



Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

**Propriedades Topológicas e
Aritméticas dos Fractais de Rauzy**

Gustavo Antonio Pavani

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Fevereiro - 2010

GUSTAVO ANTONIO PAVANI

**Propriedades Topológicas e Aritméticas dos Fractais de
Rauzy**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

São José do Rio Preto
18 de Fevereiro de 2010

Pavani, Gustavo Antonio.

Propriedades topológicas e aritméticas dos fractais de Rauzy / Gustavo Antonio Pavani. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2010.

54 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Ali Messaoudi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Topologia. 3. Fractais. I. Messaoudi, Ali. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Banca Examinadora

Ali Messaoudi

Professor Doutor - IBILCE - UNESP

Orientador

Daniel Smania Brandão

Professor Doutor - USP - São Carlos

1º Examinador

Vanderlei Minori Horita

Professor Doutor - IBILCE - UNESP

2º Examinador

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho agradeço:

Primeiramente à Deus.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ali Messaoudi, pelos inúmeros conselhos, pela paciência, pela amizade, e por me ajudar no conhecimento obtido.

À minha mãe Josefa que sempre me apoiou em todas as minhas decisões. E ao meu irmão João Ricardo.

À banca examinadora.

Aos meus amigos da pós-graduação, em particular à Cintya, Júnior e Jucilene. À Tati, pela amizade e valiosa ajuda.

À Capes, pelo auxílio financeiro.

À todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar propriedades topológicas e aritméticas dos fractais de Rauzy. Em particular provamos que o fractal de Rauzy é um subconjunto compacto de \mathbb{C} , conexo, com interior simplesmente conexo e que ele induz um azulejamento periódico do plano complexo. Além disso, construímos um autômato finito capaz de gerar a fronteira do fractal de Rauzy. Com isto demos uma parametrização para a fronteira e calculamos sua dimensão de Hausdorff. Estudamos também os pontos extremos do fractal de Rauzy.

Palavras-Chave: Substituições, sistemas dinâmicos, fractais.

Abstract

The aim of this work is to study some topological and arithmetical properties of the Rauzy fractals. In particular we proved that the Rauzy fractal is a compact subset of \mathbb{C} , connected, its interior is simply connected, and it induces a periodic tiling of the complex plane. Furthermore, we studied the construction of a finite automaton able to generate the boundary of the Rauzy fractal, allowing us to provide a parametrization for its boundary, and calculate its Hausdorff dimension. We also studied the extremal points of the Rauzy fractal.

Keywords: Substitutions, dynamical systems, fractals.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | O Fractal de Rauzy | 11 |
| 1.1 | Métodos de Construção do Fractal de Rauzy | 11 |
| 1.1.1 | Primeiro Método: Método de Shunji Ito | 11 |
| 1.1.2 | Segundo Método: Via Sistemas de Numeração | 12 |
| 1.2 | Propriedades do Fractal de Rauzy | 14 |
| 2 | Caracterização da Fronteira de \mathcal{E} | 20 |
| 2.1 | Relação com as representações impróprias na base α | 23 |
| 2.1.1 | Construção Algoritmica dos números complexos duplos | 26 |
| 2.1.2 | Números complexos triplos | 33 |
| 2.2 | Parametrização da Fronteira de \mathcal{E} | 36 |
| 2.2.1 | Parametrização de X | 39 |
| 2.2.2 | Cálculo da dimensão de Hausdorff | 43 |
| 3 | Os pontos extremos do fractal de Rauzy | 46 |
| 3.1 | Construção de um ponto extremo | 48 |
| 4 | Anexo | 50 |

Introdução

Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Este polinômio possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes complexas conjugadas α e $\bar{\alpha}$ de módulo estritamente menor que 1.

O Fractal de Rauzy é o conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\}; \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0, \forall i \geq 3 \right\}.$$

O Fractal de Rauzy foi descoberto por G. Rauzy em 1982 [11], com o intuito de estabelecer uma representação geométrica do sistema dinâmico simbólico associado à substituição σ definida por:

$$\sigma(0) = 01, \sigma(1) = 02, \sigma(2) = 0.$$

Desde então tem sido objeto de estudo de vários matemáticos (ver por exemplo [1], [2], [6], [8]) e relacionado a diversas áreas da Matemática como sistemas dinâmicos, teoria dos números, dentre outras. Ele possui várias propriedades: é um conjunto compacto de \mathbb{C} , conexo, com fronteira fractal e interior simplesmente conexo e induz um azulejamento periódico de \mathbb{C} módulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$. É dividido em três regiões similares que induzem um azulejamento auto-similar do plano complexo. Essas regiões são: $\mathcal{E}_0 = \alpha\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1 = \alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}_2 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2\mathcal{E}$.

Neste trabalho estudamos as propriedades topológicas e aritméticas dos fractais de Rauzy. Em particular provamos que o fractal de Rauzy é um subconjunto compacto de \mathbb{C} , conexo, com interior simplesmente conexo e que ele induz um azulejamento periódico do plano complexo. Construímos também um autômato finito capaz de gerar a fronteira do fractal de Rauzy e assim obter uma parametrização para esta fronteira e calcular sua dimensão de Hausdorff.

Organizamos este trabalho da seguinte forma.

No primeiro capítulo mostramos alguns métodos para a construção do fractal de Rauzy e estudamos suas propriedades topológicas como conexidade, compacidade e que esse fractal induz um azulejamento periódico do plano complexo.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo da fronteira do fractal de Rauzy. Mostramos quais são as regiões que compõem sua vizinhança e como a caracterização dos pontos que pertencem à sua fronteira está diretamente relacionado com os pontos que possuem várias α -representações

e, utilizando esse conceito, construímos um autômato que fornece explicitamente os pontos pertencentes à fronteira do fractal e permite parametrizarmos a fronteira do fractal de Rauzy, mostrar que ela é uma Curva de Jordan e calcular sua dimensão de Hausdorff.

No terceiro capítulo mostramos como obter os pontos extremos do fractal de Rauzy.

Por fim, no Anexo, demonstramos alguns resultados que foram utilizados ao longo do texto e além disso mostramos algumas propriedades complementares sobre o fractal de Rauzy.

Capítulo 1

O Fractal de Rauzy

O objetivo deste capítulo é mostrar como pode ser construído o fractal de Rauzy e quais são suas propriedades topológicas. Em particular mostramos que este fractal induz um azulejamento periódico do plano complexo.

1.1 Métodos de Construção do Fractal de Rauzy

Como vimos anteriormente, o fractal de Rauzy é o conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\}; \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0, \forall i \geq 3 \right\}.$$

em que α é uma das raízes complexas de módulo menor que 1 do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

Há várias maneiras de se obter o fractal de Rauzy, como por exemplo o Método de Rauzy, através das Substituições Generalizadas, pelo Método de Dekking entre outros. Mostraremos dois métodos de construção deste fractal.

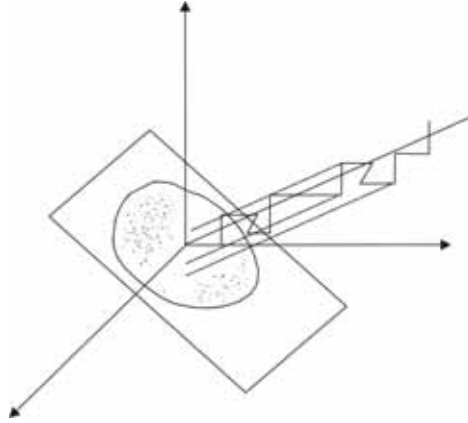
1.1.1 Primeiro Método: Método de Shunji Ito

Consideremos o alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ e \mathcal{A}^* o conjunto das palavras finitas sobre \mathcal{A} . Seja $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ a aplicação (chamada de substituição) definida por $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ e $\sigma(3) = 1$. Podemos estender σ a $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, o conjunto das palavras infinitas sobre \mathcal{A} , por concatenação, da seguinte maneira: se $w = w_1 \cdots w_n \cdots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ então $\sigma(w) = \sigma(w_1 \cdots w_n \cdots) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_n) \cdots$. Exemplo: $\sigma(1111) = 12121212$.

Aplicando σ a letra 1 obtemos $\sigma(1) = 12$. Aplicando σ a palavra 12 obtida, temos $\sigma(12) = \sigma(1)\sigma(2) = 1213$. Aplicando σ novamente a palavra 1213 obtemos $\sigma(1213) =$

1213121. Notemos então que usando σ repetidamente obteremos uma palavra $u = u_0u_1\dots = 121312111213121112131\dots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Notemos que u é o ponto fixo para a substituição σ , uma vez que $\sigma(u) = u$.

Por outro lado, consideremos o espaço \mathbb{R}^3 com a base canônica $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e I_k os segmentos de origem O e de extremidade N_k tal que $\overrightarrow{ON_k} = \sum_{i=1}^k \bar{e}_{u_i}$, $u_1 \cdots u_k$ sendo a parte inicial do ponto fixo u de σ . Projetando os pontos N_k sobre um plano conveniente paralelamente ao vetor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \end{pmatrix}$, em que $\beta = \frac{1}{\theta}$ é a raiz real do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, obteremos um conjunto limitado nesse plano (figura abaixo). O fecho desse conjunto é o Fractal de Rauzy ([1]).



1.1.2 Segundo Método: Via Sistemas de Numeração

Seja $(T_n)_{n \geq 0}$ a sequência recorrente definida por $T_0 = 0, T_1 = 0, T_2 = 1, T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, para todo $n \geq 0$. Essa sequência é chamada de sequência de Tribonacci. É conhecido que, usando o algoritmo "greedy" (fominha), todo inteiro natural n pode ser representado de maneira única como soma de termos dessa sequência como $n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_i$, com $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ e $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0$, para todo $i \geq 3$ (ver [12]).

O número 21 por exemplo, pode ser escrito como soma de termos dessa sequência como $21 = 13 + 7 + 1 = T_7 + T_6 + T_3$. Logo, $21 = \sum_{i=3}^7 \varepsilon_i T_i$, em que $\varepsilon_3 = \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = 1$ e $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$.

Consideremos agora o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, o polinômio característico da sequência $(T_n)_{n \geq 0}$. Este polinômio possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes complexas conjugadas α e $\bar{\alpha}$ de módulo estritamente menor que 1.

Definimos o fractal de Rauzy como sendo o conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\}; \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0, \forall i \geq 3 \right\}.$$

Notações

Denotaremos por \mathcal{N} o conjunto $\mathcal{N} = \{(\varepsilon_i)_{i \geq l}, l \in \mathbb{Z}, \varepsilon_i \in \{0, 1\} \text{ e } \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0, \forall i \geq l\}$. Seja $(\varepsilon_i)_{i \geq l} \in \mathcal{N}$. Se existir p tal que para todo $i > p$, $\varepsilon_i = 0$, então essa sequência será denotada por $(\varepsilon_i)_{k \leq i \leq p}$ e o conjunto dessas sequências por \mathcal{N}_f . Seja $z \in \mathbb{C}$ e $X \subset \mathbb{C}$. Definimos $X + z = \{x + z \mid x \in X\}$ e $zX = \{zx \mid x \in X\}$. O interior de X será denotado por $\text{int}(X)$ e sua fronteira por ∂X .

1.2 Propriedades do Fractal de Rauzy

Nesta seção mostraremos as propriedades citadas anteriormente que o fractal de Rauzy possui, as quais estão resumidas no Teorema a seguir.

Teorema 1.2.1 *O fractal de Rauzy é um conjunto compacto de \mathbb{C} , conexo e com interior simplesmente conexo, além do mais ele induz um azulejamento periódico de \mathbb{C} módulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$, isto é, $\mathbb{C} = \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} (\mathcal{E} + u)$ e para todo $u, v \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$, se $u \neq v$ então $\text{int}(\mathcal{E} + u) \cap (\mathcal{E} + v) = \emptyset$.*

A demonstração deste teorema será feita através de várias proposições.

Proposição 1.2.1 *O conjunto \mathcal{E} é compacto.*

Demonstração:

Seja $(z_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de elementos em \mathcal{E} tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$. Vamos mostrar que $z \in \mathcal{E}$. Suponhamos que $z_n = \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i^{(n)} \alpha_i$ em que $(\varepsilon_i^{(n)})_{i \geq 3} \in \mathcal{N}$. Como \mathcal{N} está contido em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ que é compacto pela topologia produto das topologias discretas sobre $\{0, 1\}$, então existe uma subsequência $(\varepsilon_i^{(p_n)})_{i \geq 3}$ convergente para $(\varepsilon_i)_{i \geq 3}$ em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Pode-se provar que $(\varepsilon_i)_{i \geq 3}$ pertence a \mathcal{N} . Assim $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{p_n} = \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = z \in \mathcal{E}$. Logo \mathcal{E} é fechado. Por outro lado, $|\sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i| \leq \sum_{i=3}^{\infty} |\varepsilon_i \alpha^i| \leq \sum_{i=3}^{\infty} |\alpha|^i = \frac{|\alpha|^3}{1-|\alpha|}$. Logo \mathcal{E} é limitado. Portanto \mathcal{E} é compacto. \square

Definição 1.2.1 *Dizemos que uma sequência $(a_i)_{k \leq n \leq p}$ é superior lexicograficamente à sequência $(b_i)_{k' \leq n \leq p'}$ se existe um inteiro $s \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n > s$ $a_n = b_n$ e $a_s > b_s$.*

Proposição 1.2.2 *O Fractal de Rauzy induz um azulejamento periódico de \mathbb{C} módulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$.*

Para a demonstração usaremos a seguinte proposição (demonstração em Anexo):

Proposição 1.2.3 *As seguintes afirmações são válidas:*

1. Para todo $n \geq 3$ tem-se $\alpha^n = T_n \alpha^2 + (T_{n-1} + T_{n-2}) \alpha + T_{n-1}$. Em particular, para todo $(\varepsilon_i)_{3 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$ tem-se $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i = n \alpha^2 + a_n \alpha + b_n$ onde $n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_i$, $a_n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i (T_{i-1} + T_{i-2})$ e $b_n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_{i-1}$.
2. Seja $z \in \mathbb{Z}[\beta] \cap \mathbb{R}^+$ então existe $(\varepsilon_i)_{l \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$ tal que $z = \sum_{i=l}^N \varepsilon_i \beta^i$.
3. Sejam $(\varepsilon_i)_{l \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$ e $(\varepsilon'_i)_{l \leq i \leq \infty} \in \mathcal{N}$, onde $\varepsilon_l = \varepsilon'_l = 1$. Se $\sum_{i=l}^N \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$ então para todo $l \leq i \leq N$, $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ e para todo $i > N$, $\varepsilon'_i = 0$.
4. Seja $(\varepsilon_i)_{3 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$. Então $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i \in \text{int}(\mathcal{E})$. Em particular, $0 \in \text{int}(\mathcal{E})$.

5. Seja $\alpha^2 = c\alpha + d$, $c, d \in \mathbb{R}$. Então o conjunto $\{1, c, d\}$ é \mathbb{Q} -linearmente independente.
6. O conjunto $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ é discreto.
7. Sejam $(\varepsilon_i)_{3 \leq i \leq N}$ e $(\varepsilon'_i)_{3 \leq i \leq M}$ dois elementos de \mathcal{N} . Se (ε_i) é maior lexicograficamente que (ε'_i) , então $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_i > \sum_{i=3}^M \varepsilon'_i T_i$.

