

Tese de doutorado

**Modelos não-lineares de teoria de
campos e mundos-brana**

Augusto Enrique Rueda Chumbes

Universidade Estadual Paulista
Campus Guaratinguetá

2013

Augusto Enrique Rueda Chumbes

Modelos não-lineares de teoria de campos e mundos-brana

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Professor Dr. Marcelo Batista Hott

Guaratinguetá

2013

Chumbes, Augusto Enrique Rueda
C559m Modelos não-lineares de teoria de campos e mundos-brana / Augusto
Enrique Rueda Chumbes – Guaratinguetá : [s.n], 2013.
90 f : il.
Bibliografia: f. 75-82

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2013.
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Batista Hott

1. Teoria quântica de campos I. Título

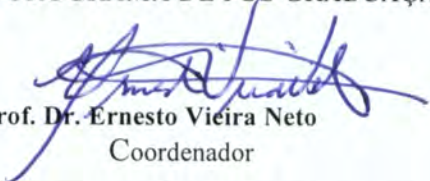
CDU 530.145(043)

AUGUSTO ENRIQUE RUEDA CHUMBES


ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. ÁLVARO DE SOUZA DUTRA
Unesp-Feg


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Unesp-Feg


Prof. Dr. ADALTO RODRIGUES GOMES DOS SANTOS
FILHO
Instituto Federal do Maranhão


Prof. Dr. CARLOS ALBERTO SANTOS DE ALMEIDA
Universidade Federal do Ceará

Julho de 2013

DADOS CURRICULARES

AUGUSTO ENRIQUE RUEDA CHUMBES

NASCIMENTO	08 / 08 / 1974 - CALLAO, PERU
FILIAÇÃO	Hernan Rueda Velasco Delia Emperatriz Chumbes Arias
1994 / 2001	Curso de Graduação - Bacharelado em Física Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas Universidad Nacional del Callao - UNAC Callao - Peru.
2007 / 2009	Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista - UNESP Guaratinguetá - SP - Brasil.
2009 / 2013	Curso de Pós-Graduação em Física, nível Doutorado Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista - UNESP Guaratinguetá - SP - Brasil.

DEDICATÓRIA

*“Dedico à memória de minha mãe **Delia Emperatriz**”*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por suas bênçãos e por proporcionar harmonia em minha vida; a minha mãe **Delia Emperatriz** por haver me ensinado a ter perseverança, coragem e saber enfrentar as dificuldades com calma e firmeza, a quem dedico esta tese de maneira especial; a meu pai Hernan, a meus avós Fortunata e Justo, e familiares pelo aconchego profundo de amor e carinho; também agradeço a minha esposa Angela Cristina pelo amor e dedicação que me proporciona dia a dia.

Saindo do âmbito familiar, agradeço a meu orientador, Professor Doutor Marcelo Batista Hott, pelos anos de orientação que foi essencial para minha formação acadêmica. Obrigado professor pelo apoio, confiança e incentivo na realização desta tese.

Agradeço aos professores do grupo de partículas e campos da Unesp-Campus de Guaratinguetá. Professores Doutores: Julio Marny Hoff da Silva (pela ajuda e apoio no desenvolvimento da publicação em conjunto), Antonio Soares de Castro, Alvaro de Souza Dutra, Denis Dalmazi e Fernando Luiz de Campos Carvalho, todos eles professores formadores e amigos os quais me aconselharam e me apoiaram nesta etapa do doutorado.

Agradeço a todos meus amigos conterrâneos peruanos pela confiança e apoio durante estes 6 anos, GRACIAS MUCHACHOS !. Também agradeço a todos os colegas da pós-graduação pelos bons momentos de convivência na FEG.

Agradeço aos funcionários do curso de Pós-Graduação: Regina, Cristina, Juliana e Sidney, pela atenção, apoio e disposição. De um modo mais amplo quero agradecer à FEG/UNESP por todos esses anos, por ter me recebido e ter contribuído para meu crescimento profissional. OBRIGADO !.

À Reitoria da Unesp, em especial ao Programa da Pós-Graduação em Física da Unesp-Campus de Guaratinguetá e à agência de fomento para formação de pessoal em nível superior CAPES pelo apoio financeiro 01/08/2009 até 28/02/2010 e CAPES/CNPq-IEL Nacional - Brasil, 01/03/2010 até 01/08/2013. Também quero agradecer à Pró-Reitoria da Pós-Graduação pelo apoio financeiro para minha participação nos eventos no exterior: “*Workshop in High Energy Physics in the LHC Era 2012*”, ocorrido em Valparaiso-Chile e “*Summer school on Cosmology 2012*”, ocorrido em Trieste-Itália, por meio do convênio UNESP-ICTP.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - **CAPES**, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico **CNPq**. Programa **CAPES/CNPq-IEL Nacional - Brasil**.

“a natureza é um enorme jogo de xadrez disputado por deuses, e que temos o privilégio de observar. As regras do jogo são o que chamamos de física fundamental, e compreender essas regras é a nossa meta”

Richard Feynman

Chumbes, A. E. R. **Modelos não-lineares de teoria de campos e mundos-brana.** 2013. 90 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013

Resumo

Nesta tese analisamos a localização de campo de matéria em branas duplas. Estudamos a localização de férmions não-massivos em paredes de domínio (3-brana) imersa no espaço de 4+1 dimensões em cenários Randall-Sundrum (espaço warped), e Rubakov-Shaposhnikov (espaço plano), respectivamente. Abordamos a localização do campo fermiônico, acoplado os férmions com uma função de campo escalar, cuja solução tipo kink simples é deformada a uma solução tipo kink duplo. No contexto de nosso estudo, este tipo de configuração kink duplo permite ilustrar o fenômeno da separação das branas. Construímos novos modelos não-lineares em teoria de campos que forneçam configurações do tipo kink duplo. Estes modelos são construídos a partir da deformação do modo-zero associado à equação de estabilidade de outros modelos bem estabelecidos. Por sua vez, estes modelos são aplicáveis na descrição de fenômenos críticos e em cenários de mundos-brana. Além disso, temos conhecimento de que não é possível a localização de campo de gauge por meio unicamente da curvatura (*warped*). Propomos um mecanismo que leve à localização do modo-zero do campo de gauge abeliano em branas espessas por meio de uma função suave e contínua que torna a ação normalizável. Esta função suave funcionaria como uma função dielétrica. Neste mesmo contexto, aplicamos este mecanismo para a localização do modo-zero do campo de Kalb-Ramond em branas espessas.

PALAVRAS - CHAVE: Mundos-brana. Separação de branas. Localização de férmions. Localização de campo de gauge. Localização do campo de Kalb-Ramond.

Chumbes, A. E. R. **Non-linear models in field theory and braneworlds**. 2013. 90 p. Thesis (PhD in Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013

Abstract

In this thesis we analyze the localization of matter field in double branes. We study the localization of massless fermions in domain wall (3-branes) immerse in a space 4+1 dimensions in Randall-Sundrum (warped space), and Rubakov-Shaposhnikov (flat space) scenarios, respectively. We approach the fermions localization, coupling the fermions to a scalar field functional, whose kink-like solutions are deformed to double kink solutions. In the context of our study, this double kink (two-kink) allows to illustrate the brane splitting phenomenon. We construct new non-linear models in field theory which provides double kink configurations. These models are constructed from the deformation of the zero mode associated to the stability equations of well-established models. In turn, these models are applicable in the description of critical phenomena and brane-worlds scenarios. Moreover, we know that it is not possible to achieve gauge fields localization on brane by means of only the warped curvature. We propose a mechanism that leads to the localization of zero mode of Abelian gauge field in thick branes by means of a smooth and continuous function which turns out the action normalizable. This smooth function would work as a dielectric function. In this same context we apply this mechanism for the localization of zero mode of Kalb-Ramond field in thick branes.

KEYWORDS: Brane-worlds. Brane splitting. Fermions localization. Gauge field localization. Kalb-Ramond field localization.

Lista de Figuras

2.1	Perfil do potencial $V(\phi)$. Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$	27
2.2	Perfil do campo escalar ϕ . Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$	27
2.3	Perfil do fator de deformação. Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$	28
2.4	Perfil da densidade de energia matéria. Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$	28
2.5	Escalar de Ricci. Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$	30
2.6	Perfil típico da solução kink. $L = 0.01$ (linha pontilhada) corresponde a uma solução kink simples, $L = 2.6$ (linha fina) corresponde a uma solução kink duplo.	31
2.7	Fator de deformação avaliado para dois valores diferentes de L , para $L=0.01$ (linha fina) e $L=4.6$ (linha sólida).	31
2.8	Perfil da densidade de energia matéria. $L = 0.01$ (linha grossa), e $L = 2.6$ (linha fina).	32
2.9	Escalar de Ricci para $L = 0.01$ (linha pontilhada), $L = 1.6$ (linha fina) e, $L = 4.5$ (linha grossa). Evidencia a formação de brana dupla à medida que L aumenta.	32
2.10	Escalar de Kretschmann para $L = 0.01$ (linha pontilhada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha grossa). Evidencia a formação de brana dupla à medida que L aumenta.	33

3.1	α_{L0} (modo-zero esquerdo) nos casos $F(\bar{\phi}) = \eta\bar{\phi}(r)$ (lado esquerdo), $F(\bar{\phi}) = \eta(\bar{\phi}(r) + M(r))$ (lado direito), para $L = 0.01$ (linha pontilhada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha sólida).	39
3.2	α_{L0} (modo-zero esquerdo) no caso de $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$, para $L = 0.01$ (linha pontilhada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha sólida).	39
3.3	Modo-zero para $F(\bar{\phi}) = -\eta\phi$, para $L = 0.01$ (linha sólida), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.6$ (linha pontilhada).	42
3.4	Potenciais efetivos $U_L(r)$ e $U_R(r)$ para o caso $F(\bar{\phi}) = \eta\bar{\phi}$. Para $L = 0.01$ (linha sólida), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.6$ (linha pontilhada).	42
3.5	Modo-zero para $F(\bar{\phi} + \frac{1}{2} \tanh(2L))$, para $L = 0.01$ (linha sólida), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.6$ (linha pontilhada).	43
3.6	Potenciais efetivos $U_R(r)$ e $U_L(r)$ para o caso $F(\bar{\phi}) = \eta(\bar{\phi} + \frac{1}{2} \tanh(2L))$, e $L = 0.01$ (linha sólida), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.6$ (linha pontilhada).	43
3.7	$\alpha_{L0}(r)$ no caso de $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$, para $L = 1.6$ (linha fina), e $L = 4.5$ (linha sólida).	44
3.8	Potencial efetivo para o acoplamento $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ com $L = 1.5$, $U_L(r)$ (linha sólida), $U_R(r)$ (linha pontilhada).	45
3.9	α_{L1} (lado esquerdo) e α_{R1} (lado direito) no caso $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ para $L = 1.6$ (linha azul) e para $L = 3.6$ (linha preta).	45
3.10	Autovalores de energia m_1^2 do primeiro estado excitado α_{L1} em função de L . Obtidos numericamente por meio de cálculos numéricos. (ver tabela 3.1)	46
3.11	Autovalores de energia do segundo estado excitado α_{L2} em função de L	47
3.12	Perfil de $\rho(r, t)$ para distintos valores de t	49
4.1	Lado esquerdo: modo-zero deformado correspondente à eq.(4.17) para $L = 0.5$ (linha fina) e $L = 6.1$ (linha espessa). Lado direito: Perfil tipo kink da eq. (4.18) para $L = 0.65$ (linha fina), e $L = 4.5$ (linha espessa).	56
4.2	Potencial do modelo seno-Gordon deformado, eq. (4.19), para $L = 0.05$ (linha tracejada), $L = 1.0$ (linha fina) e $L = 1.5$ (linha grossa).	57
4.3	O potencial da teoria de campos da equação (4.25), para $L = 0.65$ (linha pontilhada), $L = 1.5$ (linha fina) e $L = 10.5$ (linha grossa).	59

4.4	Perfil do potencial da equação (4.28), para $\beta=0.25$ (linha solida) e $\beta=0.3$ (linha tracejada).	60
4.5	O potencial de teoria de campos (2.6) com $W(\phi)$ correspondente ao modelo seno-Gordon deformado, para $L = 10.5$ (linha tracejada), $L = 1.5$ (linha fina) e $L = 0.65$ (linha grossa).	61

Lista de Tabelas

3.1	Tabela dos autovalores de energia do primeiro estado excitado α_{L1} (figura 3.10)	46
3.2	Tabela dos autovalores de energia do segundo estado excitado α_{L2} (figura 3.11).	47

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Estrutura da Tese	23
2	Mundos-Brana	25
2.1	Modelo de Gremm	26
2.2	Modelo não-polinomial	30
3	Localização de férmions em branas espessas	35
3.1	Localização de férmions no espaço deformado	35
3.2	Localização de férmions no cenário de Rubakov-Shaposhnikov	40
3.2.1	Estados massivos mistos	48
3.3	Comentários sobre a localização de férmions	49
4	Reconstrução de defeitos deformados em teoria de campos a partir da deformação de modos-zero	51
4.1	Aspectos gerais de modelos não-lineares em teoria de campos	52
4.2	Método de reconstrução dos MNLTC	54
4.3	Reconstrução do MNLTC a partir dos modos-zero.	54
4.3.1	Modelo de seno-Gordon deformado	55
4.3.2	Modelo ϕ^4 deformado I	57
4.3.3	Modelo ϕ^4 deformado II	58
4.3.4	Simetrização do potencial Scarf-II da mecânica quântica e um novo MNLTC deformado	59

4.4	Aplicações dos modelos MNLTC deformados	60
5	Localização de campos vetorial e tensorial em branas espessas	62
5.1	Localização de campo vetorial	62
5.2	Localização do campo de Kalb-Ramond	68
6	Conclusões e perspectivas	73
A	Equações de Movimento	83
B	Escalar de Kretschmann	86
C	Construção das autofunções da equação de Schrödinger pelo método de Numerov	88

Capítulo 1

Introdução

A possibilidade de que nosso universo apresenta mais de três dimensões espaciais tem atraído contínuo interesse durante anos. Uma forte motivação para considerar o espaço multidimensional provem de teorias que incorporam a gravidade, tais como a teoria de cordas e a teoria M; as quais são consistentemente formuladas no espaço-tempo com mais de 4 dimensões. Em paralelo com o desenvolvimento da teoria fundamental, estudos ao longo da linha fenomenológica recentemente nos conduzem a novas perspectivas de como as dimensões extras poderiam se manifestar, e como estas poderiam nos ajudar a solucionar alguns velhos problemas da física de partículas (problema da hierarquia de massas, o problema da constante cosmológica, etc.). Esses estudos fenomenológicos são muitas vezes baseados em modelos simplificados em teoria de campos [81], os quais nos ajudam a descrever essas dimensões extras.

As ideias de construir teorias com mais de quatro dimensões surgiram a partir das tentativas de poder unificar as 4 forças fundamentais da natureza. Historicamente as primeiras ideias de dimensões extras que foram introduzidas à comunidade científica datam de 1914. Gunna Nordström [71], propôs uma teoria vetorial em 4+1 dimensões para descrever o acoplamento entre o eletromagnetismo e a gravitação, ainda sem incorporar a teoria geral da relatividade. Após o desenvolvimento da relatividade geral por Einstein, as ideias de estender esta teoria unificando a gravitação com o eletromagnetismo, datam de 1921 por Theodor Kaluza e estendida em 1926 por Oscar Klein [58]. A ideia do modelo de Kaluza-Klein (K-K) foi considerar um espaço plano de cinco dimensões (quatro espaciais e uma temporal). A dimensão espacial adicional seria invisível à nossa percepção por ser compacta e de raio microscópico, cuja dimensão é da ordem da escala de Planck ($10^{-35}m$). Por outro lado, a métrica de K-K no espaço de 5 dimensões possui 15 graus de liberdade (constituídos pelo métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$, pelo campo vetorial A_μ e

por um campo escalar ϕ) [76]

$$\hat{g}_{AB} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & g_{\mu\nu} & & A_\mu \\ & - & - & - \\ & A_\mu^T & & \phi \end{array} \right) \quad (1.1)$$

Portanto, a parte da métrica que faz referência às quatro dimensões (uma temporal e outras três espaciais) terá uma consistência tensorial, $g_{\mu\nu}(1 + f(\phi, A^2)) + A_\mu A_\nu h(\phi, A^2)$, de forma que se fizermos o campo vetorial $A_\mu = 0$ e o campo escalar $\phi = 0$, obtemos a métrica de Minkowski usual.

Assim \hat{g}_{AB} em 5 dimensões pode ser escrito da seguinte forma [73]

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi^2 A_\mu \\ \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

onde os índices A, B vão de 1 a 5.

Para poder explicar, no cenário de K-K, que não existe nenhum efeito detectado pela existência das dimensões extras, consideramos que estas sejam suficientemente compactas e representadas por uma esfera \mathbf{S}_1 de raio de compactificação $r_c \leq 10^{-17}$ cm. Além disso, podemos expressar os campos $g_{\mu\nu}$, A_μ e ϕ como uma expansão em série de Fourier.

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, r) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_{\mu\nu}^{(n)}(x) e^{\frac{inr}{r_c}}, \\ A_\mu(x, r) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_\mu^{(n)}(x) e^{\frac{inr}{r_c}}, \\ \phi(x, r) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi^{(n)}(x) e^{\frac{inr}{r_c}}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde n representa os modos de Kaluza-Klein (K-K). Observemos que se o raio de compactificação r_c é pequeno (tal como foi proposto por Klein), o momento associado n/r_c terá uma magnitude enorme, tal que os modos com $n = 0$ serão os observáveis. Esta teoria serviu de base para o surgimento de outras vertentes de pesquisa considerando espaço multidimensionais. Talvez seja possível observar ressonâncias massivas K-K. Mais adiante comentaremos sobre ressonâncias.

Nos anos 60, foi abordado o estudo de espalhamento de hádrons. Neste estudo um modelo de ressonância dupla foi descrito [86], sendo que o espectro dos estados no modelo reproduz o espectro de uma corda vibrante. A motivação referente a dimensões extras é devida a que o modelo apresenta consistência com 26 dimensões referente à teoria bosônica, e a 10 dimensões se o modelo é de caráter supersimétrico. Conhecida como teoria das cordas, que foi construída inicialmente para descrever as interações fortes apresentando uma escala hadrônica na ordem dos GeV. A presença de um modo não-massivo de spin 2, sem partícula hadrônica equivalente conhecida, mostrava-se inconsistente, o qual se propôs relacionar com o gráviton. Portanto, a escala hadrônica foi substituída pela escala de massa de Planck $M_{Pl} = 2,44 \times 10^{18}$ GeV [22] ($M_{Pl} \sim G_{Newton}^{-1/2}$) ($G_{Newton} \equiv$ constante de Newton da Gravitação). A partir desta reformulação da teoria de cordas, deu-se origem à primeira fusão entre ambas teorias; a gravitação e a mecânica quântica.

Em 1983, Rubakov e Shaposhnikov propuseram um cenário em que nosso universo estaria confinado a uma parede de domínio [80]. Esta parede de domínio, chamada na literatura de 3-brana seria uma *variedade topológica* e estaria mergulhada em um mundo de 4+1 dimensões - chamado de bulk - e é descrita por uma solução tipo kink (solução topológica) que se estende ao longo da dimensão extra (isto é, feito em analogia com a descrição de paredes de domínio que se formam entre domínios magnéticos). Uma brana é um defeito topológico como aqueles que aparecem em teorias de campo não-lineares em 1+1 dimensões do espaço-tempo. Ao discutirem a necessária localização da matéria, ou seja, a possível realização de nosso universo na brana (dentro de uma parede de domínio), Rubakov e Shaposhnikov observaram que os férmions poderiam ser localizados, via mecanismo de Jackiw e Rebbi [56]. Com o surgimento natural de férmions sem massa e, dependendo do modelo não-linear utilizado para fornecer a brana, alguns modos massivos podem ser localizados na brana (parede de domínio).

Nos anos 90 surgiram novas propostas que vale a pena destacar: Polchinski e outros autores [75], mostraram que a teoria de cordas aborda outros objetos estendidos que são restritos a se movimentar com extremos das cordas abertas fixos na brana. São as chamadas de Dp -branas. D representa a condição de Dirichlet, e p representa o número de dimensões espaciais. Diz-se, 0-brana o objeto pontual, 1-brana uma corda, 2-brana é uma membrana e 3-brana é uma parede de domínio.

Os modelos de mundos-brana ressurgiram com grande impacto após as ideias de Arkani-Hamed, Dimopolos e Dvali (ADD), publicadas em 1998 [2]. Estas ideias consistem em considerar as dimensões extras suficientemente extensas. O modelo ADD faz uma especulação referente ao tamanho permitido para as dimensões extras, e tem como propósito solucionar o problema da hierarquia de massa. O modelo em menção também

discute as grandes diferenças entre a escala de massa eletrofraca $M_{ef} = 10^3 \text{Gev}$, e a escala de massa de Planck [22]. Outro dos principais pontos importantes do modelo ADD é que a gravidade é controlada pela escala eletrofraca em vez da escala de Planck, com a intenção de poder unificar as interações gravitacional e eletrofraca. Além disso, as linhas de campo gravitacional podem ficar potencialmente confinadas a nosso mundo de 4 dimensões, as quais é descrita pelo potencial gravitacional :

$V(r) = m_1 m_2 / (M_{Pl(4+n)}^{n+2} r r^n)$ em $M(3, 1) \times S_n$, sendo S_n uma bolha de n dimensões relacionada com as dimensões extra, e $M(3, 1)$ está relacionado como o espaço de Minkowski. Por outro lado, o resultado do acoplamento gravitacional em 4 dimensões é descrito por $M_{Pl}^2 = M_{Pl(4+n)}^{n+2} r_c^n$, onde $M_{Pl(4+n)} \sim M_{ef}$, sendo M_{Pl} a (massa de Planck 10^{18}Gev), e cujo raio de compactificação esta descrito por $r_c = M_{ef}^{-1} (\frac{M_{Pl}}{M_{ef}})^{2/n} \sim 10^{32/n} 10^{-17} \text{cm}$ [2]. No caso de $n = 1$, temos que o raio de compactificação é $r_c = 10^{15} \text{cm}$, o qual apresenta um desacordo com as observações experimentais da gravidade testadas naquela escala. No caso de duas dimensões extra, o raio de compactificação é aproximadamente $r_c \sim 1 \text{mm}$ [76], o que é interessante, pois não viola a lei de Newton da gravitação na escala milimétrica.

Uma solução mais completa para o problema de hierarquia de massa foi proposta por Lisa Randall e Raman Sundrum em 1999 (RS-I) [79] a qual apresenta os seguintes aspectos importantes:

- Nesse cenário considera-se o espaço-tempo de 5 dimensões com simetria S_1/\mathbb{Z}_2 .
- Nesse cenário foram propostas duas branas com um espaço (bulk) anti-de Sitter entre elas. Considerando uma brana onde as partículas do modelo padrão estão confinadas, e outra brana onde a gravidade está localizada, denominada brana de Planck.
- A razão pela qual a gravidade parece fraca na brana onde as partículas do modelo padrão estão confinadas é que ela é exponencialmente suprimida com a distância entre as branas (devido à curvatura).

A métrica de Randall-Sundrum é descrita por $ds^2 = e^{-2kr_c r} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dr^2$, onde x^μ são as coordenadas em 4 dimensões, k está associada à curvatura AdS (Anti-de Sitter) do espaço-tempo, e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica usual de Minkowski. Podemos reescrever a métrica de maneira mais compacta na forma:

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N, \quad (1.4)$$

onde g_{MN} é definido como

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} e^{-2kr_c r} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

A métrica apresentada por Randall-Sundrum (RS-I) é do tipo não fatorável (*warped*), e pode ser interpretada como a descrição de infinitas fatias quadridimensionais (3-brana) ao longo de toda a dimensão extra [47]. Pode ser entendido como que em cada ponto da dimensão extra há uma fatia quadridimensional de Minkowski. Por outro lado, o *warp factor* (fator de deformação) é o responsável pela mudança de escala de energia entre dois pontos $-\pi < r < \pi$. Diz-se, que para $r = 0$ representará a escala de energia da brana no limite ultravioleta e para $r = \pi$ a brana está no limite infravermelho (setor visível na brana). O modelo RS relaciona a escala de massa de Planck com a escala fundamental

$$M_{Pl}^2 = M^3 r_c \int_{r=-\pi}^{r=\pi} dr e^{-2kr_c r} = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2kr_c \pi}), \quad (1.6)$$

M representa a massa em 5 dimensões. Dessa maneira podemos ver que a exponencial terá pouco efeito para determinar a escala de Planck, e o parâmetro k (associada à curvatura) se aproxima à escala de massa de Planck $k \sim M \sim M_{Pl}$ [78].

