \\ J_l \ddot{\alpha} + J_l \ddot{\theta} + K_s \alpha + K_{nl} \alpha^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dessa forma as Equações (3.23) representam o comportamento dinâmico do sistema *Rotary Flexible Link*, relacionando a tensão de entrada V_m com as variáveis θ e α , ângulo de corpo rígido e ângulo de flexão, respectivamente.

Definindo o vetor de estados de acordo com a Equação (3.24)

$$x^T = \begin{bmatrix} \theta & \alpha & \dot{\theta} & \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

uma realização das Equações (3.23) no Espaço de Estados é dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.25)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (B_{eq} + K_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (K_s + K_{nl} \alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 V_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(B_{eq} + K_2) \dot{\theta} + K_1 V_m \\ -(K_s \alpha + K_{nl} \alpha^3) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Aplicando a Regra de Cramer, têm-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{\det \left(\begin{bmatrix} -(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + K_1V_m & J_l \\ -(K_s\alpha + K_{nl}\alpha^3) & J_l \end{bmatrix} \right)}{\det \left(\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \right)} \quad (3.29)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{J_l \left[K_1V_m - (B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + J_l(K_s\alpha + K_{nl}\alpha^3) \right]}{J_l(J_{eq} + J_l) - J_l^2} \quad (3.30)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{K_1V_m - (B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + (K_s\alpha + K_{nl}\alpha^3)}{J_{eq}} \quad (3.31)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{K_1}{J_{eq}}V_m - \frac{(B_{eq} + K_2)}{J_{eq}}\dot{\theta} + \frac{K_s}{J_{eq}}\alpha + \frac{K_{nl}}{J_{eq}}\alpha^3 \quad (3.32)$$

Aplicando a Regra de Cramer na Equação (3.28), têm-se:

$$\ddot{\alpha} = \frac{\det \left(\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & -(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + K_1V_m \\ J_l & -(K_s\alpha + K_{nl}\alpha^3) \end{bmatrix} \right)}{\det \left(\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \right)} \quad (3.33)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{-(J_{eq} + J_l)(K_s\alpha + K_{nl}\alpha^3) + J_l \left[(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} - K_1V_m \right]}{J_l J_{eq}} \quad (3.34)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{(J_{eq} + J_l)K_s\alpha}{J_{eq}J_l} - \frac{(J_{eq} + J_l)K_{nl}\alpha^3}{J_{eq}J_l} + \frac{(B_{eq} + K_2)\dot{\theta}}{J_{eq}} - \frac{K_1}{J_{eq}J_l}V_m \quad (3.35)$$

Definindo os vetores em:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \dot{\alpha} \end{cases} \quad (3.36)$$

Fazendo as substituições utilizando as Equações (3.32) e (3.35) têm-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & \frac{K_1}{J_{eq}} V_m - \frac{(B_{eq}+K_2)}{J_{eq}} x_2 + \frac{K_s}{J_{eq}} x_3 + \frac{K_{nl}}{J_{eq}} x_3^3 \\ \dot{x}_3 = & x_4 \\ \dot{x}_4 = & -\frac{K_1}{J_{eq}J_l} V_m - \frac{(J_{eq}+J_l)K_s}{J_{eq}J_l} x_3 + \frac{B_{eq}+K_2}{J_{eq}} x_2 - \frac{(J_{eq}+J_l)K_{nl}x_3^3}{J_{eq}J_l} \end{cases} \quad (3.37)$$

Transformando as Equações (3.37) em matrizes têm-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(B_{eq}+K_2)}{J_{eq}} & \frac{K_s}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{B_{eq}+K_2}{J_{eq}} & \frac{-(J_{eq}+J_l)K_s}{J_{eq}J_l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1}{J_{eq}} \\ 0 \\ \frac{-K_1}{J_{eq}J_l} \end{bmatrix} V_m + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{nl}}{J_{eq}} x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(J_{eq}+J_l)K_{nl}}{J_{eq}J_l} x_3^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A representação no Espaço dos Estados é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(B_{eq}+K_2)}{J_{eq}} & \frac{K_s}{J_{eq}} + \frac{K_{nl}}{J_{eq}} x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{B_{eq}+K_2}{J_{eq}} & \frac{-(J_{eq}+J_l)}{J_{eq}J_l} \left[K_s + K_{nl}x_3^2 \right] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1}{J_{eq}} \\ 0 \\ \frac{-K_1}{J_{eq}J_l} \end{bmatrix} V_m \quad (3.39)$$

Através da forma de Espaço de Estados apresentada em (3.39) será utilizada para o Projeto do Controlador SDRE e será comparado os resultados das simulações com os experimentais.

Portanto, para o Projeto LQR será utilizado conforme as matrizes abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 1 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{J_{eq} R_m} \\ -\frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{J_{eq} R_m} \end{bmatrix} V_m \quad (3.40)$$

3.3 MODELO MATEMÁTICO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

O Cálculo Fracionário é uma generalização da integração e diferenciação para o operador de ordem não inteira ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$, em que a e t denotam os limites da operação e denotam a Ordem Fracionária de modo que:

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0, \\ 1 & \Re(\alpha) = 0, \\ \int_a^t (dt)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

Onde geralmente assume que $\alpha \in \mathbb{R}$, mas também pode ser um número complexo conforme (CHEN; PETRAS; XUE, 2009).

Entre as definições propostas neste estudo, o foco está nas definições de Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov, que são descritas a seguir.

Primeiro, define-se o operador diferencial-integral fracionário de acordo com Riemann-Liouville, que é a definição mais amplamente usada no Cálculo Fracionário como mostra (OLDHAM; SPANIER, 1974) e (PODLUBNY, 1999).

- Definição (Riemann-Liouville):

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (3.42)$$

Onde $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{R}^+$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama de Euler.

Em seguida, considere uma definição alternativa de acordo com Caputo.

- Definição (Caputo):

$${}_0\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (3.43)$$

Onde $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$.

Existem várias definições do operador fracionário de acordo com Monje *et al.* (2010).

Outra definição é a de Grünwald-Letnikov. Essa definição é especialmente útil devido à sua importância nas aplicações.

Considera-se a definição de Grünwald-Letnikov, usada ao longo deste trabalho com o objetivo de soluções numéricas para equações diferenciais de Ordem Fracionária conforme (PODLUBNY, 1999) e (PETRÁŠ, 2011a).

Se atribuir que $n = \frac{t-a}{h}$, onde a é uma constante real, que expressa um valor limite, pode-se escrever a definição de Grünwald-Letnikov:

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (3.44)$$

Onde $[\cdot]$ significa a parte inteira e h é o tamanho do passo (*step*).

Segundo Podlubny (1999), Monje *et al.* (2010) e Xue, Chen e Atherton (2007) a diferenciação de Ordem Fracionária possui as seguintes propriedades:

1. Se $f(t)$ é uma função analítica, a diferenciação de Ordem Fracionária ${}_0\mathcal{D}_t^\alpha f(t)$ também é analítica em relação a t .
2. A diferença de Ordem Fracionária é exatamente a mesma da ordem de número inteiro, quando $\alpha = n$ é um número inteiro. Portanto ${}_0\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = f(t)$.
3. A diferenciação de Ordem Fracionária é linear; se a, b são constantes, então têm-se:

$${}_0\mathcal{D}_t^\alpha [af(t) + bg(t)] = a{}_0\mathcal{D}_t^\alpha f(t) + b{}_0\mathcal{D}_t^\alpha g(t) \quad (3.45)$$

4. Para os operadores de Ordem Fracionária com $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$, e com restrições razoáveis à função $f(t)$, possui a lei aditiva dos expoentes:

$${}_0\mathcal{D}_t^\alpha \left[{}_0\mathcal{D}_t^\beta f(t) \right] = {}_0\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (3.46)$$

5. A integral de Laplace se transforma em uma ferramenta essencial para sistema dinâmico e no controle de vários sistemas na engenharia. Uma função $F(s)$ da variável complexa s é chamada de transformada de Laplace da função original $f(t)$ é definida como:

$$\mathcal{L} \left[{}_0\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \right] = s^\alpha [\mathcal{L} f(t)] - \sum_{k=1}^{n-1} s^k \left[{}_0\mathcal{D}_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (3.47)$$

Assumindo zero nas condições iniciais, a transformação de Laplace utilizando a Equ-

ção (3.44) é definida da seguinte forma:

$$\mathcal{L} \left[{}_0\mathcal{D}^\alpha f(t) \right] = s^\alpha \mathcal{L} \left[f(t) \right] \quad (3.48)$$

Sendo a Transformada de Laplace do operador fracionário de Grünwald-Letnikov.

3.3.1 MODELO MATEMÁTICO DA VIGA FLEXÍVEL ROTACIONAL COM O MÉTODO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Esse sistema é similar a estruturas flexíveis de grandes estruturas espaciais, como os painéis em satélites artificiais ou estações espaciais, ou mesmo uma estrutura flexível como um manipulador robótico, um guindaste giratório, ou até mesmo ser utilizado para estudar o sistema de controle do Microscópio de Força Atômica. O sistema *Rotary Flexible Link* permite o estudo e análise de vibrações mecânicas em estruturas flexíveis.

Na Figura 3.2 são descritas as posições angulares da viga. A posição da viga rígida é dada pelo ângulo α , equivalente ao ângulo do servomotor, sendo representada pela linha reta. A posição da viga flexível, representada pela curva, é dada pela soma do ângulo do eixo do motor θ com a posição angular devido à flexão α .

O sinal de entrada do servomotor V_m gera um torque na engrenagem de carga, rotacionando a viga flexível. O atrito viscoso e o momento de inércia do eixo do servomotor são (B_{eq}) e (J_{eq}) respectivamente. A constante de rigidez $(K_s = K_l)$. A Tabela 3.1 apresenta os parâmetros físicos do sistema *Rotary Flexible Link*. O modelo físico da viga em rotação é descrito na Figura 3.4.

Conforme as equações para o deslocamento devido à flexão da viga, deve-se encontrar as equações que representam a dinâmica do sistema. Para isso, utilizando a formulação de Euler-Lagrange (JUNKINS; KIM, 1993).

A partir das Figuras 3.2 e 3.4, a energia potencial V e adicionando um termo não linear conforme Equação $F_k = k_l x + k_{nl} x^3$ dos trabalhos Balthazar *et al.* (2013) e Ribeiro *et al.* (2020), onde a rigidez da mola é composta por partes lineares k_l e não lineares k_{nl} , desta forma a energia potencial é dada por:

$$V = \frac{1}{2} K_l \alpha^2 + \frac{1}{4} K_{nl} \alpha^4 \quad (3.49)$$

A energia cinética total T é dada pela soma da energia cinética devido ao deslocamento do corpo rígido com a energia cinética devido ao deslocamento flexível da viga:

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \quad (3.50)$$

Onde J_{eq} é o momento de inércia do eixo do motor, e J_l é o momento de inércia de corpo rígido da viga.

O Lagrangeano é dado por:

$$L = T - V \quad (3.51)$$

e com isso:

$$L = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2}K_l\alpha^2 - \frac{1}{4}K_{ln}\alpha^4 \quad (3.52)$$

As coordenadas generalizadas do sistema são o ângulo de corpo rígido θ e o ângulo da flexão α . Com isso, aplicando a equação de Lagrange para cada coordenada generalizada tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau - B_{eq}\dot{\theta} \quad (3.53)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -K_b\dot{\alpha} \quad (3.54)$$

Fazendo as derivadas de acordo com a Equação (3.53):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J_{eq}\dot{\theta} + J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})] &= \tau - B_{eq}\dot{\theta} \\ (J_{eq} + J_l)\ddot{\theta} + J_l\ddot{\alpha} + B_{eq}\dot{\theta} &= \tau \end{aligned} \quad (3.55)$$

Fazendo as derivadas de acordo com a Equação (3.54):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})] + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3 &= 0 \\ J_l\ddot{\alpha} + J_l\ddot{\theta} + K_b\dot{\alpha} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Lembrando que o torque aplicado na base da viga flexível é:

$$\tau_l = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t (V_m - K_g k_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (3.57)$$

Substituindo a Equação (3.57) na Equação (3.55) têm-se:

$$(J_{eq} + J_l)\ddot{\theta} + J_l\ddot{\alpha} + B_{eq}\dot{\theta} = GV_m - K_2\dot{\theta} \quad (3.58)$$

onde G e K_2 são:

$$G = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t}{R_m} \quad K_2 = GK_g K_m \quad (3.59)$$

Dessa forma, a dinâmica de corpo rígido é dada por:

$$(J_{eq} + J_l)\ddot{\theta} + J_l\ddot{\alpha} + (B_{eq} + K_2)\dot{\theta} = GV_m \quad (3.60)$$

A dinâmica da flexão é dada pela equação:

$$J_l\ddot{\alpha} + J_l\ddot{\theta} + K_b\dot{\alpha} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3 = 0 \quad (3.61)$$

Resumindo, as equações do movimento do sistema são:

$$(J_{eq} + J_l)\ddot{\theta} + J_l\ddot{\alpha} + (B_{eq} + K_2)\dot{\theta} = GV_m \quad (3.62)$$

$$J_l\ddot{\alpha} + J_l\ddot{\theta} + K_b\dot{\alpha} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3 = 0 \quad (3.63)$$

Dessa forma as Equações (3.62)(3.63) representam o comportamento dinâmico do sistema *Rotary Flexible Link*, relacionando a tensão de entrada V_m com as variáveis θ e α , ângulo de corpo rígido e ângulo de flexão, respectivamente.

Definindo o vetor de estados de acordo com a Equação (3.64)

$$x^T = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} & \alpha & \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

uma realização das equações no Espaço de Estados é dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.65)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.66)$$

$$\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (B_{eq} + K_2) & 0 \\ 0 & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (K_l + K_{nl}\alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GV_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + GV_m \\ -K_b\dot{\alpha} - (K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Aplicando a Regra de Cramer, têm-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{\det \left(\begin{bmatrix} -(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + GV_m & J_l \\ -K_b\dot{\alpha} - (K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3) & J_l \end{bmatrix} \right)}{\det \left(\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \right)} \quad (3.69)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{J_l (GV_m - (B_{eq} + K_2)\dot{\theta}) + J_l (K_b\dot{\alpha} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3)}{J_l(J_{eq} + J_l) - J_l^2} \quad (3.70)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{GV_m - (B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + (K_b\dot{\alpha} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3)}{J_{eq}} \quad (3.71)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{G}{J_{eq}} V_m - \frac{(B_{eq} + K_2)}{J_{eq}} \dot{\theta} + \frac{K_b}{J_{eq}} \dot{\alpha} + \frac{K_l}{J_{eq}} \alpha + \frac{K_{nl}}{J_{eq}} \alpha^3 \quad (3.72)$$

Aplicando a Regra de Cramer na Equação (3.68), têm-se:

$$\ddot{\alpha} = \frac{\det \left(\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & -(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + GV_m \\ J_l & -K_b\dot{\alpha} - (K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3) \end{bmatrix} \right)}{\det \left(\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \right)} \quad (3.73)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{-(J_{eq} + J_l)(K_b\dot{\alpha} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3) + J_l \left[(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} - GV_m \right]}{J_l J_{eq}} \quad (3.74)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{(J_{eq} + J_l)K_l\alpha}{J_{eq}J_l} - \frac{(J_{eq} + J_l)K_b\dot{\alpha}}{J_{eq}J_l} - \frac{(J_{eq} + J_l)K_{nl}\alpha^3}{J_{eq}J_l} + \frac{(B_{eq} + K_2)\dot{\theta}}{J_{eq}} - \frac{G}{J_{eq}}V_m \quad (3.75)$$

Definindo os vetores em:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \dot{\alpha} \end{cases} \quad (3.76)$$

Fazendo as substituições utilizando as Equações (3.72) e (3.75) têm-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & \frac{G}{J_{eq}}V_m - \frac{(B_{eq}+K_2)}{J_{eq}}x_2 + \frac{K_b}{J_{eq}}x_4 + \frac{K_l}{J_{eq}}x_3 + \frac{K_{nl}}{J_{eq}}x_3^3 \\ \dot{x}_3 = & x_4 \\ \dot{x}_4 = & -\frac{(J_{eq}+J_l)K_l}{J_{eq}J_l}x_3 - \frac{(J_{eq}+J_l)K_b}{J_{eq}J_l}x_4 - \frac{(J_{eq}+J_l)K_{nl}}{J_{eq}J_l}x_3^3 + \frac{(B_{eq}+K_2)}{J_{eq}}x_2 - \frac{G}{J_{eq}}V_m \end{cases} \quad (3.77)$$

A partir das Equações (3.62) e (3.63), faz-se a substituição de $K_b\dot{\alpha}(t)$ por $K_b\alpha^{(r)}(t) = K_b D_t^r \alpha(t)$ na Equação (3.79), resultando no sistema de equações diferenciais de Ordem Fracionária das Equações (3.78) e (3.79).

$$(J_{eq} + J_l)\ddot{\theta} + J_l\ddot{\alpha} + (B_{eq} + K_2)\dot{\theta} = GV_m \quad (3.78)$$

$$J_l\ddot{\alpha} + J_l\ddot{\theta} + K_b\alpha^{(r)} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3 = 0 \quad (3.79)$$

$$x^T = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} & \alpha & \alpha^{(r)} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (B_{eq} + K_2) & 0 \\ 0 & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha^{(r)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (K_l + K_{nl}\alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GV_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + GV_m \\ -K_b\alpha^{(r)} - (K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3) \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Aplicando a Regra de Cramer, têm-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{\det \left(\begin{bmatrix} -(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + GV_m & J_l \\ -K_b\alpha^{(r)} - (K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3) & J_l \end{bmatrix} \right)}{\det \left(\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \right)} \quad (3.83)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{J_l (GV_m - (B_{eq} + K_2)\dot{\theta}) + J_l (K_b\alpha^{(r)} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3)}{J_l(J_{eq} + J_l) - J_l^2} \quad (3.84)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{GV_m - (B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + (K_b\alpha^{(r)} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3)}{J_{eq}} \quad (3.85)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{G}{J_{eq}} V_m - \frac{(B_{eq} + K_2)}{J_{eq}} \dot{\theta} + \frac{K_b}{J_{eq}} \alpha^{(r)} + \frac{K_l}{J_{eq}} \alpha + \frac{K_{nl}}{J_{eq}} \alpha^3 \quad (3.86)$$

Aplicando a Regra de Cramer na Equação (3.82), têm-se:

$$\ddot{\alpha} = \frac{\det \left(\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & -(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} + GV_m \\ J_l & -K_b\alpha^{(r)} - (K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3) \end{bmatrix} \right)}{\det \left(\begin{bmatrix} (J_{eq} + J_l) & J_l \\ J_l & J_l \end{bmatrix} \right)} \quad (3.87)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{-(J_{eq} + J_l)(K_b\alpha^{(r)} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3) + J_l [(B_{eq} + K_2)\dot{\theta} - GV_m]}{J_l J_{eq}} \quad (3.88)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{(J_{eq} + J_l)K_l\alpha}{J_{eq}J_l} - \frac{(J_{eq} + J_l)K_b\alpha^{(r)}}{J_{eq}J_l} - \frac{(J_{eq} + J_l)K_{nl}\alpha^3}{J_{eq}J_l} + \frac{(B_{eq} + K_2)}{J_{eq}}\dot{\theta} - \frac{G}{J_{eq}}V_m \quad (3.89)$$

Definindo os vetores em:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \alpha^{(r)} \end{cases} \quad (3.90)$$

Fazendo as substituições utilizando as Equações (3.86) e (3.89) têm-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & \frac{G}{J_{eq}}V_m - \frac{(B_{eq}+K_2)}{J_{eq}}x_2 + \frac{K_b}{J_{eq}}x_4 + \frac{K_l}{J_{eq}}x_3 + \frac{K_{nl}}{J_{eq}}x_3^3 \\ \dot{x}_3^{(r)} = & x_4 \\ \dot{x}_4^{(2-r)} = & -\frac{(J_{eq}+J_l)K_l}{J_{eq}J_l}x_3 - \frac{(J_{eq}+J_l)K_b}{J_{eq}J_l}x_4 - \frac{(J_{eq}+J_l)K_{nl}}{J_{eq}J_l}x_3^3 + \frac{(B_{eq}+K_2)}{J_{eq}}x_2 - \frac{G}{J_{eq}}V_m \end{cases} \quad (3.91)$$

Definindo o vetor de estados

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \alpha \\ \alpha^{(r)} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Dessa forma a representação do sistema na forma de Espaço de Estados é dada por:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.93)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{G}{J_{eq}}V_m - \frac{B_{eq} + GK_mK_g}{J_{eq}}x_2 + \frac{K_b}{J_{eq}}x_4 + \frac{K_s}{J_{eq}}x_3 + \frac{K_{nl}}{J_{eq}}x_3^3 \quad (3.94)$$

$$\dot{x}_3^{(r)} = x_4 \quad (3.95)$$

$$\dot{x}_4^{(2-r)} = \frac{J_{eq} + J_l}{J_{eq}J_l} \left(-K_b x_4 - K_s x_3 - K_{nl} x_3^3 \right) + \frac{B_{eq} + GK_mK_g}{J_{eq}}x_2 - \frac{G}{J_{eq}}V_m \quad (3.96)$$

CAPÍTULO 4

PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE DA VIGA FLEXÍVEL ROTACIONAL COM OS MÉTODOS LQT, SDRE-TC E O LCTF

Nesta Seção é apresentado o desenvolvimento do projeto do sistema de controle para a viga flexível do sistema *Rotary Flexible Link* fixada no eixo do rotor do motor CC. O amortecimento viscoso atuando na flexão da viga é considerado de Ordem Fracionária. O desempenho de três estratégias de controle; o *Linear Quadratic Tracking* (LQT), o *State Dependent Riccati Equation Tracking Controller* (SDRE-TC) e o *Classical Lead Compensator with Tachometer Feedback* (LCTF), é apresentado conforme encontrados em (SINHA, 2007; KIRK, 2004; OGATA, 2003; ÇIMEN, 2008).