Observação 1.2.1 Sejam $(a_i)_{l \leq i \leq k}$ e $(b_i)_{l \leq i \leq k}$ duas sequências de números inteiros. Então $\sum_{i=l}^k a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^k b_i \alpha^i \iff \sum_{i=l}^k a_i \beta^i = \sum_{i=l}^k b_i \beta^i$.

Demonstração da Proposição 1.2.2:

1. Vamos provar que $\mathbb{C} = \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} (\mathcal{E} + u)$.

Pelo item (5) da Proposição 1.2.3 e usando o Teorema de Kronecker, deduzimos que o conjunto $\{n\alpha^2 + p\alpha + q, n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{C} . Seja $z \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que para todo $k \geq N$, $|z - z_k| < \varepsilon$, e para todo $k \geq N$, $z_k = n_k \alpha^2 + p_k \alpha + q_k$, $(n_k, p_k, q_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2$. Para todo k , sejam a_{n_k} e b_{n_k} os números definidos no item (1) da proposição anterior. Temos $z_k + (a_{n_k} - p_k)\alpha + (b_{n_k} - q_k) = n_k \alpha^2 + a_{n_k} \alpha + b_{n_k} = x_k \in \mathcal{E}$.

Para todo $k \geq N$, $|x_k - z_k| \leq |x_k - z| + |z - z_k| \leq \varepsilon + |z| + M$ onde $M = \max\{|x|, x \in \mathcal{E}\}$. Por outro lado como $x_k - z_k \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ que é um grupo discreto, então existe uma sequência crescente $(k_i)_{i \geq 1}$ de inteiros tais que para todo i , $x_{k_i} - z_{k_i} = y_0$, em que $y_0 = q + p\alpha$ pertence a $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$. Logo para todo $i \geq 1$, $|z - x_{k_i} + y_0| < \varepsilon$. Como \mathcal{E} é compacto e $x_{k_i} \in \mathcal{E}$, existe um elemento $z^* \in \mathcal{E}$ tal que $|z - z^* + y| \leq \varepsilon$. Logo $z \in \overline{(\mathcal{E} - y_0)} = \mathcal{E} - y_0$. Portanto obtemos o resultado.

2. Vamos provar que $\text{int}(\mathcal{E} + u) \cap (\mathcal{E} + v) \neq \emptyset$ implica que $u = v$. Basta provar que se $\text{int}(\mathcal{E} + u) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ então $u = 0$. Suponhamos que existam inteiros $p, q \in \mathbb{Z}$ e um elemento $z = \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \in \mathcal{E}$ tal que $z + p + q\alpha \in \text{int}(\mathcal{E})$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=3}^n \varepsilon_i \alpha^i + p + q\alpha = z + p + q\alpha$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\sum_{i=3}^n \varepsilon_i \alpha^i + p + q\alpha \in \text{int}(\mathcal{E}) \quad (1.1)$$

Caso 1. O conjunto $\{i \geq 3, \varepsilon_i \neq 0\}$ é infinito. Neste caso, como $\beta > 1$, então existe um inteiro $N \geq n_0$ tal que $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta > 0$.

Pelo item (2) da Proposição 1.2.3 deduzimos que

$$\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta = \sum_{i=l}^M d_i \beta^i \quad (1.2)$$

em que $(d_i)_{l \leq i \leq M} \in \mathcal{N}_f, l, M \in \mathbb{Z}$.

Por (1.1) e (1.2) temos que $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i + p + q\alpha = \sum_{i=3}^{\infty} e_i \alpha^i = \sum_{i=l}^M d_i \alpha^i \in \mathcal{E}$.

Assim, pelo item (3) da proposição 1.2.3, existe um inteiro $K \leq M$ tal que $e_i = 0$ para todo $i \geq K$. Logo

$$\sum_{i=3}^K \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta = \sum_{i=3}^K e_i \beta^i.$$

Pelo item (1) da proposição 1.2.3 temos

$$n\beta^2 + (r(n) + q)\beta + (s(n) + q) = l\beta^2 + r(l)\beta + s(l)$$

em que $n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_i$ e $l = \sum_{i=3}^K e_i T_i$. Logo $l = n$ e $\varepsilon_i = e_i$, para todo i , por causa da unicidade da representação na base T_i . Portanto $p = q = 0$.

Caso 2. O conjunto $\{i \geq 3, \varepsilon_i \neq 0\}$ é finito. Seja $N = \max\{i \geq 3, \varepsilon_i \neq 0\}$. Se $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta \geq 0$ então faremos como no caso 1.

Vamos supor que $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta < 0$. Temos que

$$\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i + p + q\alpha = \sum_{i=3}^{\infty} d_i \alpha^i.$$

Se $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i$ é um ponto interior de \mathcal{E} então existe um inteiro $M > 0$ tal que

$$-p - q\alpha + \sum_{i=3}^M d_i \alpha^i = \sum_{i=3}^{\infty} e_i \alpha^i \in \mathcal{E}.$$

Se $-p - q\beta + \sum_{i=3}^M d_i \beta^i > 0$ então

$$-p - q\alpha + \sum_{i=3}^M d_i \beta^i = \sum_{i=3}^{\infty} e_i \alpha^i = \sum_{i=l}^K f_i \alpha^i = \sum_{i=3}^{\infty} e_i \alpha^i$$

onde $(f_i)_{l \leq i \leq K} \in \mathcal{N}_f$ e $l, K \in \mathbb{Z}$.

Pelo item (3) da proposição 1.2.3 existe um inteiro L tal que $e_i = 0$ para todo $i \geq L$ e pelo mesmo argumento usado no Caso 1 obtemos $p = q = 0$.

□

Proposição 1.2.4 *O conjunto \mathcal{E} é conexo.*

Para essa demonstração precisamos da definição e do lema a seguir.

Definição 1.2.2 *Dizemos que um espaço métrico X satisfaz a Propriedade (E) se para todo x e y em X e para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência x_1, \dots, x_n de elementos de X tal que $x_1 = x$, $x_n = y$ e $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.*

Lema 1.2.1 *Seja X um espaço compacto. Então X é conexo se e somente se X satisfaz a Propriedade (E).*

Demonstração: Seja $x \in X$. Seja $Y_x = \{y \in X \mid \text{existe uma sequência } x_1, \dots, x_n \text{ com } x_1 = x, x_n = y \text{ e } |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon\}$. Temos que Y_x é aberto. De fato, pois se $y \in Y_x$ então a bola aberta com centro em y e raio $\varepsilon > 0$, $B(y, \varepsilon)$ está contida em Y_x . Por outro lado Y_x é fechado, pois se $z \notin Y_x$ e z' é um ponto de X tal que $|z - z'| < \varepsilon$ então z' também não pertence a Y_x , pois caso contrário, existiria uma sequência x_1, \dots, x_n tal que $x_1 = x$ e $x_n = z'$ e, tomando $x_{n+1} = z$, então obteríamos uma sequência x_1, \dots, x_n com $x_1 = x$ e $x_{n+1} = z$ ou seja, $z \in Y_x$, o que não ocorre pois tomamos $z \notin Y_x$.

Provemos a recíproca. Suponhamos que X satisfaça a Propriedade (E) e que X seja desconexo. Seja $X = A \cup B$, A e B uma desconexão para X . Vamos mostrar que a distância entre os conjuntos A e B é igual a 0. Sejam $x \in A$ e $y \in B$. Como por hipótese existe uma sequência x_1, \dots, x_n tal que $x_1 = x$, $x_n = y$, existem dois pontos consecutivos x_{n_0} e x_{n_0+1} que estão em A e B respectivamente tal que $|x_{n_0} - x_{n_0+1}| < \varepsilon$. Então a distância entre A e B , $d(A, B) < \varepsilon$, e assim para todo $\varepsilon > 0$, $d(A, B) = 0$. Por outro lado, como X é compacto, pode-se obter duas sequências $(a_n)_{n \geq 0}$ e $(b_n)_{n \geq 0}$, com $(a_n)_{n \geq 0}$ em A e $(b_n)_{n \geq 0}$ em B tal que $|a_n - b_n| \rightarrow 0$. Logo existem duas subsequências convergentes que convergem para um mesmo ponto, digamos, p . Como A e B são fechados então $p \in A$ e $p \in B$. Ou seja, $A \cap B \neq \emptyset$, o que contraria a hipótese. Portanto X é conexo. □

Demonstração da Proposição 1.2.4:

Como \mathcal{E} é compacto, precisamos mostrar somente que ele satisfaz a Propriedade (E). Sejam x e y dois elementos de \mathcal{E} . Mostremos por indução sobre k que existe uma sequência (x_1, \dots, x_n) pertencente a \mathcal{E} tal que $x_1 = x$, $x_n = y$ e para todo j pertencente a $\{1, \dots, n-1\}$, existe $(a_1, \dots, a_k) \in \{0, 1, 2\}^k$ tal que x_j e x_{j+1} pertencem a $\psi_{a_1} \circ \dots \circ \psi_{a_k}(\mathcal{E})$ onde os ψ_i são as funções de \mathbb{C} em \mathbb{C} definidas por:

$$\begin{aligned} \psi_0 : z &\mapsto \alpha z, \quad \psi_1 : z \mapsto \alpha^3 + \alpha^2 z \\ \text{e } \psi_2 : z &\mapsto \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 z. \end{aligned}$$

Para $k = 1$ a afirmação é válida. Suponhamos que seja válida para k e mostremos para $k+1$. Seja j um elemento de $\{1, \dots, n-1\}$ tal que x_j e x_{j+1} pertencem a $\psi_{a_1} \circ \dots \circ \psi_{a_k}(\mathcal{E})$. Como $\mathcal{E} = \bigcup_{i=0}^2 \psi_i(\mathcal{E})$ (proposição 4.0.1 em Anexo), necessariamente $x_j \in \psi_{a_1} \circ \dots \circ \psi_{a_k} \circ \psi_{a_{k+1}}(\mathcal{E})$ e $x_{j+1} \in \psi_{a_1} \circ \dots \circ \psi_{a_k} \circ \psi_{b_{k+1}}(\mathcal{E})$ onde os a_{k+1} e b_{k+1} pertencem a $\{0, 1, 2\}$. Agora seja $z_0 = \sum_{i=3}^{\infty} \alpha^i$, então

$$z_0 = \alpha^3 + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha^{3i+1} = \alpha^3 + \alpha^4 + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha^{3i+2} = \sum_{i=3}^{\infty} \alpha^{3i},$$

ou seja, z_0 pertence a $\bigcap_{i=0}^2 \psi_i(\mathcal{E})$. Segue que $\psi_{a_1} \circ \dots \circ \psi_{a_k}(z_0)$ é um ponto comum de $\psi_{a_1} \circ \dots \circ \psi_{a_k} \circ \psi_{a_{k+1}}(\mathcal{E})$ e $\psi_{a_1} \circ \dots \circ \psi_{a_k} \circ \psi_{b_{k+1}}(\mathcal{E})$.

Logo podemos ligar dois pontos quaisquer de \mathcal{E} por uma sequência (x_1, \dots, x_n) que satisfaça

$$|x_{j+1} - x_j| \leq |\alpha|^k \times \text{diam}(\mathcal{E}).$$

Tomando k arbitrariamente grande obtemos o resultado. □

Proposição 1.2.5 *O interior de \mathcal{E} é simplesmente conexo.*

Demonstração:

Consideremos Γ como sendo uma curva de Jordan simples e fechada contida no $\text{int}(\mathcal{E})$. Seja C a componente conexa limitada de Γ (C é o aberto compreendido por Γ) e C' a componente conexa não-limitada. Mostremos que C está no $\text{int}(\mathcal{E})$.

Primeiramente vamos mostrar que $\alpha C \cap \mathcal{E} \subset \alpha \mathcal{E}$. De fato, seja z_0 pertencente à $\alpha C \cap \mathcal{E}$, suponhamos que z_0 não pertence à $\alpha \mathcal{E}$, logo existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $z_0 \in \mathcal{E}_i$, em que $\mathcal{E}_0 = \alpha \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1 = \alpha^3 + \alpha^2 \mathcal{E}$ e $\mathcal{E}_2 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2 \mathcal{E}$. O conjunto $\alpha \Gamma$ está contido em $\text{int}(\alpha \mathcal{E})$, façamos

$$r = d(\alpha \Gamma, \mathbb{C} - \text{int}(\alpha \mathcal{E})) = \inf\{|x - y|; x \in \alpha \Gamma, y \in \mathbb{C} - \text{int}(\alpha \mathcal{E})\}.$$

O conjunto \mathcal{E}_i está incluído em $\mathbb{C} - \text{int}(\alpha \mathcal{E})$, logo, $d(\mathcal{E}_i, \alpha \Gamma) > r$. Como \mathcal{E}_i é conexo e a interseção de \mathcal{E}_i com αC não é vazia segue que ele está incluído em αC . Por outro lado, os conjuntos \mathcal{E}_j , j em $\{0, 1, 2\}$ tem um ponto em comum que pertence à αC (pois $\mathcal{E}_i \subset \alpha C$). Logo \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 estão contidos em αC , assim:

$$\alpha C' \cap \mathcal{E} \subset \alpha \mathcal{E}.$$

Seja z um elemento de \mathcal{E} tal que $|x| = \max\{|z|; z \in \mathcal{E}\}$, então x deve pertencer à $\alpha C'$, e portanto pertence à $\alpha \mathcal{E}$. Mas isto é impossível, pois assim $\frac{x}{\alpha}$ seria um elemento de \mathcal{E} de módulo estritamente maior do que o módulo de x . Portanto, $\alpha C \cap \mathcal{E} \subset \alpha \mathcal{E}$.

Temos que $\alpha C \cap \mathcal{E} \subset \alpha \mathcal{E}$ implica que $\alpha C \cap \mathcal{E} = \alpha C \cap \alpha \mathcal{E}$. Aplicando o mesmo raciocínio para a curva $\alpha^{n-1} \Gamma$ obtemos

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha^n C \cap \mathcal{E} = \alpha^n C \cap \alpha \mathcal{E}.$$

Vamos mostrar por indução que $\alpha^n C \cap \mathcal{E} = \alpha^n C \cap \alpha^n \mathcal{E}$.

De fato, esta propriedade é válida para $n = 0$. Suponhamos que seja válida para n e provemos para $n + 1$, então

$$\alpha^{n+1}C \cap \mathcal{E} = \alpha^{n+1}C \cap \alpha\mathcal{E} = \alpha \times (\alpha^n C \cap \mathcal{E}) = \alpha \times (\alpha^n C \cap \alpha^n \mathcal{E}) = \alpha^{n+1}C \cap \alpha^{n+1}\mathcal{E}.$$

Seja z um elemento de C , como 0 é ponto interior de \mathcal{E} , existe um inteiro natural n tal que $\alpha^n z$ pertence à \mathcal{E} e assim pertence também à $\alpha^n C \cap \alpha^n \mathcal{E}$. Consequentemente z é um elemento de \mathcal{E} . Logo $C \subset \mathcal{E}$. Como C é um aberto, $\partial\mathcal{E} \subset C = \emptyset$, o que implica que $C \subset \text{int}(\mathcal{E})$. □

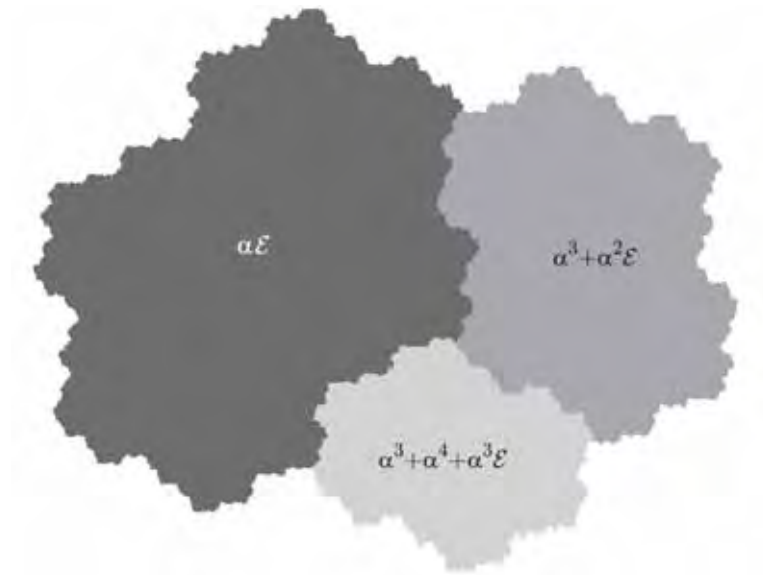


Figura 1. Fractal de Rauzy.