Por outro lado, analisamos a ação do campo escalar de Higgs em 4+1 dimensões na métrica *warped* no setor visível

$$\begin{aligned} S_{Higgs} &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dr \sqrt{g} \delta(r - \pi) [g^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(H^\dagger H - v^2)^2] \\ S_{Higgs} &= \int d^4x \sqrt{g_{vis}} [g_{vis}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(H^\dagger H - v^2)^2] \\ S_{Higgs} &= \int d^4x e^{-4kr_c \pi} [e^{2kr_c \pi} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(H^\dagger H - v^2)^2]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Para obter uma ação normalizável precisamos redefinir o campo de Higgs $H \rightarrow e^{kr_c \pi} \tilde{H}$, o qual torna a ação quadridimensional na forma

$$S_{Higgs} = \int d^4x \left[D_\mu \tilde{H}^\dagger D_\nu \tilde{H} - \lambda(\tilde{H}^\dagger \tilde{H} - (e^{-kr_c \pi} v)^2)^2 \right], \quad (1.8)$$

onde temos que o valor esperado no vácuo $e^{-kr_c \pi} v \rightarrow \tilde{v}_{eff}$ fica suprimido à brana pelo fator exponencial, e a massa nua m_0 também fica suprimida na brana (onde nosso universo é realizado) pelo *warp factor* $\tilde{m} = e^{-kr_c \pi} m_0$ [38]. Assim para poder resolver o problema de hierarquia relacionamos a massa na escala eletrofraca com a escala de Planck $M_{ew} = 10^{-15} M_{Pl}$ [79], de forma que para $kr_c \pi \simeq 37$ a massa na escala de Planck fica suprimida

pelo warp factor (fator de deformação) na brana à escala dos TeV [47]. Mas isto nos levaria a outros problemas associados como é o caso do decaimento do próton [64].

No segundo modelo de Randall-Sundrum chamado de (RS-II) [78], é considerada uma única brana (a o modelo padrão) a uma dimensão extra infinita.

A principal constatação do modelo (RS-II) vem da forma do potencial gravitacional entre duas partículas de massas m_1 e m_2 na brana

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right), \quad (1.9)$$

onde o primeiro termo provém da interação gravitacional em 4 dimensões, e o segundo termo provém da troca dos modos contínuos de K-K, onde o parâmetro k é da ordem da escala de Planck. O fator $1/k^2 r^2$ é o termo de correção ao potencial newtoniano devido aos grávitons massivos de Kaluza-Klein que são suprimidos a baixas energias. Esta seria uma boa motivação para se considerar modos K-K mais altos, ou seja embora não observais poderíamos influenciar na interação gravitacional. Podemos explorar isto em branas duplas.

No modelo de brana fina RS-I observamos que a massa na escala de Planck é suprimida pelo *warp factor* na brana na escala dos Tev (GUT) o que é desejável para solucionar o problema de hierarquia. Mas uma possível objeção ao modelo é que sua densidade de energia apresenta uma singularidade. Pelo que é mais factível considerar branas espessas os quais são estruturas suaves, contínuas e livres de singularidades.

No contexto de branas espessas é recorrente a análise de localização de matéria, da própria gravitação (grávitons) e da radiação (fótons) nas branas. Fótons parecem ser *claustrofóbicos*, ou seja, são quase impossíveis de serem localizados em branas no cenário de Rubakov-Shaposhnikov [80], e definitivamente não localizáveis no contexto de geometria deformada [60]. Com a finalidade de solucionar esta problemática Dvali-Gabadadze-Shifmann [36] propuseram um mecanismo para a localização de campo de gauge na brana, chamado de quasi localização de campo de gauge na brana. Seguindo este procedimento Guerrero e Melfo [53] propuseram a localização do campo de gauge em branas espessas. O estudo da localização de gravidade no contexto de branas espessas foi estudado em [20]. Outro mecanismo para a localização do campo de gauge usando acoplamento dilatônico foi descrito por Kehagias e Tamvakis [60] e Teixeira Cruz e Almeida [21]. Por outro lado publicamos em [24] uma proposta diferente na qual consiste no acoplamento do campo escalar que gera a brana com um campo de gauge abeliano. Seguindo analogia com o modelo de Friedberg-Lee (*colour dielectric model*) [46] para aspectos não perturbativos da Cronodinâmica Quântica (CDQ), incluímos uma função dielétrica (função de campo esca-

lar) com algumas propriedades específicas que levam à localização dos campos de gauge. Mostramos que o mecanismo proposto funciona bem tanto no contexto de geometria plana quanto no de geometria deformada.

Foi mostrado em [84] que campos de Kalb-Ramond, assim como ocorre com campos de gauge vetoriais [60], [21], não são localizados no interior de branas espessas unicamente por meio da gravitação. Investigamos o acoplamento entre um campo escalar neutro e um campo de Kalb-Ramond K-R de forma de proporcionar a localização de modos zero de K-R em branas espessas tanto no cenário de Randall-Sundrum como no cenário de Rubakov-Shaposhnikov. Em [21] e [84] é introduzido um campo escalar adicional (dilaton) para localizar campos vetoriais e tensoriais em branas, enquanto que em nosso mecanismo não há necessidade de fazer uso de dilaton na teoria original. A localização é proporcionada apenas pelo defeito topológico que gera a brana, de uma maneira similar à que ocorre na localização de matéria. Uma motivação para se estudar a localização de campos de K-R é que estes podem descrever uma física axiônica, os axíons aparecem naturalmente em teoria de cordas a partir de campos tensoriais antissimétricos [57] e também são candidatos a descreverem a matéria escura.

Em [25] foi considerado um modelo com um único campo escalar que apresenta como soluções de energia mínima configurações de paredes de domínio similares àquelas mostradas que ocorrem nas chamadas branas degeneradas [42]. O modelo considerado em [25] tinha sido construído anteriormente [17] como um modelo efetivo a partir daquele proposto em [42] e apresenta uma peculiaridade que consiste no fato da solução clássica ser do tipo kink simples, que se deforma continuamente em uma configuração tipo kink duplo, reproduzindo o fenômeno de separação de paredes de domínio (separação de branas) [17], o sistema de dois campos acoplados foi abordado em [4, 5] o que foi de base para o estudo da localização com dois campos escalares. Alguns modelos com configuração de energia mínima que exibem configuração dois kink foram estudadas em [6],[41] e o estudo da localização de férmions em uma parede de domínio foi abordada em [59],[66],[67]. Estudamos o destino de férmions sem massa localizados em uma parede de domínio (brana) que se divide em duas paredes (parede dupla). Encontramos que um acoplamento conveniente de férmions com o campo escalar exhibe supersimetria, no caso de geometria não deformada (espaço plano), ou seja, os férmions apresentam o mesmo espectro de energia das excitações do campo escalar que proporciona a brana (brans). O que chamamos de acoplamento conveniente é aquele em que a densidade de probabilidade de encontrar os férmions em ambas branas é a mesma, ou seja, uma das branas não é preferida em relação a outra. É interessante observar que neste caso específico, os férmions sem massa seriam interpretados como férmions de Majorana.

Também discutiremos a construção de novos modelos não-lineares em teoria de campos, baseado nos trabalhos de [45] e [85]. Estes modelos são usados para descrever fenômenos críticos como a separação de paredes de domínios e a formação de uma fase *wetting* (molhada) em alguns materiais ferromagnéticos e paramagnéticos. A motivação do estudo destes novos modelos está na descrição da separação de paredes de domínios em cenários de mundos-brana.

1.1 Estrutura da Tese

Esta tese tem como base as seguintes artigos publicados pelo autor e colaboradores ao longo do período de doutorado.

- Chumbes, A. E. R. ; Vasquez, A. ; Hott, M. Fermion localization on a split brane. **Physical Review. D**, v. 83, p. 105010, 2011.
- Chumbes, A. E. R. ; Obispo Vasquez, A. E. ; Hott, M. B. Reconstruction of deformed defects in field theory from deformed zero modes and applications. **Europhysics Letters**, v. 98, p. 31004, 2012.
- Chumbes, A. E. R. ; Hoff da Silva, J. M. ; Hott, M. B. Model to localize gauge and tensor fields on thick branes. **Physical Review. D**, v. 85, p. 085003, 2012.

A presente tese está estruturada da seguinte maneira: No capítulo 2, fazemos uma breve revisão de modelos com branas espessas como de modelos com branas duplas. Discutiremos a distribuição de densidade de energia em cada um destes modelos apresentados. Assim como as aplicações desses modelos em cenários de mundos-brana.

No capítulo 3, abordamos o problema da localização de férmions em branas espessas que exibem separação tanto no espaço *warped* (Randall-Sundrum) como no espaço plano (Rubakov-Shaposhnikov). Fazemos uso de um modelo não-linear com um só campo escalar (que exibe uma solução tipo kink deformado). O modelo possui um parâmetro que modula a solução tipo kink para uma solução tipo kink duplo [26]. Acoplamos o campo fermiônico com o campo escalar, por meio de um acoplamento geral de tipo Yukawa $\bar{\psi}F(\bar{\phi})\psi$, onde $F(\bar{\phi})$ representa uma função de campo escalar ϕ avaliada na solução clássica. A forma de $F(\bar{\phi})$ é fundamental para a localização do modo-zero em branas que exibem separação.

No capítulo 4, construímos modelos não-lineares em teoria de campos a partir da deformação de modo-zero bosônico (excitações de um campo escalar real em modelos não-lineares). Estes modelos estão associados à equação de estabilidade de outros modelos bem

conhecidos como seno-Gordon, ϕ^4 e Scarf-II. Os novos modelos não-lineares em teoria de campos tem solução de energia mínima (kink) o qual pode ser continuamente deformado a uma solução kink duplo (2-kink) por meio de um parâmetro de auto interação do potencial de teoria de campos. Sugerimos aplicações destes modelos deformados, que exibem separação de paredes de domínio, em cenários de mundos-brana.

No capítulo 5, abordamos o estudo da localização de campo de gauge abeliano em branas espessas. É bem sabido que nem sempre é possível obter a localização do campo de gauge na brana por meio unicamente da curvatura do espaço. Abordamos a localização introduzindo uma função suave e continua na ação do campo de gauge de 5 dimensões, com a finalidade de obter a localização de campo de gauge na brana. Além disso, este mecanismo de localização também será aplicado na localização de campo tensorial de Kalb-Ramond.

No Capítulo 6, apresentamos as considerações finais deste trabalho.

No final desta tese incluímos três apêndices:

Apêndice A, demonstramos como obter as equações de movimento estáticas para o campo escalar acoplado à gravidade em $4 + 1$ dimensões em geometria *warped*, no apêndice B, descrevemos o escalar de Kretschmann apresentado no capítulo 2. Finalmente no apêndice C, fazemos a construção das autofunções da equação de Schrödinger pelo método de Numerov que são usadas para analisar o comportamento dos estados excitados massivos discutido no capítulo 3.

Capítulo 2

Mundos-Brana

Nesta seção, vamos analisar modelos de mundo-brana onde o nosso universo (brana) tem uma espessura. Em primeiro lugar estas soluções aparecem em várias teorias de campo multidimensional acopladas com a gravidade, conduzindo a uma variedade de possibilidades de mundo-brana, que é interessante em si [37]. Em segundo lugar, a espessura da brana deve ser um ingrediente essencial para estender a ideia de mundo-brana para um espaço-tempo multidimensional.

Iniciamos nosso estudo revisando modelos que geram branas espessas, tais como o modelo de M. Gremm [49], este modelo possui soluções analíticas que nos ajuda a ilustrar a localização da gravidade na brana. Seria interessante analisar modelos com branas espessas geradas por campos escalares, onde a separação da brana (*splitting brane*) fosse observada. Com esse propósito A. Campos [17] construiu um modelo com um campo escalar complexo(brana) acoplado com a gravidade. Ampliamos nossa revisão de modelos com um só campo escalar que incorporam branas espessas proposto em [26]. Este modelo apresenta uma peculiaridade possui soluções tipo kink que são deformadas a soluções tipo kink duplo (2-kink)[27], este modelo ao igual ao modelo- p introduzido nas referências [7] e [12] nos ajuda a ilustrar o fenômeno da separação das branas e podem ser aplicados em cenários de mundos brana.

Para descrever branas espessas por meio de teorias de campos consideramos um campo escalar (gerado pelo defeito) acoplado à gravidade em 4+1 dimensões, cuja ação é dada

$$S = \int d^4x dr \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}\partial_a\phi g^{ab}\partial_b\phi - V(\phi) \right), \quad (2.1)$$

onde $g \equiv \text{Det}(g_{ab})$ e a métrica para descrever branas espessas, cujo bulk tem um compor-

tamento AdS_5

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = e^{2A(r)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (2.2)$$

com $a, b = 0, \dots, 4$, $r = x^4$ representa a dimensão extra, e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica minkowskiana $(1, -1, -1, -1)$. Os índices gregos correm de 0 a 3, $e^{2A(r)}$ é o fator de deformação o qual depende da dimensão extra, R é o escalar de curvatura. As equações de movimento estáticas que provêm da ação (2.1) e considerando que o campo escalar depende somente da dimensão extra, podemos escrever (ver apêndice A)

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + 4\frac{dA}{dr}\frac{d\phi}{dr} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -\frac{2}{3}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2, \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 - \frac{1}{3}V(\phi). \quad (2.5)$$

Considera-se [39] que o potencial $V(\phi)$ (obtido do contexto de supergravidade) possa ser escrito na forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{dW(\phi)}{d\phi}\right)^2 - \frac{4}{3}(W(\phi))^2. \quad (2.6)$$

Assim pode-se verificar que as soluções das seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{dW(\phi)}{d\phi}, \quad (2.7)$$

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{2}{3}W(\phi), \quad (2.8)$$

são também soluções das equações diferenciais de segunda ordem (2.3)-(2.5).

2.1 Modelo de Gremm

Começamos revisando o modelo apresentado por M. Gremm em [49]. Este modelo é amplamente estudado devido à sua aplicação nas diversas áreas da física, como por exemplo na matéria condensada, na física de partículas, na cosmologia, etc. Além disso, mostra várias características do cenário de branas espessas. Na publicação de M. Gremm se considera o superpotencial $W(\phi)$ da forma

$$W(\phi) = 3bc \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3b}}\phi\right). \quad (2.9)$$

As soluções das equações (2.7) e (2.8) são dadas pelas seguintes expressões

$$\phi(r) = \sqrt{6b} \arctan(\tanh(cr)), \quad (2.10)$$

$$A(r) = -b \ln(2 \cosh(2cr)). \quad (2.11)$$

A configuração do potencial $V(\phi)$ equação (2.6), com o superpotencial $W(\phi)$ dada em (2.9), é representada na figura (2.1)

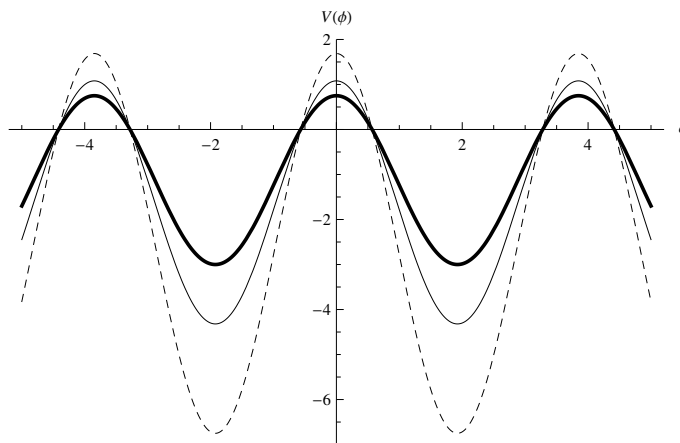


Figura 2.1: Perfil do potencial $V(\phi)$. Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$.

Podemos mostrar o perfil do campo escalar ϕ da equação (2.10) na figura (2.2) obser-

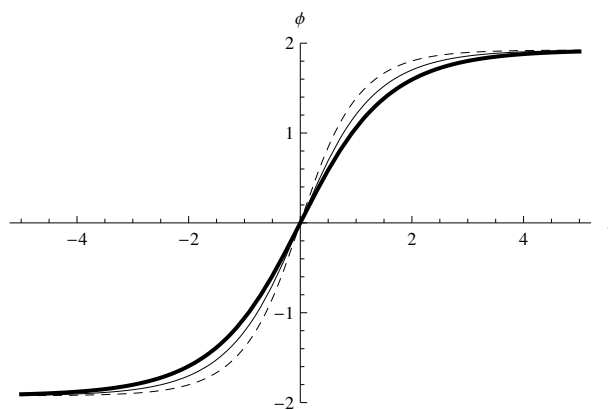


Figura 2.2: Perfil do campo escalar ϕ . Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$.

vando que o campo escalar ϕ tem um perfil tipo kink, conectando os mínimos do potencial $\phi(r \rightarrow -\infty) = -\sqrt{6b} \pi/4$ com $\phi(r \rightarrow \infty) = \sqrt{6b} \pi/4$. Mostrando que o defeito (brana) encontra-se em torno de $r = 0$. Um fato relevante deste modelo é que a espessura da brana varia da acordo como o parâmetro c varia, ou seja, o parâmetro c está associado com a espessura da brana.

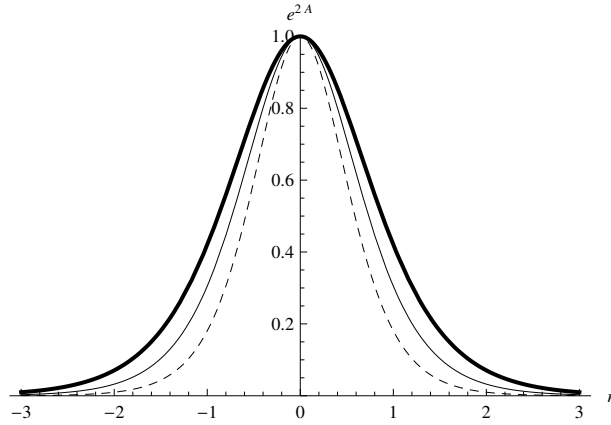


Figura 2.3: Perfil do fator de deformação. Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$.

A configuração do fator de deformação apresenta simetria \mathbb{Z}_2 , ou seja, se cumpre $e^{A(r)} = e^{A(-r)}$, e o comportamento assintótico para o modelo apresentado por Gremm [49] esta dado pelo produto dos parâmetros bc .

A densidade de energia do campo escalar, é dada pela seguinte expressão

$$T_{00} = e^{2A(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V(\phi) \right). \quad (2.12)$$

Substituindo as equações (2.10) e (2.11) em (2.12), obtemos a densidade de energia do campo escalar em função da dimensão extra r . A configuração desta densidade de energia é mostrada na figura (2.4).

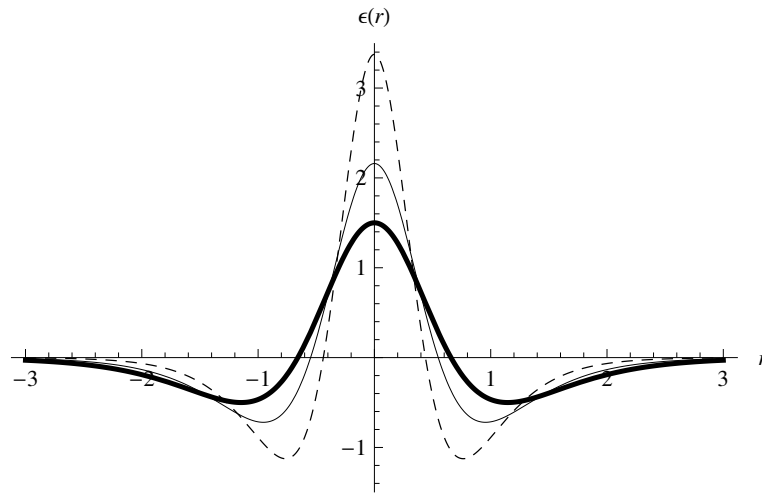


Figura 2.4: Perfil da densidade de energia matéria. Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$.

No gráfico da densidade de energia matéria, a brana está localizada em torno de $r = 0$ na região de densidade de energia positiva, tal como o podemos observar na figura (2.4).

Substituindo as equações (2.4) e (2.5) na equação (2.12), o tensor T_{00} fica expressado em termos de $A(r)$

$$T_{00} = -\frac{1}{2}e^{2A(r)} \left(6 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + 3 \frac{d^2 A}{dr^2} \right). \quad (2.13)$$

Temos que a energia do campo escalar é definida da forma

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dr T_{00}, \quad (2.14)$$

tal que substituindo (2.13) em (2.14) temos a energia do campo escalar

$$E = \frac{1}{2}(e^{2A(\infty)}W(\phi(\infty)) - e^{2A(-\infty)}W(\phi(-\infty))). \quad (2.15)$$

O valor da energia do campo escalar E depende do comportamento assintótico do *warp factor* (fator de deformação), e do superpotencial $W(\phi)$ no limite assintótico das soluções do campo escalar.

No limite assintótico o fator de deformação vai a zero (como pode ser apreciado na figura (2.3)), e a solução clássica (2.10) conecta os mínimos do potencial, pelo que o superpotencial toma um valor constante. Portanto a energia do campo escalar é igual a zero. Este resultado indicaria que a contribuição da densidade energia positiva é a mesma que a densidade de energia negativa [65].

É interessante também comparar o escalar de Ricci gerado pela função $A(r)$. Para isto traçamos $R = -(8d^2 A/dr^2 + 20(dA/dr)^2)$ na figura (2.5).

Nota-se que o escalar de Ricci tem sua maior variação em torno de $r = 0$ (região onde a brana se estende). Observamos que quando $r \rightarrow \pm\infty$ este toma um valor constante e negativo. Dessa forma podemos dizer que em regiões distintas de onde está localizada a brana, adquire um comportamento assintótico de tipo AdS_5 .

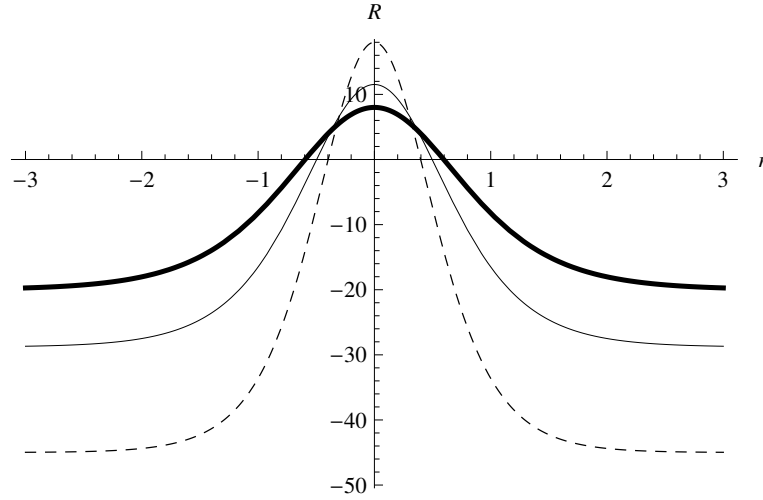


Figura 2.5: Escalar de Ricci. Para $c = 1$ (linha grossa), $c = 1.2$ (linha fina) e $c = 1.5$ (linha pontilhada), com $b=1$.