As Estruturas flexíveis rotacionais são dispositivos eletromecânicos comumente encontrados em painéis solares de satélites artificiais, guindastes rotativos e braços robóticos. O sistema *Rotary Flexible Link* permite o estudo e análise de vibrações mecânicas em estruturas flexíveis. A estrutura geral do sistema é mostrada na Figura 3.2, onde θ se refere ao ângulo de movimento do corpo rígido da viga, a flexão da viga é denotada por α . O torque τ é aplicado na extremidade fixa da viga.

Na Figura 3.3 o servomecanismo que controla o movimento da viga flexível é apresentado. É composto por um motor CC com redução de engrenagem onde é fixada a extremidade da viga flexível.

No circuito do motor CC controlado por armadura da Figura 3.3, V_m é a tensão de entrada da armadura, I_m é a corrente da armadura, R_m e L_m são, respectivamente, a resistência e a indutância, e e_b é a força contra-eletromotriz (*back-EMF*). Aplicando a regra de malha de Kirchhoff aos resultados do circuito da armadura do motor CC conforme Equação (4.1).

$$V_m(t) - R_m I_m(t) - L_m \dot{I}_m(t) - e_b(t) = 0 \quad (4.1)$$

A A força contra-eletromotriz (*back-EMF*) $e_b(t)$, dado por (4.2), é proporcional à velocidade do motor ω_m .

$$e_b(t) = k_m \omega_m(t) \quad (4.2)$$

Em motores CC controlados por armadura, a indutância é geralmente muito pequena do que a resistência,

$$L_m \dot{I}_m(t) \ll R_m I_m(t), \quad (4.3)$$

consequentemente, o termo que envolve a indutância será ignorado, além disso, substituindo o (*back-EMF*) definido em (4.2) na Equação (4.1), resultando conforme Equação (4.4).

$$V_m(t) - R_m I_m(t) - k_m \omega_m(t) = 0 \quad (4.4)$$

O torque τ_m produzido pelo motor é proporcional à corrente I_m ,

$$\tau_m(t) = \eta_m k_t I_m(t), \quad (4.5)$$

onde η_m é a eficiência do motor e k_t é a relação corrente-torque. O torque aplicado na extremidade fixa da viga flexível é,

$$\tau(t) = \eta_g K_g \tau_m(t), \quad (4.6)$$

onde k_g e η_g são a relação de redução da engrenagem e a eficiência, respectivamente. Portanto, a velocidade angular do corpo rígido da viga $\dot{\theta}$ está relacionado à velocidade do motor pela Equação (4.7).

$$\omega_m = K_g \dot{\theta} \quad (4.7)$$

Considerando as Equações (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7), o torque aplicado na extremidade fixa da viga é dado pela Equação (4.8),

$$\tau = GV_m - GK_g k_m \dot{\theta}, \quad (4.8)$$

onde,

$$G = \frac{\eta_g \eta_m K_g k_t}{R_m}. \quad (4.9)$$

Para determinar as equações de movimento da viga flexível é considerado o método de Lagrange através Meirovitch (1970). Para tanto, a energia potencial elástico V e cinética T são energias do movimento da viga flexível representado na Figura 3.2 dados por Equações (4.10) e (4.11),

$$V = \frac{1}{2} K_l \alpha^2 + \frac{1}{4} K_{nl} \alpha^4 \quad (4.10)$$

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \quad (4.11)$$

onde K_l e K_{nl} são coeficientes elásticos, J_{eq} e J_l são os momentos de inércia de massa do eixo do motor e da viga rígida, respectivamente. O Lagrangiano é dado por (4.13), com as coordenadas generalizadas dadas por (θ, α) .

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2}K_l\alpha^2 - \frac{1}{4}K_{ln}\alpha^4
\end{aligned} \tag{4.12}$$

As equações de movimento de Lagrange são escritas da seguinte forma,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau - B_{eq}\dot{\theta} \tag{4.13}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -K_b\alpha^{(\mu)} \tag{4.14}$$

com as forças não conservativas das Equações (4.13) e (4.14). B_{eq} e K_b são coeficientes de amortecimento viscosos, e $\alpha^{(\mu)}$ mostra a derivada fracionária da ordem r , $r \in \mathbb{R}$, do ângulo de flexão α .

Substituindo Equação (4.8) na Equação (4.13) e executando as derivadas das Equações (4.13) e (4.14), as Equações do Movimento são dadas por (4.15) e (4.16).

$$(J_{eq} + J_l)\ddot{\theta} + J_l\ddot{\alpha} + (B_{eq} + GK_gK_m)\dot{\theta} = GV_m \tag{4.15}$$

$$J_l\ddot{\alpha} + J_l\ddot{\theta} + K_b\alpha^{(\mu)} + K_l\alpha + K_{nl}\alpha^3 = 0 \tag{4.16}$$

Definindo o vetor de estado na Equação (4.17) uma realização de Espaço de Estado da viga flexível rotacional de Ordem Fracionária é dada pela Equação (4.18).

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \alpha \\ \alpha^{(\mu)} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{G}{J_{eq}} V_m - \frac{B_{eq} + GK_m K_g}{J_{eq}} x_2 + \frac{K_b}{J_{eq}} x_4 + \frac{K_s}{J_{eq}} x_3 + \frac{K_{nl}}{J_{eq}} x_3^3 \\
x_3^{(\mu)} &= x_4 \\
x_4^{(2-\mu)} &= -\frac{G}{J_{eq}} V_m + \frac{J_{eq} + J_l}{J_{eq} J_l} \left(-K_b x_4 - K_s x_3 - K_{nl} x_3^3 \right) + \frac{B_{eq} + GK_m K_g}{J_{eq}} x_2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

O sistema não linear da Equação (4.18) é representado na forma linear estendida,

$$\begin{aligned}
{}_0\mathcal{D}_t^{\mathbf{r}} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\
y(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \mu \\ 2 - \mu \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{eq} + GK_m K_g}{J_{eq}} & \frac{K_s + K_{nl} x_3^2}{J_{eq}} & \frac{K_b}{J_{eq}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{B_{eq} + GK_m K_g}{J_{eq}} & -\frac{(J_{eq} + J_l)(K_s + K_{nl} x_3^2)}{J_{eq} J_l} & -\frac{(J_{eq} + J_l) K_b}{J_{eq} J_l} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{G}{J_{eq}} \\ 0 \\ -\frac{G}{J_{eq}} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

e

$$u(t) = V_m(t) \quad (4.24)$$

Desta forma, a linearização Jacobiana em torno $\mathbf{x}_e = [x_{1e} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ É dado por:

$$\begin{aligned} {}_0\mathcal{D}_t^r \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{eq}+GK_mK_g}{J_{eq}} & \frac{K_s}{J_{eq}} & \frac{K_b}{J_{eq}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{B_{eq}+GK_mK_g}{J_{eq}} & -\frac{(J_{eq}+J_l)K_s}{J_{eq}J_l} & -\frac{(J_{eq}+J_l)K_b}{J_{eq}J_l} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

4.1 PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

Nesta Seção é apresentado o Projeto do Sistema de Controle de uma viga flexível rotacional (*Rotary Flexible Link*), utilizando os modelos matemáticos baseadas nas três estratégias de controle que são: o *Linear Quadratic Tracking* (LQT), o *State Dependent Riccati Equation Tracking Controller* (SDRE-TC) e o *Classical Lead Compensator with Tachometer Feedback* (LCTF).

Reguladores lineares e não lineares como o LQR e SDRE são bem conhecidos e amplamente usados em muitas aplicações. No entanto, para sistemas não regulatórios, onde a referência é uma função do tempo, como $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$, Projetos de Controle Ótimo nem sempre são possíveis, seja porque o índice de desempenho é infinito ou devido a dificuldades computacionais que surgem para controle em tempo real (ALBA-FLORES; BARBIERI, 2006).

As abordagens usuais são para definir uma função de erro entre o estado de referência e, neste caso, o estado desejado é uma função do tempo e do estado real do sistema conforme Naidu (2002), Alba-Flores e Barbieri (2006), ou para definir uma função de erro entre a referência (entrada) e a saída do sistema (BALTHAZAR *et al.*, 2014).

Essas abordagens são adequadas para sinais de referência gerados suavemente, por exemplo, por sistemas assintoticamente estáveis. Em geral, entretanto, para sistemas de rastreamento ótimos com horizonte infinito $t_f \rightarrow \infty$, o funcional de custo é ilimitado e consequentemente o controle ótimo não existe (ALBA-FLORES; BARBIERI, 2006).

Portanto, o controle LQT é modificado e um Controlador subótimo é projetado, evitando a integração retroativa no tempo da equação diferencial com a condição de contorno. A mesma modificação é aplicada ao SDRE-TC.

4.1.1 CONTROLADOR (LQT) *Linear Quadratic Tracking*

O propósito é projetar um Controlador de realimentação de estado que rastreie um valor desejado para o vetor de estado fora da origem e que minimize um índice quadrático de desempenho (KIRK, 2004).

As equações de estado da planta são:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.27)$$

e o índice de desempenho é

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = & \frac{1}{2} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{z}(t_f)]^T \mathbf{H} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{z}(t_f)] + \\ & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)]^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)] + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\mathbf{z}(t)$ é o vetor de referência para o vetor de estado $\mathbf{x}(t)$, t_f está fixado, $\mathbf{x}(t_f)$ é livre, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Q}$ são simétricos semi definidos positivos, e $\mathbf{R}$ são simétricos definidos positivos.

O Hamiltoniano é dado pela Equação (4.29),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = & [\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)]^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)] \\ & + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{p}^T(t) [\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

e as condições necessárias para um controle ótimo são:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (4.30)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}}, \quad (4.32)$$

com as condições de limite apresentadas na Equação (4.33).

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{z}(t_f)]^T \mathbf{H} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{z}(t_f)] \right] \delta \mathbf{x}(t_f) + \\ & \left[\mathcal{H}(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \mathbf{p}(t_f), t_f) + \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{z}(t_f)]^T \mathbf{H} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{z}(t_f)] \right] \delta t_f = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.33)$$

A partir das condições necessárias das Equações (4.30), (4.31) e (4.32) o controle ótimo é dado através da Equação (4.34).

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{s}(t) \quad (4.34)$$

onde $\mathbf{K}(t)$ e $\mathbf{s}(t)$ são funções de matrizes que satisfazem a equação diferencial da matriz (4.35).

$$\begin{aligned} & \left[\dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{K}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t) + \mathbf{Q}(t) \right] \mathbf{x}^*(t) + \\ & \left[\dot{\mathbf{s}}(t) + \left(\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t) \right) \mathbf{s}(t) - \mathbf{Q}(t)\mathbf{z}(t) \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.35)$$

A partir da Equação (4.35) deve ser resolvido para todos $\mathbf{K}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ e $t \in [t_0, t_f]$, os termos entre colchetes em (4.35) devem ser zero, resultando nas equações diferenciais da matriz dadas por (4.36) e (4.37).

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{K}(t) - \mathbf{Q}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t) \quad (4.36)$$

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = - \left(\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t) \right) \mathbf{s}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{z}(t) \quad (4.37)$$

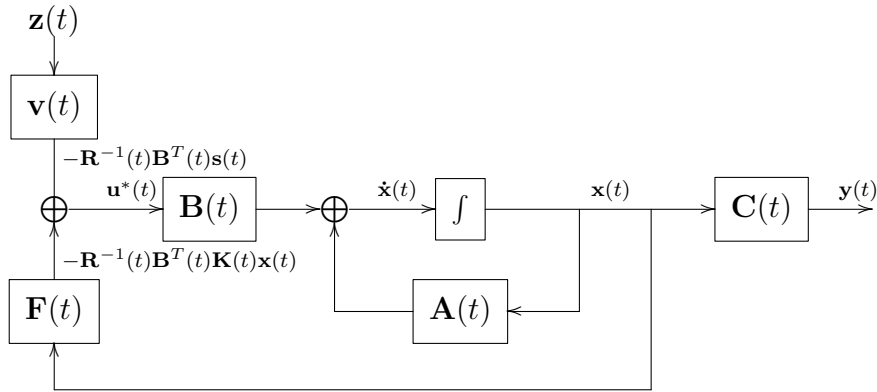
com as condições de limite,

$$\mathbf{K}(t_f) = \mathbf{H} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{s}(t_f) = -\mathbf{H}\mathbf{z}(t_f) \quad (4.39)$$

A Equação (4.36) é conhecida como equação de Riccati, e juntamente com a Equação (4.37), deve ser resolvida retroativamente no tempo, considerando as condições de contorno em (4.38) e (4.39), a fim de calcular o controle ótimo LQT. O Diagrama de Blocos do Controlador LQT e da planta é mostrado na Figura 4.1. É importante notar que o Controlador LQT só é possível se a planta em (4.27) for totalmente controlável.

Figura 4.1: Diagrama de Blocos (LQT)



Fonte: (AUTOR, 2021)

Importantes desvantagens desta estratégia para controlar sistemas em tempo real são que t_f deve ser conhecido com antecedência, bem como $\mathbf{K}(t)$ e $\mathbf{s}(t)$ devem ser calculado para trás no tempo.

O horizonte infinito LQT, por exemplo, $t_f \rightarrow \infty$, é possível se a planta for totalmente

controlável, e se $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, e as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são constante. Nesse caso, $\mathbf{K}(t)$ torna-se uma matriz constante, ou seja, $\mathbf{K}(t) \rightarrow \mathbf{K}$, e

$$\mathbf{s}(t_f) = \mathbf{0} \quad (4.40)$$

Portanto, no caso do horizonte infinito LQT, a Equação (4.36) não é mais uma equação diferencial, é conhecida como equação algébrica de Riccati. No entanto, a Equação (4.37) ainda deve ser calculado para trás no tempo, mas agora com a condição de contorno em (4.40).

Se $\mathbf{z}(t)$ é suave, como um sinal gerado por um sistema assintoticamente estável, o controle ótimo tem uma solução (ALBA-FLORES; BARBIERI, 2006). Por outro lado, para uma referência geral $\mathbf{z}(t)$, o cálculo de $\mathbf{s}(t)$ para trás no tempo frequentemente gera sinais de controle ilimitados, e o controle ótimo, na prática, não existe.

Uma escolha interessante para evitar os problemas mencionados é procurar um LQT subótimo, impondo na Equação (4.35), a condição adicional:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{0}, t \in [t_0, t_f] \quad (4.41)$$

consequentemente, se $[\mathbf{A}^T - \mathbf{KBR}^{-1}\mathbf{B}^T]$ é não singular, o sinal de controle LQT de horizonte infinito subótimo é:

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{s}(t) \quad (4.42)$$

onde $\mathbf{K}$ e $\mathbf{s}(t)$ favorecer as Equações (4.43) e (4.44).

$$\mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{K} - \mathbf{KBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{s}(t) = [\mathbf{A}^T - \mathbf{KBR}^{-1}\mathbf{B}^T]^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \quad (4.44)$$

Considerando as Equações acima, o procedimento de Projeto do Controlador LQT de horizonte infinito está de acordo com as seguintes etapas:

1. Obtenha uma realização do Espaço de Estado da planta que consiste nas matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ dentro da Equação (4.25);
2. Escolha corretamente as matrizes de índice de desempenho de horizonte infinito $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$;
3. Compute $\mathbf{K}$ e $\mathbf{s}(t)$ das Equações (4.43) e (4.44);
4. Calcule a lei de controle subótimo $\mathbf{u}^*(t)$ com a Equação (4.42).

As escolhas para $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são apresentadas junto com os resultados das simulações na Seção 5.4.

4.1.2 CONTROLADOR (SDRE-TC) *State Dependent Riccati Equation Tracking*

Da mesma forma que a Seção 4.1.1, a finalidade é projetar um Controlador de re-alimentação de estado para que o vetor de estado rastreie uma referência $\mathbf{z}(t)$ fora da origem, otimizando um índice de desempenho (ÇIMEN, 2008).

Considere o sistema não linear na forma de linearização estendida em (4.45), com o índice de desempenho de horizonte infinito ($t_f \rightarrow \infty$) índice de desempenho em (4.46).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(x)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(x)\mathbf{u}(t) \quad (4.45)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[[\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)] + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right] dt \quad (4.46)$$

onde $\mathbf{x}(\infty)$ é livre, $\mathbf{Q}$ é simétrico positivo semi-definido e $\mathbf{R}$ é simétrico positivo definido. O hamiltoniano é dado por (4.47).

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = [\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)] + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \mathbf{p}^T(t) [\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t)] \quad (4.47)$$

Considerando que $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ são matrizes constantes durante os intervalos entre

a amostragem (ou etapas de integração), e as condições necessárias em (4.30), (4.31) e (4.32), o controle ótimo é dado pela Equação (4.48).