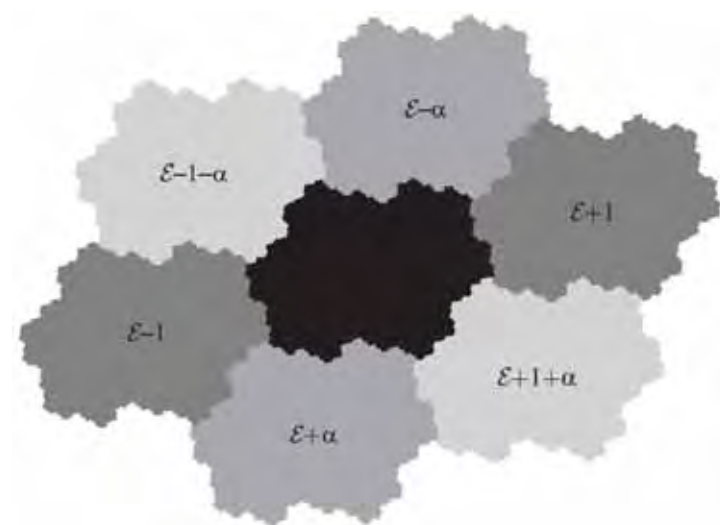


Figura 2. Azulejamento periódico do plano através do fractal de Rauzy.

Capítulo 2

Caracterização da Fronteira de \mathcal{E}

O objetivo deste capítulo é estudar a fronteira do fractal de Rauzy. Veremos que ele possui 6 vizinhos e que os pontos que compõem sua fronteira estão relacionados com os pontos que possuem várias α -representações. A partir deste fato, construiremos um autômato que permite obter todos os pontos pertencentes a fronteira do fractal.

Proposição 2.0.6 *A Fronteira de \mathcal{E} satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\partial\mathcal{E} = \bigcup_{u \in A} \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + u)$, em que $A = \{\pm 1, \pm \alpha, \pm(1 + \alpha)\}$.
2. Seja $z \in \partial\mathcal{E}$ então $z = \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 3}, (\varepsilon'_i)_{i \geq l} \in \mathcal{N}$ e $l < 3$.

Demonstração:

1. Seja $z \in \partial\mathcal{E} = \overline{\mathcal{E}} \setminus \text{int}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \setminus \text{int}(\mathcal{E})$. Como $\mathbb{C} = \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} (\mathcal{E} + u)$, então existe uma sequência $(z_n)_{n \geq 0}$ de elementos de \mathbb{C} tal que

$$\lim z_n = z \text{ e } z_n \notin \mathcal{E}, \forall n \geq 0.$$

Pela proposição 1.2.2 existe uma sequência $(u_n)_{n \geq 0}$ de elementos de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}$ tal que $z_n \in \mathcal{E} + u_n$, para todo $n \geq 0$. Logo $(u_n)_{n \geq 0}$ é limitada. Como $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ é um grupo discreto então $(u_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência que possui um número finito de termos. Assim, existe uma subsequência $(u_{k_n})_{n \geq 0}$ de $(u_n)_{n \geq 0}$ tal que $u_{k_n} = u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}$. Como $z_{k_n} \in \mathcal{E} + u_{k_n} = \mathcal{E} + u$ temos que

$$z = \lim z_{k_n} \in \mathcal{E} + u,$$

pois $\mathcal{E} + u$ é fechado. Portanto $\partial\mathcal{E} \subset \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + u)$.

Por outro lado, se $z \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + u)$, $u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}$, como $\text{int}(\mathcal{E}) \cap (\mathcal{E} + u) = \emptyset$, então $z \notin \text{int}(\mathcal{E})$. Portanto $z \in \partial\mathcal{E}$.

Portanto, $\partial\mathcal{E} = \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + u) = \bigcup_{u \in A} \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + u)$, em que $A = \{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}, \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + u) \neq \emptyset\}$.

Agora vamos provar que $A = \{\pm 1, \pm \alpha, \pm(1 + \alpha)\}$.

Seja $u = p + q\alpha \neq 0$ e suponhamos que $\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + u) \neq \emptyset$.

Assim,

$$p + q\alpha + \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i, \quad (2.1)$$

em que $(\varepsilon_i)_{i \geq 3}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 3} \in \mathcal{N}$.

A equação (2.1) pode ser reescrita como

$$p + q\alpha + \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_i \alpha^{3i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \omega_i \alpha^{3i},$$

com $\gamma_i, \omega_i \in S = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, 1 + \alpha, 1 + \alpha^2, \alpha + \alpha^2\}$.

Assim,

$$p + q\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} (\omega_i - \gamma_i) \alpha^{3i}.$$

Logo,

$$|p + q\alpha| = \left| \sum_{i=1}^{+\infty} (\omega_i - \gamma_i) \alpha^{3i} \right| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |(\omega_i - \gamma_i)| |\alpha|^{3i} \leq 2 \frac{|\alpha|^3}{1 - |\alpha|^3}.$$

Seja $K = 2 \frac{|\alpha|^3}{1 - |\alpha|^3}$. Então $K < 2|\alpha|$.

Analisemos os valores possíveis para p e q .

Caso 1. Se $p = 0$ e $q \neq 0$, então

$$|p + q\alpha| = |q\alpha|.$$

Como $|q\alpha|$ tem que ser menor que K , então os possíveis valores que q pode assumir são $q = 1$ ou $q = -1$.

Caso 2. Se $q = 0$ e $p \neq 0$. Nesse caso $|p + q\alpha| = |p|$.

Como no caso acima, os únicos valores que p pode assumir são $p = 1$ ou $p = -1$.

Caso 3. Se $q \neq 0$ e $p \neq 0$. Nesse caso, para que $|p + q\alpha| < K$ podem ocorrer somente três situações: $p = q = 1$, $p = q = -1$ ou $p = 1$ e $q = 2$. Vamos mostrar que podemos desconsiderar o caso $p = 1$ e $q = 2$.

De fato, temos

$$1 + 2\alpha = \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i - \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i$$

ou

$$1 + 2\alpha + \varepsilon_3\alpha^3 - \varepsilon'_3\alpha^3 = \sum_{i=4}^{+\infty} \varepsilon'_i\alpha^i - \sum_{i=4}^{+\infty} \varepsilon_i\alpha^i.$$

Então

$$|1 + 2\alpha + (\varepsilon_3 - \varepsilon'_3)\alpha^3| = \left| \sum_{i=4}^{+\infty} (\varepsilon'_i - \varepsilon_i)\alpha^i \right| \leq 1,33|\alpha| = K'.$$

Por outro lado, temos que $|1 + 2\alpha| > K'$, $|1 + 2\alpha + \alpha^3| > K'$ e $|1 + 2\alpha - \alpha^3| > K'$, o que é uma contradição. Logo podemos excluir esse caso.

Portanto o conjunto $A = \{\pm 1, \pm\alpha, \pm(1 + \alpha)\}$.

2. Seja $z \in \partial\mathcal{E}$, então existe $u \in A$ tal que

$$z = u + \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i\alpha^i = \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon'_i\alpha^i.$$

Caso 1. Se $u \in \{1, \alpha, 1 + \alpha\}$. Não há o que demonstrar.

Caso 2. Se $u = -1$. Então,

$$z = -1 + \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i\alpha^i = \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon'_i\alpha^i.$$

Seja $t = \min\{i, \varepsilon_i \neq 0\}$. Logo,

$$z = -1 + \alpha^t + \sum_{i=t+1}^{+\infty} \varepsilon_i\alpha^i = \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i\alpha^i.$$

Por outro lado, temos $\beta^t - 1 \in \mathbb{Z}[\beta] \cap \mathbb{R}^+$, pois $\beta > 1$

Pela proposição 1.2.3, item (2),

$$-1 + \beta^t = \sum_{i=l}^k \varepsilon''_i\beta^i,$$

em que $(\varepsilon''_i)_{l \leq i \leq k} \in \mathcal{N}_f$, $\varepsilon''_k > 0$.

Logo,

$$\beta^t = 1 + \sum_{i=l}^k \varepsilon''_i\beta^i,$$

em que $\varepsilon''_k > 0$. Logo $k < t$.

Portanto,

$$\beta^t = 1 + \sum_{i=l}^{t-1} \varepsilon''_i\beta^i.$$

Então,

$$\alpha^t = 1 + \sum_{i=l}^{t-1} \varepsilon''_i\alpha^i.$$

A sequência $10 \cdots 0\varepsilon''_l\varepsilon''_{l+1} \cdots \varepsilon''_{t-1} \notin \mathcal{N}_f$ pois senão obteríamos uma contradição com o item (3) da Proposição 1.2.3.

Logo $l \leq 1$ e portanto $l < 3$.

Assim,

$$-1 + \alpha^t = \sum_{i=l}^{t-1} \varepsilon_i'' \alpha^i, \text{ com } l < 3$$

Portanto,

$$z = \sum_{i=l}^{t-1} \varepsilon_i'' \alpha^i + \sum_{i=t+1}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i' \alpha^i,$$

em que $l < 3$, $(\varepsilon_i'')_{i \geq l}$ e $(\varepsilon_i')_{i \geq 3} \in \mathcal{N}$.

Os outros dois casos são obtidos do mesmo modo.

□

2.1 Relação com as representações impróprias na base α

Como 0 está contido no interior de \mathcal{E} (Proposição 1.2.3) e o módulo de α é menor que 1, então para todo número complexo z , existe um inteiro k tal que $\alpha^k z \in \mathcal{E}$. Desse modo todo número complexo z pode ser escrito na base α como $z = \sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i$, onde $l \in \mathbb{Z}$ e $(\varepsilon_i)_{i \geq l} \in \mathcal{N}$. A sequência $(\varepsilon_i)_{i \geq l}$ será chamada de uma α -representação de z . Pelo item (2) da proposição 2.0.6, um ponto da fronteira de \mathcal{E} tem pelo menos duas α -representações. Por outro lado, um número complexo z que tenha pelo menos duas α -representações distintas pode ser escrito como $z = \sum_{i=k}^L a_i \alpha^i + \alpha^N x$ em que $(a_i) \in \mathcal{N}$ é a parte inicial comum das duas α -representações de z e N um inteiro relativo escolhido de forma que $x \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + v)$, onde $v \in \{1, \alpha, \alpha^2, 1 + \alpha, 1 + \alpha^2, \alpha + \alpha^2\}$. Assim $x \in \partial\mathcal{E}$. Vemos então que o problema da fronteira de \mathcal{E} está relacionado com os números complexos que possuem várias α -representações.

Teorema 2.1.1 *Sejam $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$ e $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$, em que as seqüências $(a_i)_{i \geq l}$ e $(b_i)_{i \geq l}$ pertencem à \mathcal{N} . Então existe um inteiro $s = s(\beta) \leq 2$ tal que $x = y$ se e somente se para todo $k \geq l$, tem-se $x(k) - y(k) \in S = \{\pm \sum_{i=s}^2 \varepsilon_i \alpha^i, (\varepsilon_i)_{s \leq i \leq 2} \in \mathcal{N}_f\}$ em que*

$$x(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k a_i \alpha^i \text{ e } y(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k b_i \alpha^i, \forall k \geq l.$$

Demonstração:

Temos,

$$\alpha^{k-2}(x(k) - y(k)) = \sum_{i=l}^k a_i \alpha^i - \sum_{i=l}^k b_i \alpha^i.$$

Se $x(k) - y(k) \in S$, então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^{k-2}(x(k) - y(k)) = 0 = x - y,$$

pois $|\alpha| < 1$. Logo $x = y$.

Vamos provar a implicação direta. Sejam $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$ e $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$. Suponhamos que $x = y$, portanto $\alpha^{-k+2}x = \alpha^{-k+2}y$, então

$$x(k) - y(k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} (b_i - a_i) \alpha^{i-k+2} = \sum_{i=3}^{\infty} (b_{i+k-2} - a_{i+k-2}) \alpha^i.$$

Por outro lado,

$$x(k) - y(k) = \sum_{i=l}^k (a_i - b_i) \alpha^{i-k+2} = \alpha^{l-k-1} \sum_{i=3}^{l+k+3} c_i \alpha^i.$$

em que $c_i = a_{i-l-3} - b_{i-l-3}$.

Pelo item (1) da proposição 1.2.3, $x(k) - y(k) = \alpha^{l-k-1}(n\alpha^2 + (p+q)\alpha + p)$, com

$$n = \sum_{i=3}^{l+k+3} c_i T_i, p = \sum_{i=3}^{l+k+3} c_i T_{i-1}, q = \sum_{i=3}^{l+k+3} c_i T_{i-2}.$$

Suponhamos que $c_{l+k+3} = 1$, logo $a_k = 1$ e $b_k = 0$. Portanto a sequência $(a_i)_{l \leq i \leq k}$ é maior lexicograficamente que $(b_i)_{l \leq i \leq k}$. Assim, pelo item (7) da proposição 1.2.3 temos que n, p e q são positivos, e então $x(k) - y(k) \in \mathbb{Z}^+[\alpha]$. Da mesma forma $x(k) - y(k) \in \mathbb{Z}^-[\alpha]$ se $c_{l+k+3} = -1$. Logo, pelo item (2) da proposição 1.2.3,

$$x(k) - y(k) = \pm \sum_{i=s}^m \varepsilon_i \alpha^i \text{ em que } (\varepsilon_i)_{s \leq i \leq m} \in \mathcal{N}.$$

Suponhamos que $x(k) = y(k) = \sum_{i=s}^m \varepsilon_i \alpha^i$. Então,

$$x(k) = \sum_{i=s}^{m'} \varepsilon'_i \alpha^i \text{ em que } (\varepsilon'_i)_{s \leq i \leq m} \in \mathcal{N} \text{ e } m' \geq m.$$

Como $x(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k a_i \alpha^i$, apelo item (3) da proposição 1.2.3 implica que $m' = 2$, logo, $m \leq 2$.

Portanto,

$$\sum_{i=3}^{\infty} (b_{i+k-2} - a_{i+k-2}) \alpha^i = \pm \sum_{i=s}^m \varepsilon_i \alpha^i, s \leq m \leq 2.$$

Colocando $\varepsilon_i = 0, \forall m \leq i \leq 2$, então

$$x(k) - y(k) = \sum_{i=s}^2 \varepsilon_i \alpha^i.$$

□

Observação 2.1.1

1. Denotaremos por $A_k = x(k) - y(k) = \sum_{i=s}^2 \varepsilon_i \alpha^i$.
2. Definimos $\tilde{A}_k = \sum_{i=s}^2 \varepsilon_i \beta^i$. Segue da proposição anterior que $\tilde{A}_k < \beta^3$.
3. Adiante provaremos que

$$S = \{0, \pm 1, \pm \alpha, \pm(1 + \alpha), \pm(1 + \alpha^2), \pm(\alpha + \alpha^2), \pm\alpha^2\}. \quad (2.2)$$

2.1.1 Construção Algorítmica dos números complexos duplos

Definição 2.1.1 Dizemos que um número complexo é duplo se ele tem pelo menos duas α -representações distintas.

