

Carlos Vinícius das Neves Silva

Sistemas Holomorfos

São José do Rio Preto
2022

Carlos Vinícius das Neves Silva

Sistemas Holomorfos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2022

Silva, Carlos Vinícius das Neves.

Sistemas Holomorfos / Carlos Vinicius das Neves Silva. -- São José do Rio Preto, 2022

112p. : il., tabs.

Orientador: Paulo Ricardo da Silva

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

1. Sistemas Holomorfos. 2 Sistemas Holomorfos Por Partes . . I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Carlos Vinícius das Neves Silva

Sistemas Holomorfos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientador

Prof^a. Dr^a. Ingrid Sofia Meza Sarmiento
UNIFEI – Universidade Federal de Itajubá

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
UFG – Universidade Federal de Goiás

São José do Rio Preto
30 de Setembro de 2022

Dedico este trabalho ao meu pai Carlos Roberto (in memoriam), à minha avó Ercília (in memoriam) e à minha tia Ana Lúcia (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por tudo.

A minha mãe Sonia Marcia, a minha família e aos meus amigos por tudo o incentivo e apoio.

Ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva pela dedicação, atenção, paciência e pelos ensinamentos.

A todos os professores e funcionários da UNESP/IBILCE.

Aos professores da banca examinadora.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), à qual agradeço.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos propriedades locais e globais de equações diferenciais complexas de primeira ordem $\dot{z} = f(z)$, onde f é uma função definida em um aberto Ω que exceto para polos, é holomorfa em Ω . Classificaremos o retrato de fase no disco de Poincaré de uma família de equações racionais e por fim, estudaremos sistemas holomorfos por partes em especial, apresentaremos condições que garantem a existência de ciclo limite para estes sistemas.

Palavras-chave: Sistemas Holomorfos. Sistemas Holomorfos por Partes. Sistemas de Filippov.

ABSTRACT

In this work we will study local and global properties of complex first order differential equations $\dot{z} = f(z)$, where f is a function defined on an open set $\Omega \subset \mathbb{C}$, that except for poles, f is holomorphic in Ω . We will classify the phase portraits on the Poincaré disk of a family of rational equations and finally, we will study piecewise holomorphic systems, in particular we provide conditions to ensure the existence of limit cycles of these systems.

Keywords: Holomorphic systems. Piecewise holomorphic systems. Filippov systems.

Lista de Figuras

2.1	Cartas locais na esfera de Poincaré (Imagem retirada e modificada de [7]).	22
2.2	Retrato de fase do sistema (2.5).	26
2.3	Região de costura, Região de deslize e Região de escape, respectivamente.	27
2.4	Campo deslizante.	28
2.5	Retrato de fase do campo (2.8).	30
2.6	Retrato de fase do campo (2.9).	30
3.1	O ângulo entre duas curvas é preservado por uma função conforme.	33
3.2	Caso em que a integral da expressão (3.11) está definida à esquerda e o caso em que a integral não está definida à direita (imagem retirada e modificada de [4]).	39
3.3	Retrato de fase da equação $\dot{z} = 1$.	47
3.4	Retrato de fase local da equação $\dot{z} = (a + ib)z$.	47
3.5	Retrato de fase das equações $\dot{z} = z^2$, $\dot{z} = z^3$ e $\dot{z} = z^4$.	48
3.6	Retrato de fase das equações $\dot{z} = \frac{z^2}{1+z}$, $\dot{z} = \frac{z^3}{1+(1+i)z^2}$ e $\dot{z} = \frac{z^4}{1+iz^3}$ em uma vizinhança da origem.	49
3.7	Retrato de fase das equações $\dot{z} = \frac{1}{z}$, $\dot{z} = \frac{1}{z^2}$ e $\dot{z} = \frac{1}{z^3}$.	50
3.8	Retrato de fase da equação $\dot{z} = 1$ em uma vizinhança do infinito.	55
3.9	Retrato de fase da equação $\dot{z} = (a + bi)z$ em uma vizinhança do infinito.	57
3.10	Retrato de fase da equação $\dot{z} = z^2$ em uma vizinhança do infinito.	58
3.11	Retrato de fase da equação $\dot{z} = z^3$ em uma vizinhança do infinito.	58
3.12	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z} + \frac{c}{z^3}$ em uma vizinhança do infinito.	60
3.13	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z^2}$ em uma vizinhança do infinito.	61
4.1	Curvas de nível da função $x^2y - \frac{y^3}{3}$.	65
4.2	Curvas de nível da função $\psi(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2$.	66
4.3	Curvas de nível da função $(x-1)y + \arctg\left(\frac{y}{x+1}\right)$.	66
4.4	Curvas de nível da função $H(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$.	67
4.5	Curvas de nível da função $H(x, y) = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{-y}{1-x}\right) - \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{y}{1+x}\right)$.	68
5.1	i) Exemplo de um gráfico; ii) Um conjunto que não é um gráfico.	70
5.2	Um gráfico com uma aplicação de Poincaré.	71
5.3	Exemplos de laços que não podem ocorrer.	72

6.1	Retrato de fase da equação $\dot{z} = 1$ no disco de Poincaré.	76
6.2	Retrato de fase da equação $\dot{z} = kz$ no disco de Poincaré.	76
6.3	Retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi)$ no disco de Poincaré.	77
6.4	Retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$ no disco de Poincaré. . .	77
6.5	Retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$ no disco de Poincaré. . .	78
6.6	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z}$ no disco de Poincaré.	80
6.7	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z - \xi}{z}$ no disco de Poincaré.	81
6.8	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z - 1)(z - \xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Re(k) = 0$	82
6.9	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z - 1)(z - \xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Re(k) = 0$	83
6.10	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z - 1)(z - \xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Re(k)\Im(k) \neq 0$	84
6.11	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{(z - 1)(z - \xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Re(k)\Im(k) \neq 0$	84
6.12	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z - 1)(z - \xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Im(k) = 0$	85
6.13	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z - 1)(z - \xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Im(k) = 0$	86
6.14	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z(z - \xi)}$ no disco de Poincaré, onde $\xi \neq 0$	88
6.15	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z(z - \xi)}$ no disco de Poincaré, onde $\xi = 0$	88
6.16	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z}{z(z - \xi)}$ no disco de Poincaré se $\xi \neq 1$ e $\Re(L_0) = 0$	89
6.17	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z}{z(z - \xi)}$ no disco de Poincaré se $\xi \neq 1$ e $\Re(L_0) \neq 0$	89
6.18	Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z}{z(z - \xi)}$ se $\xi = 1$	90
7.1	Retrato de fase do sistema (7.2).	92
7.2	Retrato de fase do sistema (7.3).	93
7.3	Contato entre a função $i(z + i)$ e Σ	95
7.4	Contato entre a função $(z + i)^3$ e Σ	96
7.5	Contato entre a função $\frac{1}{(z + i)^3}$ e Σ	96
7.6	Contato entre a função $\frac{(z + i)^2}{1 + (z + i)}$ e Σ	97
7.7	Retrato de fase do sistema 7.5, onde $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -1$ e $x_0 = 1$. . .	98
7.8	Retrato de fase do sistema (7.6) com $a = -1$, $b = 1$, $d = 1$ e $z_0 = i$	100
7.9	Retrato de fase do sistema (7.10) com $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{1}{2}$ e $y_0 = 1$. . .	101
7.10	Retrato de fase do sistema (7.11), onde $a = -1$, $b = 1$, $d = -\frac{1}{5}$ e $y_0 = 1$. . .	102
7.11	Retrato de fase do sistema (7.12), onde $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{3}{10}$, $y_0 = 1$ e $n = 4$	103

7.12	Retrato de fase do sistema (7.13), onde $a = -1$, $b = 1$, $d = \frac{3}{10}$, y_0 e $n = 5$. .	104
7.13	Retrato de fase do sistema (7.14), onde $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{1}{2}$ e $n = 2$. . .	105
7.14	Retrato de fase do sistema (7.15), onde $n = 2$, $a = -1$, $b = -1$ e $d = \frac{1}{2}$. . .	106
7.15	Retrato de fase do sistema (7.16), onde $a = -1$, $b = 1$, $d = -\frac{1}{2}$, $y_0 = 1$ e $n = 4$	107
7.16	Retrato de fase do sistema (7.17), onde $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{3}{10}$, $y_0 = 1$ e $n = 4$	108

Lista de Tabelas

7.1	Tabela Teorema 7.14.	99
7.2	Tabela Teorema 7.25	104

Sumário

1	Introdução	19
2	Conceitos Iniciais	21
2.1	Compactificação de Poincaré	21
2.1.1	Cartas Locais	21
2.1.2	Pontos Singulares no Infinito	24
2.2	Sistemas de Filippov	26
2.2.1	Órbitas e Singularidades	26
3	Teorema de Forma Normal e Consequências	31
3.1	Sistemas Holomorfos	31
3.2	Demonstração do Teorema 3.11	35
3.3	Consequências do Teorema 3.11	46
3.4	Dinâmica no Infinito	53
4	Dinâmica dos Fluidos e Integrabilidade	63
5	Propriedades Globais da Equação $\dot{z} = f(z)$	69
6	Classificação Topológica de Equações Racionais	73
6.1	$\deg(P) \leq 3$ e $\deg(Q) = 0$	73
6.2	$\deg(P) \leq 2$ e $\deg(Q) = 1$	78
6.3	$\deg(P) \leq 1$ e $\deg(Q) = 2$	86
7	Sistemas Holomorfos por Partes	91
7.1	Retrato de Fase e Pontos de Tangência em Sistemas Holomorfos por Partes	91
7.2	Ciclos Limites em Sistemas Holomorfos por Partes	96
	Referências	109

1 Introdução

A Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias ([9],[12]) desempenha um papel muito importante em diversas áreas do conhecimento, pois muitos fenômenos são descritos ou são modelados usando equações diferenciais. Essa teoria consiste em determinar resultados e métodos que descrevem as soluções sem as resolverem explicitamente.

Durante o desenvolvimento da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais, vários problemas surgiram. Como por exemplo, o 16º Problema de Hilbert, o problema do Centro-Foco e apresentar, para uma família de equações, uma classificação topológica. Com este desenvolvimento também surgiram novas teorias, como a Teoria de Sistemas Dinâmicos Suaves por Parte ([3]) que é uma teoria que tem recebido muito destaque nos últimos anos.

Neste contexto, o principal intuito deste trabalho é estudar uma classe particular de sistemas, os sistemas holomorfos (ou equações diferenciais complexas)

$$\frac{dz}{dt} = f(z) \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C},$$

para então, estudar os sistemas holomorfos por partes

$$\begin{cases} \dot{z} = f^+(z), & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = f^-(z), & \text{se } \Im(z) < 0. \end{cases}$$

Note que um sistema holomorfo pode ser visto como um sistema em $\mathbb{R}^2$ com uma estrutura especial, as equações de Cauchy-Riemann. Estes sistemas possuem diversas propriedades e tem sido amplamente estudados. Veja por exemplo os artigos [2], [10], [18] e [19].

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira:

No Capítulo 2, apresentamos conceitos que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Utilizando [5], descrevemos a compactificação de Poincaré, que é uma técnica que permite estudar o comportamento global das soluções de certos sistemas. Também, embasados na referência [16], abordamos conceitos da Teoria de Campos Vetoriais Descontínuos.

No Capítulo 3, introduzimos o conceito de conjugação conforme entre duas soluções, enunciamos e demonstramos o Teorema 3.11 que nos fornece a forma normal de uma equação $\dot{z} = f(z)$ em uma vizinhança de um ponto p . A partir deste resultado, classificamos o retrato local em torno de um ponto p e estudamos a dinâmica das soluções de equações racionais no infinito.

Já no Capítulo 4 discutimos alguns aspectos sobre dinâmica dos fluidos e mostraremos que os sistemas holomorfos são localmente integráveis.

No Capítulo 5, demonstramos que em uma vizinhança de uma órbita periódica todas as órbitas também são periódicas. Além disso, definimos o que são gráficos e policiclos e demonstramos que em uma vizinhança de um policiclo todas as órbitas são periódicas.

Utilizando os conceitos e resultados apresentados nos capítulos anteriores, no Capítulo 6, classificamos os retratos de fase de uma família de equações racionais $\dot{z} = \frac{P(z)}{Q(z)}$, onde $\deg(P) \leq 3$ e $\deg(Q) = 0$, $\deg(P) \leq 2$ e $\deg(Q) = 1$ e $\deg(P) \leq 1$ e $\deg(Q) = 2$.

O Capítulo 7 é dedicado ao estudo dos sistemas holomorfos por partes. Nesse capítulo, estudaremos as regiões de costura, deslize e escape, bem como os pontos de tangência dos sistemas holomorfos por partes. Por fim, daremos condições que garantem a existência de ciclo limite para sistemas holomorfos por partes.

Esta dissertação é baseada nos artigos [2] e [14] e complementado pelas referências [1], [10] e [13]. Além destas, as obras [4], [11] e [18] também foram utilizadas. Os retratos de fase presentes neste trabalho foram criados com auxílio dos softwares P4 (polynomial planar phase portrait) e do MATHEMATICA.

2 Conceitos Iniciais

Neste capítulo apresentaremos conceitos sobre a teoria de campos vetoriais contínuos e descontínuos que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

2.1 Compactificação de Poincaré

Apresentaremos nesta seção a construção da compactificação de Poincaré para sistemas polinomiais planares. A compactificação de Poincaré é uma técnica que permite estudar o comportamento de campos vetoriais polinomiais no infinito.

2.1.1 Cartas Locais

Consideremos o campo vetorial $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$, onde P e Q são polinômios. Ao campo X está associado o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2). \end{cases} \quad (2.1)$$

Dizemos que o **grau** do sistema X é d se d é o máximo dos graus de P e Q .

Identificamos $\mathbb{R}^2$ no espaço $\mathbb{R}^3$ como o plano definido por $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$. Considere $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3; y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$ a qual é chamada de **esfera de Poincaré**, ela é tangente a $\mathbb{R}^2$ no ponto $(0, 0, 1)$.

Podemos dividir a esfera em $H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2; y_3 > 0\}$ (hemisfério norte), $H_- = \{y \in \mathbb{S}^2; y_3 < 0\}$ (hemisfério sul) e $\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2; y_3 = 0\}$ (equador).

A projeção do campo X de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{S}^2$ é obtida pelas projeções centrais $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, definidas por

$$f^+(x) = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right),$$

$$f^-(x) = \left(\frac{-x_1}{\Delta(x)}, \frac{-x_2}{\Delta(x)}, \frac{-1}{\Delta(x)} \right),$$

onde $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$. A expressão de f^+ (respectivamente f^-) é obtida pela intersecção da reta que passa pelo ponto $(x_1, x_2, 1)$ e pela origem do $\mathbb{R}^3$ com o hemisfério norte (respectivamente o hemisfério sul) de $\mathbb{S}^2$.

Com estas funções, obtemos campos de vetores induzidos em cada hemisfério. O campo de vetores induzido em H_+ é $\bar{X}^+(y) = Df^+(x)X(x)$, onde $y = f^+(x)$. O campo de vetores em H_- é $\bar{X}^-(y) = Df^-(x)X(x)$, onde $y = f^-(x)$.

Assim, obtemos um campo de vetores $\bar{X}$ em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, definido por

$$\bar{X}(y) = \begin{cases} \bar{X}^+(y), & \text{se } y \in H^+, \\ \bar{X}^-(y), & \text{se } y \in H^-. \end{cases} \quad (2.2)$$

Queremos estender o campo de vetores $\bar{X}$ de $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ para $\mathbb{S}^2$. Para isso, vamos multiplicar o campo $\bar{X}$ pelo fator $p(y) = y_3^{d-1}$, onde d é o máximo dos graus de P e Q . O campo vetorial estendido é chamado de compactificação de Poincaré do campo de vetores X em $\mathbb{R}^2$ e é denotado por $p(X)$.

Como $\mathbb{S}^2$ é uma variedade diferencial compacta, conseguimos cobrir sua superfície com cartas locais

$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2; y_k > 0\}$ com $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi_k(y) = (\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k})$, onde $m < n$ e $m, n \neq k$,

$V_k = \{y \in \mathbb{S}^2; y_k < 0\}$ com $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi_k = -\phi_k(y)$, para $k = 1, 2, 3$.

Denotaremos por $z = (u, v)$ as imagens das cartas locais $\phi_k(y)$ e $\psi_k(y)$ para algum k . Dessa forma, $z = (u, v)$ desempenham papéis diferentes em cada carta local. Geometricamente as coordenadas (u, v) podem ser vistas na Figura 2.1.

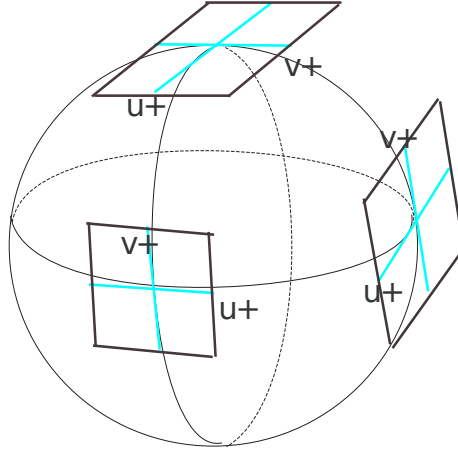


Figura 2.1: Cartas locais na esfera de Poincaré (Imagem retirada e modificada de [7]).

Note que, se $y \in \mathbb{S}^1$, então em qualquer carta teremos que $v = 0$. De fato, dadas ϕ_1 e ϕ_2 temos

$$\phi_1(y) = \phi_1(y_1, y_2, 0) = \left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{0}{y_1} \right) = (u, 0)$$

e

$$\phi_2(y) = \phi_2(y_1, y_2, 0) = \left(\frac{y_1}{y_2}, \frac{0}{y_2} \right) = (u, 0).$$

A seguir faremos os cálculos detalhados para encontrar a expressão de $p(X)$ na carta local U_1 . O cálculo é análogo para as outras cartas locais. Temos que $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$, então $\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x)$ com $y = f^+(x)$ e

$$D\phi_1(y)\bar{X}(y) = D\phi_1(y) \circ Df^+(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x),$$

onde

$$(\phi_1 \circ f^+)(x_1, x_2) = \phi_1(f^+(x_1, x_2)) = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = (u, v),$$

daí segue que $x_1 = \frac{1}{v}$ e $x_2 = \frac{u}{v}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{X}|_{U_1} &= \begin{bmatrix} \frac{-x_1}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{-1}{x_1^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)) \\ &= v^2 \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right). \end{aligned}$$

Como X é um campo de vetores polinomial, um termo v^{d-1} pode aparecer no denominador da expressão $\overline{X}|_{U_1}$, o que faz o campo não ser definido em $v = 0$. Mas, ao multiplicarmos o campo por $p(y) = y_3^{d-1}$, os possíveis termos v^{d-1} são cancelados e, assim, o sistema fica definido em toda $\mathbb{S}^2$.

Agora,

$$p(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} = v^{d-1} m(z),$$

onde $m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{\frac{1-d}{2}}$.

Consequentemente a compactificação de Poincaré para o campo X na carta local U_1 é dada por

$$p(\overline{X}|_{U_1}(z)) = v^{d+1} m(z) \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

Dado que $m(z)$ é uma função positiva, então a compactificação de Poincaré é topologicamente equivalente a

$$\frac{1}{m(z)} p(\overline{X}|_{U_1}(z)) = v^{d+1} \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

Logo a expressão de $p(X)$ na carta local U_1 é

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v^d \left(-u P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right), \\ \dot{v} &= -v^{d+1} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \end{aligned}$$

A expressão de $p(X)$ na carta U_2 é

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v^d \left(P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - u Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right), \\ \dot{v} &= -v^{d+1} Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), \end{aligned}$$

e a expressão de $p(X)$ na carta U_3 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= P(u, v), \\ \dot{v} &= Q(u, v).\end{aligned}$$

As expressões para a compactificação de Poincaré nas cartas V_k são as mesmas expressões da compactificação de Poincaré nas cartas U_k multiplicadas por $(-1)^{d-1}$, para $k = 1, 2, 3$. Assim para estudar o comportamento do campo vetorial X , incluindo seu comportamento próximo do infinito é suficiente trabalhar em $H^+ \cup \mathbb{S}^1$, que chamaremos de **disco de Poincaré**. Portanto, todos os cálculos podem ser feitos utilizando as cartas locais (U_1, ϕ_1) , (U_2, ϕ_2) e (U_3, ϕ_3) .

Chamamos de ponto **singular finito** (respectivamente, no **infinito**) de X ou de $p(X)$ ao ponto singular de $p(X)$ que está em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ (respectivamente $\mathbb{S}^1$).

Note que se $y \in \mathbb{S}^1$ é um ponto singular no infinito, então $-y$ também o será, já que o comportamento local próximo de $-y$ é igual ao comportamento local próximo de y multiplicado por $(-1)^{d-1}$. Logo a orientação muda quando d é par e permanece a mesma quando d é ímpar. Por exemplo, se d é par e $y \in \mathbb{S}^1$ é um nó estável de $p(X)$, então $-y$ será um nó instável, já se d é ímpar, então $-y$ será um nó estável. Como os pontos singulares no infinito aparecem aos pares e são diametralmente opostos, é suficiente estudar metade deles e usando o grau do campo pode-se determinar a outra metade.

Por praticidade, na hora de esboçarmos o retrato de fase, projetamos o disco de Poincaré em $\{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

2.1.2 Pontos Singulares no Infinito

Queremos estudar o retrato de fase local em pontos singulares no infinito, ou seja, queremos estudar pontos da forma $(u, 0)$.

Sejam P_i e Q_i os polinômios homogêneos de grau i com $i = 0, \dots, d$ tais que $P = P_0 + P_1 + \dots + P_d$ e $Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_d$.

Então $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um ponto singular se, e somente se,

$$v^d \left(-uP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right) = 0,$$

o que é equivalente a

$$v^{d-1}(-uP(1, u) + Q(1, u)) = 0.$$

Dado que $v^{d-1}P_i = 0$ e $v^{d-1}Q_i = 0$ se $v = 0$ e $i < d$, a condição acima é equivalente a

$$F(u) = Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0.$$

Semelhantemente $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é uma singularidade no infinito de $p(X)$ se, e somente se,

$$G(u) = P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

Além disso, podemos calcular a matriz Jacobiana do campo vetorial $p(X)$ nos pontos $(u, 0)$. Para os pontos singulares $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ temos:

$$\begin{bmatrix} F'(u) & Q_{d-1}(1, u) - uP_{d-1}(1, u) \\ 0 & -P_d(1, u) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

e para pontos singulares $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ temos:

$$\begin{bmatrix} G'(u) & P_{d-1}(u, 1) - uQ_{d-1}(u, 1) \\ 0 & -Q_d(u, 1) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Em alguns casos o equador pode consistir inteiramente de pontos singulares. Dentre todos os pontos singulares hiperbólicos, apenas nós e selas podem aparecer no infinito. Todos os pontos singulares nilpotentes também podem aparecer no infinito.

Veremos a seguir um exemplo de como obter o retrato de fase global utilizando a técnica apresentada nesta seção.

Exemplo 2.1. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y^2, \\ \dot{y} = y + x^2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Inicialmente note que o sistema (2.5) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

onde $H(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + xy$. Assim, H é uma integral primeira do sistema (2.5).

