



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Heloísa Lopes de Sousa

Problemas Elípticos Supercríticos com Expoentes Ressonantes

São José do Rio Preto

2020

Heloísa Lopes de Sousa

**Problemas Elípticos Supercríticos com Expoentes
Ressonantes**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves.

São José do Rio Preto

2020

S725p Sousa, Heloísa Lopes de
Problemas elípticos supercríticos com expoentes ressonantes /
Heloísa Lopes de Sousa. -- São José do Rio Preto, 2020
72 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientador: Sérgio Leandro Nascimento Neves

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Equações elípticas não
lineares. 4. Problema de Coron no caso supercrítico. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Heloísa Lopes de Sousa

Problemas Elípticos Supercríticos com Expoentes

Ressonantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Banca Examinadora

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
UNESP - Presidente Prudente

Prof. Dr. Pablo Salvador Figueroa Salgado
Universidad Austral de Chile

Prof. Dr. Ederson Moreira dos Santos
USP - São Carlos

São José do Rio Preto

07 de Abril de 2020

*À minha mãe, Fátima,
e em memória de meu pai, José.*

Agradecimentos

Agradeço antes de tudo à Deus por mais uma conquista.

Agradeço à minha mãe, Fátima, meus irmãos Aline e Júnior, por estarem sempre me motivando e apoiando para que eu pudesse desenvolver este trabalho.

Em especial ao meu namorado e companheiro Junior Augusto Pereira, pelo carinho, compreensão e por ser a pessoa que compartilho todas as alegrias e que me conforta nos momentos difíceis.

Ao Professor Sérgio Leandro Nascimento Neves, agradeço por ter aceitado me orientar, por todos os ensinamentos, conselhos, incentivos, por sua imensa paciência e dedicação.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UNESP, Campus de São José do Rio Preto. Agradeço também aos professores do Departamento de Matemática da UEM e da UNESP, Campus Presidente Prudente, por terem contribuído com minha formação acadêmica.

Aos amigos do Programa de Pós-Graduação de Matemática, Alisson de Carvalho, Ana Livia Roderio, Anderson Gonzaga, André do Amaral, André Carvalho, Bruno Caldeira, Caroline Signorini, Cheienne Chaves, Diana Rodriguez, Eduardo Machado, Eliton Moro, Fabiola Villanueva, Fabrício Alvez, Fabrício Rissão, Gino Maqui, Gustavo Andreto, Harison Brito, Jairo Santos, Jarne Donizetti, Jennifer C. Borges, João Pitot, Jéssica Ventura, José A. Fiorucci, Laura Rezzieri, Luana Lima, Lucas Queiroz, Luiz F. Gonçalves, Luiz F. Gouveia, Mariana Delfino, Otávio Perez, Paola Patzi, Paula Fukushima, Plínio Sicuti, Rafael Paulino, Rafaela Soares, Rodrigo Ishizaka e Willian Pereira por terem participado de bons diálogos em matemática e pelas histórias compartilhadas. Agradeço todas as amizades feitas em São José do Rio Preto, em especial, Ana Laura Alves, Deborah Di Lernia, Mariana Molina, Nayara Cattozatto e as teachers Letícia Borges e Sarah Oliveira por todas as conversas, ensinamentos e pelos momentos de acolhimento. A todas as me-

ninas do time de Handebol e Futsal do IBILCE que fizeram parte da minha trajetória em Rio Preto e que me deram muitas alegrias.

A todas as pessoas que, de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A imaginação foi a companheira de toda a minha existência, viva, rápida,
inquieta, alguma vez tímida e amiga de empacar, [...]”

Machado de Assis (1899, p.122)

Resumo

Neste trabalho, consideramos uma classe de problemas elípticos supercríticos não lineares. Apresentamos um método para determinar solução do problema de Coron no caso supercrítico para uma sequência de expoentes ressonantes. Tal método é uma adaptação do método de perturbação no caso onde não se conhece toda a variedade de soluções do problema não perturbado.

Palavras-chave: Equações elípticas não lineares. Problema de Coron. Expoente supercrítico. Sequência de expoentes ressonantes.

Abstract

In this work, we consider a class of nonlinear supercritical problems. We present a method to determine the solution of Coron's problems in the supercritical case for a sequence of resonant exponents. Such a method is an adaptation of the perturbation method in the case where the whole solutions manifold to the non perturbed problem is not known.

Keywords: Nonlinear elliptical equations. Coron's problem. Supercritical exponent. Sequence of resonant exponents.

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^N$ denota o espaço Euclidiano N -dimensional com pontos $x = (x_1, \dots, x_N)$.

$\langle x, y \rangle$ denota o produto escalar de $x, y \in \mathbb{R}^N$.

$B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - y| < r\}$

$S^N = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} \mid |x| = 1\}$ denota a esfera unitária N -dimensional.

∇u denota o gradiente da função de valores reais u .

$\nabla u \cdot \nabla v$ também denotaremos por $\langle \nabla u, \nabla v \rangle$.

Δ denota o Laplaciano: $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Id denota o operador identidade.

$L^p(\mathbb{R}^N)$, $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $L^p(\Omega)$, etc., denotam os usuais espaços de Lebesgue.

$W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, $W^{m,p}(\Omega)$, etc., denotam os usuais espaços de Sobolev.

$2^* = \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $2^* = +\infty$ se $N = 1, 2$.

Se $I \in C^k(H, \mathbb{R})$, H espaço de Hilbert, é um funcional, $I'(u)$ denota o gradiente de I em

$u \in H$, definido por meio do teorema da representação de Riesz $(I'(u)|v) = dI(u)[v]$,

$\forall v \in H$, similarmente $(I''(u)v|w) = d^2I(u)[v, w]$, $\forall v, w \in H$.

$u = o(\epsilon^k)$ significa que $u\epsilon^{-k}$ tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.

$u = O(\epsilon^k)$ significa que $|u\epsilon^{-k}| \leq c$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

$o_\epsilon(1)$ denota uma função que depende de ϵ e tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Método de Perturbação na Teoria do Ponto Crítico	15
1.1.1 Um exemplo simples	16
1.1.2 Aplicação a equação de Schrödinger não linear	21
2 O problema de Coron	40
2.1 O operador $\Delta + pw^{p-1}$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$	41
2.1.1 Solvabilidade de (2.6)	48
2.2 O operador $\Delta + pw^{p-1}$ em $\Omega_\delta = D_\delta \setminus B_1(0)$	52
2.3 Prova do Teorema 2.1	60
Referências	70

Introdução

Um modelo clássico de equação elíptica não linear é o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0, & u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.1)$$

onde Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$ e $p > 1$.

O expoente crítico $p = \frac{N+2}{N-2}$ tem papel determinante na questão da solvabilidade do problema.

Quando $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ a solução pode ser encontrada como um extremo para a melhor constante na imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$. Quando $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ este minimizante falha, não existe no geral.

Pohozaev em [25] descobriu que não existe solução se o domínio for estritamente estrelado. Kazdan e Warner em [19] observaram que se Ω for um anel a compacidade se verifica para $p > 1$ dentro da classe das funções radiais e a solução pode ser encontrada variacionalmente, sem restrições em p . Para o caso crítico $p = \frac{N+2}{N-2}$ Brezis e Nirenberg em [10] encontraram uma solução adicionando um termo linear adequado. Coron [12] solucionou o caso crítico usando uma aproximação variacional, se Ω tiver um pequeno buraco. Rey [26] estabeleceu a existência de múltiplas soluções para domínios com vários pequenos buracos. Já em [8], Bahri e Coron, estabeleceram a solvabilidade no caso crítico para domínios com topologias não triviais.

O questionamento feito por Rabinowitz e estabelecido por Brezis em [9], no caso supercrítico, se a topologia não trivial é suficiente para determinar solução foi respondida negativamente por Passaseo [24].

Se p é supercrítico, mas está próximo ao crítico, soluções são encontradas em domínios com pequenos buracos [13, 14, 20].

Em [15], Del Pino e Wei estudaram o problema com o expoente p acima do crítico

em um domínio de Coron $\Omega = D \setminus \overline{B_\delta(0)}$.

Eles mostraram, em um domínio de Coron $\Omega = D \setminus \overline{B_\delta(0)}$, a existência de solução para $\delta > 0$ suficientemente pequeno com p supercrítico e p diferente de uma sequência $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de expoentes ressonantes, para todo j , onde

$$\frac{N+2}{N-2} < p_1 < p_2 < \cdots \quad \text{com} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \infty. \quad (0.2)$$

O principal resultado deles é o seguinte Teorema:

Teorema [15]. *Existe uma sequência como em (0.2) tal que se $p > \frac{N+2}{N-2}$ e $p \neq p_j$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que para qualquer $\delta < \delta_0$ (0.1) possui pelo menos uma solução.*

No Capítulo 2 exibimos condições suficientes para obter um resultado similar ao teorema acima, quando $p = p_j$, como na sequência em (0.2), para todo $j \geq 3$ ímpar.

A fim de dar veracidade ao método usado para demonstrar o principal resultado do Capítulo 2, citado acima, no Capítulo 1 adaptamos uma das técnicas de perturbação estudadas em [4]. O método que adaptamos foi introduzido pela primeira vez por Ambrosetti e Rabinowitz em [1, 2]. Utilizamos de modo variacional, em um exemplo simples e no problema elíptico

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u > 0, & \text{em } H^1(\mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (0.3)$$

onde $3 < p < 2^* - 1$ e V é um potencial limitado que satisfaz

(V₁) $V \in C^4(\mathbb{R}^n)$ e $\|V\|_{C^4} < \infty$;

(V₂) $\lambda_0^2 = \inf_{\mathbb{R}^n} V > 0$.

Se tivermos que 0 é um ponto crítico não degenerado do potencial V , ou seja, $V''(0)$ não-singular, então sob as condições acima, existe uma solução do problema elíptico que se concentra em torno de 0, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Este resultado já é conhecido, com hipóteses menos restritivas, ver [3, 5]. Demos uma nova demonstração para este resultado, porém usando um método modificado. Como as soluções deste problema já são conhecidas, foi possível testar o método que adaptamos e assim dar confiabilidade ao aplicá-lo no Capítulo 2.

O método de perturbação adaptado apresentado no Capítulo 1 consiste em encontrar pontos críticos para uma classe de funcionais $I_\epsilon : H \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 2$, definidos

no espaço de Hilbert H , onde não se conhece por completo a variedade de soluções do problema não perturbado.

Em linguagem de operadores, tal método pode ser descrito como segue:

Queremos resolver uma equação do tipo $u = F_\delta(u)$ que é equivalente a resolver (0.1) em $\Omega_\delta = D_\delta \setminus B_1(0)$. Sabemos que o domínio Ω_δ se aproxima de $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$ em um certo sentido quando $\delta \rightarrow 0$ e esse problema limite $u = F(u)$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$ possui uma solução U que já conhecemos. Considerando o problema linearizado associado a U , $\phi = F'(U)[\phi]$ denotemos por K o núcleo deste operador, isto é $K = \text{Ker}(Id - F'(U)) = \text{span}\{Y_i \mid i = 1, \dots, d\}$, que também é conhecido. Vamos procurar soluções u_δ próximas de U no sentido de que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - P_{\Omega_\delta} U\|_{X(\Omega_\delta)} = 0,$$

onde $X(\Omega_\delta)$ é um espaço de funções escolhido adequadamente e $P_{\Omega_\delta} U$ é uma projeção de U nesse espaço.

Vamos tomar $z_\delta(\xi) = w_\delta + \sum_{i=1}^d \xi_i Y_i^\delta$, onde $w_\delta = P_{\Omega_\delta} U$ e $Y_i^\delta = P_{\Omega_\delta} Y_i$. E assim, vamos procurar soluções de $u = F_\delta(u)$ em torno de $u_\delta(\xi) = z_\delta(\xi) + \phi_\delta(\xi)$, onde $\phi_\delta \in W_\delta$ e W_δ é o complemento ortogonal de $K_\delta = P_{\Omega_\delta} K$, isto é $W_\delta = (\text{span}\{Y_i^\delta\}_i)^\perp$.

Observe que se $u_\delta(\xi) = F_\delta(u_\delta(\xi))$ então $z_\delta(\xi) + \phi_\delta(\xi) = F_\delta(z_\delta(\xi) + \phi_\delta(\xi))$ e expandindo temos

$$z_\delta(\xi) + \phi_\delta(\xi) = F_\delta(z_\delta(\xi)) + F'(z_\delta(\xi))[\phi_\delta(\xi)] + R(\delta, \xi),$$

ou seja,

$$\phi_\delta(\xi) - F'(z_\delta(\xi))[\phi_\delta(\xi)] = F_\delta(z_\delta(\xi)) - z_\delta(\xi) + R(\delta, \xi). \quad (0.4)$$

O problema limite, quando $\delta \rightarrow 0$, pode ser formulado em um espaço $X = X(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0))$, o qual podemos decompor como $X = K \oplus W$, sendo $P : X \rightarrow W$ a projeção, temos que $Id - PF'(U)|_W : W \rightarrow W$ é invertível.

Em seguida mostramos que $L_\delta := Id - P_{\Omega_\delta} F'_\delta(z_\delta)|_{W_\delta} : W_\delta \rightarrow W_\delta$ é também invertível com norma do operador inverso L_δ^{-1} uniformemente limitada para $0 < \delta < \delta_0$. E assim, aplicando L_δ^{-1} em (0.4) obtemos

$$\phi_\delta(\xi) = L_\delta^{-1} P_\delta (F_\delta(z_\delta(\xi)) - z_\delta(\xi) + R(\delta, \xi)).$$

Resolvemos este problema de ponto fixo pelo Teorema de Schauder. Assim mostramos que existe $\phi(\delta, \xi)$ solução do problema de ponto fixo acima. Com isso, voltando

ao problema original, na verdade resolvemos

$$P_\delta (\phi(\delta, \xi) - F'(z_\delta(\xi))[\phi(\delta, \xi)]) = P_\delta (F_\delta(z_\delta(\xi)) - z_\delta(\xi) + R(\delta, \xi)),$$

ou seja

$$P_\delta (z_\delta(\xi) + \phi(\delta, \xi) - F_\delta(z_\delta(\xi) + \phi(\delta, \xi))) = 0.$$

Logo,

$$z_\delta(\xi) + \phi(\delta, \xi) - F_\delta(z_\delta(\xi) + \phi(\delta, \xi)) = \sum_{i=1}^d c_i(\delta, \xi) Y_i^\delta(\xi) \Rightarrow u_\delta(\xi) - F_\delta(u_\delta(\xi)) = \sum_{i=1}^d c_i(\delta, \xi) Y_i^\delta(\xi).$$

O último passo é mostrar que, para todo δ suficientemente pequeno, existe uma escolha adequada de $\xi = \xi_\delta$ de modo que $c_i(\delta, \xi_\delta) = 0$ para todo $i = 1, \dots, d$ e assim teremos o problema resolvido.

Capítulo 1

Preliminares

Vamos apresentar neste capítulo alguns resultados abstratos, e suas aplicações, estudados em [4], sobre a existência de pontos críticos para uma classe de funcionais perturbados I_ϵ definidos em um espaço de Hilbert H , cuja norma e produto interno são denotados por $\|\cdot\|$ e $(\cdot|\cdot)$, respectivamente.

1.1 Método de Perturbação na Teoria do Ponto Crítico

Vamos apresentar uma das técnicas de perturbação estudadas em [4]. O método que adaptamos foi introduzido pela primeira vez por Ambrosetti e Rabinowitz em [1, 2].

Seja $I_\epsilon : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^k , $k \geq 2$, definido no espaço de Hilbert H . A fim de encontrar pontos críticos do funcional I_ϵ suponha que:

- (i) existe uma variedade $\tilde{Z}_\epsilon \subset H$, d -dimensional de classe C^k , $k \geq 2$, que possui para todo $z_\epsilon \in \tilde{Z}_\epsilon$ uma parametrização local z_ξ , $\xi \in \mathbb{R}^d$, cuja norma C^k é limitada;
- (ii) existem funções contínuas $f, g : (0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ com $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(\epsilon) = 0$, tais que $\|I'_\epsilon(z_\xi)\| \leq f(\epsilon)$, para todo $z_\xi \in \tilde{Z}_\epsilon$ e $\|I''_\epsilon(z_\xi)[q]\| \leq g(\epsilon)\|q\|$, para todo $z_\xi \in \tilde{Z}_\epsilon$ e para todo $q \in T_{z_\xi}\tilde{Z}_\epsilon$;
- (iii) existem $C, r_0 > 0$ e $\gamma \in (0, 1]$ tais que $\|I''_\epsilon\|_{C^\gamma} \leq C$ em $\{u \mid \text{dist}(u, \tilde{Z}_\epsilon) < r_0\}$;
- (iv) sendo $P_\xi : H \rightarrow W$ a projeção ortogonal em $W = (T_{z_\xi}\tilde{Z}_\epsilon)^\perp$, existe uma constante $C > 0$ que independe de ξ e ϵ tal que $P_\xi I''_\epsilon(z_\xi)|_W$ possui inverso em W e além disso $\|(P_\xi I''_\epsilon(z_\xi))^{-1}\| \leq C$.

Vamos procurar pontos críticos de I_ϵ usando o método de redução de Lyapunov-Schmidt, isto é, vamos procurar pontos críticos da forma $u = z_\xi + w_\epsilon$ com $z_\xi \in \tilde{Z}_\epsilon$ e $w_\epsilon \in W$. Se $P_\xi : H \rightarrow W$ é como em (iv) a equação $I'_\epsilon(z_\xi + w_\epsilon) = 0$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} PI'_\epsilon(z + w) = 0 & \text{(equação auxiliar),} \\ (Id - P)I'_\epsilon(z + w) = 0 & \text{(equação de bifurcação).} \end{cases} \quad (P)$$

Satisfeitas as propriedades acima temos o seguinte resultado.

Proposição 1.1. *Suponha que (i)-(iv) se verificam, então existe $\epsilon_0 > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $|\epsilon| < \epsilon_0$ e para todo $z_\xi \in \tilde{Z}_\epsilon$ a equação auxiliar em (P) tem uma única solução $w_\epsilon = w_\epsilon(z_\xi) \in W = (T_{z_\xi} \tilde{Z}_\epsilon)^\perp$ de classe C^1 com relação a z_ξ e é tal que*

$$\|w_\epsilon(z_\xi)\| \leq C f(\epsilon)$$

$$\|w'_\epsilon(z_\xi)\| \leq C(f(\epsilon)^\gamma + g(\epsilon)),$$

uniformemente com relação a z_ξ em compactos de $\tilde{Z}_\epsilon$.

Para resolver a equação de bifurcação em (P) vamos considerar o funcional reduzido $\Phi_\epsilon : \tilde{Z}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_\epsilon(z_\xi) = I_\epsilon(z_\xi + w_\epsilon(z_\xi)).$$

Teorema 1.1. *Suponha (i)-(iv) e considere $w_\epsilon(z)$ obtido da Proposição 1.1. Se Φ_ϵ tem, para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, um ponto crítico z_ϵ então, $u_\epsilon = z_\epsilon + w_\epsilon(z_\epsilon)$ é um ponto crítico de I_ϵ .*

A prova da Proposição 1.1 e do Teorema 1.1 podem ser encontradas em [21].

1.1.1 Um exemplo simples

Considere os funcionais $I_0, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dados por

$$I_0(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)^2 + \frac{1}{2}x_3^2 \quad \text{e} \quad G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

então $I'_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1[1 - (x_1^2 + x_2^2)], x_2[1 - (x_1^2 + x_2^2)], x_3)$.

Veja que $\mathbb{S}^1 = \{z = (\cos(\xi), \sin(\xi), 0) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ é variedade de pontos críticos de I_0 e além disso, para todo $z \in \mathbb{S}^1$ temos

$$I_0''(z) = \begin{pmatrix} -2\cos^2(\xi) & -2\cos(\xi)\sin(\xi) & 0 \\ -2\cos(\xi)\sin(\xi) & -2\sin^2(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

logo $\text{Ker}(I_0''(z)) = \text{span}\{(-\sin(\xi), \cos(\xi), 0)\} = T_z\mathbb{S}^1$, para todo $z = (\cos(\xi), \sin(\xi), 0)$ em $\mathbb{S}^1$, $\xi \in \mathbb{R}$.