Sejam $x = \sum_l^\infty a_l \alpha^l$ e $y = \sum_l^\infty b_l \alpha^l$. Suponhamos que $x = y$ e coloquemos, para todo $k \geq l$, $A_k = x(k) - y(k)$. Dessa forma,

$$A_{k+1} = \frac{A_k}{\alpha} + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 \quad (2.3)$$

Seja t o menor inteiro tal que $a_t \neq b_t$. Então $A_i = 0$ para todo i em $\{l, \dots, t-1\}$. Suponhamos que $(a_t, b_t) = (1, 0)$, logo $A_t = \alpha^2$. Por (2.2) e (2.3) temos

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= \alpha + (a_{t+1} - b_{t+1})\alpha^2 = \\ &= \begin{cases} \alpha + \alpha^2, & \text{se } (a_{t+1}, b_{t+1}) = (1, 0), \\ \alpha, & \text{se } (a_{t+1}, b_{t+1}) = (0, 0) \text{ ou } (1, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Definição 2.1.2 Um **autômato finito** é a uma terna (S, A, C) , onde A é o alfabeto do autômato, S o conjunto dos estados e C um subconjunto de $S \times S \times A$.

Observação 2.1.2 Podemos adicionar ao autômato um conjunto I dos estados iniciais e um conjunto F dos estados finais. Neste trabalho vamos precisar somente do conjunto dos estados iniciais, I .

Definição 2.1.3 Dizemos que uma palavra $a_1 \cdots a_n$ (resp. uma palavra infinita $a_1 \cdots a_n \cdots$) é **reconhecível pelo autômato** (S, A, C) , se existe uma palavra $s_0 \cdots s_n$ de A^* , $s_0 \in I$ (resp. uma sequência $(s_n \in A^{\mathbb{N}})$ tal que $s_{i-1}, s_i, a_i \in C$, para $i = 1, \dots, n$ (resp. para todo $i \in \mathbb{N}$).

Construiremos um autômato \mathcal{B} cujos estados são elementos do conjunto S . Sejam V e W dois elementos de S . Colocaremos uma flecha nomeada por $(x, y) \in \{0, 1\}$ que vai de V a W se e somente se $W = \frac{V}{\alpha} + (x - y)\alpha^2$. O estado inicial do autômato \mathcal{B} será denotado por 0, estado esse em que as duas α -representações ainda são iguais.

O estado inicial será ligado ao estado α^2 por uma flecha nomeada por $(1, 0)$. O estado α^2 é ligado ao estado $\alpha + \alpha^2$ por uma flecha nomeada $(1, 0)$ e ao estado α por duas flechas, uma nomeada por $(0, 0)$ e outra nomeada $(1, 1)$. Como o conjunto dos estados S é finito, obteremos um autômato finito (figura 3).

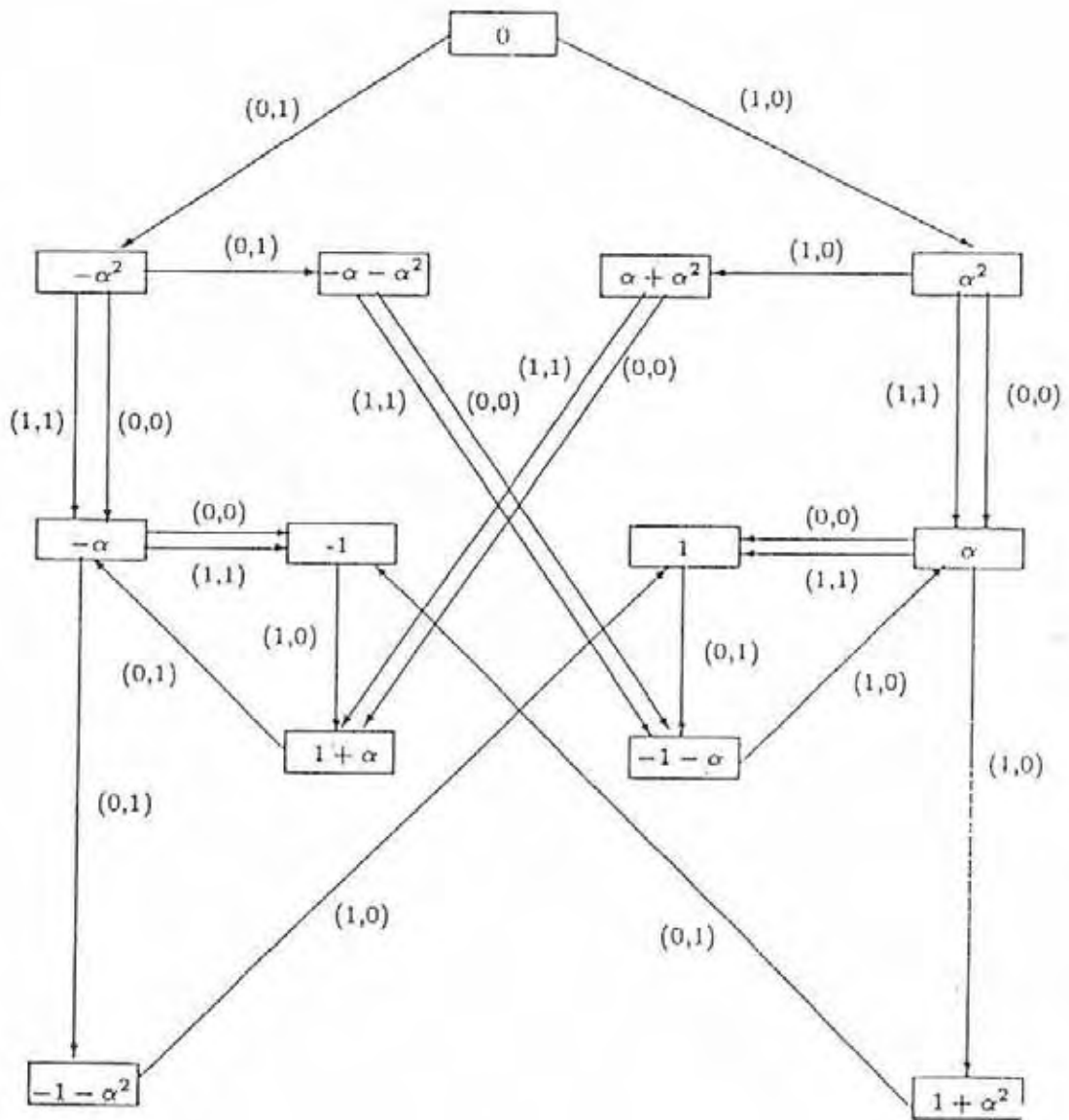


Figura 3. Representação do autômato \mathcal{B} .

Como consequência do Teorema 2.1.1 temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.2 *Sejam $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(b_i)_{i \geq 1}$ dois elementos distintos de \mathcal{N} , então $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha^i$ se e somente se a sequência $((a_i, b_i))_{i \geq 1}$ é reconhecível pelo autômato \mathcal{B} .*

Teorema 2.1.3 *O conjunto dos estados do autômato é*

$$S = \{0, \pm 1, \pm \alpha, \pm(1 + \alpha), \pm(1 + \alpha^2), \pm(\alpha + \alpha^2), \pm\alpha^2\}.$$

Demonstração:

Denotaremos os elementos de S por $A_k = n_k + p_k \alpha + q_k \alpha^2$, $n_k, p_k, q_k \in \mathbb{Z}$.

Seja $t = \max\{|n_k|, k \geq 0\}$. Suponhamos que $t = 1$, então existe $k \geq 0$ tal que

$$A_k = 1 + p\alpha + q\alpha^2, p, q \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$A_{k+1} = \frac{1}{\alpha} + p + q\alpha + d\alpha^2, \text{ onde } |d| \leq 1.$$

Dessa forma,

$$A_{k+1} = (p - 1) + (q - 1)\alpha + (d + 1)\alpha^2.$$

Como $t = 1$ então $-1 \leq p - 1 \leq 1$, isto é, $p \in \{0, 1, 2\}$.

Vamos analisar o que ocorre com cada A_{k+1} para os possíveis valores de p .

Caso 1. $p = 2$.

Então,

$$A_{k+1} = 1 + (q - 1)\alpha + (d + 1)\alpha^2.$$

Repetindo o mesmo raciocínio que acima obtemos que $q \in \{0, 1, 2\}$.

Temos $A_k = 1 + 2\alpha + q\alpha^2$. Logo,

$$\tilde{A}_k = 1 + 2\beta + q\beta^2.$$

Caso 1.1. Se $q = 1$ ou $q = 2$ então

$$\tilde{A}_k \geq 1 + 2\beta + \beta^2 > \beta^3.$$

Absurdo, pelo item (2) da observação 2.1.1.

Caso 1.2. Se $q = 0$ então,

$$A_k = 1 + 2\alpha,$$

$$A_{k+1} = 1 - \alpha + (d + 1)\alpha^2$$

e

$$A_{k+2} = -1 + \alpha + (f + 1)\alpha^2, |f| \leq 1.$$

Absurdo, pelo item (2) da observação 2.1.1.

Caso 2. $p = 1$

Nesse caso temos:

$$\begin{aligned}A_k &= 1 + \alpha + q\alpha^2, \\A_{k+1} &= (q - 1)\alpha + (d + 1)\alpha^2\end{aligned}$$

e

$$A_{k+2} = (q - 1)\alpha + (d + 1)\alpha + f\alpha^2, |f| \leq 1.$$

Logo $-1 \leq q - 1 \leq 1$, ou seja, $q \in \{0, 1, 2\}$.

Caso 2.1. Se $q = 1$ ou $q = 2$.

Nesses casos

$$\tilde{A}_k \geq 1 + \beta + \beta^2 = \beta^3.$$

Absurdo.

Caso 2.2. Se $q = 0$, então

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{1} + \alpha.$$

Logo $A_k = 1 + \alpha$ é um estado válido.

Caso 3. $p = 0$.

Temos

$$\begin{aligned}A_k &= 1 + q\alpha^2, \\A_{k+1} &= -1 + (q - 1)\alpha + (d + 1)\alpha^2\end{aligned}$$

e

$$A_{k+2} = q + (d + 2)\alpha + (f + 1)\alpha^2.$$

Dessa forma, $q \in \{0, 1, -1\}$.

Vamos estudar os comportamento de cada A_k para os possíveis valores que q pode assumir.

Caso 3.1. Se $q = 0$, então

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{1},$$

o qual é um estado válido.

Caso 3.2. Se $q = 1$, então

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{1} + \alpha^2,$$

Vemos então que $A_k = 1 + \alpha^2$ também é um estado válido.

Caso 3.3. Se $q = -1$ então $A_k = 1 - \alpha^2$ e $A_{k+1} = -1 - 2\alpha + (d + 1)\alpha^2$.

Assim, $-A_{k+1} = 1 + 2\alpha - (d + 1)\alpha^2 \in S$, o que é um absurdo pelo Caso 1.

Portanto $A_k \in \{1, 1 + \alpha, 1 + \alpha^2\}$.

Agora seja $A_k = n_k + p_k + q_k\alpha^2 \in S$, tal que $n_k = 0$. Dessa forma, $A_k = p\alpha + q\alpha^2$ e $A_{k+1} = p + q\alpha + d\alpha^2$, em que $|d| \leq 1$. Logo, $p \in \{-1, 0, 1\}$.

Novamente vamos analisar o que ocorre com cada A_k para esses valores de p .

- Se $p = 0$, então $A_k = q\alpha^2$ e $A_{k+1} = q\alpha + d\alpha^2$. Assim $q \in \{0, 1, -1\}$.

Portanto $A_k \in \{0, \alpha^2, -\alpha^2\}$.

- Se $p = 1$, então $A_{k+1} = 1 + q\alpha + d\alpha^2$. Logo $q \in \{0, 1\}$.

Portanto $A_k \in \{\alpha, \alpha + \alpha^2\}$.

- Se $p = -1$, então $A_{k+1} = -1 + q\alpha + d\alpha^2$. Logo $q \in \{0, -1\}$.

Portanto $A_k \in \{-\alpha, -\alpha - \alpha^2\}$.

Suponhamos agora que $t \geq 2$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_k = t + p\alpha + q\alpha^2.$$

Logo,

$$A_{k+1} = (p - t) + (q - t)\alpha + (d + t)\alpha^2,$$

em que $|d| \leq 1$. Então $-r \leq p - t \leq t$, isto é $0 \leq p \leq 2t$.

Temos,

$$A_{k+2} = (q - p) + (d + 2t - p)\alpha + e\alpha^2, |e| \leq 1.$$

e

$$A_{k+3} = (d + 2t - q) + (e - q + p)\alpha + (f + q - p)\alpha^2, |f| \leq 1.$$

Logo $-t \leq d + 2t - q \leq t$ ou seja, $t + d \leq q \leq 3t + d$. Como $-1 \leq d \leq 1$, então $t - 1 \leq q \leq 3t + 1$.

Caso 1. Se $p \geq 1$.

Nesse caso,

$$\tilde{A}_k = t + p\beta + q\beta^2 \geq t + \beta + (t - 1)\beta^2 > 1 + \beta + \beta^2 = \beta^3.$$

Absurdo.

Caso 2. Se $p \geq 0$ e $q \geq t$.

Para esse caso,

$$\tilde{A}_k = t + q\beta^2 \geq t + t\beta^2 \geq 2 + 2\beta^2 > 2 + \beta + \beta^2 > \beta^3.$$

Absurdo.

Caso 3. Se $p = 0$ e $q = t - 1$.

Temos então,

$$\tilde{A}_k = t + (t - 1)\beta^2.$$

Caso 3.1 Se $t \geq 3$ então $\tilde{A}_k \geq 3 + 2\beta^2 > \beta^3$.

Absurdo.

Caso 3.2 Se $t = 2$, então $A_k = 2 + \alpha^2$ e $A_{k+1} = -2 - \alpha + (d + 2)\alpha^2$.

Dessa forma,

$$-A_{k+1} = 2 + 2 - (d + 2)\alpha^2 \in S.$$

Absurdo, pelo Caso (1).

Portanto o conjunto $S = \{0, \pm 1, \pm \alpha, \pm(1 + \alpha), \pm(1 + \alpha^2), \pm(\alpha + \alpha^2), \pm\alpha^2\}$.