Os pontos $(0, 0)$ e $(-1, -1)$ são os únicos pontos de equilíbrio do sistema (2.5) e

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J(-1, -1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, ± 1 são autovalores de $J(0, 0)$ e $\pm i\sqrt{3}$ são autovalores de $J(-1, -1)$. Consequentemente, $(0, 0)$ é um ponto de sela e, como a integral primeira H está bem definida em $(-1, -1)$, segue que $(-1, -1)$ é um centro.

Agora, vamos calcular os pontos singulares no infinito. Seja X o campo associado ao sistema (2.5). A expressão de $p(X)$ na carta U_1 é

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 1 + 2uv + u^3, \\ \dot{v} &= v^2 + u^2v. \end{aligned}$$

Nesta carta, $(-1, 0)$ é o único ponto singular. Como a matriz Jacobiana de $p(X)$ na carta U_1 é

$$J(-1, 0) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então $(-1, 0)$ é um nó instável. Dado que o grau do sistema é par, então na carta local V_1 o ponto diametralmente oposto ao ponto $(-1, 0) \in U_1$ também é um ponto singular e é um nó estável.

A expressão de $p(X)$ na carta local U_2 é

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -1 - 2uv - u^3, \\ \dot{v} &= -v^2 - u^2v. \end{aligned}$$

Como a origem da carta U_2 não é um ponto singular, não existem outros pontos singulares no infinito.

Portando, o retrato de fase do sistema (2.5) no disco de Poincaré é esboçado na Figura 2.2.

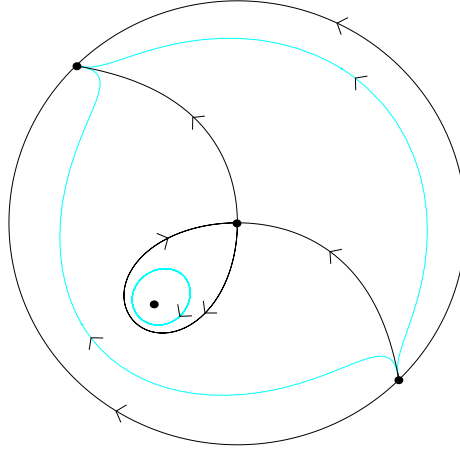


Figura 2.2: Retrato de fase do sistema (2.5).

2.2 Sistemas de Filippov

Nesta seção, daremos algumas definições e resultados sobre sistemas dinâmicos suaves por partes.

2.2.1 Órbitas e Singularidades

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ uma vizinhança aberta de $(0,0)$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r tal que 0 é valor regular de f , isto é, $\nabla(f(x,y)) \neq (0,0)$ para todo $(x,y) \in f^{-1}(0)$. Considere $\Sigma = f^{-1}(0) \cap U$, Σ divide o aberto U em dois conjuntos

$$\Sigma^+ = \{(x,y) \in U; f(x,y) > 0\} \quad e \quad \Sigma^- = \{(x,y) \in U; f(x,y) < 0\}.$$

Um **campo de vetores suave por partes** (ou **campo de Filippov**) é um campo $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$Z(x,y) = \begin{cases} X(x,y), & \text{se } (x,y) \in \Sigma^+, \\ Y(x,y), & \text{se } (x,y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde X e Y são campos de vetores suaves.

Denotaremos $Z = (X,Y)$ para indicar a dependência de Z em relação aos campos X e Y .

Nossa finalidade é definir a solução $\varphi_Z(t,p)$ do campo (2.6) passando por um ponto $p \in U$. Para isso, daremos algumas definições.

Definição 2.2. A **derivada de Lie** de f em relação ao campo vetorial X é definida por

$$Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle \quad e \quad X^i f(p) = \langle X(p), \nabla X^{i-1} f(p) \rangle$$

para $i \geq 2$, onde $\langle, \rangle$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

Com a derivada de Lie, especificamos as seguintes regiões em Σ .

Definição 2.3. Considere o campo (2.6). Definimos as seguintes regiões em Σ :

1. **Região de Costura** : $\Sigma^c = \{p \in \Sigma; Xf(p).Yf(p) > 0\}$;
2. **Região de Deslize** : $\Sigma^s = \{p \in \Sigma; Xf(p) < 0 \text{ e } Yf(p) > 0\}$;
3. **Região de Escape** : $\Sigma^e = \{p \in \Sigma; Xf(p) > 0 \text{ e } Yf(p) < 0\}$.

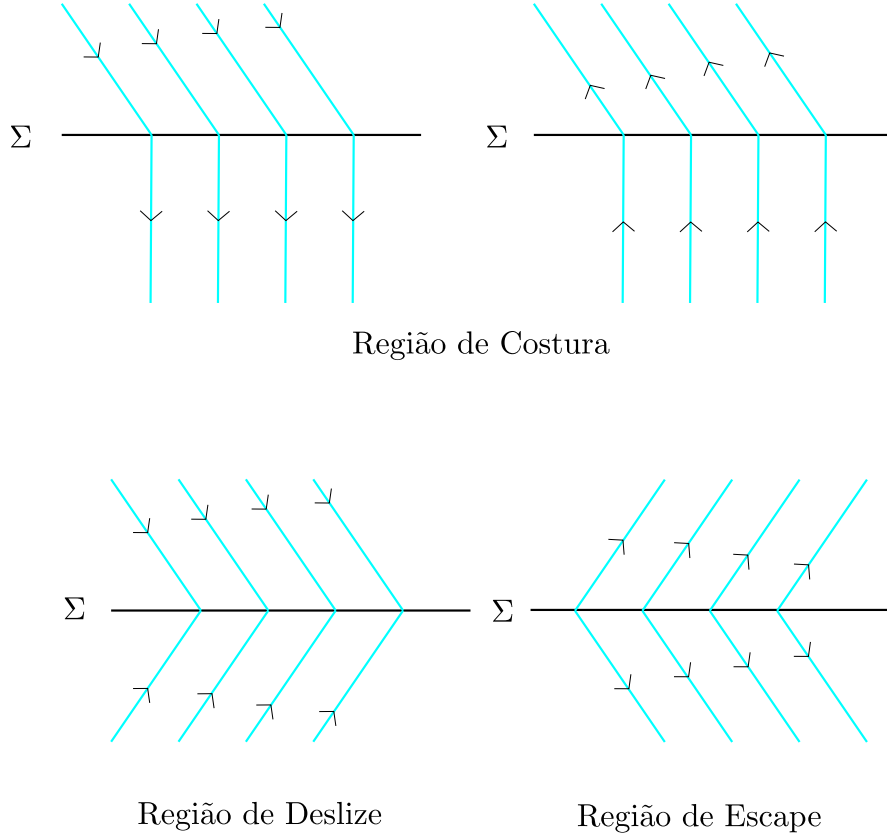


Figura 2.3: Região de costura, Região de deslize e Região de escape, respectivamente.

Observação 2.4. Como $\langle X(P), \nabla f(p) \rangle = \|X(p)\| \|\nabla f(p)\| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $Xf(p)$ e $\nabla f(p)$, então o sinal de $Xf(p)$ depende deste ângulo.

Assim, se $\langle X(P), \nabla f(p) \rangle > 0$, então $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e se $\langle X(P), \nabla f(p) \rangle < 0$, então $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Note que as definições anteriores excluem os pontos em que $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$, esses pontos são chamados de **pontos de tangência** e eles aparecem na fronteira das regiões Σ^c, Σ^s e Σ^e que denotaremos $\partial\Sigma^c, \partial\Sigma^s$ e $\partial\Sigma^e$, respectivamente. .

Dizemos que $p \in \Sigma$ é **ponto de dobra** de X ou que X tem uma **tangência quadrática** com Σ se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$.

Dizemos que X tem **tangência cúbica** com Σ no ponto p se $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) = 0$ e $X^3f(p) \neq 0$.

Agora vamos definir a trajetória passando por um ponto p de Σ^c, Σ^s e Σ^e . Se $p \in \Sigma^c$, os campos X e Y apontam para Σ^+ ou para Σ^- , sendo assim, podemos justapor as trajetórias de X e Y que passam por p .

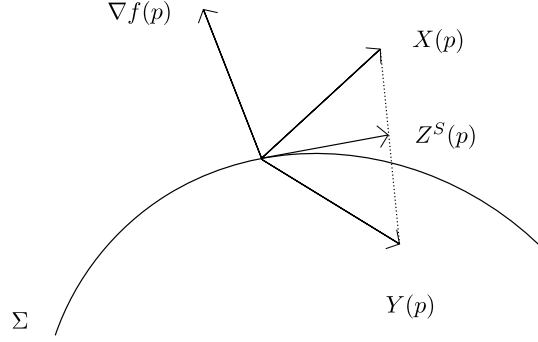


Figura 2.4: Campo deslizante.

Se $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, a órbita local é dada pela combinação convexa dos campos X e Y tangente a Σ , isto é, $Z^s(p) = \lambda(p)X(p) + (1 - \lambda(p))Y(p)$. Uma vez que ∇f é ortogonal à curva de nível $f(x, y) = 0$, então Z^s é ortogonal a ∇f em p , ou seja, $\langle Z^s(p), \nabla f(p) \rangle = 0$. Assim,

$$\langle \lambda(p)X(p) + (1 - \lambda(p))Y(p), \nabla f(p) \rangle = 0,$$

usando as propriedades de distributividade e homogeneidade do produto interno, temos que

$$\lambda(p)\langle X(p), \nabla f(p) \rangle + (1 - \lambda(p))\langle Y(p), \nabla f(p) \rangle = 0,$$

logo,

$$\lambda(p)(\langle X(p), \nabla f(p) \rangle - \langle Y(p), \nabla f(p) \rangle) = -\langle Y(p), \nabla f(p) \rangle.$$

Portanto, obtemos que

$$\lambda(p) = \frac{Yf(p)}{Yf(p) - Xf(p)},$$

e, assim,

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)}(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)). \quad (2.7)$$

O campo (2.7) é chamado **campo deslizante**. O **campo normalizado** é dado por $F_N = Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)$.

Definição 2.5. A **trajetória local** $\varphi_Z(t, p)$ de um campo de Filippov (2.6) passando pelo ponto p é definida por:

- Para $p \in \Sigma^+$, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$. De maneira análoga, se $p \in \Sigma^-$, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$;
- Para $p \in \Sigma^c$ tal que $Xf(p), Yf(p) > 0$ e supondo que as trajetórias passam por p quando $t = 0$, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$ para $I \cap \{t \leq 0\}$ e $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ para $I \cap \{t \geq 0\}$. Se $Xf(p), Yf(p) < 0$, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$ para $I \cap \{t \geq 0\}$ e $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ para $I \cap \{t \leq 0\}$;

- Para $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ e $Z^s(p) \neq 0$, $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$ para $t \in I \subset \mathbb{R}$;
- Para $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que as definições de trajetórias para pontos em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e coincidem, a trajetória por p é está trajetória. Chamaremos estes **pontos de tangências regulares**.
- Para qualquer outro ponto $\varphi_Z(t, p) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Este é o caso em que os pontos de tangência em Σ não são regulares. Chamamos estes pontos de **tangência singulares** e os pontos de equilíbrio de X em Σ^+ , Y em Σ^- e Z^S em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$.

Definição 2.6. A **órbita local** do ponto $p \in U$ é o conjunto $\gamma(p) = \{\varphi_f(t, p); t \in I\}$.

Definição 2.7. Os pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ que satisfazem $Z^S(p) = 0$, são chamados de **pseudo-equilíbrios** de Z .

Notemos que se $Z^s(p) = 0$, então $X(p) = kY(p)$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Definição 2.8. As singularidades de um campo de Filippov são:

1. $p \in \Sigma^\pm$ tal que $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$, respectivamente.
2. $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que p é um pseudo-equilíbrio.
3. Pontos de tangência regular ou singular.

Daremos a seguir alguns exemplos para mostrar os conceitos acima. Consideremos então $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = y$. Temos que 0 é valor regular e $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$.

Exemplo 2.9. Considere o campo

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, x^2) & \text{se } y > 0, \\ Y(x, y) = (1, 1) & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} Xf(x, y) &= \langle X(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, x^2), (0, 1) \rangle = x^2, \\ X^2f(x, y) &= \langle X(x, y), \nabla Xf(x, y) \rangle = \langle (1, x^2), (2x, 0) \rangle = 2x, \\ X^3f(x, y) &= \langle X(x, y), \nabla X^2f(x, y) \rangle = \langle (1, x^2), (2, 0) \rangle = 2, \\ Yf(x, y) &= \langle Y(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, 1), (0, 1) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Logo, para $(x, 0) \in \Sigma$, $Xf(x, 0)Yf(x, 0) = x^2 \geq 0$, daí segue que $\Sigma^c = \Sigma \setminus \{(0, 0)\}$ e $\Sigma^s = \Sigma^e = \emptyset$. Além disso, $(0, 0)$ é um ponto de tangência cúbica de X , pois $Xf(0, 0) = X^2f(0, 0) = 0$ e $X^3f(0, 0) = 2 \neq 0$. Pela definição segue que a trajetória de um ponto $p \in \Sigma$ é a justaposição das órbitas $\varphi_X(t, p)$ e $\varphi_Y(t, p)$. O retrato de fase é mostrado na Figura 2.5.

Exemplo 2.10. Seja

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, 2x) & \text{se } y > 0, \\ Y(x, y) = (-2, -7x) & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

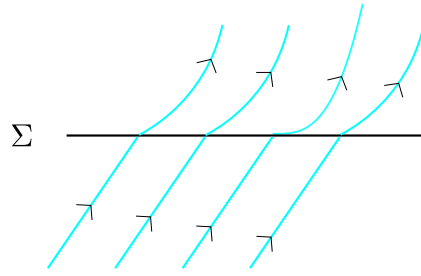


Figura 2.5: Retrato de fase do campo (2.8).

Temos que:

$$\begin{aligned} Xf(x, y) &= \langle X(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (1, 2x), (0, 1) \rangle = 2x, \\ X^2f(x, y) &= \langle X(x, y), \nabla Xf(x, y) \rangle = \langle (1, 2x), (2, 0) \rangle = 2, \\ Yf(x, y) &= \langle Y(x, y), \nabla f(x, y) \rangle = \langle (-2, -7x), (0, 1) \rangle = -7x. \end{aligned}$$

Se $p = (x, 0) \in \Sigma$, então $Xf(p) \cdot Yf(p) \leq 0$. Logo, $\Sigma^c = \emptyset$, $\Sigma^e = \{(x, y) \in \Sigma; x > 0\}$, $\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma; x < 0\}$ e $q = (0, 0)$ é um ponto de tangência quadrática, pois $Xf(q) = 0$ e $X^2f(q) = 2 \neq 0$.

Note que o campo que atua sobre $\Sigma \setminus \{q\}$ é o campo deslizante $Z^s(x, 0) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ e $\varphi_Z(q, t) = \varphi_{Z^s}(q, t)$. O retrato de fase é mostrado na Figura 2.6.

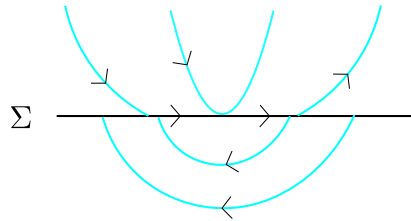


Figura 2.6: Retrato de fase do campo (2.9).

3 Teorema de Forma Normal e Consequências

Neste capítulo estudaremos um resultado que nos fornece a forma normal da equação $\dot{z} = f(z)$ em uma vizinhança de um ponto p , onde f é uma função holomorfa definida em uma vizinhança perfurada de p . Estudaremos também algumas consequências desse resultado.

3.1 Sistemas Holomorfos

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em um aberto $U \subset \mathbb{C}$. Observemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em U se $f'(z)$ existe para todo $z \in U$. Além disso, se f é holomorfa então:

- $u(x, y) = \Re(f(z))$ e $v(x, y) = \Im(f(z))$ são funções contínuas;
- As derivadas parciais u_x , u_y , v_x e v_y existem em U e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad \forall z = x + iy \in U;$$

- Para qualquer z_0

$$f(z) = A_0 + A_1(z - z_0) + \cdots + A_k(z - z_0)^k + \cdots$$

$$\text{em que } A_k = \frac{f^k(z_0)}{k!}.$$

Se f é holomorfa em uma vizinhança $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ e não é derivável em z_0 , dizemos que z_0 é uma **singularidade** da função f . Neste caso, f pode ser representada em $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ por uma única série de Laurent centrada em z_0

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z - z_0)^k,$$

onde $B_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(z)(z - z_0)^{k-1} dz$, $A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$, C_ε é parametrizada por $z(t) = \varepsilon e^{it}$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Se $B_k \neq 0$ para uma infinidade de índices, dizemos que f tem uma **singularidade essencial** em z_0 e, se existe $n \geq 1$ tal que $B_n \neq 0$ e $B_k = 0$ para $k > n$, então dizemos

que z_0 é um **polo de ordem** n . O **resíduo** de f em z_0 é o coeficiente B_1 e é denotada por $\text{Res}(f, z_0)$ (para mais detalhes veja [15, 17]).

Seja $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em um aberto $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \subset \mathbb{C}$. Consideremos a equação

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = f(z) \quad z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Observemos que a equação (3.1) pode ser escrita em coordenadas cartesianas como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $u(x, y) = \Re(f(z))$, $v(x, y) = \Im(f(z))$ e $z = x + iy$. Nos referimos ao sistema (3.2) como **sistema holomorfo** se f é uma função holomorfa ou **sistema meromorfo** se f possui algum ponto singular do tipo polo.

Uma solução da equação (3.1) é uma função $z : I \rightarrow \mathbb{C}$, onde I é um intervalo da reta tal que

$$\frac{dz}{dt} = f(z(t))$$

para todo $t \in I$. Denotaremos por $\varphi_f(t, z_0)$ a solução da equação (3.1) que passa pelo ponto z_0 em $t = 0$.

Um ponto z_0 é dito **ponto de equilíbrio** da equação (3.1) se $f(z_0) = 0$, caso contrário z_0 é dito um **ponto regular**.

Um ponto z_0 é dito **ponto singular** da equação (ou uma **singularidade**) (3.1) se z_0 é um ponto singular da função f .

Proposição 3.1. *Considere z_0 um ponto de equilíbrio da equação (3.1) tal que $f'(z_0) = a + ib \neq 0$. Então:*

$$Jf(z_0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Representamos f em termos de suas partes real e imaginária como uma função $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dado que f é uma função holomorfa, então $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = a + ib$ e

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0),$$

daí segue que

$$Jf(z_0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

□

Proposição 3.2. *Seja $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se f não é identicamente nula, então a equação $\dot{z} = f(z)$ tem um número finito de pontos de equilíbrio.*

Demonstração. Suponhamos que a equação $\dot{z} = f(z)$ tenha infinitos pontos de equilíbrio, então existe uma sequência de pontos distintos (z_n) tal que $f(z_n) = 0$.

Tomando $\overline{D(z_0, R)}$ se necessário, podemos assumir que z_n admite uma subsequência convergente (z_{n_k}) . Logo, f é identicamente nula em um conjunto que possui um ponto de acumulação. Então, pelo Princípio da Continuação Analítica (veja [15] para mais detalhes) f é identicamente nula, o que é uma contradição. $\square$

Com o intuito de comparar os retratos de fase de duas equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$, introduziremos a noção de conjugação conforme, mas antes será necessário definir o que é uma função conforme, como segue.

Definição 3.3. Dizemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida em um aberto $U \subset \mathbb{C}$ é uma **função conforme** se $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

Uma propriedade importante das funções conformes é que elas preservam ângulos. Além disso, o ângulo entre duas curvas que se interceptam em um ponto z_0 também é preservado por funções conformes. Para mais detalhes veja [6] ou [17].

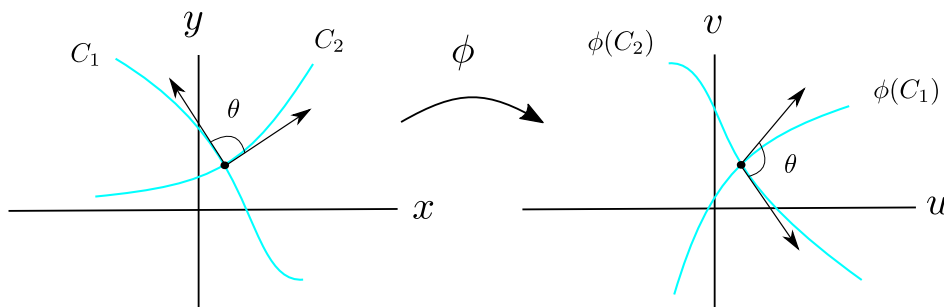


Figura 3.1: O ângulo entre duas curvas é preservado por uma função conforme.

Isso posto definimos:

Definição 3.4. Sejam f e g funções holomorfas definidas em uma vizinhança perfurada de $0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são **conformemente conjugadas próximas a origem** ou que f e g são **0-conformemente conjugadas** se existe $R > 0$ e uma função conforme $\phi : D(0, R) \rightarrow D(0, R)$ tal que $\phi(0) = 0$ e $\phi(\varphi_f(t, z)) = \varphi_g(t, \phi(z))$ para todo $z \in D(0, R) \setminus \{0\}$ e todo t para qual a expressão esteja bem definida.

Sejam f e g funções holomorfas definidas em alguma vizinhança perfurada de $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C}$, respetivamente. Dizemos que f e g são **$z_1 z_2$ -conformemente conjugadas** se $f(z - z_1)$ e $g(z - z_2)$ são conformemente conjugadas próximas a origem.

Observação 3.5. As definições anteriores são definições locais.

Definição 3.6. Dizemos que $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$, onde $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ são **conformemente conjugadas** se existe uma função conforme $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\phi(\varphi_f(t, z)) = \varphi_g(t, \phi(z))$.

As próximas proposições nos fornecem condições para que duas equações sejam 0-conformemente conjugadas.

Proposição 3.7. *As equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são conformemente conjugadas próximas a origem se, e somente se, existe $R > 0$ e uma função conforme $\phi : D(0, R) \rightarrow D(0, R)$ tal que*

$$\phi'(z)f(z) = g(\phi(z)) \quad (3.3)$$

para todo $z \in D(0, R) \setminus \{0\}$.

Demonstração. Inicialmente suponhamos que as equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são conformemente conjugadas próximas a origem, isto é, suponhamos que existe uma função conforme $\phi : D(0, R) \rightarrow D(0, R)$ tal que $\phi(0) = 0$ e

$$\phi(\varphi_f(t, z)) = \varphi_g(t, \phi(z)). \quad (3.4)$$

Derivando (3.4) em relação a t , obtemos

$$\phi'(\varphi_f(t, z)) \frac{d}{dt}(\varphi_f(t, z)) = \frac{d}{dt}(\varphi_g(t, \phi(z))).$$

Como $\frac{d}{dt}(\varphi_f(t, z)) = f(\varphi_f(t, z))$ e $\frac{d}{dt}(\varphi_g(t, z)) = g(\varphi_g(t, z))$, então

$$\phi'(\varphi_f(t, z))f(\varphi_f(t, z)) = g(\varphi_g(t, \phi(z))).$$

Em $t = 0$, vem que $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$.

Reciprocamente, suponhamos que exista uma função conforme $\phi : D(0, R) \rightarrow D(0, R)$ tal que $\phi(0) = 0$ e $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$.