$G|_{\mathbb{S}^1}$ tem um mínimo não degenerado em $(1, 0, 0)$, então é natural buscar soluções de $I'_\epsilon(z) = I'_0(z) + \epsilon G'(z) = 0$ próximas de $(1, 0, 0)$, por isso considere

$$\tilde{Z} = \{z_\xi = (1, 0, 0) + \xi(0, 1, 0) \mid \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Note que $I'_\epsilon(z_\xi) = I'_0(z_\xi) + \epsilon G'(z_\xi) = (-\xi^2, -\xi^3, 0) + \epsilon(-2, 2\xi, 0)$, então

$$I'_\epsilon(z_\xi) = O(|\xi|^2) + O(\epsilon), \quad \forall z_\xi \in \tilde{Z}.$$

Além disso, para qualquer $q \in T_{z_\xi}\tilde{Z} = \text{span}\{(0, 1, 0)\}$ temos

$$I''_\epsilon(z_\xi)[q] = I''_0(z_\xi)[q] + \epsilon G''(z_\xi)[q] = \begin{pmatrix} -\xi^2 - 2(1 - \epsilon) & -2\xi & 0 \\ -2\xi & 2\epsilon - 3\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então, para $|\xi| = o_\epsilon(1)$ temos

$$I''_\epsilon(z_\xi)[q] = (-2\xi, 2\epsilon - 3\xi^2, 0) = O(|\xi| + \epsilon), \quad \forall q \in T_{z_\xi}\tilde{Z},$$

logo as propriedades **(i)** e **(ii)** são satisfeitas e é fácil ver que **(iii)** também é verificada.

Seja $W = (T_{z_\xi}\tilde{Z})^\perp = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ e vamos considerar a projeção ortogonal $P_\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow W$, para concluir o item **(iv)** das propriedades acima basta ver que $P_\xi I''_\epsilon(z_\xi)|_W$ é invertível e $\|(P_\xi I''_\epsilon(z_\xi))^{-1}\| \leq C$. De fato,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi^2 - 2(1 - \epsilon) & -2\xi & 0 \\ -2\xi & 2\epsilon - 3\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi^2 - 2(1 - \epsilon) & -2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\epsilon \end{pmatrix}.$$

Então $P_\xi I''_\epsilon(z_\xi)|_W = \begin{pmatrix} -\xi^2 - 2(1 - \epsilon) & 0 \\ 0 & 1 + 2\epsilon \end{pmatrix}$ é invertível para ϵ e ξ pequenos

o suficiente.

Portanto, temos satisfeitas **(i)**-**(iv)** e pela Proposição 1.1 podemos dizer que existe um único $w_\epsilon(\xi) \in W$ que é solução de $P_\xi I'_\epsilon(z_\xi + w_\epsilon(\xi)) = 0$.

Podemos escrever $w_\epsilon(\xi) = (x_\epsilon(\xi), 0, z_\epsilon(\xi))$ e $z_\xi + w_\epsilon(\xi) = (1 + x_\epsilon(\xi), \xi, z_\epsilon(\xi))$, então $P_\xi I'_\epsilon(z_\xi + w_\epsilon(\xi)) = 0$ se, e somente se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + x_\epsilon(\xi))[1 - ((1 + x_\epsilon(\xi))^2 + \xi^2)] + 2\epsilon(1 + x_\epsilon(\xi) - 2) \\ \xi[1 - ((1 + x_\epsilon(\xi))^2 + \xi^2)] + 2\epsilon\xi \\ z_\epsilon(\xi) + 2\epsilon z_\epsilon(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + x_\epsilon(\xi))[1 - ((1 + x_\epsilon(\xi))^2 + \xi^2)] + 2\epsilon(1 + x_\epsilon(\xi) - 2) = 0 \\ (1 + 2\epsilon)z_\epsilon(\xi) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Então, $z_\epsilon(\xi) = 0$ e $x_\epsilon(\xi)$ é raiz da equação (1.1). Vamos calcular a expansão de Taylor para $x_\epsilon(\xi)$.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} [1 - ((1 + x_\epsilon(\xi))^2 + \xi^2)] + (1 + x_\epsilon(\xi)) \left[-2(1 + x_\epsilon(\xi)) \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} - 2\xi \right] + 2\epsilon \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} = 0 \\ & \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \xi^2} [1 - ((1 + x_\epsilon(\xi))^2 + \xi^2)] + 2 \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} \left[-2(1 + x_\epsilon(\xi)) \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} - 2\xi \right] \\ & + (1 + x_\epsilon(\xi)) \left[-2 \left(\frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} \right)^2 - 2(1 + x_\epsilon(\xi)) \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \xi^2} - 2 \right] + 2\epsilon \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \xi^2} = 0 \\ & \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} [1 - ((1 + x_\epsilon(\xi))^2 + \xi^2)] + (1 + x_\epsilon(\xi)) \left[-2(1 + x_\epsilon(\xi)) \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} \right] + 2\epsilon \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} + 2x_\epsilon(\xi) - 2 = 0 \\ & \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon^2} [1 - ((1 + x_\epsilon(\xi))^2 + \xi^2)] + 2 \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} \left[-2(1 + x_\epsilon(\xi)) \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} \right] \\ & + (1 + x_\epsilon(\xi)) \left[-2 \left(\frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} \right)^2 - 2(1 + x_\epsilon(\xi)) \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon^2} \right] + 4 \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} + 2\epsilon \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon^2} = 0 \\ & \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon \partial \xi} [1 - ((1 + x_\epsilon(\xi))^2 + \xi^2)] + \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} \left[-2(1 + x_\epsilon(\xi)) \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} - 2\xi \right] \\ & + \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} \left[-2(1 + x_\epsilon(\xi)) \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} \right] + (1 + x_\epsilon(\xi)) \left[-2 \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} - 2(1 + x_\epsilon(\xi)) \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon \partial \xi} \right] \\ & + 2 \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} + 2\epsilon \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon \partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

Quando $\epsilon = \xi = 0$ obtemos $\frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} = -1$, $\frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \xi^2} = -1$, $\frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon^2} = -5$ e $\frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon \partial \xi} = 0$ logo, usando expansão de Taylor

$$\begin{aligned} x_\epsilon(\xi) &= x_0(0) + \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon} \Big|_{0,0} \epsilon + \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \xi} \Big|_{0,0} \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon^2} \Big|_{0,0} \epsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \xi^2} \Big|_{0,0} \xi^2 + \frac{\partial^2 x_\epsilon}{\partial \epsilon \partial \xi} \Big|_{0,0} \epsilon \xi \\ &\quad + O(\epsilon^3 + |\xi|^3) \\ &= -\epsilon - \frac{5}{2} \epsilon^2 - \frac{1}{2} \xi^2 + O(\epsilon^3 + |\xi|^3), \end{aligned}$$

e assim, $w_\epsilon(\xi) = (-\epsilon - \frac{5}{2} \epsilon^2 - \frac{1}{2} \xi^2, 0, 0) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3) = \bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)$ e também

$$z_\xi + w_\epsilon(\xi) = (1, \xi, 0) + w_\epsilon(\xi) = (1, 0, 0) + \xi(0, 1, 0) + w_\epsilon(\xi) = z_0 + \xi e_2 + \bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3).$$

Olhando agora para o funcional reduzido $\Phi_\epsilon = I_\epsilon|_{\bar{Z}}$ e expandindo novamente temos

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon(\xi) &= I_0(z_\xi + w_\epsilon(\xi)) + \epsilon G(z_\xi + w_\epsilon(\xi)) \\ &= I_0(z_0) + I'_0(z_0) [\xi e_2 + \bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)] \\ &\quad + \frac{1}{2} I''_0(z_0) [\xi e_2 + \bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)]^2 + \frac{1}{6} I'''_0(z_0) [\xi e_2 + \bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)]^3 \\ &\quad + \epsilon G(z_\xi + w_\epsilon(\xi)) + O(\epsilon^4 + |\xi|^4) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} I''_0(z_0) [\bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)]^2 + \frac{1}{6} I'''_0(z_0) [\xi e_2 + \bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)]^3 \\ &\quad + \epsilon G(z_\xi + w_\epsilon(\xi)) + O(\epsilon^4 + |\xi|^4). \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned} I''_0(z_0) [\bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)] &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\epsilon - \frac{5}{2} \epsilon^2 - \frac{1}{2} \xi^2 + O(\epsilon^3 + |\xi|^3) \\ O(\epsilon^3 + |\xi|^3) \\ O(\epsilon^3 + |\xi|^3) \end{pmatrix} \\ &= (2\epsilon + 5\epsilon^2 + 2\xi^2 + O(\epsilon^3 + |\xi|^3), 0, O(\epsilon^3 + |\xi|^3)). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} &I''_0(z_0) [\bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)]^2 \\ &= \langle I''_0(z_0) [\bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)] \mid I''_0(z_0) [\bar{w}_\epsilon(\xi) + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)] \rangle \\ &= -2\epsilon^2 - 10\epsilon^3 - 3\xi^2\epsilon - \frac{15}{2} \epsilon^2 \xi^2 - \xi^4 + O(\epsilon^4 + \epsilon|\xi|^3) \\ &= -2\epsilon^2 - 10\epsilon^3 - 3\xi^2\epsilon + O(\epsilon^4 + |\xi|^4) + O(\epsilon^4 + \epsilon|\xi|^3), \end{aligned}$$

veja também que

$$\begin{aligned}
\epsilon G(z_\xi + w_\epsilon(\xi)) &= \epsilon[(x_\epsilon(\xi) - 1)^2 + \xi^2] \\
&= \epsilon[x_\epsilon^2(\xi) - 2x_\epsilon(\xi) + 1 + \xi^2] \\
&= \epsilon[\epsilon^2 + 5\epsilon^3 + \xi^2\epsilon + 2\epsilon + 5\epsilon^2 + \xi^2 + 1 + \xi^2 + O(\epsilon^3 + |\xi|^3)] \\
&= \epsilon^3 + \xi^2\epsilon^2 + 2\epsilon^2 + 5\epsilon^3 + \xi^2\epsilon + \epsilon + \epsilon\xi^2 + O(\epsilon^4 + |\xi|^4) \\
&= \epsilon + 2\epsilon^2 + 6\epsilon^3 + 2\xi^2\epsilon + O(\epsilon^4 + |\xi|^4),
\end{aligned}$$

por fim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}I_0'''(z_0)[\xi e_2 + w_\epsilon(\xi)]^3 &= \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 I_0(z_0)}{\partial x_1^3} x_1^3 + \frac{1}{2!1!} \frac{\partial^3 I_0(z_0)}{\partial x_1^2 \partial x_2} x_1^2 x_2 + \frac{1}{2!1!} \frac{\partial^3 I_0(z_0)}{\partial x_1 \partial x_2^2} x_1 x_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 I_0(z_0)}{\partial x_2^3} x_2^3 \\
\Rightarrow \frac{1}{6}I_0'''(z_0)[\xi e_2 + w_\epsilon(\xi)]^3 &= -x_\epsilon^3(\xi) - x_\epsilon(\xi)\xi^2 = \epsilon^3 + \xi^2\epsilon + O(\epsilon^4 + |\xi|^4),
\end{aligned}$$

desta forma

$$\begin{aligned}
\Phi_\epsilon(\xi) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} [-2\epsilon^2 - 10\epsilon^3 - 3\xi^2\epsilon + O(\epsilon^4 + |\xi|^4)] + [\epsilon^3 + \xi^2\epsilon + O(\epsilon^4 + |\xi|^4)] \\
&+ [\epsilon + 2\epsilon^2 + 6\epsilon^3 + 2\xi^2\epsilon + O(\epsilon^4 + |\xi|^4)] + O(\epsilon^4 + |\xi|^4) \\
&= \frac{1}{4} + \epsilon + \epsilon^2 + 10\epsilon^3 + \frac{3}{2}\xi^2\epsilon + O(\epsilon^4 + |\xi|^4)
\end{aligned}$$

Tomando $|\xi| = \epsilon$ temos $\Phi_\epsilon(\xi) - \Phi_\epsilon(0) = \epsilon^3 \left[\frac{3}{2} + O(\epsilon) \right]$.

Então, existe $\epsilon_1 > 0$ pequeno o suficiente tal que, para todo $z_\xi = (1, \xi, 0)$ em uma ϵ -vizinhança de $z_0 = (1, 0, 0)$ em $\tilde{Z}$ obtemos

$$\begin{cases} \Phi_\epsilon(\xi) - \Phi_\epsilon(0) > 0 & \text{se } 0 < \epsilon < \epsilon_1, \text{ e } |\xi| = \epsilon \\ \Phi_\epsilon(\xi) - \Phi_\epsilon(0) < 0 & \text{se } -\epsilon_1 < \epsilon < 0, \text{ e } |\xi| = \epsilon. \end{cases}$$

No primeiro caso, Φ_ϵ tem um mínimo local em uma vizinhança de z_0 , enquanto no outro possui um máximo local. Com isso, concluímos que Φ_ϵ tem um ponto crítico z_ϵ em uma vizinhança em $\tilde{Z}$ e portanto pelo Teorema 1.1 $u_\epsilon = z_\epsilon + w_\epsilon(z_\epsilon)$ é ponto crítico de I_ϵ .

1.1.2 Aplicação a equação de Schrödinger não linear

Vamos considerar o problema elíptico

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u > 0, & \text{em } H^1(\mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $3 < p < 2^* - 1$ e V é um potencial limitado que satisfaz

(V₁) $V \in C^4(\mathbb{R}^n)$ e $\|V\|_{C^4} < \infty$;

(V₂) $\lambda_0^2 = \inf_{\mathbb{R}^n} V > 0$.

Teorema 1.2. *Suponha que 0 é um ponto crítico não degenerado de V , ou seja, $V''(0)$ não-singular. Então, sob as condições acima, existe uma solução de (1.2) que se concentra em torno de 0, quando $\epsilon \rightarrow 0$.*

Este resultado já é conhecido, com hipóteses menos restritivas, ver [3, 5]. Vamos dar uma nova demonstração para este resultado, porém usando um método modificado.

É conveniente fazer uma mudança de variáveis $x \mapsto \epsilon x$ e assim (1.2) é equivalente ao seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u > 0, & \text{em } H^1(\mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (1.3)$$

Se $u_\epsilon(\cdot)$ é solução de (1.2) então $u_\epsilon(\frac{\cdot}{\epsilon})$ é solução de (1.3).

O funcional energia associado ao problema (1.3), $I_\epsilon \in C^4(H^1(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ é dado por

$$I_\epsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + V(\epsilon x)u^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} u_+^{p+1} dx,$$

onde $u_+ = \max\{0, u\}$.

Em $H^1(\mathbb{R}^n)$ vamos considerar o seguinte produto interno e norma, respectivamente

$$(u|v) = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla v + V(0)uv) dx \quad \text{e} \quad \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + V(0)u^2) dx.$$

Note que podemos escrever $I_\epsilon(u) = I_0(u) + G(\epsilon, u)$ onde,

$$I_0(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} u_+^{p+1} dx \quad \text{e} \quad G(\epsilon, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0))u^2 dx$$

Observe também que I_0 é o funcional energia associado ao seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta U + V(0)U = U^p, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ U > 0, & \text{em } H^1(\mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (1.4)$$

Sabemos que (1.4) tem uma única solução U a qual é radial e tem, juntamente com suas derivadas até ordem 3, um decaimento exponencial, ver [22].

Considere $\tilde{Z}_\epsilon = \{z_\xi := U(x) + U(x)'\xi ; |\xi| \leq \delta_\epsilon\}$ onde, δ_ϵ depende de ϵ e é tal que $\delta_\epsilon \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $U(x)'\xi$ denota $\nabla U \cdot \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial U}{\partial x_i}$.

Lema 1.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}, p > 1$ e defina $x_+ = \max\{0, x\}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então*

$$(|a|+|b|)^{p-1} \leq \begin{cases} (|a|^{p-1}+|b|^{p-1}) & \text{se } p \leq 2 \\ 2^{p-2} (|a|^{p-1}+|b|^{p-1}) & \text{se } p > 2. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$|(a+b)_+^{p-1} - a_+^{p-1}| \leq \begin{cases} |b|^{p-1} & \text{se } p \leq 2 \\ C_p (|a|^{p-2}|b|+|b|^{p-1}) & \text{se } p > 2. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$|(a+b)_+^p - a_+^p - pa_+^{p-1}b| \leq \begin{cases} C_p |b|^p & \text{se } p \leq 2 \\ C_p (|a|^{p-2}|b|^2+|b|^p) & \text{se } p > 2. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

A demonstração dessas desigualdades podem ser encontradas no Apêndice de [22]

■

Lema 1.2. *O funcional I_ϵ , definido acima, satisfaz as propriedades (ii) e (iii) página 18.*

Demonstração: Tome $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, então para qualquer $z_\xi \in \tilde{Z}_\epsilon$ temos

$$(I'_\epsilon(z_\xi)|\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla z_\xi \nabla \phi + V(0)z_\xi \phi - (z_\xi)_+^p) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) z_\xi \phi dx. \quad (1.5)$$

Vamos analisar as integrais acima,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla z_\xi \nabla \phi + V(0)z_\xi \phi - (z_\xi)_+^p) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla U \nabla \phi + V(0)U \phi - U^p \phi) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla(U'(x)\xi) \nabla \phi + V(0)U'(x)\xi \phi - pU^{p-1}U'(x)\xi \phi) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} ((z_\xi)_+^p - U^p - pU^{p-1}U'(x)\xi) \phi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta U + V(0)U - U^p) \phi dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta(U'(x)\xi) + V(0)U'(x)\xi - pU^{p-1}U'(x)\xi) \phi dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} ((z_\xi)_+^p - U^p - pU^{p-1}U'(x)\xi) \phi dx. \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos são nulos, pois U é solução de (1.4) então

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla z_\xi \nabla \phi + V(0) z_\xi \phi - (z_\xi)_+^p) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(z_\xi)_+^p - U^p - pU^{p-1}U'(x)\xi| |\phi| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(U + U'(x)\xi)_+^p - U^p - pU^{p-1}U'(x)\xi| |\phi| dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade (A.3) obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla z_\xi \nabla \phi + V(0) z_\xi \phi - (z_\xi)_+^p) dx \right| &\leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} (|U|^{p-2}|U'(x)\xi|^2 + |U'(x)\xi|^p) |\phi| dx \\
&\leq (|\xi|^2 + |\xi|^p) \|\phi\|,
\end{aligned}$$

então

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla z_\xi \nabla \phi + V(0) z_\xi \phi - (z_\xi)_+^p) dx \right| \leq C\delta_\epsilon^2 \|\phi\|, \quad (1.6)$$

Para a segunda integral veja que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) z_\xi \phi dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(V(\epsilon x) - V(0))| |z_\xi| |\phi| dx \\
&\leq C\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |U + U'(x)\xi| |\phi| dx \\
&\leq C\epsilon^2 (1 + |\xi|) \|\phi\|,
\end{aligned}$$

logo

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) z_\xi \phi dx \right| \leq C(\epsilon^2 + \epsilon^2 \delta_\epsilon) \|\phi\|. \quad (1.7)$$

Substituindo (1.6) e (1.7) em (1.5) concluimos que

$$|(I'_\epsilon(z_\xi) | \phi)| \leq C(\epsilon^2 + \delta_\epsilon^2) \|\phi\| \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e portanto

$$\|I'_\epsilon(z_\xi)\| \leq C(\epsilon^2 + \delta_\epsilon^2) \quad \forall z_\xi \in \tilde{Z}_\epsilon. \quad (1.8)$$

Agora considere $q_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \in T_{z_\xi} \tilde{Z}_\epsilon = \text{span} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n} \right\}$ e ϕ uma função teste.

Temos

$$\begin{aligned}
\left| \left(I''_\epsilon(z_\xi) \left[\frac{q_i}{\|q_i\|} \right] | \phi \right) \right| &\leq \left| \frac{1}{\|q_i\|} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\nabla \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \nabla \phi + V(0) \frac{\partial U}{\partial x_i} \phi - pU^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} \phi \right) dx \right| \\
&\quad + \left| p \int_{\mathbb{R}^n} ((z_\xi)_+^{p-1} - U^{p-1}) \frac{\partial U}{\partial x_i} \phi dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) \frac{\partial U}{\partial x_i} \phi dx \right| \\
\Rightarrow \left| \left(I''_\epsilon(z_\xi) \left[\frac{q_i}{\|q_i\|} \right] | \phi \right) \right| &\leq \left| \frac{1}{\|q_i\|} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\Delta \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right) + V(0) \frac{\partial U}{\partial x_i} - pU^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \phi dx \right| \\
&\quad + \left| p \int_{\mathbb{R}^n} ((U + U'(x)\xi)_+^{p-1} - U^{p-1}) \frac{\partial U}{\partial x_i} \phi dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) \frac{\partial U}{\partial x_i} \phi dx \right|.
\end{aligned}$$

Novamente, como U é solução de (1.4) e pela desigualdade (A.2) segue que

$$\left| \left(I''_\epsilon(z_\xi) \left[\frac{q_i}{\|q_i\|} \right] \middle| \phi \right) \right| \leq C(|\xi| + \epsilon^2) \|\phi\|,$$

então

$$\|I''_\epsilon(z_\xi)[q]\| \leq C(\delta_\epsilon + \epsilon^2) \|q\|, \quad \forall z_\xi \in \tilde{Z}_\epsilon \text{ e } \forall q \in T_{z_\xi} \tilde{Z}_\epsilon, \quad (1.9)$$

isto conclui o item (ii).