2.2 Modelo não-polinomial

Um segundo modelo em revisão é o modelo que publicamos em [26]. Este modelo exibe soluções tipo kink que podem ser continuamente deformados em soluções tipo kink duplo (dois kink). Nosso modelo foi construído a partir de modelos de dois campos escalares [42], e possui um parâmetro interno chamado de “parâmetro de degenerescência” que controla a separação das branas. Nosso modelo apresenta um $W_\phi(\phi)$ da forma

$$W_\phi(\phi) = 2\mu(\phi^2 + b^2 - a^2 + b\sqrt{\phi^2 + b^2 - a^2}), \quad (2.16)$$

com $f = \sqrt{b^2 - a^2}$ e $b < -a$. Onde b é o parâmetro de degenerescência. Integrando (2.16) nos permite mostrar

$$W(\phi) = 2\mu \left[\phi \left(\frac{\phi^2}{3} + f^2 + \frac{b}{2} \sqrt{\phi^2 + f^2} \right) + \frac{bf^2}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{\phi}{f} \right) \right], \quad (2.17)$$

cuja solução clássica é

$$\phi = \pm a \frac{\sinh(2\mu ar)}{\cosh(2\mu ar) - b/f}. \quad (2.18)$$

O sinal $+(-)$ representa a solução do tipo kink (anti-kink). Com $b = -a \coth(2\mu aL)$, a solução clássica (2.18) pode ser convenientemente reescrita da seguinte maneira

$$\bar{\phi}(r) = \pm \frac{a}{2} [\tanh(a\mu(r+L)) + \tanh(a\mu(r-L))]. \quad (2.19)$$

Vemos que a solução (2.19) pode ser vista como a junção de duas soluções tipo kink $\bar{\phi}_\pm = \frac{a}{2}(\pm 1 + \tanh(\mu a(r \mp L)))$. Assim temos uma situação que se assemelha a 2 paredes

de domínio, ou duas branas localizadas em $\pm L$, sendo $2L$ a separação entre as paredes de domínio (branas).

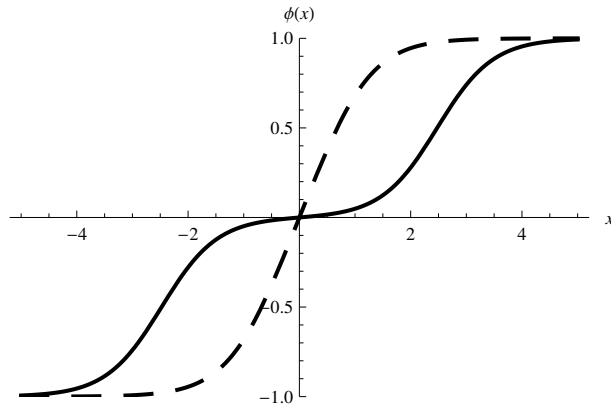


Figura 2.6: Perfil típico da solução kink. $L = 0.01$ (linha pontilhada) corresponde a uma solução kink simples, $L = 2.6$ (linha fina) corresponde a uma solução kink duplo.

A configuração do campo ϕ é mostrada na figura (2.6). Vemos que quando $L = 0.01$, a solução ϕ apresenta a um perfil tipo kink, permitindo conectar os mínimos locais. Isso indica que o defeito (brana) encontra-se em torno de $r = 0$. A solução clássica tipo kink se deforma a uma solução de tipo 2-kink quando o parâmetro L cresce. Este tipo de comportamento pode ser observado na figura (2.6).

Concernente ao *warp factor* (fator de deformação) podemos observar na figura (2.7) que este se separa em duas regiões similares ao longo da dimensão extra, cujo comportamento assintótico é de tipo AdS_5 , à medida que L aumenta a estrutura de brana dupla é observada.

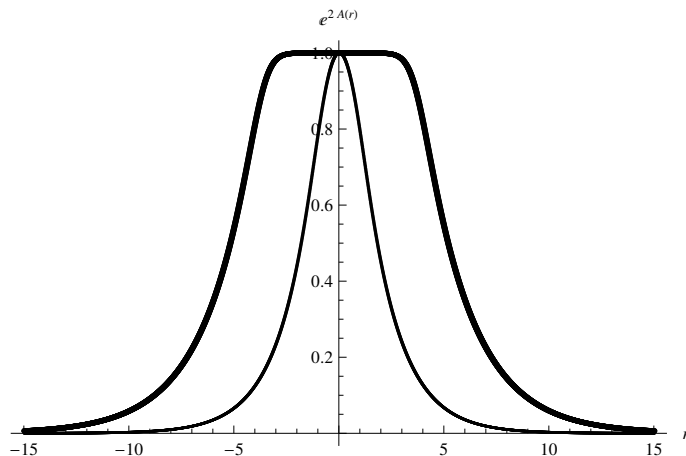


Figura 2.7: Fator de deformação avaliado para dois valores diferentes de L , para $L=0.01$ (linha fina) e $L=4.6$ (linha sólida).

A estrutura de brana dupla pode também ser observado a partir da densidade de energia do campo escalar. A densidade de energia do campo escalar T_{00} é dada pela equação (2.12), e a configuração desta densidade de energia é mostrada na figura (2.8). Para $L = 0.01$ a brana está localizada em torno de $r = 0$ e quando L cresce, por exemplo para $L = 2.6$ temos duas branas onde T_{00} apresenta valores positivos.

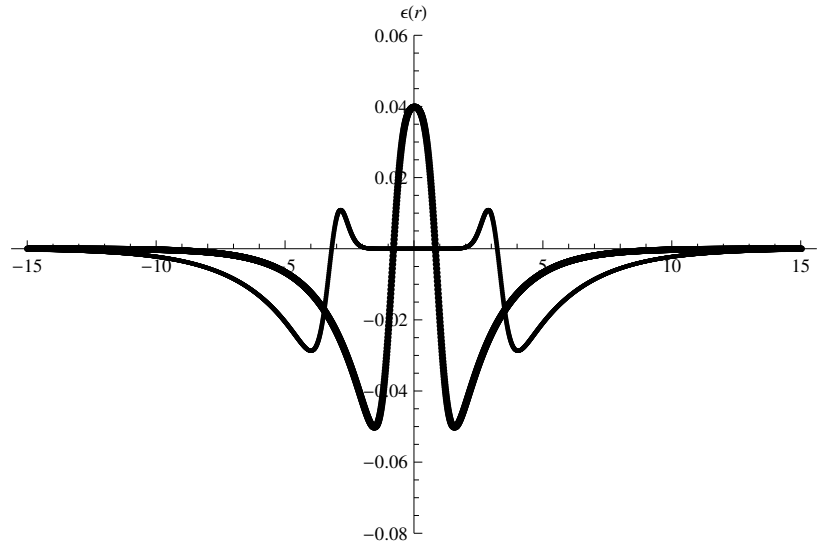


Figura 2.8: Perfil da densidade de energia matéria. $L = 0.01$ (linha grossa), e $L = 2.6$ (linha fina).

É interessante também analisar o escalar de Ricci gerado pela função $A(r)$. Para isto traçamos $R = -(8d^2A/dr^2 + 20(dA/dr)^2)$ na figura (2.9)

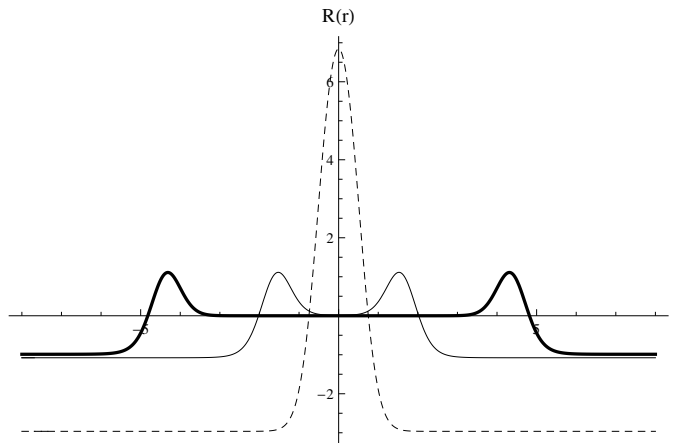


Figura 2.9: Escalar de Ricci para $L = 0.01$ (linha pontilhada), $L = 1.6$ (linha fina) e, $L = 4.5$ (linha grossa). Evidencia a formação de brana dupla à medida que L aumenta.

O comportamento do escalar de Ricci varia à medida que o parâmetro L aumenta, observamos que quando $r \rightarrow \pm\infty$ este toma um valor constante e negativo. dessa forma

podemos dizer que em regiões distintas de onde estão localizadas as branas, o escalar de Ricci é mais proeminente indicando maior curvatura.

Outra forma de reafirmar a formação das branas duplas, é mediante o uso do escalar de Kretschmann em 5 dimensões $K = R_{abcd}R^{abcd}$ (ver apêndice B). Este escalar está associado à soma de quadrados das componentes do tensor de curvatura de Riemann em 5 dimensões,

$$K = R_{abcd}R^{abcd} = 24 \left(\frac{dA}{dr} \right)^4 + 16 \left(\left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d^2A}{dr^2} \right)^2 \right). \quad (2.20)$$

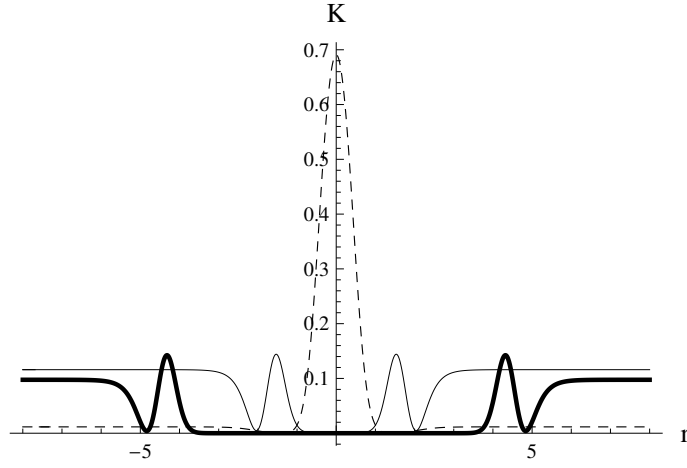


Figura 2.10: Escalar de Kretschmann para $L = 0.01$ (linha pontilhada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha grossa). Evidencia a formação de brana dupla à medida que L aumenta.

Podemos observar que os picos do escalar de Kretschmann coincidem com os picos do escalar de Ricci. Reafirmando a formação das branas duplas. Também vemos que K assume constante assintoticamente.

Vale a pena comentar que a separação entre as branas não é de caráter dinâmico, ou seja, não acontece à medida que o tempo transcorre. Note-se que a separação entre as branas acontece à medida que o parâmetro L cresce. Os modelos que poderiam ser usados para representar a separação entre as branas devem fornecer soluções que além de saturar o limite de Bogomol'nyi, exibam uma configuração tipo kink duplo para as soluções clássicas. Este tipo de soluções é de grande interesse em várias áreas da ciência, como é o caso de Física de altas energias e matéria condensada. O estudo da separação de branas ou chamado também de *splitting brane* foi estabelecida por A. Campos [17] no qual faz uso de um campo escalar complexo (descrito pela brana) acoplado à gravidade, com simetria \mathbb{Z}_3 . Também foi mencionado na literatura a construção de um modelo

$U(\phi) = a\phi^2 + b\phi^4 - c\phi^6$ [87], que proporciona separação de paredes de domínio, mediante um parâmetro a que conduz à separação entre estes domínios.

Observamos que o potencial $V(\phi)$ (2.6) na maioria de modelos polinomiais [30],[31], [39],[40],[50],[52],[82] com exceção do modelo sino-Gordon [49] que é de tipo oscilante, não são limitados inferiormente, devido que $(W(\phi))^2$ é um termo predominante dentro do potencial da brana. Este comportamento de não serem limitados inferiormente não permitiria fazer uma expansão perturbativa em torno da solução clássica para a quantização do sistema.

O estudo destes modelos não-lineares são inspirados no estudo sobre estabilidade das flutuações da gravidade em paredes de domínio em teorias de supergravidade [32]-[34]. Um problema interessante em cenários de mundos-brana é a localização de campo de matéria na brana, ou seja, a realização estável de nosso universo observável. Abordaremos na capítulo seguinte a localização de férmions em branas que exibem separação.

Capítulo 3

Localização de férmions em branas espessas

Em teoria de mundos-brana, um problema interessante é a localização de campos de matéria e de campos de gauge na brana, ou seja, a realização estável de nosso universo observável na brana. Estudaremos neste capítulo a localização de férmions sem massa em paredes de domínio que se dividem em duas paredes. O estudo da localização de férmions será feita tanto no cenário de Randall-Sundrum como no cenário de Rubakov-Shaposhnikov. Fazemos uso do modelo não-linear apresentado no capítulo 2 (este modelo apresenta uma peculiaridade que consiste em que a solução clássica do tipo kink se deforma continuamente em uma solução kink duplo) que nos permitira descrever a localização em branas duplas. Acoplamos o campo férmionico com o campo escalar (gerado pelo próprio defeito) via acoplamento geral tipo Yukawa $\bar{\Psi}F(\bar{\phi})\Psi$, onde $F(\bar{\phi})$ é uma função de campo escalar ϕ tomado na solução clássica. A forma desta função $F(\bar{\phi})$ é fundamental para a localização de férmions em branas duplas.

3.1 Localização de férmions no espaço deformado

A ação para férmions de spin 1/2 acoplados com o campo escalar (defeito topológico) e a gravidade em $(4 + 1)$ dimensões é dada na forma:

$$S_{1/2} = \int d^5x \sqrt{g} [i \bar{\Psi} \Gamma^a D_a \Psi - \bar{\Psi} F(\bar{\phi}) \Psi], \quad (3.1)$$

cujas correspondente equação de movimento é

$$(i\Gamma^a D_a - F(\bar{\phi}))\Psi = 0, \quad (3.2)$$

onde o índice $a, b = 0, 1, 2, 3, 5$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$, e as matrizes gamma satisfazem a álgebra $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2g^{ab}$ e podem ser escritas em termos da representação irredutível das matrizes gamma 4×4 :

$$\Gamma^\mu = e^{-A(r)}\gamma^\mu \quad \Gamma^5 = -i\gamma^5. \quad (3.3)$$

A derivada covariante é definida como

$$D_a\Psi = (\partial_a + \omega_a)\Psi = \left(\partial_a + \frac{1}{4}\omega_a^{\bar{a}\bar{b}}\Gamma_{\bar{a}}\Gamma_{\bar{b}}\right)\Psi, \quad (3.4)$$

onde ω_a é chamado de conexão spin, e as matrizes gamma obedecem a relação $\Gamma_a = e_a^{\bar{a}}\Gamma_{\bar{a}}$, onde \bar{a} se refere-se ao sistema de coordenadas locais, e $e_a^{\bar{a}}$ é chamado de *vielbein*.

Sabemos que para generalizar a equação de Dirac em um campo gravitacional devemos preservar a invariância local sob transformações de Lorentz. Portanto, definimos a derivada covariante de modo que, quando esta atue no espinor, resulte em um objeto que se transforme da mesma forma que a derivada na ausência de gravidade [22].

O termo de conexão spin $\omega_a = \frac{1}{4}\omega_a^{\bar{a}\bar{b}}$, tem a componente $\omega_a^{\bar{a}\bar{b}}$ definida na forma:

$$\omega_a^{\bar{a}\bar{b}} = \frac{1}{2}e^{b\bar{a}}\left(\partial_a e_b^{\bar{b}} - \partial_b e_a^{\bar{b}}\right) - \frac{1}{2}e^{b\bar{b}}\left(\partial_a e_b^{\bar{a}} - \partial_b e_a^{\bar{a}}\right) - \frac{1}{2}e^{c\bar{a}}e^{d\bar{b}}\left(\partial_c e_{d\bar{f}} - \partial_d e_{c\bar{f}}\right)e_a^{\bar{f}}. \quad (3.5)$$

onde as componentes não-nulas de ω_a são $\omega_\mu = \frac{1}{2}e^A(\partial_r A)\gamma^\mu\gamma^5$.

Agora \bar{a} e \bar{b} denota os índices locais de Lorentz. Substituindo na equação de movimento temos:

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu + e^{A(r)}\gamma^5(\partial_r + 2\partial_r A) - e^A F(\bar{\phi})]\Psi(x, r) = 0. \quad (3.6)$$

As soluções da equação (3.6) podem ser obtidas com a ajuda da seguinte decomposição quiral, que tem a forma

$$\Psi(x, r) = \sum_n \psi_{L_n}(x)\alpha_{L_n}(r) + \sum_n \psi_{R_n}(x)\alpha_{R_n}(r), \quad (3.7)$$

onde $\psi_{L_n}(x)$ e $\psi_{R_n}(x)$ são as componentes do campo espinorial quadridimensional esquerda e direita, respectivamente, e que satisfazem $\gamma^5\psi_{L_n}(x) = -\psi_{L_n}(x)$ e $\gamma^5\psi_{R_n}(x) = \psi_{R_n}(x)$, juntamente com a equação de Dirac em quatro dimensões com massa $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{L_n}(x) = m_n\psi_{R_n}(x)$ e $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{R_n}(x) = m_n\psi_{L_n}(x)$.

As funções $\alpha_{Ln}(r)$ e $\alpha_{Rn}(r)$ representam os modos de K-K e satisfazem às seguintes equações acopladas

$$\left(\frac{d}{dr} + 2\frac{d}{dr}A(r) + F(\bar{\phi})\right)\alpha_{Ln}(r) = m_n e^{-A(r)}\alpha_{Rn}, \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{d}{dr} + 2\frac{d}{dr}A(r) - F(\bar{\phi})\right)\alpha_{Rn}(r) = -m_n e^{-A(r)}\alpha_{Ln}. \quad (3.9)$$

Redefinimos os modos $\alpha_{Ln}(r) = e^{-2A(r)}L_n(r)$ e $\alpha_{Rn}(r) = e^{-2A(r)}R_n(r)$. Substituindo em (3.8) e (3.9) são reduzidas à forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} - F(\bar{\phi})\right)R_n(r) &= -m_n e^{-A(r)}L_n(r) \\ \left(\frac{d}{dr} + F(\bar{\phi})\right)L_n(r) &= m_n e^{-A(r)}R_n(r). \end{aligned} \quad (3.10)$$

As funções $\alpha_{Ln}(r)$ e $\alpha_{Rn}(r)$ cumprem certa condição de ortonormalização. Chegamos a essa condição de ortonormalização substituindo a decomposição quirial (3.7) na ação (3.1), empregando as equações acopladas (3.8) e (3.9) e exigindo que o resultado tenha a forma da ação quadridimensional para férmions quirais massivos

$$S_{1/2} = \sum_n \int d^4x \bar{\psi}_n (\gamma^\mu \partial_\mu - m_n) \psi_n \quad (3.11)$$

onde $\psi_n = \psi_{Ln} + \psi_{Rn}$ e $m_n \geq 0$. Assim, as funções $\alpha_{Ln}(r)$ e $\alpha_{Rn}(r)$ satisfazem as seguintes relações de ortonormalização [54], [61]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{3A} \alpha_{Ln}(r) \alpha_{Lm}(r) dr &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{3A} \alpha_{Rn}(r) \alpha_{Rm}(r) dr = \delta_{mn}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{3A} \alpha_{Ln}(r) \alpha_{Rm}(r) dr &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nestas relações podemos notar que o *warp factor* desempenha um papel fundamental para a determinação da localização dos modos não-massivos.

Particularmente, os modos não-massivos encontrados são

$$\begin{aligned} \alpha_{R0} &= N_{R0} \exp \left[-2A + \int^r f(r') dr' \right], \\ \alpha_{L0} &= N_{L0} \exp \left[-2A - \int^r f(r') dr' \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $f(r) = F(\bar{\phi}(r))$ e $N_{R(L)0}$ são as constantes de normalização que podem ser encon-

tradas na relação de normalização

$$|N_{R0}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(r)+2 \int F(r') dr'} = 1 \quad (3.14)$$

ou

$$|N_{L0}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(r)-2 \int F(r') dr'} = 1. \quad (3.15)$$

Naturalmente, uma dessas duas soluções pode ser normalizada, ou seja, quando $\alpha_{Ln}(r)$ é normalizável, $\alpha_{Rn}(r)$ não é normalizável, e vice-versa. As condições de normalização são determinadas pelo comportamento assintótico dos integrandos na expressão acima. Escolhemos a função $F(\bar{\phi}(r))$ de forma que o decréscimo de $e^{\pm \int F(r') dr'}$ seja mais rápido que o acréscimo $e^{-A(r)}$, mas esta escolha não garante a normalização de ambas quiralidades simultaneamente, por causa dos diferentes sinais \pm no expoente. Portanto, somente temos uma solução normalizável.

Analisamos o comportamento do modo quiral não-massivo para dois diferentes tipos de acoplamento $F(\bar{\phi}) = \eta \bar{\phi}(r)$ e $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$, onde $\eta > 0$ é chamada de constante de acoplamento de Yukawa, e $W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ é a segunda derivada do superpotencial tomada na solução clássica. No primeiro caso, descrevemos um simples acoplamento entre os férmions e o campo escalar o qual fornece a localização de modos não-massivos de mão esquerda. Neste caso α_{L0} não segue a separação entre as branas. Enquanto a brana dupla é formada, o pico do modo-zero α_{L0} fica localizada entre as branas (na região no bulk), apresentando uma mínima densidade de probabilidade de ser encontrado no núcleo das branas.

O comportamento $\alpha_{L0}(r)$ não normalizado é mostrado na figura (3.1) (lado esquerdo). Para obter o modo-zero α_{L0} pelo menos no núcleo de uma das branas adicionamos uma constante de massa de 5 dimensões ao acoplamento de Yukawa, $F(\bar{\phi}) = \eta(\bar{\phi}(r) + M)$. O termo de massa é escolhido de maneira que o pico do modo-zero $\alpha_{L0}(r)$ acompanhe o núcleo da brana e que $\alpha_{L0}(r)$ em (3.15) continue sendo normalizável. Uma escolha adequada para a constante de massa é $M = \frac{a}{2} \tanh(2\mu aL)$. Na figura (3.1) (lado direito) podemos observar que α_{L0} tem pico no núcleo da brana esquerda. Se invertemos o sinal de M a localização de α_{L0} passa a ser na brana direita. O termo de massa M pode assumir diferentes valores para diferentes sabores de férmions a fim de ter uma distinguibilidade de férmions em diferentes pontos dentro da mesma brana [1].

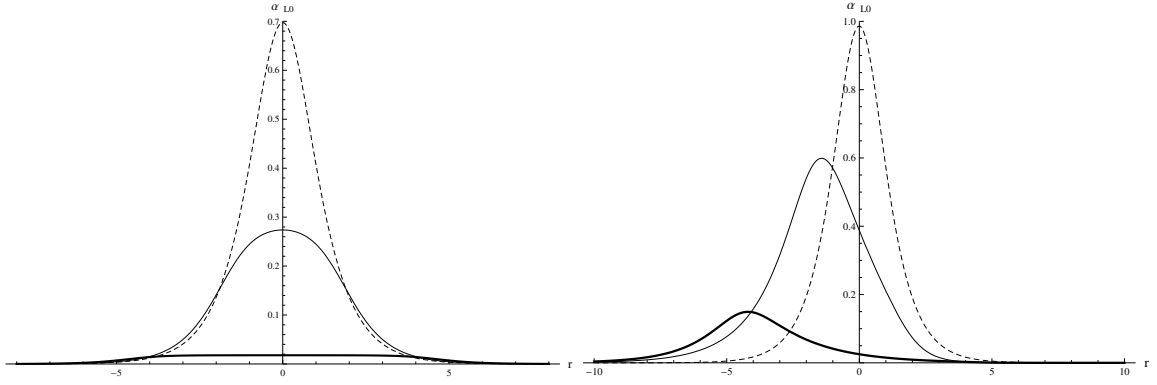


Figura 3.1: α_{L0} (modo-zero esquerdo) nos casos $F(\bar{\phi}) = \eta\bar{\phi}(r)$ (lado esquerdo), $F(\bar{\phi}) = \eta(\bar{\phi}(r) + M(r))$ (lado direito), para $L = 0.01$ (linha pontilhada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha sólida).

Ao escolher uma das branas como a preferida, onde o Universo seria realizado, naturalmente quebramos a simetria sob a inversão de coordenada r . Uma maneira de manter tal simetria é de perceber a localização de ambas as branas. Ao considerar o segundo acoplamento $F(\bar{\phi}(r)) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$, o modo-zero $\alpha_{L0}(r)$ fica localizado no núcleo de cada uma das branas. Observamos este comportamento na figura (3.2).