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{s}(t) \quad (4.48)$$

onde $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{s}(t)$ são funções de matriz que satisfazem a equação de matriz (4.49).

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q} \right] \mathbf{x}^*(t) + \\ & \left[\dot{\mathbf{s}}(t) + \left(\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \right) \mathbf{s}(t) - \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Da mesma forma que a Seção 4.1.1, a Equação em (4.49) deve ser resolvida para todos $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, $\mathbf{z}(t)$ e $t \in [0, \infty)$, conseqüentemente, ambos os termos entre colchetes devem ser zero, resultando nas equações matriciais (4.50) e (4.51).

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4.50)$$

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = - \left(\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \right) \mathbf{s}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \quad (4.51)$$

com a condição de limite

$$\mathbf{s}(\infty) = \mathbf{0} \quad (4.52)$$

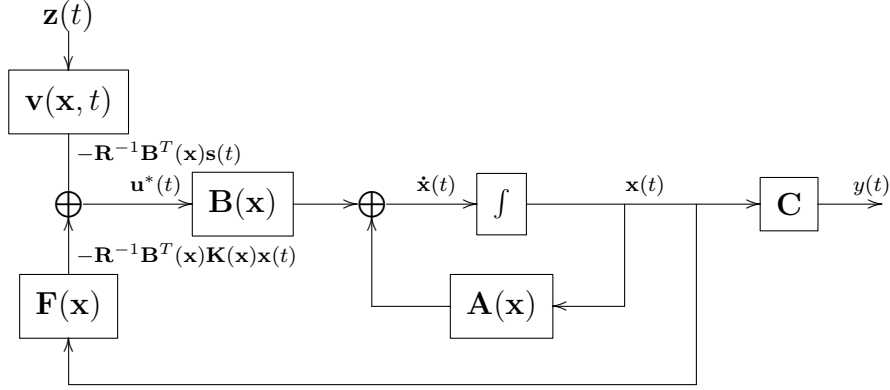
Com o mesmo raciocínio da Seção 4.1.1 é aplicado, impondo a condição adicional da Equação (4.41), para $t \in [0, \infty)$, dentro da Equação (4.49).

Conseqüentemente, se $\left[\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \right]$ é não singular durante os intervalos entre a amostragem (ou etapas de integração), o sinal de controle é calculado por (4.48), onde $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ para satisfazer a Equação (4.50), e $\mathbf{s}(t)$ é determinado por (4.53).

$$\mathbf{s}(t) = \left[\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \right]^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \quad (4.53)$$

O Diagrama de Blocos do SDRE-TC é mostrado na Figura 4.2. Observe que as funções vetoriais $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ são calculadas durante cada intervalo entre as amostragens, considerando $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ matrizes constantes.

Figura 4.2: Diagrama de Blocos (SDRE-TC)



Fonte: (AUTOR, 2021)

Diante do exposto, o procedimento de Projeto SDRE-TC de horizonte infinito está de acordo com as seguintes etapas:

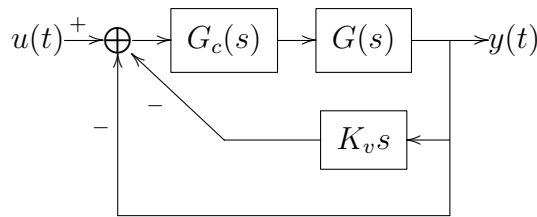
1. Obtenha uma realização do Espaço de Estado da planta que consiste nas matrizes $(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{C})$ dentro da Equação (4.45);
2. Escolha corretamente as matrizes de índice de desempenho de horizonte infinito $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$;
3. Entre cada tempo de amostra calcule $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{s}(t)$ das Equações (4.50) e (4.53);
4. Entre cada tempo de amostragem, calcule a lei de controle subótimo $\mathbf{u}^*(t)$ com a Equação (4.48).

As escolhas para $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ e os ganhos de controle são apresentados junto com os resultados das simulações na Seção 5.4.

4.1.3 CONTROLADOR (LCTF) *Lead Compensator with Tachometer Feedback*

O sistema de controle linear LCTF é projetado e implementado de acordo com o Diagrama de Blocos mostrado na Figura 4.3. O Controlador linear é usado para comparar e avaliar o desempenho do SDRE-TC e do Controlador LQT.

Figura 4.3: Diagrama de Blocos (LCTF)



Fonte: (AUTOR, 2021)

O Projeto do Compensador é realizado considerando a planta linear em (4.25) com derivadas inteiras, ou seja, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

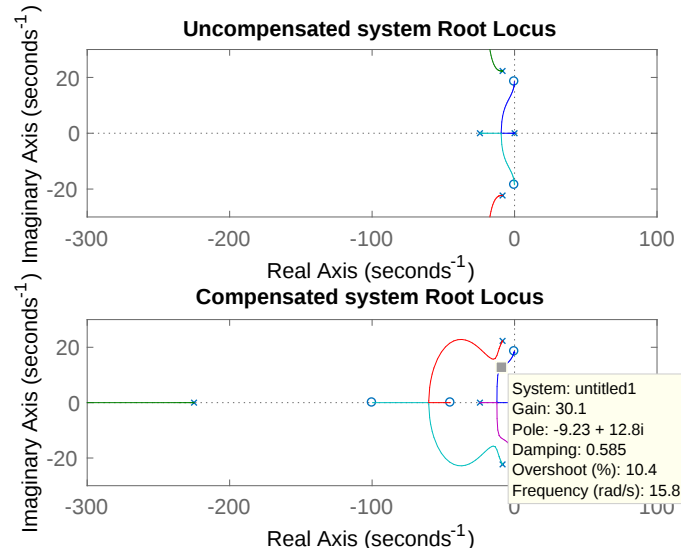
A função de transferência da planta é obtida pela fórmula conforme apresentado por Chen (1995) na Equação (4.54).

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \\ &= \frac{61.73s^2 + 16.25s + 21.12 \times 10^3}{s(s^3 + 41.14s^2 + 977.7s + 13.82 \times 10^3)} \end{aligned} \quad (4.54)$$

O sistema com o compensador deve atender às especificações de Projeto que consistem em fornecer a resposta transitória mais rápida possível com um *overshoot* máximo de 10%.

O Lugar (local) da raiz de $G(s)$ e do sistema compensado é mostrado na Figura 4.4.

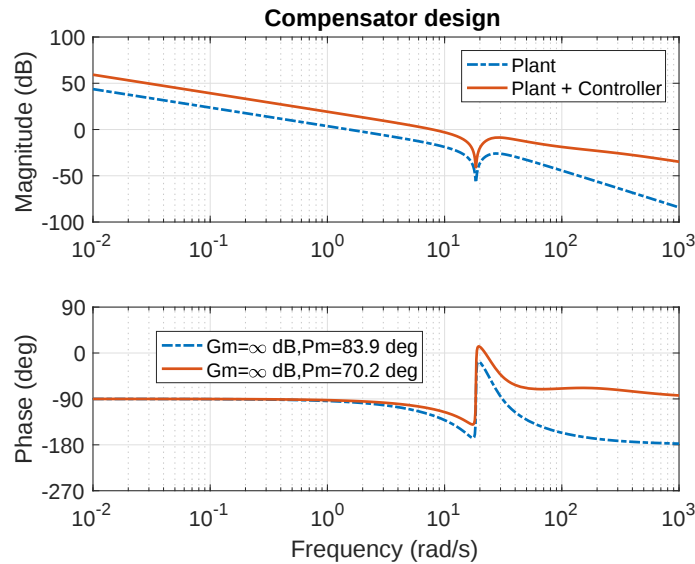
Figura 4.4: Lugares das Raízes (*Root Locus*).



Fonte: (AUTOR, 2021)

Além disso, os Diagramas de Bode da planta de malha aberta e da planta controlada são mostrados na Figura 4.5. Como pode ser visto, o Controlador aumenta significativamente o ganho de Bode, e ainda permite ganho suficiente (G_m) e fase (P_m) margem (OGATA, 2003).

Figura 4.5: Diagrama de Bode.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A função de transferência do compensador em avanço com realimentação de velocidade (LCTF) projetado é dada por (4.55) e o ganho de realimentação de velocidade por

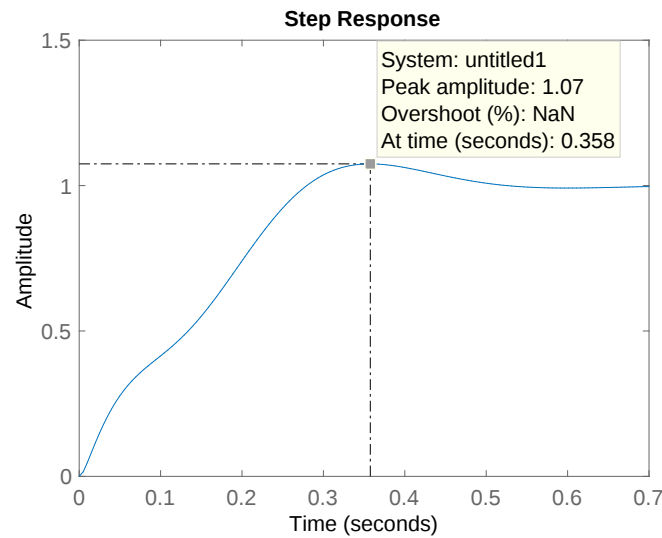
(4.56). Pode-se notar no Lugares das Raízes o Controlador LCFT satisfaz as especificações do Projeto.

$$G_c(s) = 30 \frac{s + 45}{s + 225} \quad (4.55)$$

$$K_v = 0.01 \quad (4.56)$$

A resposta ao degrau do sistema compensado é mostrada na Figura 4.6, mostrando 7% de *overshoot*. Como esperado, o comportamento transiente em malha fechada é uma combinação das respostas dos dois pares de pólos complexos.

Figura 4.6: Resposta ao Degrau Unitário.



Fonte: (AUTOR, 2021)

CAPÍTULO 5

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

De acordo com Basilio (2004) geralmente nas simulações numéricas para sistemas de controle, o MATLAB® é uma ferramenta utilizada para realizar os cálculos, devido a grande probabilidade de ocorrência de erro quando realizados de forma manual, aliado ao programa têm-se o SIMULINK® que faz simulações de sistemas lineares e não-lineares, discretos e contínuos no tempo.

5.1 SIMULAÇÃO COM REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR (LQR)

Nesta simulação, será utilizada a teoria de controle em Espaço de Estados, pois é mais adequada para a aplicação na viga flexível rotacional do que as baseadas na relação entrada-saída ou função de transferência, também chamada de modelo no domínio da frequência.

A abordagem LQR para obter uma solução ideal do problema de controle tem o seguinte procedimento:

1. Represente o modelo no formato de Espaço de Estado e reescreva-o da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 625 & -40.3990 & 0 \\ 0 & -967.1053 & 40.3990 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 61.7325 \\ -61.7325 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Utilizando-se a notação vetorial-matricial, uma equação de ordem n pode ser representada por uma equação diferencial vetorial-matricial, de primeira ordem. A representação de um sistema físico no Espaço dos Estados é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (5.2)$$

Onde A matriz de estado (dinâmica), B matriz de entrada, C matriz de saída ou de observação, D matriz de transmissão direta, x denota o vetor de estados em $\mathbb{R}^n$, u representa o vetor de controle em $\mathbb{R}^p$, e y representa o processo de saída em $\mathbb{R}^m$. Sendo que n , p e m são dimensões apropriadas para as matrizes.

2. Verificar se o par (A, B) é controlável, isto é, se o rank (número de linhas linearmente independentes) da matriz de controlabilidade equivale ao número total de estados do sistema, e se o par (A, C) é observável, isto é, se o rank da matriz de observabilidade equivale ao número total de estados do sistema, então o método de controle LQR pode ser utilizado para encontrar o ganho de realimentação de estado em malha fechada K . (OGATA, 2003; DORF; BISHOP, 2011).

A Controlabilidade é calculada no MATLAB® com o comando *ctrb*.

```
>> CONT = ctrb(A, B)
```

$$CONT = 1.0e + 005 \begin{bmatrix} 0 & 0.0006 & -0.0249 & 0.6217 \\ 0 & -0.0006 & 0.0249 & -0.4105 \\ 0.0006 & 0.0249 & 0.6217 & -9.5287 \\ -0.0006 & -0.0249 & -0.4105 & 0.9968 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Utilizando o MATLAB® com o comando *rank(CONT)* calcula do posto da matriz, e o comando *length(A)* mostra a ordem do sistema:

```
>> rank(CONT)
ans = 4
```

```
>> ordemosistema = length(A)
ans = 4
```

Como o sistema é de 4 ordem e o cálculo do $rank(CONT)$ é 4, essa igualdade demonstra que o sistema é controlável.

A Observabilidade é calculada no MATLAB[®] com o comando *obsv*.

```
>> OBSER = obsv(A,C)
```

$$OBSER = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -342.1053 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -342.1053 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Utilizando o MATLAB[®] com o comando $rank(OBSER)$ calcula do posto da matriz, e o comando $length(A)$ mostra a ordem do sistema:

```
>> rank(OBSER)
ans = 4
```

```
>> ordemosistema = length(A)
ans = 4
```

Quando o cálculo do posto da matriz $rank(OBSER)$, é igual a ordem do sistema (planta), demonstra que o sistema é observável (KAILATH, 1980; CHEN, 1995).

3. Deve-se encontrar uma lei de controle $u = -Kx$ de tal forma que minimize o índice de desempenho do sistema ou função custo:

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) dt \quad (5.5)$$

Onde $(t)^T$ é o operador transposto, e Q matriz (peso dos estados) e R matriz (peso dos controles), que afetam como a função custo é minimizada (OGATA, 2003).

Segundo Barbosa (1996) informa que Q é uma matriz simétrica de ponderação.

Cada termo não nulo refere-se a uma variável modal controlada, e R é uma matriz de ponderação e seus termos não nulos referem-se às forças modais que atuam nos modos de vibração sob controle, caso seja uma análise modal, R é uma matriz modal.

4. Definir as matrizes Q e R representam os “custos” a serem minimizados em termos da precisão e da energia gasta pelo sistema de controle respectivamente. Tais matrizes são arbitrárias e devem ser definidas pelo engenheiro em um processo iterativo em que o desempenho do sistema de controle dado um determinado conjunto de matrizes é analisado e, caso não esteja a contento, novos conjuntos de matrizes são gerados e novamente avaliados até que o desempenho do sistema atinja seus requisitos de projeto.

Desta maneira, define-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 1.0e2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0e5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad R = 1.0e5 \quad (5.6)$$

E assim, verifica-se que a planta torna-se estabilizável, a lei de controle de realimentação pode ser definida por:

$$u = -Kx \quad (5.7)$$

A matriz de realimentação de estados para o Projeto de Controle se reduz a encontrar os elementos da matriz ótima, qualquer seja o estado inicial, ou seja, a lei de Controle Ótimo para o problema de Controle Ótimo quadrático é dada pela equação (5.8).

$$K = -R^{-1}B^T Px \quad (5.8)$$

Onde a matriz P deve satisfazer a seguinte equação:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (5.9)$$

A equação (5.9) é chamada de Equação Matricial de Riccati.

O problema do Controle Ótimo quadrático (LQR) pode ser resolvido pelo *software* MATLAB® utilizando o comando:

$$[K, P, E] = lqr(A, B, Q, R) \quad (5.10)$$

Onde K é a matriz de ganho ótimo, P é matriz positiva definida solução da equação de Riccati e E são os pólos de malha fechada, isto é, os autovalores da matriz $A - BK$.

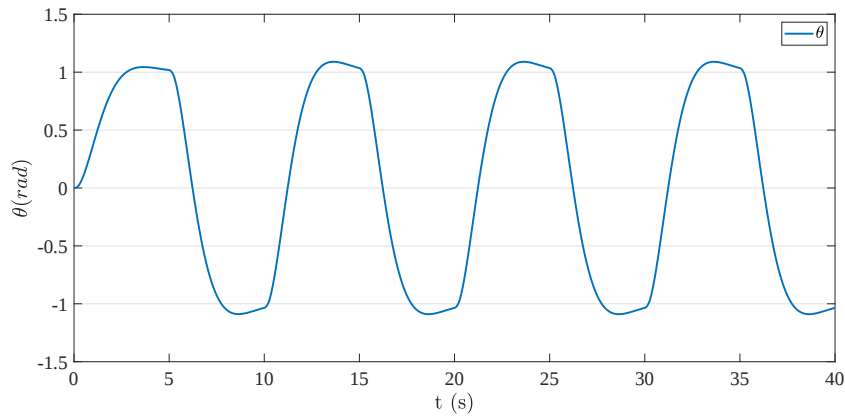
A matriz de ganhos de realimentação de estados obtida é:

$$K = \begin{bmatrix} 1.7454 & 1.0000 & 0.0698 & 0.0023 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

A seguir são apresentados os resultados da simulação do projeto do LQR, analisando as variáveis de deslocamento angular, deslocamento flexível e o sinal de controle (tensão no motor).

A Figura 5.1 apresenta o deslocamento angular θ realizada no *software* MATLAB®.

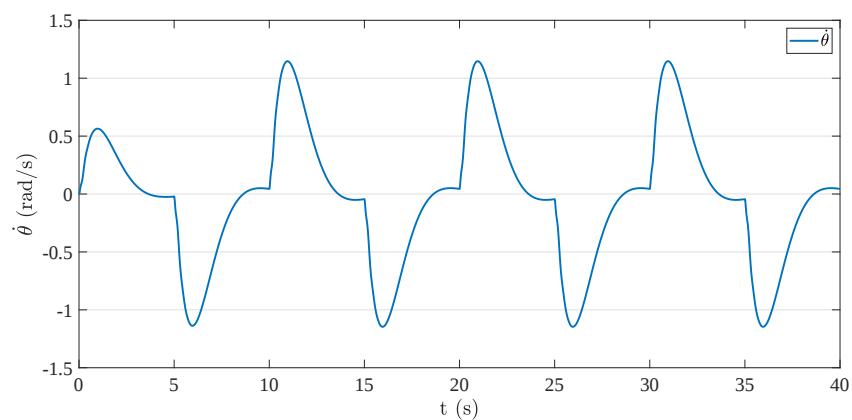
Figura 5.1: Deslocamento angular.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.2 mostra a velocidade de deslocamento angular $\dot{\theta}$.

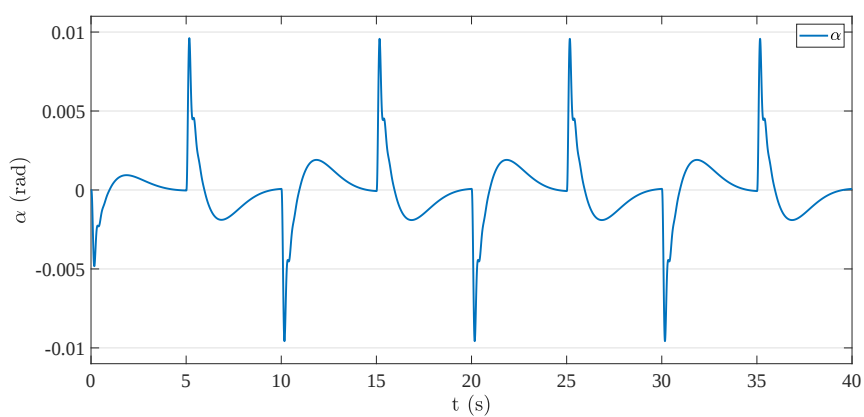
Figura 5.2: Velocidade angular.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.3 apresenta o deslocamento flexível α .