Agora considere $u_1, u_2 \in \{u \in H^1(\mathbb{R}^n); \text{dist}(u; \tilde{Z}_\epsilon) < r_0\}$, $r_0 > 0$, então

$$\begin{aligned} |I''_\epsilon(u_1)[v, w] - I''_\epsilon(u_2)[v, w]| &= \left| -p \int_{\mathbb{R}^n} ((u_1)_+^{p-1} - (u_2)_+^{p-1}) vw \, dx \right| \\ &\leq p \int_{\mathbb{R}^n} |(u_1)_+^{p-1} - (u_2)_+^{p-1}| |vw| \, dx \\ &= p \int_{\mathbb{R}^n} |(u_2 + u_1 - u_2)_+^{p-1} - (u_2)_+^{p-1}| |vw| \, dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade (A.2) novamente, temos

$$\|I''_\epsilon(u_1) - I''_\epsilon(u_2)\| \leq (\|u_1 - u_2\| + \|u_1 - u_2\|^{p-1}),$$

logo

$$\|I''_\epsilon\|_{C^1} \leq C \text{ em } \{u \in H^1(\mathbb{R}^n); \text{dist}(u; \tilde{Z}_\epsilon) < r_0\}. \quad (1.10)$$

■

Denotando $W = (T_{z_\xi} \tilde{Z}_\epsilon)^\perp$, vamos procurar pontos críticos de I_ϵ da forma $u = z_\xi + w$ onde $z_\xi \in \tilde{Z}_\epsilon$ e $w \in W$.

Se $P_\xi : H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow W$ denota a projeção ortogonal em W então a equação $I'_\epsilon(z_\xi + w) = 0$ equivale ao sistema

$$\begin{cases} P I'_\epsilon(z + w) = 0 & \text{(equação auxiliar),} \\ (Id - P) I'_\epsilon(z + w) = 0 & \text{(equação de bifurcação).} \end{cases} \quad (P')$$

Logo, achar pontos críticos de I_ϵ equivale a encontrar soluções de (P') .

A fim de garantir a existência de soluções da equação auxiliar em (P') , pela Proposição 1.1, resta mostrar que $P_\xi I''_\epsilon(z_\xi)|_W$ é invertível e além disso, que existe uma constante $C > 0$ independente de ϵ e ξ tal que $\|(P_\xi I''_\epsilon(z_\xi))^{-1}\| \leq C$. Isto segue dos Lemas a seguir cuja a prova é análoga aos Lemas 2.4, 2.5, e 2.6 em [22].

Lema 1.3. *Existe $C > 0$ tal que para ϵ suficientemente pequeno*

$$I''_\epsilon(z_\xi)[v, v] \geq C^{-1}\|v\|^2; \quad \forall v \in \left(\text{span} \left\{ U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n} \right\} \right)^\perp.$$

Lema 1.4. *Existe $C > 0$ tal que para ϵ suficientemente pequeno*

$$|(I''_\epsilon(z_\xi)[P_\xi z_\xi] | P_\xi z_\xi)| \geq C\|P_\xi z_\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq \delta_\epsilon.$$

Lema 1.5. *Considere o operador $L_{\epsilon, \xi} = P_\xi I''_\epsilon(z_\xi)|_W: W \rightarrow W$. Então, existe $C > 0$ e ϵ suficientemente pequeno tais que $L_{\epsilon, \xi}$ possui inverso e satisfaz*

$$\|L_{\epsilon, \xi}^{-1}\| \leq C,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ com $|\xi| \leq \delta_\epsilon$.

Temos então satisfeitas as propriedades **(i)-(iv)** e com isso podemos usar a Proposição 1.1 que garante a existência e unicidade de solução para a equação auxiliar com ϵ suficientemente pequeno. Mais precisamente podemos afirmar que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $|\epsilon| < \epsilon_0$ e para todo $z_\xi \in \tilde{Z}_\epsilon$, com $|\xi| \leq \delta_\epsilon$ e $\delta_\epsilon \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, a equação auxiliar $P_\xi I'_\epsilon(z_\xi + w_\epsilon(z_\xi)) = 0$ tem uma única solução $w_\epsilon = w_\epsilon(z_\xi) \in W$. Além disso $\|w_\epsilon\| \leq C(\epsilon^2 + \delta_\epsilon^2)$ e $\|w'_\epsilon\| \leq C(\epsilon^2 + \delta_\epsilon)$.

A fim de resolver a equação de bifurcação, vamos considerar o funcional reduzido $\Phi_\epsilon: \tilde{Z}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_\epsilon(\xi) = I_\epsilon(z_\xi + w_\epsilon).$$

Primeiramente vejamos algumas expressões envolvendo w_ϵ e suas derivadas.

Note que como w_ϵ é solução da equação auxiliar, então $I'_\epsilon(z_\xi + w_\epsilon) \in W^\perp$, ou seja, $(I'_\epsilon(z_\xi + w_\epsilon) | v) = 0$ para todo $v \in W$. Logo, para todo $v \in W$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla(z_\xi + w_\epsilon) \nabla v + V(0)(z_\xi + w_\epsilon)v) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w_\epsilon)^p v dx + \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0))(z_\xi + w_\epsilon)v dx. \end{aligned}$$

Para facilitar a notação vamos escrever w no lugar de w_ϵ , vamos usar $(\cdot)'$ para indicar as derivadas de w em relação a ϵ , (ex. $w' = \frac{\partial w}{\partial \epsilon}$) e indicar com índice i as derivadas de w em relação a ξ_i , (ex. $w_i = \frac{\partial w}{\partial \xi_i}$).

Voltando para a expressão acima temos

$$(z_\xi | v) + (w | v) = \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p v dx - \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0))(z_\xi + w)v dx. \quad (1.11)$$

Derivando em relação a ϵ vem que

$$(w' | v) = p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} w' v dx - \int_{\mathbb{R}^n} V'(\epsilon x) x (z_\xi + w) v dx - \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) w' v dx. \quad (1.12)$$

Derivando novamente em relação a ϵ tem-se

$$\begin{aligned} (w'' | v) = & p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} (w')^2 v dx + p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} w'' v dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^n} \langle V''(\epsilon x) x, x \rangle (z_\xi + w) v dx - 2 \int_{\mathbb{R}^n} V'(\epsilon x) x w' v dx - \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) w'' v dx. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Quando $\epsilon = \xi = 0$ obtemos

$$(w'' | v) = p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} w'' v dx - \int_{\mathbb{R}^n} \langle V''(0) x, x \rangle U v dx, \quad \forall v \in W,$$

então

$$\langle I_0''(U)[w''] | v \rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle V''(0) x, x \rangle U v dx, \quad \forall v \in W.$$

Na verdade temos

$$\langle I_0''(U)[w''] | v \rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle V''(0) x, x \rangle U v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n). \quad (1.14)$$

De fato, seja $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp = (T_{z_\xi} \tilde{Z})$ então v_2 é tal que

$$\langle I_0''(U)[w''] | v_2 \rangle = \langle I_0''(U)[v_2] | w'' \rangle = 0 = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle V''(0) x, x \rangle U v_2 dx.$$

Agora derivando (1.12) em relação a ξ_i obtemos

$$\begin{aligned} (w'_i | v) = & p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w' v dx + p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} w'_i v dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^n} V'(\epsilon x) x \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) v dx - \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) w'_i v dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Fazendo $\epsilon = \xi = 0$ temos

$$(w'_i | v) = p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} w'_i v dx,$$

então $\langle I_0''(U)[w'_i] | v \rangle = 0$ para todo $v \in W$.

Note que como $w'_i \in W$ e $I_0''(U)|_W$ é invertível, então se $v_2 \in W^\perp$ temos

$$\langle I_0''(U)[w'_i] | v_2 \rangle = \langle w'_i | I_0''(U)[v_2] \rangle = 0,$$

e portanto

$$\langle I_0''(U)[w_i'] \mid v \rangle = 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n). \quad (1.16)$$

Derivando a expressão (1.11) em relação a ξ_i tem-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \mid v \right) + (w_i \mid v) &= p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) v \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) v \, dx. \end{aligned}$$

Derivando novamente em relação a ξ_j vem que

$$\begin{aligned} (w_{i,j} \mid v) &= p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) v \, dx \\ &\quad + p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} w_{i,j} v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) w_{i,j} v \, dx. \end{aligned}$$

Para $\epsilon = \xi = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} (w_{i,j} \mid v) &= p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} v \, dx + p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} w_{i,j} v \, dx \\ \langle I_0''(U)[w_{i,j}] \mid v \rangle &= p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} v \, dx \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Note que, de U solução de (1.4) temos

$$-\Delta \frac{\partial U}{\partial x_i} + V(0) \frac{\partial U}{\partial x_i} = pU^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

o que implica que

$$-\Delta \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + V(0) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = p(p-1)U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + pU^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1.18)$$

ou seja,

$$-\Delta \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} v + V(0) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} v = p(p-1)U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} v + pU^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} v.$$

Integrando em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left(-\Delta \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} v + V(0) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} v - pU^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} v \right) dx \\ &= p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} v \, dx, \end{aligned}$$

então

$$\left\langle I_0''(U) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mid v \right\rangle = p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n). \quad (1.19)$$

Note que por (1.17), (1.19) e usando o fato de que $I_0''(U)$ é invertível em W temos

$$w_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.20)$$

Além disso, usando (1.18) novamente obtemos

$$\begin{aligned} -\Delta \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + V(0) \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} &= p(p-1)(p-2) U^{p-3} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} \\ &+ p(p-1) U^{p-2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \\ &+ p(p-1) U^{p-2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} + p U^{p-1} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \end{aligned}$$

logo, para $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ vem que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left(-\Delta \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + V(0) \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} - p U^{p-1} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) v dx \\ &= p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) v dx \\ &+ p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} \left(U^{p-3} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) v dx. \end{aligned}$$

Então, para qualquer $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} \left\langle I_0''(U) \left[\frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right] \mid v \right\rangle &= p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} \left(U^{p-3} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) v dx \\ &+ p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) v dx. \end{aligned}$$

Em particular, quando $v = \frac{\partial U}{\partial x_l}$ obtemos

$$\begin{aligned} p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-3} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_l} dx &= -p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_l} w_{ik} dx \\ &- p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_l} w_{jk} dx - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_l} w_{ij} dx. \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora a existência de ponto crítico.

Usando (1.14), (1.16), (1.17), (1.19), (1.20) e (1.21) vamos expandir $\frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i}$ em potências de ϵ e ξ .

Veja que

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon(\xi) = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(z_\xi + w)|^2 + V(0)(z_\xi + w)^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p+1} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0))(z_\xi + w)^2 dx, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon(\xi) = & \frac{1}{2} (z_\xi + w | z_\xi + w) - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p+1} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0))(z_\xi + w)^2 dx. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Derivando (1.21) em relação a ϵ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon} = & (z_\xi + w | w') - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w' dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [V'(\epsilon x)x (z_\xi + w)^2 \\ & + 2(V(\epsilon x) - V(0))(z_\xi + w)w'] dx, \end{aligned} \quad (1.22)$$

derivando (1.22) em relação a ϵ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon^2} = & (w' | w') + (z_\xi + w | w'') - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} (w')^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w'' dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [\langle V''(\epsilon x)x | x \rangle (z_\xi + w)^2 + 4V'(\epsilon x)x (z_\xi + w)w'] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2(V(\epsilon x) - V(0)) [(w')^2 + (z_\xi + w)w''] dx, \end{aligned} \quad (1.23)$$

derivando novamente em relação ϵ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \epsilon^3} = & 3(w' | w'') + (z_\xi + w | w''') - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} (w')^3 dx \\ & - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} 2(w')w'' dx - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} w'w'' dx - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w''' dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [V'''(\epsilon x)[x]^3(z_\xi + w)^2 + 6\langle V''(\epsilon x)x | x \rangle (z_\xi + w)w' + \\ & \quad 6V'(\epsilon x)x [(w')^2 + (z_\xi + w)w'']] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2(V(\epsilon x) - V(0)) [3w'w'' + (z_\xi + w)w'''] dx. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Agora derivando (1.21) em relação a ξ_i obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} = & \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \mid z_\xi + w \right) - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) 2(z_\xi + w) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) dx, \end{aligned} \quad (1.25)$$

derivando (1.25) em relação a ξ_j temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = & (w_{ij} \mid z_\xi + w) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \mid \frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \\ & - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w_{ij} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + 2(z_\xi + w) w_{ij} \right] dx, \end{aligned} \quad (1.26)$$

derivando (1.26) em relação a ξ_k temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k} = & (w_{ijk} \mid z_\xi + w) + \left(w_{ij} \mid \frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) + \left(w_{ik} \mid \frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \mid w_{jk} \right) \\ & - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) dx \\ & - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left[w_{jk} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w_{ik} \right] dx \\ & - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) w_{ij} dx - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w_{ijk} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) \left[2w_{jk} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + 2w_{ik} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + 2w_{ij} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) 2(z_\xi + w) w_{ijk} dx, \end{aligned} \quad (1.27)$$

por fim, derivando (1.27) em relação a ξ_l obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} = & (w_{ijkl} \mid z_\xi + w) + \left(w_{ijk} \mid \frac{\partial U}{\partial x_l} + w_l \right) + \left(w_{ijl} \mid \frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) + (w_{ij} \mid w_{kl}) \\
& + \left(w_{ikl} \mid \frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + (w_{ik} \mid w_{jl}) + (w_{il} \mid w_{jk}) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \mid w_{jkl} \right) \\
& - p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-3} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_l} + w_l \right) dx \\
& - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left[w_{kl} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) \right] dx \\
& - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) \left[w_{jl} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w_{il} \right] dx \\
& - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_l} + w_l \right) \left[w_{jk} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w_{ik} \right] dx \\
& - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left[w_{jkl} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + w_{jk} w_{il} + w_{jl} w_{ik} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w_{ikl} \right] dx \\
& - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_l} + w_l \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) w_{ij} dx \\
& - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left[w_{kl} w_{ij} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) w_{ijl} \right] dx - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_l} + w_l \right) w_{ijk} dx \\
& - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w_{ijkl} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) \left[2w_{jkl} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + 2w_{jk} w_{il} \right] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) \left[2w_{ikl} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + 2w_{ik} w_{jl} + 2w_{ijl} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) + 2w_{ij} w_{kl} \right] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (V(\epsilon x) - V(0)) \left[2w_{ijk} \left(\frac{\partial U}{\partial x_l} + w_l \right) + 2(z_\xi + w) w_{ijkl} \right] dx.
\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \xi = 0$ vem que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \Big|_{\epsilon=\xi=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \mid U \right) - \int_{\mathbb{R}^n} U^p \frac{\partial U}{\partial x_i} dx = I'_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\epsilon=\xi=0} &= (w_{ij} \mid U) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \mid \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) - p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} dx - \int_{\mathbb{R}^n} U^p w_{ij} dx \\
&= I'_0(U) [w_{ij}] + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_j} \right] \mid \frac{\partial U}{\partial x_i} \right\rangle = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\epsilon=\xi=0} &= (w_{ijk} \mid U) + \left(w_{ij} \mid \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) + \left(w_{ik} \mid \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \mid w_{jk} \right) \\
&- p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} dx - p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} \left[w_{jk} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_j} w_{ik} + \frac{\partial U}{\partial x_k} w_{ij} \right] dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} U^p w_{ijk} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\epsilon=\xi=0} &= I'_0(U)[w_{ijk}] + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_k} \right] \mid w_{ij} \right\rangle + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_j} \right] \mid w_{ik} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] \mid w_{jk} \right\rangle - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} dx \\
&= -p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} dx \\
\text{por 1.17} &= - \left\langle I''_0(U)[w_{kj}] \mid \frac{\partial U}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] \mid w_{kj} \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} &= (w_{ijkl} \mid U) + \left(w_{ijk} \mid \frac{\partial U}{\partial x_l} \right) + \left(w_{ijl} \mid \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) + (w_{ij} \mid w_{kl}) + \left(w_{ikl} \mid \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \\
&\quad + (w_{ik} \mid w_{jl}) + (w_{il} \mid w_{jk}) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \mid w_{jkl} \right) - p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-3} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_l} dx \\
&- p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \left[\frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} w_{kl} + \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_i} w_{jl} + \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_j} w_{il} + \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_i} w_{jk} + \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_j} w_{ik} \right] dx \\
&- p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} \left[w_{jkl} \frac{\partial U}{\partial x_i} + w_{jk} w_{il} + w_{jl} w_{ik} + \frac{\partial U}{\partial x_j} w_{ikl} \right] dx - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_k} w_{ij} dx \\
&\quad - p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} \left[w_{kl} w_{ij} + \frac{\partial U}{\partial x_k} w_{ijl} + \frac{\partial U}{\partial x_l} w_{ijk} \right] dx - \int_{\mathbb{R}^n} U^p w_{ijkl} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} &= I'_0(U)[w_{ijkl}] + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_l} \right] \mid w_{ijk} \right\rangle + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_k} \right] \mid w_{ijl} \right\rangle + \langle I''_0(U)[w_{ij}] \mid w_{kl} \rangle \\
&\quad + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] \mid w_{jkl} \right\rangle + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_j} \right] \mid w_{ikl} \right\rangle + \langle I''_0(U)[w_{jk}] \mid w_{il} \rangle + \langle I''_0(U)[w_{jl}] \mid w_{ik} \rangle \\
&\quad - p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-3} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_l} dx - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_k} w_{ij} dx \\
&- p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \left[\frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} w_{kl} + \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_i} w_{jl} + \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_j} w_{il} + \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_i} w_{jk} + \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_j} w_{ik} \right] dx,
\end{aligned}$$

por (1.17) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} &= -p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-3} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_l} dx \\
&- p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \left[\frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_k} w_{ij} + \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_j} w_{ik} + \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_i} w_{jk} \right] dx \\
\text{por 1.21} &= 0.
\end{aligned}$$