Dado $z_0 \in D(0, R)$, temos que $\phi(\varphi_f(t, z_0))$ é solução de $\dot{z} = g(z)$, $z(0) = z_0$, pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\phi(\varphi_f(t, z))) &= \phi'(\varphi_f(t, z)) \frac{d}{dt}(\varphi_f(t, z)) \\ &= \phi'(\varphi_f(t, z))f(\varphi_f(t, z)) = g(\phi(\varphi_f(t, z))). \end{aligned}$$

Portanto, $\phi(\varphi_f(t, z))$ e $\varphi_g(t, \phi(z))$ são soluções do mesmo problema de valor inicial, da unicidade segue que $\phi(\varphi_f(t, z)) = \varphi_g(t, \phi(z))$. $\square$

Observação 3.8. De maneira semelhante, duas equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$, onde $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}$, são conformemente conjugadas se, e somente se, existe uma função conforme $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$.

Proposição 3.9. *Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções analíticas em uma vizinhança perfurada da origem. Se f e g são 0-conformemente conjugadas, então:*

- $\text{Res}\left(\frac{1}{f}, 0\right) = \text{Res}\left(\frac{1}{g}, 0\right)$;
- A ordem do polo de f e de g na origem são iguais.

Demonstração. a) Suponhamos que f e g são 0-conformemente conjugadas, então pela Proposição 3.7, existe $R > 0$ e uma função conforme $\phi : D(0, R) \rightarrow D(0, R)$ tal que $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$.

Considere $\gamma(t) = \varepsilon e^{it}$, em que $0 \leq t \leq 2\pi$ e $\varepsilon \geq 0$ suficientemente pequeno. O Teorema dos Resíduos nos fornece que

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{f}, 0\right) &= \int_{\phi(\gamma)} \frac{dw}{g(w)} = \int_0^{2\pi} \frac{\phi'(\gamma(t))\gamma'(t)}{g(\phi(\gamma(t)))} dt \\ &= \int_{\gamma} \frac{\phi'(z)}{g(\phi(z))} dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{f}, 0\right). \end{aligned}$$

Portanto $\text{Res}\left(\frac{1}{f}, 0\right) = \text{Res}\left(\frac{1}{g}, 0\right)$.

b) Pela Proposição 3.7 existe $\phi : U \rightarrow V$ conforme tal que $\phi(0) = 0$ e $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$.

Uma vez que $\phi(z) = O(z)$ e $\phi'(z) = O(1)$, segue que a ordem do polo na origem das funções f e g são iguais. $\square$

Observação 3.10. a) Na demonstração do item a) da Proposição 3.7 usamos o Teorema dos Resíduos, para mais informações deste resultado veja [15, 17].

b) Se $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são conformemente conjugadas próximas a origem, então $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são topologicamente conjugadas. A recíproca não é verdadeira. De fato, $\dot{z} = 2z$ e $\dot{z} = 3z$ são topologicamente conjugadas, mas não são conformemente conjugadas.

De posse dos conceitos e resultados anteriores, podemos enunciar o principal resultado desta dissertação:

Teorema 3.11. *Seja $f(z)$ uma função holomorfa em uma vizinhança perfurada $U \subset \mathbb{C}$ de um ponto p . Considere a equação diferencial*

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = f(z) \quad z \in U, t \in \mathbb{C}. \quad (3.5)$$

Então em uma vizinhança de p a equação (3.5) é conformemente conjugada em uma vizinhança da origem a:

- a) $\dot{z} = 1$, se $f(p) \neq 0$;
- b) $\dot{z} = f(p)z$, se p é um zero de ordem um, isto é, $f'(p) \neq 0$;
- c) $\dot{z} = \frac{z^n}{1 + cz^{n-1}}$, onde $c = \text{Res}\left(\frac{1}{f}, p\right)$, se p é um zero de ordem $n > 1$;
- d) $\dot{z} = \frac{1}{z^n}$, se p é um polo de ordem n .

Notemos que o caso em que f possui uma singularidade essencial em p não é considerado no teorema anterior. Este caso é muito mais complexo, pois em torno de uma singularidade essencial o comportamento de uma função holomorfa é incontrollável. Mais precisamente, se p é uma singularidade essencial de f , o Teorema de Casorati-Weierstrass afirma que arbitrariamente próximo a qualquer número complexo conseguimos encontrar pontos de $f(D(p, R) \setminus \{p\})$, para qualquer $R > 0$. Os artigos [2] e [13] estudam casos particulares de equações $\dot{z} = f(z)$ em que f tem uma singularidade essencial.

3.2 Demonstração do Teorema 3.11

Nesta seção, seguindo o artigo [1], daremos uma prova do Teorema 3.11. A grosso modo, a ideia da demonstração é utilizar o fluxo associado a equação (3.5) para obter uma mudança de variável que nos dê as formas normais do Teorema 3.11. Sem perda de generalidade assumiremos que p é a origem do plano complexo.

Antes de demonstrar o Teorema 3.11, estabeleceremos alguns resultados.

Lema 3.12. *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ dados implicitamente pela equação $z = \varphi_f(h(w), w)$. Então, se h é uma função holomorfa, a expressão $\dot{z} = f(z)$ na variável w é*

$$\dot{w} = \frac{f(w)}{1 + f(w)h'(w)}.$$

Demonstração. Derivando a expressão $z = \varphi_f(h(w), w)$ com relação a t obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{z} = \frac{dz}{dt} &= \frac{d\varphi_f}{dt}(h(w), w) \\ &= \left[\frac{\partial \varphi_f}{\partial t} \quad \frac{\partial \varphi_f}{\partial z} \right]_{(h(w), w)} \begin{bmatrix} \frac{dh}{dt}(w) \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial \varphi_f}{\partial t} \quad \frac{\partial \varphi_f}{\partial z} \right]_{(h(w), w)} \begin{bmatrix} h'(w)\dot{w} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \\ &= \left(h'(w) \frac{\partial \varphi_f}{\partial t}(h(w), w) + \frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(h(w), w) \right) \dot{w}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{z} = \left(h'(w) \frac{\partial \varphi_f}{\partial t}(h(w), w) + \frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(h(w), w) \right) \dot{w}. \quad (3.6)$$

Como $z = \varphi_f(h(w), w)$, então

$$\frac{\partial \varphi_f}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = f(z).$$

Assim, podemos escrever (3.6) como

$$\dot{z} = \left(h'(w)f(z) + \frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(h(w), w) \right) \dot{w}. \quad (3.7)$$

Para calcular $\frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(h(w), w)$, vamos considerar o problema de Cauchy dado pela equação variacional

$$\begin{cases} \dot{u} &= f'(\varphi_f(t, z)), \\ u(0) &= 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(t, z) \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial t}(t, z) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (f(\varphi_f(t, z))) = f'(\varphi_f(t, z)) \frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(t, z) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(0, z) = \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

Logo, $\frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(t, z)$ é solução do problema de Cauchy (3.8).

Por outro lado, a função $\frac{f(\varphi_f(t, z))}{f(z)}$ também é solução do problema (3.8), pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{f(\varphi_f(t, z))}{f(z)} \right) &= \frac{f'(\varphi_f(t, z))}{f(z)} \frac{d\varphi_f}{dt}(t, z) \\ &= f'(\varphi_f(t, z)) \frac{f(\varphi_f(t, z))}{f(z)} \end{aligned}$$

e

$$\frac{f(\varphi_f(0, z))}{f(z)} = \frac{f(z)}{f(z)} = 1.$$

Pela unicidade das soluções

$$\frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(t, z) = \frac{f(\varphi_f(t, z))}{f(z)}.$$

Avaliando em $(t, z) = (h(w), w)$, vem que

$$\frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(h(w), w) = \frac{f(z)}{f(w)}.$$

Logo, voltando em (3.7) obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left(h'(w)f(z) + \frac{\partial \varphi_f}{\partial z}(h(w), w) \right) \dot{w} \\ &= \left(h'(w)f(z) + \frac{f(z)}{f(w)} \right) \dot{w}, \end{aligned}$$

e daí segue que

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{f(z)}{h'(w)f(z) + \frac{f(z)}{f(w)}} \\ &= \frac{f(z)}{\frac{h'(w)f(z)f(w) + f(z)}{f(w)}} \\ &= \frac{f(w)}{h'(w)f(w) + 1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{w} = \frac{f(w)}{1 + f(w)h'(w)},$$

como queríamos provar. □

O Lema 3.12 mostra que com uma escolha apropriada para a função h , podemos reduzir a equação $\dot{z} = f(z)$ à sua forma normal.

Lema 3.13. A equação $z = \varphi_f(t, w)$, associada ao fluxo da equação $\dot{z} = f(z)$ é, em uma vizinhança perfurada da origem, dada implicitamente pela equação

$$\exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right) = \exp \left(\frac{t}{c} \right), \quad \text{onde } c = \text{Res} \left(\frac{1}{f}, 0 \right) \quad (3.9)$$

ou por

$$\int_w^z \frac{1}{f(s)} ds = t, \quad \text{onde } 0 = \text{Res} \left(\frac{1}{f}, 0 \right). \quad (3.10)$$

Note que o caso $\text{Res} \left(\frac{1}{f}, 0 \right) = 0$ também inclui a situação em que $\frac{1}{f}$ é holomorfa em $z = 0$.

Demonstração. Para provar a primeira parte, vamos começar mostrando que ambos os lados da equação (3.9) estão bem definidas em uma vizinhança perfurada da origem.

Considere $\dot{z} = f(z)$. Usando o método das equações diferenciais separáveis e integrando de ambos os lados obtemos:

$$\int_w^z \frac{1}{f(s)} ds = t. \quad (3.11)$$

Note que $\int_w^z \frac{1}{f(s)} ds$, não está bem definida, pois a integral depende do caminho que liga z até w . Em outras palavras, a integral só está bem definida em caminhos que não cruzam o eixo real negativo. Porém, pelo Teorema dos Resíduos, se γ_1 e γ_2 são dois caminhos disjuntos ligando w a z , então ao considerarmos $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, temos

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{f(s)} ds - \int_{\gamma_2} \frac{1}{f(s)} ds = \int_{\gamma} \frac{1}{f(s)} ds = 0,$$

se γ_1 e γ_2 não cruzarem o eixo real negativo ou

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{f(s)} ds - \int_{\gamma_2} \frac{1}{f(s)} ds = \int_{\gamma} \frac{1}{f(s)} ds = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{1}{f}, 0 \right),$$

caso contrário.

Assim, dividindo (3.11) por $c = \text{Res} \left(\frac{1}{f}, 0 \right)$ e tomando a exponencial obtemos

$$\exp \left(\frac{t}{c} \right) = \exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right).$$

Logo,

$$\exp \left(\int_{\gamma_1} \frac{1}{cf(s)} ds - \int_{\gamma_2} \frac{1}{cf(s)} ds \right) = \exp(0) = 1,$$

se γ_1 e γ_2 não cruzarem o eixo real negativo ou

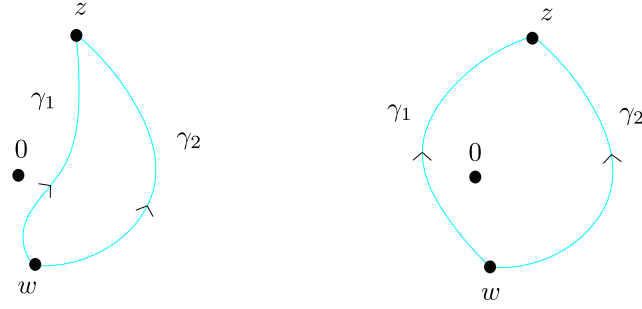


Figura 3.2: Caso em que a integral da expressão (3.11) está definida à esquerda e o caso em que a integral não está definida à direita (imagem retirada e modificada de [4]).

$$\exp \left(\int_{\gamma_1} \frac{1}{cf(s)} ds - \int_{\gamma_2} \frac{1}{cf(s)} ds \right) = \exp(2\pi i) = 1,$$

caso contrário.

Em ambos os casos

$$\exp \left(\int_{\gamma_1} \frac{1}{cf(s)} ds - \int_{\gamma_2} \frac{1}{cf(s)} ds \right) = 1.$$

Portanto,

$$\frac{\exp \left(\int_{\gamma_1} \frac{1}{cf(s)} ds \right)}{\exp \left(\int_{\gamma_2} \frac{1}{cf(s)} ds \right)} = 1$$

e daí segue que

$$\exp \left(\int_{\gamma_1} \frac{1}{cf(s)} ds \right) = \exp \left(\int_{\gamma_2} \frac{1}{cf(s)} ds \right),$$

provando assim que a expressão (3.9) está bem definida.

Para completar a prova da primeira parte, precisamos mostrar que a solução $z = \eta(t, w)$, tal que $\eta(0, w) = w \neq 0$, da equação (3.11) é igual ao fluxo da equação $\dot{z} = f(z)$. Para mostrar isso, usaremos o Teorema da Função Implícita.

Seja

$$F(z, w, t) = \exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right) - \exp \left(\frac{t}{c} \right) = 0.$$

Temos

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z, w, t) = \exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right) \frac{1}{cf(z)} \neq 0,$$

então pelo Teorema da Função implícita, existe $z = \eta(t, w)$ com $\eta(0, w) = w$.

Agora se calcularmos $\frac{\partial}{\partial t} F(\eta(t, w), w, t)$, então

$$\exp \left(\int_w^{\eta(t, w)} \frac{1}{cf(s)} ds \right) \frac{1}{cf(\eta(t, w))} \frac{\partial}{\partial t} \eta(t, w) = \frac{1}{c} \exp \left(\frac{t}{c} \right).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(t, w) = \frac{\exp \left(\frac{t}{c} \right)}{\exp \left(\int_w^{\eta(t, w)} \frac{1}{cf(s)} ds \right)} f(\eta(t, w)) = f(\eta(t, w)).$$

Portanto, $\eta(t, w)$ é o fluxo da equação $\dot{z} = f(z)$.

Na segunda parte, isto é, o caso em que $\text{Res} \left(\frac{1}{f}, 0 \right) = 0$, segue do fato que o lado esquerdo da equação (3.10) está bem definido em uma vizinhança da origem. $\square$

Proposição 3.14. *Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções holomorfas em uma vizinhança perfurada da origem. Considere $c = \text{Res} \left(\frac{1}{f}, 0 \right)$ e assumamos que*

$$H(z) := \frac{f(z) - g(z)}{f(z)g(z)} = \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{f(z)} \quad (3.12)$$

é holomorfa em $z = 0$ e defina $h(z) = \int_0^z H(s) ds$. Então, a transformação $z = \varphi_f(h(w), w)$ que não é necessariamente bijetora transforma a equação $\dot{z} = f(z)$ na equação $\dot{w} = g(w)$.

Contudo em uma vizinhança da origem a transformação pode ser escrita implicitamente como

$$\exp \left(\int_w^z \frac{1}{cg(s)} ds \right) = \exp \left(\int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds \right), \quad (3.13)$$

quando $c \neq 0$ ou

$$\int_w^z \frac{1}{g(s)} ds = \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds, \quad (3.14)$$

quando $c = 0$. Além disso, esta equação pode ser simplificada por

$$\int_0^w \frac{1}{g(s)} ds = \int_0^z \frac{1}{f(s)} ds, \quad (3.15)$$

se $\frac{1}{g(s)}$ e $\frac{1}{f(s)}$ são holomorfas na origem.

Demonstração. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ dados implicitamente pela equação $z = \varphi_f(h(w), w)$.

Como $H(z)$ é uma função holomorfa, então $h(z)$ também é uma função holomorfa. Sendo assim, pelo Lema 3.12 a expressão de $\dot{z} = f(z)$ na variável w é:

$$\dot{w} = \frac{f(w)}{1 + f(w)h'(w)}.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} 1 + f(w)h'(w) &= 1 + f(w) \left(\frac{f(w) - g(w)}{f(w)g(w)} \right) \\ &= 1 + \frac{f(w) - g(w)}{g(w)} \\ &= \frac{f(w)}{g(w)}, \end{aligned}$$

segue então que

$$\dot{w} = \frac{f(w)}{\frac{f(w)}{g(w)}} = g(w).$$

Além disso, pelo Lema 3.13, a equação $z = \varphi_f(h(w), w)$ é dada implicitamente por:

$$\exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right) = \exp \left(\frac{h(w)}{c} \right) = \exp \left(\frac{1}{c} \int_0^w \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds \right).$$

Agora, usando que

$$\int_0^w \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds = \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds + \int_z^w \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds,$$

obtemos

$$\exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right) = \exp \left(\frac{1}{c} \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds + \frac{1}{c} \int_z^w \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds \right),$$

daí segue que

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{1}{c} \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds \right) &= \frac{\exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right)}{\exp \left(\frac{1}{c} \int_z^w \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds \right)} \\ &= \frac{\exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right)}{\exp \left(\int_z^w \frac{1}{cg(s)} ds \right) \exp \left(- \int_z^w \frac{1}{cf(s)} ds \right)} \\ &= \frac{\exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right)}{\exp \left(- \int_w^z \frac{1}{cg(s)} ds \right) \exp \left(\int_w^z \frac{1}{cf(s)} ds \right)} \\ &= \exp \left(\int_w^z \frac{1}{cg(s)} ds \right). \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos que

$$\exp \left(\int_w^z \frac{1}{cg(s)} ds \right) = \exp \left(\frac{1}{c} \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{cf(s)} \right) ds \right),$$

como queríamos.

Quando $\text{Res}\left(\frac{1}{f}, 0\right) = 0$, então pela equação (3.10) do Lema 3.13, $z = \varphi_f(t, w)$ é dado implicitamente por

$$\int_w^z \frac{1}{f(s)} ds = t.$$

Assim, $z = \varphi_f(h(w), w)$ pode ser escrito como

$$\int_w^z \frac{1}{f(s)} ds = h(w) = \int_0^w \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds.$$

Dado que

$$\int_0^w \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds = \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds + \int_z^w \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds,$$

então

$$\begin{aligned} \int_w^z \frac{1}{f(s)} ds &= \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds + \int_z^w \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds \\ &= \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds - \int_w^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds \\ &= \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds - \int_w^z \frac{1}{g(s)} ds + \int_w^z \frac{1}{f(s)} ds, \end{aligned}$$

de onde vem que

$$\int_z^w \frac{1}{g(s)} ds = \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds.$$

Por fim, se $\frac{1}{g(z)}$ e $\frac{1}{f(z)}$ são holomorfas em $z = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \int_0^z \left(\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{f(s)} \right) ds &= \int_w^z \frac{1}{g(s)} ds \\ &= \int_w^0 \frac{1}{g(s)} ds + \int_0^z \frac{1}{g(s)} ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^z \frac{1}{g(s)} ds - \int_0^z \frac{1}{f(s)} ds = - \int_0^w \frac{1}{g(s)} ds + \int_0^z \frac{1}{g(s)} ds.$$

Portanto,

$$\int_0^w \frac{1}{g(s)} ds = \int_0^z \frac{1}{f(s)} ds.$$

□

Corolário 3.15. *Sob as hipóteses da proposição anterior, seja $w = W(z)$ uma solução em uma vizinhança perfurada da origem da equação (3.13) se $c \neq 0$ ou da equação (3.14), se $c = 0$, satisfazendo que $W(z)$ tende a 0 quando z tende a 0. Se essa solução pode ser estendida para uma aplicação conforme em uma vizinhança da origem, então as equações diferenciais*

$$\frac{dz}{dt} = f(z) \quad e \quad \frac{dz}{dt} = g(z)$$

são conformemente conjugadas próximo a origem.

Demonstração do Teorema 3.11. Inicialmente iremos demonstrar os casos (a) e (d), ou seja, 0 é um ponto regular ($n = 0$) ou 0 é um polo de ordem n . Assim, tomemos $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Para esses dois casos, $f(z) = \frac{1}{z^n G(z)}$ com $G(0) = g_0 \neq 0$. Seja $g(z) = \frac{1}{g_0 z^n}$, temos então

$$H(z) = \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{f(z)} = z^n (g_0 - G(z))$$

é uma função holomorfa em $z = 0$, daí segue que $h(z) = \int_0^z H(s) ds$ é holomorfa. Além disso, as funções $\frac{1}{f}$ e $\frac{1}{g}$ são holomorfas na origem. Assim, usando a Proposição 3.14, a transformação $z = \varphi_f(h(w), w)$ é dada implicitamente por:

$$\int_0^w g_0 s^n ds = \int_0^s s^n G(s) ds.$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^w g_0 s^n ds &= \left[g_0 \frac{s^{n+1}}{n+1} \right]_0^w \\ &= g_0 \frac{w^{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

então

$$\int_0^z s^n G(s) ds = g_0 \frac{w^{n+1}}{n+1}.$$

Logo,

$$w = W(z) := \sqrt[n+1]{\frac{(n+1) \int_0^z s^n G(s) ds}{g_0}} = z \sqrt[n+1]{\frac{(n+1) \int_0^z s^n G(s) ds}{g_0 z^{n+1}}}.$$

Note que $W(0) = 0$ e $W'(0) \neq 0$. Então $w = W(z)$ é uma mudança de variável conforme entre $\dot{z} = \frac{1}{z^n G(z)}$ e $\dot{w} = \frac{1}{g_0 w^n}$. A mudança de variável $\tilde{w} = \alpha w$ com $\alpha = g_0$, se $n = 0$ ou $\alpha = \sqrt[n+1]{g_0}$, se $n \neq 0$ finaliza a demonstração dos casos a) e d).

b) Neste caso, 0 é um zero simples da função f , assim podemos escrever $f(z) = \frac{z}{G(z)}$, onde $G(0) = g_0 \neq 0$. Seja $g(z) = \frac{z}{g_0}$, a função

$$H(z) = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{g_0 - G(z)}{z}$$

é uma função holomorfa em $z = 0$, de modo que as hipóteses da proposição 3.14 são satisfeitas. Além disso, $c = \text{Res}(1/f, 0) = g_0$. Assim, a transformação $\varphi_f(h(w), w)$ é dado implicitamente por

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_w^z \frac{1}{s} ds\right) &= \exp\left(\int_w^z \frac{1}{cs/g_0} ds\right) \\ &= \exp\left(\int_w^z \frac{1}{cg(s)} ds\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{c} \int_0^z \left(\frac{g_0}{s} - \frac{G(s)}{s}\right) ds\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{g_0} \int_0^z \frac{g_0 - G(s)}{s} ds\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

De (3.16), obtemos que

$$\exp\left(\frac{1}{g_0} \int_0^z \frac{g_0 - G(s)}{s} ds\right) = \exp(\log(z) - \log(w)) = \frac{z}{w}.$$

Logo,

$$w = W(z) = z \exp\left(\int_0^z \frac{G(s) - g_0}{g_0 s} ds\right)$$

é uma solução da equação (3.16) e é uma aplicação conforme, já que $W'(z) \neq 0$. Temos ainda que $W(0) = 0$.

Logo, o Corolário 3.15 nos garante que $W(z)$ é uma conjugação conforme entre $\dot{z} = \frac{z}{G(z)}$ e $\dot{w} = \frac{w}{g_0}$.