□

Observação 2.1.3 *Existem seqüências $((a_i, b_i))_i$ reconhecíveis pelo autômato \mathcal{B} tais que $(a_i)_i$ ou $(b_i)_i$ que não pertencem à \mathcal{N} (a seqüência $(a_i)_i$ ou $(b_i)_i$ contém três “1” consecutivos). Pode-se retirar essas seqüências. Construiremos portanto um autômato dos complexos duplos a partir do autômato \mathcal{B} da seguinte maneira: Substituiremos o estado α por dois estados $(\alpha, 0)$ e $(\alpha, 1)$ e o estado $-\alpha$ pelos estados $(-\alpha, 0)$ e $(-\alpha, 1)$; e excluiremos a flecha nomeada $(1, 1)$ que liga o estado $\alpha + \alpha^2$ ao estado $1 + \alpha$ e o estado $-\alpha - \alpha^2$ ao estado $-1 - \alpha$. Obteremos então o autômato seguinte (figura 4).*

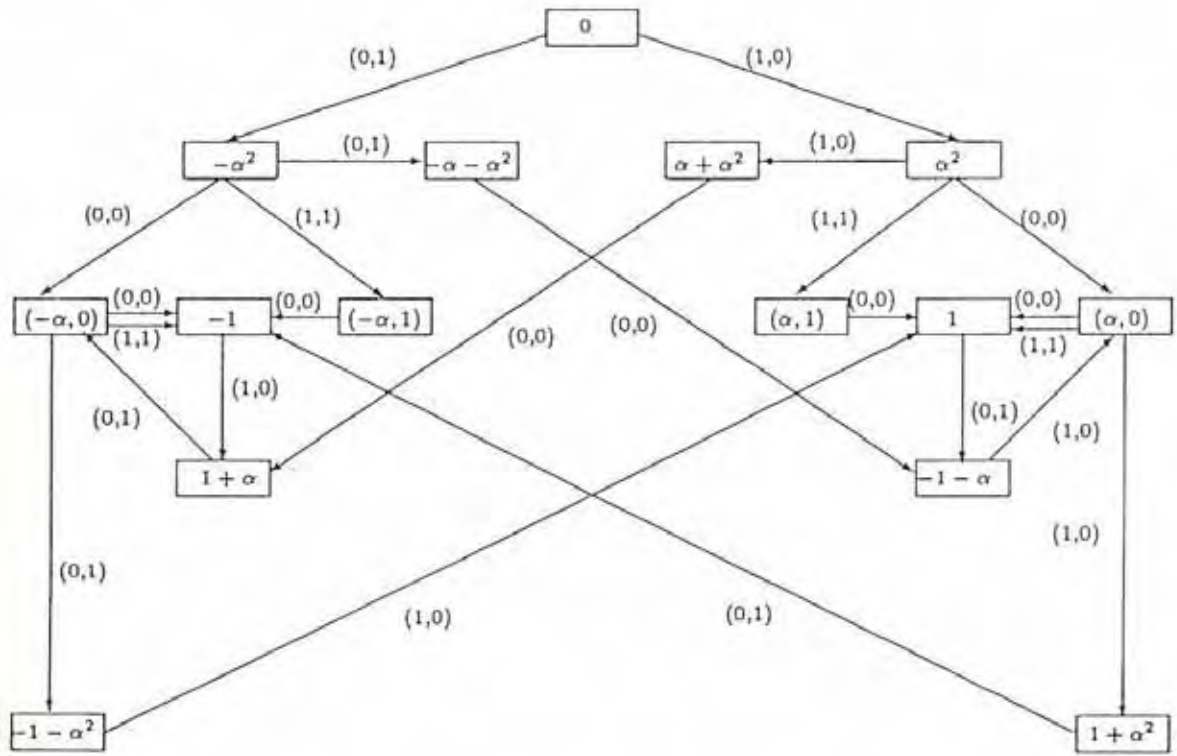


Figura 4.

2.1.2 Números complexos triplos

Definição 2.1.4 Dizemos que um número complexo é triplo se ele possui três α -representações diferentes.

Sejam $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$, $y = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$ e $z = \sum_{i=l}^{\infty} c_i \alpha^i$. Suponhamos que $x = y = z$, e definimos para todo inteiro k maior ou igual a l

$$A_k = x(k) - y(k), B_k = y(k) - z(k), C_k = z(k) - x(k)$$

e

$$S_k = (A_k, B_k, C_k).$$

Pelo Teorema 2.1.1 para todo $k \geq l$, $S_k \in S^3$.

Construiremos um autômato \mathcal{C} em que os estados são os S_k . Dois estados S_k e S_{k+1} são ligados pelas flechas nomeadas por $(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1})$. O estado inicial do autômato será denotado por $(0, 0, 0)$. Seja t o menor inteiro maior que l tal que $(a_t, b_t, c_t) \neq (a_t, a_t, a_t)$. Podemos supor que $(a_t, b_t, c_t) = (1, 1, 0)$ ou $(0, 0, 1)$ e que existe um inteiro $k \geq l$ tal que $a_k = 1$ e $b_k = 0$ e para todo $i \in \{l, \dots, k-1\}$, $a_i = b_i$.

Suponhamos que $(a_t, b_t, c_t) = (1, 1, 0)$, e então $S_t = (0, \alpha^2, -\alpha^2)$. Portanto, utilizando a relação que liga S_t a S_{t+1} obtemos

$$S_{t+1} = \begin{cases} (0, \alpha + \alpha^2, -\alpha - \alpha^2), & \text{se } (a_{t+1}, b_{t+1}, c_{t+1}) = (1, 1, 0), \\ (0, \alpha, -\alpha), & \text{se } (a_{t+1}, b_{t+1}, c_{t+1}) = (0, 0, 0) \text{ ou } (1, 1, 1), \\ (\alpha^2, \alpha, -\alpha - \alpha^2), & \text{se } (a_{t+1}, b_{t+1}, c_{t+1}) = (1, 0, 0), \\ (-\alpha^2, \alpha + \alpha^2, -\alpha), & \text{se } (a_{t+1}, b_{t+1}, c_{t+1}) = (0, 1, 0). \end{cases}$$

Excluiremos o estado $S_{t+1} = (-\alpha^2, \alpha + \alpha^2, -\alpha)$, pois caso contrário, estaríamos no caso $a_{t+1} = 0$ e $b_{t+1} = 1$ o que contradiz a hipótese acima.

Estudando todos os casos (ver [7]) obteremos o autômato \mathcal{C} (fig. 5) e o seguinte Teorema:

Teorema 2.1.4 Sejam $(a_i)_{i \geq l}$, $(b_i)_{i \geq l}$ e $(c_i)_{i \geq l}$ três elementos distintos de \mathcal{N} , então

$$\sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} c_i \alpha^i$$

se e somente se a sequência $((a_i, b_i, c_i))_{i \geq l}$ é reconhecível pelo autômato \mathcal{C} (as sequências (a_i) , (b_i) e (c_i) podem ser permutadas).

Observação 2.1.4 *O autômato \mathcal{C} é constituído de uma parte central que coincide com o autômato \mathcal{B} e de dois ciclos. Como consequência, se um ponto $x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i$ é triplo então a sequência $(a_i)_{i \geq l}$ é ultimamente periódica de período 001 ou 110.*

Corolário 2.1.1 *Um número complexo tem no máximo três α -representações.*

Demonstração:

Seja x um número complexo que tenha pelo menos quatro α -representações diferentes. Vamos supor que

$$x = \sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} c_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} d_i \alpha^i$$

As quatro sequências (a_i) , (b_i) , (c_i) e (d_i) são ultimamente periódicas de mesmo período: 001 ou então 110. Então necessariamente duas de suas sequências coincidem a partir de um certo índice. Suponhamos que exista um inteiro natural t tal que para todo $i \geq t$, $a_i = b_i$, então

$$x - \sum_{i=t}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{t-1} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{t-1} b_i \alpha^i.$$

Pelo item (3) da proposição 1.2.3, temos:

$$\forall i \in \{l, \dots, t-1\}, a_i = b_i$$

Portanto obtemos o resultado. □

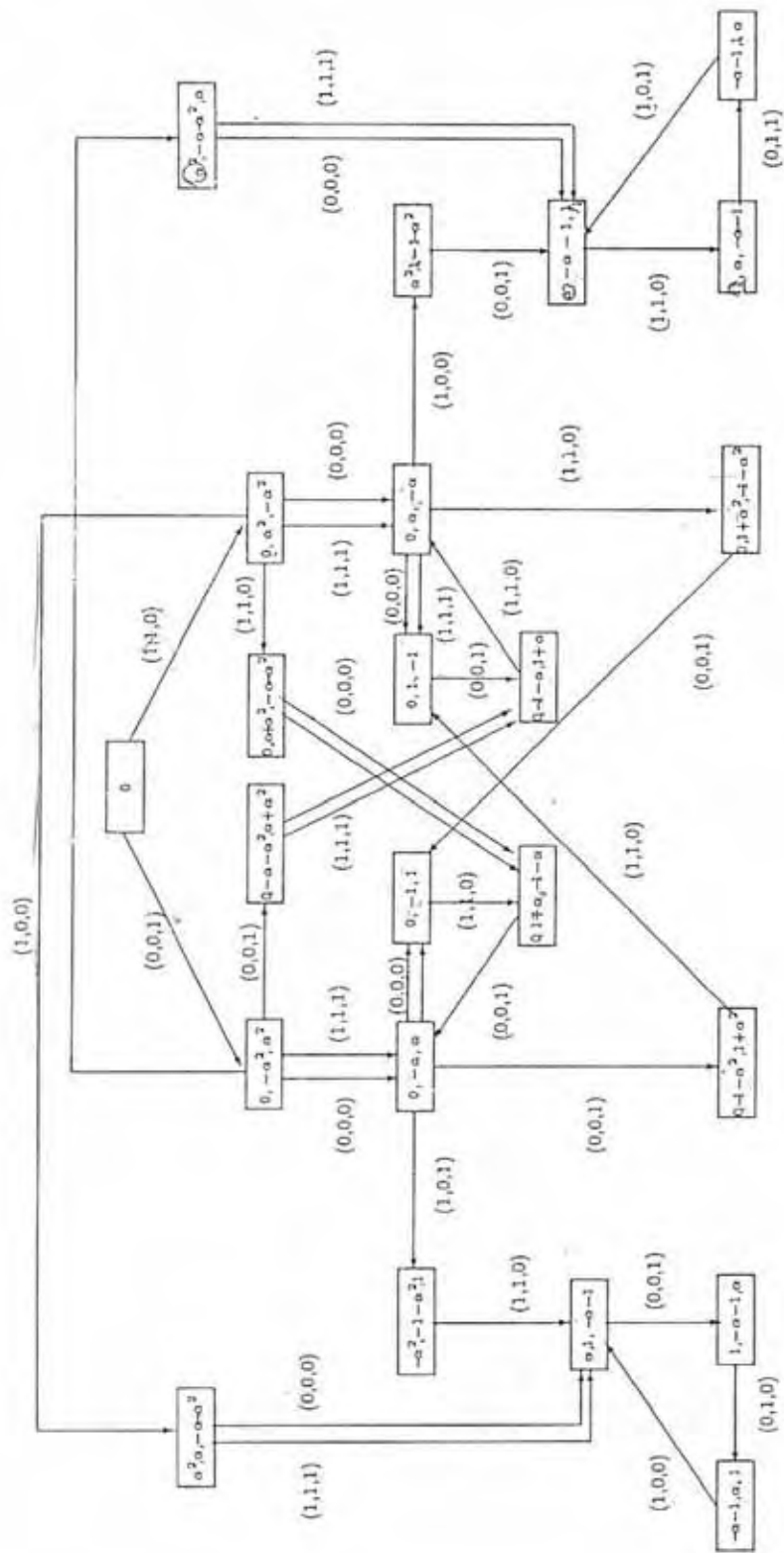


Figura 5. Representação do Autômato C

2.2 Parametrização da Fronteira de \mathcal{E}

Nesta seção utilizamos o autômato definido na seção anterior para parametrizar a fronteira do fractal de Rauzy. Construiremos uma bijeção contínua entre $[0, 1]$ e $X = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha)$ e assim calcularemos a dimensão de Hausdorff da fronteira de \mathcal{E} . Mostraremos também que qualquer uma das seis curvas que compõem a fronteira de \mathcal{E} é imagem de uma outra curva através de uma transformação afim.

Denotaremos as seis curvas que compõem a fronteira de \mathcal{E} por $X = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha)$, $Y = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha)$, $Z = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1)$, $X' = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - \alpha)$, $Y' = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - 1 - \alpha)$ e $Z' = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - 1)$ (figura 6).

Iniciamos com o lema a seguir.

Lema 2.2.1 *As seguintes relações são verdadeiras:*

1. $X \cap Y = \{-\alpha^2\}$.
2. $Y \cap Z = \{\frac{\alpha^3}{1-\alpha^3}\}$.
3. $Z \cap X' = \{-\alpha^2 - \alpha\}$.
4. $X' \cap Y' = \{\frac{-\alpha^5}{1-\alpha^3}\}$.
5. $Y' \cap Z' = \{-\alpha^3\}$.
6. $Z' \cap X = \{\frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}\}$.

Demonstração:

Seja z um elemento de $X \cap Y = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha) \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha)$.

Utilizando o autômato para os números complexos triplos então z pode ser escrito da seguinte forma:

$$z = \sum_{i \geq 1} \alpha^{3i} + \alpha^{3i+2} = 1 + \alpha + \sum_{i \geq 1} \alpha^{3i+1} + \alpha^{3i+3} = \alpha + \sum_{i \geq 1} \alpha^{3i} + \alpha^{3i+2} = -\alpha^2.$$

Da mesma forma, o conjunto $Y \cap Z = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1) \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha)$ é reduzido à um único ponto $\{x\}$ onde

$$x = \sum_{i \geq 1} \alpha^{3i} = 1 + \sum_{i \geq 1} \alpha^{3i+1} = 1 + \alpha + \sum_{i \geq 1} \alpha^{3i+2} = \frac{\alpha^3}{1 - \alpha^3}.$$

As outras relações são obtidas observando-se que $Z \cap X' = X \cap Y - \alpha$, $X' \cap Y' = Y \cap Z - 1 - \alpha$, $Y' \cap Z' = X \cap Y - 1 - \alpha$ e $Z' \cap X = X \cap Y - 1$.

□

Lema 2.2.2 *As relações seguintes são verdadeiras:*

1. $Y = 1 + \alpha + \alpha X$.
2. $Z = \alpha^3 + \alpha^2 X$.
3. $X' = -\alpha + X$.
4. $Y' = \alpha X$.
5. $Z' = \alpha + \alpha^2 + \alpha^2 X$.

Demonstração:

1. Seja z um elemento de Y . Utilizando o autômato dos números complexos duplos, temos três casos a analisar:

- $z = 1 + \alpha + \alpha^5 + \alpha^3 w_1 = \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^4 w'_1$ onde $w_1, w'_1 \in \mathcal{E}$. Neste caso, $\frac{z-1-\alpha}{\alpha} = \alpha^4 + \alpha^2 w_1 = \alpha + \alpha^5 + \alpha^3 w'_1$.
- $z = 1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^4 w_2 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^4 w'_2$ onde $w_2, w'_2 \in \mathcal{E}$.
Logo $\frac{z-1-\alpha}{\alpha} = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 w_2 = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^3 w'_2$.
- $z = 1 + \alpha + \alpha^5 + \alpha^7 + \alpha^5 w_3 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^5 w'_3$ onde $w_3, w'_3 \in \mathcal{E}$.
Assim $\frac{z-1-\alpha}{\alpha} = \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^4 w_3 = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^4 w'_3$.

Temos então que $\frac{z-1-\alpha}{\alpha} \in X$.