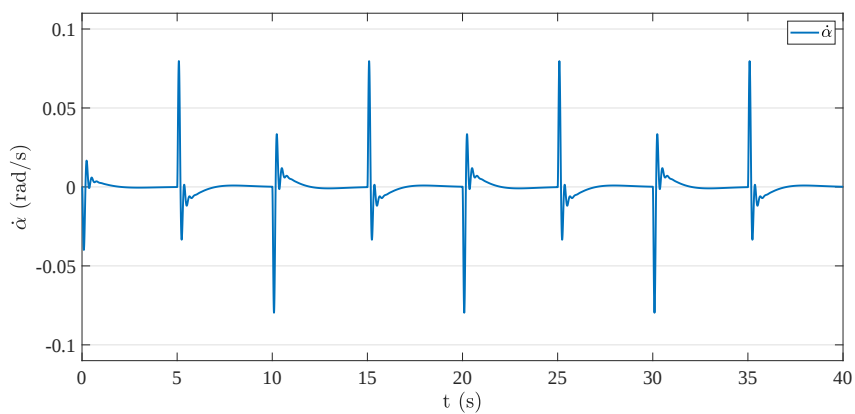
Figura 5.3: Deslocamento flexível.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.4 mostra a velocidade de deslocamento flexível $\dot{\alpha}$.

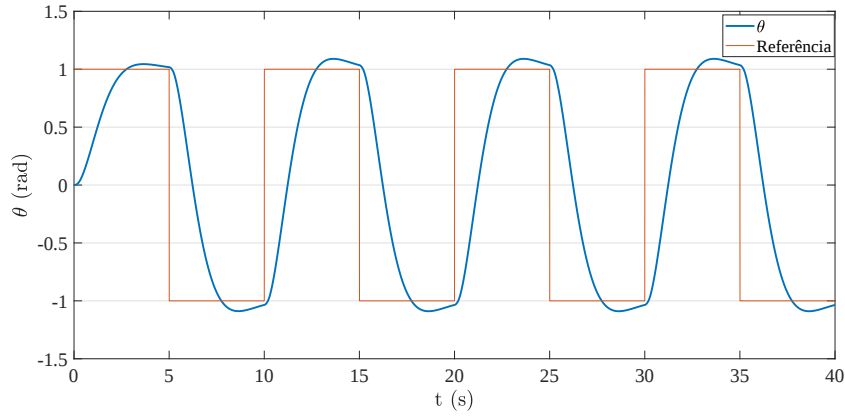
Figura 5.4: Velocidade de deslocamento flexível.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.5 mostra medida de deslocamento angular (θ) de corpo rígido obtida por um encoder virtual e com isso acompanhando os movimentos angulares de ambos sentidos (direita e esquerda), tendo como referência angular o zero grau.

Figura 5.5: Deslocamento angular / Referência.

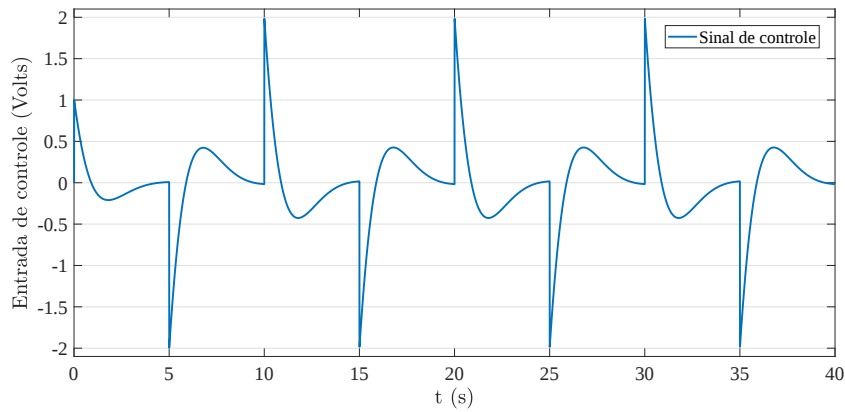


Fonte: (AUTOR, 2021)

Um requisito que deve ser considerado no Projeto do Controlador é a entrada de controle u , que para projetos reais têm um limiar o qual não deve ser ultrapassado. Também é desejável um menor consumo de energia, principalmente em satélites artificiais, sendo que estes, geralmente, possuem sua fonte de energia de baixa potência e muitas vezes limitada.

A Figura 5.6 mostra o comportamento da entrada de controle em função do tempo para a entrada de referência aplicada, a entrada de controle que excita o motor CC afim de seguir a referência imposta é mostrada, nota-se que as entradas de controle permanecem dentro do limite de saturação do motor.

Figura 5.6: Comportamento da entrada de controle à referência aplicada (LQR).



Fonte: (AUTOR, 2021)

5.2 SIMULAÇÃO COM A EQUAÇÃO DE RICCATI DEPENDENTE DO ESTADO (SDRE)

Na simulação com SDRE, será utilizada a teoria de controle em Espaço de Estados, pois é mais adequada para a aplicação na viga flexível rotacional do que as baseadas na relação entrada-saída ou função de transferência, também chamada de modelo no domínio da frequência.

Bogdanov (2010) afirma que técnica SDRE é a extensão do técnica do LQR para sistemas não lineares e fornece uma solução abaixo do ideal para o problema de controle ideal com uma função de custo quadrático linear. O projeto envolve a transformação das equações dinâmicas do sistema em uma forma pseudo-linear ou de Coeficiente Dependente do Estado (SDC), na qual as matrizes do sistema são representado explicitamente como uma função das variáveis de estado.

A abordagem SDRE para obter uma solução ideal do problema de controle tem o seguinte procedimento:

1. Represente o modelo no formato de Espaço de Estado e reescreva-o da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -40.3990 & 625 & 0.4808 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 40.3990 & -967.1053 & -0.7439 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 61.7325 \\ 0 \\ -61.7325 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Utilizando-se a notação vetorial-matricial, uma equação de ordem n pode ser representada por uma equação diferencial vetorial-matricial, de primeira ordem. A representação de um sistema físico no Espaço dos Estados é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (5.13)$$

Onde A matriz de estado (dinâmica), B matriz de entrada, C matriz de saída ou de observação, D matriz de transmissão direta, x denota o vetor de estados em $\mathbb{R}^n$, u representa o vetor de controle em $\mathbb{R}^p$, e y representa o processo de saída em $\mathbb{R}^m$. Sendo que n , p e m são dimensões apropriadas para as matrizes.

2. Verificar se o par (A, B) é controlável, isto é, se o *rank* (número de linhas linearmente independentes) da matriz de controlabilidade equivale ao número total de estados do sistema, e se o par (A, C) é observável, isto é, se o *rank* da matriz de observabilidade equivale ao número total de estados do sistema, então o método de controle LQR pode ser utilizado para encontrar o ganho de realimentação de estado em malha fechada K , e também podem ser usado no método SDRE (CLOUTIER, 1997; SOUZA, 2006; SOUZA; GONZALES, 2012).

A Controlabilidade é calculada no MATLAB® com o comando *ctrb*.

```
>> CONT = ctrb(A, B)
```

$$CONT = \begin{bmatrix} 0 & 61.7325 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8980e+09 & -1.1843e+11 & 4.9580e+12 \\ 61.7325 & 0 & 0 & 0 \\ -61.7325 & -6.3152e+04 & 1.1843e+11 & -4.9580e+12 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Utilizando o MATLAB® com o comando $rank(CONT)$ calcula do posto da matriz, e o comando $length(A)$ mostra a ordem do sistema:

```
>> rank(CONT)
ans = 4
>> ordemdosistema = length(A)
ans = 4
```

Como o sistema é de 4 ordem e o calculo do $rank(CONT)$ é 4, essa igualdade demonstra que o sistema é controlável.

O método SDRE requer que o vetor de medição de estado completo esteja disponível e que o par seja $A(x)$, $B(x)$ seja controlável no sentido linear no sentido linear x . Isso pode ser verificado através da formação da matriz de controlabilidade, como no sentido de sistemas lineares, e assegurando que ela tenha uma classificação completa no domínio de interesse. Essa condição simplesmente garante que a Equação de Riccati algébrica tenha uma solução no estado particular x . A condição de controlabilidade pontual não é necessariamente equivalente à controlabilidade não linear. Devido à não exclusividade de $A(x)$, diferentes opções de $A(x)$ podem produzir matrizes de controlabilidade diferentes e, portanto, características de controlabilidade diferentes (ELUMALAI; JEROMEB; SUBRAMANIAN, 2014).

A Observabilidade é calculada no MATLAB® com o comando $obsv$.

```
>> OBSER = obsv(A,C)
```

$$OBSER = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -40.8654 & 46944001 & 1 \\ 0 & 1.7108e+03 & -1.9184e+09 & -40.8654 \\ 0 & -7.1584e+04 & 8.0314e+10 & 1.7108e+03 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Utilizando o MATLAB® com o comando $rank(OBSER)$ calcula do posto da matriz, e o comando $length(A)$ mostra a ordem do sistema:

```
>> rank(OBSER)
ans = 4
>> ordemdosistema = length(A)
ans = 4
```

Quando o cálculo do posto da matriz $rank(OBSER)$, é igual a ordem do sistema (planta), demonstra que o sistema é observável (KAILATH, 1980; CHEN, 1995).

3. Deve-se encontrar uma lei de controle $u = -Kx$ de tal forma que minimize uma função de custo dada por:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x(t)^T Q x(t) + u^T R(x) u] dt \quad (5.16)$$

Onde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz semi-definida positiva simétrica e $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz definida positiva simétrica. Além disso, $x^T Q(x) x$ é uma medida da precisão do controle, e $u^T R(x) u$ é uma medida do esforço de controle. Deve-se notar que a formulação SDRE permite a troca entre a precisão do controle e o esforço de controle, que é uma propriedade geralmente não encontrada em outros métodos de controle não linear. Para minimizar a função de custo acima, uma lei de controle de *feedback* do estado pode ser dada como:

$$u(x) = -K(x)x = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x) \quad (5.17)$$

Onde $P(x)$ é a solução única, simétrica e com definição positiva da equação de Riccati dependente do estado. A matriz ideal de ganho de controle de *feedback* de estado K do LQR pode ser determinada resolvendo a seguinte Equação Algébrica de Riccati (ARE).

$$A^T(x)P(x) + P(x)A(x) + Q(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) = 0 \quad (5.18)$$

A Equação (5.18) é chamada de Equação Matricial de Riccati.

4. Definir as matrizes de penalidade Q e R do sistema $A(x)$, $B(x)$ que são expressas como funções dos estados, o que permite ao projeto capturar a não linearidade do sistema a cada intervalo de tempo. O problema geral do SDRE é a regulação do horizonte infinito de sistemas autônomos não lineares afins de entrada (ELUMALAI; JEROMEB; SUBRAMANIAN, 2014).

Desta maneira, define-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 1.0e2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0e5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad R = 1.0e5 \quad (5.19)$$

O projeto por meio das matrizes de ponderação dependentes de estado é uma estratégia SDRE que é um algoritmo eficaz para sintetizar controles de *feedback* não linear, permitindo não linearidades, nos estados do sistema e, adicionalmente, oferecendo grande flexibilidade de Projeto de Controle (FENILI; BALTHAZAR, 2011).

O problema do Controle Ótimo (SDRE) pode ser resolvido pelo *software* MATLAB[®] utilizando o comando:

$$[K, P, E] = lqr(A, B, Q, R) \quad (5.20)$$

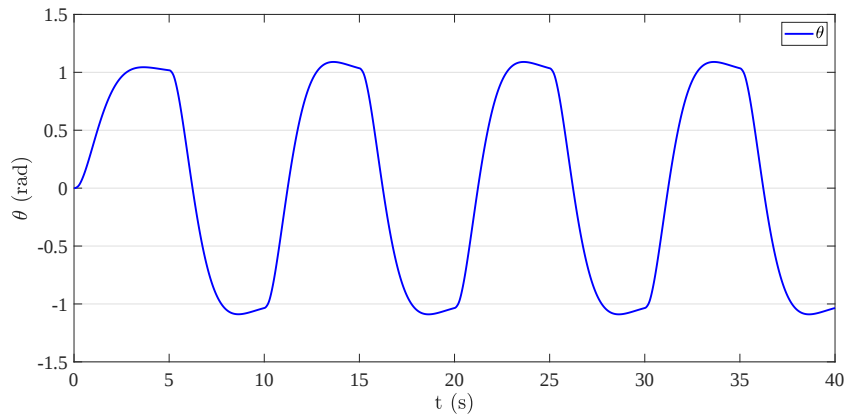
Onde K é a matriz de ganho ótimo, P é matriz positiva definida solução da equação de Riccati e E são os pólos de malha fechada, isto é, os autovalores da matriz $A - BK$.

A matriz de ganhos de realimentação de estados é variável, ou seja, não tem valor fixo.

$$K = [Variável] \quad (5.21)$$

A Figura 5.7 apresenta o deslocamento angular θ realizada no *software* MATLAB[®].

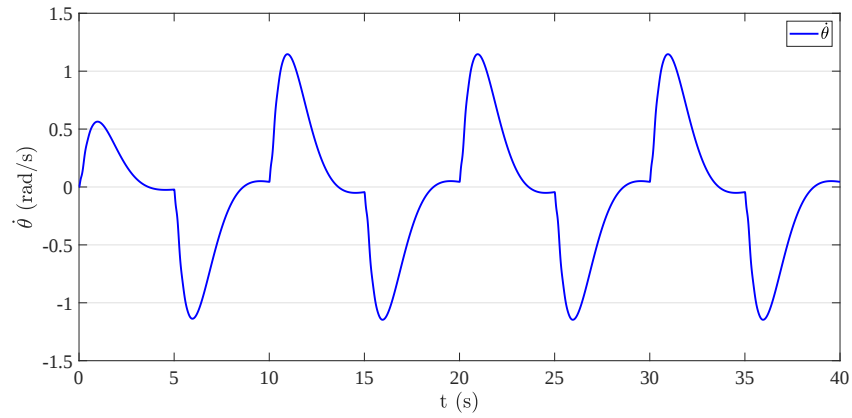
Figura 5.7: Deslocamento angular.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.8 mostra a velocidade de deslocamento angular $\dot{\theta}$.

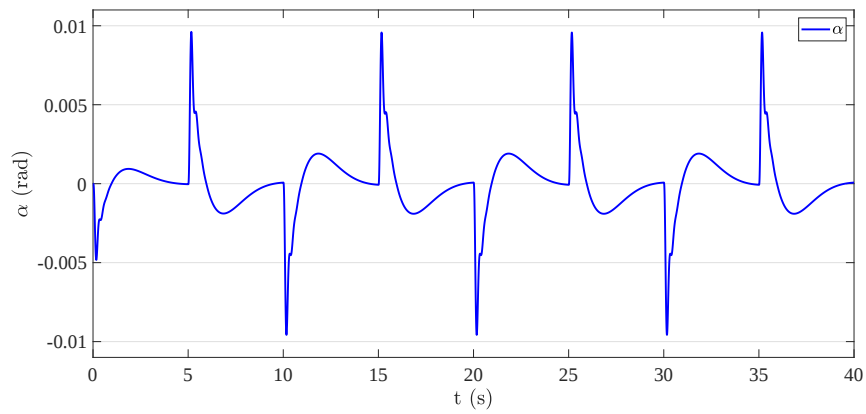
Figura 5.8: Velocidade angular.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.9 apresenta a deslocamento flexível α .

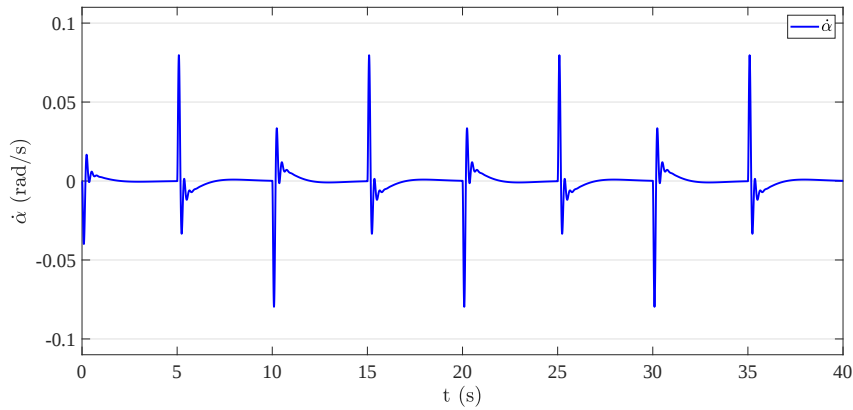
Figura 5.9: Deslocamento flexível.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.10 mostra a velocidade de deslocamento flexível $\dot{\alpha}$.

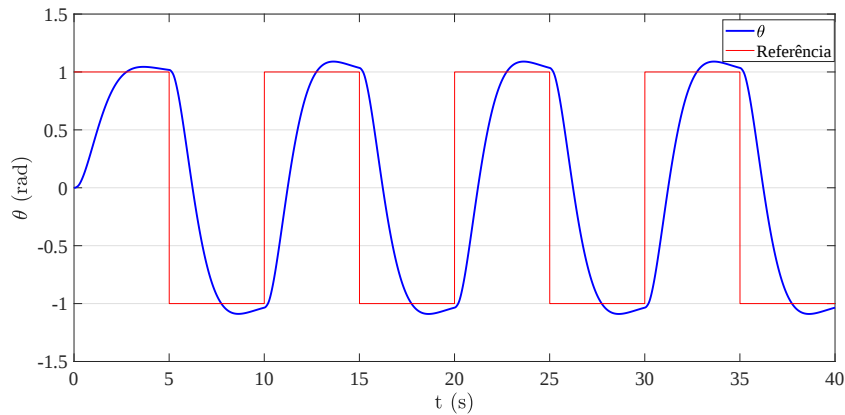
Figura 5.10: Velocidade de deslocamento flexível.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.11 mostra medida de deslocamento angular (θ) de corpo rígido obtida por um encoder virtual e com isso acompanhando os movimentos angulares de ambos sentidos (direita e esquerda), tendo como referência angular o zero grau.

Figura 5.11: Deslocamento angular / Referência.

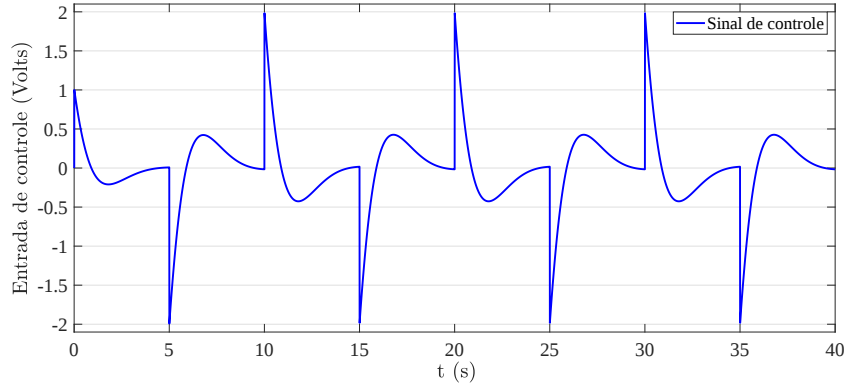


Fonte: (AUTOR, 2021)

O Controle Ótimo tem a função de regular e estabilizar o comportamento de sistemas dinâmicos, onde o sinal de controle é uma função da diferença dos valores atuais e valores desejados das variáveis de estado do sistema (TUSSET *et al.*, 2013).