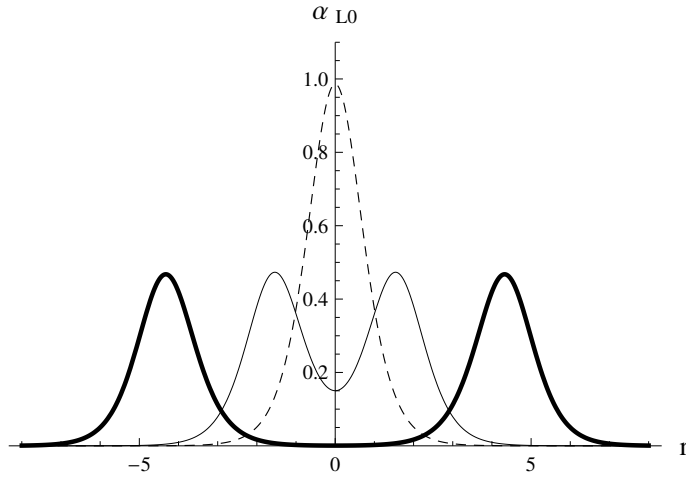


Figura 3.2: α_{L0} (modo-zero esquerdo) no caso de $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$, para $L = 0.01$ (linha pontilhada), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.5$ (linha sólida).

O modo-zero α_{L0} diminui suavemente na região do bulk localizada entre as branas e se localiza nos núcleos das branas à medida em que L cresce, sinalizando uma pequena probabilidade para que os modos não-massivos esquerdo sejam encontradas entre as branas. O acoplamento $F(\bar{\phi}(r)) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ provém da supersimetria a nível fundamental $N = 1$. Esta pode ser apreciada na próxima seção, quando a brana é imersa em um espaço-tempo plano em 5 dimensões (cenário de Rubakov-Shaposhnikov).

3.2 Localização de férmions no cenário de Rubakov-Shaposhnikov

Estudamos nesta seção a localização de férmions em (3-brana) num espaço-tempo de 5 dimensões com geometria não *warped*, (cenário de Rubakov-Shaposhnikov).

Definimos a ação para o campo fermiônico no espaço plano

$$S_{1/2} = \int d^5x [i \bar{\Psi} \Gamma^a \partial_a \Psi - \bar{\Psi} F(\phi) \Psi], \quad (3.16)$$

a qual nos fornece a seguinte equação de movimento

$$(i \Gamma^\mu \partial_\mu + i \Gamma^5 \partial_5 - F(\bar{\phi})) \Psi = 0, \quad (3.17)$$

e as matrizes gamma obedecem à álgebra $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2g^{ab}$, e podem ser escritas em termos das matrizes gamma 4×4 , $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ e $\Gamma^5 = -i\gamma^5$.

Substituindo as matrizes gamma na equação de movimento (3.17) temos

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^5 \partial_5 - F(\bar{\phi})) \Psi = 0. \quad (3.18)$$

Usando a decomposição quirial na forma

$$\Psi(x, r) = \sum_n \psi_{Ln}(x) \alpha_{Ln}(r) + \sum_n \psi_{Rn}(x) \alpha_{Rn}(r), \quad (3.19)$$

onde $\psi_{Ln}(x)$ e $\psi_{Rn}(x)$ são os modos quirais que satisfazem $\gamma^5 \psi_{Ln}(x) = -\psi_{Ln}(x)$ e $\gamma^5 \psi_{Rn}(x) = \psi_{Rn}(x)$, e juntamente com a equação de Dirac em 4 dimensões com massa $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{Ln}(x) = m_n \psi_{Rn}(x)$ e $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{Rn}(x) = m_n \psi_{Ln}(x)$.

Aplicando estas condições encontramos que elas obedecem as equações

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} - F(\bar{\phi}) \right) \alpha_{Rn} &= -m_n \alpha_{Ln}, \\ \left(\frac{d}{dr} + F(\bar{\phi}) \right) \alpha_{Ln} &= m_n \alpha_{Rn}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Particularmente para modos não-massivos encontramos

$$\alpha_{R0}(r) = N_{R0} \exp \left[+ \int^r f(r') dr' \right], \quad (3.21)$$

$$\alpha_{L0}(r) = N_{L0} \exp \left[- \int^r f(r') dr' \right], \quad (3.22)$$

Podemos observar que a normalização dos modos não-massivos dependem unicamente do comportamento assintótico de $\int^r f(r') dr'$. Portanto, usualmente temos modo-zero ímpar de quiralidade bem definida (de mão esquerda ou de mão direita), a qual é a principal característica para obter número fermiônico fracionário, como mostra a ref. [56].

As equações diferenciais de primeira ordem (3.20) podem ser desacopladas nas equações diferenciais de segunda ordem (3.23) e (3.24), respectivamente

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + U_L(r) \right) \alpha_{Ln} = m_n^2 \alpha_{Ln}, \quad (3.23)$$

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + U_R(r) \right) \alpha_{Rn} = m_n^2 \alpha_{Rn} \quad (3.24)$$

onde $U_R(r) = f^2(r) + \frac{d}{dr}f(r)$ e $U_L(r) = f^2(r) - \frac{d}{dr}f(r)$, são os potenciais efetivos da equação de Schrödinger independente do tempo, cujas correspondentes hamiltonianas são parceiras supersimétricas uma da outra. Assim temos a mecânica quântica supersimétrica. As implicações da teoria supersimétrica, neste contexto, permitem deduzir que, para o caso $F(\bar{\phi} > 0) (< 0)$, haverá estados localizáveis no potencial $U_L(U_R)$.

Novamente analisamos o comportamento dos modos não-massivos para $F(\bar{\phi}) = \eta \bar{\phi}(r)$, $F(\bar{\phi}(r)) = \eta(\bar{\phi}(r) + M)$ e $F(\bar{\phi}(r)) = -\eta W_{\bar{\phi}\phi}$, com $\eta > 0$.

O primeiro tipo de acoplamento $\eta \bar{\Psi} \phi \Psi$ é o acoplamento mais usado na literatura para a descrição de férmions interagindo com campos escalares. Este tipo de acoplamento foi estudado por Rubakov-Shaposhnikov para a localização de férmions em paredes de domínio [80]. É possível verificar de (3.21) e (3.22), que soamente o modo α_{L0} é normalizável:

$$\alpha_{R0} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{L0} = N_{L0} (\cosh(2L) + \cosh(2r))^{-\eta/2}. \quad (3.25)$$

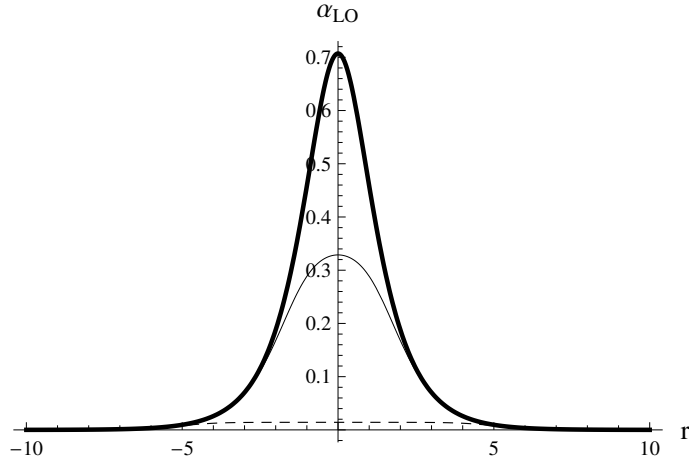


Figura 3.3: Modo-zero para $F(\bar{\phi}) = -\eta\bar{\phi}$, para $L = 0.01$ (linha s3lida), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.6$ (linha pontilhada).

Como na se3c3o anterior comentamos, a fun3c3o $\alpha_{L0}(r)$ 3e sim3etrica em r e tem um pico em $r = 0$. Assim, o modo-zero fica localizado na regi3o3o entre as branas. Para $L = 0.01$ o pico do modo-zero localizado em torno de $r = 0$, e para $L = 4.6$ o pico de modo-zero sofre um achatamento e n3o3o acompanha a separa3c3o3o entre as branas.

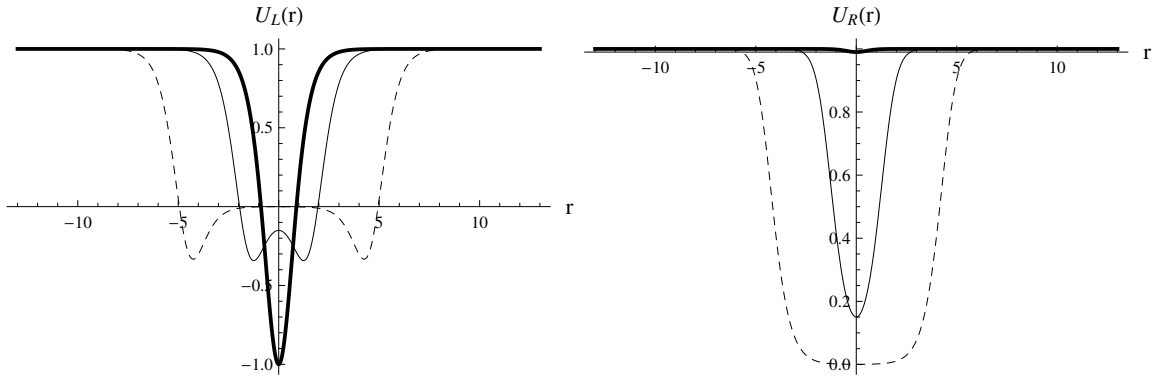


Figura 3.4: Potenciais efetivos $U_L(r)$ e $U_R(r)$ para o caso $F(\bar{\phi}) = \eta\bar{\phi}$. Para $L = 0.01$ (linha s3lida), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.6$ (linha pontilhada).

Os potenciais da mec3nica qu3ntica $U_L(r)$ e $U_R(r)$ podem suportar estados localiz3aveis massivos, dependendo do valor de L .

O segundo tipo de acoplamento que estudamos 3e $F(\bar{\phi}) = (\eta(\bar{\phi}) + \frac{1}{2}(\tanh(2L)))$, este tipo de acoplamento permite localizar modo-zero em uma das branas. Assim podemos verificar que α_{R0} e α_{L0} s3o3o dadas por

$$\alpha_{R0} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{L0} = N_{L0} e^{-\frac{\eta M}{2} r} (\cosh(2L) + \cosh(2r))^{-\eta/2}. \quad (3.26)$$

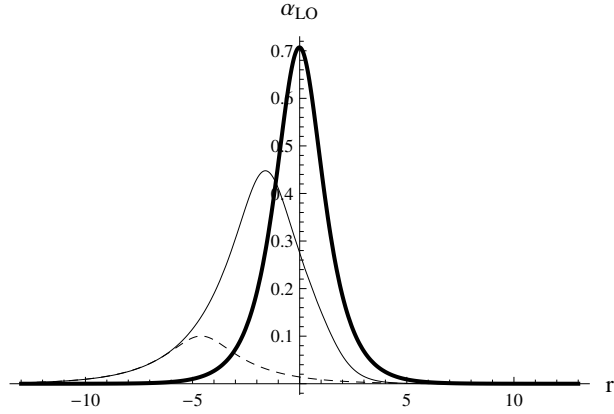


Figura 3.5: Modo-zero para $F(\bar{\phi} + \frac{1}{2} \tanh(2L))$, para $L = 0.01$ (linha sólida), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.6$ (linha pontilhada).

Observamos na figura (3.5) que podemos localizar modo-zero α_{L0} em uma das branas, mas como mencionamos na seção anterior, ao escolher uma das branas como nosso universo, quebramos a simetria de inversão de coordenada r e a simetria \mathbb{Z}_2 presente no modelo descrito no capítulo 1.

Os potenciais da mecânica quântica $U_R(r)$ e $U_L(r)$ na figura (3.6) não suportam nenhum estado localizável que corresponderia a férmions massivos. Isto é porque $U_R(r)$, neste caso, apresenta uma barreira enquanto $U_L(r)$ apresenta um potencial tipo poço, em torno de $r = -L$. Além disso, a partir da mecânica quântica supersimétrica, podemos mostrar que qualquer estado localizado de $U_R(r)$ implicaria estados localizáveis de $U_L(r)$, mas os modos-zero pertencem somente a $U_L(r)$.

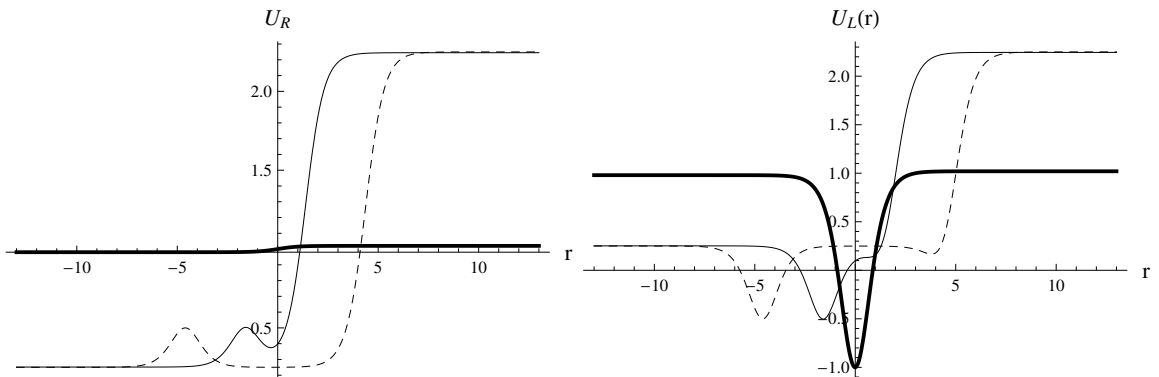


Figura 3.6: Potenciais efetivos $U_R(r)$ e $U_L(r)$ para o caso $F(\bar{\phi}) = \eta(\bar{\phi} + \frac{1}{2} \tanh(2L))$, e $L = 0.01$ (linha sólida), $L = 1.6$ (linha fina) e $L = 4.6$ (linha pontilhada).

Para o terceiro acoplamento, $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$. Neste tipo de acoplamento temos os potenciais $U_R = \eta^2 W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^2 - \eta W'_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ e $U_L = \eta^2 W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^2 + \eta W'_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$. Esses potenciais são idênticos em estrutura aos potenciais da mecânica quântica supersimétrica em $1 + 1$ dimensões, onde $-\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ desempenha o papel de superpotencial. Resulta interessante notar que essa

mesma estrutura pode ser encontrada no estudo da estabilidade das soluções clássicas. No caso das excitações do campo escalar (branons), foi interessante mostrar que a equação de Schrödinger que obedece esta equação é semelhante à equação de Schrödinger que obedece $\alpha_{Ln}(r)$ na equação (3.23) com $\eta = 1$, com um potencial efetivo dada por

$$U_{ef}(r) = W_{\frac{\phi}{\phi}}^2 + W'_{\phi\phi}, \quad (3.27)$$

justamente o fato de poder ter espectros idênticos entre as excitações bósonicas e fermiônicas é um dos ingredientes fundamentais da supersimetria.

Encontramos neste terceiro acoplamento que α_{L0} é a única solução normalizável

$$\alpha_{R0} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{L0} = N_{L0}(\text{sech}^2(r + L) + \text{sech}^2(r - L))^\eta. \quad (3.28)$$

Na fig. (3.7) podemos notar que $\alpha_{L0}(r)$ é simétrica referente a r e apresenta um pico em cada uma das branas formadas. Podemos observar que a densidade de probabilidade encontrada no meio das branas decresce à medida que L aumenta.

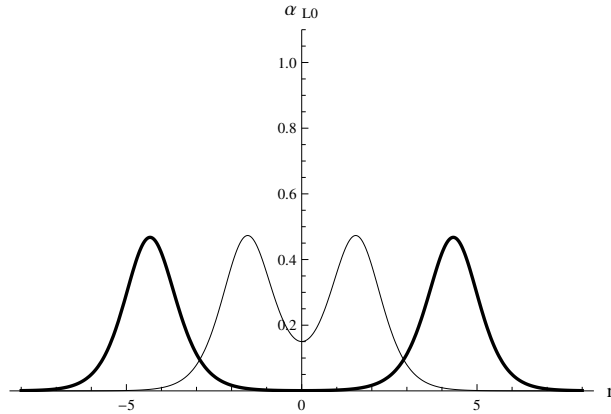


Figura 3.7: $\alpha_{L0}(r)$ no caso de $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\frac{\phi}{\phi}}$, para $L = 1.6$ (linha fina), e $L = 4.5$ (linha sólida).

A figura (3.8) mostra a forma dos potenciais efetivos $U_R(r)$ e, $U_L(r)$ para valores específicos para $L = 1.5$ e $\eta = 1$. Para valores de L perto de zero, $U_L(r)$ é um potencial poço, o qual começa a ser deformado em um potencial com poço duplo à medida que L cresce e se aproxima L_c (valor crítico), o qual é determinado pela condição $U_L''(r = 0) = 0$. Para $L \geq L_c$, dois pequenos poços são observados em torno de $r = \pm L$ que logo adotam a forma de um poço duplo para $L = l$ correspondente a $U_L(r = 0) = 0$, sinalizando a possibilidade de aprisionar um estado massivo além do modo-zero. Podemos observar que $U_L(r) = 2(2 - 3\text{sech}^2(r))$ e $U_R(r) = 2(2 - \text{sech}^2(r))$ para $L = 0$ e fixando $\eta = 1$. O primeiro potencial admite dois estados ligados e o seguinte admite um estado ligado. O

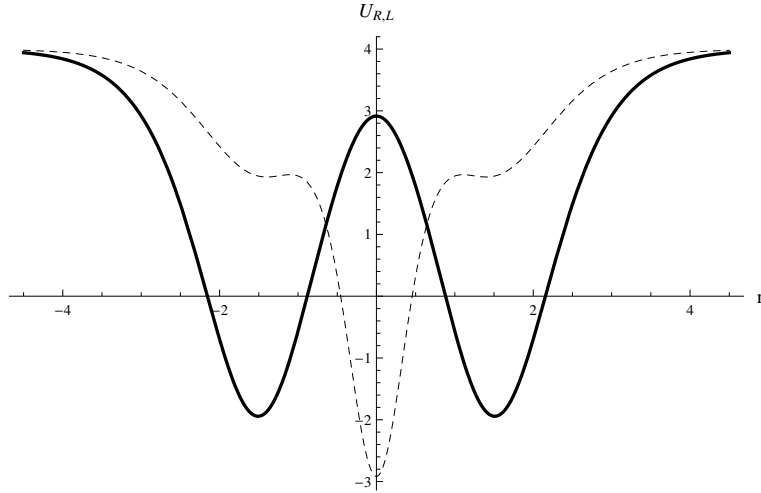


Figura 3.8: Potencial efetivo para o acoplamento $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ com $L = 1.5$, $U_L(r)$ (linha solida), $U_R(r)$ (linha pontilhada).

estado fundamental de $U_L(r)$ para $L = 0$ e $\eta = 1$ é $\alpha_{L0} \simeq \text{sech}^2(r)$, enquanto que o primeiro estado excitado é $\alpha_{L1} \simeq \text{sech}(r) \tanh(r)$ e o estado fundamental de $U_R(r)$ para $L = 0$ e $\eta = 1$ é $\alpha_{R1} \simeq \text{sech}(r)$. Além disso, a partir da expressão (3.28) considerando $\eta = 1$, podemos construir uma função antisimétrica $\alpha_{L1} \sim (\text{sech}^2(r + L) - \text{sech}^2(r - L))$ como uma expressão aproximada para o primeiro estado excitado para $U_L(r)$ quando $L \gg l$. Esta aproximação para o primeiro estado excitado é comumente usada no estudo do tunelamento quando o potencial apresenta poço duplo [48, 68].

Usamos o método de Numerov [70] para analisar o comportamento do primeiro estado excitado α_{L1} e α_{R1} . A figura (3.9) mostra que α_{R1} tem máximo na região entre as branas, indicando-nos que temos uma pequena probabilidade de observar modos massivos de mão direita dentro das paredes onde o universo é realizado, enquanto que para o modo massivo de mão esquerda, α_{L1} , a densidade de probabilidade é pronunciada no núcleo das branas.

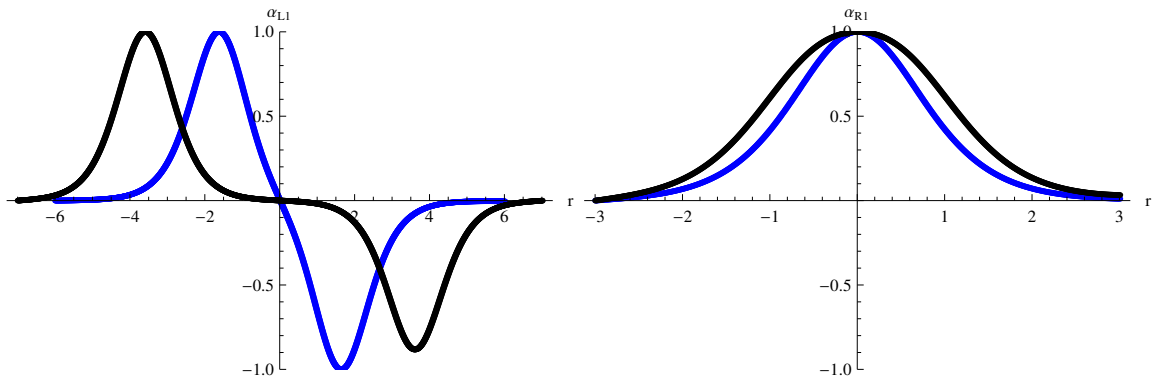


Figura 3.9: α_{L1} (lado esquerdo) e α_{R1} (lado direito) no caso $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ para $L = 1.6$ (linha azul) e para $L = 3.6$ (linha preta).

Na figura (3.10) vemos que o autovalor m_1^2 decresce suavemente à medida que L vai crescendo; o que é um resultado esperado quando se está lidando com potenciais poço duplo na mecânica quântica não-relativista. Os estados excitados α_{L1} e α_{L0} são próximos para valores de L muito grandes, são estados quasidegenerados. Os autovalores de energia associado a α_{L1} em função de L podem ser apreciados na tabela (3.1). Fizemos uso do método de Numerov para obter estes resultados.

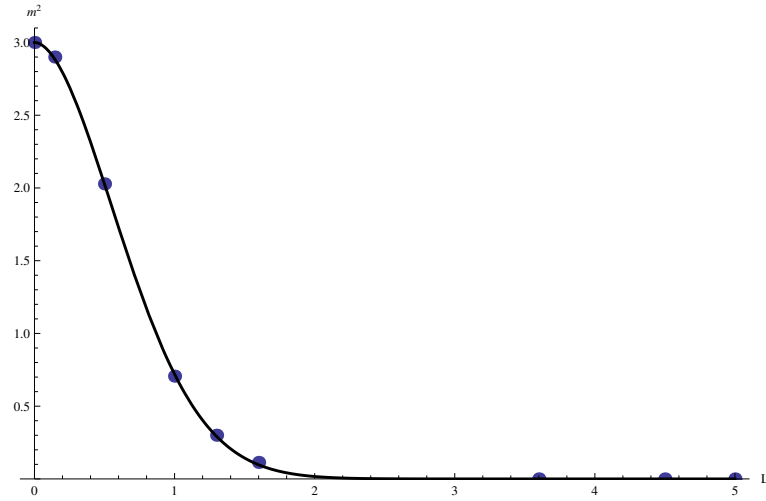


Figura 3.10: Autovalores de energia m_1^2 do primeiro estado excitado α_{L1} em função de L. Obtidos numericamente por meio de cálculos numéricos. (ver tabela 3.1)

Tabela 3.1: Tabela dos autovalores de energia do primeiro estado excitado α_{L1} (figura 3.10)

L	m_1^2
0.001	3.0
0.145	2.9
0.5	2.02818
1.0	0.70619
1.3	0.30025
1.6	0.11344
3.6	0.00011443
4.5	0.00001903
5.0	0.0000001953

Na figura (3.11) um segundo estado excitado pode ser observado à medida que L cresce. Os autovalores de energia associada a α_{L2} em função de L podem ser observados na tabela (3.2)

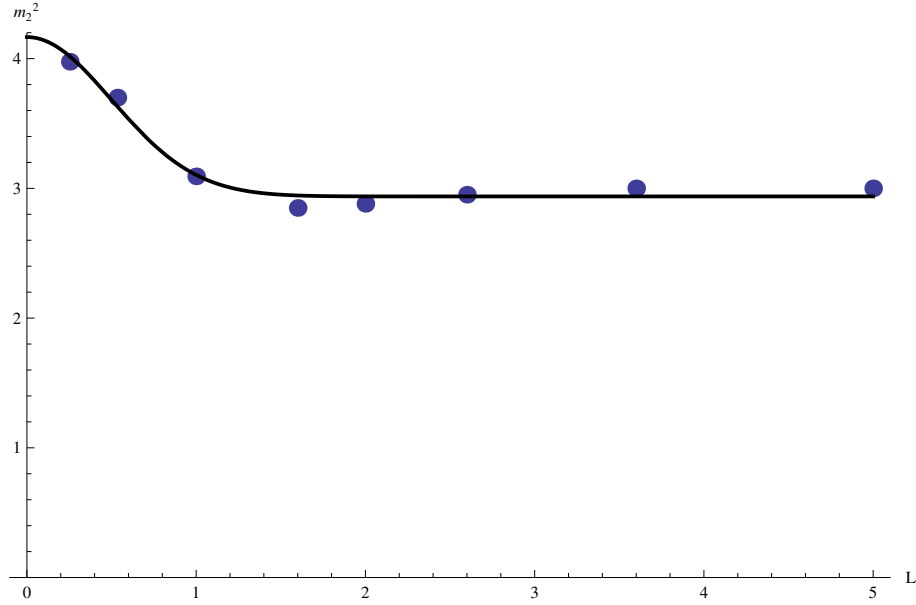


Figura 3.11: Autovalores de energia do segundo estado excitado α_{L2} em função de L .