Como $f'(z) = \frac{G(z) - zG'(z)}{(G(z))^2}$, então $f'(0) = \frac{1}{g_0}$ de onde segue que $\dot{w} = f'(0)w$, como queríamos.

c) Por fim, 0 é um zero de ordem n da função f , sendo assim podemos escrever $f(z) = \frac{z^n}{G(z)}$, onde $n \geq 2$ e $G(0) = g_0 \neq 0$.

Como $G(0) \neq 0$, decorre que

$$\begin{aligned} G(z) &= g_0 + z^m g(z) = g_0 + z^m (\widetilde{g}_0 + \widetilde{g}_1 z + \cdots) \\ &= g_0 + g_m z^m + O(z^{m+1}). \end{aligned}$$

Se fizermos $z = z_1(1 + az_1^m)$, então

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{z}_1(1 + az_1^m) + \dot{z}_1 am z_1^{m-1} \\ &= \dot{z}_1(1 + a(m+1)z_1^m). \end{aligned}$$

Com essa substituição, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\dot{z}}{(1 + a(m+1)z_1^m)} \\ &= \frac{z_n}{(g_0 + g_m z^m + O(z^{m+1}))(1 + a(m+1)z_1^m)} \\ &= \frac{(z_1(1 + az_1^m))^n}{(g_0 + g_m z_1^m(1 + az_1^m)^m + O(z^{m+1}))(1 + a(m+1)z_1^m)} \\ &= \frac{z_1^n}{(g_0 + g_m z_1^m(1 + az_1^m)^m + O(z^{m+1}))(1 + a(m+1)z_1^m)(1 + az_1^m)^{-n}}. \end{aligned}$$

Usando que em uma vizinhança da origem vale $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (az_1^m)^k = (1 + az_1^m)^{-n}$, então

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{z_1^n}{(g_0 + g_m z_1^m (1 + az_1^m)^m + O(z^{m+1}))(1 + a(m+1)z_1^m)(1 - naz_1^m + O(z^{m+1}))} \\ &= \frac{z_1^n}{g_0 + g_m z_1^m + O(z^{m+1}) + g_0 a(m+1)z_1^m - g_0 n a z_1^m} \\ &= \frac{z_1^m}{g_0 + z_1^m((m+1-n)ag_0 + g_m) + O(z^{m+1})}. \end{aligned}$$

Dado que $1 \leq m \leq n-2$, podemos escolher a tal que $(m+1-n)ag_0 + g_m = 0$. Logo, vamos assumir que $f(z) = \frac{z^n}{g_0 + g_{n-1}z^{n-1} + \tilde{G}(z)}$, onde $\frac{\tilde{G}(z)}{z^n}$ é uma função analítica na origem.

Considere $g(z) = \frac{z^n}{g_0 + g_{n-1}z^{n-1}}$. Como nos casos anteriores,

$$H(z) = \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{f(z)} = \frac{\tilde{G}(z)}{z^n}$$

é uma função analítica na origem.

Começando com o caso $g_{n+1} \neq 0$. A transformação $z = \varphi_f(h(w), w)$ é dada implicitamente por

$$\exp\left(\int_w^z \frac{g_0 + g_{n-1}s^{n-1}}{g_{n-1}s^n} ds\right) = \exp\left(\int_0^z \frac{-\tilde{G}(s)}{g_{n-1}s^n} ds\right). \quad (3.17)$$

A equação (3.17) está bem definida em uma vizinhança perfurada da origem N , porém para tomar o logaritmo, vamos considerar a restrição de N sem o eixo real negativo. Temos então

$$\int_w^z \frac{g_0 + g_{n-1}s^{n-1}}{g_{n-1}s^n} ds = \int_0^z \frac{-\tilde{G}(s)}{g_{n-1}s^n} ds. \quad (3.18)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.18) por g_{n-1} e calculando a integral do lado esquerdo, obtemos

$$g_0 \left[\frac{1}{z^{n-1}} \right]_w^z + g_{n-1} [\log s]_w^z = \int_0^z \frac{-\tilde{G}(s)}{s^n} ds,$$

logo,

$$\frac{g_0}{1-n} \left[\frac{1}{z^{n-1}} - \frac{1}{w^{n-1}} \right] + g_{n-1} \log \frac{z}{w} + \int_0^z \frac{\tilde{G}(s)}{s^n} ds = 0. \quad (3.19)$$

Note que se $g_{n-1} = 0$, usando a expressão (3.14) da Proposição 3.14, também iríamos chegar na equação (3.19). De fato,

$$\int_w^z \frac{g_0}{s^n} ds = \int_0^z \frac{-\tilde{G}(s)}{s^n} ds,$$

calculando a integral do lado esquerdo obtemos que

$$\frac{g_0}{1-n} \left[\frac{1}{z^{n-1}} - \frac{1}{w^{n-1}} \right] + \int_0^z \frac{\tilde{G}(s)}{s^n} ds = 0.$$

Logo, prosseguiremos com os dois casos. Multiplicando (3.19) por z^{n-1} e introduzindo a variável $u = \frac{z}{w}$, obtemos

$$F(u, z) = \frac{g_0}{1-n}[1 - u^{n-1}] + g_{n-1}z^{n-1} \log u + z^{n-1} \int_0^z \frac{\tilde{G}(s)}{s^n} ds = 0. \quad (3.20)$$

Temos então que $F(1, 0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial u}(1, 0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, em uma vizinhança de $(u, v) = (1, 0)$, existe uma função analítica $u = U(z)$ tal que $F(U(z), z) = 0$ e $U(0) = 1$.

Assim, $w = W(z) := \frac{z}{U(z)}$ é uma aplicação conforme que é solução de (3.18) e $w(0) = 0$. Portanto, o Corolário 3.15 nos garante que $W(z)$ é uma mudança de variável conforme entre $\dot{z} = \frac{z^n}{g_0 + g_{n-1}z^{n-1} + \tilde{G}(z)}$ e $\dot{w} = \frac{w^n}{g_0 + g_{n-1}w^{n-1}}$.

Para finalizar a demonstração, considere a mudança de variável $\tilde{z} = \alpha w$, em que $\alpha = \sqrt[n-1]{g_0}$, então

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= \alpha \frac{w^n}{g_0 + g_{n-1}w^{n-1}} = \frac{\alpha^{n-1}\tilde{z}^n}{g_0 + g_{n-1}\alpha^{1-n}\tilde{z}^{n-1}} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}\tilde{z}^n}{g_0 + g_{n-1}\alpha^{1-n}\tilde{z}^{n-1}} = \frac{g_0\tilde{z}^n}{g_0(1 + g_{n-1}\tilde{z}^{n-1})} \\ &= \frac{\tilde{z}^n}{1 + g_{n-1}\tilde{z}^{n-1}}. \end{aligned}$$

Portanto, as equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{\tilde{z}} = \frac{\tilde{z}^n}{1 + g_{n-1}\tilde{z}^{n-1}}$ são conformemente conjugadas próximas a origem. $\square$

Observação 3.16. Outra demonstração do Teorema 3.11 pode ser encontrada em [2]. As afirmações a), b) e c) também são encontradas no artigo [10], já os artigos [19, 20] mostram que se $z = 0$ é um polo de ordem n , então o retrato de fase local é topologicamente equivalente a uma sela.

3.3 Consequências do Teorema 3.11

Descrevemos nesta seção os retratos de fase das equações que aparecem no Teorema 3.11. Além disso, apresentaremos algumas de suas consequências.

Exemplo 3.17. Consideremos a equação $\dot{z} = 1$. Temos então que as órbitas desta equação são semirretas paralelas percorridas com velocidade constante. O retrato de fase local é mostrado na Figura 3.3.

Exemplo 3.18. Tomemos agora a equação $\dot{z} = (a + ib)z$. Esta equação corresponde ao caso linear e a solução é dada por $\varphi(t, z) = ze^{(a+ib)t}$.

Temos 3 possibilidades: $a = 0$ e $b \neq 0$, $a \neq 0$ e $b = 0$ ou $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Se $a = 0$ e $b \neq 0$, $\varphi(t, z) = z(\cos(bt) + i \sin(bt))$. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, $\varphi(t, z) = ze^{at}$. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, $\varphi(t, z) = ze^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))$. O retrato de fase local é mostrado na Figura 3.4.

Exemplo 3.19. Consideremos a equação $\dot{z} = z^n$, onde $n \geq 2$.

Fazendo a mudança de coordenadas polar $z = re^{i\theta}$. Temos

$$\dot{z} = \dot{r}e^{i\theta} + rie^{i\theta}\dot{\theta}.$$

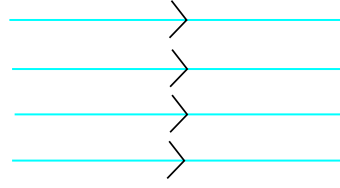


Figura 3.3: Retrato de fase da equação $\dot{z} = 1$.

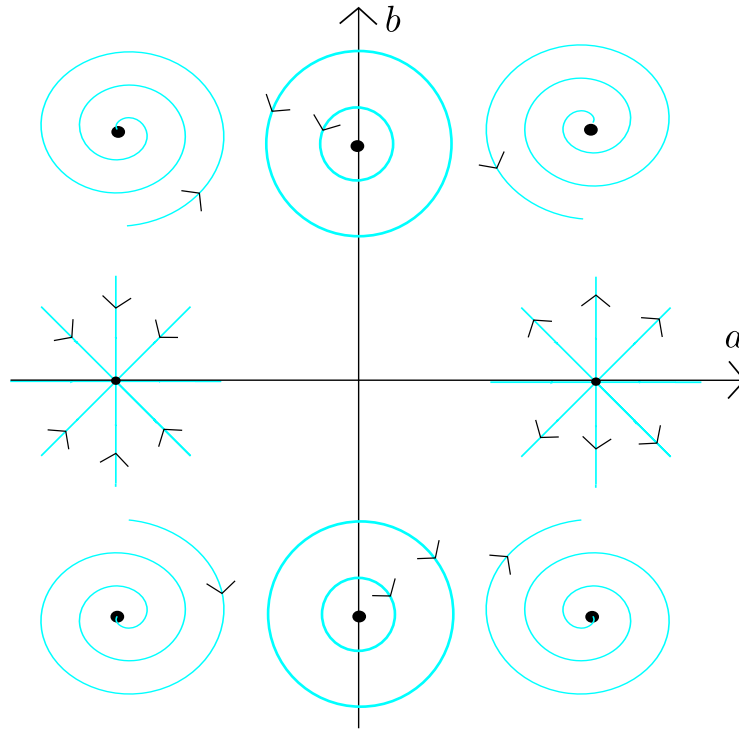


Figura 3.4: Retrato de fase local da equação $\dot{z} = (a + ib)z$.

Logo,

$$\dot{r}e^{i\theta} + r ie^{i\theta} \dot{\theta} = r^n e^{ni\theta}.$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por $e^{i\theta}$, obtemos que

$$\dot{r} + ir\dot{\theta} = r^n e^{(n-1)i\theta} = r^n (\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta),$$

daí segue que

$$\begin{cases} \dot{r} = r^n \cos((n-1)\theta) \\ \dot{\theta} = r^{n-1} \sin((n-1)\theta). \end{cases}$$

Então,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^n \cos((n-1)\theta)}{r^{n-1} \sin((n-1)\theta)} = r \cotg((n-1)\theta),$$

usando o método de separação de variáveis e integrando de ambos os lados obtemos

$$\int \frac{dr}{r} = \int \cotg((n-1)\theta) d\theta,$$

o que implica que

$$\log r = \frac{1}{n-1} \log |\sin((n-1)\theta)| + K.$$

Assim, $r = C|\sin(n-1)\theta|^{\frac{1}{n-1}}$, de onde concluímos que em uma vizinhança da origem o retrato de fase é a união de $2(n-1)$ setores elípticos.

Note que $r(\theta) = r(\pi - \theta)$, então as órbitas da equação $\dot{z} = z^n$ são simétricas em relação a semirreta $\theta = \pi/2$, de onde segue que as órbitas da equação são simétricas em relação ao eixo y . Note ainda que as direções $\frac{j\pi}{n-1}$, onde $j = 1, \dots, 2(n-1)$ são invariantes pelo fluxo da equação $\dot{z} = z^n$. Veja a Figura 3.5.

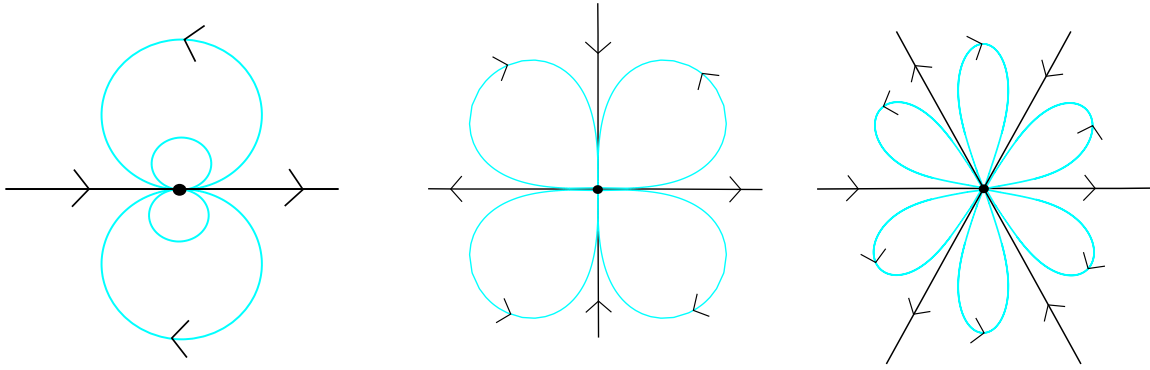


Figura 3.5: Retrato de fase das equações $\dot{z} = z^2$, $\dot{z} = z^3$ e $\dot{z} = z^4$.

Exemplo 3.20. Seja $\dot{z} = \frac{z^n}{1 + cz^{n-1}}$, onde $c \neq 0$ e $n \geq 2$.

Usando a mudança de variável $w = c^{-1}z^{1-n}$, obtemos que

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\lambda(1-n)}{1 + 1/w},$$

onde $\lambda = 1/c$. Usando o método de separação de variáveis temos que

$$\lambda(1-n)t + K = w + \log w, \quad (3.21)$$

tomando a exponencial de ambos os lados de (3.21), obtemos que

$$K_1 e^{\lambda(1-n)t} = we^w.$$

Temos três possibilidades dependendo de λ : $\Re(\lambda) = 0$, $\Re(\lambda) \neq 0$ e $\Im(\lambda) = 0$ e $\Re(\lambda)\Im(\lambda) \neq 0$.

Se $\Re(\lambda) = 0$, então as coordenadas de uma solução $w = x + iy$ satisfazem a equação $x^2 + y^2 = Ce^{-2x}$.

Se $\Re(\lambda) \neq 0$, $w = x + iy$ e $\lambda(1 - n) = a + ib$, então

$$we^w = Ke^{(a+ib)t}, \quad (3.22)$$

derivando (3.22) em relação a t , vem que

$$\dot{w}e^w(1 + w) = K(a + ib)e^{(a+ib)t}, \quad (3.23)$$

logo de (3.22) e (3.23), concluímos que

$$\dot{w}(1 + w) = (a + ib)w, \quad (3.24)$$

ou equivalentemente

$$\dot{w} = \frac{(a + ib)w(1 + \bar{w})}{|1 + w|^2}. \quad (3.25)$$

Uma vez que $|1 + w|^2$ é uma função positiva, segue que o sistema

$$\dot{w} = (a + ib)w(1 + \bar{w}) \quad (3.26)$$

tem o mesmo retrato de fase que o sistema (3.24). Além disso, $w = 0$ e $w = -1$ são pontos de equilíbrio de (3.26), $w = 0$ é um nó se $b = 0$ ou um foco se $b \neq 0$ e $w = -1$ é uma sela.

Após voltarmos a variável inicial, as trajetórias $\varphi(t)$ que tendem a ∞ quando $t \rightarrow \pm\infty$, tornam-se trajetórias homoclínicas com os conjuntos α e ω -limite sendo a origem. Note que, a equação $\dot{z} = \frac{z^n}{1 + cz^{n-1}}$ possui $n - 1$ pontos singulares, que são polos de ordem 1. Além do mais, veremos na Seção 3.4 que próximo ao infinito as equações $\dot{z} = kz$ e $\dot{z} = \frac{z^n}{1 + cz^{n-1}}$ são conformemente conjugadas, sendo assim podemos concluir que o retrato de fase próximo a origem é a união de $2(n - 1)$ setores elípticos. Veja a Figura 3.6.

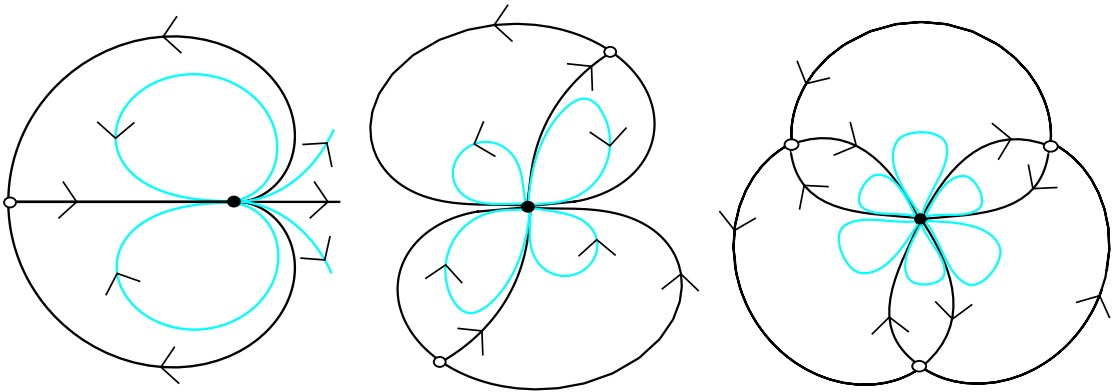


Figura 3.6: Retrato de fase das equações $\dot{z} = \frac{z^2}{1+z}$, $\dot{z} = \frac{z^3}{1+(1+i)z^2}$ e $\dot{z} = \frac{z^4}{1+iz^3}$ em uma vizinhança da origem.

Exemplo 3.21. Por fim, consideramos a equação $\dot{z} = \frac{1}{z^n}$, onde $n \geq 1$.

Fazendo a mudança de coordenadas $z = re^{i\theta}$, obtemos que

$$\dot{r}e^{i\theta} + rie^{i\theta}\dot{\theta} = \frac{1}{r^n e^{ni\theta}} = r^{-n}e^{-ni\theta},$$

de onde vem que

$$\dot{r} = r^{-n} \cos((-n-1)\theta) \quad e \quad \dot{\theta} = r^{-n-1} \sin((-n-1)\theta).$$

Como $\cos((n+1)\theta) = \cos((-n-1)\theta)$ e $-\sin((n+1)\theta) = \sin((-n-1)\theta)$, então

$$\begin{cases} \dot{r} = r^{-n} \cos((n+1)\theta), \\ \dot{\theta} = r^{-n-1} \sin((n+1)\theta), \end{cases}$$

daí segue que

$$\frac{dr}{d\theta} = r \cotg((n+1)\theta),$$

separando as variáveis e integrando obtemos que

$$\log r = -\frac{1}{n+1} \ln |\sin((n+1)\theta)| + K.$$

Logo,

$$r = \frac{C}{|\sin((n+1)\theta)|^{1/(n+1)}}.$$

Portanto, o retrato de fase em uma vizinhança perfurada da origem é a união de $2(n+1)$ setores hiperbólicos.

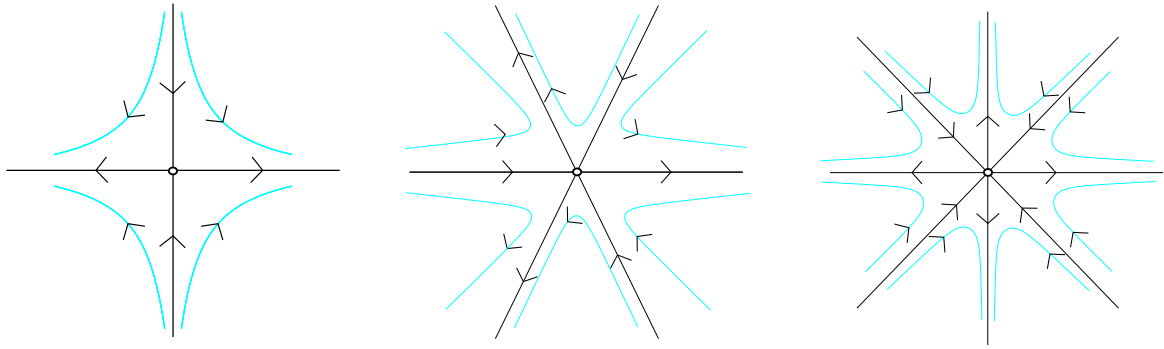


Figura 3.7: Retrato de fase das equações $\dot{z} = \frac{1}{z}$, $\dot{z} = \frac{1}{z^2}$ e $\dot{z} = \frac{1}{z^3}$.

Temos que $r(\theta) = r(\pi - \theta)$, então as órbitas da equação são simétricas em relação ao eixo imaginário. Além disso, as direções $\frac{j\pi}{n+1}$, onde $j = 1, \dots, 2(n+1)$ são invariantes pelo fluxo da equação $\dot{z} = \frac{1}{z^n}$. Veja a Figura 3.7.

Utilizando os exemplos anteriores e o Teorema 3.11, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.22. *Considere a equação $\dot{z} = f(z)$, onde f é uma função holomorfa em uma vizinhança perfurada da origem. Temos que*

a) *Se 0 é um zero simples da função f , então 0 é:*

- i) um foco estável (respectivamente, instável), se $\Re(f'(0))\Im(f'(0)) \neq 0$ e $\Re(f'(0)) < 0$ (respectivamente, $\Re(f'(0)) > 0$).
- ii) um nó estável (respectivamente, instável), se $\Re(f'(0)) < 0$ e $\Im(f'(0)) = 0$ (respectivamente, $\Re(f'(0)) > 0$).
- iii) um centro, se $\Re(f'(0)) = 0$ e $\Im(f'(0)) \neq 0$.
- b) Se 0 é um zero de ordem $n \geq 2$, então o retrato de fase local em uma vizinhança da origem é a união de $2(n-1)$ setores elípticos.
- c) Se 0 é um polo de ordem $n \geq 1$, então o retrato de fase local em uma vizinhança perfurada da origem é a união de $2(n+1)$ setores hiperbólicos.

Observação 3.23. Um problema muito conhecido da Teoria de Equações Diferenciais é o Problema do Centro-Foco, o qual consiste em obter condições necessárias e suficientes que determinam quando um ponto de equilíbrio é um centro ou um foco. Para sistemas holomorfos este problema é facilmente resolvido.

A seguir, estudaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio de equações polinomiais que possuem todas as raízes simples. Para isso, utilizaremos o resultado:

Proposição 3.24 (Fórmula de Euler-Jacobi). *Seja f um polinômio de grau n com todos as raízes simples. Então, para qualquer polinômio g tal que $\deg(g) < \deg(f') = n-1$, vale*

$$\sum_{k=1}^n \frac{g(w_k)}{f'(w_k)} = 0,$$

onde $f(w_k) = 0$ para $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. Considere a função $h : \mathbb{C} \setminus \{w_1, \dots, w_n\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $h(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$.