Agora, vamos olhar para as derivadas mistas. Derivando (1.22) em relação a ξ_i temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon \partial \xi_i} = & \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \mid w' \right) + (z_\xi + w \mid w'_i) - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w' dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w'_i dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[2V'(\epsilon x) x (z_\xi + w) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) \right. \\ & \left. + 2(V(\epsilon x) - V(0)) \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w' + (z_\xi + w) w'_i \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Derivando (1.23) em relação a ξ_i obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \epsilon^2 \partial \xi_i} = & 2(w'_i \mid w') + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \mid w'' \right) + (z_\xi + w \mid w''_i) - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right. \\ & \left. + w_i \right) (w')^2 dx - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} 2w' w'_i dx - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w'' dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w''_i dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[2\langle V''(\epsilon x) x \mid x \rangle (z_\xi + w) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) \right. \\ & \left. + 4V'(\epsilon x) x \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w' + (z_\xi + w) w'_i \right) \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2(V(\epsilon x) - V(0)) [2w' w'_i \\ & \left. + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w'' + (z_\xi + w) w''_i \right] dx, \end{aligned} \tag{1.28}$$

derivando (1.26) em relação a ϵ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \epsilon} = & (w'_{i,j} \mid z_\xi + w) + (w_{i,j} \mid w') + \left(w'_i \mid \frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \mid w'_j \right) \\ & - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} w' \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) dx \\ & - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left[w'_j \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w'_i + w' w_{ij} \right] dx - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w'_{ij} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2V'(\epsilon x) x \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + (z_\xi + w) w_{ij} \right] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2(V(\epsilon x) - V(0)) \left[w'_j \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w'_i + w' w_{ij} + (z_\xi + w) w'_{ij} \right] dx, \end{aligned}$$

agora, derivando (1.28) em relação a ξ_j obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \epsilon^2 \partial \xi_i \partial \xi_j} &= 2(w'_{i,j} \mid w') + 2(w'_i \mid w'_j) + (w_{ij} \mid w'') + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \mid w''_j \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \mid w''_i \right) \\
&\quad + (z_\xi + w \mid w''_{ij}) - p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-3} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) (w')^2 dx \\
&\quad - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left[w_{ij} (w')^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w' w'_j + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w' w'_i \right] dx \\
&\quad - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} [2w'_j w'_i + 2w' w'_{ij}] - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w'' dx \\
&\quad - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left[w_{ij} w'' + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w''_j + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w''_i \right] dx - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w''_{ij} dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2 \langle V''(\epsilon x) x \mid x \rangle \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + (z_\xi + w) w_{ij} \right] dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 4V'(\epsilon x) x \left[w_{ij} w' + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w'_j + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w'_i + (z_\xi + w) w'_{ij} \right] dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2(V(\epsilon x) - V(0)) \left[2w'_j w'_i + 2w' w'_{ij} + w_{ij} w'' + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w''_j + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) w''_i \right] dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2(V(\epsilon x) - V(0)) (z_\xi + w) w''_{ij} dx,
\end{aligned}$$

derivando (1.24) em relação a ξ_i temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \epsilon^3 \partial \xi_i} &= 3(w'_i \mid w'') + 3(w' \mid w''_i) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \mid w''' \right) + (z_\xi + w \mid w'''_i) \\
&\quad - p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-3} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) (w')^3 dx - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} 3(w')^2 w'_i dx \\
&\quad - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) 2w' w''' dx - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} (2w'_i w'' + 2w' w''_i) dx \\
&\quad - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w' w'' dx - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} [w'_i w'' + w' w''_i] dx \\
&\quad - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w''' dx - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w'''_i dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[2V'''(\epsilon x) [x]^3 (z_\xi + w) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + 6 \langle V''(\epsilon x) x \mid x \rangle \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w' + (z_\xi + w) w'_i \right) \right] dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 6V'(\epsilon x) x \left[2w' w'_i + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w'' + (z_\xi + w) w''_i \right] dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2(V(\epsilon x) - V(0)) \left[3w'_i w'' + 3w' w''_i + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w''' + (z_\xi + w) w'''_i \right] dx,
\end{aligned}$$

por fim, derivando (1.27) em relação a ϵ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \epsilon} = & (w'_{ijk} | z_\xi + w) + (w_{ijk} | w') + \left(w'_{ij} | \frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) + (w_{ij} | w'_k) \\
& + \left(w'_{ik} | \frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + (w_{ik} | w'_j) + (w'_i | w_{jk}) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i | w'_{jk} \right) \\
& - p(p-1)(p-2) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-3} w' \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) dx \\
& - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} \left[w'_k \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + w'_j \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) \right] dx \\
& - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} w'_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) dx \\
& - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} w' \left[w_{jk} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) w_{ik} \right] dx \\
& - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left[w'_{jk} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + w_{jk} w'_i + w'_{ik} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + w_{ik} w'_j \right] dx \\
& - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-2} w' \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) w_{ij} dx \\
& - p \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^{p-1} \left(w'_k w_{ij} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) w'_{ij} + w' w_{ijk} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} (z_\xi + w)^p w'_{ijk} \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2V'(\epsilon x) x \left[w_{jk} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + w_{ik} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + w_{ij} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) + (z_\xi + w) w_{ijk} \right] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2(V(\epsilon x) - V(0)) \left[w'_{jk} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + w_i \right) + w_{jk} w'_i + w'_{ik} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} + w_j \right) + w_{ik} w'_j \right] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2(V(\epsilon x) - V(0)) \left[w'_{ij} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + w_k \right) + w_{ij} w'_k + w' w_{ijk} + (z_\xi + w) w'_{ijk} \right] dx.
\end{aligned}$$

Novamente, quando $\epsilon = \xi = 0$ vem que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon \partial \xi_i} \Big|_{\epsilon=\xi=0} = (U | w'_i) - \int_{\mathbb{R}^n} U^p w'_i dx = I'_0(U)[w'_i] = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \epsilon^2 \partial \xi_i} \Big|_{\epsilon=\xi=0} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} | w'' \right) + (U | w''_i) - p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} w'' dx - \int_{\mathbb{R}^n} U^p w''_i dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2\langle V''(0)x | x \rangle U \frac{\partial U}{\partial x_i} dx
\end{aligned}$$

$$\text{por 1.14} = I'_0(U)[w''_i] + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] | w'' \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle I''_0(U)[w''] | \frac{\partial U}{\partial x_i} \right\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\xi=0} &= (w'_{ij} \mid U) + \left(w'_i \mid \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \mid w'_j \right) - p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} \left[w'_j \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_j} w'_i \right] dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} U^p w'_{ij} dx \\
&= I'_0(U)[w'_{ij}] + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] \mid w'_j \right\rangle + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_j} \right] \mid w'_i \right\rangle = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \epsilon^2 \partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\epsilon=\xi=0} &= 2(w'_i \mid w'_j) + (w_{ij} \mid w'') + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \mid w''_j \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \mid w''_i \right) + (U \mid w''_{ij}) \\
&\quad - p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} 2w'_j w'_i dx - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} w'' dx - p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} \left(w_{ij} w'' + \frac{\partial U}{\partial x_i} w''_j \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial U}{\partial x_j} w''_i \right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} U^p w''_{ij} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2\langle V''(0)x \mid x \rangle \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + U w_{ij} \right] dx \\
&= I'_0(U)[w''_{ij}] + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_j} \right] \mid w''_i \right\rangle + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] \mid w''_j \right\rangle + \langle I''_0(U)[w_{ij}] \mid w'' \rangle \\
&\quad + 2\langle I''_0(U)[w'_i] \mid w'_j \rangle - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} w'' dx + \int_{\mathbb{R}^n} \langle V''(0)x \mid x \rangle \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + U w_{ij} \right] dx \\
&\quad \text{por 1.16 e 1.17} = \int_{\mathbb{R}^n} \langle V''(0)x \mid x \rangle \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + U w_{ij} \right] dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \epsilon^3 \partial \xi_i} \Big|_{\epsilon=\xi=0} &= 3(w'_i \mid w'') + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \mid w''' \right) + (U \mid w'''_i) - p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} 3w'_i w'' dx \\
&\quad - p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_i} w''' dx - \int_{\mathbb{R}^n} U^p w'''_i dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 2V'''(0)[x]^3 U \frac{\partial U}{\partial x_i} dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 6\langle V''(0)x \mid x \rangle U w'_i dx \\
\text{por 1.14} &= I'_0(U)[w'''_i] + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] \mid w''' \right\rangle + 3\langle I''_0(U)[w'_i] \mid w'' \rangle - 3\langle I''_0(U)[w''] \mid w'_i \rangle \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} V'''(0)[x]^3 U \frac{\partial U}{\partial x_i} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} V'''(0)[x]^3 U \frac{\partial U}{\partial x_i} dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \epsilon} &= (w'_{ijk} | U) + \left(w'_{ij} | \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) + (w_{ij} | w'_k) + \left(w'_{ik} | \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + (w_{ik} | w'_j) \\
&+ (w'_i | w_{jk}) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} | w'_{jk} \right) - p(p-1) \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} w'_k + \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_i} w'_j + \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_j} w'_i \right) dx \\
&- p \int_{\mathbb{R}^n} U^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} w'_{jk} + w_{jk} w'_i + w'_{ik} \frac{\partial U}{\partial x_j} + w_{ik} w'_j + w'_k w_{ij} + \frac{\partial U}{\partial x_k} w'_{ij} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} U^p w'_{ijk} dx \\
&= I'_0(U)[w'_{ijk}] + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_k} \right] | w'_{ij} \right\rangle + \langle I''_0(U)[w'_k] | w_{ij} \rangle + \langle I''_0(U)[w'_j] | w_{ik} \rangle \\
&\text{por 1.19 e 1.20} + \langle I''_0(U)[w'_i] | w_{jk} \rangle + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_j} \right] | w'_{ik} \right\rangle + \left\langle I''_0(U) \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right] | w'_{jk} \right\rangle \\
&- \langle I''_0(U)[w_{ji}] | w'_k \rangle - \langle I''_0(U)[w_{ki}] | w'_j \rangle - \langle I''_0(U)[w_{kj}] | w'_i \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vamos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_\epsilon(\xi)}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i} \Big|_{\epsilon=\xi=0} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\epsilon=\xi=0} \xi_j + \frac{\partial^2 \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i \partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\xi=0} \epsilon + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^3 \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\epsilon=\xi=0} \xi_j \xi_k \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i \partial \epsilon^2} \Big|_{\epsilon=\xi=0} \epsilon^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^3 \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\xi=0} \xi_j \epsilon + \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^4 \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\epsilon=\xi=0} \xi_j \xi_k \xi_l \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^4 \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \epsilon^2} \Big|_{\epsilon=\xi=0} \xi_j \epsilon^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^4 \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\xi=0} \xi_j \xi_k \epsilon + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \Phi_\epsilon}{\partial \xi_i \partial \epsilon^3} \Big|_{\epsilon=\xi=0} \epsilon^3 \\
&+ O(\epsilon^4 + |\xi|^4) \\
\frac{\partial \Phi_\epsilon(\xi)}{\partial \xi_i} &= \frac{1}{2} \epsilon^2 \sum_{j=1}^n \left[\int_{\mathbb{R}^n} \langle V''(0)x | x \rangle \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + U w_{ij} \right) dx \right] \xi_j \\
&+ \frac{1}{6} \epsilon^3 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{jkl} V_{jkl} x_j x_k x_l U \frac{\partial U}{\partial x_i} dx + O(\epsilon^4 + |\xi|^4).
\end{aligned}$$

Agora, escreva $V''(0) = (V_{kl})_{k,l}$ e usando (1.20) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \langle V''(0)x \mid x \rangle \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + U w_{ij} \right) dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k,l} V_{kl} x_k x_l \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \xi_j + U \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right] dx. \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{kl} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} x_k x_l dx + \int_{\mathbb{R}^n} U \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} x_k x_l dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{kl} \left[- \int_{\mathbb{R}^n} U \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} x_k x_l + \frac{\partial U}{\partial x_j} \delta_{ki} x_l + \frac{\partial U}{\partial x_j} \delta_{li} x_k \right) dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{kl} \int_{\mathbb{R}^n} U \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} x_k x_l dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{kl} \left(- \int_{\mathbb{R}^n} U \frac{\partial U}{\partial x_j} (\delta_{ki} x_l + \delta_{li} x_k) dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{kl} \left(- \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (U^2) (\delta_{ki} x_l + \delta_{li} x_k) dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{kl} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} U^2 (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{kj}) dx \right) \\
&= \frac{1}{2} C \sum_{k,l} V_{kl} (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{kj}) \\
&= \frac{1}{2} C \sum_k (V_{kj} \delta_{ki} + V_{ki} \delta_{kj}) \\
&= \frac{1}{2} C (V_{ij} + V_{ji}) = CV_{ij},
\end{aligned}$$

onde $C = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} U^2$.

Voltando em (1.29), considere o vetor b cujas coordenadas b_i 's são tais que $b_i = \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k,l} V_{jkl} x_j x_k x_l U \frac{\partial U}{\partial x_i} dx$, para todo $i = 1, \dots, n$ e com isso podemos escrever

$$\nabla \Phi_\epsilon(\xi) = \epsilon^2 CV''(0)\xi + \epsilon^3 b + O(\epsilon^4 + |\xi|^4),$$

ou seja,

$$\nabla \Phi_\epsilon(\xi) = \epsilon^2 \delta_\epsilon [CV''(0)\bar{\xi} + \epsilon \delta_\epsilon^{-1} b + O(\epsilon^2 \delta_\epsilon^{-1} + \delta_\epsilon^3 \epsilon^{-2})],$$

onde $\xi = \delta_\epsilon \bar{\xi}$ com $|\bar{\xi}| \leq R$, e $R > 0$. Escolha $\delta_\epsilon = \epsilon$, então da expressão acima concluímos que

$$\nabla \Phi_\epsilon(\xi) = \epsilon^3 \underbrace{(CV''(0)\bar{\xi} + b + O(\epsilon))}_{F(\bar{\xi})}. \quad (1.29)$$

Note que, como 0 é ponto crítico não degenerado de V , então $V''(0)$ é invertível e assim $F'(\bar{\xi}) = CV''(0)$ tem determinante diferente de zero. Note também que $F(\bar{\xi}) = 0$ se,

e somente se $\bar{\xi} = -[CV''(0)]^{-1}b$. Logo, para $R > 0$ grande o suficiente, o grau topológico $\deg(F, B_R(0), 0) = \text{sgn}(\det F'(\bar{\xi}))$ é diferente de zero. Com isso e por (1.29) obtemos

$$\deg(F + O(\epsilon), B_R(0), 0) = \deg(F, B_R(0), 0) \neq 0,$$

então existe $\bar{\xi}_\epsilon$ em $B_R(0)$, tal que $(F + O(\epsilon))(\bar{\xi}_\epsilon) = 0$ o que implica $\nabla \Phi_\epsilon(\epsilon \bar{\xi}_\epsilon) = 0$, isto é, Φ_ϵ tem um ponto crítico não degenerado $z_{\xi_\epsilon} := z_\epsilon$ em $B_{R\epsilon}(0) \subset \tilde{Z}_\epsilon$ e portanto, pelo Teorema 1.1 temos que $u_\epsilon = z_\epsilon + w_\epsilon(z_\epsilon)$ é um ponto crítico de I_ϵ , o que conclui o (1.2).

Capítulo 2

O problema de Coron

Sejam D um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$ com $0 \in D$ e $\delta > 0$. Em [15], Del Pino e Wei estudaram o problema abaixo com o expoente p acima do crítico em um domínio de Coron $\Omega = D \setminus B_\delta(0)$

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0, & u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

O principal resultado deles é que existe uma sequência $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de expoentes ressonantes

$$\frac{N+2}{N-2} < p_1 < p_2 < \cdots \quad \text{com} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \infty \quad (2.2)$$

tal que se p é supercrítico e $p \neq p_j$ para todo j , então (2.1) tem solução para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Nosso objetivo é mostrar que para $p = p_j$, como na sequência acima com $j \geq 3$ ímpar, e δ suficientemente pequeno o problema (2.1) possui pelo menos uma solução. Ou seja, o objetivo é mostrar o seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Suponha que $p = p_j$, como em (2.2) com $j \geq 3$ ímpar e que a integral em (2.61) é diferente de zero. Então para $\delta > 0$ suficientemente pequeno o problema (2.1) possui pelo menos uma solução.*

Note que (2.1) é equivalente à

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0, & u > 0 \text{ em } \Omega_\delta \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega_\delta \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : \delta x \in \Omega\} = \frac{1}{\delta} \Omega$ no sentido que $u(x)$ é uma solução de (2.3) se, e somente se, $\delta^{-\frac{2}{p-1}} u(\frac{x}{\delta})$ é solução de (2.1).

Logo o problema limite, quando $\delta \rightarrow 0$, relativo a (2.1) é o seguinte

$$\begin{cases} \Delta w + w^p = 0, & w > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_1(0) \\ w = 0 \text{ em } \partial B_1(0); \quad \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{N-2} w(x) < \infty. \end{cases} \quad (2.4)$$

É conhecido que o problema acima tem uma única solução simétrica e radial $w(r)$, se $p > \frac{N+2}{N-2}$. Isto porque Ni em [23] mostrou que o problema

$$\begin{cases} -\Delta U = |x|^\alpha U^p, & \text{em } B_1(0) \\ U = 0 & \text{em } \partial B_1(0); \end{cases} \quad (2.5)$$

com $\alpha > 0$ e $1 < p < \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$, tem uma única solução radial.

Assim, sendo $U(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} w(\frac{x}{|x|^2})$ a transformação de Kelvin de w temos $w(x) \leq \frac{C}{|x|^{N-2}}$ e além disso

$$-\Delta U(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} \frac{1}{|x|^4} \Delta w \left(\frac{x}{|x|^2} \right) = \frac{1}{|x|^{N+2}} \Delta w \left(\frac{x}{|x|^2} \right).$$

Então $-\Delta U = |x|^\alpha U^p$ implica $\frac{1}{|x|^{N+2}} \Delta w + |x|^\alpha \frac{1}{|x|^{p(N-2)}} w^p = 0$, ou seja, $\Delta w + |x|^\alpha \frac{|x|^{N+2}}{|x|^{p(N-2)}} w^p = 0$.

Veja que $\alpha + (N+2) - p(N-2) = 0$ se, e somente se $\alpha = p(N-2) - (N+2)$, daí a condição $\alpha > 0$ implica em $p > \frac{N+2}{N-2}$.

2.1 O operador $\Delta + pw^{p-1}$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$

Em [15] foi estabelecido uma teoria de invertibilidade para o operador linearizado associado a w . Foi investigado sob quais condições o problema

$$\begin{cases} \Delta \phi + pw^{p-1} \phi = h, & \phi > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_1(0) \\ \phi = 0 \text{ em } \partial B_1(0), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

com $h = 0$, admite somente a solução trivial. Para este fim, consideraram o primeiro autovalor do problema

$$\psi'' + \frac{N-1}{r} \psi' + pw^{p-1} \psi + \nu \frac{\psi}{r^2} = 0. \quad (2.7)$$

$$\psi(1) = 0 \text{ e } \psi(\infty) = 0. \quad (2.8)$$

Este autovalor é variacional e caracterizado como

$$\nu(p) = \inf_{\psi \in \mathcal{E}} \frac{\int_1^\infty |\psi'|^2 r^{N-1} dr - p \int_1^\infty w^{p-1} |\psi|^2 r^{N-1} dr}{\int_1^\infty \psi^2 r^{N-3} dr}, \quad (2.9)$$

com $\mathcal{E} = \{\psi \in C^1[1, \infty) \mid \psi(1) = 0 \text{ e } \int_1^\infty |\psi'|^2 r^{N-1} dr < \infty\}$. Esta quantidade está bem definida devido à desigualdade de Hardy $\frac{(N-2)^2}{2} \int_1^\infty \psi^2 r^{N-3} dr \leq \int_1^\infty |\psi'|^2 r^{N-1} dr$.

O número $\nu(p)$ é negativo, pois o quociente de Rayleigh fica negativo quando avaliado em $\psi = w$. De fato,

$$\begin{aligned} -\Delta w = -w'' - \frac{(N-1)}{r} w' = w^p &\Rightarrow -\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} w')' = w^p \\ &\Rightarrow \int_1^\infty [(r^{N-1} w')' w - r^{N-1} w^{p+1}] dr = 0 \\ &\Rightarrow \int_1^\infty [r^{N-1} (w')^2 - r^{N-1} w^{p+1}] dr = 0 \\ \Rightarrow \frac{\int_1^\infty [r^{N-1} (w')^2 - r^{N-1} p w^{p+1}] dr}{\int_1^\infty w^2 r^{N-3} dr} &= \frac{\int_1^\infty (1-p) r^{N-1} w^{p+1} dr}{\int_1^\infty w^2 r^{N-3} dr}. \end{aligned}$$

Note que $p > 1$, logo segue a afirmação.

Considere o problema (2.6) com $h = 0$, e suponha que ϕ é uma solução. A simetria do domínio $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$ nos permite escrever

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(r) \Theta_k(\theta), \quad r > 0 \text{ e } \theta \in \mathbb{S}^{N-1}, \quad (2.10)$$

onde Θ_k , $k \geq 0$ são as autofunções do operador de Laplace-Beltrami $-\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}$ em $\mathbb{S}^{N-1}$ normalizado, as autofunções são os esféricos harmônicos, esses podem ser definidos como polinômios homogêneos de grau igual à ordem do autovalor λ_k associado, ver [7], lembrando que o conjunto de autovalores é dado por $\{j(N-2+j); j \geq 0\}$.

O seguinte Lema nos dá o decaimento de ψ e ψ' .

Lema 2.1. *Para r grande o suficiente temos*

$$\frac{|\psi(r)|}{r^\mu} \leq C \text{ e } \frac{|\psi'(r)|}{r^{\mu-1}} \leq C,$$

onde μ é a raiz negativa de $\mu(\mu + N - 2) = \lambda_k$.

Demonstração: De (2.7) e $\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} \psi')' = \psi'' + \frac{N-1}{r} \psi'$, vem que

$$\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} \psi')' = -p w^{p-1} \psi + \frac{\lambda_k}{r^2} \psi,$$

então

$$(r^{N-1}\psi')' = -pr^{N-1}w^{p-1}\psi + \lambda_k r^{N-3}\psi. \quad (2.11)$$

Note que pela desigualdade de Hardy $\int_1^\infty \psi^2 r^{n-3} dr < \infty$. Então podemos afirmar que existe uma sequência $r_n \rightarrow \infty$ tal que $\psi(r_n) = o(1)$ quando $n \rightarrow \infty$. Caso contrário $\psi(r) \geq C$ para r no infinito, e isso contradiz $\int_1^\infty \psi^2 r^{n-3} dr < \infty$.