Tabela 3.2: Tabela dos autovalores de energia do segundo estado excitado α_{L2} (figura 3.11).

L	m_2^2
0.2535	3.976
0.53475	3.7
1.0	3.09255
1.6	2.8491
2.0	2.8808
2.6	2.951
3.6	3.0
5.0	3.0

Estes dados tabulados foram encontrados com o método de Numerov para o primeiro e segundo estado excitado. Observamos que à medida em que o potencial $U_{L,R}(r)$ (3.8) vai se separando novos estados excitados aparecem. Os estados espalhados localizados na borda do potencial $U_{L,R}(r)$ descem para formar um novo estado ligado ao potencial supersimétrico, tal como podemos apreciar nas figuras (3.10) e (3.11), respectivamente.

3.2.1 Estados massivos mistos

Baseados nos resultados numéricos encontrados com o método de Numerov para os estados excitados α_{L0} e α_{L1} , construímos um estado massivo misto de quiralidade esquerda a partir da mistura entre estes estados excitados, da seguinte forma

$$\Psi_{L,mix}(x,t) = N(\alpha_{L0}(r) + \alpha_{L1}(r)e^{-im_1t})\chi_L, \quad (3.29)$$

onde χ_L é um espinor constante o qual satisfaz $\gamma^5\chi_L = -\chi_L$. Um caso semelhante é encontrado na literatura no estudo quântico da molécula da amônia (NH_3). Neste estudo, um potencial efetivo tipo poço duplo é usado para descrever a inversão de um átomo de nitrogênio ao passar através de uma barreira formada pelos 3 átomos de hidrogênio por meio do efeito tunel. Podemos mostrar este exemplo através da densidade de probabilidade dependente do tempo, construída por meio da superposição de duas funções de onda simétrica e antisimétrica geradas por um pequeno *splitting* de energia, o qual simula a transição das moléculas de amônia de uma parede de domínio para a outra [72]. A construção do estado massivo misto é baseado no argumento de tunelamento da molécula de amônia.

Somos cuidadosos ao propor este estado misturado, visto que, estamos supondo que existe um sistema de referência em repouso para as partículas em estado mistos. Baseados neste raciocínio, a equação de Dirac $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{L,mix} = m_n\psi_R$ é satisfeita, já que $m_1\gamma^0\chi_L e^{-im_1t} = m_1\chi_R e^{-im_1t}$, ($\gamma^5\chi_R = \chi_R$), e não apresenta partículas sem massivas de mão direita, nem fora nem dentro das branas. A densidade de probabilidade $\rho(r,t)$ associado ao estado misturado é dada

$$\rho(r,t) = N^2(\alpha_{L0}^2(r) + \alpha_{L1}^2(r) + 2\alpha_{L0}(r)\alpha_{L1}(r)\cos(m_1t)), \quad (3.30)$$

ou seja, é uma densidade de probabilidade oscilante com período de oscilação é $T = h/m_1c^2$. Fazendo uso do método de Numerov, calculamos numericamente o comportamento da densidade $\rho(x,t)$, o qual pode ser vista na figura (3.12). No instante inicial ($t = 0$), o férmion exibe uma máxima probabilidade na brana esquerda. À medida que o tempo cresce, $t > 0$, a probabilidade na brana esquerda decresce e aumenta a probabilidade na brana direita. O tunelamento ocorre em um tempo $t = T$, sempre e quando seja máxima a probabilidade de encontrar o férmion na brana direita.

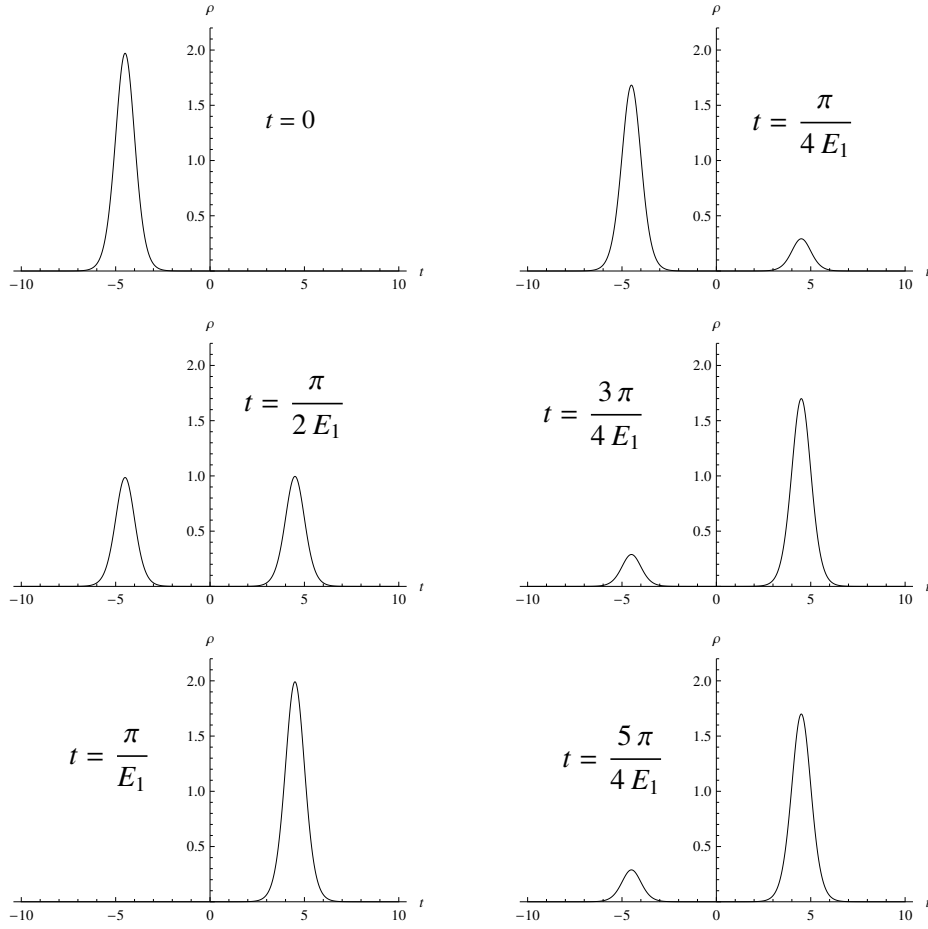


Figura 3.12: Perfil de $\rho(r, t)$ para distintos valores de t .

3.3 Comentários sobre a localização de férmions

Estudamos ao longo deste capítulo o mecanismo da localização de férmions em branas que exibem separação, em cenários com geometria *warped* (Randall-Sundrum), e geometria plana (Rubakov-Shaposhnikov). A brana ou parede de domínio é imersa no espaço-tempo de 4+1 dimensões e é definida pelo comportamento de um campo escalar acoplado com a gravidade no caso de espaço-tempo *warped*. O potencial não-polinomial de um campo escalar auto-interagente o qual gera a separação entre as branas foi introduzido para descrever a localização [26], mas qualquer outro modelo por exemplo, o potencial ϕ^6 , pode ser utilizado para a localização sempre que seja um modelo não-linear em teoria de campos e possua uma solução solitônica deformável.

Por outro lado, observamos que é mais fácil trabalhar com geometria plana do que com a geometria *warped*, pois com geometria plana é possível obter os modos não-massivos e massivos de maneira fácil. Além disso, no cenário de Rubakov-Shaposhnikov podemos ver que o acoplamento funcional $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\phi}$ leva a uma supersimetria em mecânica quântica, a qual é um reflexo da SUSY, a um nível fundamental entre férmions e bra-

nons (excitações da brana). O acoplamento $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\phi}$ fornece um comportamento conveniente para os férmions não-massivos, qual seja os modos-zero fermiônicos que acompanham a separação das branas, onde o pico destes modos estão localizados nos núcleos das branas. O acoplamento $F(\bar{\phi}) = \eta\bar{\phi}(r)$ há uma probabilidade de localizar modos-zero em branas duplas. Os modos-zero se localizam na região entre as branas, e não no interior das branas, tal como foi observado na figura (3.1) lado esquerdo.

Outra análise feita é a localização de férmions não-massivos em uma das branas. Para tal fim, adicionamos uma constante de massa $M = \frac{1}{2} \tanh(2L)$ de 5 dimensões que permitiu a localização em uma das branas. Baseados na SUSY verificamos que tal acoplamento não suporta estados localizados associados aos férmions massivos. Não obstante, no caso de $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\phi}$ os modos massivos podem ser localizados na brana no espaço-tempo plano (Rubakov-Shaposhnikov). Em nosso estudo, analisamos o comportamento dos estados massivos, observando que férmions massivos podem eventualmente se tunelar entre as branas. Também observamos que o número de estados massivos localizados depende da profundidade do poço potencial determinada pela constante de acoplamento de Yukawa η e da largura do potencial efetivo L , o que depende do modelo em teoria de campos a lidar. Vale mencionar que a constante de acoplamento de Yukawa η foi fixada em nosso modelo.

Capítulo 4

Reconstrução de defeitos deformados em teoria de campos a partir da deformação de modos-zero

Neste capítulo tratamos modelos não-lineares com um campo escalar auto-interagente em $1 + 1$ dimensões do espaço-tempo e que forneçam soluções clássicas de energia mínima do tipo kink deformável a soluções tipo kink duplo. Descreveremos um método de construção de modelos não-lineares em teoria de campos, baseados em [45]. Esta publicação considera a solução de modo-zero do espectro de excitação do defeito como ponto de referência para o processo de reconstrução de modelos em teoria de campos.

Visamos neste capítulo a construção de novos modelos não-lineares em teoria de campos que forneçam soluções clássicas de energia mínima com perfil kink duplo e que possam ser usadas para a descrever a separação entre as paredes de domínio e a formação de uma fase desordenada chamada de *wetting* (molheada). Esta fase cresce à medida que se aproxima da temperatura crítica do sistema, o que é chamado de *complete wetting* (completamente molhado) [17]. Este tipo de fenômeno ocorre em materiais paramagnéticos [51], ferroelétricos [43], assim como na supersimetria na QCD [18].

4.1 Aspectos gerais de modelos não-lineares em teoria de campos

Diversos modelos não-lineares em teoria de campos (MNLTC) descritos em 1+1 dimensões do espaço-tempo são representados pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - U(\phi), \quad (4.1)$$

onde o índice espacial e temporal são representados por $\nu = 0, 1$ e $U(\phi)$ representa o potencial de auto-interação, o qual admite soluções clássicas exatas $\bar{\phi}(x, t)$ que são conhecidas como soluções solitônicas, tal como foi discutido na literatura [55],[77],[85].

A existência destas soluções solitônicas depende das exigências que o potencial $U(\phi)$ tem que satisfazer na maioria dos casos. O potencial $U(\phi)$ possui ao menos dois mínimos globais e é não-negativo. Na configuração estática do campo, ou seja, $\phi = \phi(x)$ a equação de movimento é dada por

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dU(\phi)}{d\phi}, \quad (4.2)$$

e as soluções da equação de movimento são chamadas de kink(antikink), as quais são soluções de energia mínima que conectam os dois mínimos do potencial. Quando o potencial $U(\phi)$ é escrito na forma de supersimetria, a saber $U(\phi) = W_\phi^2/2$. $W(\phi)$ é chamado de superpotencial.

Podemos expressar a energia para a configuração de campo estática em termos do superpotencial

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 \mp 2 \frac{d\phi}{dx} W_\phi^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde a energia de Bogomol'nyi se torna mínima quando o primeiro termo vai a zero

$$\frac{d\phi}{dx} = \mp W_\phi, \quad (4.4)$$

obtendo a equação diferencial de primeira ordem, que é solução da equação diferencial de segunda ordem.

A energia de Bogomol'nyi está associada à diferença dos superpotenciais avaliados nos

extremos assintóticos

$$E_B = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi W_\phi = |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))|, \quad (4.5)$$

e é chamada de energia de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield [16],[74] ou chamada também de energia BPS. Dizemos que (4.4) satura o limite de Bogomol'nyi.

As soluções de energia mínima são estáveis sob pequenas perturbações em torno da solução clássica da forma

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \sum_n \psi_n(x) e^{-i\omega_n t}, \quad (4.6)$$

e mantendo termos quadráticos na ação. Usando a equação de movimento encontramos que as flutuações $\psi_n(x)$ satisfazem a equação de Schrödinger independente do tempo

$$-\psi_n''(x) + U_{\phi\phi}(\phi)\psi_n(x) = \omega_n^2\psi_n(x), \quad (4.7)$$

também chamada de equação de estabilidade, com

$$U_{\phi\phi}(\phi) = W_{\phi\phi} + W_\phi W_{\phi\phi\phi} |_{\phi=\bar{\phi}} = W_{\phi\phi} \pm \frac{d}{dx} W_{\phi\phi} |_{\phi=\bar{\phi}} \quad (4.8)$$

onde o sinal (\pm) corresponde à solução (4.4) com sinal superior e inferior.

A equação tipo Schrödinger pode ser fatorada como o produto de dois operadores adjuntos um do outro [27]

$$H\psi_n = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}\psi_n = \omega_n^2\psi_n, \quad (4.9)$$

onde

$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{d}{dx} - \omega(x) \quad \text{e} \quad \mathcal{M} = -\frac{d}{dx} - \omega(x), \quad (4.10)$$

e o superpotencial da mecânica quântica é $\omega(x) = \mp W_{\phi\phi} |_{\phi=\bar{\phi}(x)}$. A fatoração da equação de Schrödinger nos permite mostrar que $\omega_n^2 \geq 0$.

Para o caso de $\omega_0 = 0$, temos $\mathcal{M}\psi_0 = 0$

$$-\frac{d}{dx}\psi_0 \mp W_{\phi\phi} |_{\bar{\phi}} \psi_0 = 0, \quad (4.11)$$

pelo que

$$-\frac{d}{dx}\psi_0 = \pm W_{\phi\phi} |_{\bar{\phi}} \psi_0. \quad (4.12)$$

A seguir desenvolvemos o formalismo matemático de reconstrução de modelos e logo discutiremos as aplicações do método de reconstrução.

4.2 Método de reconstrução dos MNLTC

Nesta seção usaremos o método empregado em [19] e [45] para a reconstrução de alguns MNLTC, cuja solução clássica de energia mínima exhibe perfil kink duplo. As soluções kink duplo aparecem em muitos contextos da física, por exemplo: nas primeiras tentativas de descrever os hádrons como sólitons, particularmente no modelo de duas sacolas [23]. Na descrição teórica da separação de paredes de domínio em alguns materiais paramagnéticos [51] e ferroelétricos [43], e também para descrever o fenômeno da separação em cenários de mundos-brana [17]. O estudo de modelos deformados aplicados a cenários de mundos-brana foi abordado em [8], onde foi proposto um método de deformação, o qual consiste em um mapeamento de um MNLTC para outro modelo cujas soluções são bem conhecidas, outros modelos construídos neste capítulo foram obtidos por outros métodos de deformação tais como [3],[8],[9],[10],[13]. Em nossa abordagem de reconstrução, consideramos um modo-zero deformado. Este modo-zero deformado é construído a partir da superposição de duas cópias de modo-zero de um modelo bem estabelecido. Esta autofunção de modo-zero apresenta dois picos, cada um localizado em lados opostos da origem, e são colocados em forma simétrica em $x = \pm L$. Consideramos estas como autofunção de energia zero de uma nova equação de estabilidade. A solução clássica de energia mínima e o MNLTC são obtidos pelo modo-zero deformado.

Descrevemos MNLTC deformados tais como seno-Gordon, ϕ^4 tipo I e II, modelos de simetrização do potencial de Scarf-II, e suas aplicações tanto na descrição de materiais paramagnéticos e ferroelétricos, como cenários de mundos-brana, especificamente em modelos com separação de branas.

4.3 Reconstrução do MNLTC a partir dos modos-zero.

Nesta seção discutiremos o método de construção de um MNLTC a partir do modo-zero. Observemos que o modo-zero é obtido via $\mathcal{M}\psi_0 = 0$, que é $-\frac{d}{dx}\psi_0 = \pm W_{\phi\phi}|_{\bar{\phi}}\psi_0$ (equação (4.12)), desta expressão é fácil observar que o modo-zero pode ser escrito na forma:

$$\psi_0(x) = \pm N W_{\phi}|_{\phi=\bar{\phi}(x)} = N \frac{d\bar{\phi}}{dx}, \quad (4.13)$$

onde $N = E_{BPS}^{-1/2}$ é a constante de normalização. Portanto, dada uma solução de modo-zero associada a um problema quântico não-relativista, cujo espectro é não negativo,

integramos a equação (4.13)

$$\bar{\phi}(x) \propto \int^x \psi_0(y) dy, \quad (4.14)$$

para obter a solução kink (antikink) do respectivo MNLTC. Fazemos a escolha de uma constante de integração conveniente, que esteja relacionada com os mínimos do potencial da teoria de campos. Procuramos neste mecanismo por funções inversíveis de $\bar{\phi}(x)$, escrevendo x como função de $\bar{\phi}$. Podemos expressar o potencial da teoria de campos em função da solução clássica da forma

$$U(\bar{\phi}) = \frac{1}{2} W_{\bar{\phi}}^2 \equiv \frac{1}{2} \psi_0^2(x(\bar{\phi})). \quad (4.15)$$

Por outro lado, podemos estender o domínio de $U(\bar{\phi})$ sempre que seja contínuo e limitado inferiormente, já que apresenta uma estrutura periódica como é o caso do modelo seno-Gordon, Scarf II, ou apresenta os mínimos unicamente pelo comportamento assintótico de $\bar{\phi}$. O potencial da teoria de campos pode ser escrito como

$$U(\phi) = \frac{W_{\phi}^2}{2} \equiv \frac{1}{2} \psi_0^2(x(\phi)). \quad (4.16)$$

Desta forma, lembramos que a partir das equações (4.13) e (4.14) temos duas constantes arbitrárias de integração que estão associadas à fase e amplitude de $\bar{\phi}(x)$, de tal forma que o modelo em teoria de campos não é único. Observamos que estas constantes implicam deslocamento sobre os mínimos e redimensionamento do modelo em teoria de campos. Aquelas constantes não afetarão a positividade nem o número de mínimos no potencial. As constantes serão postas a mão ao final dos cálculos de cada exemplo de acordo com o modelo que desejamos reconstruir.

Na seção seguinte descreveremos a aplicabilidade do método de reconstrução para alguns modelos conhecidos.

4.3.1 Modelo de seno-Gordon deformado

O modelo seno-Gordon é um dos modelos mais estudados na teoria de campos clássicos não-lineares, pois fornece soluções exatas. O modelo seno-Gordon deformado a investigar é uma modificação do modelo seno-Gordon original cuja autofunção de modo-zero é $\psi_0(x) = \text{sech}(x)$. Para a construção da autofunção do seno-Gordon deformado, pensamos na junção de dois modos-zero associados à equação de estabilidade do modelo seno-Gordon original,

um localizado em $x = L$ e outro localizado em $x = -L$

$$\psi_0(x) = \operatorname{sech}(L + x) + \operatorname{sech}(L - x). \quad (4.17)$$

A solução clássica é obtida a partir da equação (4.14)

$$\bar{\phi}(x) = 2 \left[\tan^{-1} \left(\tanh \left(\frac{L + x}{2} \right) \right) - \tan^{-1} \left(\tanh \left(\frac{L - x}{2} \right) \right) \right] - \pi, \quad (4.18)$$

onde escolhemos a constante de integração convenientemente, de tal maneira que o resultado do potencial em teoria de campos reproduza o modelo de seno-Gordon para $L = 0$.

Na figura (4.1) mostramos os perfis da autofunção ψ_0 (lado esquerdo) para dois diferentes valores de L , observando que para $L = 0$ o modo-zero fica localizando em torno de $r = 0$. Agora, para $L = 6.1$ o pico de modo-zero fica localizado nos núcleos de cada parede de domínio. O perfil da solução tipo kink pode ser observada no (lado direito) para dois diferentes valores de L . Para $L = 0$ mostra um perfil tipo kink, agora para $L = 4.5$ mostra um perfil tipo kink duplo (2-kinks).

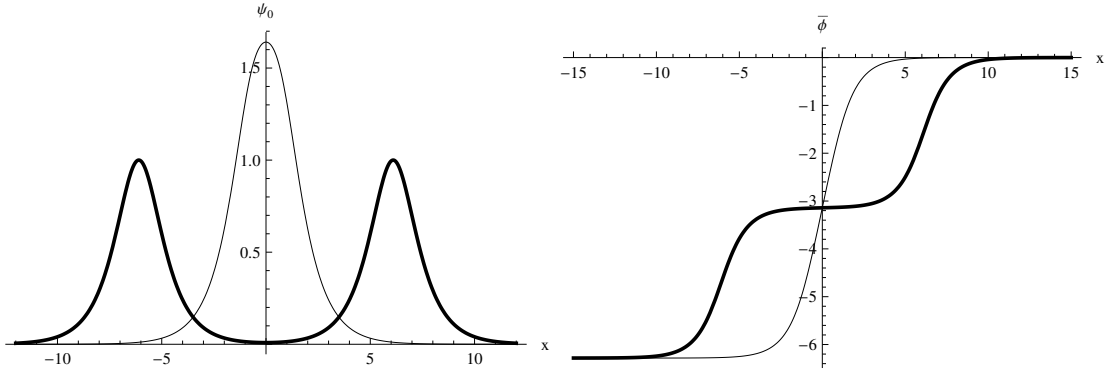


Figura 4.1: Lado esquerdo: modo-zero deformado correspondente à eq.(4.17) para $L = 0.5$ (linha fina) e $L = 6.1$ (linha espessa). Lado direito: Perfil tipo kink da eq. (4.18) para $L = 0.65$ (linha fina), e $L = 4.5$ (linha espessa).

Invertendo x como função de $\bar{\phi}$ e usando (4.16), obtemos

$$U_{ds-G}(\phi) = 2 \left[\cot^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) + \operatorname{sech}^2 L \right] \sin^4 \left(\frac{\phi}{2} \right). \quad (4.19)$$

Para $L = 0$ o modelo seno-Gordon é recuperado. Um modelo seno-Gordon deformado foi anteriormente obtido no primeiro trabalho em [10]-[9],[13],[14] usando outro método de deformação.