Tome γ uma circunferência de raio r tal que todos os zeros de f estão no interior de γ . Pelo Teorema dos Resíduos

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(h(z), w_k).$$

Se w_k é um zero de f , então $\text{Res}(h(z), w_k) = \frac{g(w_k)}{f'(w_k)}$. De fato, como por hipótese w_k é um zero simples da função f , então $f(z) = (z - w_k)f_1(z)$, onde $f_1(w_k) \neq 0$. Temos que

$$\text{Res}(h(z), w_k) = \lim_{z \rightarrow w_k} (z - w_k) \frac{g(z)}{(z - w_k)f_1(z)} = \frac{g(w_k)}{f_1(w_k)}.$$

Dado que $f'(z) = f_1(z) + (z - w_k)f_1'(z)$, segue que $f'(w_k) = f_1(w_k)$. Logo, $\text{Res}(h(z), w_k) = \frac{g(w_k)}{f'(w_k)}$.

Portanto,

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{g(w_k)}{f'(w_k)}.$$

Por outro lado,

$$\left| \int_{|z|=r} \frac{g(z)}{f(z)} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{g(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} rie^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|g(re^{i\theta})|}{|f(re^{i\theta})|} d\theta.$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$, já que $\deg(g) + 1 < \deg(f)$, a expressão acima tende a zero. Assim,

$$\sum_{k=1}^n \frac{g(w_k)}{f'(w_k)} = 0.$$

□

Proposição 3.25. *Seja $\dot{z} = f(z)$, onde $f(z) = k(z - z_1) \cdots (z - z_m)$ e $z_i \neq z_j$ com $i \neq j$. Então:*

- a) *Se $z_1, \dots, z_{n-1}$ são centros, então z_n também é um centro;*
- b) *Se $z_1, \dots, z_{n-1}$ são nós, então z_n também é um nó;*
- c) *Se nem todos os pontos são centros, então ao menos dois tem estabilidades diferentes.*

Demonstração. a) Suponhamos que $z_1, \dots, z_{n-1}$ são centros, então pelo Corolário 3.22 $f'(z_k) = ib_k$, onde b_k é um número real não nulo, para $k = 1, \dots, n-1$.

Considerando $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $g(z) = 1$. Temos que $\deg(g) < \deg(f') - 1$. Aplicando a Fórmula de Euler-Jacobi obtemos

$$0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(z_k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{ib_k} + \frac{1}{f'(z_n)} = i\beta + \frac{1}{f'(z_n)}.$$

Logo,

$$0 = i\beta + \frac{1}{f'(z_n)},$$

o que implica que $f'(z_n) = \frac{-i}{\beta}$. Portanto, z_n também é um centro.

b) Suponhamos agora que $z_1, \dots, z_{n-1}$ são nós. Considerando $g(z) = 1$ e aplicando a Fórmula de Euler-Jacobi, segue que

$$0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(z_k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{f'(z_n)} = \alpha + \frac{1}{f'(z_n)}.$$

Logo, $f'(z_n) = -\frac{1}{\alpha}$ e daí segue que z_n também é um nó.

c) Aplicando a Fórmula de Euler-Jacobi, com $g(z) = 1$. Se $k = 1, \dots, n$ denotemos $f'(z_k) = a_k + ib_k$. Temos

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(z_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k - ib_k}{a_k^2 + b_k^2} = 0.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k^2 + b_k^2} = 0.$$

Como nem todos os pontos de equilíbrio são centros, então nem todos a_k tem mesmo sinal. Portanto, ao menos dois tem estabilidade diferente. □

Terminamos esta seção com um exemplo para ilustrar a proposição anterior.

Exemplo 3.26. Considere a equação $\dot{z} = c(z - c_0)(z - c_1)(z - c_2)$ com $c_i \neq c_j$, para $i \neq j$ e $i, j = 0, 1, 2$. As seguintes possibilidades não são realizáveis:

1. 2 centros e 1 nó/foco ;
2. 2 nós e 1 centro/foco.

3.4 Dinâmica no Infinito

Nesta seção, utilizaremos o Teorema 3.11 e a compactificação de Poincaré para estudar o comportamento das órbitas da equação $\dot{z} = \frac{P(z)}{Q(z)}$ em uma vizinhança do infinito, onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios.

Proposição 3.27. *Seja $f(z)$ uma função racional, isto é, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, onde $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ e $Q(z) = b_m z^m + \dots + b_0$ são polinômios de grau n e m , respectivamente. Se c é resíduo da função $g(z) = \frac{-Q(\frac{1}{z})}{z^2 P(\frac{1}{z})}$ em $z = 0$, então existe $R > 0$ tal que a equação $\dot{z} = f(z)$ é, em $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$, conformemente conjugada a:*

$$a) \quad \dot{z} = \left(\frac{1}{z}\right)^{m-n} + c\left(\frac{1}{z}\right)^{2(m-n)+1}, \text{ se } n < m + 1,$$

$$b) \quad \dot{z} = \left(\frac{a_n}{b_m}\right)z, \text{ se } n = m + 1,$$

$$c) \quad \dot{z} = z^2, \text{ se } n = m + 2,$$

$$d) \quad \dot{z} = z^{n-m}, \text{ se } n > m + 2.$$

Demonstração. Consideremos a equação $\dot{z} = f(z)$, onde f é uma função racional, isto é,

$$\dot{z} = f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0}, \text{ com } a_n b_m \neq 0. \quad (3.27)$$

Fazendo a substituição $w = \frac{1}{z}$, temos que $\dot{w} = -w^2 \dot{z}$. Logo,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -w^2 \frac{P(\frac{1}{w})}{Q(\frac{1}{w})} \\ &= -w^2 \frac{a_n \left(\frac{1}{w}\right)^n + \dots + a_0}{b_m \left(\frac{1}{w}\right)^m + \dots + b_0} = -w^{2+m-n} \frac{a_n + \dots + a_0 w^n}{b_m + \dots + b_0 w^m} \\ &= -w^{2+m-n} \left(\frac{a_n}{b_m} + O(w) \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como a dinâmica da equação (3.28) em uma vizinhança do $w = 0$ representa a dinâmica da equação $\dot{z} = f(z)$ em uma vizinhança de $z = \infty$, então aplicando o Teorema 3.11 em uma vizinhança de $w = 0$, digamos $D(0, \epsilon_0)$, seguirá que a forma normal da equação (3.28) é dada por:

$$a) \quad \dot{w} = w^{2+m-n} + c w^{2(2+m-n)}, \text{ se } n < m + 1,$$

$$b) \quad \dot{w} = \left(\frac{a_n}{b_m}\right)w, \text{ se } n = m + 1,$$

$$c) \quad \dot{w} = 1 \text{ se } n = m + 2,$$

$$d) \quad \dot{w} = w^{-n+m+2}, \text{ se } n > m + 2,$$

onde c é o resíduo na origem da função $g(w) = -\frac{Q(\frac{1}{w})}{w^2 P(\frac{1}{w})}$.

Agora, para voltar a variável original, vamos aplicar a mudança de variável inversa $\tilde{z} = \frac{1}{w}$. Temos então que $\dot{\tilde{z}} = -\tilde{z}^2 \dot{w}$ e, conseqüentemente, em uma vizinhança do infinito, mais precisamente em $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$, onde $R = \frac{1}{\epsilon_0}$, a forma normal da equação (3.27) é:

- a) $\dot{\tilde{z}} = -(\tilde{z})^{n-m} - c(\tilde{z})^{2(n-m)-1}$, se $n < m + 1$,
- b) $\dot{\tilde{z}} = \left(\frac{a_n}{b_m}\right)\tilde{z}$, se $n = m + 1$,
- c) $\dot{\tilde{z}} = -\tilde{z}^2$, se $n = m + 2$,
- d) $\dot{\tilde{z}} = -\tilde{z}^{n-m}$, se $n > m + 2$.

Para finalizar, usando uma mudança de variável linear $z = \lambda\tilde{z}$ em que $\lambda = (-1)^{\frac{1}{m-n+1}}$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ ou $\lambda = (-1)^{\frac{1}{1-m+n}}$ dependendo dos casos a), b), c) ou d), obtemos as formas normais indicadas na proposição. □

Para encerrar esta seção, vamos particularizar a Proposição 3.27 para uma família de sistemas racionais para os quais estudaremos o retrato de fase.

Corolário 3.28. *Considere a equação (3.27), onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios. O retrato de fase em uma vizinhança do infinito é conformemente conjugada ao retrato de fase em uma vizinhança do infinito a uma das seguintes formas normais:*

- a) $\dot{z} = 1$, se $\deg(P) = 0$ e $\deg(Q) = 0$. O retrato de fase topológico em uma vizinhança do infinito é dada pela Figura 3.8.
- b) $\dot{z} = kz$, se $\deg(P) = 1$ e $\deg(Q) = 0$ ou $\deg(P) = 2$ e $\deg(Q) = 1$. O retrato de fase topológico em uma vizinhança do infinito é dada pelas Figuras i)-3.9, ii)-3.9 ou iii)-3.9, dependendo se $k = a$, $k = ib$ ou $k = a + ib$, respectivamente.
- c) $\dot{z} = z^2$, se $\deg(P) = 2$ e $\deg(Q) = 0$. O retrato de fase topológico é dado pela Figura 3.10.
- d) $\dot{z} = z^3$, se $\deg(P) = 3$ e $\deg(Q) = 0$. O retrato de fase topológico é dado pela Figura 3.11.
- e) $\dot{z} = 1 + \frac{c}{z}$, se $\deg(P) = 1$ e $\deg(Q) = 1$. O retrato de fase topológico é dado pela Figura 3.8.
- f) $\dot{z} = \frac{1}{z} + \frac{c}{z^3}$, se $\deg(P) = 0$ e $\deg(Q) = 1$ ou $\deg(P) = 1$ e $\deg(Q) = 2$. O retrato de fase topológico é dado pela Figura 3.12.
- g) $\dot{z} = \frac{1}{z^2}$, se $\deg(P) = 0$ e $\deg(Q) = 2$. O retrato de fase topológico é dado pela Figura 3.13.

Demonstração. Para verificar que o retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{P(z)}{Q(z)}$ é conformemente conjugado em uma vizinhança do infinito as equações dados no corolário acima, basta aplicar a Proposição 3.27. Sendo assim, iremos verificar o caso a) os demais casos são verificados de maneira análoga.

a) Se $\deg(P) = 0$ e $\deg(Q) = 0$, então aplicando o item a) da Proposição 3.27, obtemos que a equação (3.27) em uma vizinhança do infinito é conformemente conjugada a equação $\dot{z} = 1 + c\left(\frac{1}{z}\right)$, onde c é o resíduo da função $g(z) = \frac{-Q(1/z)}{z^2P(1/z)}$ em $z = 0$.

Como $c = 0$, segue que as equações (3.27) e $\dot{z} = 1$ são conformemente conjugadas em uma vizinhança do infinito.

Agora, utilizando a compactificação de Poincaré, vamos esboçar os retratos de fase em uma vizinhança do infinito das equações dadas, considerando cada caso:

a) A equação $\dot{z} = 1$ em coordenadas cartesianas é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1, \\ \dot{y} &= 0.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Seja X o campo de vetores associado ao sistema (3.29). A expressão de $p(X)$ na carta local U_1 é dada por

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -u, \\ \dot{v} &= -v.\end{aligned}$$

Assim, a origem de U_1 é o único ponto singular. Uma vez que a matriz Jacobiana do campo $p(X)$ na carta U_1 é

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

então segue que a origem da carta local U_1 é um nó atrator. Dado que o grau do sistema é par, a origem da carta local V_1 é um nó repulsor.

A expressão de $p(X)$ na carta local U_2 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -1, \\ \dot{v} &= -v.\end{aligned}$$

Logo, não há pontos singulares na carta local U_2 e daí segue que também não há pontos singulares na carta local V_2 .

Na Figura 3.8 é dado o retrato de fase topológico em uma vizinhança do infinito.

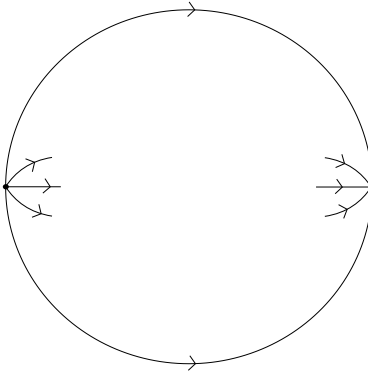


Figura 3.8: Retrato de fase da equação $\dot{z} = 1$ em uma vizinhança do infinito.

b) Neste caso, temos três possibilidades que dependem do valor de $k \in \mathbb{C}$. Se $k = a$ com $a \in \mathbb{R}$, então a equação $\dot{z} = az$ em coordenadas cartesianas é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax, \\ \dot{y} &= ay.\end{aligned}$$

Seja $X(x, y) = (ax, ay)$. Temos que a expressão de $p(X)$ na carta local U_1 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 0, \\ \dot{v} &= -va.\end{aligned}$$

Já a expressão de $p(X)$ na carta local U_2 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 0, \\ \dot{v} &= -av.\end{aligned}$$

Logo, o equador é constituído inteiramente de pontos singulares e o retrato de fase topológico é mostrado na Figura i)-3.9.

Agora, se $k = bi$, então

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -by, \\ \dot{y} &= bx,\end{aligned}$$

e a expressão de $p(X_2)$ na carta U_1 , onde $X_2 = (-by, bx)$ é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= b(u^2 + 1), \\ \dot{v} &= bvu,\end{aligned}$$

enquanto na carta U_2 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -b(1 + u^2), \\ \dot{v} &= -buv.\end{aligned}$$

Portanto, as cartas U_1 e U_2 não possuem pontos singulares e, conseqüentemente, as cartas V_1 e V_2 também não possuem.

Por último, se $k = a + ib$, então a equação $\dot{z} = (a + ib)z$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - by, \\ \dot{y} &= ay + bx.\end{aligned}$$

Logo, o campo vetorial associado ao sistema acima é $X_3(x, y) = (ax - by, ay + bx)$. Temos que a expressão de $p(X_3)$ na carta local U_1 é dada por

$$\begin{aligned}\dot{u} &= b(u^2 + 1), \\ \dot{v} &= av + buv.\end{aligned}$$

Já na carta U_2

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -b(1 + u^2), \\ \dot{v} &= -av - buv.\end{aligned}$$

Como no caso anterior, as cartas U_1 , U_2 , V_1 e V_2 não possuem pontos singulares. Note que os últimos dois casos não há pontos singulares no infinito, para distinguir os dois casos, vamos fazer a mudança $w = 1/z$, que transforma a equação $\dot{z} = kz$ na equação $\dot{w} = kw$. Pelo Corolário 3.22, $w = 0$ é um foco, se $k = a + ib$ e um centro, se $k = ib$. Portanto, o retrato de fase topológico é dado pela Figura ii)-3.9, se $k = ib$ ou pela Figura iii)-3.9, se $k = a + ib$.

c) A equação $\dot{z} = z^2$ em coordenadas cartesianas é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - y^2, \\ \dot{y} &= 2xy,\end{aligned}$$

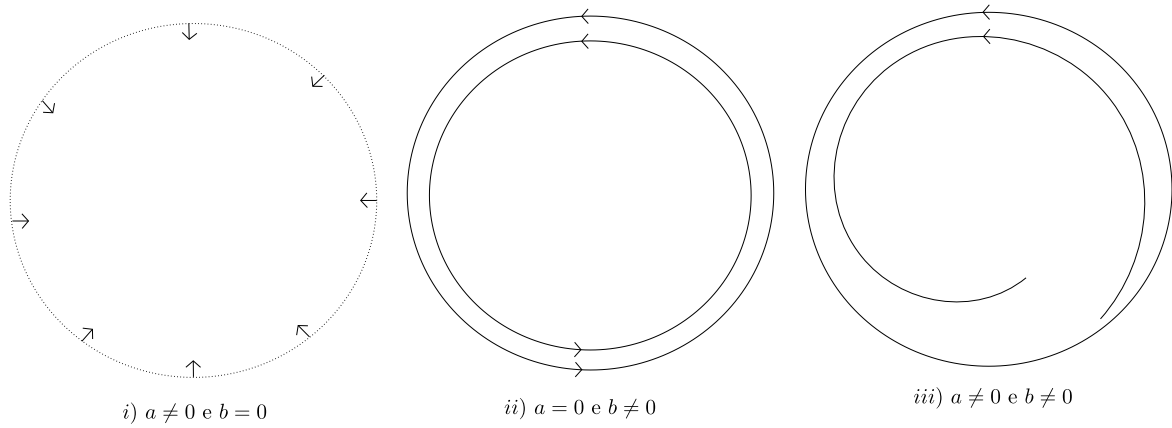


Figura 3.9: Retrato de fase da equação $\dot{z} = (a + bi)z$ em uma vizinhança do infinito.

e o campo vetorial associado ao sistema é $X(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Temos que a expressão de $p(X)$ na carta local U_1 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u(u^2 + 1), \\ \dot{v} &= v(u^2 - 1).\end{aligned}$$

Logo, a origem da carta U_1 é um ponto singular. Como a matriz Jacobiana de $p(X)$ na carta U_1 é

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

então a origem da carta local U_1 é uma sela, o mesmo vale para a origem da carta local V_1 . Por outro lado, a expressão de $p(X)$ na carta local U_2 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -(1 + u^2), \\ \dot{v} &= -2vu.\end{aligned}$$

Assim, a carta local U_2 não possui pontos singulares. Portanto, o retrato de fase topológico em uma vizinhança do infinito é dado na Figura 3.10.

d) A função z^3 é representada em termos de suas partes real e imaginária por $x^3 - 3xy^2 + i(-y^3 + 3x^2y)$. Considerando $X(x, y) = (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y)$, segue que a expressão de $p(X)$ na carta U_1 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 2u(u^2 + 1), \\ \dot{v} &= 3v^2v - v.\end{aligned}$$

Logo, o único ponto singular em U_1 é a origem e o mesmo ocorre na carta U_2 . A matriz Jacobiana de $p(X)$ na carta U_1 é

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de onde concluímos que origem das cartas U_1 e V_2 são selas.

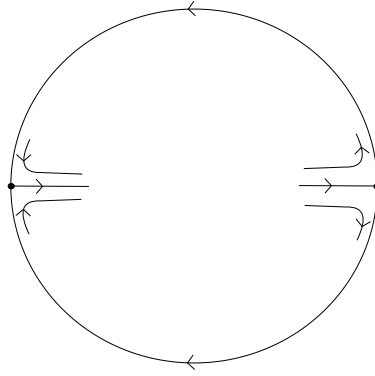


Figura 3.10: Retrato de fase da equação $\dot{z} = z^2$ em uma vizinhança do infinito.

A expressão de $p(X)$ na carta U_2 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -2u^3 - 2u, \\ \dot{v} &= -3u^2v + v.\end{aligned}$$

Assim, vemos que a origem da carta U_2 é o único ponto singular e, temos que a matriz Jacobiana é dado por

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a origem da carta U_2 é uma singularidade do tipo sela. O mesmo ocorre na carta V_2 . O retrato de fase topológico é mostrado na Figura 3.11

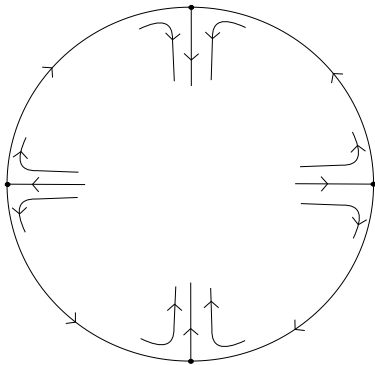


Figura 3.11: Retrato de fase da equação $\dot{z} = z^3$ em uma vizinhança do infinito.

e) Se $c = a + ib$, então podemos escrever $\dot{z} = 1 + c/z$ como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{ax + y(b + y) + x^2}{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} &= -\frac{bx - ay}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

A função $x^2 + y^2$ é uma função positiva, sendo assim o sistema acima é topologicamente equivalente ao sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + y(b + y) + x^2, \\ \dot{y} &= -bx + ay.\end{aligned}$$

A expressão deste campo na carta local U_1 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -u^3 - bu^2v - 2auv - u - bv, \\ \dot{v} &= -u^2v - buv^2 - 4v^2 - v.\end{aligned}$$

Nesta carta a origem é o único ponto singular. Como

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

então a origem da carta local U_1 é uma singularidade do tipo nó estável. Dado que o grau do sistema é par, segue que a origem da carta local U_2 é um nó instável.

Além disso, a expressão de $p(X)$ na carta U_2 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bv + 2auv + bu^2v + u^2 + 1, \\ \dot{v} &= buv^2 + av^2.\end{aligned}$$

Logo, não há pontos singulares nas cartas U_2 e V_2 . Portanto, o retrato de fase topológico no infinito é dado pela Figura 3.8.

f) A expressão da equação $\dot{z} = 1/z + c/z^3$ em coordenadas cartesianas é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{a(x^3 - 3xy^2) + 3byx^2 - by^3 + x^5 + 2x^3y^2 + xy^4}{(x^2 + y^2)^3}, \\ \dot{y} &= \frac{b(x^3 - 3xy^2) - y(a(3x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2)}{(x^2 + y^2)^3},\end{aligned}\tag{3.30}$$

onde $c = a + ib$.

A função $(x^2 + y^2)^3$ é uma função positiva, assim o sistema (3.30) é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x^3 - 3xy^2) + 3byx^2 - by^3 + x^5 + 2x^3y^2 + xy^4, \\ \dot{y} &= b(x^3 - 3xy^2) - y(a(3x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2).\end{aligned}$$

Temos que a expressão de $p(X)$ na carta U_1 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu^4v^2 - 2u^5 + 4au^3v^2 - 6bu^2v^2 - 4u^3 - 4auv^2 + bv^2 - 2u, \\ \dot{v} &= bu^3v^3 - vu^4 + 3au^2v^3 - 3buv^3 - 2u^2v - av^3 - v.\end{aligned}$$

Nesta carta $(0,0)$ é o único ponto singular e a matriz jacobiana é dada por

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a origem da carta local U_1 é um nó estável e o mesmo se verifica para carta local V_1 , pois o grau do sistema ímpar.

A expressão de $p(X)$ na carta local U_2 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -bu^4v^2 + 2u^5 + 4au^3v^2 + 6bu^2v^2 + au^3 - 4auv^2 - bv^2 + 2u, \\ \dot{v} &= -bu^3v^3 + u^4v + 3au^2v^3 + 3buv^3 + 2u^2v - av^3 + v.\end{aligned}$$

Assim, a origem da carta local U_2 é o único ponto singular. Uma vez que

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

concluimos que a origem da carta local U_2 é um nó instável. Como o grau do sistema é ímpar, a origem da carta V_2 também é um nó instável.

Portanto, o retrato de fase topológico é dado pela Figura 3.12.