A Figura 5.12 mostra a relação entre o comportamento da entrada de controle em função do tempo, a entrada de controle que excita o motor CC afim de seguir a referência, nota-se que o sinal de controle permanecem dentro do limite de saturação do motor.

Figura 5.12: Comportamento da entrada de controle à referência aplicada (SDRE).



Fonte: (AUTOR, 2021)

Nas simulações numéricas apresentadas acima, os resultados demonstraram que o método SDRE apresentou um desempenho semelhante à robustez comparado ao método LQR. Observa-se que na literatura uma das principais vantagens oferecidas pelo SDRE é controlar a troca entre força e erro de estado, o que pode ser alcançado ajustando a matriz de ponderação Q e R . Além disso, essas matrizes de ponderação podem ser selecionadas como constantes ou de acordo com variáveis de estado para obter a resposta desejada. Portanto, diferentes padrões de comportamento podem ser aplicados em diferentes regiões do Espaço de Estados. A minimização global da função de custo depende da convexidade da função de Hamilton em relação ao vetor de estado e à entrada de controle (ELUMALAI; JEROMEB; SUBRAMANIAN, 2014).

Desta forma, conclui-se que os resultados das simulações mostram que a abordagem SDRE tem características semelhantes à robustez do Regulador Linear Quadrático (LQR).

5.3 SIMULAÇÃO COM CÁLCULO FRACIONÁRIO

O Cálculo Fracionário permite descrever uma condição mais real de um objeto ou sistema do que através dos métodos de Ordem Inteiras, portanto, é possível o uso de derivadas de Ordem Fracionária (Ordem Não Inteiras) para analisar o comportamento dinâmico do sistema.

Na simulação do Cálculo Fracionário para o controle de vibração na viga flexível

rotacional baseada na modelagem do Petráš (2011b) e utilizando a Equação (5.22).

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (5.22)$$

Para a simulação da Ordem Inteira =1, para a Ordem Fracionária =0.9 e o valor de $m = 1$.

Com isso têm-se as ordens do sistema para a simulação numérica:

$$x^T = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} & \alpha & \dot{\alpha} \end{bmatrix} \text{vetor de estados} \quad (5.23)$$

$$orders = \begin{bmatrix} q1 & q2 & q3 & q4 \end{bmatrix} \text{ordem do sistema} \quad (5.24)$$

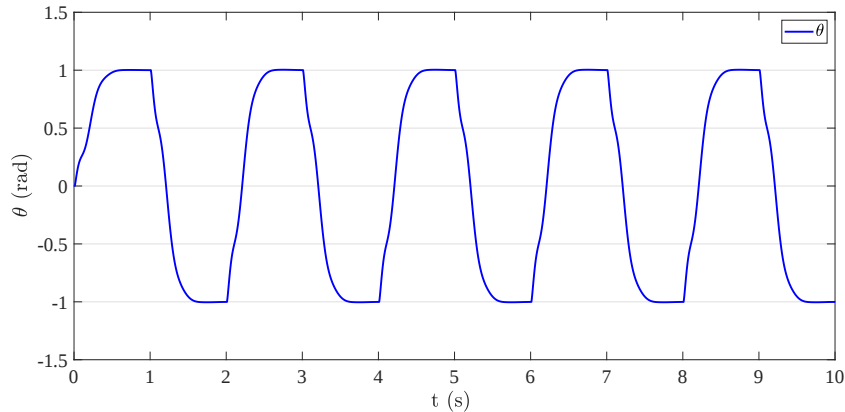
$$orders1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ordem inteira} \quad (5.25)$$

$$orders2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.9 & 1.1 \end{bmatrix} \text{ordem fracionária} \quad (5.26)$$

As figuras abaixo apresentam o sistema *Rotary Flexible Link* utiliza-se as técnicas do Cálculo Fracionário de Ordem Fracionária com Controle Ótimo e com realimentação de velocidade.

A Figura 5.13 apresenta o deslocamento angular θ de Ordem Fracionária com controle e realimentação de velocidade realizada no *software* MATLAB®.

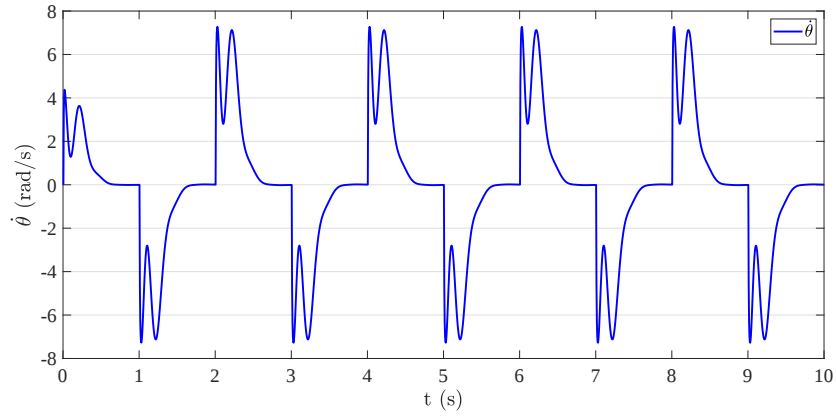
Figura 5.13: Deslocamento angular.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.14 mostra a velocidade de deslocamento angular $\dot{\theta}$ de Ordem Fracionária com controle e realimentação de velocidade.

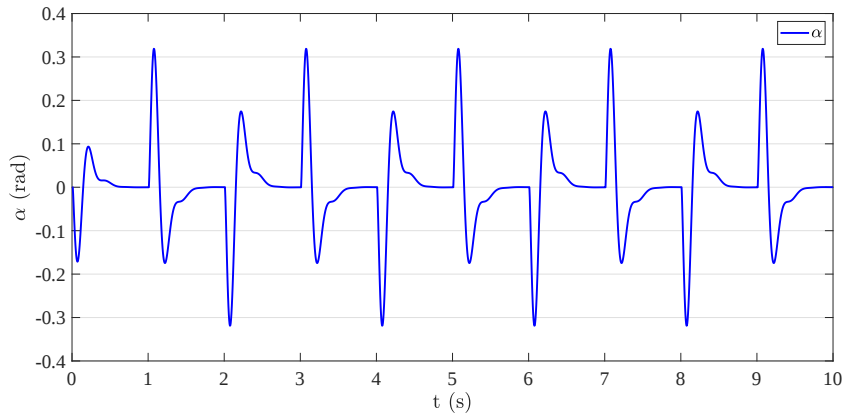
Figura 5.14: Velocidade angular.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.15 apresenta a deslocamento flexível α de Ordem Fracionária com controle e realimentação de velocidade.

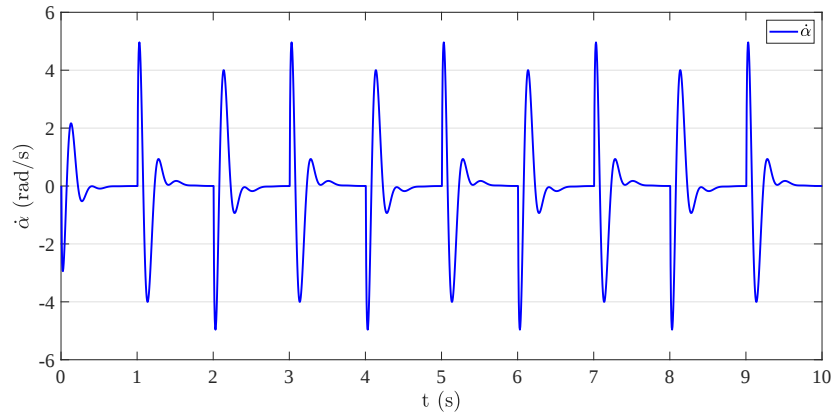
Figura 5.15: Deslocamento flexível.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.16 mostra a velocidade de deslocamento flexível $\dot{\alpha}$ de Ordem Fracionária com controle e realimentação de velocidade.

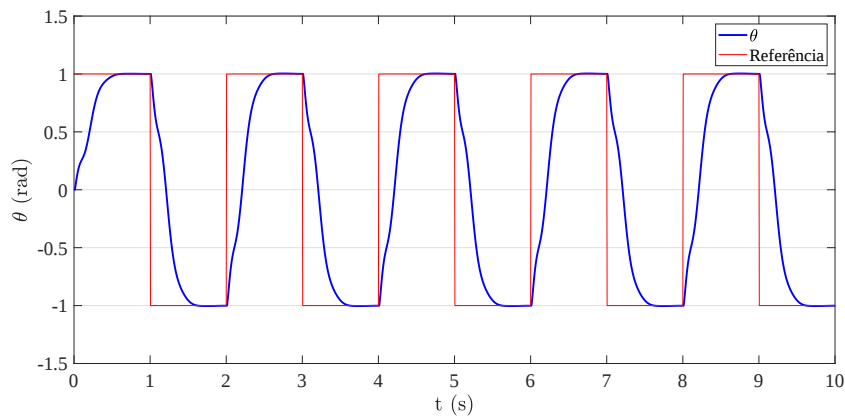
Figura 5.16: Velocidade de deslocamento flexível.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.17 mostra medida de deslocamento angular (θ) de corpo rígido obtida por um encoder virtual e com isso acompanhando os movimentos angulares de ambos sentidos (direita e esquerda), tendo como referência angular o zero grau.

Figura 5.17: Deslocamento angular / Referência.

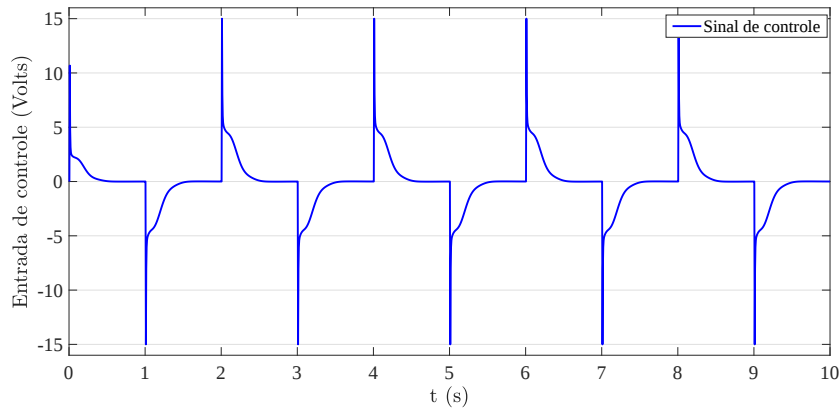


Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.18 mostra a relação entre o comportamento da entrada de controle em função do tempo, a entrada de controle que excita o motor CC afim de seguir a referência, nota-se que o sinal de controle permanecem dentro do limite de saturação do motor.

Como se vê, as entradas de controle permanecem, para a referência estabelecida, sempre menor que 15 volts, um valor considerado aceitável para o caso experimental, considera-se que o motor CC aceita uma entrada de -15 a 15 volts.

Figura 5.18: Comportamento da entrada de controle à referência aplicada (Cálculo Fracionário).

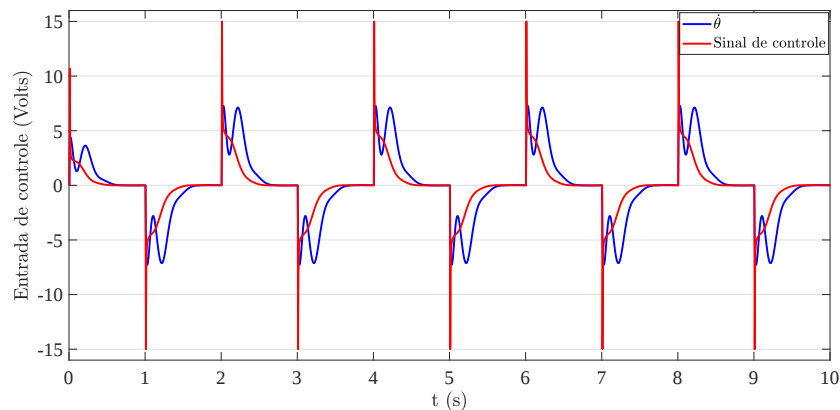


Fonte: (AUTOR, 2021)

Salienta-se que deve ser considerado no Projeto do Controlador é a entrada de controle u , que para projetos reais têm um limiar o qual não deve ser ultrapassado. Também é desejável um menor consumo de energia, principalmente em sistema com vigas flexíveis e em satélites artificiais, sendo que estes, geralmente, possuem sua fonte de energia de baixa potência e muitas vezes limitada.

A Figura 5.19 mostra o comportamento da entrada de controle u à realimentação aplicada na velocidade angular $\dot{\theta}$. Nota-se que as entradas de controle permanecem dentro do limite de saturação do motor (± 15 volts).

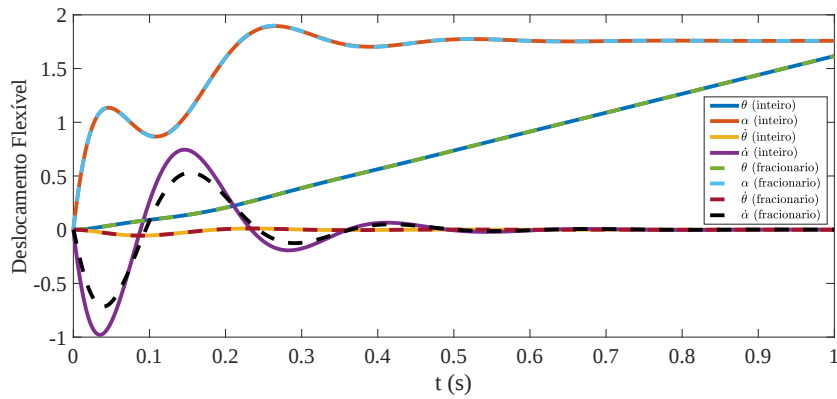
Figura 5.19: Comportamento da entrada de controle com a realimentação de velocidade angular $\dot{\theta}$.



Fonte: (AUTOR, 2021)

Na Figura 5.20 mostra a resposta do sistema sem controle utilizando os parâmetro do equipamento *Rotary Flexible Link*, conforme Tabela de Parâmetros 3.1, onde a variável r com o valor $r = 0.9$, resulta em derivadas fracionárias de ordem 0.9 e 1.1 para o sistema de Ordem Fracionária. As variáveis de estado de Ordem Fracionária são comparadas com a simulação do sistema de Ordem Inteira, conforme as variáveis de estado.

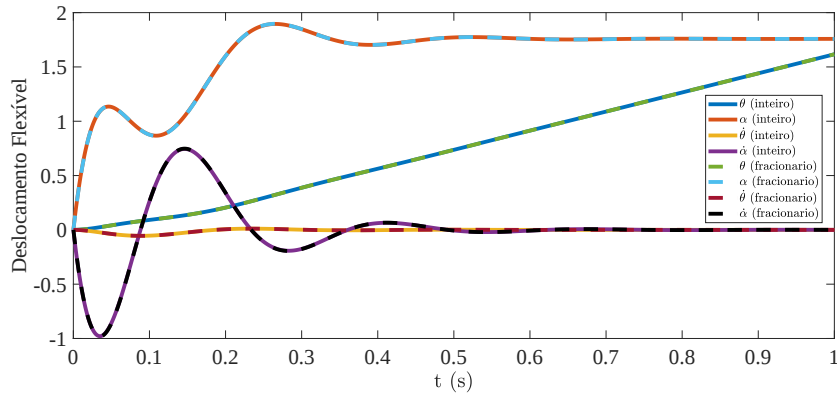
Figura 5.20: Comparação de Ordem Inteira com Fracionária (ordens das derivadas: 0.9 e 1.1) sem controle.



Fonte: (AUTOR, 2021)

A Figura 5.21 apresenta o resultado da simulação para $r = 1$, o que resulta em derivadas de ordem 1, desta forma, como esperado, o resultado sobrepõe os gráficos das simulações de Ordem Inteira e de Ordem Fracionária.

Figura 5.21: Comparação de Ordem Inteira com Fracionária (ordens das derivadas: 1 e 1) sem controle.



Fonte: (AUTOR, 2021)

Nas simulações numéricas com Cálculo Fracionário os resultados apresentaram um desempenho superior comparado ao método SDRE. Observa-se que na literatura uma das principais vantagens oferecidas pelo Cálculo Fracionário onde a aplicação vem aumentando rapidamente nas áreas de ciências e engenharias, pois permite descrever uma condição mais real de um objeto ou sistema do que através dos métodos de Ordem Inteiras, por isso muitos sistemas apresentam comportamento caótico em sua dinâmica, havendo a necessidade da aplicação de Controladores descritos por equações diferenciais de Ordem Fracionárias para suprimir este comportamento instável (TAVAZOEI; HARI, 2009); (WEN; WU; LU, 2008); (LI; CHEN; PODLUBNY, 2009); (SONG; YANG; XU, 2010); (PIRES *et al.*, 2010).

5.4 SIMULAÇÃO COM *Lead Compensator with Tachometer Feedback* (LCTF)

Nesta seção, a simulação numérica do sistema de uma viga flexível rotacional (*Rotary Flexible Link*) de Ordem Fracionária não linear é apresentada em detalhes. Além disso, o desempenho dos sistemas de controle projetados são analisados.

O sistema não linear da Equação (4.19) pode ser simulada, por integração numérica, considerando o método apresentado na Seção 4. Portanto, realizando a discretização e considerando o método de integração fornecido pela Equação (2.34), resulta em:

$$G_c(s) = 30 \frac{s + 45}{s + 225} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{T}^{(r)} [\mathbf{A}(\mathbf{x}(k-1))\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}u(k-1)] - \sum_{j=1}^L \mathbf{b}_j^{(r)} \mathbf{x}((k-j)T) \quad (5.28)$$

onde, de acordo com as Equações (2.36) e (4.20).

$$\mathbf{T}^{(r)} = \begin{bmatrix} T^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^{2-r} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

O cálculo do termo de soma da memória em (5.28) depende dos coeficientes binomiais, veja a fórmula em (2.33), e do tamanho da memória, veja a fórmula em (2.32). Os coeficientes binomiais e os códigos de soma de memória podem ser vistos nas Figuras 5.22 e 5.23, respectivamente.

Figura 5.22: Código para cálculo de coeficientes binomiais.

```
r: derivative order
L: number of coefficients (memory size)
function cr = bincoef(r,L)
cr0=1;
for j=1:L
    cr(j)=(1-(1+r)/j)*cr0;
    cr0=cr(j);
end
end
```

Fonte: (AUTOR, 2021)

Figura 5.23: Código para realizar a soma da memória.

```
x : state variable
cr: binomial coefficients
k: current step
function MSum = FOS(x,cr,k)
s0=0;
for j=1:k-1
    s0=s0 + cr(j)*x(k-j);
end
MSum=s0;
end
```

Fonte: (AUTOR, 2021)

As simulações são realizadas no MATLAB®, considerando os valores dos coeficientes apresentados na Seção 2.5.3 com valor de $T = 0.001$ e, conforme a Equação (2.32), para um tempo de simulação total $S_T = 5$, o tamanho da memória é $L \leq 5000$.