O perfil do potencial pode ser observado na figura (3.2). O modelo apresenta uma estrutura periódica de mínimos globais em $\phi = 2n\pi$ com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ para o

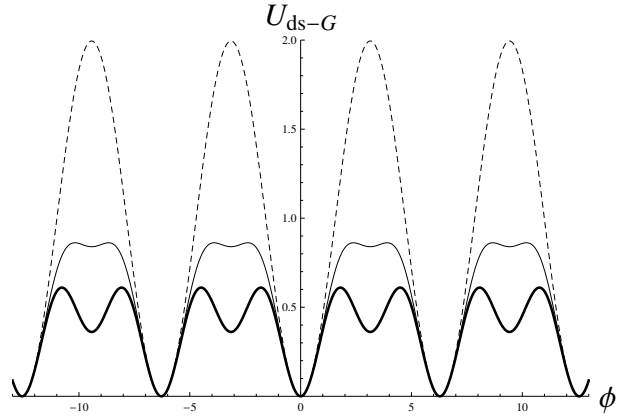


Figura 4.2: Potencial do modelo seno-Gordon deformado, eq. (4.19), para $L = 0.05$ (linha tracejada), $L = 1.0$ (linha fina) e $L = 1.5$ (linha grossa).

caso em que $\tanh(L) \leq 1/\sqrt{2}$. No caso de $\tanh(L) > 1/\sqrt{2}$ pode-se observar um mínimo local entre os dois mínimos globais vizinhos, sendo que este mínimo local vira um mínimo global quando $L \rightarrow +\infty$. Portanto, podemos dizer que o modelo (4.19) é uma deformação do modelo seno-Gordon, no caso $L = 0$.

4.3.2 Modelo ϕ^4 deformado I

O modelo ϕ^4 é o modelo mais usado na literatura, as aplicações deste modelo são inumeráveis, podemos citar por exemplo: Materia condensada, modelos cosmológicos, entre outros. O modelo ϕ^4 deformado I é uma modificação do modelo ϕ^4 original, cuja auto-função de energia nula é $\psi_0 = \text{sech}^2(x)$. Ao igual que no modelo seno-Gordon pensamos na junção de dois modos-zero do modelo ϕ^4 , um localizado em $x = L$ e outro em $x = -L$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2} (\text{sech}^2(L - x) + \text{sech}^2(L + x)). \quad (4.20)$$

A integração desta expressão leva a seguinte solução clássica

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{2} (\tanh(L + x) + \tanh(x - L)) = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x) + \cosh(2L)}. \quad (4.21)$$

Dado que nossa solução clássica é inversível e usando (4.16), podemos expressar o potencial da teoria de campos na forma

$$U_{d\phi^4-1}(\phi) = \frac{2(\phi^2 - 1)^2 (1 + (\phi^2 - 1) \tanh^2 2L)}{\left(1 + \sqrt{1 + (\phi^2 - 1) \tanh^2 2L}\right)^2}. \quad (4.22)$$

Deste modo, o potencial apresenta dois mínimos globais para $\phi = \pm 1$ no caso $\tanh 2L \leq \sqrt{3}/2$; e para $\tanh 2L > \sqrt{3}/2$, exibe um mínimo local em $\phi = 0$, o qual vira um mínimo global quando $L \rightarrow \infty$. Embora o modelo apresente 3 mínimos globais, não foi possível reproduzir o modelo ϕ^6 da teoria de campos. A seguir mostramos a reconstrução de um MNLTC alternativo ao modelo (4.22) que recupera satisfatoriamente os modelos usuais com 2 e 3 mínimos globais para $L = 0$ e $L \rightarrow \infty$, respectivamente.

4.3.3 Modelo ϕ^4 deformado II

A construção deste modelo surgiu da finalidade de encontrar um modelo MNLTC deformado que possa reproduzir o modelo ϕ^6 com três vácuos. O seguinte modelo ϕ^4 deformado II o construímos da seguinte forma:

$$\psi_0(x) = \frac{\cosh^2 L \cosh(x)}{(\sinh^2 L + \cosh^2(x))^{3/2}}. \quad (4.23)$$

Podemos observar que para $L = 0$, temos a autofunção $\psi_0(x) = \text{sech}^2(x)$ própria de um modelo ϕ^4 . A solução clássica obtida ao integrar (4.14) é

$$\phi(x) = \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\sinh^2 L + \cosh^2(x)}}, \quad (4.24)$$

e o potencial deformado correspondente à teoria clássica de campos pode ser expresso como

$$U_{d\phi^4-II}(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2 ((\phi^2 - 1)\tanh^2 L + 1). \quad (4.25)$$

Este modelo apresenta dois mínimos globais em $\phi = \pm 1$, para o caso que $\text{sech}(L) \geq 1/\sqrt{3}$. Quando $\text{sech}(L) < 1/\sqrt{3}$ temos um mínimo local em $\phi = 0$, que vira mínimo global quando $L \rightarrow \infty$. Este tipo de modelo MNLTC em particular recupera o modelo ϕ^4 para $L = 0$ e o modelo ϕ^6 para $L \rightarrow \infty$. Modelos MNLTC similares a (4.25) foi construído em [8] usando outro método de deformação.

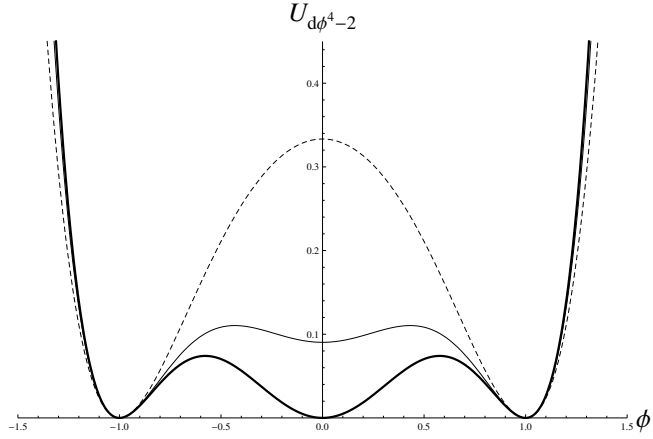


Figura 4.3: O potencial da teoria de campos da equação (4.25), para $L = 0.65$ (linha pontilhada), $L = 1.5$ (linha fina) e $L = 10.5$ (linha grossa).

4.3.4 Simetrização do potencial Scarf-II da mecânica quântica e um novo MNLTC deformado

O modelo apresentado nesta seção está relacionado com a simetrização do potencial Scarf-II e está associado à equação de estabilidade de um dos MNLTC estudados em [45] e [63]. A simetrização do potencial Scarf-II foi o resultado da simetriação da autofunção de modo-zero $\psi_0(x) = \text{sech}(x) \exp(\beta \tan^{-1}(\sinh(x)))$, com $\beta > 0$, dando origem à seguinte autofunção de energia nula da equação de estabilidade do modelo deformado que pretendemos construir

$$\psi_0(x) = N \text{sech}(x) \cosh(\beta \tan^{-1}(\sinh x)). \quad (4.26)$$

Devido à simetriação a autofunção ψ_0 apresenta um comportamento similar aos modelos anteriormente discutidos. A separação do modo-zero é controlada pelo parâmetro $\beta > 1$. Nesse caso a solução tipo clássica tipo kink dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{\beta} \sinh(\beta \tan^{-1}(\sinh x)), \quad (4.27)$$

a qual pode ser continuamente deformada em kink duplo. Seguindo o processo de reconstrução, encontramos um novo MNLTC deformado dado por

$$U(\phi) = \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{1}{\beta} \sinh^{-1}(\beta \phi) \right) (1 + \beta^2 \phi^2), \quad (4.28)$$

cujos comportamentos para dois diferentes valores de β é mostrado na figura (4.4).

Este modelo, assim como o modelo seno-Gordon deformado, apresenta um número infinito de mínimos para $\bar{\phi} = \pm(1/\beta) \sinh((2n + 1)\pi\beta/2)$, com $\beta > 0$ e n como número

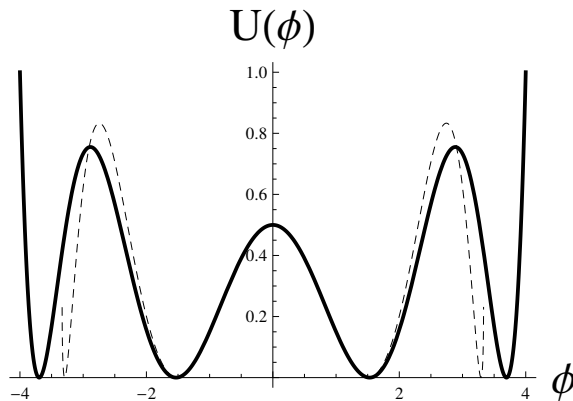


Figura 4.4: Perfil do potencial da equação (4.28), para $\beta=0.25$ (linha sólida) e $\beta=0.3$ (linha tracejada).

inteiro não negativo. Qualquer par de mínimos vizinhos podem ser conectados através da generalização da solução (4.27), na forma

$$\phi_n(x) = \pm \frac{1}{\beta} \sinh \beta(n\pi + \tan^{-1}(\sinh x)), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.29)$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde às soluções que conectam os mínimos positivos (negativos).

Estas soluções representam os diferentes setores topológicos. Cada um destes setores é especificado por um valor da energia BPS: $E_{BPS(n)} = 1 + \cosh(\pi\beta) \cosh(2n\pi\beta)/(1 + 4\beta^2)$, contrário ao modelo seno-Gordon, cujos setores topológicos são degenerados devido aos vácuos vizinhos serem equidistantes uns dos outros. Além disso, podemos perceber que o setor topológico com menor energia BPS, conecta os mínimos $\pm \bar{\phi}_0 = \pm \sinh(\beta\pi/2)/\beta$ e, é o único cujas soluções clássicas não triviais exibem perfil de kink duplo.

4.4 Aplicações dos modelos MNLTC deformados

O potencial ϕ^6 , obtido em (4.25), é um bom candidato para descrever qualitativamente a separação de domínios e a formação de uma fase desordenada e homogênea chamada de *complete wetting*. De fato, os parâmetros do potencial deveriam depender da temperatura, enquanto que em (4.25) a dependência é só do parâmetro L , o qual poderia ser pensado como portador da dependência com a temperatura. Em (4.25), observamos que para $L = 0$ corresponde à temperatura inicial do sistema e para $L < \text{sech}^{-1}(1/\sqrt{3})$ significa que a temperatura do sistema é menor que a temperatura T_0 , que é o limite de estabilidade da fase homogênea, enquanto que em $L = \text{sech}^{-1}(1/\sqrt{3})$ o sistema está à temperatura T_0 (temperatura da fase *wetting*). Isto acontece quando a separação da parede

de domínio é manifestada. A temperatura do sistema aumenta conforme a distância das interfaces (domínios) aumenta. O aumento da separação das interfaces vai até $L \rightarrow \infty$, o que significaria que a temperatura do sistema aproxima-se da temperatura crítica do sistema T_C , implicando o crescimento da fase desordenada *complete wetting* (completamente molhado) [62] e a separação entre os domínios.

Na seção (2.2) foi apresentado um modelo não-linear em teoria de campos com um único campo escalar que é deformável em kink duplo. Este modelo em particular foi aplicado em mundos-brana e usado para descrever a separação entre as branas. A característica deste modelo como os modelos polinomiais muito usados na literatura é não serem limitados inferiormente. Mas existe outros modelos limitados inferiormente como é o caso do modelo seno-Gordon deformado discutido na seção (4.3.1), onde $W_\phi = 2\sqrt{\cot^2(\phi/2) + \text{sech}^2 L \sin^2(\phi/2)}$ é o mais adequado para descrever a solução analítica de *splitting brane* (separação da brana), e proporciona um potencial $V(\phi)$ limitado inferiormente. Na figura 4.5 mostramos o comportamento de $V(\phi)$ para alguns valores de L .

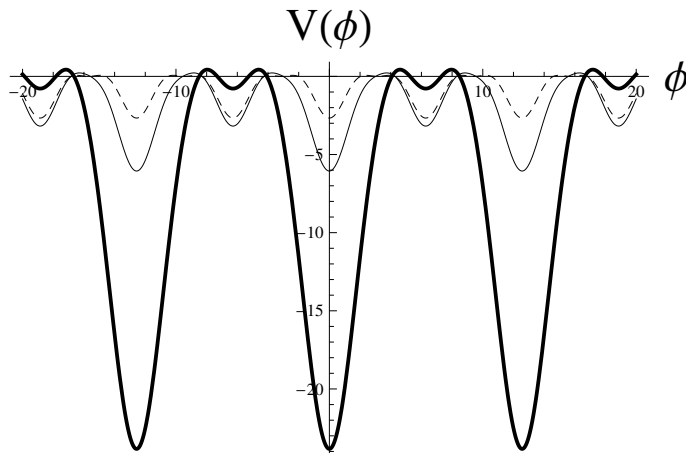


Figura 4.5: O potencial de teoria de campos (2.6) com $W(\phi)$ correspondente ao modelo seno-Gordon deformado, para $L = 10.5$ (linha tracejada), $L = 1.5$ (linha fina) e $L = 0.65$ (linha grossa).

Cabe mencionar que os modelos estudados neste capítulo, apresentam uma peculiaridade que consiste no fato da solução clássica ser do tipo kink simples que se deforma continuamente em uma configuração tipo kink duplo, reproduzindo o fenômeno de separação de paredes de domínio (separação de branas) [17]. De fato qualquer destes modelos MNLTC poderiam ser aplicados em cenários de mundos-brana. No capítulo 2, foi abordado a localização de férmions na brana fazendo uso de um destes modelos não-lineares. Também observamos o modelo seno-Gordon deformado fornece um potencial que é limitado inferiormente e adequado para descrever a separação das branas.

Capítulo 5

Localização de campos vetorial e tensorial em branas espessas

Neste capítulo estudamos a localização de campos vetoriais (de gauge) e tensorial em branas espessas. A localização de campo de gauge no espaço *warped* foi estudada em [36], onde não foi possível a localização na brana por meio unicamente da curvatura, pelo que a ação em 4+1 dimensões não é normalizável. Uma alternativa para contornar este problema é introduzindo um campo escalar dilatônico, possibilitando a localização do modo-zero de campo de gauge na brana [22, 60].

Nesta seção discutimos a localização introduzindo uma função suave da configuração clássica de mínima energia que leva à localização do campo da gauge, de maneira alternativa ao acoplamento dilatônico mencionado acima. Esta função suave funcionaria como uma função dielétrica.

Também analisamos nesta seção a localização de campo tensorial antissimétrico de rank-2, chamado na literatura de campo de Kalb-Ramond (K-R) [57]. Para a localização do campo de K-R introduzimos o mesmo procedimento da localização de campo de gauge, permitindo localizar o modo-zero tensorial na brana.

5.1 Localização de campo vetorial

Nesta seção discutiremos a localização de campos vetoriais (campo de gauge) em branas espessas. Este tipo de problema foi estudada na literatura em cenários de espaço *warped* [36]. Onde foi mostrado que nem sempre é possível conseguir a localização do campo de gauge na parede de domínio unicamente pela curvatura do espaço-tempo (*warped factor*).

Diante dessa dificuldade outros modelos foram propostos para a localização do campo de gauge como é o caso do acoplamento dilatônico descritas por Kehagias-Tamvakis [60], Teixeira Cruz e Almeida [21] entre outros. Por outro lado propomos a localização de campo de gauge acoplando um campo escalar que gera a brana com o campo de gauge abeliano [25]. Esta função de campo escalar tem algumas propriedades específicas que conduz à localização de campo vetorial (campo de gauge).

Iniciamos nossa discussão definindo na ação do campo gauge o acoplamento entre o tensor de campo F_{MN} com a gravidade em (4+1) dimensões que é dada por

$$S = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{g} F^{MN} F_{MN}, \quad (5.1)$$

com $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$, e os índices gregos correm μ, ν de 0 a 3. O tensor intensidade de campo é dado por $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$.

A correspondente equação de movimento é dado na forma

$$\partial_Q (\sqrt{g} g^{QM} g^{RN} F_{MN}) = 0, \quad (5.2)$$

podemos expandir esta expressão

$$\partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) + \partial_4 (\sqrt{g} g^{4\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) = 0. \quad (5.3)$$

Estabelecendo as condições de gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$ e $A^4 = 0$, e decompondo o campo vetorial usando os modos de Kaluza-Klein $A_\mu(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_\mu(x) \alpha_n(r)$, onde $\alpha_n(r)$ são os modos de Kaluza-Klein e $A_\mu(x)$ é o potencial vetor que representa o campo vetorial.

Podemos expressar a equação de movimento (5.2) na forma:

$$m_n^2 \alpha_n(r) + e^{2A} (\alpha_n''(r) + 2A' \alpha_n'(r)) = 0, \quad (5.4)$$

onde o símbolo primo denota a diferenciação a respeito de r . A fim de definir um problema típico da mecânica quântica fazemos a seguinte transformação

$$\alpha_n(r) = e^{-\gamma(r)} g_n(r). \quad (5.5)$$

Mediante a identificação $2\gamma' = 2A'$, o termo de primeira ordem na equação (5.4) desaparece e temos como resultado uma equação tipo Schrödinger

$$-g_n''(r) + (\gamma'' + (\gamma')^2 - m_n^2 e^{-2A}) g_n(r) = 0. \quad (5.6)$$

Para o modo zero sem massa ($g_0 \equiv g$)

$$-g''(r) + (\gamma'' + (\gamma')^2)g(r) = 0, \quad (5.7)$$

o que conduz a $g(r) \sim e^\gamma$ e α_0 termina sendo constante. Substituindo em (5.2) podemos escrever a ação efetiva como

$$S = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dr \alpha_0^2(r) \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

Sendo $\alpha_0(r)$ uma constante, observamos que a ação efetiva é divergente, o que não permitiria garantir a existência de um modo-zero localizado para o campo de gauge [35], [36],[44]. Uma alternativa de contornar este problema é introduzir uma função suave $G(\bar{\phi})$ da configuração clássica de mínima energia que conduz à localização do campo de gauge.

$$S = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{g} G(\bar{\phi}) F^{MN} F_{MN}. \quad (5.9)$$

A correspondente equação de movimento é dada na forma

$$\partial_Q(\sqrt{g}G(\bar{\phi})g^{QM}g^{RN}F_{MN}) = 0, \quad (5.10)$$

podemos expandir esta expressão

$$\partial_\mu(\sqrt{g}G(\bar{\phi})g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}) + \partial_4(\sqrt{g}G(\bar{\phi})g^{4\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}) = 0. \quad (5.11)$$

Estabelecendo as condições de gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$ e $A^4 = 0$, e decompondo o campo vetorial usando os modos de Kaluza-Klein $A_\mu(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_\mu(x) \alpha_n(r)$, podemos expressar a equação de movimento (5.10) na forma:

$$m_n^2 \alpha_n(r) + e^{2A} \left(\alpha_n''(r) + \left(\frac{G'(\bar{\phi})}{G(\bar{\phi})} + 2A' \right) \alpha_n'(r) \right) = 0, \quad (5.12)$$

onde o símbolo primo denota a diferenciação a respeito r . A fim de definir um problema típico da mecânica quântica fazemos a transformação escrita em (5.5)

Mediante a identificação $2\gamma' = 2A' + G'(\bar{\phi})/G(\bar{\phi})$, o termo de primeira ordem da equação (5.12) desaparece e temos como resultado uma equação tipo Schrödinger

$$-g_n''(r) + (\gamma'' + (\gamma')^2 - m_n^2 e^{-2A})g_n(r) = 0. \quad (5.13)$$

Para o modo zero sem massa ($g_0 \equiv g$)

$$-g''(r) + (\gamma'' + (\gamma')^2)g(r) = 0, \quad (5.14)$$

o que conduz a $g(r) \sim e^\gamma$ e α_0 termina sendo constante. Substituindo em (5.9) podemos escrever a ação efetiva como

$$S = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dr \alpha_0^2(r) G(\bar{\phi}) \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (5.15)$$

Nota-se que se $G(\bar{\phi})$ fosse constante a ação efetiva diverge igual a (5.8). Devemos estabelecer algumas condições para a construção da função $G(\bar{\phi})$.

Primeiro notemos que não temos modos de massa negativa no espectro de campo de gauge. Isto pode ser visto ao escrever a equação (5.12) em termos da coordena conformal $z = \int d\zeta e^{-A(\zeta)}$, de modo que podamos expressá-lo como

$$-\frac{d^2 \tilde{g}_n(z)}{dz^2} + \tilde{V}(z) \tilde{g}_n(z) = m_n^2 \tilde{g}_n(z), \quad (5.16)$$

onde $\tilde{V}(z) = (d\tilde{\gamma}/dz)^2 - (d^2\tilde{\gamma}/dz^2)$, e usando a redefinição $\alpha_n(z) = e^{-\tilde{\gamma}(z)} \tilde{g}_n(z)$ com $(d\tilde{\gamma}/dz) = 1/2((1/G)(dG/dz) + (dA/dz))$. A equação diferencial para $\tilde{g}_n(z)$ pode ser fatorada como $DD^\dagger \tilde{g}_n(z) = m_n^2 \tilde{g}_n(z)$ onde $D = (d/dz) - (d\tilde{\gamma}/dz)$. Logo cada um dos autoestados normalizáveis tem $0 \leq \int dz |D^\dagger \tilde{g}_n(z)|^2 = m_n^2$. Portanto a função $G(\bar{\phi})$ é de fato estável.

Tomando como base os modelos de Julian Schwinger [83] e do Friedberg-Lee [46], construímos nossa motivação física para a construção da função $G(\bar{\phi})$.

A ideia de que o campo escalar neutro poderia ser efetivamente acoplado com o campo de gauge provém das observações do decaimento anômalo $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ por intermédio de férmions virtuais. Tal acoplamento efetivo foi encontrado por Julian Schwinger [83] acoplando o campo escalar neutro com o campo eletromagnético. Este último acoplamento efetivo poderia descrever o decaimento de um méson estacionário em dois fótons polarizados paralelos mediante um par virtual próton-antipróton, (Eq. (5.6) da referência [83]) $\mathcal{L} = (e^2/12\pi)(g/M)\phi F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Na tentativa de seguir essas ideias é importante salientar que uma simples substituição $G(\bar{\phi}) \propto \bar{\phi}(r)$ não é satisfatória para nosso problema, visto que, $\bar{\phi}(r)$ não é normalizável em todo o domínio da dimensão extra.

Friedberg-Lee propuseram um modelo fenomenológico [46] para explicar os efeitos não perturbativos da Cromodinâmica Quântica a baixas energias. Neste modelo, os hádrons são sólitons não-topológicos de um potencial não-linear em teoria de campos que envolve

um campo escalar fenomenológico σ , o qual se acopla aos quarks por meio do acoplamento tipo Yukawa, e glúons por meio da função dielétrica, dada por $\mathcal{L} = (-1/4)\kappa(\sigma)F_c^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^c$. No modelo de Friedberg-Lee a dependência de $\kappa(\sigma)$ sobre σ não é crucial, mas eles têm que satisfazer algumas condições de modo que o vácuo na QCD trabalhe como um meio dielétrico para um campo cromoeletrico e um meio antidiagnético para um campo cromomagnético, análogo ao efeito Meissner em supercondutores. Estas condições são $\kappa(0) = 1$, $\kappa(\bar{\sigma}) = 0$ e $d\kappa(\bar{\sigma})/d\sigma = 0$, onde $\bar{\sigma}$ é o valor esperado do campo escalar no vácuo da QCD. Tal condição será adequada para construir a função $G(\bar{\phi})$. Definimos $G(\bar{\phi}) = 1$ no núcleo da brana, e $\tilde{\alpha}$ pode ser convenientemente escolhida de tal modo que seja normalizável $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}^2 G(\bar{\phi}) dr = 1$. A outra condição sobre $G(\bar{\phi})$ é que a função $G(\bar{\phi}) \rightarrow 0$ mostrando um comportamento assintótico quando $(r \rightarrow \pm\infty)$, cuja solução clássica $\bar{\phi}(r \rightarrow \pm\infty)$ conecta os dois mínimos do potencial $V(\phi)$.