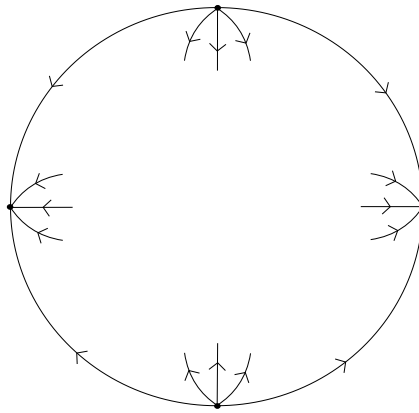


Figura 3.12: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z} + \frac{c}{z^3}$ em uma vizinhança do infinito.

g) Temos que a equação $\dot{z} = 1/z^2$ é escrita como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}, \\ \dot{y} &= \frac{-2xy}{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}.\end{aligned}$$

Dado que $x^4 + y^4 + 2x^2y^2$ é uma função positiva, então o sistema acima é topologicamente equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - y^2, \\ \dot{y} &= -2xy.\end{aligned}$$

A expressão do sistema $p(X)$ na carta U_1 é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u(u^2 - 3), \\ \dot{v} &= u^2v - v.\end{aligned}$$

Os pontos $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$ e $(-\sqrt{3},0)$ são pontos singulares da carta U_1 . Além disso,

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J(\pm\sqrt{3},0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

consequentemente $(0, 0)$ é um nó estável enquanto $(\pm\sqrt{3}, 0)$ são nós instáveis. Dado que o grau do sistema é par, segue que os pontos $(0, 0)$ é um nó instável e $(\pm\sqrt{3}, 0)$ são nós estáveis.

Resta estudar a origem da carta U_2 . A expressão de $p(X)$ nesta carta é

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 3u^2 - 1, \\ \dot{v} &= -v(u^2 + 1).\end{aligned}$$

Nesta carta a origem não há pontos singulares. Logo, o retrato de fase topológico no infinito é dado pela Figura 3.13.

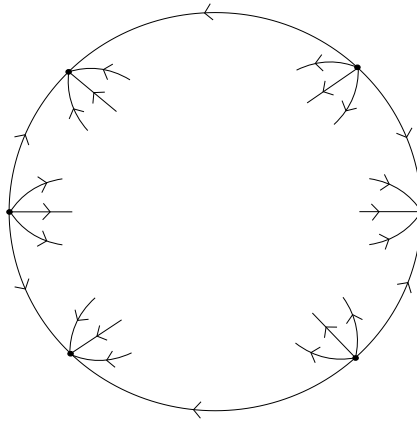


Figura 3.13: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z^2}$ em uma vizinhança do infinito.

□

4 Dinâmica dos Fluidos e Integrabilidade

Considere um fluido perfeito, homogêneo e incompressível. Neste contexto, ser perfeito significa que a força que uma parte do fluido exerce sobre a parte adjacente é devida apenas a pressão, sempre perpendicular a superfície de separação entre as partes. Ser homogêneo e incompressível significa que a densidade de massa ρ é constante em todos os pontos do movimento.

Além disso, suponhamos também que o movimento seja bidimensional e estacionário. Bidimensional significa que existe um plano que tomaremos como o plano xy , tal que a velocidade se mantenha paralela a este plano, independente da terceira coordenada espacial z de forma que o movimento é o mesmo em todos os planos paralelos ao plano xy . Estacionário é o movimento cuja velocidade em cada ponto se mantém constante no tempo.

Seja $X(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y))$ o vetor velocidade deste movimento no ponto (x, y) . Suponhamos que as componentes X_1 e X_2 são funções suaves em $\mathbb{R}^2$ e satisfazem a equação:

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

Adicionamos a hipótese que o movimento é irrotacional. Vamos começar com a integral de linha

$$\Gamma = \int_C X \cdot t \, ds,$$

onde C é uma curva fechada e simples e t é o vetor unitário tangente a curva C . Observe que $X \cdot t$ representa o valor escalar da velocidade tangencial e Γ representa uma medida de quanto as partículas fluídas tendem a circular ao longo de C .

Um teorema fundamental, publicado em 1869 pelo físico, matemático e engenheiro Lord Kelvin afirma que a circulação permanece constante ao longo do tempo. Como o movimento se origina do repouso, a circulação é inicialmente zero, logo, será zero por todo tempo. Então,

$$0 = \int_C X \cdot t \, ds = \int_C X_1 dx + X_2 dy.$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos que

$$\iint_R \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \right) = 0,$$

onde R é a região interior a curva C . Dado que o integrando é uma função contínua e R é uma região arbitrária, então as componentes X_1 e X_2 devem satisfazer a equação

$$\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} = 0. \quad (4.2)$$

Note que as equações (4.1) e (4.2) são as equações de Cauchy-Riemann para as funções X_1 e $-X_2$.

Baseado nisso, vamos estudar os sistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = u(x, y), \\ \dot{y} = -v(x, y), \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função holomorfa. Vamos chamar o sistema (4.3) de **sistema conjugado** $f(z)$.

A equação (4.2) nos diz que a forma diferencial é exata, já que a integral ao longo de qualquer curva fechada é zero. Logo, existe uma função $\phi = \phi(x, y)$ tal que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (4.4)$$

Portanto, o sistema conjugado é um sistema gradiente

$$\begin{cases} \dot{x} = u(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \dot{y} = -v(x, y) = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \end{cases}$$

Note que a função ϕ satisfaz a equação de Laplace

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

e, portanto, é uma função harmônica. Isso implica que ϕ é a parte real de uma função holomorfa $F(z) = \phi + i\psi$.

A ortogonalidade das curvas de nível das partes real e imaginária de F implica que a função ψ é uma integral primeira do sistema conjugado.

Definição 4.1. A função $F(z) = \phi + i\psi$ é chamada o **potencial complexo do movimento**.

Proposição 4.2. *Seja $f(z)$ uma função holomorfa. A integral primeira do sistema conjugado $\dot{z} = \overline{f(z)}$ é dada por $\psi(x, y) = \Im(f(z))$, onde $F'(z) = f(z)$. Em outras palavras, o potencial complexo do movimento é uma primitiva de $f(z)$.*

Demonstração. Seja $f = u + iv$ uma função holomorfa. Considere o sistema conjugado

$$\begin{cases} \dot{x} = u(x, y), \\ \dot{y} = -v(x, y), \end{cases}$$

que é gradiente, e assim existe ϕ tal que $u = \phi_x$ e $v = -\phi_y$. O potencial $F = \phi + i\psi$ é holomorfo e $F' = \phi_x + i\psi_x = u + iv = f(z)$. $\square$

Proposição 4.3. *Seja $f(z)$ uma função holomorfa. Os pontos de equilíbrio do sistema conjugado $\dot{z} = f(z)$ são os pontos críticos da função ψ e aqueles que são não degenerados são do tipo sela.*

Demonstração. Seja $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto de equilíbrio do sistema conjugado

$$\begin{cases} \dot{x} = u(x, y) = \phi_x, \\ \dot{y} = -v(x, y) = \phi_y, \end{cases}$$

então $u(x_0, y_0) = 0 = -v(x_0, y_0)$.

Usando que $\psi_x = -\phi_y$ e $\phi_x = \psi_y$, obtemos que $\psi_x = -\phi_y = 0$ e $\psi_y = \phi_x = 0$.

Logo, $z_0 = x_0 + iy_0$ é ponto crítico da função ψ .

A função ψ é harmônica e $\psi \in C^\infty$, então $\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$ e pelo Teorema de Schwarz $\psi_{xy} - \psi_{yx} = 0$. Consequentemente o determinante da matriz Hessiana é $\psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}\psi_{yx} = -\psi_{xx}^2 - \psi_{xy}^2 \leq 0$. $\square$

Exemplo 4.4. Considere a função $f(z) = z^2$. Então, o sistema conjugado é

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2, \\ \dot{y} = -2xy, \end{cases}$$

e a integral primeira é dada por $\psi(x, y) = x^2y - \frac{y^3}{3}$. Veja a Figura 4.1.

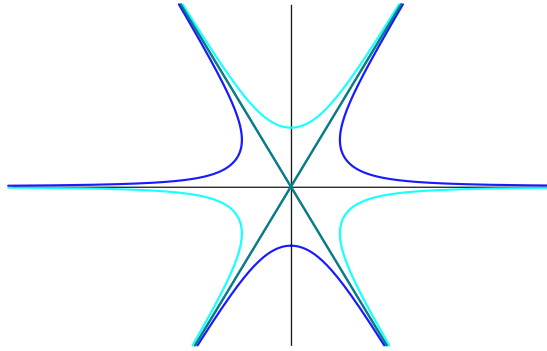


Figura 4.1: Curvas de nível da função $x^2y - \frac{y^3}{3}$.

Exemplo 4.5. Seja $f(z) = z^3$. O sistema conjugado é

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} = y^3 - 3x^2y, \end{cases}$$

e uma integral primeira é $\psi(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2$. Veja a Figura 4.2.

Exemplo 4.6. Considere a função $f(z) = \frac{z^2}{1+z}$. O potencial complexo é dado por $F(z) = \frac{z^2}{2} - z + \ln(z+1)$ e o sistema conjugado é

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^3 + x^2 + xy^2 - y}{(1+x)^2 + y^2}, \\ \dot{y} = \frac{-x^2y + 2xy + y^3}{(1+x)^2 + y^2}, \end{cases}$$

e a integral primeira é $\psi(x, y) = (x-1)y + \arctg\left(\frac{y}{x+1}\right)$. Vej Figura 4.3.

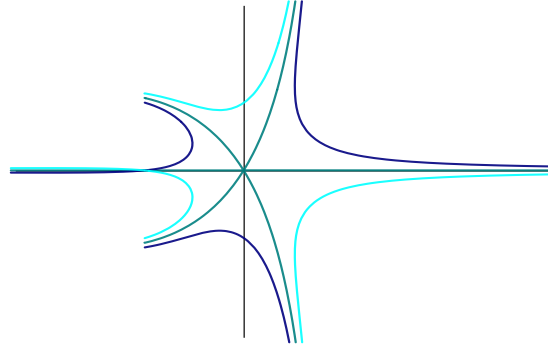


Figura 4.2: Curvas de nível da função $\psi(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2$.

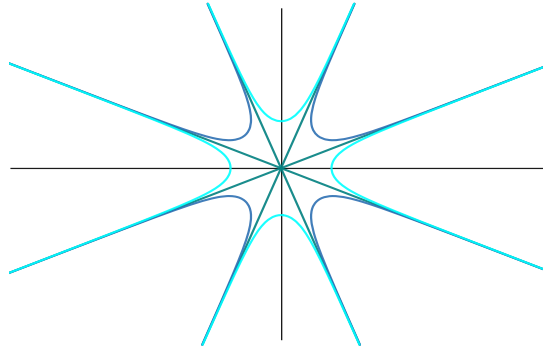


Figura 4.3: Curvas de nível da função $(x-1)y + \arctg\left(\frac{y}{x+1}\right)$.

Proposição 4.7. *O retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{f(z)}$ é igual ao retrato de fase da equação $\dot{z} = \overline{f(z)}$ onde $f(z) \neq 0$.*

Demonstração. De fato, temos que

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{\overline{f(z)}}{f(z)\overline{f(z)}} = \frac{\overline{f(z)}}{|f(z)|^2}.$$

Como $|f(z)|^2 > 0$, então as equações $\dot{z} = \overline{f(z)}$ e $\dot{z} = \frac{1}{f(z)}$ tem o mesmo retrato de fase. $\square$

Agora vamos considerar $f(z)$ uma função holomorfa definida em um disco perfurado $D = D(0, R) \setminus \{0\}$, onde 0 é o único zero da função f em D ou 0 é uma singularidade isolada de f e f não possui zeros em D .

Seja L uma semirreta começando em 0. O conjunto $\Omega = D \setminus L$ é um conjunto estrelado com respeito a qualquer z_0 ao lado oposto de L , isto é, para qualquer $z \in \Omega$, $\overrightarrow{z_0 z}$ está inteiramente contido em Ω . Uma propriedade que vale para uma função holomorfa definida em uma região estralada é que ela possui uma primitiva nesta região, para mais detalhes veja [17]. Sendo assim, as funções $\frac{1}{f(z)}$ e $f(z)$ possuem primitivas em Ω .

A proposição anterior garante que o retrato de fase da equação $\dot{z} = f(z)$ é igual ao retrato de fase da equação $\dot{z} = \overline{g(z)}$, onde $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Pela Proposição 4.2, a integral primeira da equação $\dot{z} = f(z)$ é $H(x, y) = \Im(G(z))$ onde $G'(z) = g(z)$. Resumindo temos o seguinte resultado:

Proposição 4.8. *Seja $\dot{z} = f(z)$ um sistema holomorfo definido em um conjunto $\Omega = D \setminus L$. Então suas trajetórias estão contidas nas curvas de nível da função $H(x, y) = \Im(G(z))$, onde $G'(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Demonstração. Como já observado, o retrato de fase do sistema $\dot{z} = f(z)$ é igual ao retrato de do sistema $\dot{z} = g(z)$, onde $g(z) = \frac{1}{f(z)} = u(x, y) + iv(x, y)$.

Seja $G(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ uma primitiva da função $g(z)$ em Ω . A função G é uma função holomorfa e satisfaz que $G'(z) = g(z)$. Temos então que

$$G'(z) = U_x + iV_x = u + iv = V_y - iU_y,$$

daí segue que $\nabla U = (U_x, U_y) = (u, -v)$.

Logo, $\dot{z} = \overline{g(z)}$ é um sistema gradiente e, assim, as órbitas são ortogonais às curvas de nível de U . Uma vez que, $G = U + iV$ é holomorfa, então as curvas de nível de V e U são ortogonais.

Portanto, as órbitas de $\dot{z} = f(z)$ estão contidas nas curvas de nível de H . $\square$

Exemplo 4.9. Considere $\dot{z} = z^2$. Temos que $g(z) = \frac{1}{z^2}$ e $G(z) = -\frac{1}{z}$.

Pela Proposição 4.8, as órbitas da equação $\dot{z} = z^2$ estão contidas nas curvas de nível da função $H(x, y) = \Im\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2}$.

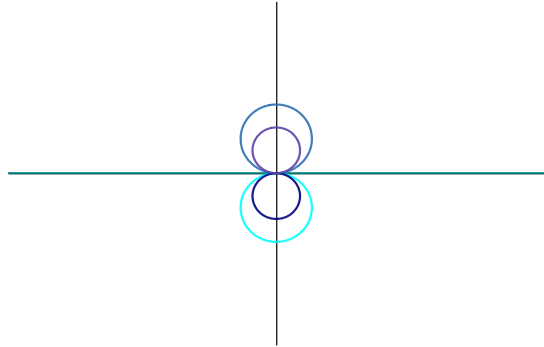


Figura 4.4: Curvas de nível da função $H(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Exemplo 4.10. Considere a equação $\dot{z} = z^2 - 1$. Então, $g(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ e uma primitiva para $g(z)$ é $G(z) = \frac{1}{2}(\log(1 - z) - \log(z + 1))$.

Temos então que as órbitas da equação $\dot{z} = z^2 - 1$ estão contidas nas curvas de nível da função $H(x, y) = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{-y}{1 - x}\right) - \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{y}{1 + x}\right)$.

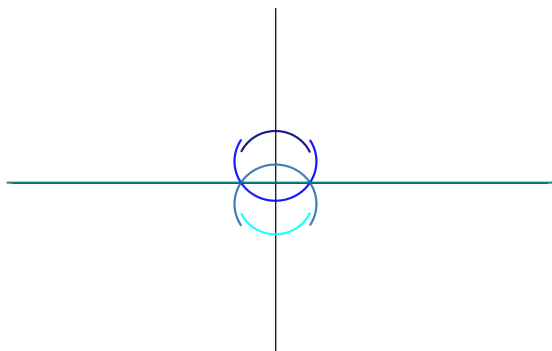


Figura 4.5: Curvas de nível da função $H(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-y}{1-x} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{1+x} \right)$.

5 Propriedades Globais da Equação $\dot{z} = f(z)$

Este capítulo é dedicado ao estudo do comportamento da equação $\dot{z} = f(z)$ próximo a órbitas periódicas e de polí-ciclos.

Iniciaremos com o seguinte resultado:

Proposição 5.1. *Considere a equação $\dot{z} = f(z)$. Se γ é uma órbita periódica de período T da equação, então*

$$T = \int_{\gamma} \frac{1}{f(z)} dz.$$

Demonstração. Como γ é uma órbita periódica da equação $\dot{z} = f(z)$, então $\gamma = \{\varphi_f(t, z) : t \in [0, T]\}$.

Temos então

$$\int_{\gamma} \frac{1}{f(z)} dz = \int_0^T \frac{\varphi'_f(t, z)}{f(\varphi_f(t, z))} dt.$$

Usando que $f(\varphi_f(z; t)) = \varphi'_f(t, z)$, obtemos que

$$\int_0^T \frac{\varphi'_f(t, z)}{f(\varphi_f(t, z))} dt = \int_0^T dt = T.$$

Portanto,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{f(z)} dz = T.$$

□

Seja f uma função holomorfa definida em domínio $A \subset \mathbb{C}$ e considere a equação $\dot{z} = f(z)$. Se γ é uma órbita periódica da equação, então existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita periódica ou V possui outras órbitas periódicas além de γ . No primeiro caso, chamamos a órbita periódica de **ciclo limite**. Um dos problemas mais investigados na Teoria Qualitativa dos Sistemas Planares é o *XVI problema de Hilbert*. Este problema consiste em determinar o número e a posição de ciclos limites de sistemas polinomiais.

Veremos a seguir que a equação $\dot{z} = f(z)$ não possui ciclo limite. Este resultado é consequência da seguinte proposição.

Proposição 5.2. *Seja f uma função holomorfa definida em um domínio $A \subset \mathbb{C}$. Se γ é uma órbita periódica da equação $\dot{z} = f(z)$, então existe uma vizinhança V de γ tal que todas as órbitas em V são periódicas e elas têm o mesmo período.*

Demonstração. Seja T o período da órbita γ , temos então que $\varphi_f(T, z) = z$ para todo $z \in \gamma$.

Considere $\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\xi(z) = \varphi_f(T, z)$. A função ξ é uma função analítica, além disso, ξ é igual a função identidade em todos os pontos de γ . Logo, pelo Princípio da Continuação Analítica, ξ coincide com a função identidade em alguma vizinhança V de z .

Portanto, nesta vizinhança todas as órbitas são periódicas e possuem o mesmo período. $\square$

Nosso próximo objetivo é estudar o comportamento da equação $\dot{z} = f(z)$ próximo a um tipo especial de conjuntos, os chamados políciclos. Mas antes de definir o que é um políciclo, precisamos de algumas definições.

Definição 5.3. Dizemos que Λ é um **gráfico** da equação $\dot{z} = f(z)$ se Λ é compacto, conexo, invariante e se $z \in \gamma$ então $\alpha(z)$ e $\omega(z)$ são pontos de equilíbrio ou pontos singulares.

Observação 5.4. 1) O fluxo da equação $\dot{z} = f(z)$ não está definido em um ponto singular.

2) Como um conjunto Λ é invariante se, e somente se, contém a órbita de cada um de seus pontos, então um gráfico é a união finita e não nula de pontos de equilíbrio, pontos singulares e órbitas, tais que o conjunto alfa e omega limite das órbitas são pontos de equilíbrio e pontos singulares.

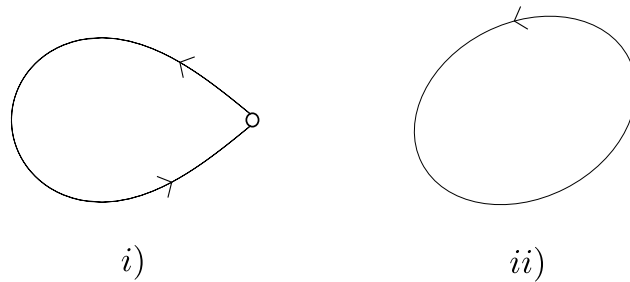


Figura 5.1: i) Exemplo de um gráfico; ii) Um conjunto que não é um gráfico.

Definição 5.5. Uma **semi seção transversal** de um gráfico Λ é um difeomorfismo $\Gamma : [0, 1) \rightarrow \Gamma([0, 1)) \subset \mathbb{C}$ tal que:

- i) $\Gamma(0) \in \Lambda$;
- ii) $\Gamma((0, 1))$ é transversal ao sistema.

Seja Λ um gráfico do sistema $\dot{z} = f(z)$ e Γ uma semi seção transversal com vértice em $p \in \Gamma$, $\Gamma^+ = \Gamma \setminus \{p\}$. Seja U uma vizinhança e a semi órbita positiva $\varphi_f^+(t, q)$ passando

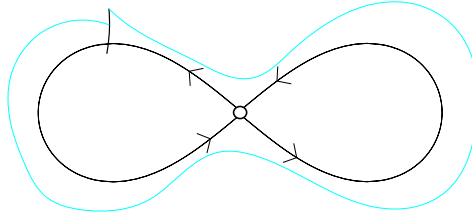


Figura 5.2: Um gráfico com uma aplicação de Poincaré.

por $q \in \Gamma^+ \subset U$. Suponha que $\Delta(q)$ é o primeiro ponto de interseção de $\varphi_f^+(t, q)$ com Γ e a curva $\varphi_f^+(q; t)$ entre q e $\Delta(q)$ está em U .

A aplicação

$$\Delta : (\Gamma^+, p) \rightarrow (\Gamma, p), \quad q \rightarrow \Delta(q)$$

é chamada **aplicação de sucessão** ou de **aplicação de Poincaré**.

Notemos que a aplicação de Poincaré não está definida para todos os gráficos.

Definição 5.6. Um gráfico em que a aplicação de Poincaré está definida é chamada de **policiclo** ou **gráfico monodrômico**.

Observação 5.7. Um policiclo pode consistir em um único ponto, por exemplo, um foco ou um centro.

Proposição 5.8. *Seja Λ um gráfico da equação $\dot{z} = f(z)$. Se $z_0 \in \Lambda$ é um ponto de equilíbrio da equação, então Λ não é um policiclo.*

Demonstração. De fato, se existir um ponto de equilíbrio z_0 em Λ , então o retrato de fase local não tem setores hiperbólicos e, assim, a aplicação de Poincaré não está bem definida. $\square$

Proposição 5.9. *Seja Λ um policiclo da equação $\dot{z} = f(z)$. Em uma vizinhança onde a aplicação de Poincaré está definida todas as órbitas são periódicas.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de Λ tal que a aplicação de Poincaré está definida em U e U não contenha nenhum zero ou singularidade da função f .

Seja $p \in \Lambda$, Γ uma semi seção transversal a Λ passando por p e $\Delta : (\Gamma^+, p) \rightarrow (\Gamma, p)$ a aplicação de Poincaré.

Considerando a equação $\dot{z} = f(z)$ em U , podemos estudar as soluções do sistema $\dot{z} = \frac{1}{f(z)}$.

Pela Proposição 5.2, se γ é uma órbita periódica, então em uma vizinhança de U todas as órbitas são periódicas. Logo, em U , todas as órbitas são periódicas ou o policiclo é estável ou instável. Em outras palavras, o caso de infinitas órbitas periódicas se acumulando em alguma parte de Λ pode ser evitado, a menos que todas as órbitas em U sejam periódicas.

Suponhamos então que Λ seja estável.

Dado $q \in \Gamma$, considere a região A limitada por Λ , o arco de trajetória $\widehat{q\Delta(q)}$ e pelo segmento $q\Delta(q) \subset \Gamma$.

Tome $w \in A$, $\varphi(t, w) \in A$ para todo $t \geq 0$, ou seja, A é positivamente invariante. Além disso, $\varphi(t, w)$ intercepta Γ em uma sequência $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para q .