A sequencia para realizar a simulação do compensador de avanço com estratégia de controle de realimentação de velocidade, a função de transferência em (5.27) deve ser convertida em uma função de transferência discreta, que é realizada usando a transfor-

mação bilinear mostrado por Ogata (1995), ou pelo método de Tustin apresentado por Vinagre, Chen e Petráš (2003), dado por:

$$G_c(z) = 27.57 \frac{z - 0.96}{z - 0.80} \quad (5.30)$$

O Controlador LCTF é implementado na forma de uma equação de diferenças. O código de simulação numérica do Controlador LCTF, aplicado ao sistema não linear da Equação (4.19), é mostrado na Figura 5.24.

Figura 5.24: Código da simulação do Controlador LCFT.

```

Coef: Coefficients of the model and controller
r: Order of the derivatives
x0: Initial conditions
T: Sampling time (integration step)
L: Memory size
z: Reference
function [x u] = FOBeam(Coef,r,x0,T,L,z)
Compute Binomial Coefficients
cr1=bincoef(r1,L);
cr2=bincoef(r2,L);
cr3=bincoef(r3,L);
cr4=bincoef(r4,L);
Initial conditions
x(:,1)=[x0(1);x0(2);x0(3);x0(4)]
Step time matrix
Tr=[T^r(1) 0 0 0; 0 T^r(2) 0 0; 0 0 T^r(3) 0; 0 0 0 T^r(4)];
Initial Error and Control
E(1)=ref(1)-x(1,1);
u(1)=(Coef.numc(1)/Coef.denc(1))*E(1);
Begin of Simulation Loop
for k=2:L
    Compute nonlinear model
    G=(Coef.Ng*Coef.Nm*Coef.Kt*Coef.Kg)/(Coef.Rm);
    G2=(Coef.Jeq+Coef.Jl)/(Coef.Jl*Coef.Jeq);
    G3=(Coef.Beq+G*Coef.Km*Coef.Kg);
    A = [0 , 1 , 0 , 0 ;...
          0 , -G3/Coef.Jeq ,...
          (Coef.Ks+Coef.Knl*(x(3,k-1)^2))/Coef.Jeq,...
          Coef.Kb/Coef.Jeq;...
          0 , 0,0,1;...
          0 , G3/Coef.Jeq,...
          -G2*(Coef.Ks+Coef.Knl*(x(3,k-1)^2)), -G2*Coef.Kb];
    B = [0;G/Coef.Jeq;0;-G/Coef.Jeq];
    C = [1 0 0 0];
    D = 0;
    Compute memory summation
    MSum=[FOS(x(1,:),cr1,k);FOS(x(2,:),cr2,k);...
           FOS(x(3,:),cr3,k);FOS(x(4,:),cr4,k)];
    Compute Fractional order integration
    x(:,k)=Tr*(A*x(:,k-1)+B*u(k-1)) - MSum;
    Compute Control Signal
    E(k) = ref(k)-x(1,k)-Coef.RV*x(2,k);
    u(k)=-(Coef.denc(2)/Coef.denc(1))*u(k-1)+...
           (Coef.numc(1)/Coef.denc(1))*E(k)+...
           (Coef.numc(2)/Coef.denc(1))*E(k-1);
end
End of Simulation Loop
end

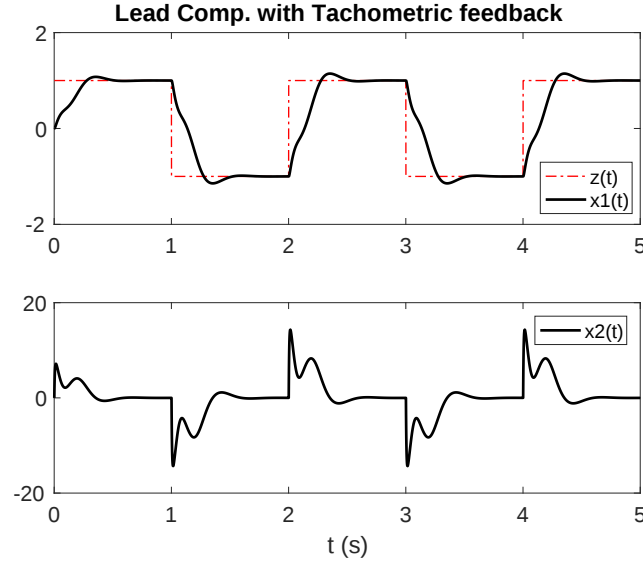
```

Fonte: (AUTOR, 2021)

As simulações são realizadas considerando um sinal de referência de onda quadrada $z(t)$. Os resultados da simulação são mostrados nas Figuras 5.25, 5.26 e 5.27.

Na Figura 5.25 a referência de onda quadrada $z(t)$, e as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ relacionadas ao eixo do motor são mostradas. Como pode ser visto o motor rastreia a referência, atendendo às especificações do projeto.

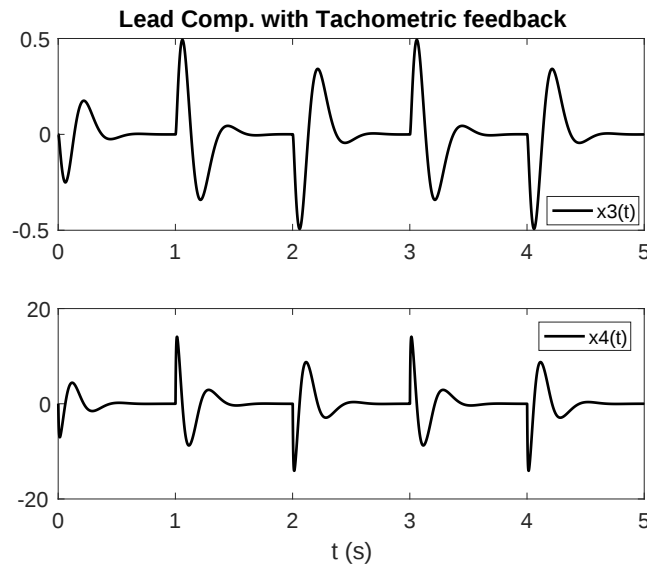
Figura 5.25: Resultados da simulação do Controlador LCFT, $z(t)$, $x_1(t)$ e $x_2(t)$.



Fonte: (AUTOR, 2021)

Na Figura 5.26, as variáveis de estado relacionadas à flexão da viga $x_3(t)$ e $x_4(t)$ são plotadas, mostrando que as oscilações são bem amortecidas.

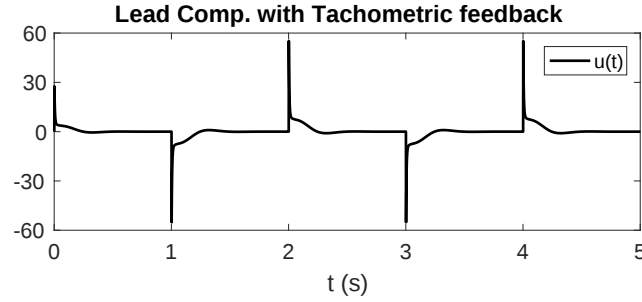
Figura 5.26: Resultados da simulação do Controlador LCFT, $x_3(t)$ e $x_4(t)$.



Fonte: (AUTOR, 2021)

O sinal de controle está plotado na Figura 5.27. Como pode ser observado, a amplitude de pico do sinal de controle, próximo a 60 volts, é muito alta, já que as entradas típicas são de ± 15 Volts. Por isso, frequentemente, o sinal de controle deve estar saturado para proteger o circuito do servomecanismo.

Figura 5.27: Resultados da simulação do Controlador LCFT, sinal de controle $u(t)$.



Fonte: (AUTOR, 2021)

O desempenho e o comportamento dinâmico da viga flexível rotacional com o Controlador LCTF são usados para configurar os Projetos de Controladores LQT e SDRE-TC, que são subótimo. A resposta da variável de estado $x_1(t)$ à referência $z(t)$ é a finalidade a ser alcançada pelos Controladores SDRE-TC e LQT.

5.5 VALIDAÇÃO DO PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE LQT

O Projeto do Controlador LQT é realizado considerando a realização do sistema linear conforme Equação (4.25) com $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

As matrizes com índice de desempenho $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são dadas pelas Equações (5.31) e (5.32). As matrizes são escolhidas para gerar uma resposta de Espaço de Estado semelhante às Figuras 5.25 e 5.26.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2.0 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 \times 10^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \times 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$\mathbf{R} = 2.0 \times 10^2 \quad (5.32)$$

O código da simulação do Controlador LQT subótimo é mostrado na Figura 5.28.

Figura 5.28: Código da simulação do Controlador LQT.

```

Coef: Coefficients of the model and controller
r: Order of the derivatives
x0: Initial conditions
T: Sampling time (integration step)
L: Memory size
z: Reference
A,B,C,D: State space matrices
Q,R: Performance index matrices
K: State feedback designed gain
function [x,u,s] = FOBeamLQT(Coef,r,x0,T,L,z,A,B,C,D,Q,R,K)
    ...
Initial Error and Control
M=A'-K*B*inv(R)*(B');
s=inv(M)*Q*z;
u(1)=-inv(R)*(B')*(K*x(:,1)+s(:,1));
Begin of Simulation Loop
for k=2:L
    Compute nonlinear model
    ...
    Compute memory summation
    MSum=[FOS(x(1,:),cr1,k);FOS(x(2,:),cr2,k);...
           FOS(x(3,:),cr3,k);FOS(x(4,:),cr4,k)];
    Compute Fractional order integration
    x(:,k)=Tr*(A*x(:,k-1)+B*u(k-1)) - MSum;

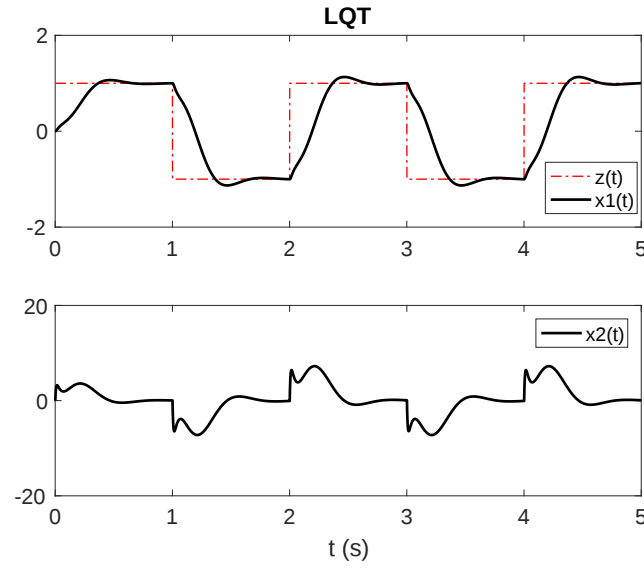
    Compute Control Signal
    u(k)=-inv(R)*(B')*(K*x(:,k)+s(:,k));
end
End of Simulation Loop
end

```

Fonte: (AUTOR, 2021)

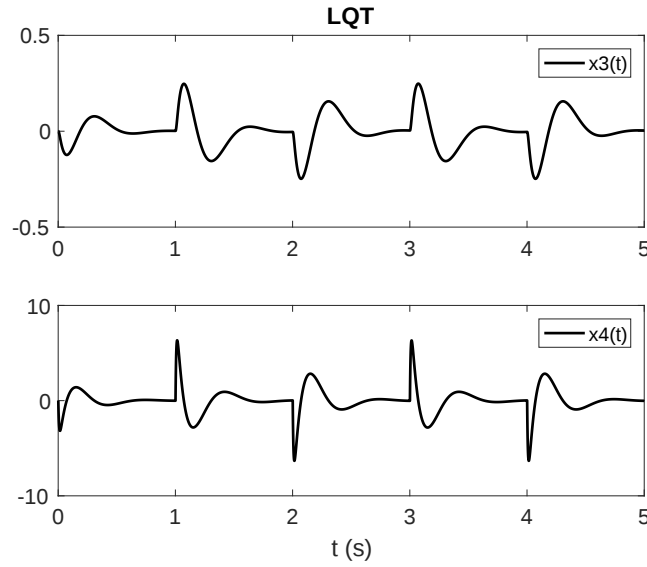
A simulação de validação de desempenho do sistema de controle apresentadas nas Figuras 5.29 e 5.30.

Figura 5.29: Simulação de Validação do Projeto do Controlador LQT. Sinal de referência $z(t)$, posição angular do eixo do motor $x_1(t)$ e velocidade angular $x_2(t)$.



Fonte: (AUTOR, 2021)

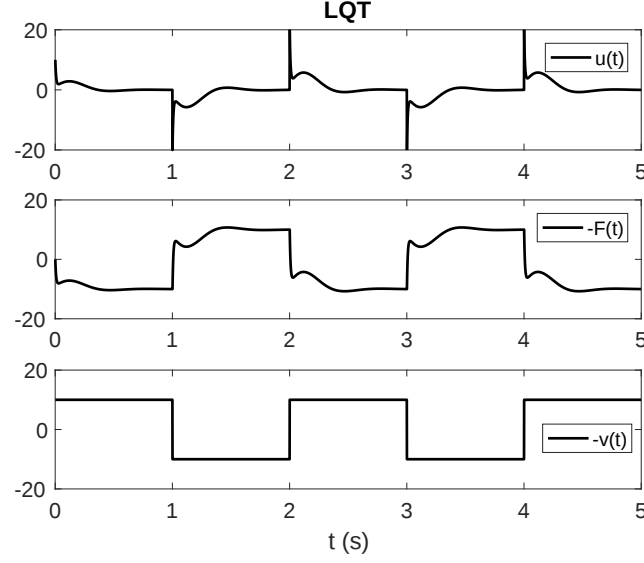
Figura 5.30: Simulação de Validação do Projeto do Controlador LQT. Ângulo de flexão $x_3(t)$ e derivada do ângulo de flexão $x_4(t)$.



Fonte: (AUTOR, 2021)

O sinal de controle $u(t)$ com as funções vetoriais $\mathbf{F}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ do LQT pode ser visto na Figura 5.31.

Figura 5.31: Simulação de Validação do Projeto do Controlador LQT. Sinal de controle.



Fonte: (AUTOR, 2021)

Comparando as Figuras 5.29 com 5.25, e 5.30 com 5.26, pode-se observar que o LQT gera o comportamento desejado para $x_1(t)$, com amplitudes ligeiramente menores de $x_2(t)$ e $x_4(t)$. além disso, como pode ser visto nas Figuras 5.27 e 5.31, o LQT gera um sinal de controle com amplitude máxima muito pequena.

5.6 VALIDAÇÃO DO PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE SDRE-TC

O Projeto do Controlador SDRE-TC é realizado considerando a realização da forma linear estendida conforme Equação (4.19), de forma semelhante à Seção 5.5, com $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. As matrizes com índice de desempenho $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são as mesmas das Equações (5.31) e (5.32). A matriz de ganho de realimentação (*feedback*) de estado $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ é calculada durante cada etapa, de acordo com o código da simulação SDRE-TC mostrado na Figura ??.

Figura 5.32: Código da simulação do controlador SDRE-TC.

```

Coef: Coefficients of the model and controller
r: Order of the derivatives
x0: Initial conditions
T: Sampling time (integration step)
L: Memory size
z: Reference
Q,R: Performance index matrices
function [x,u,s] = FOBeamLQT(Coef,r,x0,T,L,z,Q,R)

    ...
Extended linear notation realization
G=(Coef.Ng*Coef.Nm*Coef.Kt*Coef.Kg)/(Coef.Rm);
G2=(Coef.Jeq+Coef.Jl)/(Coef.Jl*Coef.Jeq);
G3=(Coef.Beq+G*Coef.Km*Coef.Kg);
A = [0 , 1 , 0 , 0 ;...
      0 , -G3/Coef.Jeq ,...
      (Coef.Ks+Coef.Knl*(x(3,1)^2))/Coef.Jeq,...
      Coef.Kb/Coef.Jeq;...
      0 , 0,0,1;...
      0 , G3/Coef.Jeq,...
      -G2*(Coef.Ks+Coef.Knl*(x(3,1)^2)), -G2*Coef.Kb];
B = [0;G/Coef.Jeq;0;-G/Coef.Jeq];
C = [1 0 0 0];
D = 0;
Initial Error and Control
rnk=rank(ctrb(A,B));
if (rnk==4)
    K=care(A,B,Q,R);
end
KK(1).K=K;
M=A'-K*B*inv(R)*(B');
s(:,1)=inv(M)*Q*z(:,1);
u(1)=-inv(R)*(B')*(K*x(:,1)+s(:,1));
Begin of Simulation Loop
for k=2:L
    Compute Extended linear notation realization
    A = [0 , 1 , 0 , 0 ;...
          0 , -G3/Coef.Jeq ,...
          (Coef.Ks+Coef.Knl*(x(3,k-1)^2))/Coef.Jeq,...
          Coef.Kb/Coef.Jeq;...
          0 , 0,0,1;...
          0 , G3/Coef.Jeq,...
          -G2*(Coef.Ks+Coef.Knl*(x(3,k-1)^2)), -G2*Coef.Kb];
    Compute memory summation
    MSum=[FOS(x(1,:),cr1,k);FOS(x(2,:),cr2,k);...
           FOS(x(3,:),cr3,k);FOS(x(4,:),cr4,k)];
    Compute Fractional order integration
    x(:,k)=Tr*(A*x(:,k-1)+B*u(k-1)) - MSum;
    Compute Control Signal
    rnk=rank(ctrb(A,B));
    if (rnk==4)
        K=care(A,B,Q,R);
    end
    KK(k).K=K;
    s(:,k)=inv(M)*Q*z(:,k);
    u(k)=-inv(R)*(B')*(K*x(:,k)+s(:,k));
end
End of Simulation Loop
end

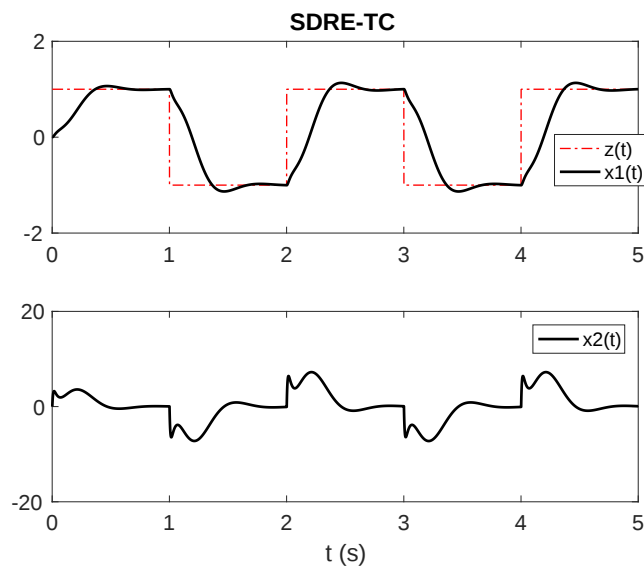
```

Fonte: (AUTOR, 2021)

A simulação de Validação de desempenho SDRE-TC pode ser vista nas Figuras 5.33, 5.34 e 5.35. Como pode ser visto, a resposta SDRE-TC é muito semelhante ao caso LQT (compare com as Figuras 5.29, 5.30 e 5.31), gerando a resposta desejada para $x_1(t)$ visto

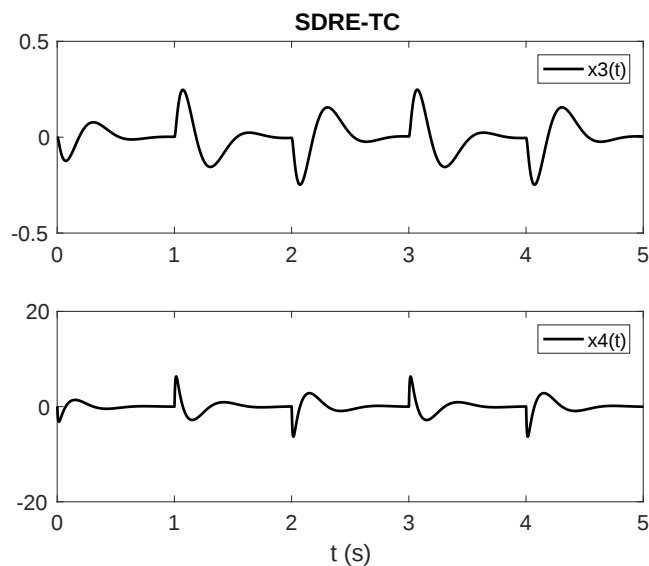
na Figura 5.25.