Encontramos que algumas funções satisfazem essas condições. Gostaria lembrar que o warp factor em si, poderia desempenhar o papel de uma função de peso que localiza grávitons na brana [15] e também satisfazem as condições impostas sobre $G(\bar{\phi})$. No entanto, já que também desejamos a localização de campo de gauge na brana imersa no espaço-tempo plano de $4 + 1$ dimensões (cenário de Rubakov-Shaposhnikov), temos que a equação (5.13) se reduz a

$$-g_n''(r) + (\gamma'' + (\gamma')^2)g_n(r) = m_n^2 g_n(r), \quad (5.17)$$

onde $\gamma' = G'(\bar{\phi})/2G(\bar{\phi})$. Esta equação é muito similar à equação para as excitações na brana (branons), cujo potencial efetivo $U_{eff} = (W_{\bar{\phi}\phi})^2 + W'_{\bar{\phi}\phi}$ em torno da solução clássica foi discutido no capítulo 2. Neste último caso o superpotencial da mecânica quântica é dado por [25]

$$\gamma' = W_{\bar{\phi}\phi}. \quad (5.18)$$

Além disso, as equações (5.17) e (5.18) também aparecem no caso da localização de férmions na brana no cenário de Rubakov-Shaposhnikov, quando o acoplamento de férmions com campo escalar é inspirado na supersimetria, ou seja, $W_{\bar{\phi}\phi}\bar{\Psi}\Psi$. Tal como mencionamos no capítulo 2, introduzimos uma função $G(\bar{\phi})$ de forma que seja possível associá-la à mecânica quântica para a localização de campo de matéria na brana. Assim, para manter esta recorrência também no caso da localização de campo de gauge na brana, definimos

$$\gamma' = G'(\bar{\phi})/2G(\bar{\phi}) = \kappa W_{\bar{\phi}\phi}, \quad (5.19)$$

sendo κ uma constante positiva. Isto nos conduz a

$$G(\bar{\phi}) \propto W_{\bar{\phi}}^{2\kappa}. \quad (5.20)$$

É importante ter em mente ao menos dois aspectos centrais das diferenças consideradas na analogia a ser proposta. No caso da Cromodinâmica Quântica, o fluxo elétrico de cor é mantido a uma dimensão exatamente pelo vácuo dielétrico (confinamento). Para nosso modelo, por meio da função $G(\bar{\phi})$ com uma condição de contorno adequada, o fluxo elétrico está concentrado na brana conduzindo à localização.

Além disso, como é bem sabido, o referido confinamento é realizado para campos de gauge não-abelianos. Esta é uma diferença importante que salienta o fato de que a analogia não deve ser tomada literalmente.

Em vez disso, veremos se as condições da função suave são semelhantes àsquelas da função dielétrica. Estabelecidas essas condições podemos definir a função suave $G(\bar{\phi})$ para ambos cenários plano e *warped*. Na Referência [80] temos que o potencial foi definido $V(\phi) = W_{\bar{\phi}}^2/2 = (\lambda/4)(\bar{\phi}^2 - m^2/\lambda)^2$, e cuja solução clássica é dada por $\bar{\phi} = (m/\sqrt{\lambda}) \tanh(mr/\sqrt{2})$. Portanto, obtém-se

$$G(\bar{\phi}) = \text{sech}^{4\kappa}(mr/\sqrt{2}). \quad (5.21)$$

Na equação (5.21) a função $G(\bar{\phi})$ é apropriada no espaço plano, de acordo com a nossa analogia e com as condições impostas sobre $G(\bar{\phi})$. Tal superpotencial, no entanto, não é adequado para cenários de mundos-brana em espaço *warped*, porque este implica em um potencial $V(\phi)$ não limitado inferiormente, como é dada na equação (2.6). No entanto, na seção 2.1 discutimos o modelo [49] cujo superpotencial foi definido $W(\phi) = 3bc \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3b}}\phi\right)$ e cuja solução clássica é $\phi(r) = \sqrt{6b} \arctan(\tanh(\frac{cr}{2}))$. Encontramos

$$G(\bar{\phi}) = \text{sech}^{2\kappa}(2cr). \quad (5.22)$$

Ambas funções $G(\bar{\phi})$ em (5.21) e (5.22) apresentam pico no núcleo da brana e exibem um perfil da forma de um sino estreito, de tal forma que são normalizáveis no domínio inteiro da dimensão extra.

No capítulo 3, foi abordada a localização em branas duplas, usando modelos não-lineares em teoria de campos. Qualquer destes modelos poderiam ser usados para modelar a localização de campos de gauge, onde a função $G(\bar{\phi})$ apresentará modos-zero nas duas branas.

5.2 Localização do campo de Kalb-Ramond

Analisamos nesta seção a possibilidade de localizar campo de Kalb-Ramond [57] na brana. No contexto de branas finas a localização do modo-zero do campo de Kalb-Ramond é interpretado como torção, e é altamente suprimido pela escala da dimensão extra [69]. No âmbito de branas espessas, o campo de Kalb-Ramond também foi pesquisado [84]. De fato em [84] demonstrou-se que não existe modo-zero tensorial localizado com o *background* de branas espessas usuais. Mostrou-se que, a fim de localizar o modo-zero, é necessário compor o *background* por uma brana descrita por dois campos reais escalares com estrutura interna, ou uma gravitação dilatônica. Este capítulo é dedicado ao uso apropriado da função $G(\bar{\phi})$ a fim de localizar o modo-zero do campo de Kalb-Ramond na brana.

Começamos definindo a lagrangiana de Kalb-Ramond na forma

$$S = -\frac{1}{12} \int \sqrt{g} G(\bar{\phi}) H_{MNL} H^{MNL}, \quad (5.23)$$

onde os índices M, N, L vão de 0 a 4 e μ, ν, ε vão de 0 a 3,

$$H_{MNL} = \partial_M B_{NL} + \partial_N B_{LM} + \partial_L B_{MN}, \quad (5.24)$$

é a intensidade de campo de Kalb-Ramond, e B_{MN} é o tensor antisimétrico

A equação de movimento para o campo B_{MN} é dada por

$$\partial_Q (\sqrt{g} G(\bar{\phi}) g^{MQ} g^{NR} g^{LS} H_{MNL}) = 0, \quad (5.25)$$

podemos expandir esta expressão

$$\partial_\mu (\sqrt{g} G(\bar{\phi}) g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\xi\varepsilon} H_{\alpha\beta\xi}) + \partial_4 (\sqrt{g} G(\bar{\phi}) g^{44} g^{\beta\nu} g^{\xi\varepsilon} H_{4\beta\xi}) = 0, \quad (5.26)$$

onde finalmente pode ser expressada como

$$e^{-2A} G(\bar{\phi}) \partial_\mu H^{\mu\nu\varepsilon} - \partial_4 (G(\bar{\phi}) H^{4\nu\varepsilon}) = 0. \quad (5.27)$$

Com a escolha de gauge $B^{\mu 4} = 0$, $\partial_\mu B^{\mu\nu} = 0$ e a decomposição dos campos como $B^{\nu\varepsilon} = \sum_{i=0}^n h^{\nu\varepsilon(n)}(x) U_n(r)$ temos

$$m_n^2 U_n(r) + e^{2A} \left(U_n''(r) + \frac{G'(\bar{\phi})}{G(\bar{\phi})} U_n'(r) \right) = 0. \quad (5.28)$$

Tal como no caso de campo de gauge, a fim de estabelecer um problema típico da mecânica quântica, é conveniente realizar a seguinte redefinição

$$U_n(r) = e^{-\omega(r)} h_n(r). \quad (5.29)$$

Por meio da identificação

$$\omega' = \frac{G'(\bar{\phi})}{2G(\bar{\phi})}, \quad (5.30)$$

obtemos a equação tipo Schrödinger

$$-h_n''(r) + (\omega'' + \omega'^2)h_n(r) = m_n^2 e^{-2A} h_n(r). \quad (5.31)$$

Para modo-zero não-massivo ($h_0 \equiv h$) temos simplesmente

$$-h''(r) + (\omega'' + \omega'^2)h(r) = 0, \quad (5.32)$$

a qual pode ser reescrita na forma operacional

$$\left(\frac{d}{dr} + \omega' \right) \left(-\frac{d}{dr} + \omega' \right) h(r) = 0. \quad (5.33)$$

Assim, temos $h(r) \sim e^\omega$ e por meio da equação (5.29), $U_0(r)$ acaba como uma constante α .

Substituindo em (5.23) podemos escrever a ação de K-R como

$$S = -\frac{1}{12} \int dr \alpha^2 e^{-2A} G(\bar{\phi}) \int d^4x h_{\alpha\beta\omega} h^{\alpha\beta\omega}. \quad (5.34)$$

Com a finalidade de reproduzir um comportamento assintótico AdS, o *warp factor* e^{2A} apresenta a forma gaussiana, com um pico no núcleo da brana. Assim, a função $G(\bar{\phi})$ converge muito mais rápido que e^{-2A} para permitir a localização do modo-zero de K-R na brana. Caso contrário, se $G(\bar{\phi})$ diminui mais lento que o crescimento e^{-2A} , observaríamos que a ação efetiva diverge e não permitiria garantir um modo-zero localizável para o campo de Kalb-Ramond. Podemos também incluir a função $G(\bar{\phi})$ no espaço plano para a localização do modo-zero.

O primeiro indicio para identificar a função $G(\bar{\phi})$ que levaria à localização de modo-zero de Kalb-Ramond é por meio das equações (5.30) e (5.31).

Seguindo este raciocínio, podemos identificar a função $G(\bar{\phi})$ tal como podemos ver na

equação (5.20) e verificar quais seriam as restrições sobre κ que fazem $\int_{-\infty}^{\infty} dr \alpha^2 e^{-2A(r)} G(\bar{\phi})$ convergente. Notamos que as condições sobre κ são muito dependentes do modelo que estamos usando para descrever a brana espessa. Ilustramos a localização fazendo uso dos modelos mencionados na seção anterior para a localização de campo de gauge.

Para o caso do modelo $W_{\phi}^2/2 = (\lambda/2)(\phi^2 - m^2/\lambda)^2$, e a solução clássica dada por $\bar{\phi}(r) = (m/\sqrt{\lambda}) \tanh(mr/\sqrt{2})$, temos que

$$e^{-2A} W_{\phi}^{2k} \propto \operatorname{sech}^{4k + \frac{8}{9} \frac{m^2}{\lambda}} \left(\frac{mr}{\sqrt{2}} \right) e^{\frac{2m^2}{9\lambda} \tanh^2(\frac{mr}{\sqrt{2}})}. \quad (5.35)$$

Assim, ao integrar a equação (5.35) sobre a dimensão extra, esta é convergente se $k \geq -\frac{2m^2}{9\lambda}$, sempre que k seja positivo. Portanto, conseguiríamos a localização do campo de Kalb-Ramond sem nenhuma restrição.

Tendo em vista o modelo definido na seção 2.1 [49], cujo superpotencial é $W(\phi) = 3bc \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3b}}\phi\right)$, podemos expressar a integral na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-2A} W_{\phi}^{2k} \propto \int_{-\infty}^{\infty} dr \operatorname{sech}^{2(k-b)}(2cr). \quad (5.36)$$

Assim, ao integrar esta equação sobre a dimensão extra resulta ser convergente se $k > b$.

Neste capítulo propusemos um mecanismo que conduz à localização do modo-zero do campo de gauge em branas espessas, por meio da função $G(\bar{\phi})$ da configuração clássica do campo escalar-gravitacional. Este mecanismo permitiu localizar o campo de gauge tanto no espaço *warped* como no espaço plano.

A fim de construir uma motivação física da função $G(\bar{\phi})$, seguindo o modelo de Friedberg-Lee proposto para explicar os efeitos não perturbativos da QCD a baixas energias. Este modelo envolve um acoplamento de campo escalar (via termo de Yukawa) com os quarks e também acopla com os glúons por meio de uma função dielétrica. Traduzindo para nossa problemática, o análogo da função $G(\bar{\phi})$ desempenha o papel de função dielétrica.

No caso de espaço plano é mais manejável a determinação da função $G(\bar{\phi})$, guiando-nos para o problema de localização de campo de matéria na brana. Ao levar esta recorrência um pouco mais além, fomos capazes de identificar a função como $G(\bar{\phi}) \propto W_{\phi}^{2k}(\bar{\phi}(r))$. Tal forma de $G(\bar{\phi})$ é adequada para a localização de campo de gauge em ambos cenários com geometria plana e *warped*.

Um aspecto crucial da localização de campo de gauge é o acoplamento universal com a matéria. Por exemplo, ao introduzir férmions carregados em 5 dimensões, exigimos que o modo-zero de todos os campos fermiônicos independentes acoplam com igual intensidade com o modo-zero do campo de gauge. Em particular, o modo-zero fermiônico não deveria afetar o acoplamento com o campo de gauge. Para tal fim, mostramos a interação em 5 dimensões dos férmions com o campo de gauge,

$$S = \int d^5x \sqrt{g} Q \bar{\Psi} \Gamma^a A_a \Psi, \quad (5.37)$$

a qual a ação pode ser descrita na forma

$$S = \int d^5x \sqrt{g} Q (\bar{\Psi} \Gamma^\mu A_\mu \Psi + \bar{\Psi} \Gamma^5 A_5 \Psi). \quad (5.38)$$

Aqui Q é uma constante de acoplamento em 5 dimensões e as matrizes gamma estão representadas por $\Gamma^\mu = e^{-A(r)} \gamma^\mu$, $\Gamma^5 = -i\gamma^5$. Fazemos a escolha de gauge $A_5 = 0$ e consideramos o modo-zero fermiônico definido no capítulo 2 como $\alpha_f = N e^{-2A(r)} f(r)$. Neste caso N é a constante de normalização, a qual pode ser encontrada sob a condição normalização $N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-A} f^2(r) = 1$, de forma que $f(r)$ dependerá do acoplamento tipo Yukawa que podemos definir tal como foi feito no capítulo 2. Consideramos só o modo-zero fermiônico da ação definida em (5.37)

$$S = \int d^4x Q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu(r, x) \psi \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{3A(r)} (N e^{-2A(r)} f(r))^2, \quad (5.39)$$

onde $\int_{-\infty}^{\infty} dr e^{3A(r)} (N e^{-2A(r)} f(r))^2 = 1$, garante a localização. Podemos ver que o modo-zero fermiônico não afeta a carga. A carga q em quatro dimensões está relacionada com Q na forma $q = \tilde{\alpha} Q$, onde $\tilde{\alpha}$ é constante, e esta relacionada com o modo-zero de campo de gauge. Portanto, obtemos a seguinte ação efetiva envolvendo o modo-zero localizável na brana $\int d^4x q \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x)$.

O mesmo procedimento é adaptado para obtenção da localização de campo de Kalb-Ramond em branas espessas. Nesse caso encontramos que uma situação restrita sobre κ é necessária a fim de conseguir a localização e, por sua vez, tal restrição dependerá do modelo que tivermos em mão para descrever branas espessas.

Descobrimos que existe um mapeamento entre a equação de Schrödinger, resultado de nossa abordagem com a equação tipo Schrödinger para a localização de campos vetorial e tensorial em branas dilatônicas [84, 21, 29]. Neste último caso, o potencial da mecânica quântica associado aos campos vetorial e tensorial dependem do fator de deformação e $A'(r)$, e existe uma proporcionalidade entre $\pi'(r) \propto A'(r)$, $B'(r) \propto A'(r)$, onde $\pi(r)$ é

o campo dilatônico e $e^{2B(r)}$ é um fator de deformação extra incluído na métrica usado em modelos com acoplamento dilatônico. Notamos que a dependência desses termos é tal, que o potencial da mecânica quântica resultante seja proporcional ao potencial da mecânica quântica encontrada em nossa abordagem. Sempre que o mesmo modelo não-linear da teoria de campos seja usado para descrever branas espessas em ambos casos. Tal mapeamento matemático torna-se mais claro quando se trata do modelo $W(\phi) = 3bc \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3b}}\phi\right)$ [49], porque nesse caso o termo $G'(\bar{\phi})/G(\bar{\phi})$ é proporcional a $A'(r)$. Tal relação pode ser utilizada para desenvolver uma análise dos modos ressonantes para campo vetorial e tensorial. Em nosso caso, recorreremos aos resultados encontrados em [21], [84], [29]. Pensamos que nossos resultados concernentes a modos ressonantes não diferem consideravelmente com o acoplamento dilatônico analisado em [21], [84], [29].

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

No capítulo 2, fizemos a revisão do modelo que geram branas espessas como foi o caso do modelo de M. Gremm [49]. Este modelo possui soluções em grande parte analítica e ajuda a ilustrar a localização da gravidade na brana. Este modelo foi muito usado na literatura por suas aplicações em cenários cosmológicos. É interessante o estudo de modelos que exibam separação das branas (*splitting brane*) como o modelo construído por A. Campos [17], ampliamos nosso estudo ao revisar o modelo construído em [26]. Este modelo exhibe soluções tipo kink que são continuamente deformados em soluções kink duplo e possui um parâmetro interno que controla a separação entre domínios. Este modelo [26] foi aplicado a cenários de mundos-brana na localização de campo de matéria na brana.

No capítulo 3, estudamos a localização de férmions em branas que exibem separação (*splitting brane*), mediante um acoplamento entre férmions e campo escalar *background*, por meio de um acoplamento geral de tipo Yukawa $\bar{\psi}F(\bar{\phi})\psi$. Um primeiro caso estudado foi o acoplamento entre férmions e um campo escalar $\bar{\phi}$ (brana) cujas soluções clássicas tipo kink são deformadas em soluções dois-kink. Observamos que neste tipo de acoplamento o modo-zero α_{L0} não acompanha a separação entre as branas. O modo-zero α_{L0} fica localizável na região entre as branas e apresenta uma mínima probabilidade de ser localizável nas branas. Adicionamos um termo de massa neste último acoplamento entre férmions e a função de campo $F(\phi) = \eta(\bar{\phi} + M)$ permitindo a localização em uma das branas. A escolha de uma das branas como nosso universo implicaria a quebra da simetria \mathbb{Z}_2 . Um terceiro estudo é o acoplamento com $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\phi}$ permitindo a localização em ambas branas. O estudo da localização de férmions foi estendido ao cenário de Rubakov-Shaposhnikov, onde foi encontrado que o acoplamento com $F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\phi}$ exhibe supersimetria. No espaço plano os férmions apresentam o mesmo espectro de energia que as excitações bosônicas este foi observado no caso do acoplamento com $(F(\bar{\phi}) = -\eta W_{\bar{\phi}\phi})$. Fizemos uso do método de Numerov para determinar numericamente os autovalores de

energia para o primeiro e segundo estado excitado.

No capítulo 4, discutimos novos modelos não-lineares em teoria de campos MNTC [28]. Estes modelos foram construídos a partir da deformação de modos-zero de modelos bem conhecidos como são: o modelo seno-Gordon, o modelo ϕ^4 e potencial Scarf II. Os novos modelos construídos neste capítulo exibem soluções de tipo kink simples deformado a soluções kink duplo. Estes modelos MNTC foram aplicados em cenários de mundos-brana salientando o modelo de seno-Gordon deformado. Este tipo de modelo apresenta um potencial do tipo oscilante, o qual é limitado inferiormente. Podemos também dizer que estes modelos construídos podem ser aplicados em diversas áreas da física, como matéria condensada e outros cenários cosmológicos.

No capítulo 5, discutimos que não é possível a localização de campos de gauge em branas espessas unicamente por meio da gravitação. Porém, propomos um mecanismo que leva à localização do modo-zero do campo de gauge abeliano introduzindo uma função suave e contínua da configuração clássica que torna a ação normalizável. Explicamos uma motivação física em analogia ao modelo de Friedberg-Lee, onde esta função contínua se comporta como uma função dielétrica. Mostramos que este mecanismo funciona bem tanto em cenário de Randall-Sundrum como no cenário de Rubakov-Shaposhnikov.

Estendemos nosso mecanismo de localização de campo de gauge para a localização de campo de Kalb-Ramond fazendo uso de um acoplamento de uma função escalar da solução do campo que proporciona a brana com o campo de Kalb-Ramond, conduzindo à localização do modo-zero. Discutimos um aspecto crucial da localização de campo de gauge, observando que os modos-zero do campo fermiônico acoplem com a mesma intensidade com os modos-zero do campo de gauge, garantindo a universalidade da carga.

Outro ponto de interesse é investigar a localização em branas espessas de todos os campos que participam no modelo de Weinberg-Salam-Glashow e averiguar como a espessura da brana poderia estar conectada com alguns parâmetros do modelo que medimos em nosso mundo em 3+1 dimensões. Também podemos localizar campos de gauge não-abelianos na brana, usando os argumentos de localização estudados no capítulo 4.

Referências Bibliográficas

- [1] ARKANI-HAMED, N. ; SCHMALTZ, M. Hierarchies without symmetries from extra dimensions. **Physical Review D**, v. 61, p. 033005-1–033005-9, 2000.
- [2] ARKANI-HAMED, N. ; DIMOPOULOS, S. ; DVALI, G. Phenomenology, astrophysics, and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity. **Physical Review D**, v. 59, p. 086004-1–086004-21, 1999.
- [3] ALMEIDA, C. A. ; BAZEIA, D. ; LOSANO, L. ; MALBOUISSON, J. M. C. New results for deformed defects. **Physical Review D**, v. 69, p. 067702-1–067702-4, 2004.
- [4] BAZEIA, D. ; dos SANTOS, M. J. ; RIBEIRO, R. F. Solitons in systems of coupled scalar fields. **Physics Letters A**, v. 208, p. 84-88, 1995.
- [5] BAZEIA, D. ; RIBEIRO, R. F. ; SANTOS, M. M. Solitons in a class of systems of two coupled real scalar fields. **Physical Review E**, v. 54, p. 2943-2948, 1996.
- [6] BAZEIA, D. ; FURTADO, J. ; GOMES, A. R. Brane structure from a scalar field in warped spacetime. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 02, p. 02-1–02-9, 2004.
- [7] BAZEIA, D. ; MENEZES, J. ; MENEZES, R. New global defect structure. **Physical Review Letters**, v. 91, p. 241601-1–241601-4, 2003.
- [8] BAZEIA, D. ; LOSANO L. Deformed defects with applications to braneworlds. **Physical Review D**, v. 73, p. 025016-1–025016-7, 2006.
- [9] BAZEIA, D. GONZALES LEON, M. A. ; LOSANO L. ; MATEOS GUILARTE J. Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions. **Physical Review D**, v. 73, p. 105008-1–105008-8, 2006.
- [10] BAZEIA, D. ; LOSANO, L. ; MALBOUISSON, J. M. C. Deformed defects. **Physical Review D**, v. 66, p. 101701-1–101701-5, 2002.

- [11] BAZEIA, D. ; GOMES, A. R. ; LOSANO, L. Gravity localization on thick branes: a numerical approach. **International Journal of Modern Physics A** , v. 24, p. 1135-1162, 2009.
- [12] BAZEIA, D.; GOMES A. R. Bloch Brane. **The Journal of High Energy Physics**. v.0405, p.1-12, 2004.
- [13] BAZEIA, D. ; LOSANO, L. ; MALBOUISSON, J. M. C. ; MENEZES, R. Classical behavior of deformed sine-Gordon models . **Physica D**, v. 237, p. 937-946, 2008.
- [14] BAZEIA, D. ; LOSANO, L. ; MENEZES, R. ; SOUZA, M. A. M. New family of sine-Gordon models. **Europhysics Letters**, v. 87, p. 21001-1–21001-6, 2009.
- [15] BAJAC, B. ; GABADADZE, G. Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti de Sitter space. **Physics Letters B**, v. 474, p. 282-291, 2000.
- [16] BOGOMOL'NYI, E. A. The stability of classical solutions. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 24, p. 449-454, 1976.
- [17] CAMPOS, A. Critical Phenomena of Thick Branes in Warped Spacetimes. **Physical Review Letter**, v. 88, p. 141602-1–141602-4, 2002.
- [18] CAMPOS, A. ; HOLLAND, K. ; WIESE, U. J. Complete Wetting in Supersymmetric QCD: Why QCD Strings Can End on Domain Walls. **Physical Review Letters**, v. 81, p. 2420-2423, (1998).
- [19] CASAHORRAN, J. ; NAM, S. Kinks and Bounces from zero modes. **International Journal of Modern Physics A**, v. 6, n. 30, p. 5467-5479, 1991.
- [20] CASTILLO- FELISOLA; O. MELFO, A. ; PANTOJA, N.; RAMIREZ, A. Localizing gravity on exotic thick 3-branes. **Physical Review D**, v. 70, p. 104029-1–104029-6, 2004.
- [21] CRUZ, T. W. ; TAHIM, O. ALMEIDA, C. A. S. Gauge field localization on a dilatonic deformed brane. **Physics Letters B**, v. 686, p. 259-263, 2010.
- [22] CRUZ, W. T. **Localização de campos em membranas deformadas**. 2009. 124 f. tese (Doutorado em Física)- Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Brasil, 2009.
- [23] CHRIST, N. H. ; LEE, T. D. Quantum expansion of soliton solutions. **Physical Review D**, v. 12, p. 1606-1627, 1975.