Por outro lado, considere um subconjunto fechado B_0 de área k tal que $q \in B_0 \subset A$, considere também $n \in \mathbb{N}$ tal que $nk > \text{área}(A)$.

Tome os conjuntos $\{\varphi(jT, B_0)\}_{j=0, \dots, n-1}$. O fluxo da equação $\dot{z} = \frac{1}{f(z)}$ preserva área, pois o sistema conjugado é um sistema gradiente. Sendo assim, os conjuntos $\{\varphi(jT, B_0)\}_{j=0, \dots, n-1}$ não podem ser disjuntos. Logo, existem k e l tais que $0 \leq k < l \leq n-1$ e $\varphi(kT, B_0) \cap \varphi(lT, B_0) \neq \emptyset$.

Usando que o fluxo é um difeomorfismo e a propriedade de grupo, defina $B_1 := B_0 \cap \varphi(B_0, m_0T) \neq \emptyset$, onde $m_0 = l - k$. Temos que $B_1 \subset B_0$ e B_1 é um conjunto compacto. Repetindo o processo infinitas vezes, obtemos um conjunto compacto não vazio $B = \bigcap_{j=0}^{\infty} B_j$.

Se $w \in B \subset B_0$, então existe uma sequência de inteiros positivos $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\varphi(k_n T, w) \in B_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que leva a uma contradição.

Logo, as órbitas em U são periódicas. $\square$

Como consequência da proposição anterior temos o seguinte resultado:

Corolário 5.10. *Considere a equação $\dot{z} = f(z)$. No interior de laços homoclínicos e heteroclínicos não é possível um foco ou um nó.*

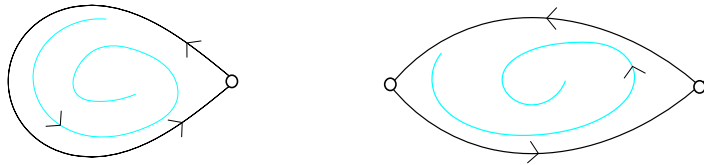


Figura 5.3: Exemplos de laços que não podem ocorrer.

6 Classificação Topológica de Equações Racionais

Neste capítulo, utilizaremos os resultados apresentados nos capítulos anteriores para obter uma classificação topológica do retrato de fase de uma família de equações racionais da forma

$$\dot{z} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (6.1)$$

onde P e Q são polinômios sem fatores em comum.

6.1 $\deg(P) \leq 3$ e $\deg(Q) = 0$

Inicialmente, vamos estudar o retrato de fase da equação (6.1) com $\deg(P) \leq 3$ e $\deg(Q) = 0$, isto é, nesta seção vamos estudar o retrato de fase de equações polinomiais.

O próximo resultado nos fornece as formas normais dessa equação.

Lema 6.1. *Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ dois polinômios tais que $\deg(P) \leq 3$ e $Q(z) = d$ (isto é, $\deg(Q) = 0$), então a equação (6.1) é conformemente conjugada a:*

a) $\dot{z} = 1$, se $P(z) = c$;

b) $\dot{z} = kz$, se $P(z) = c(z - c_0)$ onde $k = \frac{c}{d} \in \mathbb{C}$;

c) $\dot{z} = z(z - \xi)$, se $P(z) = c(z - c_0)(z - c_1)$ onde $\xi = \frac{c(c_1 - c_0)}{d} \in \mathbb{C}$;

d) $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$, se $P(z) = c(z - c_0)(z - c_1)(z - c_2)$, onde $\xi_1 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}(c_0 - c_1)$ e $\xi_2 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}(c_2 - c_1)$.

Demonstração. a) Queremos mostrar que as equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são conformemente conjugadas, onde $f(z) = \frac{c}{d}$ e $g(z) = 1$. Para isso, consideremos $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\phi(z) = \frac{d}{c}z$. Temos que ϕ é uma função conforme, pois ϕ é holomorfa e $\phi'(z) = \frac{d}{c} \neq 0$. Além disso,

$$\phi'(z)f(z) = \frac{d}{c} \frac{c}{d} = 1 = g(\phi(z)).$$

Logo, as equações $\dot{z} = 1$ e $\dot{z} = \frac{c}{d}$ são conformemente conjugadas.

b) Neste caso, considerando $f(z) = \frac{c(z-c_0)}{d}$, $g(z) = kz$ e $\phi(z) = \frac{d}{c}(z - c_0)$. Temos que

$$\begin{aligned}\phi'(z)f(z) &= \frac{d}{c} \frac{c(z-c_0)}{d} \\ &= (z - c_0) \\ &= k \left(\frac{d}{c} (z - c_0) \right) \\ &= g(\phi(z)).\end{aligned}$$

Como ϕ é holomorfa e tem derivada não nula, segue que as equações $\dot{z} = kz$ e $\dot{z} = \frac{c(z-c_0)}{d}$ são conformemente conjugadas.

c) Sejam $f(z) = \frac{c(z-c_0)(z-c_1)}{d}$, $g(z) = z(z-\xi)$ e $\phi(z) = \frac{c}{d}(z - c_0)$.

Temos que

$$\begin{aligned}\phi'(z)f(z) &= \frac{c}{d} \frac{c}{d} ((z - c_0)(z - c_1)) \\ &= \frac{c^2}{d^2} ((z - c_0)(z - c_1)).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}g(\phi(z)) &= \left(\frac{c}{d}z - \frac{c}{d}c_0 \right) \left(\frac{c}{d}z - \frac{c}{d}c_0 - \xi \right) \\ &= \frac{c^2}{d^2} (z - c_0) \left(z - c_0 - \frac{d}{c}\xi \right) \\ &= \frac{c^2}{d^2} (z - c_0) (z - c_0 - c_1 + c_0) \\ &= \frac{c^2}{d^2} (z - c_0) (z - c_1).\end{aligned}$$

Logo, $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$ e, além disso, ϕ é uma aplicação conforme. Portanto, $\dot{z} = \frac{c}{d}(z - c_0)(z - c_1)$ e $\dot{z} = z(z - \xi)$ são conformemente conjugadas.

d) Por fim, consideremos $f(z) = \frac{c(z-c_0)(z-c_1)(z-c_2)}{d}$, $g(z) = z(z-\xi_1)(z-\xi_2)$ e $\phi(z) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}(z - c_1)$.

A função ϕ é uma aplicação conforme, já que ϕ é holomorfa e $\phi'(z) \neq 0$. Além do mais,

$$\begin{aligned}\phi'(z)f(z) &= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} \left(\frac{c(z-c_0)(z-c_1)(z-c_2)}{d} \right) \\ &= \frac{c\sqrt{c}}{d\sqrt{d}} (z - c_0)(z - c_1)(z - c_2).\end{aligned}$$

Em contrapartida

$$\begin{aligned}
 g(\phi(z)) &= \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}z - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}c_1 \right) \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}z - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}c_1 - \xi_1 \right) \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}z - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}c_2 - \xi_2 \right) \\
 &= \frac{c\sqrt{c}}{d\sqrt{d}}(z - c_1) \left(z - c_1 - \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}\xi_1 \right) \left(z - c_1 - \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}\xi_2 \right) \\
 &= \frac{c\sqrt{c}}{d\sqrt{d}}(z - c_1)(z - c_1 - (c_0 - c_1))(z - c_1 - (c_2 - c_1)) \\
 &= \frac{c\sqrt{c}}{d\sqrt{d}}(z - c_0)(z - c_1)(z - c_2).
 \end{aligned}$$

Logo, $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$ e concluímos que as equações $\dot{z} = \frac{c(z - c_0)(z - c_1)(z - c_2)}{d}$ e $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$ são conformemente conjugadas. $\square$

As próximas proposições nos fornecem o retrato de fase das formas normais do Lema 6.1.

Proposição 6.2. *As seguintes afirmações são válidas:*

- a) *O retrato de fase da equação $\dot{z} = 1$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase apresentado na figura 6.1.*
- b) *Seja $k \in \mathbb{C}$. O retrato de fase da equação $\dot{z} = kz$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da:*
 - b1) *Figura i)-6.2, se $\Re(k) = 0$;*
 - b2) *Figura ii)-6.2, se $\Im(k) = 0$;*
 - b3) *Figura iii)-6.2, se $\Re(k)\Im(k) \neq 0$.*
- c) *Seja $\xi \in \mathbb{C}$. O retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi)$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na:*
 - c1) *Figura i)-6.3, se $\xi \neq 0$ e $\Re(\xi) = 0$;*
 - c2) *Figura ii)-6.3, se $\xi \neq 0$ e $\Re(\xi) \neq 0$;*
 - c3) *Figura iii)-6.3, se $\xi = 0$.*

Demonstração. a) Pelo Corolário 3.28, o retrato de fase da equação $\dot{z} = 1$ no infinito é dado pela Figura 3.8. Como a equação não possui pontos de equilíbrios e nem pontos singulares, então o retrato de fase é dado pela Figura 6.1.

b) Neste caso, $z = 0$ é o único ponto de equilíbrio da equação $\dot{z} = kz$ e, pelo Corolário 3.22, $z = 0$ é: um nó, se $\Im(k) = 0$; um foco, se $\Re(k)\Im(k) \neq 0$ ou é um centro, se $\Re(k) = 0$.

Além disso, o Corolário 3.28 nos mostra que o retrato de fase no infinito é dado pela Figura i)-3.9, se $\Im(k) = 0$, Figura ii)-3.9, se $\Re(k) = 0$ ou pela Figura iii)-3.9, se $\Re(k)\Im(k) \neq 0$.

Portanto, o retrato de fase da equação $\dot{z} = kz$ é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na Figura 6.2 i), se $\Im(k) = 0$, pela Figura 6.2 ii), se $\Re(k) = 0$ ou pela Figura 6.2 iii), se $\Re(k)\Im(k) \neq 0$.

c) O Corolário 3.28 nos garante que o retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi)$ no infinito é topologicamente equivalente ao retrato de fase da equação $\dot{z} = z^2$.

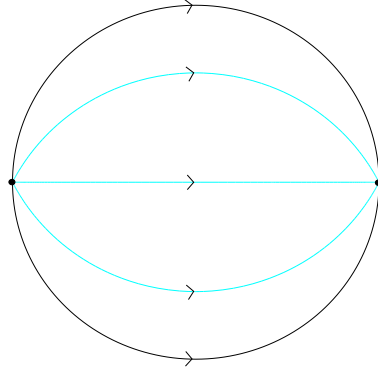


Figura 6.1: Retrato de fase da equação $\dot{z} = 1$ no disco de Poincaré.

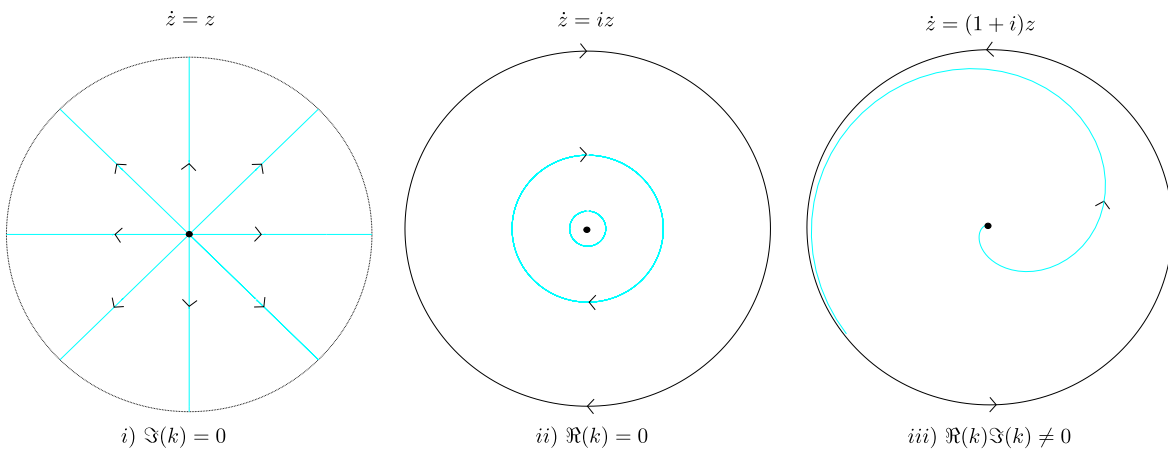


Figura 6.2: Retrato de fase da equação $\dot{z} = kz$ no disco de Poincaré.

Além disso, temos duas possibilidades: $\xi \neq 0$ ou $\xi = 0$. Se $\xi \neq 0$, então a equação $\dot{z} = z(z - \xi)$ tem dois pontos de equilíbrio, $z = 0$ e $z = \xi$. Se $\xi = 0$, então $z = 0$ é o único ponto de equilíbrio da equação.

No primeiro caso, derivando a função $f(z) = z(z - \xi)$, obtemos que $f'(z) = 2z - \xi$. Logo, $f'(0) = -\xi$ e $f'(\xi) = \xi$, consequentemente 0 e ξ são centros, se $\Re(\xi) = 0$ ou 0 e ξ são focos (ou nós), se $\Re(\xi) \neq 0$.

Portanto, o retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi)$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase apresentado na Figura 6.3 i), se $\Re(\xi) = 0$ ou ao retrato de fase apresentado na Figura 6.3 ii), se $\Re(\xi) \neq 0$.

No segundo caso, $z = 0$ é o único ponto de equilíbrio e é um zero de ordem dois, sendo assim o retrato de fase em uma vizinhança de $z = 0$ é a união de dois setores elípticos.

Portanto, o retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi)$ com $\xi = 0$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na Figura 6.3 iii). $\square$

Proposição 6.3. *Considere a equação $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$. As seguintes afirmações são válidas:*

- a) *Se $\xi_1 \xi_2 \neq 0$ e $\xi_1 \neq \xi_2$, então há três possibilidades para o retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$;*

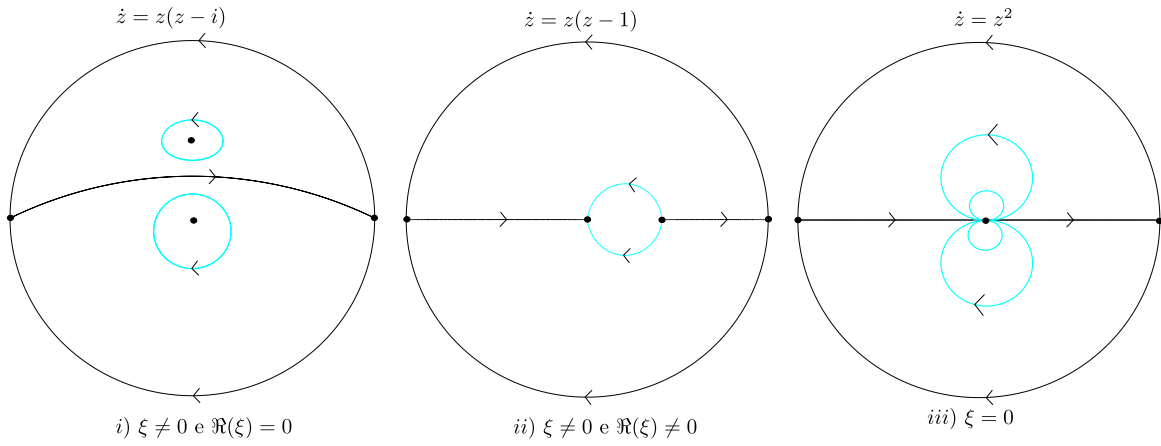


Figura 6.3: Retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi)$ no disco de Poincaré.

b) Se $\xi_1 = \xi_2$ e $\xi_1 \neq 0$ ou $\xi_1 \xi_2 = 0$ e $\xi_1 \neq \xi_2$, então há duas possibilidades para o retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$.

c) Se $\xi_1 = 0 = \xi_2$ então há uma possibilidade para o retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$.

Demonstração. a) Neste caso, $z = 0$, $z = \xi_1$ e $z = \xi_2$ são zeros simples da função $z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$, sendo assim, pela Proposição 3.25, temos as possibilidades:

- 3 centros Figura i)-6.4;
- 3 Focos/Nós Figura ii)-6.4;
- 2 Focos e 1 centro Figura iii)-6.4.

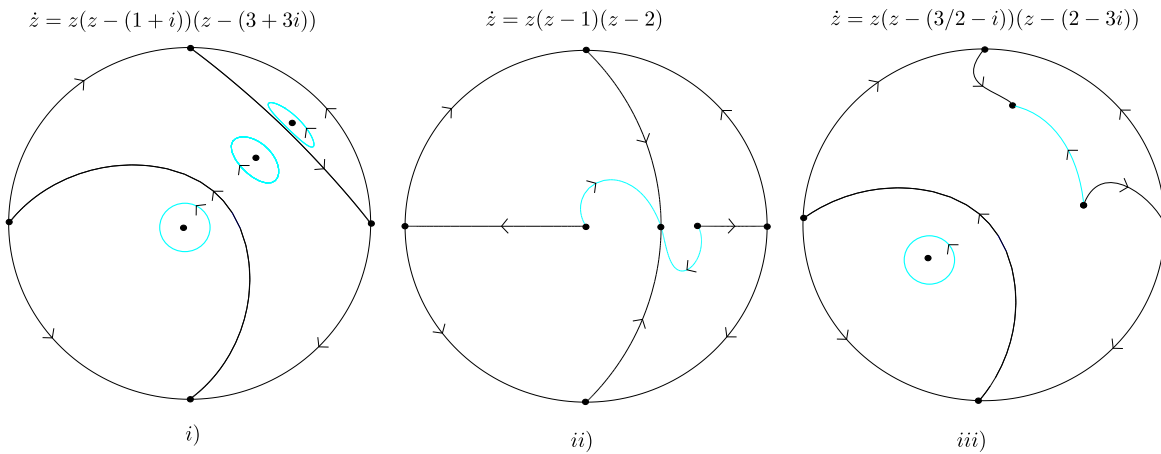


Figura 6.4: Retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$ no disco de Poincaré.

b) A equação $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$ possui um zero simples e um zero de ordem dois. Logo temos a possibilidades:

- 1 centro e a união de dois setores elípticos Figura i)-6.5;
- 1 foco/nó e a união de dois setores elípticos Figura ii)-6.5.

c) Por fim, $z = 0$ é um zero de ordem três e o retrato de fase local é a união de quatro setores elípticos Figura iii)-6.5. $\square$

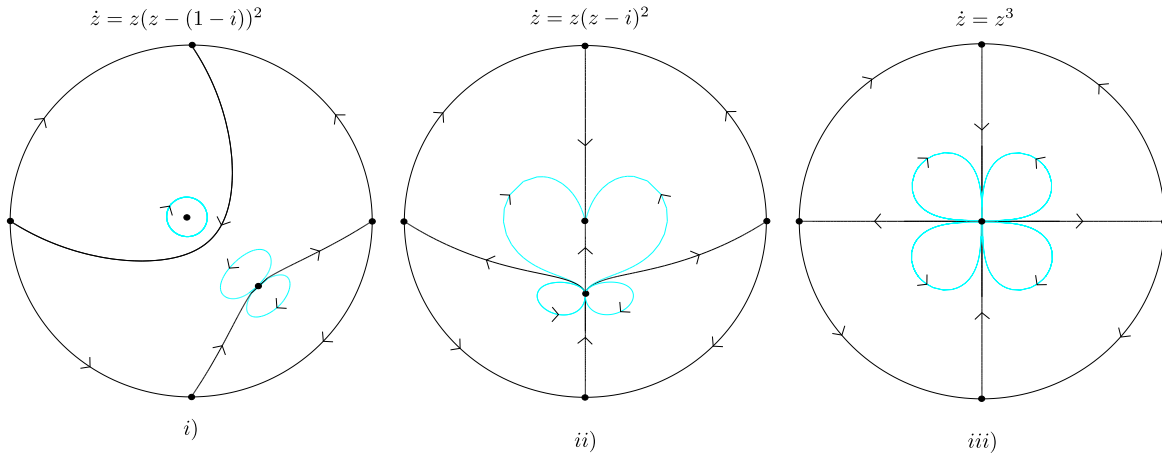


Figura 6.5: Retrato de fase da equação $\dot{z} = z(z - \xi_1)(z - \xi_2)$ no disco de Poincaré.

6.2 $\deg(P) \leq 2$ e $\deg(Q) = 1$

Agora iremos considerar o caso em que $\deg(P) \leq 2$ e $\deg(Q) = 1$.

Lema 6.4. *Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ polinômios tais que $\deg(P) \leq 2$ e $Q(z) = d(z - d_0)$ (isto é, $\deg(Q) = 1$). Então a equação (6.1) é conformemente conjugada a:*

a) $\dot{z} = \frac{1}{z}$, se $P(z) = c$;

b) $\dot{z} = \frac{z-\xi}{z}$, se $P(z) = c(z - c_0)$, onde $\xi = \frac{d(c_0 - d_0)}{c} \in \mathbb{C}$;

c) $\dot{z} = \frac{k(z-\xi)(z-1)}{z}$, se $P(z) = c(z - c_0)(z - c_1)$, onde $k = \frac{c}{d} \in \mathbb{C}$ e $\xi = \frac{c_1 - d_0}{c_0 - d_0} \in \mathbb{C}$.

Demonstração. a) Sejam $f(z) = \frac{c}{d(z - d_0)}$, $g(z) = \frac{1}{z}$ e $\phi(z) = \sqrt{\frac{d}{c}}(z - d_0)$. Note que

$$\phi'(z)f(z) = \frac{c}{d} \sqrt{\frac{d}{c}} \frac{1}{z - d_0}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(\phi(z)) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{d}{c}}(z - d_0)} = \frac{\sqrt{\frac{d}{c}}}{\frac{d}{c}(z - d_0)} \\ &= \sqrt{\frac{d}{c}} \frac{1}{\frac{d}{c} z - d_0}. \end{aligned}$$

Logo, $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$. Como ϕ é uma aplicação conforme segue que as equações $\dot{z} = \frac{1}{z}$ e $\dot{z} = \frac{c}{d(z - d_0)}$ são conformemente conjugadas.

b) Nesse caso, considere $f(z) = \frac{c(z - c_0)}{d(z - d_0)}$, $g(z) = \frac{z - \xi}{z}$ e $\phi(z) = \frac{d}{c}(z - d_0)$. Observe que

$$\phi'(z)f(z) = \frac{d}{c} \frac{c}{d} \left(\frac{z - c_0}{z - d_0} \right) = \frac{z - c_0}{z - d_0}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g(\phi(z)) &= \frac{\frac{d}{c}(z - d_0) - \xi}{\frac{d}{c}(z - d_0)} \\ &= \frac{z - d_0 - \frac{c}{d}(\frac{d}{c}(c_0 - d_0))}{z - d_0} \\ &= \frac{z - d_0 - c_0 + d_0}{z - d_0} = \frac{z - c_0}{z - d_0}. \end{aligned}$$

Logo, $f(z)\phi'(z) = g(\phi(z))$ e daí segue que as equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são conformemente conjugadas.

c) Por último, considere $f(z) = \frac{c(z - c_0)(z - c_1)}{d(z - d_0)}$, $g(z) = \frac{k(z - \xi)(z - 1)}{z}$ e $\phi(z) = \frac{1}{c_0 - d_0}(z - d_0)$. Temos que

$$\phi'(z)f(z) = \frac{1}{c_0 - d_0} \frac{c(z - c_0)(z - c_1)}{d(z - d_0)} = \frac{k}{c_0 - d_0} \frac{(z - c_0)(z - c_1)}{z - d_0}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(\phi(z)) &= \frac{k \left(\frac{1}{c_0 - d_0}z - \frac{d_0}{c_0 - d_0} - \xi \right) \left(\frac{1}{c_0 - d_0}z - \frac{d_0}{c_0 - d_0} - 1 \right)}{\frac{1}{c_0 - d_0}z - \frac{d_0}{c_0 - d_0}} \\ &= \frac{k}{c_0 - d_0} \frac{(z - d_0 - \xi(c_0 - d_0))(z - d_0 - (c_0 - d_0))}{z - d_0} \\ &= \frac{k}{c_0 - d_0} \frac{(z - c_1)(z - c_0)}{z - d_0}. \end{aligned}$$

Portanto, as equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são conformemente conjugadas. □

O próximo resultado nos fornece o retrato de fase das equações do lema anterior.