Figura 5.33: Simulação de Validação do Projeto do Controlador SDRE-TC. Sinal de referência $z(t)$, posição angular do eixo do motor $x_1(t)$ e velocidade angular $x_2(t)$.



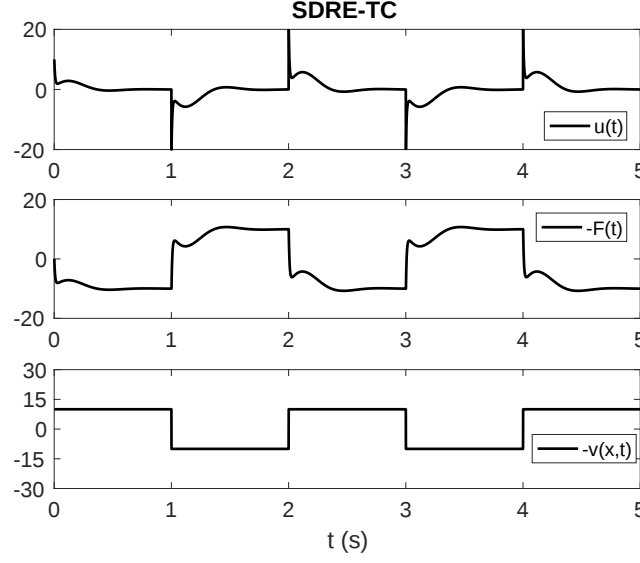
Fonte: (AUTOR, 2021)

Figura 5.34: Simulação de Validação do Projeto do Controlador SDRE-TC. Ângulo de flexão $x_3(t)$ e derivada do ângulo de flexão $x_4(t)$.



Fonte: (AUTOR, 2021)

Figura 5.35: Simulação de Validação do Projeto do Controlador SDRE-TC. Sinal de controle.



Fonte: (AUTOR, 2021)

5.7 CONTROLE DA VIGA FLEXÍVEL ROTACIONAL COM O CÁLCULO FRACIONÁRIO

Nesta seção, os Controladores SDRE-TC e LQT são aplicados para controlar a estrutura flexível rotacional de Ordem Fracionária não linear. Os desempenhos de ambos os Controladores são testados considerando as incertezas dos parâmetros na ordem das derivadas fracionárias.

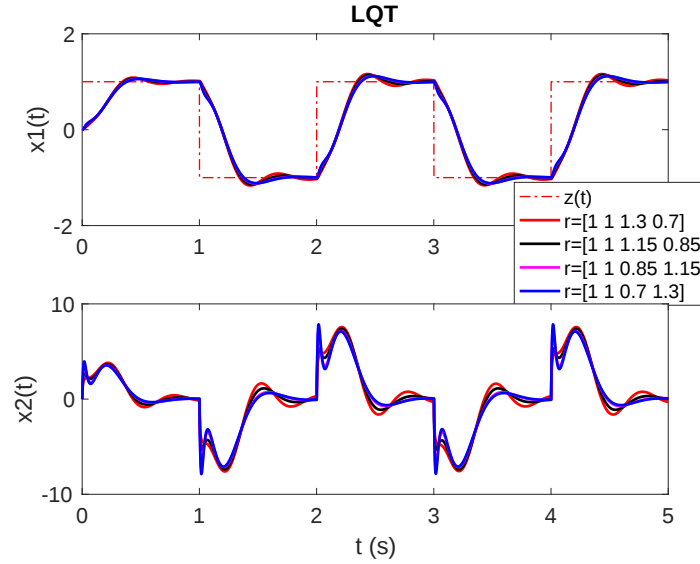
Considerando o vetor de ordem das derivadas conforme a Equação (4.20), as simulações são realizadas para $0.7 \leq \mu \leq 1.3$, ou seja, para $\mu_1 = 0.7$, $\mu_2 = 0.85$, $\mu_3 = 1.15$ e $\mu_4 = 1.3$, resultando em quatro vetores derivados apresentados na Equação (5.33).

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.7 \\ 1.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.85 \\ 1.15 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.15 \\ 0.85 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.3 \\ 0.7 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Os resultados das simulações do Controlador LQT são mostrados nas Figura 5.36,

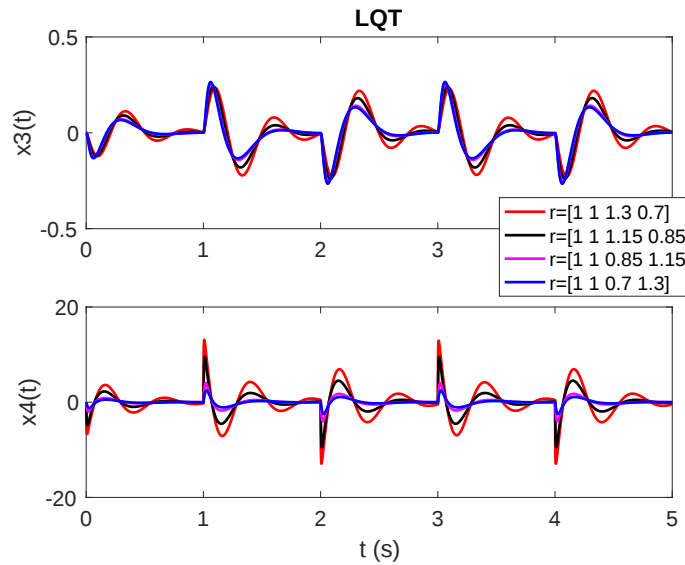
5.37 e 5.38. Pode-se notar que o Controlador LQT é eficiente em controlar e rastrear a referência da variável de estado $x_1(t)$, ou seja, o eixo do motor $\theta(t)$ (veja a Equação (4.17)), com pequenas oscilações na velocidade do eixo do motor $x_2(t)$.

Figura 5.36: Simulação do Controlador LQT, $x_1(t)$, $x_2(t)$.



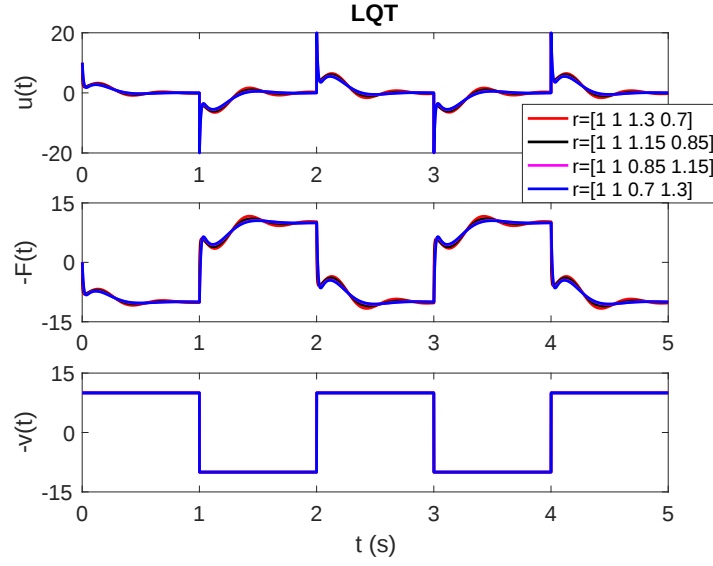
Fonte: (AUTOR, 2021)

Figura 5.37: Simulação do Controlador LQT, $x_3(t)$, $x_4(t)$.



Fonte: (AUTOR, 2021)

Figura 5.38: Simulação do Controlador LQT, sinal de controle.



Fonte: (AUTOR, 2021)

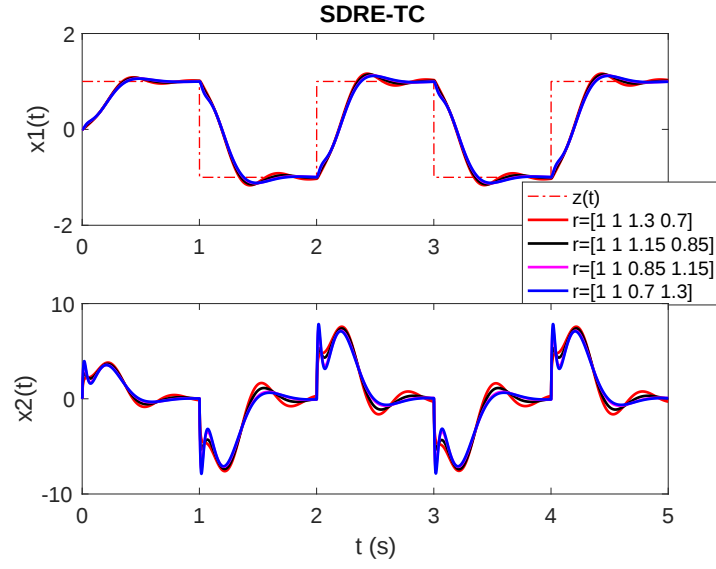
Por outro lado, para $x_3(t)$ e $x_4(t)$, ou seja, para o ângulo de flexão da viga flexível $\alpha(t)$ e sua derivada $\alpha^\mu(t)$, as amplitudes das oscilações são maiores.

Esse comportamento sugere que, no caso de incertezas de parâmetros, as matrizes de índices com desempenho $\mathbf{Q}$ and $\mathbf{R}$ devem ser revistas a fim de melhorar o amortecimento nas variáveis de estado $x_3(t)$ e $x_4(t)$.

Além disso, a Figura 5.38, o sinal de controle $u(t)$ e as funções vetoriais $-\mathbf{F}(t)$ e $-\mathbf{v}(t)$ são mostrados, mostrando a eficácia do rastreamento subótimo.

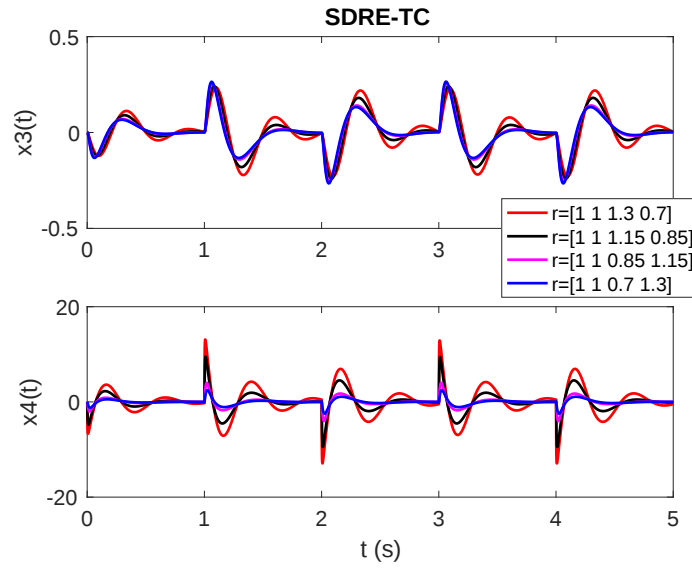
Nas Figuras 5.39, 5.40 e 5.41 são mostrados os resultados das simulações para o SDRE-TC considerando $\mu_1 = 0.7$, $\mu_2 = 0.85$, $\mu_3 = 1.15$ e $\mu_4 = 1.3$.

Figura 5.39: Simulação SDRE-TC, $x_1(t)$, $x_2(t)$.



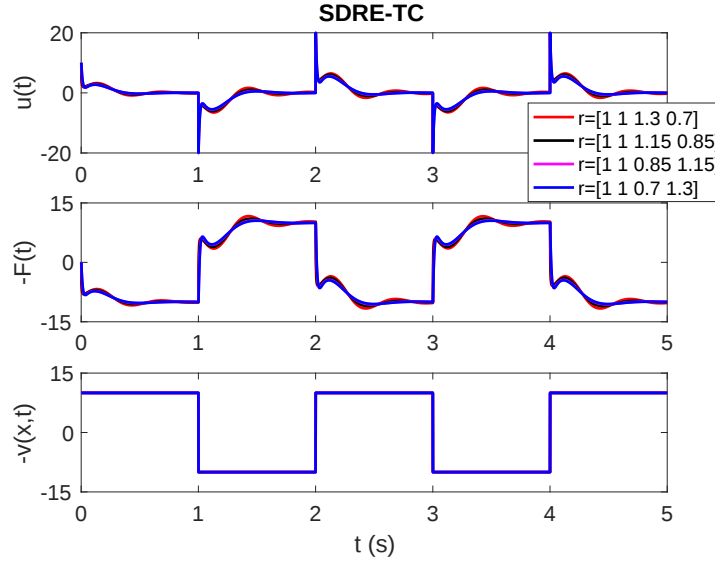
Fonte: (AUTOR, 2021)

Figura 5.40: Simulação SDRE-TC, $x_3(t)$, $x_4(t)$.



Fonte: (AUTOR, 2021)

Figura 5.41: Simulação SDRE-TC, sinal de controle.



Fonte: (AUTOR, 2021)

Da mesma forma que o Controlador LQT, o SDRE-TC é eficiente no rastreamento da referência da variável de estado $x_1(t)$ com pequenas oscilações na velocidade do eixo do motor $x_2(t)$.

No entanto, o ângulo de flexão e a velocidade angular $x_3(t)$ e $x_4(t)$ apresentam maior amplitude de oscilações, o que pode ser destrutivo para muitas estruturas flexíveis. Este comportamento, à semelhança do Controlador LQT, também sugere que, em casos práticos, as matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ do índice de desempenho devem ser revistas a fim de melhorar o amortecimento e a robustez do sistema de controle.

Portanto, o sinal de controle $u(t)$ e as funções vetoriais $-\mathbf{F}(t)$ e $-\mathbf{v}(x,t)$ mostram o desempenho de rastreamento subótimo do Controlador.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Os modelos matemáticos para o sistema *Rotary Flexible Link* foram desenvolvidos, simulados e verificados através de simulação numérica.

Além disso, foram projetados Controladores utilizando os métodos LQR, SDRE, Cálculo Fracionário, LQT, SDRE-TC e LCTF, para que se possa controlar o deslocamento angular de corpo rígido, e a amplitude de flexão da viga, deste modo atenuando a vibração na viga flexível. As técnicas de controle foram modificadas para evitar cálculos retroativos, e assim evitar-se prejuízos na aplicação de tais técnicas em sistemas de tempo real. Apresentou-se, também um procedimento sistemático para discretização e simulação numérica de sistemas de Ordem Fracionária.

As simulações numéricas mostraram que por meio do modelo matemático com o Cálculo Fracionário apresentaram resultados satisfatórios comparado ao método SDRE, atribui-se estas diferenças principalmente às não linearidades apresentadas pelo sistema, com isso apresentando resposta transitória rápida e bem amortecida, bem como erro de estado estacionário nulo.

Os Controladores LQT e SDRE-TC visavam a resposta de um Controlador com Compensador de Avanço com Realimentação de Velocidade (LCTF) e apresentaram desempenho efetivo com amplitude de pico de sinal de controle na viga flexível rotacional de Ordem Fracionária não linear, onde o sinal de referência foi rastreado.

Os resultados da simulação numérica com os Controladores propostos mostraram eficácia para controlar sistemas não lineares.

CAPÍTULO 7

TRABALHOS FUTUROS

Pode-se ainda, considerar para continuação do trabalho os seguintes tópicos:

- Aplicar experimentalmente o LQR, SDRE, Cálculo Fracionário, LQT, SDRE-TC e LCTF no sistema *Rotary Flexible Link*;
- Estudar e aplicar o controle de *feedback* de estado com Filtro fracionário de Kalman (FKF), assim como encontrados nos trabalhos de (SIEROCIUK; DZIELIŃSKI, 2006) e (DZIELIŃSKI; SIEROCIUK, 2008).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDEL-RAHMAN, E. M.; NAYFEH, A. H.; MASOUD, Z. N. Dynamics and control of cranes: A review. *Journal of Vibration and Control*, Sage Publications, 2003.

ADOLFSSON, K.; ENELUND, M.; OLSSON, P. On the fractional order model of viscoelasticity. *Mechanics of Time-dependent materials*, Springer, v. 9, n. 1, p. 15–34, 2005.

AGRAWAL, O. P. Application of fractional derivatives in thermal analysis of disk brakes. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 38, n. 1-4, p. 191–206, 2004.

AL-SAGGAF, U. M.; MEHEDI, I. M.; MANSOURI, R.; BETTAYEB, M. Rotary flexible joint control by fractional order controllers. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 15, n. 6, p. 2561–2569, 2017.

ALBA-FLORES, R.; BARBIERI, E. Real-time Infinite Horizon Linear-Quadratic Tracking Controller for Vibration Quenching in Flexible Beams. In: *2006 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. [S.l.: s.n.], 2006. v. 1, p. 38–43.

AMARAL, B. D. *Solução da Equação de Transporte Multidimensional em Geometria Cartesiana e Meio Infinito Usando Derivada Fracionária*. Dissertação (Mestrado) — 2003, 90 f. Universidade Federal do Rio de Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

ANASTASIO, T. J. The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons. *Biological cybernetics*, Springer, v. 72, n. 1, p. 69–79, 1994.

ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.

ANDRADE, M. F. *Equações de difusão fracionárias e não-lineares: soluções e difusão anômala*. Dissertação (Mestrado) — 2006, 90 f. Universidade Estadual de Maringá, Paraná, 2006.

AVILA, E. B.; SALES, T. P.; RADE, D. A.; LACERDA, H. B. Assessment of fractional-order controllers for active vibration control. *20th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM*, 2009.

BAGLEY, R. On the equivalence of the Riemann-Liouville and the Caputo fractional order derivatives in modeling of linear viscoelastic materials. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy of Sciences, v. 10, n. 2, p. 123–126, 2007.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, The Society of Rheology, v. 27, n. 3, p. 201–210, 1983.