Reciprocamente, se z pertence à X , então

$$\alpha z + 1 + \alpha \in (\alpha \mathcal{E} + 1 + \alpha) \cap (\alpha \mathcal{E} + \alpha^3) \subset Y.$$

2. Seja z um elemento de Z , então $z = 1 + \alpha^4 + \alpha^2 w = \alpha^3 + \alpha^2 w'$ onde $w, w' \in \mathcal{E}$, assim

$$\frac{z - \alpha^3}{\alpha^2} = \alpha + w = w' \in X$$

Por outro lado, $\alpha^3 + \alpha^2 X = (\alpha^3 + \alpha^2 \mathcal{E}) \cap (2\alpha^3 + \alpha^2 \mathcal{E})$. Como $2\alpha^3 = \alpha^4 + 1$, temos que $\alpha^3 + \alpha^2 X = (\alpha^3 + \alpha^2 \mathcal{E}) \cap (1 + \alpha^4 + \alpha^2 \mathcal{E}) \subset Z$. Segue que

$$Z = \alpha^3 + \alpha^2 X.$$

As outras relações são obtidas observando-se as seguintes relações:

$$Y = Y' - 1 - \alpha, Z' = Z - 1, X' = X - \alpha.$$

□

Agora vamos estudar o conjunto X (figs. 6 e 7). Vamos mostrar que qualquer uma de suas regiões correspondem à imagem de X por uma das três funções g_i , $i \in \{0, 1, 2\}$, definidas por

$$\forall z \in \mathbb{C}: g_0(z) = \alpha^4 + \alpha^3 z, g_1(z) = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^4 z \text{ e } g_2(z) = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 z.$$

Para isto, utilizaremos o seguinte lema:

Lema 2.2.3 *O conjunto X satisfaz as seguintes propriedades:*

- 1) $X = g_0(X) \cup g_1(X) \cup g_2(X)$.
- 2) $g_0(X) \cap g_1(X) = -\alpha^3 - \alpha^2$.
- 3) $g_1(X) \cap g_2(X) = \alpha^3 + \frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}$.
- 4) $g_0(X) \cup g_2(X) = \emptyset$.

Demonstração:

1. Como $X = \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha)$, temos

$$g_0(X) = (\alpha^4 + \alpha^3 \mathcal{E}) \cap (2\alpha^4 + \alpha^3 \mathcal{E}) = (\alpha^4 + \alpha^3 \mathcal{E}) \cap (\alpha + \alpha^5 + \alpha^3 \mathcal{E}),$$

$$g_1(X) = (\alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^4 \mathcal{E}) \cap (\alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^4 \mathcal{E}),$$

$$g_2(X) = (\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 \mathcal{E}) \cap (\alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^3 \mathcal{E}).$$

Portanto, para todo i pertencendo a $\{0, 1, 2\}$, $g_i(X)$ está incluído em X .

Seja z um elemento de X . Utilizando o autômato para os números complexos duplos, temos três casos para analisar:

- $z = \alpha + \alpha^5 + \alpha^3 w_0 = \alpha^4 + \alpha^3 w'_0$ onde $w_0, w'_0 \in \mathcal{E}$. Neste caso, $g_0^{-1}(z) = \alpha^4 + w_0 = w'_0 \in X$, logo $z \in g_0(X)$.
- $z = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^4 w_1 = \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^4 w'_1$ onde $w_1, w'_1 \in \mathcal{E}$. Neste caso, $g_1^{-1}(z) = w_1 = \alpha + w'_1 \in X$, logo $z \in g_1(X)$.
- $z = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^3 w_2 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 w'_2$ onde $w_2, w'_2 \in \mathcal{E}$ logo, $g_2^{-1}(z) = \alpha + w_2 = w'_2 \in X$, logo $z \in g_2(X)$.

Portanto $X = g_0(X) \cup g_1(X) \cup g_2(X)$.

2. Suponhamos que x pertença à $g_0(X) \cap g_1(X)$, existem z e z' dois elementos de X tais que

$$x = \alpha^4 + \alpha^3 z = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^4 z'.$$

Logo $z = 1 + \alpha + \alpha z'$, o que implica que

$$z \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha) \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha)$$

Assim $z = -\alpha^2$, logo $x = -\alpha^3 - \alpha^2$.

3. Seja x um elemento de $g_1(X) \cap g_2(X)$. Então $x = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 z = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^4 z'$, segue que z e $z' \in X$, logo $z = \alpha + \alpha z' \in \mathcal{E} \cap (\alpha\mathcal{E} + \alpha)$. Por outro lado, utilizando o autômato dos números complexos duplos segue o conjunto $\mathcal{E} \cap (\alpha\mathcal{E} + \alpha)$ está incluído em $\alpha\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha)$. Então,

$$z' = \frac{z}{\alpha} - 1 \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha) \cap (\mathcal{E} - 1) = \left\{ \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3} \right\},$$

Portanto $x = \alpha^3 + \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}$.

4. Sejam z e z' dois elementos de X tais que $\alpha^4 + \alpha^3 z = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 z'$, então $z = 1 + z'$, logo $z \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \alpha) \cap (\mathcal{E} + 1) = \emptyset$. Segue que $g_0(X) \cap g_2(X) = \emptyset$.

□

2.2.1 Parametrização de X

Sejam a e b pertencentes a $\partial\mathcal{E}$. Denotaremos por $I(a, b)$ o arco da $\partial\mathcal{E}$ com origem em a e de extremidade b no sentido trigonométrico. Pelo lema 2.2.3 temos:

$$\begin{aligned} g_0(X) &= I\left(\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}, -\alpha^3 - \alpha^2\right) = I\left(g_0\left(\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}\right), g_0(-\alpha^2)\right), \\ g_1(X) &= I\left(-\alpha^3 - \alpha^2, \alpha^3 + \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}\right) = I\left(g_1(-\alpha^2), g_1\left(\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}\right)\right), \\ g_2(X) &= I\left(\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}, -\alpha^2\right) = I\left(g_2\left(\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}\right), g_2(-\alpha^2)\right). \end{aligned}$$

Para parametrizar X , definiremos três funções complexas f_i , $i \in \{0, 1, 2\}$, tais que $f_i(X)$ seja igual à $I\left(f_i\left(\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}\right), f_i(-\alpha^2)\right)$. Para isso usaremos a simetria de X .

Lema 2.2.4 *O conjunto X tem um centro de simetria $C_0 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\alpha^6}{1 - \alpha^3}\right)$.*

Demonstração: Seja $C = \frac{\alpha^6}{1 - \alpha^3}$. Como $C = \sum_{i=3}^{\infty} \alpha^i$, se $z = \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \in \mathcal{E}$ então

$$C - z = \sum_{i=3}^{\infty} (1 - \varepsilon_i) \alpha^i \in \mathcal{E}$$

Então $\frac{C}{2}$ é um centro de simetria de \mathcal{E} . Por outro lado

$$2C_0 - X = \left(\alpha + \frac{\alpha^6}{1 - \alpha^3} - \mathcal{E}\right) \cap \left(\frac{\alpha^6}{1 - \alpha^3} - \mathcal{E}\right)$$

$$=(\mathcal{E}+\alpha) \cap \mathcal{E} = X.$$

□

Denotaremos por S a simetria central de centro C_0 , $S(z) = 2C_0 - z$ para todo $z \in X$, e consideremos as três funções complexas f_0 , f_1 e f_2 definidas por:

$$\begin{cases} f_0(z) = g_0(z) = \alpha^4 + \alpha^3 z, \\ f_1(z) = g_1(Sz) = \alpha^4 + \alpha^6 + \frac{\alpha^{10}}{1-\alpha^3} - \alpha^4 z, \\ f_2(z) = g_2(z) = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 z. \end{cases}$$

Seja z um elemento de X . Como $X = f_0(X) \cup f_1(X) \cup f_2(X)$, existe z_1 pertencente a X e a_0 um elemento de $\{0, 1, 2\}$ tal que $z = f_{a_0}(z_1)$. Construiremos uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ e uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X , tal que para todo inteiro natural n :

$$z = f_{a_0} \circ f_{a_1} \circ \dots \circ f_{a_n}(z_{n+1})$$

Como as funções f_i são contrações, pode-se mostrar que $z = f_{a_0} \circ f_{a_1} \circ \dots \circ f_{a_n}(z_{n+1})$ tende a z quando n tende ao infinito, e que para todo $x \in X$, $z = f_{a_0} \circ f_{a_1} \circ \dots \circ f_{a_n}(x)$ tende a z quando n tende ao infinito.

Fixemos $x_0 \in X$ e definimos uma correspondência f entre o conjunto $[0, 1]$ e X da seguinte maneira:

Seja t um elemento de $[0, 1]$, se $\sum_{i=3}^{\infty} a_i 3^{-i}$, $a_i \in \{0, 1, 2\}$ é a representação de t na base 3, então

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} z = f_{a_1} \circ f_{a_2} \circ \dots \circ f_{a_n}(x_0)$$

Vamos supor que se t e t' pertencem a $[0, 1]$, então $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ e $t' = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i}$, em que a_i e b_i são elementos do conjunto $\{0, 1, 2\}$ tal que $a_i = b_i$ para $i < k$ e $a_k < b_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.2.1 *A aplicação f é bijetiva, contínua e satisfaz $f(0) = \frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}$ e $f(1) = -\alpha^2$.*

Para a demonstração, precisamos dos seguintes lemas:

Lema 2.2.5 *Sejam t e t' dois elementos de $[0, 1]$ então*

1) *Se $|t - t'| < 3^{-N}$ onde $N > k$, então $b_k = a_k + 1$, $b_i = 0$ e $a_i = 2$ para todo i tal que $k + 1 \leq i \leq N$.*

2) *Se $t = t'$ então $b_k = a_k + 1$, $b_i = 0$ e $a_i = 2$, para todo $i \geq k + 1$.*

Demonstração:

1. Temos que

$$\begin{aligned}
3^{-N} &> \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)3^{-i} = (b_k - a_k)3^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (b_i - a_i)3^{-i} \\
&= (b_k - a_k - 1)3^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (2 + b_i - a_i)3^{-i}.
\end{aligned}$$

O item (2) é uma consequência do item (1).

□

Lema 2.2.6 *Sejam h e k dois elementos de $\{0, 1, 2\}$ tais que $h < k$ e sejam x e y dois elementos de X , então $f_h(x) = f_k(y)$ se e somente se $k = h + 1$, $x = -\alpha^2$ e $y = \frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}$.*

Demonstração:

Provemos a implicação direta.

O conjunto $f_0(X) \cap f_2(X)$ sendo vazio, os inteiros h e k são necessariamente consecutivos.

Temos portanto dois casos para analisar:

Se $h = 0$, $k = 1$, então $f_0(x) = f_1(y)$ se e somente se, $g_0(x) = g_1(Sy)$, então pelo lema 2.2.3, temos $g_0(x) = g_1(Sy) = -\alpha^3 - \alpha^2$, ou ainda, $x = S(y) = -\alpha^2$. Segue que

$$x = -\alpha^2 \text{ e } y = \frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}.$$

Se $h = 1$, $k = 2$, então $f_1(x) = f_2(y)$ se e somente se $g_1(Sx) = g_2(y)$, então $Sx = y = \frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}$ daí

$$x = -\alpha^2, y = \frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}.$$

A recíproca é imediata.

□

Lema 2.2.7 *A aplicação f satisfaz a propriedade: $f(t) = \frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}$ se e somente se $t = 0$ e $f(t) = 1$ se e somente se $t = -\alpha^2$.*

Demonstração: Como $\frac{\alpha^4}{1-\alpha^3} \notin f_1(X) \cup f_2(X)$ e $f(t) = f_{a_1} \circ f(\sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i})$ temos

$$f(t) = \frac{\alpha^4}{1-\alpha^3} \iff a_1 = 0.$$

Como $\frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}$ é o único ponto fixo de f_0 , ou seja $f(\sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i}) = \frac{\alpha^4}{1-\alpha^3}$, então iterando esse procedimento, mostra-se que para todo inteiro natural não nulo n , $a_n = 0$, e então $t = 0$.

Utilizando o mesmo raciocínio e o fato de que $-\alpha^2$ é o único ponto fixo de f_2 , prova-se que $f(t) = 1$ se e somente se $t = -\alpha^2$. □

Demonstração da Proposição 2.2.1:

1. A aplicação f está bem definida

Sejam t e t' em $[0,1]$. Se $t = t'$, pelo lema 2.2.5, $b_k = a_k + 1$, $b_i = 0$ e $a_i = 2$ para todo $i \geq k + 1$. Portanto,

$$f(t) = f_{a_1} \dots f_{a_{k-1}} f_{a_k} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_2^{(n)}(x_0) \right) \text{ e } f(t') = f_{a_1} \dots f_{a_{k-1}} f_{a_{k+1}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_0^{(n)}(x_0) \right)$$

Ou

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_0^{(n)}(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_0^{(n)} \left(\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3} \right) = \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}$$

pois $f_0 \left(\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3} \right) = \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}$, da mesma forma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_2^{(n)}(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_2^{(n)}(-\alpha^2) = -\alpha^2$$

pois $f_2(-\alpha^2) = -\alpha^2$. Pelo lema 2.2.6 segue que $f(t) = f(t')$.

2. A aplicação f é injetiva

Temos,

$$f(t) = f_{a_1} \dots f_{a_{k-1}} \circ f \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i+k-1} 3^{-i} \right) \text{ e } f(t') = f_{b_1} \dots f_{b_{k-1}} \circ f \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{i+k-1} 3^{-i} \right).$$

Como as funções f_i são bijetivas (lembramos que $a_i = b_i$ para $1 \leq i \leq k - 1$),

$$f(t) = f(t') \iff f \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i+k-1} 3^{-i} \right) = f \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{i+k-1} 3^{-i} \right).$$

Logo,

$$f_{a_k} \circ f(3t_1 - a_k) = f_{b_k} \circ f(3t'_1 - b_k).$$

onde $t_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+k-1} 3^{-i}$ e $t'_1 = \sum_{i=1}^{\infty} b_{i+k-1} 3^{-i}$. Pelo Lema 2.2.6, $b_k = a_{k+1}$, $f(3t_1 - a_k) = -\alpha^2$ e $f(3t'_1 - b_k) = \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^3}$. Pelo lema 2.2.7 temos que:

$$3t_1 - a_k = 1 \text{ e } 3t'_1 - b_k = 0.$$

ou $b_k = a_k + 1$. Logo $t_1 = t'_1$ e então $t = t'$. Como f é sobrejetiva por construção então f é bijetiva.

3. A aplicação f é contínua

Suponhamos que $0 < |t - t'| < 3^{-N}$, $N \in \mathbb{N}$, $N > k$. Pelo lema 2.2.5

$$|f(t) - f(t')| = |f_{a_1} \dots f_{a_{k-1}} \circ f(t_1) - f_{a_1} \dots f_{a_{k-1}} \circ f(t'_1)|,$$

em que

$$f(t_1) = f_{a_k} \circ f_2^{N-k}(z_1) \text{ e } f(t'_1) = f_{a_{k+1}} \circ f_0^{N-k}(z'_1),$$

em que $z_1, z'_1 \in X$. Assim:

$$|f(t) - f(t')| \leq |f_{a_k} \circ f_2^{N-k}(z_1) - f_{a_{k+1}} \circ f_0^{N-k}(z'_1)| \times |\alpha|^{3(k-1)}.$$

Como $f_{a_k} \circ f_2^{N-k}(-\alpha^2) = f_{a_{k+1}} \circ f_0^{N-k}(\frac{\alpha^4}{1-\alpha^3})$, temos que

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t')| &\leq (|f_{a_k} \circ f_2^{N-k}(z_1) - f_{a_k} \circ f_2^{N-k}(-\alpha^2)| \\ &\quad + |f_{a_{k+1}} \circ f_2^{N-k}(z_1) - f_{a_{k+1}} \circ f_0^{N-k}(\frac{\alpha^4}{1-\alpha^3})|) \times |\alpha|^{3(k+1)} \\ &\leq (|\alpha|^{3(N-k)+3} + |\alpha|^{3(N-k)+4}) \times |\alpha|^{3(k-1)} \\ &\leq \text{diam}(X) \times (1 + |\alpha|)|\alpha|^{3N}. \end{aligned}$$

□

Como consequência da Proposição anterior temos o seguinte resultado:

Corolário 2.2.1 *A fronteira de \mathcal{E} é uma curva de Jordan.*

2.2.2 Cálculo da dimensão de Hausdorff

Vimos que a $\partial\mathcal{E}$ é a união de seis regiões que são de alguma forma imagem de uma transformação afim. Então, $\dim_H(X) = \dim_H(\partial\mathcal{E})$. O conjunto $X = \cup_{i=0}^2 f_i(X)$ pertence ao caso dos conjuntos compactos invariantes por similaridades (isto é, ele é estável pelas funções f_i). A dimensão de Hausdorff desta classe de compactos é majorada pela sua dimensão fractal ou como ocorre em alguns casos, são iguais. Uma cota superior da dimensão de Hausdorff dessa classe de compactos é dada pela proposição seguinte.