Voltando em (2.11), multiplicando por r^μ e integrando em (R, r_n) obtemos

$$\int_R^{r_n} s^\mu (s^{N-1}\psi')' ds = - \int_R^{r_n} p s^{\mu+N-1} w^{p-1} \psi ds + \int_R^{r_n} \lambda_k s^{\mu+N-3} \psi ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} - \int_R^{r_n} p s^{\mu+N-1} w^{p-1} \psi ds &= s^{\mu+N-1} \psi'(s) \Big|_R^{r_n} - \mu \int_R^{r_n} s^{\mu+N-2} \psi'(s) ds \\ &\quad - \lambda_k \int_R^{r_n} s^{\mu+N-3} \psi ds \\ &= s^{\mu+N-1} \psi'(s) \Big|_R^{r_n} - \frac{\lambda_k}{\mu + N - 2} s^{\mu+N-2} \psi(s) \Big|_R^{r_n} + \frac{\lambda_k}{\mu + N - 2} \int_R^{r_n} s^{\mu+N-2} \psi'(s) ds \\ &\quad - \mu \int_R^{r_n} s^{\mu+N-2} \psi'(s) ds \\ &= s^{\mu+N-1} \psi'(s) \Big|_R^{r_n} - \mu s^{\mu+N-2} \psi(s) \Big|_R^{r_n}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} - \int_R^{r_n} p w^{p-1} s^{\mu+N-1} \psi ds &= r_n^{\mu+N-1} \psi'(r_n) - R^{\mu+N-1} \psi'(R) - \mu r_n^{\mu+N-2} \psi(r_n) \\ &\quad + \mu R^{\mu+N-2} \psi(R). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Agora, integrando (2.11) em $(1, r_n)$ temos

$$\int_1^{r_n} (s^{N-1}\psi'(s))' ds = - \int_1^{r_n} p w^{p-1} s^{N-1} \psi(s) ds + \lambda_k \int_1^{r_n} s^{N-3} \psi(s) ds,$$

e multiplicando por r_n^μ vem que

$$r_n^{\mu+N-1} \psi'(r_n) = -p r_n^\mu \int_1^{r_n} w^{p-1} s^{N-1} \psi(s) ds + \lambda_k r_n^\mu \int_1^{r_n} s^{N-3} \psi(s) ds + \psi'(1) r_n^\mu.$$

Vamos analisar as integrais acima

$$\begin{aligned} \left| r_n^\mu \lambda_k \int_1^{r_n} s^{N-3} \psi(s) ds \right| &\leq C \lambda_k r_n^\mu \int_1^{r_n} s^{N-3} ds \leq \frac{c \lambda_k r_n^\mu}{N-2} (r_n^{N-2} - 1) \\ &\leq \frac{c \lambda_k}{N-2} (r_n^{\mu+N-2} - r_n^\mu), \end{aligned}$$

e portanto

$$r_n^\mu \lambda_k \int_1^{r_n} s^{N-3} \psi(s) ds = o(1).$$

Agora veja $\left| r_n^\mu \int_1^{r_n} p w^{p-1} s^{N-1} \psi(s) ds \right| \leq c r_n^\mu \int_1^{r_n} s^{(p-1)(2-N)+N-1} ds$, então se $(p-1)(2-N) + N - 1 = -1$ temos

$$\left| r_n^\mu \int_1^{r_n} p w^{p-1} s^{N-1} \psi(s) ds \right| \leq c r_n^\mu \log(r_n) = c \frac{\log(r_n)}{r_n^2} r_n^{\mu+2}.$$

Se $(p-1)(2-N) + N - 1 \neq -1$, então

$$\left| r_n^\mu \int_1^{r_n} p w^{p-1} s^{N-1} \psi(s) ds \right| \leq C (r_n^{\mu+(p-1)(2-N)+N} - r_n^\mu).$$

Logo

$$r_n^\mu \int_1^{r_n} p w^{p-1} s^{N-1} \psi(s) ds = o(1).$$

Portanto $r_n^{\mu+N-1} \psi'(r_n) = o(1)$ e com isso, voltando em (2.12) obtemos

$$\begin{aligned} \int_R^\infty p w^{p-1} s^{\mu+N-1} \psi(s) ds &= R^{\mu+N-1} \psi'(R) - \mu R^{\mu+N-2} \psi(R) \\ &= R^{N-1} [R^\mu \psi'(R) - \mu R^{\mu-1} \psi(R)] \\ &= R^{2\mu+N-1} \left[\frac{R^\mu \psi'(R) - \mu R^{\mu-1} \psi(R)}{R^{2\mu}} \right] \\ &= R^{2\mu+N-1} \left(\frac{\psi(R)}{R^\mu} \right)'. \end{aligned}$$

Então $\int_1^t \frac{1}{R^{2\mu+N-1}} \left(\int_R^\infty p w^{p-1} s^{\mu+N-1} \psi(s) ds \right) dR = \frac{\psi(t)}{t^\mu}$. Agora veja que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \int_R^\infty p w^{p-1} s^{\mu+N-1} \psi(s) ds \right| &\leq C_1 \int_R^\infty s^{(p-1)(2-N)} s^{\mu+N-1} ds \\ &\leq \frac{-C_1 R^{(p-1)(2-N)+\mu+N}}{(p-1)(2-N) + \mu + N}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\psi(t)}{t^\mu} \right| &\leq \int_1^t \frac{1}{R^{2\mu+N-1}} \left(\frac{-C_1 R^{(p-1)(2-N)+\mu+N}}{(p-1)(2-N)+\mu+N} \right) dR \\
&\leq \frac{-C_1}{(p-1)(2-N)+\mu+N} \int_1^t R^{(p-1)(2-N)-\mu+1} dR \\
&\leq C_2 \frac{1}{(p-1)(2-N)-\mu+2} \left(t^{(p-1)(2-N)-\mu+2} - 1 \right),
\end{aligned}$$

em que $C_2 > 0$. Logo,

$$|\psi(t)| \leq C_2 \frac{1}{(p-1)(2-N)-\mu+2} \left(t^{(p-1)(2-N)+2} - t^\mu \right).$$

Note que se $(p-1)(2-N)+2 < \mu$ então $|\psi(t)| \leq \tilde{C}_2 t^\mu$, com $\tilde{C}_2 > 0$. Agora, se $(p-1)(2-N)+2 > \mu$ então

$$|\psi(t)| \leq C_2 t^{(p-1)(2-N)+2}. \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.13), de maneira análoga feita anteriormente, vamos obter

$$|\psi(t)| \leq C_2 \frac{1}{2(p-1)(2-N)-\mu+4} \left(t^{2(p-1)(2-N)+4} - t^\mu \right).$$

E assim

$$\begin{aligned}
|\psi(t)| &\leq C t^\mu && \text{se } 2(p-1)(2-N)+4 < \mu, \\
|\psi(t)| &\leq C t^{2(p-1)(2-N)+4} && \text{se } 2(p-1)(2-N)+4 > \mu.
\end{aligned}$$

Repetindo o processo anterior, iterando um número finito de vezes obteremos

$$|\psi(t)| \leq C \frac{1}{l(p-1)(2-N)-\mu+2l} \left(t^{l(p-1)(2-N)+2l} - t^\mu \right),$$

com $l(p-1)(2-N)-\mu+2l < \mu$.

Portanto

$$\frac{|\psi(r)|}{r^\mu} \leq C,$$

para r grande o suficiente.

Agora considere r_0 ponto de máximo de ψ e assim integrando (2.11) em (r_0, r) obtemos

$$r^{N-1} \psi'(r) = - \int_{r_0}^r p s^{N-1} w^{p-1} \psi(s) ds + \lambda_k \int_{r_0}^r s^{N-3} \psi(s) ds,$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
 |r^{N-1}\psi'(r)| &\leq c_1 \int_{r_0}^r s^{N-1} s^{(p-1)(2-N)} s^\mu ds + c_2 \int_{r_0}^r s^{N-3} s^\mu ds \\
 &\leq \tilde{C}(r^{N+(p-1)(2-N)+\mu} + r^{N-2+\mu}) \\
 &\leq \tilde{C}r^{N-2+\mu},
 \end{aligned}$$

ou seja, $|\psi'(r)| \leq \tilde{C}r^{-1+\mu}$.

Portanto $\frac{|\psi'(r)|}{r^{\mu-1}} \leq C$ para r grande o suficiente.

■

Agora note que as componentes ϕ_k de $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(r) \Theta_k(\theta)$ satisfazem as equações diferenciais

$$\begin{cases} \phi_k'' + \frac{N-1}{r} \phi_k' + \left(pw^{p-1} - \frac{\lambda_k}{r^2} \right) \phi_k = 0, & r \in (1, \infty) \\ \phi_k(1) = 0 & \phi_k(\infty) = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Se $k = 0$ então $\lambda_k = 0$ e $Z_1(r) = rw'(r) + \frac{2}{p-1}w$ satisfaz

$$Z_1'' + \frac{N-1}{r} Z_1' + pw^{p-1} Z_1 = 0, \quad \forall r > 1,$$

mas $Z_1(1) = w'(1) \neq 0$ e note que Z_1 não muda de sinal para r grande. Segue que o segundo gerador de soluções desta EDO é dado pela fórmula de redução de ordem, para r grande

$$Z_2(r) = Z_1(r) \int_R^r \frac{ds}{s^{N-1} Z_1^2}.$$

Mas $Z_1(r) \sim cr^{2-N}$, então

$$Z_2 \sim r^{2-N} \int_R^r \frac{ds}{s^{N-1}(s^{2-N})^2} = r^{2-N} \int_R^r s^{N-3} ds = \frac{1 - r^{2-N} R^{N-2}}{N-2}.$$

Podemos ver que $Z_2(\infty) \neq 0$ se $N \geq 3$. Como ϕ_0 é uma combinação linear de Z_1 e Z_2 , segue que a única possibilidade é $\phi_0 = 0$.

Se $k = 1$, então $\lambda_k = (N-1)$ com multiplicidade N , e neste caso também temos uma solução explícita que não se anula em $r = 1$, mas se anula em $r = \infty$. Simplesmente $Z_1(r) = w'(r)$. Mas o mesmo argumento como acima nos dá um segundo gerador $Z_2 \sim r^2$, quando $r \rightarrow \infty$, e novamente a única possibilidade é $\phi_k \equiv 0$ para todo $k = 1, \dots, N$.

Agora, considere $k \geq 2$. Neste caso, não só não temos uma solução explícita da EDO, como também pode ser que exista uma solução não trivial.

Suponha que ϕ_k é solução não trivial da EDO e afirmamos que ϕ_k não pode mudar de sinal em $(1, \infty)$. De fato, se isso acontecer, só pode ocorrer um número finito de vezes, uma vez que o seu comportamento no infinito deve ser como o decaimento da solução da EDO de Euler,

$$Z'' + \frac{N+1}{r}Z' - \frac{\lambda_k}{r^2}Z = 0,$$

ou seja, deve ter a mesma ordem que $Z(r) = cr^{-\mu}$, onde $\mu = -\frac{(N-2)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(N-2)^2 + 4\lambda_k}$, ver Lema 2.1.

Seja $r_0 > 1$ o último zero de ϕ_k , e vamos assumir que $\phi > 0$ em (r_0, ∞) . Observemos que, como $\Delta w < 0$, pois $\Delta w = -w^p$ e $w > 0$, $w'(r)$ tem exatamente um zero em $(1, \infty)$. Pelo Teorema de Sturm, este zero deve ser menor que r_0 . Então $w' < 0$ em (r_0, ∞) .

Vamos observar agora que $W(r) = r^{N-1}(w'\phi'_k - w''\phi_k)$ satisfaz $W'(r) = r^{N-3}(\lambda_k - \lambda_1)w'\phi_k < 0$ em (r_0, ∞) e além disso $W(r_0) < 0$ e $W(\infty) = 0$, o que é impossível.

Isto mostra que ϕ_k não muda de sinal. Assim a única possibilidade para que a equação (2.15) tenha solução não trivial é se $\lambda_k = -\nu(p)$. Na verdade, isto nos dá que se p é tal que

$$\nu(p) \neq -j(N-2+j), \quad \forall j = 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

então o problema (2.6) com $h = 0$ admite somente a solução trivial $\phi = 0$.

Em [15] mostraram que para cada $j \geq 2$ o conjunto dos números p tais que $\nu(p) = -j(N-2+j)$ é não vazio e finito. Em particular, existe uma sequência da forma

$$\frac{N+2}{N-2} < p_1 < p_2 < \dots; p_j \rightarrow \infty \text{ quando } j \rightarrow \infty$$

tal que (2.16) vale se, e somente se $p \neq p_j$, para todo $j = 1, 2, 3, \dots$. Isto é, para esta sequência, o operador $\Delta + pw^{p-1}$ possui núcleo não trivial. Então, fixando $p = p_j$, podemos escrever

$$\text{Ker}(\Delta + pw^{p-1}) = \text{span}\{Y_i; i = 1, \dots, d\}, \quad (2.17)$$

onde d é a multiplicidade do autovalor associado.

Observação 2.1. Note que as funções que pertencem ao núcleo do operador $\Delta + pw^{p-1}$ são escritas como em (2.10), ou seja, são geradas por produtos de funções radiais por funções angulares da seguinte forma $Y_i = \psi \Theta_i$, onde ψ resolve (2.7) e as funções angulares, Θ_i com $i = 1, \dots, d$, formam uma base ortonormal para as autofunções do operador de Laplace-Beltrami, cujos autovalores associados são $\lambda_j = -j(N-2+j)$, ou ainda, formam

uma base para o espaço dos polinômios homogêneos de grau j , ver [7]. Logo, se a ordem do autovalor for par (ímpar), então as autofunções associadas serão funções pares (ímpares). Consequentemente, se $j \geq 2$ for par (ímpar), então as funções Y_i 's serão funções pares (ímpares).

2.1.1 Solvabilidade de (2.6)

Vejamos agora, sob quais condições (2.6) tem solução para expoentes $p = p_j$ como na sequência acima.

Vamos escrever $\Omega_\delta = D_\delta \setminus \overline{B}_1(0)$ e também o conjunto $C_*^1(\Omega_\delta) = \{\phi \in C^1(\Omega_\delta) ; \|\phi\|_* < \infty\}$, onde fixado $\sigma > 0$ pequeno o suficiente, vamos considerar as normas

$$\|\phi\|_* = \sup_{|x|>1} |x|^{N-2-\sigma} |\phi(x)| + \sup_{|x|>1} |x|^{N-1-\sigma} |\nabla \phi(x)|$$

$$\|h\|_{**} = \sup_{|x|>1} |x|^{N-\sigma} |h(x)|.$$

Considere o problema limite

$$\begin{cases} \Delta \phi + p w^{p-1} \phi = h, & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_1(0) \\ \phi = 0, & \text{em } \partial B_1(0), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla Y_i \, dx = 0, & \forall i = 1, \dots, d \end{cases} \quad (\text{PL})$$

com a seguinte condição de ortogonalidade

$$\int_{\Omega} h(x) Y_i(x) \, dx = 0 \quad \forall i = 1, \dots, d. \quad (\text{C.O.})$$

Proposição 2.1. *Seja $p = p_j$ como em (2.2), para algum j . Então para todo h que satisfaz (C.O.), com $\|h\|_{**} < \infty$, o problema (PL) tem solução única $\phi = T(h)$ com $\|\phi\|_* < \infty$. Além disso, existe uma constante $C = C(p) > 0$ tal que*

$$\|T(h)\|_* \leq C \|h\|_{**}.$$

Demonstração:

Fazendo a transformação de Kelvin em ϕ temos $\tilde{\phi}(x) = |x|^{2-N} \phi\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ e tomando $\tilde{h}(x) = |x|^{-N-2} h\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ vem que

$$\Delta \tilde{\phi}(x) = |x|^{2-N} \frac{1}{|x|^4} \Delta \phi\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = |x|^{-2-N} \Delta \phi\left(\frac{x}{|x|^2}\right),$$

então de $\Delta\phi + pw^{p-1}\phi = h$ vem que

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\phi}|x|^{2+N} + \tilde{\phi}|x|^{-p(2-N)}pw^{p-1} = h &\Rightarrow \Delta\tilde{\phi} + pw^{p-1}\frac{|x|^{-2-N}}{|x|^{p(2-N)}}\tilde{\phi} = \frac{h}{|x|^{N+2}} \\ &\Rightarrow \Delta\tilde{\phi} + pw^{p-1}|x|^{p(N-2)-(N+2)}\tilde{\phi} = \tilde{h}.\end{aligned}$$

Assim (PL) é equivalente ao seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\tilde{\phi} + pw^{p-1}|x|^{p(N-2)-(N+2)}\tilde{\phi} = \tilde{h}, & \text{em } B_1(0) \\ \tilde{\phi} = 0, & \text{em } \partial B_1(0) \\ \int_{B_1(0)} \nabla\tilde{\phi}\nabla\tilde{Y}_i dx = 0, & \forall i = 1, \dots, d. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}|\tilde{h}(x)| &= |x|^{-N-2} \left| h\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right| = |x|^{-N-2} \frac{|x|^{N-\sigma}}{|x|^{N-\sigma}} \left| h\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right| \\ &= |x|^{-2-\sigma} |x|^{-N+\sigma} \left| h\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \right| \\ &= |x|^{-2-\sigma} |y|^{N-\sigma} |h(y)| \\ &\leq |x|^{-2-\sigma} \sup_{|y|>1} |y|^{N-\sigma} |h(y)| \\ &= |x|^{-2-\sigma} \|h\|_{**},\end{aligned}$$

então

$$|\tilde{h}(x)| \leq |x|^{-2-\sigma} \|h\|_{**}. \quad (2.19)$$

Considere $K : H^{-1}(B_1(0)) \rightarrow H_0^1(B_1(0)) \hookrightarrow H^{-1}(B_1(0))$; $K = (-\Delta)^{-1}$, então

$$K(-pw^{p-1}|x|^{p(2-N)-(N+2)}\tilde{\phi} + \tilde{h}) = \tilde{\phi} \Rightarrow \underbrace{K(-pw^{p-1}|x|^{p(2-N)-(N+2)}\tilde{\phi})}_{L(\tilde{\phi})} + K(\tilde{h}) = \tilde{\phi}$$

$\Rightarrow K(\tilde{h}) = \tilde{\phi} - L(\tilde{\phi})$, onde $L : H_0^1(B_1(0)) \hookrightarrow H^{-1}(B_1(0)) \rightarrow H_0^1(B_1(0))$ compacto.

Veja que $\text{Ker}(Id - L) = \text{Ker}(\Delta + pw^{p-1}) \neq \{0\}$ e pela Alternativa de Fredholm $\text{Im}(Id - L) = \text{Ker}(Id - L^*)^\perp$.

Note que L é simétrico, ou seja $L = L^*$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle L\tilde{\phi}, v \rangle &= \langle K(-pw^{p-1}|x|^{p(2-N)-(N+2)}\tilde{\phi}), v \rangle = \langle (-\Delta)^{-1}(-pw^{p-1}|x|^{p(2-N)-(N+2)}\tilde{\phi}), v \rangle \\
&= \int_{B_1(0)} \nabla((-\Delta)^{-1}(-pw^{p-1}|x|^{p(2-N)-(N+2)}\tilde{\phi})) \nabla v dx \\
&= \int_{B_1(0)} -pw^{p-1}|x|^{p(2-N)-(N+2)}\tilde{\phi} v dx \\
&= \int_{B_1(0)} \nabla((-\Delta)^{-1}(-pw^{p-1}|x|^{p(2-N)-(N+2)}v)) \nabla \tilde{\phi} dx \\
&= \langle (-\Delta)^{-1}(-pw^{p-1}|x|^{p(2-N)-(N+2)}v), \tilde{\phi} \rangle = \langle \tilde{\phi}, Lv \rangle.
\end{aligned}$$

Então, $Im(Id - L) = Ker(Id - L)^\perp$ e assim $(Id - L)\tilde{\phi} = f$ se, e somente se, $f \in Ker(Id - L)^\perp$.