- [24] CHUMBES, A. E. R. ; HOFF da SILVA, J. M. ; HOTT, M. B. Model to localize gauge and tensor fields on thick branes. **Physical Review D**, v. 85, p. 085003-1–085003-6, 2012.
- [25] CHUMBES, A. E. R. ; VASQUEZ, A. E. O. ; HOTT, M. B. Fermion localization on a split brane. **Physical Review D**, v. 83, p. 105010-1–105010-9, 2011.
- [26] CHUMBES, A. E. R. ; HOTT, M. B. Nonpolynomial potentials with deformable topological structures. **Physical Review D**, v. 81, p. 045008-1–045008-8, 2010.
- [27] CHUMBES, A. E. R. **Modelos não-lineares de dois campos e aplicações em cenários de mundos-brana**, 2009, 78 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade Engenharia do campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.
- [28] CHUMBES, A. E. R. ; OBISPO, A. E. V. ; HOTT, M. B. Reconstruction of deformed defects in field theory from deformed zero modes and applications. **Europhysics Letters**, v. 98, p. 31004-1–31004-6, 2012.
- [29] CHRISTIANSEN, H. R. ; CUNHA, M. S. ; TAHIM, M. O. Exact solutions for a Maxwell-Kalb-Ramond action with dilaton: Localization of massless and massive modes in a sine-Gordon brane-world. **Physical Review D**, v. 82, p. 085023-1–085023-15, 2010.
- [30] CSAKÍ, C. ; ERLICH, J. ; HOLLOWOOD, T. J. ; SHIFMAN, Y. Universal Aspects of Gravity Localized on Thick Branes. **Nuclear Physics B**, v. 581, p. 309-338, 2000.
- [31] CSAKÍ, C. ; ERLICH, J. ; GROJEAN, C. ; HOLLOWOOD, T. J. General Properties of the Self-tuning Domain Wall Approach to the Cosmological Constant Problem. **Nuclear Physics B**, v. 584, p. 359-386, 2000.
- [32] CEVTIČ, M. ; GRIFFIES, S. ; REY, S-J. Static domain walls in $N = 1$ supergravity. **Nuclear Physics B**, v. 381, p. 301-328, 1992.
- [33] CEVTIČ, M. ; GRIFFIES, S. Gravitational effects in supersymmetric domain wall backgrounds. **Physical Letter B**, v. 285, p. 27-34, 1992.
- [34] CEVTIČ, M. ; SOLENG, H. H. Supergravity domain walls. **Physics Reports**, v. 282, p. 159-223, 1992.
- [35] DVALI, G. ; SHIFMAN M. Domain walls in strongly coupled theories. **Physics Letters B**, v. 396, p. 64-69. **Physics Letters B**, v. 407, p. 452, 1997.

- [36] DVALI, G.; GABADADZED, G. ; SHIFMAN M. (Quasi)localized gauge field on a brane: dissipating cosmic radiation to extra dimensions?. **Physics Letters B**, v.497, p. 271-280, 2001.
- [37] DZHUNUSHALIEV, V.; FOLOMEEV, V.; MINAMITSUJI, M. Thick Brane solutions. **Reports on Progress in Physics**, v. 73, p. 066901-1–066901-29, 2009.
- [38] DAVOUDIASI, H. ; HEWETT J. L. ; RIZZO, T. G. Phenomenology of the Randall-Sundrum Gauge Hierarchy Model. **Physical Review Letters**, v. 84, p. 2080-2083, 2000.
- [39] DEWOLFE, O. ; FREEDMAN, D. Z. ; GUBSER, S. S. ; KARCH, A. Modeling the fifth dimension with scalar and gravity. **Physical Review D**, v. 62, p. 046008-1–046008-16, 2000.
- [40] DEWOLFE, O. ; FREEDMANN, D. Z. Notes on Fluctuation and Correlation Functions in Holographic Renormalization Group Flows, **arXiv:hep-th/0002226** [hep-th], p. 1-29, 2000.
- [41] de SOUZA DUTRA, A. Continuously deformable topological structure. **Physica D**, v. 238, p . 798-802, 2009.
- [42] de SOUZA DUTRA, A.; de FARIA JR. A. C. A. ; HOTT, M. B. Degenerate and critical Bloch branes. **Physical Review D**, v. 78, p. 043526-1–043526-9, 2008.
- [43] DORFMAN, S. ; FUKS, D. ; GORDON, A. ; KOTOMIN, E. Domain wall splitting and creation of the fine domain structure. **Thin Solid Films**, v. 336, p. 149-152, 1998.
- [44] DUBOVSKY, S. L. ; RUBAKOV, V. A. On models of gauge field localization on a brane. **International Journal of Modern Physics A**, v. 16, p. 4331-4350, 2000.
- [45] FLORES-HIDALGO, G. SVAITER, N. F. Constructing bidimensional scalar field theory models from zero mode fluctuations. **Physical Review D**, v. 66, p. 025031-1–025031-12, 2002.
- [46] FRIEDBERG, R. ; LEE, T. D. Fermion-field nontopological solitons. **Physical Review D**, v. 15, p. 1694-1711, 1977. Fermion-field nontopological solitons. II. Models for hadrons. **Physical Review D**, v. 16, p. 1096-1118, 1977; Quantum chromodynamics and the soliton model of hadrons. **Physical Review D**, v. 18, p. 2623-2631, 1978. LEE, T. D. ; PANG, Y. Nontopological solitons. **Physics Reports**, v. 221, p. 251-350, 1992.

- [47] FONSECA de SÁ, N. **Desconstrução dimensional e violação de sabor**. 2011, 114 f. dissertação (Mestrado em Física), Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Brasil, 2011.
- [48] GANGOPADHYAYA, A. ; PANIRAH, P.; SUKHATME. Supersymmetry and tunneling in an asymmetric double well. **Physical Review A**, v. 47, p. 2720-2724, 1993.
- [49] GREMM, M. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. **Physics Letters B**, v. 478, p. 434-438, 2000. Thick domain walls and singular spaces. **Physical Review D**, v. 62, p. 044017-1-044017-8, 2000.
- [50] GIOVANNINI, M. Gauge-invariant fluctuations of scalar branes. **Physical Review D**, v. 64, p. 064023-1-064023-11, 2001. Localization of metric fluctuations on scalar branes. **Physical Review D**, v. 65, p. 064008-1-064008-5, 2002.
- [51] GORDON, A. ; SALDITT, T. ; VAGNER, I. D. ; WYDER, P. Splitting of a domain wall near the diamagnetic phase transition. **Physical Review B**, v. 43, p. 3775-3777, 1991.
- [52] GOLDBERGER, W. D. ; WISE, M. B. Modulus Stabilization with Bulk Fields. **Physical Review Letters**, v. 83, p. 4922-4925, 1999.
- [53] GUERRERO, R. ; MELFO, A. ; PANTOJA, N. ; RODRIGUES, R. Gauge field localization on brane worlds. **Physical Review D**, v. 81, p. 086004-1-086004-6, 2010.
- [54] ICHINOSE, S. Fermions in Kaluza-Klein and Randall-Sundrum theories. **Physical Review D**, v. 66, p. 104015-1-104015-13, 2002.
- [55] JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory. **Reviews of Modern Physics**, v. 49, p. 681-706, 1977.
- [56] JACKIW, R.; REBBI, C. Soliton with fermions number 1/2. **Physical Review D**, v. 13, p. 3398-3409, 1976.
- [57] KALB, M. ; RAMOND, P. Classical direct interstring action. **Physical Review D**, v. 9, p. 2273-2284, 1974.
- [58] KALUZA T. **On the problem of the unity in Physics**. Sitzungsber Preuss Akad. Wiss Berlin Math-Phys., p. 966-972, 1921. KLEIN, O. **Quantum Theory and Five-Dimensional theory of Relativity**. Z. Physics, v. 37, p. 895-906, 1926.

- [59] KOLEY, R. ; KAR, S. Scalar kinks and fermion localisation in warped spacetimes. **Classical Quantum Gravity**, v. 22, p. 753-758, 2005.
- [60] KEHAGIAS, A. ; TAMVIKIS, K. Localized Gravitons, Gauge Bosons and Chiral Fermions in Smooth Spaces Generated by a Bounce. **Physics Letters B**, v. 504, p. 38-46, 2001.
- [61] KOLEY, R. ; SAYAN K. Scalar kinks and fermion localization in warped spacetimes. **Classical Quantum Gravity**, v. 22, p. 753-768, 2005.
- [62] LIPOWSKY, R. Upper Critical Dimension for Wetting in Systems with Long-Range Forces. **Physical Review Letters**, v. 52, p. 1429-1432, 1984.
- [63] LOHE, M. A. ; O'BRIEN, D. M. Soliton mass corrections and explicit models in two dimensions. **Physical Review D**, v. 23, p. 1771-1780, 1981.
- [64] NISHINO, H. et. al. Search for Proton Decay via $p \rightarrow e^+\pi^0$ and $p \rightarrow \mu^+\pi^0$ in a Large Water Cherenkov Detector. **Physical Review Letters**, v. 102, p. 141801-1-141801-5, 2009.
- [65] MEZA, L. E. A. **Modelos Não-Lineares com Campos Escalares: Ladrilhamento e Mundos-Brana**. 2011, 99 f. Dissertação (Mestrado em Física). Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá. Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2011.
- [66] MELFO, A. ; PANTOJA, N. ; TEMPO, J. D. Fermion localization on thick branes. **Physical Review D**, v. 73, p. 044033-1-044033-7, 2006.
- [67] MELFO, A. ; PANTOJA, N. ; SKIRZEWSKI, A. Thick domain wall spacetimes with and without reflection symmetry. **Physical Review D**, v. 67, p. 105003-1-105003-6, 2003.
- [68] MERZBACHER, E. **Quantum Mechanics**, John Wiley and Sons, New York, 1970.
- [69] MUKHOPADHYAYA, B. ; SEN, S. ; SENGUPTA, S. Does a Randall-Sundrum Scenario Create the Illusion of a Torsion-Free Universe?. **Physical Review Letters**, v. 89, p. 121101-1-121101-4, 2002.
- [70] NUMEROV, B. V. A method of extrapolation of perturbations. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 84, p. 592-602, 1924. JOHNSON B. R. New numerical methods applied to solving the one-dimensional eigenvalue problem. **Journal of Chemical Physics**, v. 67, p. 4086-4093, 1977.

- [71] NORDSTRÖM, G. Über die Möglichkeit das elektromagnetische feld uns das gravitationsfeld zu vereiningen. *Physics Z*, v. 15, p. 504-506, 1914. **On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields**. arXiv: 0702221 [physics.gen-ph], 2007.
- [72] OBISPO, A. E. V. **Férmions em campos externos em 1+1 e 2+1 dimensões**. 2012, 83 f. Disertação (Mestrado em Física). Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá. Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.
- [73] OVERDUIN, J. M. ; WESSON, P. S. Kaluza-Klein Gravity. **Physics Reports**, v. 283, p. 303-380, 1997.
- [74] PRASAD, M. K. ; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the 'tHooft monopole and Julia-Zee Dyon. **Physical Review Letters**, v. 35, p. 760-762, 1975.
- [75] POLCHINSKI, J. Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges. **Physical Review Letters**, v. 75, p. 4724-4727, 1995.
- [76] PONTÓN E. **TASI 2011: Four lecture on TeV Scale Extra Dimensions**. arXiv: 12073827 [hep-th], 2012.
- [77] RAJAMAN, R. **Solitons and Instantons**, North-Holand, Amsterdam, 1982.
- [78] RANDALL, L. ; SUNDRUM, R. An Alternative to Compactification. **Physical Review Letters**, v. 83, p. 4690-4693, 1999.
- [79] RANDALL, L. ; SUNDRUM, R. Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. **Physical Review Letters**, v. 83, p. 3370-3373, 1999.
- [80] RUBAKOV, V. A. ; SHAPOSNIKOV, M. E. Do we live inside a domain wall?. **Physics Letters B**. v. 125, p. 136-138, 1983.
- [81] RUBAKOV, V. A. Large and infinite extra dimensions. **Physics-Uspekhi**, v.44, p. 871-893, 2001.
- [82] SKENDERIS, K. ; TOWNSEND, P. K. Gravitational stability and renormalization-group flow. **Physics Letters B**, v. 468, p. 46-51, 1999.
- [83] SCHWINGER, J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. **Physical Review**, v. 82, p. 664-679, 1951.
- [84] TAHIM, M. O. ; CRUZ, W. T. ; ALMEIDA, C. A. S. Tensor gauge field localization in branes. **Physical Review D**, v. 79, p. 085022-1–0850022-9, 2009.

- [85] VACHASPATI, T. **Kinks and Domain Walls. An Introduction to Classical and Quantum Solitons**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [86] VENEZIANO, G. Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories, **Nuovo Cim. A**, v. 57, p. 190-197, 1968.
- [87] ZHAO, Z-H. ; LIU, Y-X. LI, H-T. ; WANG, Y-Q. Effects of the variation of mass on fermion localization and resonances on thick branes. **Physical Review D**, v. 82, p. 084030-1–084030-10, 2010.

Apêndice A

Equações de Movimento

Demonstramos como obter as equações de movimento para o campo escalar acoplado à gravidade em 4+1 dimensões do espaço-tempo em geometria warped cuja ação é da forma

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}g_{ab}\partial^a\phi\partial^b\phi - V(\phi) \right), \quad (\text{A.1})$$

onde $g \equiv \text{Det}(g_{ab})$. A métrica é dada por

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = e^{2A(r)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (\text{A.2})$$

com os índices gregos correm de 0 a 3, e os índices latinos correm de 0 a 4, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $e^{2A(r)}$ é o warp factor.

Iniciamos deduzindo a equação de movimento apresentada em (2.3), considerando que ϕ no limite estático é função soamente da variável r , temos

$$\partial^a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \right) = -4 \frac{dA}{dr} e^{4A} \frac{d\phi}{dr} - e^{4A} \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -e^{4A} \frac{dV}{d\phi}. \quad (\text{A.4})$$

De forma que obtemos a equação de movimento

$$\partial^a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = e^{4A} \left(-4 \frac{dA}{dr} \frac{d\phi}{dr} - \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{dV}{d\phi} \right) = 0, \quad (\text{A.5})$$

que permite deduzir a equação (2.3)

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\phi}{dr} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (\text{A.6})$$

Também argumentamos como obter as equações (2.4) e (2.5), a partir das equações de Einstein. Seguindo o procedimento feito na referência [27].

Levando-se em conta a dimensão extra consideramos a equação de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G^{(5)}T_{ab}, \quad (\text{A.7})$$

onde $G^{(5)}$ é a constante de Newton e consideraremos $4\pi G^{(5)} = 1$. R_{ab} e R representam o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente.

O tensor de Ricci é dado por

$$R_{ab} = R^c_{acb} = \partial_c \Gamma^c_{ba} - \partial_b \Gamma^b_{ca} + \Gamma^d_{ba} \Gamma^e_{cd} - \Gamma^d_{ca} \Gamma^e_{bd}, \quad (\text{A.8})$$

onde Γ^b_{ca} são os símbolos de Christoffel e são definidos da seguinte forma

$$\Gamma^b_{ca} = \frac{1}{2}g^{bd}(\partial_c g_{da} + \partial_a g_{dc} - \partial_d g_{ca}). \quad (\text{A.9})$$

Como $g_{00} = e^{2A(r)} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33}$ e $g_{44} = -1$, encontramos que os elementos não-nulos do símbolo de Christoffel no limite estático são

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{04} = \Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} &= \frac{dA}{dr}, \\ \Gamma^4_{00} = -\Gamma^4_{11} = -\Gamma^4_{22} = -\Gamma^4_{33} &= \left(\frac{dA}{dr}\right) e^{2A}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

os quais nos permitem determinar os elementos não nulos do tensor de Ricci (A.8), ou seja

$$\begin{aligned} R_{00} = -R_{11} = -R_{22} = -R_{33} &= e^{2A} \left(4 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d^2 A}{dr^2} \right) \right), \\ R_{44} &= -4 \left(\left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d^2 A}{dr^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente o escalar de curvatura R fica dado por

$$R = g^{ab} R_{ab} = 4 \left(5 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + 2 \left(\frac{d^2 A}{dr^2} \right) \right). \quad (\text{A.12})$$

O tensor T_{ab} de energia-momento de matéria tem a forma

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} (\partial_a \phi)^2 + V(\phi) \right). \quad (\text{A.13})$$

Para a métrica dada na equação (2.2) e para o caso do campo escalar dependente somente da dimensão extra, $\phi = \phi(r)$, obtemos que a densidade de energia e matéria fica

$$T_{00} = e^{2A(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V(\phi) \right), \quad (\text{A.14})$$

os outros elementos do tensor de energia-momento são

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{22} = T_{33} &= -e^{2A(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V(\phi) \right), \\ T_{44} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - V(\phi). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

O tensor de Einstein G_{ab} tem a forma

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R. \quad (\text{A.16})$$

Explicitamente temos

$$\begin{aligned} G_{00} = -G_{11} = -G_{22} = -G_{33} &= -e^{2A} \left(6 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + 3 \left(\frac{d^2 A}{dr^2} \right) \right), \\ G_{44} &= 6 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo (A.15) e (A.17) em (A.7) permite encontrar as outras duas equações de movimento (2.4) e (2.5), respectivamente.

$$\frac{d^2 A}{dr^2} = -\frac{2}{3} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2, \quad (\text{A.18})$$

$$\left(\frac{dA}{dr} \right)^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - \frac{1}{3} V(\phi). \quad (\text{A.19})$$

Apêndice B

Escalar de Kretschmann

Neste apêndice descreveremos o escalar de Kretschmann definido na equação (2.20) no capítulo 2.

O escalar de Kretschmann é definido

$$K = R_{abcd}R^{abcd} \quad (\text{B.1})$$

O tensor de Riemann é definido como

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= g_{ae}R_{bcd}^e, \\ R_{bcd}^e &= \partial_c\Gamma_{db}^e - \partial_d\Gamma_{cb}^e + \Gamma_{cf}^e\Gamma_{db}^f - \Gamma_{df}^e\Gamma_{cb}^f. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Assim as componentes do tensor de Riemann não nulos no nosso caso são

$$\begin{aligned} R_{0101} = R_{0202} = R_{0303} = -R_{1212} = -R_{1313} = -R_{2323} &= -\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 (e^{2A})^2, \\ R_{0404} = -R_{1414} = -R_{2424} = -R_{3434} &= -e^{2A} \left(\left(\frac{d^2A}{dr^2}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dr}\right)^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

O tensor de Riemann satisfaz a identidade de Bianchi

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0, \quad (\text{B.4})$$

e as outras componentes do tensor de Riemann podem ser determinadas pela relação

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab}. \quad (\text{B.5})$$

Assim encontramos que o escalar de Kretschmann é dado por

$$K = R_{abcd}R^{abcd} = 24 \left(\frac{dA}{dr} \right)^4 + 16 \left(\left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d^2A}{dr^2} \right) \right)^2. \quad (\text{B.6})$$

Apêndice C

Construção das autofunções da equação de Schrödinger pelo método de Numerov

O método de Numerov é um procedimento adequado para a solução da equação de Schrödinger independente do tempo em uma dimensão [70]. Neste apêndice descreveremos este método brevemente como o objetivo de esclarecer o apresentado no capítulo 3. Ao descrever os autovalores do primeiro e segundo estado excitado com este método.

Seja a equação de Schrödinger independente do tempo

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = (U(x) - E)\psi(x). \quad (\text{C.1})$$

Dada uma energia de excitação E , procuramos pela autofunção $\psi(x)$ correspondente, quando o potencial $U(x)$ é uma função conhecida. Definimos $f(x) = U(x) - E$, de modo que podemos escrever (C.1) como $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = f(x)\psi(x)$.

Expandimos em série de Taylor as autofunções $\psi(x+h)$ e $\psi(x-h)$ até a sexta ordem na derivada [11], onde h define um intervalo pequeno na vizinhança de um ponto x a partir das equações

$$\psi(x+h) = \psi(x) + h \frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{6} \frac{d^3\psi(x)}{dx^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4\psi(x)}{dx^4} + \frac{h^5}{120} \frac{d^5\psi(x)}{dx^5} + \frac{h^6}{720} \frac{d^6\psi(x)}{dx^6} + \dots \quad (\text{C.2})$$

$$\psi(x-h) = \psi(x) - h \frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{h^3}{6} \frac{d^3\psi(x)}{dx^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4\psi(x)}{dx^4} - \frac{h^5}{120} \frac{d^5\psi(x)}{dx^5} + \frac{h^6}{720} \frac{d^6\psi(x)}{dx^6} + \dots \quad (\text{C.3})$$

Se efetuarmos a soma de (C.2) e (C.3) eliminamos as derivadas primeira, terceira,

quinta, etc. e preservamos as derivadas segunda, quarta, sexta, etc, obtendo uma expressão que poderá ser escrita como:

$$\psi(x+h) + \psi(x-h) = 2\psi(x) + h^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{12}h^4 \frac{d^4\psi(x)}{dx^4} + \frac{1}{360}h^6 \frac{d^6\psi(x)}{dx^6} + \dots \quad (\text{C.4})$$

Podemos expressar a derivada segunda

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \approx \frac{1}{h^2}(\psi(x+h) + \psi(x-h) - 2\psi(x)) \quad (\text{C.5})$$

Calculamos a derivada segunda das autofunções $\psi(x+h)$ e $\psi(x-h)$ e o multiplicamos por $1/12h^2$ de modo que obtemos

$$-\frac{1}{12}h^2 \left(\frac{d^2\psi(x+h)}{dx^2} + \frac{d^2\psi(x-h)}{dx^2} \right) = -\frac{1}{6}h^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{1}{12}h^4 \frac{d^4\psi(x)}{dx^4} - \frac{1}{144}h^6 \frac{d^6\psi(x)}{dx^6} + \dots \quad (\text{C.6})$$

Somando (C.6) e (C.4) temos:

$$\psi(x+h) + \psi(x-h) - \frac{1}{12}h^2 \left(\frac{d^2\psi(x+h)}{dx^2} + \frac{d^2\psi(x-h)}{dx^2} \right) = 2\psi(x) + \frac{5}{6}h^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \dots \quad (\text{C.7})$$

substituindo os termos que comparecem as segundas derivadas

$$\psi(x+h) + \psi(x-h) - \frac{1}{12}h^2 (f(x+h)\psi(x+h) + f(x-h)\psi(x-h)) = 2\psi(x) + \frac{5}{6}h^2 f(x)\psi(x) + \dots \quad (\text{C.8})$$

Assim definindo $G(x) = \frac{1}{12}h^2 f(x)$, obtemos a recorrência para $\psi(x)$

$$(1 - G(x+h))\psi(x+h) + (1 - G(x-h))\psi(x-h) = (2 + 10G(x))\psi(x). \quad (\text{C.9})$$

Consideramos que a condição de contorno $\psi(0) = 1$, e procuramos por funções pares de $\psi(x)$.

Assim aplicaremos a fórmula de recorrência para $x = 0$ nos leva

$$\psi(h) = \frac{1 + 5G(h)}{1 - G(h)} \quad (\text{C.10})$$

Dividamos o intervalo para $x \geq 0$ em N partes, tal que obtemos os pontos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Definindo $\psi(x_1) = 1$, obtemos $\psi(x_2) = (1 + 5G(x_1))/(1 - G(x_2))$. Para os seguintes pontos

$3 \leq j \leq N$ obtemos

$$\psi(x_j) = \frac{(2 + 10G(x_{j-1}))\psi(x_{j-1}) - (1 - G(x_{j-2}))\psi(x_{j-2})}{1 - G(x_j)}, \quad (\text{C.11})$$

de forma que podamos obter a autofunção desejada como um conjunto de N pontos.