Proposição 2.2.2 *(ver [3]) Seja A um subconjunto de \mathbb{C} tal que $A = \cup_{i=0}^n h_i(A)$ é o compacto invariante pelas similaridades h_i dos coeficientes de similaridades r_i (ou seja, $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $|h_i(x) - h_i(y)| = r_i|x - y|$). Então $\dim_H(A) \leq s$ onde s é o único real que satisfaz $\sum_{i=0}^n r_i^s = 1$.*

Observação 2.2.1 Há casos em que $\dim_H = s$, em particular quando os $h_i(A)$ se intersectam em um número finito de pontos ([3]).

O conjunto X satisfaz essa condição, pois a interseção $f_0(X) \cap f_1(X)$ resulta em apenas um ponto, assim como $f_1(X) \cap f_2(X)$ e $f_0(X) \cap f_2(X)$ é vazia. Calculemos então os coeficientes de similaridades das funções f_i .

Para todo $x, y \in X$, temos:

$$|f_0(x) - f_0(y)| = |\alpha^4 + \alpha^3x - \alpha^4 - \alpha^3y| = |\alpha|^3|x - y|. \text{ Logo } r_0 = |\alpha|^3.$$

$$|f_1(x) - f_1(y)| = |\alpha^4 + \alpha^6 + \frac{\alpha^{10}}{1-\alpha^3} - \alpha^4x - \alpha^4 - \alpha^6 - \frac{\alpha^{10}}{1-\alpha^3} + \alpha^4x| = |\alpha|^4|x - y|. \text{ Então } r_1 = |\alpha|^4.$$

e

$$|f_2(x) - f_2(y)| = |\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^3x - \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha^3y| = |\alpha|^3|x - y|. \text{ Assim } r_2 = |\alpha|^3.$$

Logo $\dim_H(X) = s$, em que s satisfaz

$$2|\alpha|^{3s} + |\alpha|^{4s} = 1$$

Portanto, $\dim_H(X) = +\frac{\log \rho}{\log |\alpha|} \sim 1,09338$, em que ρ é a raiz real maximal do polinômio $X^4 + 2X^3 - 1 = 0$.

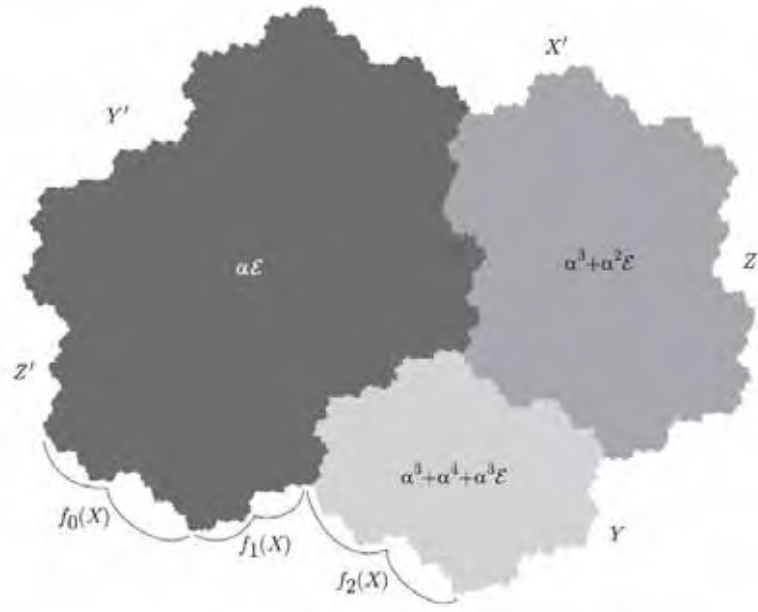


Figura 6.

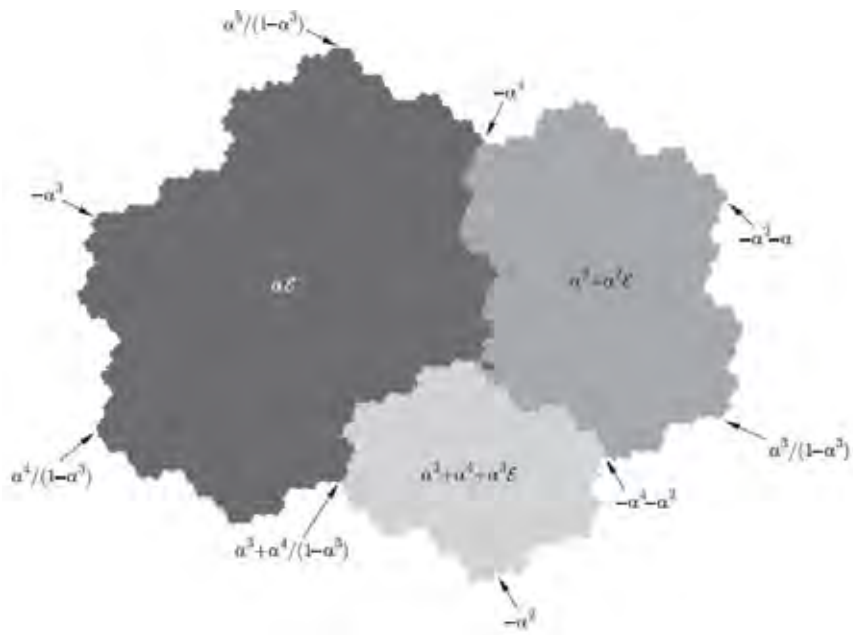


Figura 7.

Capítulo 3

Os pontos extremos do fractal de Rauzy

Neste capítulo mostraremos um método para a construção dos pontos extremos do fractal de Rauzy.

No plano complexo, consideremos uma reta Δ_a passando pela origem, com vetor diretor \vec{u} e de direção um real $a \in [0, 2\pi[$. Seja p_a a projeção ortogonal de \mathcal{E} sobre $\Delta_a : \forall z \in \mathcal{E}, p_a(z) = c_a(z)\vec{u}$, onde $c_a(z) \in \mathbb{R}$. Como \mathcal{E} é compacto, o máximo dos $c_a(z), z \in \mathcal{E}$, é atingido em pelo menos um ponto x pertencente a \mathcal{E} .

Definição 3.0.1 *Um ponto $x \in \mathcal{E}$ é dito extremo na direção a se $c_a(x) = \max\{c_a(z); z \in \mathcal{E}\}$.*

Observação 3.0.2 *Um ponto extremo de \mathcal{E} pertence à $\partial\mathcal{E}$.*

Seja $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, onde ϕ é um argumento de α pertencente ao conjunto $[0, 2\pi[(\frac{\phi}{\pi} \approx 0,69)$. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathcal{E}$ tal que $z = \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon_n \alpha^n$, então

$$p_a(z) = \Re(z e^{-ia}\vec{u}) = \left(\sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon_n |\alpha|^n \cos(n\phi - a) \right) \vec{u} \quad (1)$$

Seja $(a_n)_{n \geq 3}$ uma sequência em que os termos estão em $\{0, 1\}$, satisfazendo

$$\begin{cases} a_n = 1, & \text{se } \cos(n\phi - a) > 0, \\ a_n = 0, & \text{se } \cos(n\phi - a) < a, \\ a_n \text{ arbitrário} & \text{em } \{0, 1\} \text{ se } \cos(n\phi - a) = 0. \end{cases}$$

Proposição 3.0.3 *Seja $(a_n)_{n \geq 3}$ uma das seqüências definidas acima, então $(a_n)_{n \geq 3} \in \mathcal{N}$ e $\sum_{n=3}^{\infty} a_n \alpha^n$ é um ponto extremo para a direção a .*

Demonstração: Mostremos que $(a_n)_{n \geq 3} \in \mathcal{N}$. Suponhamos que exista $n \geq 3$ tal que $a_n = a_{n+1} = 1$; então $\cos(n\phi - a)$ e $\cos((n+1)\phi - a)$ são positivos. Logo existem dois inteiros relativos k e k' tais que

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq n\phi - a \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ e } \frac{\pi}{2} + 2k'\pi \leq (n+1)\phi - a \leq \frac{\pi}{2} + 2k'\pi,$$

ou seja,

$$2k \leq n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2} \leq 2k+1 \text{ e } 2k' \leq (n+1)\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2} \leq 2k'+1.$$

Temos que $k' \geq k$, pois $(n+1)\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2} > n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}$.

Logo,

$$2k' - 2k - 1 \leq ((n+1)\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}) - (n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}) = \frac{\phi}{\pi} < 1.$$

o que implica que $2(k' - k) < 2$, ou seja $k' < k + 1$. Como $k' \geq k$, então $k' = k$.

Por outro lado,

$$n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2} < (n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}) + (2\frac{\phi}{\pi} - 1) < (n+1)\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}$$

pois $\frac{\phi}{\pi} \approx 0,69$. Portanto, $2k < (n+2)\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2} - 1 < 2k+1$, ou seja, $2k+1 < (n+2)\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2} - 1 < 2k+2$. Logo $\cos((n+2)\phi - a) < 0$, e então, $a_{n+2} = 0$, o que implica que $(a_n)_{n \geq 3} \in \mathcal{N}$. Por outro lado seja $(\varepsilon_n)_{n \geq 3}$ em \mathcal{N} . Pela relação (1) e a definição de (a_n) , deduzimos que

$$\sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon_n |\alpha|^n \cos(n\phi - a) \leq \sum_{n=3}^{\infty} a_n |\alpha|^n \cos(n\phi - a).$$

Portanto $\sum_{n=3}^{\infty} a_n \alpha^n$ é um ponto extremo para a direção a .

□

A princípio, a definição da seqüência $(a_n)_{n \geq 3}$ leva-no a pensar que podemos ter uma infinidade de pontos extremos para a direção a . O que é falso. Vamos provar que para uma direção dada, não podemos ter mais do que dois pontos extremos.

Lema 3.0.8 $\frac{\phi}{\pi}$ é irracional.

Demonstração:

Suponhamos que $\frac{\phi}{\pi}$ é racional, existe portanto um inteiro natural n tal que α^n seja real. Logo, $\alpha^n = \bar{\alpha}^n$. Então o seu possível Galois conjugado de α^n , diferente de α^n , é β^n , onde β é o conjugado real de α . Logo α^n é de grau menor ou igual a 2, ou ainda os corpos $\mathbb{Q}(\alpha^n)$ está estritamente incluído no corpo cúbico $\mathbb{Q}(\alpha)$. O que implica que $\mathbb{Q}(\alpha^n) = \mathbb{Q}$, pois um corpo cúbico não pode conter um corpo quadrático. Consequentemente, existem dois inteiros relativos m e r talque $m\alpha^n - r = 0$, assim o polinômio $Q(X) = mX^n - r$ é um múltiplo do polinômio minimal de α . O que é impossível pois todas as raízes de $Q(X)$ têm o mesmo módulo. \square

Corolário 3.0.2 *Seja $a \in [0, 2\pi[$, então o conjunto $\{n \geq 3; \cos(n\phi - a) = 0\}$ caso não seja vazio é reduzido a um único elemento.*

Demonstração: Suponhamos que existam dois inteiros diferentes m e n maiores ou iguais a 3 tais que $\cos(n\phi - a) = \cos(m\phi - a) = 0$. Logo $n\phi - a = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $m\phi - a = \pm\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$, onde $k, k' \in \mathbb{Z}$. Portanto existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $(n - m)\phi = s\pi$. Dessa forma, $\frac{\phi}{\pi} = \frac{s}{n-m} \in \mathbb{Q}$, o que contradiz o lema 3.0.8. \square

Veremos agora como obter os pontos extremos.

3.1 Construção de um ponto extremo

Primeiro caso: O conjunto $\{n \geq 3; \cos(n\phi - a) = 0\} = \emptyset$, então tem um único ponto extremo na direção a . O ponto é $x_a = \sum_{n=3}^{\infty} a_n \alpha^n$, em que

$$\begin{cases} a_n = 1, & \text{se } \cos(n\phi - a) \geq 0, \\ a_n = 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a_n = 1, & \text{se existe } k \in \mathbb{Z}, 2k - 1 \leq n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} - \frac{1}{2} \leq 2k, \\ a_n = 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como para todo inteiro $n \geq 3$ e $k \in \mathbb{Z}$, $n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} - \frac{1}{2} \notin \{2k - 1, 2k\}$, pois $\cos(n\phi - a) \neq 0$ temos

$$a_n = ([n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} - \frac{1}{2}]) \bmod 2$$

em que $[n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} - \frac{1}{2}]$ é parte inteira de $n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} - \frac{1}{2}$ e $(.) \bmod 2$ é a aplicação de \mathbb{Z} em $\{0, 1\}$ que a um inteiro associa 1 se é ímpar e 0 caso contrário.

Segundo caso: Existe um inteiro $m \geq 3$ tal que $\cos(m\phi - a) = 0$, ou $a = m\phi(\frac{1}{2} - p)\pi, p \in \mathbb{Z}$. Neste caso, obtemos dois pontos extremos que são $x_a = \sum_{n=3}^{\infty} a_n \alpha^n$ onde

$$\begin{cases} a_n = 1, \text{ se } \cos(n\phi - a) \geq 0, \\ a_n = 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

e $y_a = \sum_{n=3}^{\infty} b_n \alpha^n$, em que

$$\begin{cases} b_n = 1, \text{ se } \cos(n\phi - a) < 0 \\ b_n = 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Para todo $n \geq 3$, se $n \neq m$ então $a_n = b_n$ e $a_m = 1, b_m = 0$. Consequentemente

$$y_a = \sum_{n=3, n \neq m}^{\infty} b_n \alpha^n$$

e

$$\begin{aligned} x_a &= \sum_{n=3, n \neq m}^{\infty} a_n \alpha^n + \alpha^m \\ &= \sum_{n=3, n \neq m}^{\infty} a_n \alpha^n + |\alpha|^m e^{i(a - (\frac{1}{2} - p)\pi)}. \end{aligned}$$

Assim, $x_a = y_a + |\alpha|^m e^{i(a - (\frac{1}{2} - p)\pi)}$ se p é par, $x_a = y_a - |\alpha|^m e^{i(a - (\frac{1}{2} - p)\pi)}$ se p é ímpar e $y_a = \sum_{n=3, n \neq m}^{\infty} a_n \alpha^n$, em que $a_n = ([n\frac{\phi}{\pi} - \frac{a}{\pi} - \frac{1}{2}]) \bmod 2$, para todo $n \geq 3$.