Portanto, vamos considerar $(Id - L)$ restrito a $Ker(Id - L)^\perp$, e com isso

$$\tilde{\phi} = (Id - L)^{-1}(K(\tilde{h})) \iff \tilde{\phi} \in Ker(Id - L)^\perp \text{ e } K(\tilde{h}) \in Ker(Id - L)^\perp.$$

Isto ocorre se, e somente se $\langle \tilde{\phi}, \tilde{Y}_i \rangle_{H_0^1} = 0$ e $\langle K(\tilde{h}), \tilde{Y}_i \rangle_{H_0^1} = \langle (-\Delta)^{-1}\tilde{h}, \tilde{Y}_i \rangle_{H_0^1} = 0$, para todo $i = 1, \dots, d$. Ou ainda,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(0)} \nabla \tilde{\phi} \nabla \tilde{Y}_i dx = 0 \text{ e } \int_{B_1(0)} \nabla((-\Delta)^{-1}\tilde{h}) \nabla \tilde{Y}_i dx = 0, \quad \forall i = 1, \dots, d \\
&\iff \int_{B_1(0)} |x|^{-N} \nabla \phi \left(\frac{x}{|x|^2} \right) |x|^{-N} \nabla Y_i \left(\frac{x}{|x|^2} \right) dx = 0 \text{ e } \int_{B_1(0)} \tilde{h} \tilde{Y}_i dx = 0, \quad \forall i = 1, \dots, d \\
&\iff \int_{B_1(0)} |x|^{-2N} \nabla \phi \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \nabla Y_i \left(\frac{x}{|x|^2} \right) dx = 0 \text{ e } \\
&\quad \int_{B_1(0)} |x|^{-N-2} h \left(\frac{x}{|x|^2} \right) |x|^{-N-2} Y_i \left(\frac{x}{|x|^2} \right) dx = 0 \\
&\iff \int_{\Omega} \nabla \phi(y) \nabla Y_i(y) dy = 0 \text{ e } \int_{\Omega} h(y) Y_i(y) dy = 0 \quad \forall i = 1, \dots, d.
\end{aligned}$$

Logo, existe uma única $\tilde{\phi} \in Ker(Id - L)^\perp$ solução fraca de (2.18), para cada $\tilde{h}$ que satisfaz (C.O.). Além disso temos,

$$\|\tilde{\phi}\|_{H_0^1} \leq C \|K(\tilde{h})\|_{H_0^1} = C \|\tilde{h}\|_{H^{-1}} \leq C \|\tilde{h}\|_{L^q}. \quad (2.20)$$

A última desigualdade segue da imersão contínua $L^q(B_1(0)) \hookrightarrow H^{-1}(B_1(0))$ para todo $q \in [1, 2^*]$.

Obs: Ver Teorema 9.13 em [16] no que segue para a estimativa elíptica.

Considere $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^N; \frac{\rho}{2} < |x| < 1\}$ domínio em $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{T} = \partial B_1(0) \subset \partial\Gamma$. $\tilde{\phi} \in W^{2,q}(\Gamma)$ solução de (2.18) com $\tilde{\phi} = 0$ em $\mathbb{T}$. Então para $\Gamma' = \{x \in \mathbb{R}^N; \rho \leq |x| < 1\}$; $\Gamma' \subset \Gamma \cup \mathbb{T}$, temos a estimativa

$$\|\tilde{\phi}\|_{W^{2,q}(\Gamma')} \leq C \left(\|\tilde{\phi}\|_{L^q(\Gamma)} + \|\tilde{h}\|_{L^q(\Gamma)} \right). \quad (2.21)$$

Vamos usar o argumento bootstrap a seguir. Se $q > \frac{N}{2}$ então $W^{2,q}(\Gamma') \hookrightarrow C^0(\Gamma')$ e assim $\|\tilde{\phi}\|_{L^\infty(\Gamma')} \leq C \|\tilde{\phi}\|_{W^{2,q}(\Gamma')}$. Caso contrário, isto é, $q \leq \frac{N}{2}$, tome $q_1 > q$. Se $q_1 > \frac{N}{2}$ temos a imersão e a mesma estimativa acima para q_1 , caso contrário, tome $q_2 > q_1 > q$. Se $q_2 > \frac{N}{2}$, novamente, temos a imersão e a mesma estimativa acima para q_2 , caso contrário repete-se o argumento até obter um q_j tal que $q_j > \frac{N}{2}$ e assim vale a imersão $W^{2,q_j}(\Gamma') \hookrightarrow C^0(\Gamma')$ e portanto $\|\tilde{\phi}\|_{L^\infty(|x|>\rho)} \leq C_j \|\tilde{\phi}\|_{W^{2,q_j}(|x|>\rho)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty(|x|>\rho)} &\leq C_j \|\tilde{\phi}\|_{W^{2,q_j}(|x|>\rho)} \leq C_j C \left(\|\tilde{\phi}\|_{L^{q_j}(|x|>\frac{\rho}{2})} + \|\tilde{h}\|_{L^{q_j}(|x|>\frac{\rho}{2})} \right) \\ &\leq C_j \left(C_{j-1} \|\tilde{\phi}\|_{L^{q_{j-1}}(|x|>\frac{\rho}{2})} + \|\tilde{h}\|_{L^{q_j}(|x|>\frac{\rho}{2})} \right) \\ (\text{Usar (2.21) e as imersões até } 2^*) &\leq \vdots \\ &\leq C \left(\|\tilde{\phi}\|_{L^{2^*}(|x|>\frac{\rho}{2})} + \|\tilde{h}\|_{**} \right) \\ &\leq C \left(\|\tilde{\phi}\|_{H_0^1(|x|>\frac{\rho}{2})} + \|h\|_{**} \right) \\ (\text{Por (2.20)}) &\leq C \left(\|\tilde{h}\|_{L^q(B_1(0))} + \|h\|_{**} \right) \leq C \|h\|_{**}, \end{aligned}$$

portanto

$$\|\tilde{\phi}\|_{L^\infty(|x|>\rho)} \leq C \|h\|_{**}. \quad (2.22)$$

Agora observe que $-\Delta|x|^{-\sigma} = \sigma(N-2-\sigma)|x|^{-\sigma-2}$ e fixando σ podemos encontrar $\rho(p, N, \sigma) > 0$ tal que

$$-\Delta|x|^{-\sigma} - p|x|^{p(N-2)-(N+2)}w^{p-1}|x|^{-\sigma} \geq \frac{1}{2}\sigma(N-2-\sigma)|x|^{-2-\sigma}, \text{ com } |x| < \rho. \quad (2.23)$$

De (2.19) e (2.23) vem que

$$\Delta|x|^{-\sigma} - p|x|^{p(N-2)-(N+2)}w^{p-1}|x|^{-\sigma} \geq \frac{1}{2} \frac{\sigma(N-2-\sigma)}{\|h\|_{**}} (-\Delta\tilde{\phi} - p|x|^{p(N-2)-(N+2)}w^{p-1}\tilde{\phi}).$$

Chame $\tilde{c} = \frac{1}{2} \frac{\sigma(N-2-\sigma)}{\|h\|_{**}}$ e $c(x) = p|x|^{p(N-2)-(N+2)}w^{p-1}$, então

$$-\Delta|x|^{-\sigma} - c(x)|x|^{-\sigma} \geq -\Delta\tilde{c}\tilde{\phi}(x) - c(x)\tilde{c}\tilde{\phi}(x),$$

e escrevendo $\psi = |x|^{-\sigma} - \tilde{c}\tilde{\phi}$ obtemos

$$-\Delta\psi - c(x)\psi \geq 0 \text{ em } B_\rho(0).$$

Agora veja que $\psi \geq 0$ em $\partial B_\rho(0)$. De fato,

$$\begin{aligned} \psi \geq 0 \text{ em } \partial B_\rho(0) &\iff \psi(x) = |x|^{-\sigma} - \tilde{c}\tilde{\phi}(x) \geq 0 \text{ em } \partial B_\rho(0) \\ &\iff \tilde{\phi}(x) \leq \frac{\rho^{-\sigma}}{\tilde{c}} = \rho^{-\sigma} \frac{2\|h\|_{**}}{\sigma(N-2-\sigma)} = cte\|h\|_{**}, \end{aligned}$$

o que ocorre por (2.22). Portanto $\psi \geq 0$ em $\partial B_\rho(0)$.

Podemos escolher $\rho > 0$ suficientemente pequeno, de modo que

$$0 \leq c(x) = p|x|^{p(N-2)-(N+2)}w^{p-1} < \lambda_1, \quad |x| < \rho < 1,$$

assim, pelo Princípio do Máximo $\psi \geq 0$ em $B_\rho(0)$. Logo,

$$\begin{aligned} \psi(x) = |x|^{-\sigma} - \tilde{c}\tilde{\phi}(x) &= |x|^{-\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\sigma(N-2-\sigma)}{\|h\|_{**}} \tilde{\phi}(x) \geq 0 \\ \Rightarrow \tilde{\phi}(x) &\leq \frac{2\|h\|_{**}}{\sigma(N-2-\sigma)} |x|^{-\sigma} \Rightarrow |\tilde{\phi}(x)| \leq c|x|^{-\sigma}\|h\|_{**} \\ \Rightarrow \| |x|^{N-2-\sigma}\tilde{\phi} \|_\infty &= \| |x|^\sigma \tilde{\phi} \|_\infty \leq C\|h\|_{**}. \end{aligned}$$

Agora para $\nabla\phi$ considere a bola de raio R centrado $\bar{x}$ com $|\bar{x}| = 2R$ e $R > 5$. Seja $\hat{\phi}(y) = R^{N-2-\sigma}\phi(\bar{x} + Ry)$ então,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(y) = R^{N-2-\sigma}\phi(\bar{x} + Ry) &\Rightarrow \Delta\hat{\phi} = R^{N-2-\sigma}R^2\Delta\phi = R^{N-\sigma}\Delta\phi \\ &\Rightarrow R^{N-\sigma}\Delta\phi + pR^{N-\sigma}w^{p-1}\phi = R^{N-\sigma}h \\ &\Rightarrow \Delta\hat{\phi} + pw^{p-1}R^2\hat{\phi} = R^{N-\sigma}h. \end{aligned}$$

Claramente $\|R^{N-\sigma}h\|_\infty \leq C\|h\|_{**}$, $R^2w^{p-1} = O(R^{-2})$ e $\|\hat{\phi}\| \leq C\|h\|_{**}$.

Por estimativas elípticas $|\nabla\phi(0)| \leq C\|h\|_{**}$ ou ainda $|\nabla\phi(\bar{x})| \leq C\|h\|_{**}|\bar{x}|^{1+\sigma-N}$.

Como $\bar{x}$ é qualquer com $|\bar{x}| > 5$, concluímos o desejado. ■

2.2 O operador $\Delta + pw^{p-1}$ em $\Omega_\delta = D_\delta \setminus B_1(0)$

Considere w_δ projeção em $\Omega_\delta = \delta^{-1}D \setminus B_1(0)$ de w e Y_i^δ a projeção em Ω_δ de Y_i , para todo $i = 1, \dots, d$.

As projeções w_δ e Y_i^δ são respectivamente soluções dos problemas

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta w_\delta = w^p, & \text{em } D_\delta \setminus B_1(0) \\ w_\delta = 0, & \text{em } \partial D_\delta \cup \partial B_1(0) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta Y_i^\delta = p w^{p-1} Y_i, & \text{em } D_\delta \setminus B_1(0) \\ Y_i^\delta = 0, & \text{em } \partial D_\delta \cup \partial B_1(0). \end{array} \right.$$

No que segue vamos escrever $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_d)$ e $Y^\delta = (Y_1^\delta, Y_2^\delta, \dots, Y_d^\delta)$.

Lema 2.2. *Temos*

(i) $0 < w_\delta \leq w$;

(ii) $w(x) - w_\delta(x) = \frac{C_N}{\alpha(N)(N-2)} \delta^{N-2} \left(H_D(0, \delta x) - \frac{1}{|x|^{N-2}} H_D(0, 0) \right) + O(\delta^{N-1})$;

(iii) $Y - Y^\delta = O(\delta^{N-2+k})$.

Demonstração: Seja $W(|x|) = \frac{1}{|x|^{N-2}} w\left(\frac{1}{|x|}\right)$ a transformação de Kelvin de $w(x)$, então W é solução de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta W = |x|^{p(N-2)-(N+2)} W^p, & \text{em } B_1(0) \\ W = 0, & \text{em } \partial B_1(0). \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Além disso podemos escrever $-\Delta W = -W'' - \frac{N-1}{r} W' = r^{p(N-2)-(N+2)} W^p$, então

$$-\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} W')' = r^{p(N-2)-(N+2)} W^p \Rightarrow (r^{N-1} W')' = r^{p(N-2)-3} W^p.$$

Integrando em ambos os lados da igualdade obtemos

$$\int_0^r (s^{N-1} W'(s))' ds = \int_0^r s^{p(N-2)-3} W^p(s) ds,$$

então $-r^{N-1} W'(r) = \int_0^r s^{p(N-2)-3} W^p(s) ds$, e assim

$$\begin{aligned} |r^{N-1} W'(r)| &\leq \|W^p\|_\infty \int_0^r s^{p(N-2)-3} ds \leq cte \|W^p\|_\infty r^{p(N-2)-2} \\ &\Rightarrow |W'(r)| \leq cte \|W^p\|_\infty r^{p(N-2)-(N+1)}. \end{aligned}$$

Desta forma, para $0 < s < r$ temos

$$|W(r) - W(0)| \leq r |W'(s)| \leq r cte \|W^p\|_\infty s^{p(N-2)-(N+1)} \leq cte \|W^p\|_\infty r^{p(N-2)-N}.$$

Logo, podemos escrever $W(x) = W(0) + O(|x|^{p(N-2)-N}) = C_N + O(|x|^{p(N-2)-N})$, e

assim

$$w\left(\frac{1}{|x|}\right) = |x|^{N-2} W(|x|) = |x|^{N-2} [C_N + O(|x|^{p(N-2)-N})].$$

Em particular

$$w\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{\delta^{N-2}}{|y|^{N-2}} [C_N + O(\delta^{p(N-2)-N})],$$

e como $p > \frac{N+2}{N-2}$ podemos ainda escrever

$$w\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{C_N \delta^{N-2}}{|y|^{N-2}} + O(\delta^N).$$

Agora, é fácil ver que $R = w - w_\delta$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta R(x) = 0, & \text{em } D_\delta \setminus B_1(0) \\ R(x) = w(x), & \text{em } \partial D_\delta \\ R(x) = 0, & \text{em } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (2.25)$$

Pelo Princípio do Máximo $R \geq 0$, logo $0 < w_\delta \leq w$ e assim concluímos o item (i).

Defina $\tilde{R}(y) = R(\frac{y}{\delta})$ para todo $y \in D \setminus B_\delta(0)$, então de (2.25) obtemos

$$\begin{cases} \Delta \tilde{R}(y) = 0, & \text{em } D \setminus B_\delta(0) \\ \tilde{R}(y) = \frac{C_N \delta^{N-2}}{|y|^{N-2}} + O(\delta^N), & \text{em } \partial D \\ \tilde{R}(y) = 0, & \text{em } \partial B_\delta(0). \end{cases} \quad (2.26)$$

Escreva $\tilde{R} = \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2$ de forma que $\tilde{R}_1$ e $\tilde{R}_2$ satisfaçam

$$\begin{cases} \Delta \tilde{R}_1(y) = 0, & \text{em } D \\ \tilde{R}_1(y) = \frac{C_N \delta^{N-2}}{|y|^{N-2}}, & \text{em } \partial D \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta \tilde{R}_2(y) = 0, & \text{em } D \setminus B_\delta(0) \\ \tilde{R}_2(y) = O(\delta^N), & \text{em } \partial D \\ \tilde{R}_2 = -\tilde{R}_1, & \text{em } \partial B_\delta(0). \end{cases}$$

Logo $\tilde{R}_1(y) = \frac{C_N \delta^{N-2}}{\alpha(N)(N-2)} H_D(0, y)$, onde $H_D(0, y)$ é a parte regular da função de Green do domínio D .

Com isso, podemos escrever $w(x) - w_\delta(x) = \tilde{R}(\delta x) = \tilde{R}_1(\delta x) + \tilde{R}_2(\delta x) + O(\delta^N)$.

Agora, considere $R_2(x) = \tilde{R}_2(\delta x)$, então

$$\begin{cases} \Delta R_2(x) = 0, & \text{em } D_\delta \setminus B_1(0) \\ R_2(x) = 0, & \text{em } \partial D_\delta \\ R_2(x) = \frac{-C_N}{\alpha(N)(N-2)} \delta^{N-2} H_D(0, \delta x), & \text{em } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Escreva $R_2(x) = \frac{-C_N}{\alpha(N)(N-2)}\delta^{N-2}(H_D(0,0) + O(\delta)) = R_3 + O(\delta^{N-1})$, para $x \in \partial B_1(0)$, então

$$\begin{cases} \Delta R_3(x) = 0, & \text{em } D_\delta \setminus B_1(0) \\ R_3(x) = 0, & \text{em } \partial D_\delta \\ R_3(x) = \frac{-C_N}{\alpha(N)(N-2)}\delta^{N-2}H_D(0,0), & \text{em } \partial B_1(0) \end{cases}$$

e $w(x) - w_\delta(x) = \frac{C_N}{\alpha(N)(N-2)}\delta^{N-2}H_D(0,\delta x) + R_3(x) + O(\delta^{N-1})$.

Agora, veja que $R_4(x) = \frac{-C_N}{\alpha(N)(N-2)}\delta^{N-2}\frac{1}{|x|^{N-2}}H_D(0,0)$ é solução de

$$\begin{cases} \Delta R_4 = 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_1(0) \\ R_4 = R_3, & \text{em } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Por fim, note que

$$\begin{cases} \Delta(R_3 - R_4) = 0, & \text{em } D_\delta \setminus B_1(0) \\ R_3 - R_4 = -R_4, & \text{em } \partial D_\delta \\ R_3 - R_4 = 0, & \text{em } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo vem que $R_3 = R_4 + O(\delta^{N-1})$ e portanto

$$w(x) - w_\delta(x) = \frac{C_N}{\alpha(N)(N-2)}\delta^{N-2} \left(H_D(0,\delta x) - \frac{1}{|x|^{N-2}}H_D(0,0) \right) + O(\delta^{N-1}).$$

O terceiro item segue do Lema 2.1 e do fato de que $\mu \leq -(N-2+k)$.

■

Proposição 2.2. *Seja $p = p_j$ como em (2.2), para algum j . Então para todo h , com $\|h\|_{**} < \infty$, existe uma única $\phi = T_\delta(h)$ com $\|\phi\|_* < \infty$ e uma única constante $c(\delta)$, solução de*

$$\begin{cases} \Delta\phi + pw^{p-1}\phi = h + pw^{p-1}c(\delta) \cdot Y, & \text{em } \Omega_\delta \\ \phi = 0, & \text{em } \partial\Omega_\delta \\ \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}\phi Y \, dx = 0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

para δ pequeno o suficiente. Além disso, existe uma constante $C = C(p) > 0$ tal que para δ pequeno

$$\|T_\delta(h)\|_* \leq C\|h\|_{**}$$

$$|c(\delta)| \leq C\|h\|_{**}.$$

Demonstração:

Considere $K : H_0^1(\Omega_\delta) \rightarrow H_0^2(\Omega_\delta) \xrightarrow{c} H_0^1(\Omega_\delta)$; $K = (-\Delta)^{-1}$, então

$$\begin{aligned} -\Delta\phi - pw^{p-1}\phi = h &\Leftrightarrow \phi = K(pw^{p-1}\phi + h) \Leftrightarrow \underbrace{\phi - K(pw^{p-1}\phi)}_{L(\phi)} = K(h) \\ &\Leftrightarrow (Id - L)\phi = K(h) \end{aligned}$$

com $L : H_0^1(\Omega_\delta) \rightarrow H_0^1(\Omega_\delta)$ compacto.

Sejam $S = span\{P_{\Omega_\delta}Y_j = Y_j^\delta\}$ e a projeção $P_\delta : H_0^1(\Omega_\delta) \rightarrow S^\perp$. Quero mostrar que $P_\delta(Id - L)|_{S^\perp}$ é injetor. De fato, seja $\phi \in S^\perp$ então $P_\delta(Id - L)\phi = 0$ se, e somente se

$$\phi - K(pw^{p-1}\phi) = c(\delta) \cdot Y^\delta \Leftrightarrow \phi - (-\Delta)^{-1}(pw^{p-1}\phi) = c(\delta) \cdot Y^\delta \Leftrightarrow -\Delta\phi - pw^{p-1}\phi = pw^{p-1}c(\delta) \cdot Y.$$

Afirmção: O problema abaixo admite somente a solução trivial

$$\begin{cases} -\Delta\phi - pw^{p-1}\phi = pw^{p-1}c(\delta) \cdot Y, & \text{em } \Omega_\delta \\ \phi = 0, & \text{em } \partial\Omega_\delta \\ \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}\phi Y \, dx = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

De fato, caso contrário existiria uma sequência $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\phi_n \neq 0$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta\phi_n - pw^{p-1}\phi_n = pw^{p-1}c(\delta_n) \cdot Y, & \text{em } \Omega_{\delta_n} \\ \phi_n = 0, & \text{em } \partial\Omega_{\delta_n} \\ \int_{\Omega_{\delta_n}} pw^{p-1}\phi_n Y \, dx = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

com $\delta_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Considere $\bar{\phi}_n = \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty}$, então $\|\bar{\phi}_n\|_\infty = 1$ e

$$\begin{cases} -\Delta\bar{\phi}_n - pw^{p-1}\bar{\phi}_n = \frac{1}{\|\phi_n\|_\infty} pw^{p-1}c(\delta_n) \cdot Y, & \text{em } \Omega_{\delta_n} \\ \bar{\phi}_n = 0, & \text{em } \partial\Omega_{\delta_n} \\ \int_{\Omega_{\delta_n}} pw^{p-1}\bar{\phi}_n Y \, dx = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Temos que $c(\delta_n) \rightarrow 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} (-\Delta\bar{\phi}_n Y_j^{\delta_n} - pw^{p-1}\bar{\phi}_n Y_j^{\delta_n}) \, dx &= \frac{1}{\|\phi_n\|_\infty} \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}c(\delta_n) \cdot Y Y_j^{\delta_n} \, dx \\ \Rightarrow \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}\bar{\phi}_n (Y_j - Y_j^{\delta_n}) \, dx &= \frac{1}{\|\phi_n\|_\infty} \sum_{i=1}^d c_i(\delta_n) \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}Y_i (Y_j - O(\delta_n^{N-2})) \, dx. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever $c(\delta_n)[Id - O(\delta_n^{N-2})]cte = O(\delta_n^{N-2})$, o que implica $c(\delta_n) \rightarrow 0$.