- BALTHAZAR, J.; BASSINELLO, D. G.; TUSSET, A. M.; BUENO, Á. M.; JUNIOR, B. R. de P. Nonlinear control in an electromechanical transducer with chaotic behaviour. *Meccanica*, v. 49, n. 8, p. 1859–1867, 2014.
- BALTHAZAR, J. M.; TUSSET, A. M.; SOUZA, S. L. T. D.; BUENO, A. M. Microcantilever chaotic motion suppression in tapping mode atomic force microscope. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, SAGE Publications, v. 227, n. 8, p. 1730–1741, 2013.
- BARBOSA, F. S. *Controle ativo modal de vibrações estruturais*. Dissertação (Mestrado) — 1996, 90 f. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1996.
- BARBOSA, R. S.; MACHADO, J. A. T.; SILVA, M. F. Time domain design of fractional differintegrators using least-squares. *Signal Processing*, Elsevier, v. 86, n. 10, p. 2567–2581, 2006.
- BASILIO, J. C. Laboratório de sistemas de controle. *Universidade Federal do Rio de Janeiro - Escola de Engenharia - Departamento de Eletrotécnica*, 2004.
- BIGOT, P.; SOUZA, L. C. G. d. Design of non-linear controller for a flexible rotatory beam using State-Dependent Riccati Equation (SDRE) control. In: *Proceedings of the 2013 International Conference on Systems, Control and Informatics*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 148–155.
- BOGDANOV, A. Dual-Loop Augmented State-Dependent Riccati Equation Control for a Helicopter Model. In: *AIAA Infotech@ Aerospace 2010*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 3542.
- BOGDANOV, A.; WAN, E. A. State-dependent riccati equation control for small autonomous helicopters. *Journal of guidance, control, and dynamics*, v. 30, n. 1, p. 47–60, 2007.
- BOSGRA, O. H.; KWAKERNAAK, H.; MEINSMA, G. *Design methods for control systems*. [S.l.]: Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, 2001. v. 2002.
- BRENNAN, M. J.; KOVACIC, I. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and Their Phenomena*. [S.l.]: Wiley, 2011.
- BRONKHORST, K. B. *Identificação e controle passivo ótimo de um sistema não linear de um grau de liberdade com rigidez cúbica usando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos*. Dissertação (Mestrado) — 2017, 101 f. Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2017.
- BUENO, Á. M.; BALTHAZAR, J. M.; PIQUEIRA, J. R. C. Phase-Locked Loop design applied to frequency-modulated atomic force microscope. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 16, n. 9, p. 3835–3843, 2011. ISSN 1007-5704.
- BUENO, Á. M.; BALTHAZAR, J. M.; PIQUEIRA, J. R. C. Phase-locked loops lock-in range in frequency modulated-atomic force microscope nonlinear control system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 17, n. 7, p. 3101–3111, 2012.

- BUENO, A. M.; FERREIRA, A. A.; PIQUEIRA, J. R. C. Modeling and filtering double-frequency jitter in one-way master-slave chain networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, IEEE, v. 57, n. 12, p. 3104–3111, 2010.
- BULTHEEL, A.; MARTÍNEZ-SULBARAN, H. *et al.* Recent developments in the theory of the fractional Fourier and linear canonical transforms. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, The Belgian Mathematic Society, v. 13, n. 5, p. 971–1005, 2007.
- CABRAL, T. D. F.; CHAVARETTE, F. R. Dynamics and control design via LQR and SDRE methods for a maglev system. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Academic Publications, Ltd., v. 101, n. 2, p. 289–300, 2015.
- CANNON, J. R. H.; SCHMITZ, E. Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot. *The International Journal of Robotics Research*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 3, n. 3, p. 62–75, 1984.
- CAPUTO, M.; MAINARDI, F. Linear models of dissipation in anelastic solids. *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)*, Springer, v. 1, n. 2, p. 161–198, 1971.
- CASTRUCCI, P. *Controle Automático*. [S.l.]: LTC, 1 ed., 2006. 2 p.
- CAVAZOS, F. R. G.; MELO, M. E. R.; GONZÁLEZ, V. A. G.; SALAZAR, C. A. G.; LOERA, A. G. Aplicación del cálculo fraccional a la reología de materiales poliméricos. *Ingenierías*, v. 10, n. 35, p. 43, 2007.
- CHEN, C.-T. *Linear system theory and design*. [S.l.]: Oxford University Press, 1995.
- CHEN, Y.-P.; HSU, H.-T. Regulation and vibration control of an FEM-based single-link flexible arm using sliding-mode theory. *Journal of Vibration and control*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 7, n. 5, p. 741–752, 2001.
- CHEN, Y. Q.; PETRAS, I.; XUE, D. Fractional order control-a tutorial. *American control conference, IEEE*, p. 1397–1411, 2009.
- CHRISTENSEN, R. *Theory of viscoelasticity: an introduction*. [S.l.]: Elsevier, 2012.
- ÇİMEN, T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: A survey. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 3761–3775, 2008.
- CLOUTIER, J. R. State-dependent riccati equation techniques: an overview. In: IEEE. *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*. [S.l.], 1997. v. 2, p. 932–936.
- CLOUTIER, J. R.; D'SOUZA, C. N.; MRACEK, C. P. Nonlinear regulation and nonlinear H_{∞} control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, theory. In: EMBRY-RIDDLE AERONAUTICAL UNIV. PRESS DAYTONA BEACH, FL. *Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*. [S.l.], 1996. p. 117–130.
- DALTIN, D. C. *Controle de vibrações em estruturas flexíveis utilizando observador de estados*. Dissertação (Mestrado) — 2017, 78 f. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia (FEB), Bauru, SP, 2017.

DELAVARI, H.; LANUSSE, P.; SABATIER, J. Fractional order controller design for a flexible link manipulator robot. *Asian Journal of Control*, Wiley Online Library, v. 15, n. 3, p. 783–795, 2013.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern control systems*. [S.l.]: Pearson, 2011.

DZIELIŃSKI, A.; SIEROCIUK, D. Observer for discrete fractional order state space systems. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 39, n. 11, p. 511 – 516, 2006. ISSN 1474-6670. 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications.

DZIELIŃSKI, A.; SIEROCIUK, D. Simulation and experimental tools for fractional order control education. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 11654–11659, 2008.

ELUMALAI, K. V.; JEROMEB, J.; SUBRAMANIAN, R. G. State dependent Riccati equation based nonlinear controller design for ball and beam system. *Procedia Engineering*, v. 97, p. 1896–1905, 2014.

ENGHETA, N. On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 44, n. 4, p. 554–566, 1996.

ERDEM, E. B. *Analysis and real-time implementation of State-Dependent Riccati Equation controlled systems*. Tese (Doutorado) — 2001, 147 f. University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 2001.

ERDEM, E. B.; ALLEYNE, A. G. Experimental real-time sdre control of an underactuated robot. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 3, p. 2986–2991 vol.3.

ERDEM, E. B.; ALLEYNE, A. G. Design of a class of nonlinear controllers via state dependent riccati equations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 12, n. 1, p. 133–137, 2004.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A.; OLIVEIRA, L. E. M. de. Design of optimum systems of viscoelastic vibration absorbers for a given material based on the fractional calculus model. *Journal of Vibration and Control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 14, n. 9-10, p. 1607–1630, 2008.

ESPINDOLA, J. J.; SILVA, N. J. M.; LOPES, E. M. O. A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 164, n. 2, p. 493–506, 2005.

FENILI, A.; BALTHAZAR, J. M. The rigid-flexible nonlinear robotic manipulator: Modeling and control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 16, n. 5, p. 2332–2341, 2011.

FREUNDLICH, J. K. Dynamic response of a simply supported viscoelastic beam of a fractional derivative type to a moving force load. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016.

FRIEDLAND, B. *Advanced control system design*. [S.l.]: Prentice-Hall. Englewood Cliffs NJ, 1996. 110-112 p.

GINOYA, D. L.; PATEL, T. R.; SHENDGE, P.; PHADKE, S. Design and hardware implementation of model following sliding mode control with inertial delay observer for uncertain systems. *IEEE*, v. 3, p. 192–196, 2011.

GLOECKLE, W. G.; NONNENMACHER, T. F. Fractional integral operators and Fox functions in the theory of viscoelasticity. *Macromolecules*, v. 24, p. 6426–6434, 1991. ISSN 0024-9297.

GONÇALVES, G.; LENZI, M. K.; MORAES, L. S.; LENZI, E. K.; ANDRADE, M. F. Difusão anômala e equações de difusão. *Acta Scientiarum. Technology*, Universidade Estadual de Maringá, v. 27, n. 2, p. 123–131, 2005.

GOTO, M.; ISHII, D. Semidifferential electroanalysis. *Journal Electroanalytical Chemistry and Interracial Electrochemistry*, v. 61, p. 361–365, 1975. ISSN 0022-0728.

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. [S.l.]: Springer, 1983.

HARTLEY, T. T.; LORENZO, C. F. Dynamics and control of initialized fractional-order systems. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 29, n. 1-4, p. 201–233, 2002.

JADLOVSKÁ, S.; SARNOVSKÝ, J. Application of the state-dependent riccati equation method in nonlinear control design for inverted pendulum systems. In: IEEE. *2013 IEEE 11th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY)*. [S.l.], 2013. p. 209–214.

JIA, J. H.; SHEN, X. Y.; HUA, H. X. Viscoelastic behavior analysis and application of the fractional derivative Maxwell model. *Journal of Vibration and Control*, SAGE Publications, Thousand Oaks, CA, v. 13, n. 4, p. 385–401, 2007. ISSN 1077-5463; 1741-2986/e.

JUNKINS, J. L.; KIM, Y. *Introduction to dynamics and control of flexible structures*. [S.l.]: AIAA, 1993.

KAILATH, T. *Linear systems*. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.

KARKOUB, M.; BALAS, G.; TAMMA, K.; DONATH, M. Robust control of flexible manipulators via u-synthesis. *Control Engineering Practice*, 2000.

KIRK, D. E. *Optimal Control Theory: An Introduction*. [S.l.]: Dover Publications, 2004. (Dover Books on Electrical Engineering Series).

KOMATSU, T.; UENOHARA, M.; KURA, S.; MIURA, H.; SHIMOYAMA, I. Active vibration control of a multi-link space flexible manipulator with torque feedback. *Advanced Robotics*, 1991.

KURODE, S.; MERCHANT, M. Observer based control of flexible link manipulator using discrete sliding modes. In: IEEE. *Control Applications (CCA), 2013 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2013. p. 276–281.

KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. *Linear optimal control systems*. [S.l.]: Wiley-interscience New York, 1972. v. 1.

LARSEN, J. W. *Nonlinear dynamics of wind turbine wings*. Tese (Doutorado) — Aalborg University, 2005.

LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 8, p. 1965–1969, 2009.

- LIMA, A. M. G. *Modelagem numérica e avaliação experimental de materiais viscoelásticos aplicados ao controle passivo de vibrações mecânicas*. Dissertação (Mestrado) — 2003, 120 f. Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2003.
- LIMA, J. J. D.; TUSSET, A. M.; JANZEN, F. C.; PICCIRILLO, V.; NASCIMENTO, C. B.; BALTHAZAR, J. M.; BRASIL, R. M. L. R. da F. SDRE applied to position and vibration control of a robot manipulator with a flexible link. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics, 2016.
- LOPES, G. C.; BUENO, A. M.; BALTHAZAR, J. M. Elastic beam vibration control with Phase-Locked Loop. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. *ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. [S.l.], 2014.
- LUBLIN, L.; ATHANS, M. *Linear quadratic regulator control, in the control handbook*. [S.l.]: William S. Levine, cap. 39, CRC-Press, 1996.
- LUENBERGER, D. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 11, n. 2, p. 190–197, 1966.
- LUENBERGER, D. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 596–602, 1971.
- LUENBERGER, D. G. Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics*, IEEE, v. 8, n. 2, p. 74–80, 1964.
- MACHADO, J. A. T.; JESUS, I. S.; GALHANO, A.; CUNHA, J. B. Fractional order electromagnetics. *Signal Processing*, Elsevier, v. 86, n. 10, p. 2637–2644, 2006.
- MACIEJOWSKI, J. M. *Multivariable feedback design*. [S.l.]: Addison Wesley Publishers Ltd, Cornwall, Great Britain, 1989. v. 1.
- MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M.; RIBEIRO, A. M. R. On a general model for damping. *Journal of Sound and Vibration*, v. 218, p. 749–767, 1998. ISSN 0022-460X.
- MEERSCHAERT, M. M. Fractional calculus models in finance. In: *International Symposium on Fractional Calculus*. [S.l.: s.n.], 2006.
- MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1970.
- MEIROVITCH, L. *Dynamics and control of structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1990.
- MENDEZ, G. A. *Projeto ótimo de neutralizadores viscoelásticos baseado no modelo a derivadas fracionárias*. Tese (Doutorado) — 2004, 168 f. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- MENON, P.; LAM, T.; CRAWFORD, L.; CHENG, V. Real-time computational methods for sdre nonlinear control of missiles. In: IEEE. *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No. CH37301)*. [S.l.], 2002. v. 1, p. 232–237.
- MONJE, C. A.; CHEN, Y. Q.; VINAGRE, B. M.; XUE, D.; FELIU, V. *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.

- MONJE, C. A.; RAMOS, F.; FELIU, V.; VINAGRE, B. M. Tip position control of a lightweight flexible manipulator using a fractional order controller. *IET Control Theory & Applications*, IET, v. 1, n. 5, p. 1451–1460, 2007.
- MRACEK, C. P.; CLOUTIER, J. R. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 8, n. 4-5, p. 401–433, 1998. ISSN 1049-8923.
- NAIDU, D. S. *Optimal Control Systems*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2002. (Electrical Engineering Series).
- OGATA, K. *Discrete-time control systems*. 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 2003.
- OLDHAM, K.; SPANIER, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. [S.l.]: Elsevier, 1974.
- PARRISH, D. K.; RIDGELY, D. B. Attitude control of a satellite using the SDRE method. In: IEEE. *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*. [S.l.], 1997. v. 2, p. 942–946.
- PEARSON, J. Approximation methods in optimal control i. sub-optimal control. *International Journal of Electronics*, Taylor & Francis, v. 13, n. 5, p. 453–469, 1962.
- PEDRON, I. T. *Estudos em difusao anômala*. Tese (Doutorado) — 2003, 97 f. Universidade Estadual de Maringá, Paraná, 2003.
- PETRÁŠ, I. *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- PETRÁŠ, I. Modeling and numerical analysis of fractional-order bloch equations. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 61, n. 2, p. 341–356, 2011.
- PIRES, E. S.; MACHADO, J. T.; OLIVEIRA, P.; CUNHA, J. B.; MENDES, L. Particle swarm optimization with fractional-order velocity. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 61, n. 1-2, p. 295–301, 2010.
- PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*. [S.l.]: San Diego, USA, Academic Press, 1999.
- QUANSER. *SRV02 Rotary Flexible Link User Manual*. [S.l.], 2011.
- RAO, S. *Vibrações mecânicas*. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- RIBEIRO, M. A.; BALTHAZAR, J. M.; LENZ, W. B.; ROCHA, R. T.; TUSSET, A. M. Numerical exploratory analysis of dynamics and control of an atomic force microscopy in tapping mode with fractional order. *Shock and Vibration*, 2020.
- SETO, K.; K. A comparative study on H-infinity based vibration controller of a flexible structure system. In: *Proc. American Control Conf.. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*. [S.l.: s.n.], 2000.
- SIEROCIUK, D.; DZIELIŃSKI, A. Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation. Zielona Góra: Uniwersytet Zielonogórski, 2006.

- SINHA, A. K. *Linear Systems: Optimal And Robust Control*. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2007.
- SONG, L.; YANG, J.; XU, S. Chaos synchronization for a class of nonlinear oscillators with fractional order. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 72, n. 5, p. 2326–2336, 2010.
- SOUZA, L.; BIGOT, P.; SOUZA, A. Application of pareto approach to improve the state dependent riccati equation (sdre) controller performance. In: IEEE. *2017 European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS)*. [S.l.], 2017. p. 81–89.
- SOUZA, L.; GONZALES, R. Application of the state-dependent riccati equation and kalman filter techniques to the design of a satellite control system. *Shock and vibration*, IOS Press, v. 19, n. 5, p. 939–946, 2012.
- SOUZA, L. C. G. D. Design of satellite control system using optimal nonlinear theory. *Mechanics based design of structures and machines*, Taylor & Francis, v. 34, n. 4, p. 351–364, 2006.
- SPIEGEL, M. R. *Manual de fórmulas, métodos e tabelas de matemática*. [S.l.]: Makron, McGraw-Hill, 1992.
- STANSBERRY, D. T.; CLOUTIER, J. R. Position and attitude control of a spacecraft using the state-dependent riccati equation technique. In: IEEE. *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No. 00CH36334)*. [S.l.], 2000. v. 3, p. 1867–1871.
- SU, Z.; KHORASANI, K. A neural-network-based controller for a single-link flexible manipulator using the inverse dynamics approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, v. 48, n. 6, p. 1074–1086, 2001.
- TAVAZOEI, M. S.; HAERI, M. A note on the stability of fractional order systems. *Mathematics and Computers in simulation*, Elsevier, v. 79, n. 5, p. 1566–1576, 2009.
- TRZASKA, Z. Matlab solutions of chaotic fractional order circuits. In: ASSI, A. H. (Ed.). *Engineering Education and Research Using MATLAB*. Rijeka: IntechOpen, 2011.
- TUSSET, A. M.; BUENO, Á. M.; NASCIMENTO, C. B.; KASTER, M. dos S.; BALTHAZAR, J. M. Nonlinear state estimation and control for chaos suppression in MEMS resonator. *Shock and Vibration*, IOS Press, v. 20, n. 4, p. 749–761, 2013.
- TUSSET, A. M.; MOLTER, A. Controle ótimo aplicado no controle de vibrações de sistemas mecânicos sujeitos a comportamento caótico. In: *XXIX Encontro nacional de engenharia de produção*. [S.l.]: A Engenharia de Produção e o Desenvolvimento Sustentável: Integrando Tecnologia e Gestão, 2009.
- VALÉRIO, D.; COSTA, J. S. D. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols-type rules. *Signal processing*, Elsevier, v. 86, n. 10, p. 2771–2784, 2006.
- VINAGRE, B. M.; CHEN, Y. Q.; PETRÁŠ, I. Two direct tustin discretization methods for fractional-order differentiator integrator. *Journal of the Franklin Institute*, v. 340, n. 5, p. 349 – 362, 2003. ISSN 0016-0032.

WEN, X.-J.; WU, Z.-M.; LU, J.-G. Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems. *IEEE Transactions on circuits and systems II: Express Briefs*, IEEE, v. 55, n. 11, p. 1178–1182, 2008.

WERNLI, A.; COOK, G. Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem. *Automatica*, v. 11, n. 1, p. 75 – 84, 1975.

XUE, D.; CHEN, Y. Q.; ATHERTON, D. P. *Linear feedback control: analysis and design with MATLAB*. [S.l.]: SIAM, 2007.

YANG, F.; SEDAGHATI, R. Vibration suppression of curved beam-type structures using optimal multiple tuned mass dampers. *Journal of Vibration and Control*, 2014.

YIFEI, P.; XIAO, Y.; KE, L.; JILIU, Z.; NI, Z.; YI, Z.; XIAOXIAN, P. Structuring analog fractance circuit for 1/2 order fractional calculus. In: *Proc. 6th Int. Conf. ASIC*. [S.l.: s.n.], 2005. v. 2, p. 1136–1139.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and optimal control*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0134565673.