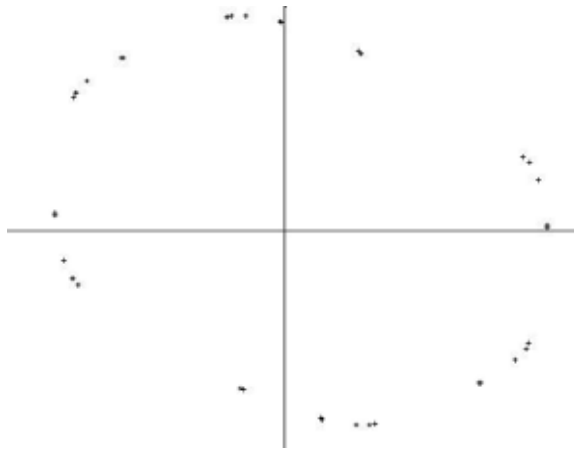


Figura 9. Pontos extremos do fractal de Rauzy.

Capítulo 4

Anexo

Nesta seção provaremos alguns itens da proposição 1.2.3 e apresentaremos outras propriedades do fractal de Rauzy.

Demonstração da Proposição 1.2.3 - (Capítulo 1)

Item 1. Provemos que para todo $n \geq 3$ tem-se $\alpha^n = T_n \alpha^2 + (T_{n-1} + T_{n-2})\alpha + T_n$. De fato, para $n = 3$ a fórmula é válida pois

$$\alpha^3 = T_3 \alpha^2 + (T_2 + T_1)\alpha + T_2 = \alpha^2 + \alpha + 1.$$

Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para n e provemos para $n + 1$.

Temos:

$$\alpha^{n+1} = T_n \alpha^3 + (T_{n-1} + T_{n-2})\alpha^2 + T_{n-1}\alpha$$

Como $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha + 1$ e $T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2}$, então

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} &= T_n(\alpha^2 + \alpha + 1) + (T_{n+1} - T_n)\alpha^2 + T_{n-1}\alpha \\ &= T_{n+1}\alpha^2 + (T_n + T_{n-1})\alpha + T_n.\end{aligned}$$

Se $n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_i$, definindo $a_n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i (T_{i-1} + T_{i-2})$ e $b_n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_{i-1}$ então $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i = n\alpha^2 + a_n\alpha + b_n$.

Item 2. Ver [2].

Item 3. Se $\sum_{i=l}^N a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{+\infty} b_i \alpha^i$. Então temos associado no autômato o caminho

$$(a_l, b_l) \cdots (a_N, b_N)(0, b_{N+1})(0, b_{N+2})(0, b_{N+3}) \cdots$$

Porém, analisando o autômato, vemos que essa sequência não ocorre.

Item 5. Seja $\alpha^2 = c\alpha + d$. Então $1, c$ e d são \mathbb{Q} -linearmente independentes.

De fato. Sejam $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha^2 = c + d\alpha$. Vamos mostrar que $\{1, c, d\}$ é \mathbb{Q} -linearmente independente. Sejam $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ e $Q(x) = x^2 - cx - d$. Dividindo o polinômio $P(x)$ por $Q(x)$, resulta que $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$, com $S(x) = x + (c - 1)$ e $R(x) = [(c(c - 1) + (d - 1))x + (c - 1)d - 1]$. Temos que $R(\alpha) = 0$. Como $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ então

$$\begin{cases} c(c - 1) + (d - 1) = 0 \\ d(c - 1) - 1 = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Suponhamos que $\{1, c, d\}$ seja \mathbb{Q} -linearmente independente. Então existem $p, q, r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$p + q \cdot c + d \cdot r = 0 \quad (4.2)$$

Multiplicando a 1ª e a 2ª equações de (4.1) por q e r respectivamente e somando-as obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -p \cdot c + q \cdot d = r - p + q \\ q \cdot c + r \cdot d = -p \end{cases} \quad (4.3)$$

Analisemos os casos para a solução do sistema acima:

Caso 1. $-pr - q^2 \neq 0$. Nesse caso as soluções são

$$c = \frac{r^2 - rp + rq + qp}{-rp - q^2} \in \mathbb{Q}$$

e

$$d = \frac{p^2 - qr + qp - q^2}{-rp - q^2} \in \mathbb{Q}$$

Logo, $\alpha^2 = c\alpha + d = \frac{s}{t}\alpha + \frac{m}{n}$. Seja $p = mmc(t, m)$. Então existem $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que $p\alpha^2 = k\alpha + t$. Assim α é um inteiro algébrico de grau 2, o que não ocorre.

Caso 2. $pr - q^2 = 0$. Nesse caso vamos analisar o sistema

$$\begin{cases} c \cdot \alpha + d = \alpha^2 \\ c \cdot q + d \cdot r = -p \end{cases} \quad (4.4)$$

Vamos supor que $\alpha r - q \neq 0$ ou $\alpha r \neq q$.

As soluções são

$$c = \frac{r\alpha^2 + p}{\alpha r - q}$$

e

$$d = \frac{-\alpha p - \alpha^2 q}{\alpha r - q}.$$

Caso 1.1. $r \neq 0$. Então, $p = \frac{-q^2}{r}$. Assim $c = \frac{r\alpha^2 + \frac{-q^2}{r}}{\alpha r - q} = \frac{\alpha r - q}{r} = \alpha - \frac{q}{r}$.

Logo $c = \alpha - \frac{q}{r}$ ou $\alpha = c + \frac{q}{r} \in \mathbb{R}$. Absurdo.

Portanto $r = 0$ e $q = 0$, implica que $p = 0$. Temos então que $\{1, c, d\}$ é \mathbb{Q} -linearmente independente.

Item 6. Vamos provar $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ é discreto e para isto vamos mostrar que qualquer ponto pertencente ao conjunto $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ é isolado. Seja $p = m + n\alpha \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ um ponto arbitrário e consideremos $p_0 \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ um ponto adjacente a p . Logo p_0 pertence ao conjunto $A = \{(m \pm 1) + n\alpha, (m \pm 1) + (n \pm 1)\alpha, m + (n \pm 1)\alpha\}$. Seja $C = \max\{d(p, p_0) \mid p_0 \in A\}$. O cálculo direto das distâncias entre p e um de seus pontos adjacentes mostra que $C = 1$. Como $|\alpha| \sim 0,73$, então tomando uma bola $B \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ com centro em p e raio $\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2}$ temos que $B(p, \varepsilon) \cap (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha) = \{p\}$. Portanto, como p foi tomado de modo arbitrário segue que todo ponto de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ é isolado.

Item 7. Ver [4].

Antes de demonstrarmos o item (4) precisamos dos seguintes resultados:

Lema 4.0.1 $\mathcal{E} \cap (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha) = \{0\}$.

Demonstração:

Seja z um elemento de \mathcal{E} . Então $z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{3n} y_n$ onde y_n pertence ao conjunto

$$S = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, 1 + \alpha, 1 + \alpha^2, \alpha + \alpha^2\}.$$

Temos:

$$|z| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{3n} y_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha^{3n} y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha^{3n}| |y_n|.$$

Logo $|z| \leq K \frac{|\alpha|^3}{1-|\alpha|^3}$, $K = \max\{|u|; u \in S\}$. Como $\alpha \sim -0,419 - 0,606i$. Calculando os módulos dos elementos de S obtemos que $K = 1$. Resulta que $|z| \sim 0,669$.

Seja (n, p) pertencente a $\mathbb{Z}^2 - (0, 0)$, mostremos que $|n\alpha + p| \geq \frac{|\alpha|^3}{1-|\alpha|^3}$. Com efeito, coloquemos $\alpha = a + ib$, temos então

$$\begin{aligned}
|n\alpha + p|^2 - |\alpha|^2 &= (na + p)^2 + n^2b^2 - a^2 - b^2 \\
&\geq (na + p)^2 + (n^2 - 2)b^2.
\end{aligned}$$

Logo,

Se $|n| \geq 2$, então $|n\alpha + p|^2 \geq |\alpha|^2$.

Se $n = 1$, $|\alpha + p|^2 - |\alpha|^2 = (a + p)^2 - a^2 = p(p + 2a) \geq 0$, pois $|\alpha| < 0,5$. Da mesma forma, se $n = -1$, $|- \alpha + p|^2 - |\alpha|^2 = (-a + p)^2 - a^2 = p(p - 2a) \geq 0$.

Se $n = 0$ e $p \neq 0$, então $|n\alpha + p| = |p| > |\alpha|$.

Como $|\alpha| \sim 0,73 > \frac{|\alpha|^3}{1-|\alpha|^3}$, obtemos o resultado. □

Corolário 4.0.1 *Existe um real estritamente positivo c tal que para todo inteiro natural n e inteiros relativos p e q , se $|n\alpha^2 + p\alpha + q| < c$ então existe $(\varepsilon_i)_{3 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}$ tal que $n\alpha^2 + p\alpha + q = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i \in \mathcal{E}$.*

Demonstração:

Seja $c = \inf\{|x - z| \mid x \in \mathcal{E} \text{ e } z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha - \{0\}\}$. Seja n um inteiro natural. Suponhamos que $|n\alpha^2 + p\alpha + q| = n\alpha^2 + r(n)\alpha + s(n) - (r(n) - p)\alpha - (s(n) - q) < c$, como $n\alpha^2 + r(n)\alpha + s(n) \in \mathcal{E}$, então $(r(n) - p)\alpha - (s(n) - q) = 0$. Como α é um número algébrico de grau 3, segue que $p = r(n)$ e $q = s(n)$. Portanto $n\alpha^2 + p\alpha + q \in \mathcal{E}$. □

Item 4. Vamos mostrar que 0 é um ponto interior de \mathcal{E} .

Como $(1, \alpha)$ é uma base do \mathbb{R} -espaço vetorial \mathbb{C} , existem dois reais b e d tais que $\alpha^2 = b + d\alpha$. Pelo item (5) da proposição 1.2.3, 1, b e d são \mathbb{Q} -linearmente independentes e o conjunto $A = \{n\alpha^2 + q\alpha + p, n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{C} . Em particular ele é denso no conjunto $B = \{x \in \mathbb{C}; |x| < c/2\}$, em que c é o número real do corolário 4.0.1. Seja $z \in B$. Existe $z_n \in A$ tal que $\lim z_n = z$. Pelo Corolário 4.0.1 $z_n \in \mathcal{E}$. Como \mathcal{E} é compacto então $z \in \mathcal{E}$. Logo $B \subset \mathcal{E}$. □

Proposição 4.0.1 *O conjunto \mathcal{E} satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\overline{\text{int}(\mathcal{E})} = \mathcal{E}$.
2. Se $\mathcal{E}_0 = \alpha\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1 = \alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}_2 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}$ então $\mathcal{E}_i \cap \text{int}(\mathcal{E}_j) = \emptyset$ para $i \neq j$.

Demonstração:

1. Como \mathcal{E} é compacto então $\overline{\text{int}(\mathcal{E})} \subset \mathcal{E}$. Mostremos que $\mathcal{E} \subset \overline{\text{int}(\mathcal{E})}$. De fato, o conjunto $\{\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i, |(\varepsilon_i)_{3 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}\}$ é denso em \mathcal{E} . Vamos provar que $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i, (\varepsilon_i)_{3 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}$, é um ponto interior de \mathcal{E} . Sejam as funções de \mathbb{C} em \mathbb{C} definidas por:

$$\begin{aligned} \psi_0 : z &\mapsto \alpha z, \quad \psi_1 : z \mapsto \alpha^3 + \alpha^2 z \\ &\text{e } \psi_2 : z \mapsto \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 z. \end{aligned}$$

Para $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i$, existe $a_0 \in \{0, 1, 2\}$ e $z_0 = \sum_{i=3}^{N'} \varepsilon'_i \alpha^i$ em que $(\varepsilon'_i)_{3 \leq i \leq N'} \in \mathcal{N}$, $N' < N$, tais que $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i = \psi_{a_0}(z_0)$. Utilizando esse argumento repetidamente construiremos uma sequência de índices $(a_i)_{0 \leq i \leq m} \in \{0, 1, 2\}^{m+1}$ tal que

$$z = \sum_{i \geq 3}^N \varepsilon_i \alpha^i = \psi_{a_0} \circ \cdots \circ \psi_{a_{m-1}} \circ \psi_1(0).$$

Como 0 é um ponto interior de \mathcal{E} , existe um real estritamente positivo r tal que a bola aberta $B(0, r)$ de centro 0 e raio r está contida em \mathcal{E} . Como as funções ψ_i são transformações afins, resulta que $\psi_{a_0} \circ \cdots \circ \psi_{a_{m-1}} \circ \psi_1(B(0, r))$ é um aberto de \mathcal{E} contendo $\sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i$. Logo $z \in \text{int}(\mathcal{E})$.

2. Seja λ a medida de Lebesgue em \mathbb{C} . Como \mathcal{E} é compacto então \mathcal{E} é mensurável e tem-se para todo $i \in \{0, 1, 2\}$

$$\lambda(\mathcal{E}_i) = |\alpha^{2(i+1)}| \times \lambda(\mathcal{E}).$$

Por outro lado, como $\beta = \frac{1}{|\alpha^2|}$, temos:

$$|\alpha^2| + |\alpha^4| + |\alpha^6| = 1.$$

Assim,

$$\sum_{i=0}^2 \lambda(\mathcal{E}_i) = (|\alpha^2| + |\alpha^4| + |\alpha^6|) \lambda(\mathcal{E}) = \lambda(\mathcal{E}) = \lambda(\bigcup_{i=0}^2 \mathcal{E}_i).$$

Logo, $\lambda(\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j) = 0$ para $i \neq j$.

Consequentemente $\mathcal{E}_i \cap \text{int}(\mathcal{E}_j) = \emptyset$ para $i \neq j$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] P. ARNOUX, S. ITO, **Pisot substitutions and Rauzy fractals**, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 8, 2001, 181-207.
- [2] S. AKIYAMA, **Cubic Pisot units with finite beta expansions**, Algebraic Number theory and Diophantine Analysis, 2000, 11-26.
- [3] M. BARNESLEY, **Fractals everywhere**. Ac.Press, 1988.
- [4] A.S. FRAENKEL, **System of numeration**. Amer. Math. Monthly 92, 1985, 105-114.
- [5] C. FROUGNY; B. SOLOMYAK, **Finite Beta-expansions**. Ergod. Th. and Dynam. Systems 12, 1988, 4, 713-723.
- [6] S. ITO, M. KIMURA, **On the Rauzy Fractal**, Japan J. Indust. Appl. Math. 8, 1991, 461-486.
- [7] A. MESSAOUDI, **Autour du Fractal de Rauzy**, Tese de Doutorado, Université d'Aix-Marseille, 1996.
- [8] A. MESSAOUDI, **Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy**. J. Théor. Nombres Bordeaux 10, 1998, 135-162.
- [9] A. MESSAOUDI, **Substituições, Fractais e Dinâmica**, Tese de Livre Docência, UNESP, 2008.
- [10] A. MESSAOUDI, J. THUSWALDNER, B. LORIDANT, P. SURER, **Topological Properties for a class of cubic Rauzy fractals**. No prelo, 2008.
- [11] G. RAUZY, **Nombres algébriques et substitutions**, Bull. Soc. Math. France 110, 1982, 147-178.
- [12] E. ZECKENDORF, **Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas**, Bull. Soc. Roy. Sci. liège 41, 1972, 179-182.