Então, por Arzelá-Ascoli, a menos de subsequência $\bar{\phi}_n \rightarrow \phi_0$ em $C_{Loc}^2(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0))$ com $\phi_0 \neq 0$ e assim tomando o limite em (2.29) obtemos

$$\begin{cases} -\Delta\phi_0 - pw^{p-1}\phi_0 = 0, & \text{em } \Omega = \mathbb{R}^N \setminus B_1(0) \\ \phi_0 = 0, & \text{em } \partial B_1(0) \\ \int_{\Omega} pw^{p-1}\phi_0 Y dx = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

É sabido que o problema acima só admite a solução trivial, logo $\phi_0 = 0$, o que é um absurdo. Portanto $P_{\delta}(Id - L)|_{S^{\perp}}$ é injetor e com isso $P_{\delta}(Id - L)|_{S^{\perp}}: S^{\perp} \rightarrow S^{\perp}$ é também sobrejetor.

Assim, $P_{\delta}(Id - L)\phi = P_{\delta}K(h) \iff P_{\delta}(\phi - K(pw^{p-1}\phi) - K(h)) = 0$, então

$$\begin{aligned} \phi - K(pw^{p-1}\phi + h) &= c(\delta, \alpha) \cdot Y^{\delta} \implies -\Delta\phi - pw^{p-1}\phi = h - c(\delta, \alpha) \cdot \Delta Y^{\delta} \\ \implies -\Delta\phi - pw^{p-1}\phi &= h + pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y. \end{aligned}$$

Portanto, dada h com $\|h\|_{**} < \infty$ existe uma única $\phi = T_{\delta}(h)$ com $\|\phi\|_* < \infty$ e uma única constante $c(\delta, \alpha)$ tais que o problema (P) é satisfeito.

A estimativa da norma $\|T_{\delta}(h)\|_* \leq C\|h\|_{**}$ segue de maneira análoga ao problema limite em (2.1).

Agora para estimar $|c(\delta)|$ veja que

$$\int_{\Omega_{\delta}} (-\Delta\phi Y_j^{\delta} - pw^{p-1}\phi Y_j^{\delta}) dx = \int_{\Omega_{\delta}} (h + pw^{p-1}c(\delta) \cdot Y) Y_j^{\delta} dx.$$

A projeção $Y_i^{\delta} = P_{\Omega_{\delta}}Y_i$ satisfaz a equação

$$\begin{cases} -\Delta Y_i^{\delta} = pw^{p-1}Y_i & \Omega_{\delta} \\ Y_i^{\delta} = 0 & \partial\Omega_{\delta}. \end{cases}$$

Então $\int_{\Omega_{\delta}} -\Delta Y_j^{\delta} \phi dx = \int_{\Omega_{\delta}} pw^{p-1}\phi Y_j dx = 0$. Com isso, obtemos

$$-\int_{\Omega_{\delta}} pw^{p-1}\phi Y_j^{\delta} dx = \int_{\Omega_{\delta}} h Y_j^{\delta} dx + \int_{\Omega_{\delta}} pw^{p-1}c(\delta) \cdot Y Y_j^{\delta} dx. \quad (2.31)$$

Veja que

$$\int_{\Omega_{\delta}} |w(x)|^{p-1} |\phi(x)| |Y_j^{\delta}(x)| dx \leq C\|\phi\|_* \int_{\Omega_{\delta}} \frac{|x|^{p(2-N)}}{|x|^{N-2-\sigma}} dx \leq C\|\phi\|_* \leq C\|h\|_{**},$$

além disso

$$\int_{\Omega_\delta} |h(x)| |Y_j^\delta(x)| dx \leq C \|h\|_{**} \int_{\Omega_\delta} \frac{|x|^{2-N}}{|x|^{N-\sigma}} dx \leq C \|h\|_{**}.$$

Note que para todo $j = 1, \dots, d$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1} c(\delta) \cdot Y Y_j^\delta dx &= \sum_i^d c_i(\delta) \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1} Y_i Y_j^\delta dx \\ &= \sum_i^d c_i(\delta) \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1} Y_i (Y_j + O(\delta^{N-2})) dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Voltando em (2.31) obtemos $|c(\delta)| \leq C \|h\|_{**}$.

■

Lema 2.3. *Seja g solução do seguinte problema*

$$\begin{cases} \Delta g + pw^{p-1} g = (w^p - w_\delta^p) + pw^{p-1} c^\delta \cdot Y, & \text{em } \Omega_\delta \\ g = 0, & \text{em } \partial\Omega_\delta \\ \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1} g Y_j dx = 0 & \forall j = 1, \dots, d. \end{cases} \quad (2.33)$$

Então existe uma constante $\overline{C} > 0$ tal que

- (i) $\|g\|_* \leq \overline{C} \delta^{N-2}$;
- (ii) $|c^\delta| \leq \overline{C} \delta^{N-2+k}$.

Demonstração:

(i) Veja que

$$\begin{aligned} |w_\delta^p - w^p| &= |(w + (w_\delta - w))^p - w^p| \leq C(|w|^{p-1}|w_\delta - w| + |w_\delta - w|^p) \\ &\leq C(|w|^{p-1} + |w_\delta - w|^{p-1})|w_\delta - w| \\ &\leq \overline{C}(|w|^{p-1} + |w_\delta|^{p-1})|w_\delta - w|, \end{aligned}$$

ou seja, $|x|^{N-\sigma} |w_\delta^p - w^p| \leq \overline{C} |x|^{N-\sigma} |x|^{(p-1)(2-N)} \delta^{N-2}$ o que implica $\|w^p - w_\delta^p\|_{**} \leq \overline{C} \delta^{N-2}$.

Então da Proposição 2.2 temos $\|g\|_* \leq C \|w^p - w_\delta^p\|_{**} \leq \overline{C} \delta^{N-2}$.

(ii) Das equações que w e w_δ satisfazem temos que

$$\begin{cases} -\Delta(w - w_\delta) = 0 & \text{em } \Omega_\delta = D_\delta \setminus B_1(0) \\ w - w_\delta = w & \text{em } \partial D_\delta \\ w - w_\delta = 0 & \text{em } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Então testando a equação com Y_j^δ temos

$$\int_{\Omega_\delta} -\Delta(w - w_\delta)Y_j^\delta dx = \int_{\Omega_\delta} \nabla(w - w_\delta)\nabla Y_j^\delta dx = 0.$$

Por outro lado, da equação que Y_j^δ satisfaz $\begin{cases} -\Delta Y_j^\delta = pw^{p-1}Y_j, & \text{em } \Omega_\delta \\ Y_j^\delta = 0, & \text{em } \partial\Omega_\delta \end{cases}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} -\Delta Y_j^\delta (w - w_\delta) dx &= \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}(w - w_\delta)Y_j dx \\ \Rightarrow \int_{\Omega_\delta} \nabla Y_j^\delta \nabla(w - w_\delta) dx - \int_{\partial D_\delta} \frac{\partial Y_j^\delta}{\partial \nu}(w - w_\delta) d\sigma_x &= \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}(w - w_\delta)Y_j dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$-\int_{\partial D_\delta} \frac{\partial Y_j^\delta}{\partial \nu}(w - w_\delta) d\sigma_x = \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}(w - w_\delta)Y_j dx.$$

Agora multiplicando (2.33) por Y_j^δ e integrando obtemos

$$\int_{\Omega_\delta} (\Delta g Y_j^\delta + pw^{p-1}gY_j^\delta) dx = \int_{\Omega_\delta} (w^p - w_\delta^p)Y_j^\delta dx + \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}c^\delta \cdot Y Y_j^\delta dx.$$

Como $\int_{\Omega_\delta} \nabla g \nabla Y_j^\delta dx = \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}gY_j dx = 0$, então

$$\int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}gY_j^\delta dx = \int_{\Omega_\delta} (w^p - w_\delta^p)Y_j^\delta dx + \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}c^\delta \cdot Y Y_j^\delta dx. \quad (2.34)$$

Veja que

$$\begin{aligned} w^p - w_\delta^p &= w^p - (w + (w_\delta - w))^p = w^p - [w^p + pw^{p-1}(w_\delta - w) + O(|w_\delta - w|^2)] \\ &= -pw^{p-1}(w_\delta - w) + O(|w_\delta - w|^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} (w^p - w_\delta^p)Y_j^\delta dx &= \int_{\Omega_\delta} [-pw^{p-1}(w_\delta - w) + O(\delta^{2(N-2)})] Y_j^\delta dx \\ &= \int_{\Omega_\delta} -pw^{p-1}(w_\delta - w)(Y_j + O(\delta^{N-2+k})) dx + O(\delta^{2(N-2)}) \\ &= \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}(w - w_\delta)Y_j dx + O(\delta^{2(N-2)}) \\ &= -\int_{\partial D_\delta} \frac{\partial Y_j^\delta}{\partial \nu}(w - w_\delta) d\sigma_x. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Veja que,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_\delta} \left| \frac{\partial Y_j^\delta}{\partial \nu} \right| |w - w_\delta| d\sigma_x &\leq C \int_{\partial D_\delta} \frac{1}{|x|^{N-2}} \frac{1}{|x|^{N-1+k}} d\sigma_x \leq C \int_{\partial D_\delta} \frac{1}{|x|^{2N-3+k}} d\sigma_x \\ &\leq C \delta^{2N-3+k} \frac{1}{\delta^{N-1}} \leq C \delta^{N-2+k}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Veja também que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} |w(x)|^{p-1} |g(x)| |Y_\delta^\delta(x)| dx &= \int_{\Omega_\delta} |w(x)|^{p-1} |g(x)| |Y_\delta^\delta(x) - Y_j(x)| dx \\ &\leq C \delta^{N-2+k} \|g\|_* \int_{\Omega_\delta} \frac{|x|^{(p-1)(2-N)}}{|x|^{N-2-\sigma}} dx \\ &\leq C \delta^{N-2} \|g\|_* \leq C \delta^{2(N-2)+k}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Por fim, note que para todo $j = 1, \dots, d$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} p w^{p-1} c^\delta \cdot Y Y_j^\delta dx &= \sum_i^d c_i^\delta \int_{\Omega_\delta} p w^{p-1} Y_i Y_j^\delta dx \\ &= \sum_i^d c_i^\delta \int_{\Omega_\delta} p w^{p-1} Y_i (Y_j + O(\delta^{N-2+k})) dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Voltando em (2.34) e usando (2.35), (2.36), (2.37) e (2.38) obtemos

$$c^\delta [Id + O(\delta^{N-2+k})] cte = O(\delta^{N-2+k}).$$

Portanto $|c^\delta| \leq \overline{C} \delta^{N-2+k}$.

■

2.3 Prova do Teorema 2.1

Veja que o problema (2.1), tomando $v(x) = \delta^{\frac{2}{p-1}} u(\delta x)$, é equivalente ao seguinte

$$\Delta v + v^p = 0 \quad \text{em } \Omega_\delta \quad (2.39)$$

$$v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_\delta. \quad (2.40)$$

A fim de mostrar a existência de solução do problema acima vamos mostrar primeiramente a seguinte proposição.

Proposição 2.3. *Seja $p = p_j$, como em (2.2), para algum $j = 1, 2, \dots$. Então existem δ_0 e α_0 tais que para todo $\delta < \delta_0$ e todo $|\alpha| < |\alpha_0|$ o problema*

$$\begin{cases} \Delta v + v^p = pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y & \text{em } \Omega_\delta \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega_\delta \end{cases} \quad (2.41)$$

tem solução, para algum $c(\delta, \alpha)$.

Demonstração: Vamos procurar soluções de (2.41) da forma

$$v = w_\delta + \alpha \cdot Y^\delta + g + \phi, \quad (2.42)$$

onde g será escolhida mais adiante.

Então,

$$\Delta v + v^p = pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y \Leftrightarrow \Delta w_\delta + \alpha \cdot \Delta Y^\delta + \Delta g + \Delta \phi = -(w_\delta + \alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^p + pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y$$

$$\Leftrightarrow -w^p - pw^{p-1}\alpha \cdot Y + \Delta g + \Delta \phi = -w_\delta^p - pw_\delta^{p-1}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi) + pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y + N_1(\phi),$$

onde $N_1(\phi) = -(w_\delta + \alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^p + w_\delta^p + pw_\delta^{p-1}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)$. Com isso vem que

$$\begin{aligned} \Delta \phi + pw^{p-1}\phi &= pw^{p-1}\phi + w^p + pw^{p-1}\alpha \cdot Y - \Delta g - w_\delta^p - pw_\delta^{p-1}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi) \\ &\quad + pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y + N_1(\phi) \\ &= N_1(\phi) + \underbrace{(w^p - w_\delta^p)}_E - \Delta g - pw^{p-1}g + \underbrace{p(w^{p-1} - w_\delta^{p-1})g}_{N_2(g)} + \underbrace{p(w^{p-1} - w_\delta^{p-1})\phi}_{N_2(\phi)} \\ &\quad + \underbrace{p(w^{p-1} - w_\delta^{p-1})\alpha \cdot Y}_{N_2(\alpha Y)} + \underbrace{pw_\delta^{p-1}\alpha \cdot (Y - Y^\delta)}_{N_3} + pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y. \end{aligned}$$

Escolhendo g solução de

$$\begin{cases} \Delta g + pw^{p-1}g = (w^p - w_\delta^p) + pw^{p-1}a^\delta \cdot Y, & \text{em } \Omega_\delta \\ g = 0, & \text{em } \partial D_\delta \cup \partial B_1(0) \\ \int_{\Omega_\delta} w^{p-1}gY_i \, dx = 0, & \forall i = 1, \dots, d, \end{cases} \quad (2.43)$$

então obtemos

$$\Delta \phi + pw^{p-1}\phi = N_1(\phi) + N_2(\phi) + N_2(g) + N_2(\alpha Y) + N_3 + pw^{p-1}(c(\delta, \alpha) - a^\delta) \cdot Y. \quad (2.44)$$

Então, da Proposição 2.2 temos uma solução (2.44) se ϕ resolve o problema de ponto fixo

$$\phi = T_\delta(N_1(\phi) + N_2(\phi) + N_2(g) + N_2(\alpha Y) + N_3).$$

Veja que,

$$\begin{aligned}
|E(x)| &= |w_\delta^p - w^p| = |(w + (w_\delta - w))^p - w^p| \leq C(|w|^{p-1}|w_\delta - w| + |w_\delta - w|^p) \\
&\leq C(|w|^{p-1} + |w_\delta - w|^{p-1})|w_\delta - w| \\
&\leq \tilde{C}(|w|^{p-1} + |w_\delta|^{p-1})|w_\delta - w| \\
\Rightarrow |x|^{N-\sigma}|E(x)| &\leq \tilde{C}|x|^{N-\sigma}|x|^{(p-1)(2-N)}\delta^{N-2} \\
\Rightarrow \|E\|_{**} &= \|w^p - w_\delta^p\|_{**} \leq \tilde{C}\delta^{N-2}.
\end{aligned}$$

Então da Proposição 2.2 obtemos que $\|g\|_* \leq \tilde{C}\delta^{N-2}$.

Agora vamos estimar as normas de $N_1(\phi)$, $N_2(\phi)$, $N_2(g)$, $N_2(\alpha Y)$ e N_3 .

$$\begin{aligned}
|N_2(\phi(x))| &= p|w_\delta^{p-1} - w^{p-1}||\phi(x)| = p|(w + (w_\delta - w))^{p-1} - w^{p-1}||\phi(x)| \\
&\leq C[|w|^{p-2}|w_\delta - w| + |w_\delta - w|^{p-1}]|\phi(x)| \\
&\leq C[|w|^{p-2} + |w_\delta - w|^{p-2}]|w_\delta - w||\phi(x)| \\
&\leq \tilde{C}[|w|^{p-2} + |w_\delta|^{p-2}]|w_\delta - w||\phi(x)| \\
\Rightarrow |x|^{N-\sigma}|N_2(\phi(x))| &\leq \tilde{C}|x|^{N-\sigma}|x|^{(p-2)(2-N)}\delta^{N-2}|\phi(x)| \\
&= \tilde{C}\delta^{N-2}|x|^{(p-2)(2-N)+2}|x|^{N-\sigma-2}|\phi(x)| \\
\Rightarrow \|N_2(\phi)\|_{**} &\leq \tilde{C}\delta^{N-2}\|\phi\|_*.
\end{aligned}$$

De maneira análoga vamos encontrar $\|N_2(g)\|_{**} \leq \tilde{C}\delta^{N-2}\|g\|_*$, então

$$\|N_2(g)\|_{**} \leq C\delta^{2(N-2)}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
|x|^{N-\sigma}|N_2(\alpha Y(x))| &\leq \tilde{C}|x|^{N-\sigma}|x|^{(p-2)(2-N)}\delta^{N-2}|\alpha \cdot Y| \\
&\leq \tilde{C}|x|^{N-\sigma}|x|^{(p-2)(2-N)}\delta^{N-2}|\alpha||x|^{2-N} \\
&\leq \tilde{C}|x|^{N-\sigma-(p-1)(N-2)}\delta^{N-2}|\alpha| \\
\Rightarrow \|N_2(\alpha Y)\|_{**} &\leq C\delta^{N-2}|\alpha|.
\end{aligned}$$

Agora N_3 ,

$$|N_3(x)| \leq p|w_\delta|^{p-1}|\alpha| \cdot |Y - Y^\delta| \leq p|x|^{(p-1)(2-N)}|\alpha|\delta^{N-2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x|^{N-\sigma} |N_3(x)| &\leq C|x|^{N-\sigma-(p-1)(N-2)} |\alpha| \delta^{N-2} \\ &\Rightarrow \|N_3\|_{**} \leq C\delta^{N-2} |\alpha|. \end{aligned}$$

Por fim $N_1(\phi)$,

$$\begin{aligned} |N_1(\phi(x))| &\leq |(w_\delta + \alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^p - w_\delta^p - pw_\delta^{p-1}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)| \\ &\leq C|w_\delta|^{p-2} |\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi|^2 + |\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi|^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x|^{N-\sigma} |N_1(\phi(x))| &\leq C|x|^{N-\sigma} \left[|w_\delta|^{p-2} |\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi|^2 + |\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi|^p \right] \\ &\leq C|x|^{N-\sigma} |w_\delta|^{p-2} [|\alpha|^2 \cdot |Y^\delta|^2 + |g|^2 + |\phi|^2] + C|x|^{N-\sigma} [|\alpha|^p |Y^\delta|^p + |g|^p + |\phi|^p] \\ &\leq C|x|^{N-\sigma} [|x|^{(p-2)(2-N)} |x|^{2(2-n)} |\alpha|^2 + |x|^{(p-2)(2-N)-2N+4+2\sigma} (\|g\|_*^2 + \|\phi\|_*^2)] \\ &\quad + C|x|^{N-\sigma} [|x|^{p(2-N)} |\alpha|^p + |x|^{-p(N-2-\sigma)} (\|g\|_*^p + \|\phi\|_*^p)], \end{aligned}$$

e assim

$$\|N_1(\phi)\|_{**} \leq C [|\alpha|^2 + \|g\|_*^2 + \|\phi\|_*^2].$$

Em resumo obtemos

$$\begin{aligned} \|N_1(\phi)\|_{**} &\leq C [|\alpha|^2 + \delta^{2(N-2)} + \|\phi\|_*^2] \\ \|N_2(\phi)\|_{**} &\leq C\delta^{N-2} \|\phi\|_* \\ \|N_2(g)\|_{**} &\leq C\delta^{2(N-2)} \\ \|N_2(\alpha Y)\|_{**} &\leq C\delta^{N-2} |\alpha| \\ \|N_3\|_{**} &\leq C\delta^{N-2} |\alpha| \end{aligned}$$

Veja que,

$$\begin{aligned} \|T(\phi)\|_* &= \|T_\delta(P_\delta(N_1(\phi) + N_2(\phi) + N_2(g) + N_2(\alpha Y) + N_3))\|_* \\ \text{prop. (2.2)} &\leq \|(N_1(\phi) + N_2(\phi) + N_2(g) + N_2(\alpha Y) + N_3)\|_{**} \\ &\leq C_1 [\|N_1(\phi)\|_{**} + \|N_2(\phi)\|_{**} + \|N_2(g)\|_{**} + \|N_2(\alpha Y)\|_{**} + \|N_3\|_{**}] \\ &\leq C_1 [C_2(|\alpha|^2 + \delta^{2(N-2)} + \|\phi\|_*^2) + C_3\delta^{N-2} \|\phi\|_* + C_4\delta^{2(N-2)} + C_5\delta^{N-2} |\alpha|]. \end{aligned}$$

Escolha a bola $B = \{\phi; \|\phi\|_* \leq \bar{c}\delta^{2(N-2)} + \bar{c}|\alpha|^2\}$, então para $\phi \in B$ temos

$$\begin{aligned}
\|T(\phi)\|_* &\leq C_1 [C_2(|\alpha|^2 + \delta^{2(N-2)} + \bar{c}^2 \delta^{4(N-2)} + \bar{c}^2 |\alpha|^4) + C_3 \bar{c} \delta^{N-2} \delta^{2(N-2)} + C_3 \bar{c} \delta^{N-2} |\alpha|^2 \\
&\quad + C_4 \delta^{2(N-2)} + C_5 \delta^{N-2} |\alpha|] \\
&\leq \delta^{2(N-2)} [C_1 C_2 + C_1 C_2 \bar{c}^2 \delta^{2(N-2)} + C_1 C_3 \bar{c} \delta^{N-2} + C_1 C_4 + C_1 C_5] \\
&\quad + |\alpha|^2 [C_1 C_2 + C_1 C_2 \bar{c}^2 |\alpha|^2 + C_1 C_3 \bar{c} \delta^{N-2} + C_1 C_5].
\end{aligned}$$

Assim, para δ e $|\alpha|$ pequenos o suficiente obtemos $\|T(\phi)\|_* \leq \bar{c} \delta^{2(N-2)} + \bar{c} |\alpha|^2$ ou seja $T(B) \subset B$. Além disso, observe que em $\Omega_\delta = D_\delta \setminus B_1(0)$ o operador $T_\delta = (\Delta + pw^{p-1})^{-1}$ é limitado de C^0 em $C^{1,\beta}$, portanto compacto em C^1 . Logo T é um operador compacto no conjunto fechado e limitado B . Portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Schauder, existe um ponto fixo de T em B . Isto conclui o desejado. ■

Para concluir a prova do teorema resta apenas mostrar que $c(\delta, \alpha) = 0$.

Multiplicando (2.41) por Y_i^δ e integrando vem que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\delta} (\Delta v Y_j^\delta + v^p Y_j^\delta) dx = \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1} c(\delta, \alpha) \cdot Y Y_j^\delta dx \\
\Rightarrow \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1} c(\delta, \alpha) \cdot Y Y_j^\delta dx &= \int_{\Omega_\delta} (\Delta w_\delta + \alpha \cdot \Delta Y^\delta + \Delta g + \Delta \phi) Y_j dx + \int_{\Omega_\delta} (w_\delta + \alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^p Y_j^\delta dx.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Taylor temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta} (w_\delta + \alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^p Y_j^\delta dx &= \int_{\Omega_\delta} [w_\delta^p + pw_\delta^{p-1}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi) \\
&\quad + \frac{1}{2}p(p-1)w_\delta^{p-2}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^2] Y_j^\delta dx + \int_{\Omega_\delta} R Y_j^\delta dx,
\end{aligned}$$

onde $|R| \leq |\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi|^3 \leq C|\alpha|^3|x|^{3(2-N)} + C(\|g\|_*^3 + \|\phi\|_*^3)|x|^{3(-N+2+\sigma)} \leq |\alpha|^3 + \delta^{3(N-2)}.$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y Y_j^\delta dx &= \int_{\Omega_\delta} [-w^p - pw^{p-1}\alpha \cdot Y + \Delta g + \Delta \phi] Y_j^\delta dx + O(|\alpha|^3 + \delta^{3(N-2)}) \\
&+ \int_{\Omega_\delta} \left[w_\delta^p + pw_\delta^{p-1}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi) + \frac{1}{2}p(p-1)w_\delta^{p-2}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^2 \right] Y_j^\delta dx \\
&= \int_{\Omega_\delta} (\Delta g - (w^p - w_\delta^p)) Y_j^\delta dx - \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}\alpha \cdot Y Y_j^\delta dx + O(|\alpha|^3 + \delta^{3(N-2)}) \\
&+ \int_{\Omega_\delta} \left[pw_\delta^{p-1}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi) + \frac{1}{2}p(p-1)w_\delta^{p-2}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^2 \right] Y_j^\delta dx \\
&= \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}a^\delta \cdot Y Y_j^\delta dx - \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}\alpha \cdot Y Y_j^\delta dx + \int_{\Omega_\delta} pw_\delta^{p-1}\alpha \cdot Y^\delta Y_j^\delta \\
&\quad + \int_{\Omega_\delta} p(w_\delta^{p-1} - w^{p-1})g Y_j^\delta dx + \int_{\Omega_\delta} p(w_\delta^{p-1} - w^{p-1})\phi Y_j^\delta dx \\
&\quad + \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{2}p(p-1)w_\delta^{p-2}(\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^2 Y_j^\delta dx + O(|\alpha|^3 + \delta^{3(N-2)}).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Vamos olhar para as integrais do lado direito da igualdade acima.

$$\int_{\Omega_\delta} p|w^{p-1}||a^\delta| \cdot |Y| |Y_j^\delta| dx \leq C\delta^{N-2+k} \int_{\Omega_\delta} |x|^{(p+1)(2-N)+k} dx \leq \tilde{C} \delta^{N-2+k}. \tag{2.46}$$

Também por estimativas similares feitas anteriormente, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta} p|w^{p-1} - w_\delta^{p-1}||g(x)| |Y_j^\delta(x)| dx &= \int_{\Omega_\delta} p \left| (w + (w_\delta - w))^{p-1} - w^{p-1} \right| |g(x)| |Y_j^\delta(x)| dx \\
&\leq C \int_{\Omega_\delta} [|w|^{p-2}|w_\delta - w| + |w_\delta - w|^{p-1}] |g(x)| |Y_j^\delta(x)| dx \\
&\leq C \int_{\Omega_\delta} [|w|^{p-2} + |w_\delta - w|^{p-2}] |w_\delta - w| |g(x)| |Y_j^\delta(x)| dx \\
&\leq \tilde{C} \int_{\Omega_\delta} [|w|^{p-2} + |w_\delta|^{p-2}] |w_\delta - w| |g(x)| |Y_j^\delta(x)| dx \\
&\leq \tilde{C} \delta^{(N-2)} \|g\|_* \int_{\Omega_\delta} \frac{|x|^{(p-1)(2-N)}}{|x|^{N-2-\sigma}} dx \leq \tilde{C} \delta^{2(N-2)}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta} p|w^{p-1} - w_\delta^{p-1}||\phi(x)||Y_j^\delta(x)| dx &= \int_{\Omega_\delta} p \left| (w + (w_\delta - w))^{p-1} - w^{p-1} \right| |\phi(x)||Y_j^\delta(x)| dx \\
&\leq \tilde{C} \int_{\Omega_\delta} [|w|^{p-2} + |w_\delta|^{p-2}] |w_\delta - w| |\phi(x)||Y_j^\delta(x)| dx \\
&\leq \tilde{C} \delta^{(N-2)} \|\phi\|_* \int_{\Omega_\delta} \frac{|x|^{(p-1)(2-N)}}{|x|^{N-2-\sigma}} dx \\
&\leq \tilde{C} \delta^{(N-2)} (|\alpha|^2 + \delta^{2(N-2)}). \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Como Y_j são funções ímpares, então

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\delta} \frac{1}{2} p(p-1) w_\delta^{p-2} (\alpha \cdot Y^\delta + g + \phi)^2 Y_j^\delta dx \\
&= \frac{1}{2} p(p-1) \left[\int_{\Omega_\delta} w_\delta^{p-2} \alpha^2 \cdot Y^\delta \cdot Y^\delta Y_j^\delta dx + \int_{\Omega_\delta} w_\delta^{p-2} (g^2 + \phi^2) Y_j^\delta dx \right] \\
&\quad + p(p-1) \int_{\Omega_\delta} w_\delta^{p-2} (g \alpha \cdot Y^\delta + \phi \alpha \cdot Y^\delta + g \phi) Y_j^\delta dx \\
&= \frac{1}{2} p(p-1) \int_{\Omega_\delta} w_\delta^{p-2} (g^2 + \phi^2) Y_j^\delta dx + p(p-1) \int_{\Omega_\delta} w_\delta^{p-2} g \alpha \cdot Y^\delta Y_j^\delta dx \\
&\quad + p(p-1) \int_{\Omega_\delta} w_\delta^{p-2} (\phi \alpha \cdot Y^\delta + g \phi) Y_j^\delta dx. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Agora vejamos que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} p(p-1) \int_{\Omega_\delta} |w_\delta|^{p-2} |g^2 + \phi^2| |Y_j^\delta| dx &\leq C (\|g\|_*^2 + \|\phi\|_*^2) \int_{\Omega_\delta} \frac{|x|^{(p-1)(2-N)}}{|x|^{N-2-\sigma}} dx \\
&\leq \tilde{C} (|\alpha|^4 + \delta^{2(N-2)}). \tag{2.50}
\end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
p(p-1) \int_{\Omega_\delta} |w_\delta|^{p-2} |\phi \alpha \cdot Y^\delta + g \phi| |Y_j^\delta| dx &\leq C \left[|\alpha| \|\phi\|_* \int_{\Omega_\delta} \frac{|x|^{p(2-N)}}{|x|^{N-2-\sigma}} dx \right. \\
&\quad \left. + \|g\|_* \|\phi\|_* \int_{\Omega_\delta} \frac{|x|^{(p-1)(2-N)}}{|x|^{N-2-\sigma}} dx \right] \\
&\leq \tilde{C} [|\alpha| (|\alpha|^2 + \delta^{2(N-2)}) + \delta^{N-2} (|\alpha|^2 + \delta^{2(N-2)})]. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Voltando em (2.45) e usando todas as estimativas anteriores, (2.46) à (2.51), obte-

mos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y Y_j^\delta dx = - \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}\alpha \cdot Y Y_j^\delta dx + \int_{\Omega_\delta} pw_\delta^{p-1}\alpha \cdot Y^\delta Y_j^\delta dx \\
& + \int_{\Omega_\delta} p(p-1)w_\delta^{p-2}g \alpha \cdot Y^\delta Y_j^\delta dx + O(|\alpha|^3 + |\alpha|\delta^{2(N-2)}) + O(\delta^{3(N-2)} + |\alpha|^2\delta^{N-2}) \\
& + O(\delta^{2(N-2)}) + O(\delta^{N-2+k}) + O(|\alpha|^3 + \delta^{3(N-2)}). \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Agora, vamos analisar as integrais acima

$$\int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}c(\delta, \alpha) \cdot Y Y_j^\delta dx = \sum_{i=1}^d c_i^\delta \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}Y_i Y_j^\delta dx = \sum_{i=1}^d c_i^\delta \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}Y_i(Y_j + O(\delta^{N-2+k})) dx. \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}\alpha \cdot Y Y_j^\delta dx &= - \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}Y_i(Y_j - (Y_j - Y_j^\delta)) dx \\
&= - \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}Y_i Y_j dx + O(|\alpha|\delta^{N-2+k}). \quad (2.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta} pw_\delta^{p-1}\alpha \cdot Y^\delta Y_j^\delta dx &= \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} pw_\delta^{p-1}Y_i^\delta Y_j^\delta dx \\
&= \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} p(w + (w_\delta - w))^{p-1}(Y_i + (Y_i^\delta - Y_i))(Y_j + (Y_j^\delta - Y_j))dx \\
&= \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} p[w^{p-1} + (p-1)w^{p-2}(w_\delta - w) + O(|w_\delta - w|^2)] Y_i Y_j dx \\
&\quad + O(|\alpha|\delta^{N-2+k}) \\
&= \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} pw^{p-1}Y_i Y_j dx + \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} p(p-1)w^{p-2}(w_\delta - w)Y_i Y_j dx \\
&\quad + O(|\alpha|\delta^{N-2+k}) + O(|\alpha|\delta^{2(N-2)}). \quad (2.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta} p(p-1)w_\delta^{p-2}g \alpha \cdot Y^\delta Y_j^\delta dx &= \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} p(p-1)(w + (w_\delta - w))^{p-2} g Y_i^\delta Y_j^\delta dx \\
&= \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} p(p-1) [w^{p-2} + (p-2)w^{p-3}(w_\delta - w) + O(|w_\delta - w|^2)] \\
&\quad g (Y_i + (Y_i^\delta - Y_i))(Y_i + (Y_i^\delta - Y_i)) dx \\
&= \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} p(p-1)w^{p-2} g Y_i Y_j dx + O(|\alpha|\delta^{2(N-2)+k}) + O(|\alpha|\delta^{2(N-2)}).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Usando (2.53), (2.54), (2.55) e (2.56) em (2.52) e supondo que $k > N - 2$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^d c_i(\delta, \alpha) \int_{\Omega_\delta} p w^{p-1} Y_i (Y_j + O(\delta^{2(N-2)})) dx &= \sum_{i=1}^d \alpha_i \int_{\Omega_\delta} p(p-1)w^{p-2} [g - (w - w_\delta)] Y_i Y_j dx \\
&\quad + O(|\alpha|^3 + |\alpha|\delta^{2(N-2)}) + O(\delta^{3(N-2)} + |\alpha|^2 \delta^{(N-2)}) \\
&\quad + O(\delta^{2(N-2)}) + O(|\alpha|^3 + \delta^{3(N-2)}).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Da equação (2.43) que g satisfaz, temos que

$$\begin{cases} \Delta g \delta^{-(N-2)} + p w^{p-1} g \delta^{-(N-2)} = \frac{(w^p - w_\delta^p)}{\delta^{(N-2)}} + o(1), & \text{em } \Omega_\delta \\ g \delta^{-(N-2)} = 0, & \text{em } \partial\Omega_\delta. \end{cases} \tag{2.58}$$

Quando $\delta \rightarrow 0$ o problema acima converge para o seguinte

$$\begin{cases} \Delta g_1 + p w^{p-1} g_1 = p w^{p-1} C_N H_D(0, 0) \left(1 - \frac{1}{|x|^{N-2}}\right), & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_1(0) \\ g_1 = 0, & \text{em } \partial B_1(0). \end{cases} \tag{2.59}$$

Como

$$\int_{\Omega_\delta} p w^{p-1} Y_i Y_j dx \rightarrow C_0 \delta_{ij} = \begin{cases} C_0, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0, \text{ com } C_0 > 0$$

se $\alpha = \delta^{N-2} \bar{\alpha}$ com $|\bar{\alpha}| \leq R$ para algum $R > 0$ que independe de δ , então (2.57) se transforma numa equação na forma vetorial da forma

$$(C_0 Id + o(1)) \begin{pmatrix} \vdots \\ c_i(\delta, \alpha) \\ \vdots \end{pmatrix} = \delta^{2(N-2)} \left((A_{ij}) \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{\alpha}_j \\ \vdots \end{pmatrix} + b + o(\delta^{N-2}) \right) \tag{2.60}$$

para algum $b \in \mathbb{R}^d$, onde

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} p(p-1)w^{p-2} \left[g_1 - \frac{C_N}{N-2} H_D(0,0) \left(1 - \frac{1}{|x|^{N-2}} \right) \right] Y_i(x) Y_j(x) dx. \\ &= \int_1^\infty \int_{\partial B_1(0)} p(p-1)w^{p-2} \left[g_1 - \frac{C_N}{N-2} H_D(0,0) \left(1 - \frac{1}{r^{N-2}} \right) \right] \psi^2 \Theta_i \Theta_j r^{N-1} d\theta dr \end{aligned}$$

Pela ortogonalidade de $\{Y_i(x)\}_i$ temos $A_{ij} = 0$ quando $i \neq j$, e se

$$\int_1^\infty p(p-1)w^{p-2} \left[g_1 - \frac{C_N}{N-2} H_D(0,0) \left(1 - \frac{1}{r^{N-2}} \right) \right] \psi^2 r^{N-1} dr \neq 0, \quad (2.61)$$

então existe uma raiz $\bar{\alpha}(\delta)$ da equação do lado direito de (2.60) e consequentemente $c(\delta, \delta^{N-2}\bar{\alpha}(\delta)) = 0$.

Referências

- [1] Ambrosetti A.; Badiale M. *Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a variational approach*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin., (1998) 15:233-252.
- [2] Ambrosetti A.; Badiale M. *Variational perturbative methods and bifurcation of bound states form the essential spectrum*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, (1998) 128:1131-1161.
- [3] Ambrosetti A.; Badiale M.; Cingolani S. *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations*. Arch. Rational Mech. Anal., 140 (1997) 285-300.
- [4] Ambrosetti A.; Malchiodi A. *Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on $\mathbb{R}^n$* . Birkhäuser, Progress in Mathematics, vol. 240, 2006.
- [5] Ambrosetti A.; Malchiodi A.; Secchi S. *Multiplicity results for some nonlinear Schrödinger equations with potentials*. Arch. Ration. Mech. Anal. 159 (2001) 253-271.
- [6] Assis M. *Dom Casmurro*. H. Garnier Livreiro-Editor, Rio de Janeiro 1899.
- [7] Atkinson K.; Han W. *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*. Lecture Notes in Mathematics 2044, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [8] Bahri A.; Coron J.M. *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain*. Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988) 255-294.
- [9] Brezis H. *Elliptic equations with limiting Sobolev exponent - the impact of topology*. in: Proceedings 50th Anniv. Courant Inst., Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986).
- [10] Brezis H.; Nirenberg L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-447.

- [11] Chang K.C. *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*. PNLDE 6, Birkhäuser Boston, 1993.
- [12] Coron J.M. *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 299 (1984) 209-212.
- [13] Del Pino M.; Felmer P.; Musso M. *Two-bubble solutions in the super-critical Bahri-Coron's problem*. Calc. Var. Partial Differential Equations 16 (2) (2003) 113-145.
- [14] Del Pino M.; Felmer P.; Musso M. *Multi-peak solutions for super-critical elliptic problems in domains with small holes*. J. Differential Equations 182 (2) (2002) 511-540.
- [15] Del Pino M.; Wei J. *Supercritical elliptic problems in domains with small holes*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin., 24 (2007) 507-520.
- [16] Gilbarg D.; Trudinger N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.
- [17] Gladiali F.; Grossi M. *Supercritical elliptic problem with nonautonomous nonlinearities*. J. Differential Equations, 253 (9) (2012) 2616-2645.
- [18] Gladiali F.; Grossi M.; Neves S. *Nonradial solution for the Hénon equation in $\mathbb{R}^N$* . Advances in Mathematics, 249 (2013), 1-36.
- [19] Kazdan J.; Warner F. *Remarks on some quasilinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math. 28 (5) (1975) 567-597.
- [20] Khenissy S.; Rey O. *A criterion for existence of solutions to the supercritical Bahri-Coron's problem*. Houston J. Math. 30 (2) (2004) 587-613.
- [21] Malchiodi A. *Concentration of solutions for some singularly perturbed Neumann problems*. Geometric Analysis and PDEs, Lecture Notes in Mathematics vol. 1977, CIME 2009.
- [22] Neves S. *Sobre o Número de Soluções de um Problema de Neumann com Perturbação Singular*, tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, 2012.

-
- [23] Ni W. M. *A Nonlinear Dirichlet Problem on the Unit Ball and Its Applications*. Indiana University Mathematics Journal, Vol.31, n°6 (1982).
- [24] Passaseo D. *Nonexistence results for elliptic problems with supercritical nonlinearity in nontrivial domains*. J. Funct. Anal. 114 (1) (1993) 97-105.
- [25] Pohozaev S. *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* . Soviet Math. Dokl. 6 (1965) 1408-1411.
- [26] Rey O. *On a variational problem with lack of compactness: the effect of small holes in the domain*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 308 (12) (1989) 349-352.