Proposição 6.5. *As seguintes afirmações são válidas:*

- a) *O retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z}$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da Figura 6.6.*
- b) *O retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z - \xi}{z}$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da:*

- b1) Figura i)-6.7, se $\Re(L_\xi) \neq 0$;
- b2) Figura ii)-6.7, se $\Re(L_\xi) = 0$.
- c) Seja $\xi \in \mathbb{C}$. O retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z-1)(z-\xi)}{z}$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da:
- c1) Figura i)-6.8, se $\Re(k) = 0$, $\Re(L_1) = \Re(L_\xi) = 0$ e $\Re(\xi) > 0$;
- c2) Figura ii)-6.8, se $\Re(k) = 0$, $\Re(L_1) = \Re(L_\xi) = 0$ e $\Re(\xi) < 0$;
- c3) Figura i)-6.9, se $\Re(k) = 0, \Re(L_1)\Re(L_\xi) \neq 0$;
- c4) Figura ii)-6.9, se $\Re(k) = 0$ e $\xi = 1$;
- c5) Figura i)-6.10, se $\Re(k)\Im(k) \neq 0$ e $\Re(L_1)\Re(L_\xi) = 0$;
- c6) Figura ii)-6.10, se $\Re(k)\Im(k) \neq 0$ e $\Re(L_1)\Re(L_\xi) < 0$;
- c7) Figura i)-6.11, se $\Re(k)\Im(k) \neq 0$ e $\Re(L_1)\Re(L_\xi) > 0$;
- c8) Figura ii)-6.11, se $\Re(k)\Im(k) \neq 0$ e $\xi = 1$;
- c9) Figura i)-6.12, se $\Im(k) = 0$ e $\Re(L_1)\Re(L_\xi) = 0$;
- c10) Figura ii)-6.12, se $\Im(k) = 0$ e $\Re(L_1)\Re(L_\xi) < 0$;
- c11) Figura i)-6.13, se $\Im(k) = 0$ e $\Re(L_1)\Re(L_\xi) > 0$;
- c12) Figura ii)-6.13, se $\Im(k) = 0$ e $\xi = 1$,

onde $L_1 = k(1 - \xi)$ e $L_\xi = \frac{k(\xi-1)}{\xi}$ são as partes lineares dos pontos de equilíbrio $z = 0$ e $z = \xi$.

Demonstração. a) Neste caso, $z = 0$ é o único ponto singular da função $f(z) = \frac{1}{z}$, um polo de ordem um. Pelo Corolário 3.22, em uma vizinhança perfurada de $z = 0$ o retrato de fase é uma sela.

Por outro lado, o Corolário 3.28 nos garante que no infinito o retrato de fase é topologicamente equivalente ao retrato de fase exibido na Figura 3.13.

Portanto, o retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z}$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da Figura 6.6.

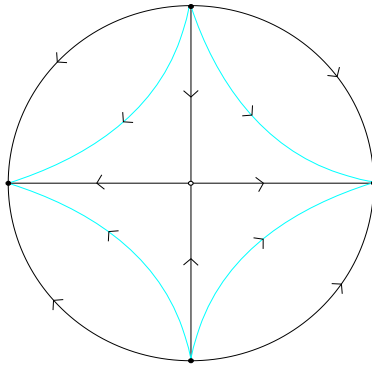


Figura 6.6: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z}$ no disco de Poincaré.

b) Inicialmente observe que $z = 0$ é o único ponto singular da função $\frac{z-\xi}{z}$ e $z = \xi$ é um ponto de equilíbrio da equação $\dot{z} = \frac{z-\xi}{z}$. Como $z = 0$ é um polo de ordem um, então pelo Corolário 3.22 o retrato de fase local é topologicamente equivalente a uma sela hiperbólica. Além disso, a derivada da função $f(z) = \frac{z-\xi}{z}$ em $z = \xi$ é $L_\xi = \frac{1}{\xi}$. Temos então que $z = \xi$ é um centro, se $\Re(L_\xi) = 0$ e $z = \xi$ é um foco estável ou instável, se $\Re(L_\xi) \neq 0$.

Em contrapartida, pelo Corolário 3.28, o retrato de fase em uma vizinhança do infinito e correspondente ao da equação $\dot{z} = 1 + \frac{\xi}{z}$.

Portanto, o retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase apresentado na Figura i)-6.7, se $\Re(L_\xi) \neq 0$ ou da Figura ii)-6.7, se $\Re(L_\xi) = 0$.

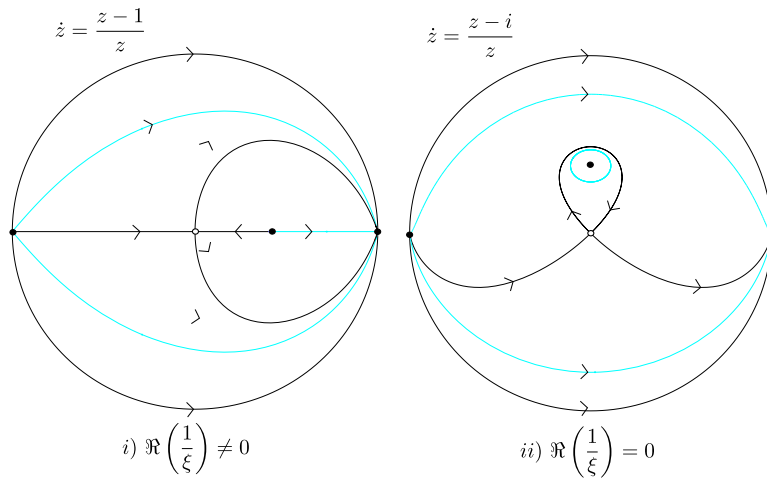


Figura 6.7: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z-\xi}{z}$ no disco de Poincaré.

c) Por fim, considere $\dot{z} = f(z)$, onde $f(z) = \frac{k(z-1)(z-\xi)}{z}$.

Como nos casos anteriores, $z = 0$ é um polo de ordem um e seu retrato de fase local é uma sela hiperbólica.

Para esta equação temos duas possibilidades: $\xi \neq 1$ ou $\xi = 1$.

Se $\xi \neq 1$, então $z = 1$ e $z = \xi$ são pontos de equilíbrio da equação $\dot{z} = f(z)$.

Uma vez que,

$$f'(z) = \frac{kz(z-\xi+z-1) - (z-1)(z-\xi)}{z^2},$$

então $L_1 = f'(1) = k(1-\xi)$ e $L_\xi = f'(\xi) = \frac{k(\xi-1)}{\xi}$. Observe que $L_1 + \xi L_\xi = 0$. De fato,

$$L_1 + \xi L_\xi = k(1-\xi) + k(\xi-1) = 0.$$

Se $\xi = 1$, então $z = 1$ é o único ponto de equilíbrio e o retrato de fase local é a união de dois setores elípticos.

Pelo Corolário 3.28, o retrato de fase em uma vizinhança do infinito corresponde ao da equação $\dot{z} = kz$. Por sua vez, o comportamento da equação $\dot{z} = kz$ irá depender se $\Re(k) = 0$, $\Re(k)\Im(k) \neq 0$ ou $\Im(k) = 0$.

Sendo assim, vamos estudar cada caso separadamente.

No que segue $\xi = \xi^R + i\xi^I$, $r = |\xi| = \xi\bar{\xi}$ e $k = a + ib$.

i) Caso $\Re(k) = 0$.

Então $k = ib$ e temos então que

$$\begin{aligned} L_1 &= k(1 - \xi) \\ &= ib(1 - \xi^I - i\xi^I) \\ &= ib(1 - \xi^R) + b\xi^I. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} L_\xi &= \frac{k(\xi - 1)}{\xi} \\ &= \frac{k\bar{\xi}(\xi - 1)}{r} \\ &= \frac{k(\bar{\xi}\xi - \bar{\xi})}{r} \\ &= \frac{ib}{r}((\xi^R)^2 + (\xi^I)^2 - \xi^R + i\xi^I) \\ &= \frac{ib}{r}((\xi^R)^2 + (\xi^I)^2 - \xi^R) - \frac{b}{r}\xi^I. \end{aligned}$$

Logo, $\Re(L_1) = b\xi^I$ e $\Re(L_\xi) = \frac{-b\xi^I}{r}$. Se $\Re(L_1) = 0$ e $\Re(L_\xi) = 0$, então $\xi^I = 0$ e, assim, os dois pontos de equilíbrio são centros e estão no eixo real.

Portanto, o retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na Figura i)-6.8, se $\xi < 0$ ou na figura ii)-6.8, se $\xi > 0$.

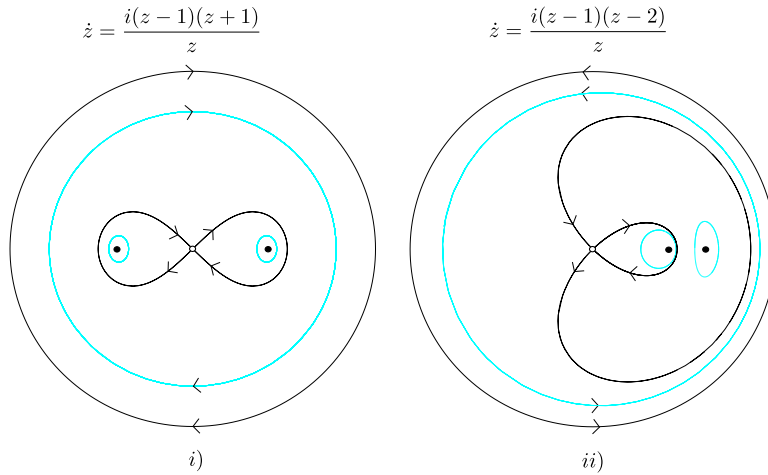


Figura 6.8: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z-1)(z-\xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Re(k) = 0$.

Se $\Re(L_1)\Re(L_\xi) < 0$, então a equação $\dot{z} = f(z)$ tem um foco/nó estável e um foco/nó instável. Portanto, o retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na Figura i)-6.9. Note que não ha nenhuma outra possibilidade para o retrato de fase neste caso, pois policiclos não podem ser estáveis ou instáveis.

Por fim, se $\xi = 1$, o retrato de fase local é a união de dois setores elíticos e o retrato de fase é dado pela figura ii)-6.9.

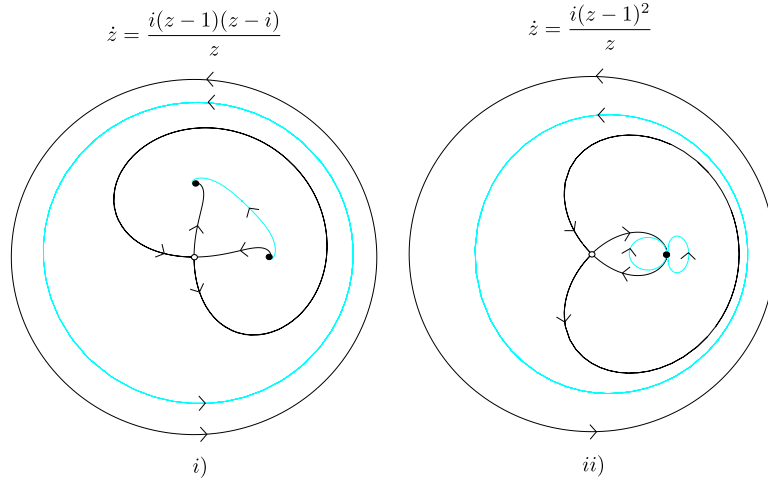


Figura 6.9: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z-1)(z-\xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Re(k) = 0$.

ii) Caso $\Re(k)\Im(k) \neq 0$.

Então $k = a + ib$ e, assim,

$$\begin{aligned} L_1 &= k(1 - \xi) \\ &= (a + ib)(1 - \xi^R - i\xi^I) \\ &= a - a\xi^R - ia\xi^I + ib - ib\xi^I + b\xi^I \\ &= a - a\xi^R + b\xi^I + i(-a\xi^I + b - ib\xi^I) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L_\xi &= \frac{k(\xi - 1)}{\xi} \\ &= \frac{k(\xi - 1)\bar{\xi}}{r} = \frac{k}{r}(\xi\bar{\xi} - \bar{\xi}) \\ &= \frac{a + ib}{r}(r - (\xi^R - i\xi^I)) = \frac{(a + ib)(r - \xi^R + i\xi^I)}{r} \\ &= \frac{ar - a\xi^R + ia\xi^I + ibr - ib\xi^R - b\xi^I}{r} \\ &= \frac{ar - a\xi^R - b\xi^I + i(a\xi^I + br - b\xi^R)}{r}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Re(L_1) = a - a\xi^R + b\xi^I = a(1 - \xi^R) + b\xi^I$$

e

$$\Re(L_\xi) = \frac{ar - a\xi^R - b\xi^I}{r} = \frac{(a(\xi^R(\xi^R - 1) + (\xi^I)^2) - b\xi^I)}{r}.$$

Se $\Re(L_1)\Re(L_\xi) = 0$, isto é, a equação tem um centro e um foco/nó, então o retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da Figura i)-6.10.

Se $\Re(L_1)\Re(L_\xi) > 0$, ou seja, os pontos de equilíbrio da equação são dois focos instáveis ou estáveis, então retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da Figura *ii*)-6.10.

Se $\Re(L_1)\Re(L_\xi) < 0$, então a equação tem um foco instável e um foco estável. O retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da Figura *i*)-6.11.

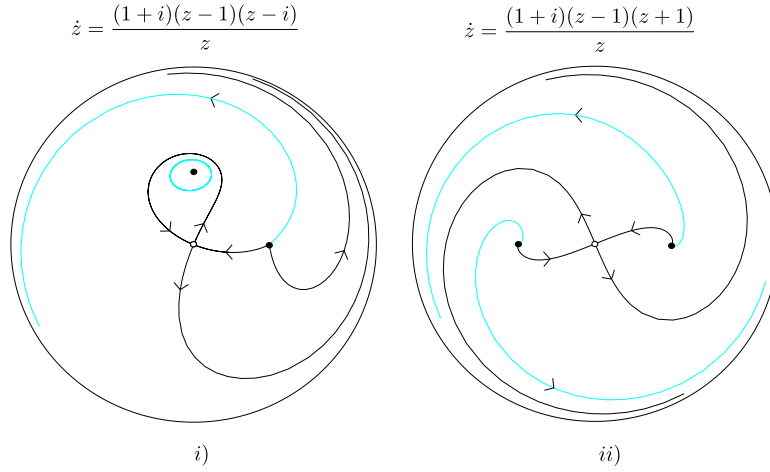


Figura 6.10: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z-1)(z-\xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Re(k)\Im(k) \neq 0$.

Note que a única solução da equação $\Re(L_1) = 0 = \Re(L_\xi)$ é $\xi^R = 0$ e $\xi^I = 0$, sendo assim não há dois centros.

Se $\xi = 1$, então $z = 1$ é o único ponto de equilíbrio e o retrato de fase é união de dois setores elípticos. Portanto, o retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da Figura *ii*)-6.11.

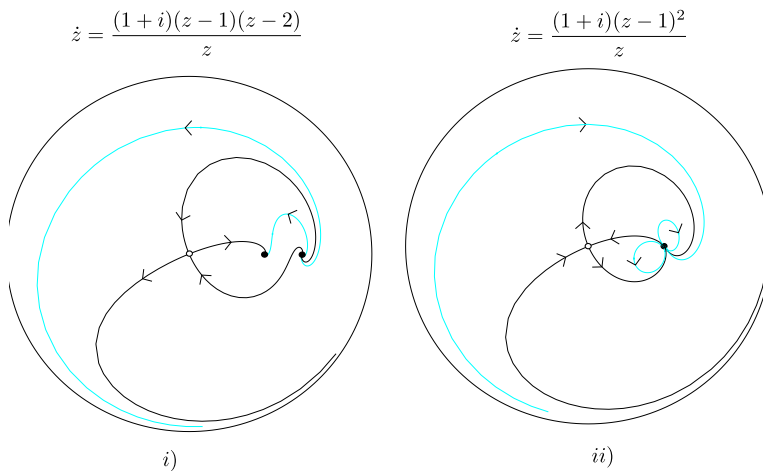


Figura 6.11: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{(z-1)(z-\xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Re(k)\Im(k) \neq 0$.

iii) Caso $\Im(k) = 0$.

Dado que $\Im(k) = 0$, então $k = a$. Portanto,

$$L_1 = k(1 - \xi) = a(1 - \xi^R - i\xi^I) = a - a\xi^R - ia\xi^I$$

e

$$\begin{aligned} L_\xi &= \frac{k}{r}(\xi - 1)\bar{\xi} = \frac{k(r - \bar{\xi})}{r} \\ &= \frac{k(r - \xi^R + i\xi^I)}{r} = \frac{ar - a\xi^R + ia\xi^I}{r}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Re(L_1) &= a(1 - \xi^R) \\ \Re(L_\xi) &= \frac{ar - a\xi^R}{r} = \frac{a((\xi^R)^2 + (\xi^I)^2 - \xi^R)}{r} = \frac{a(\xi^R(\xi^R - 1) + (\xi^I)^2)}{r}. \end{aligned}$$

Como no caso anterior, não há dois centros.

Seja $\xi \neq 1$. Se $\Re(L_1)\Re(L_\xi) = 0$, ou seja, os pontos de equilíbrio são um foco e um centro. O retrato de fase da equação no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na Figura *i*)-6.12.

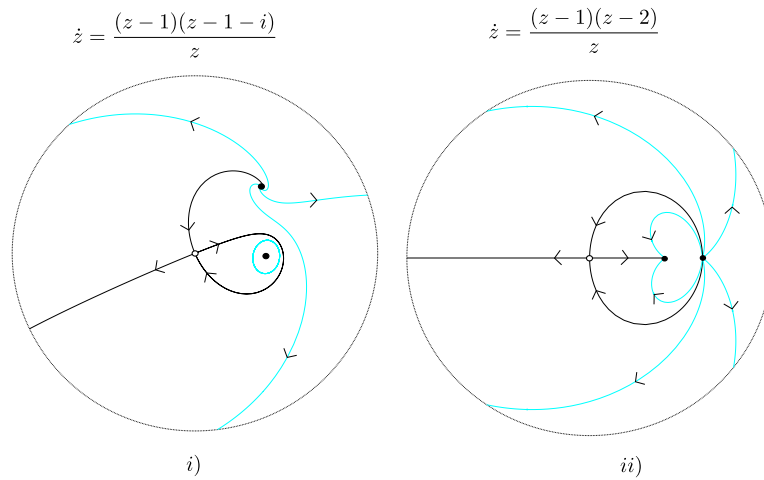


Figura 6.12: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z-1)(z-\xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Im(k) = 0$.

Se $\Re(L_1)\Re(L_\xi) < 0$, isto é, os pontos de equilíbrio são um foco estável e um foco instável. O retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na Figura *ii*)-6.12.

Se $\Re(L_1)\Re(L_\xi) > 0$, ou seja, a equação têm dois focos instáveis ou dois focos estáveis. O retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na Figura *i*)-6.13.

Se $\xi = 1$, então $z = 1$ é o único ponto de equilíbrio e o retrato de fase local é a união de dois setores elípticos. Portanto, o retrato de fase é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na Figura *ii*)-6.13. $\square$

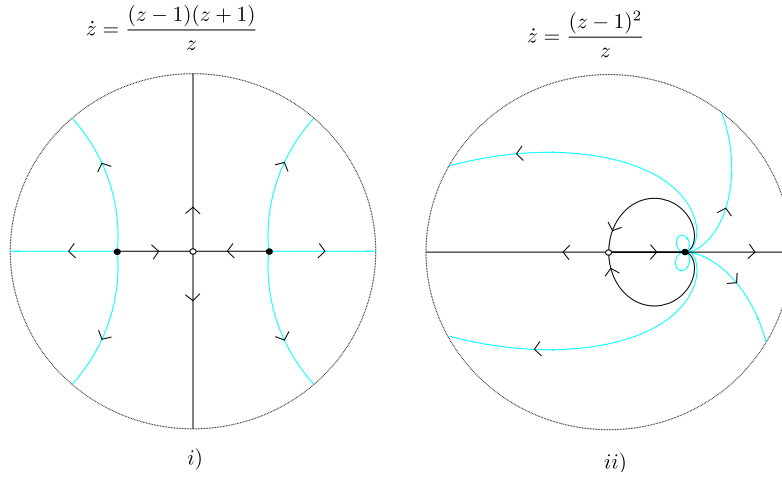


Figura 6.13: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{k(z-1)(z-\xi)}{z}$ no disco de Poincaré, onde $\Im(k) = 0$.

6.3 $\deg(P) \leq 1$ e $\deg(Q) = 2$

Para finalizar, nesta seção vamos estudar o retrato de fase da equação (6.1), com $\deg(P) \leq 1$ e $\deg(Q) = 2$.

Lema 6.6. *Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ polinômios tais que $\deg(P) \leq 1$ e $\deg(Q) = 2$ (isto é, $Q(z) = d(z-d_0)(z-d_1)$). Então a equação (6.1) é conformemente conjugada a:*

a) $\dot{z} = \frac{1}{z(z-\xi)}$, se $P(z) = c$, onde $\xi = a(d_1 - d_0)$, $a = \sqrt[3]{\frac{d}{c}}$;

b) $\dot{z} = \frac{z}{k(z-1)(z-\xi)}$, se $P(z) = c(z-c_0)$, onde $\xi = \frac{d_1-c_0}{d_0-c_0}$ e $k = \frac{c}{d(d_0-c_0)^2}$.

Demonstração. a) Sejam $f(z) = \frac{c}{d(z-d_0)(z-d_1)}$, $g(z) = \frac{1}{z(z-\xi)}$, $\phi(z) = \sqrt[3]{\frac{d}{c}}(z-d_0)$.

Temos que $\phi(z)$ é uma aplicação conforme e, além disso,

$$\phi'(z)f(z) = \sqrt[3]{\frac{d}{c}} \frac{c}{d(z-d_0)(z-d_1)} = \frac{c}{d} \sqrt[3]{\frac{d}{c}} \frac{1}{(z-d_0)(z-d_1)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(\phi(z)) &= \frac{1}{(\sqrt[3]{\frac{d}{c}}z - \sqrt[3]{\frac{d}{c}}d_0)(\sqrt[3]{\frac{d}{c}}z - \sqrt[3]{\frac{d}{c}}d_0 - \xi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{d}{c}\right)^2} (z-d_0)(z-d_0 - \frac{\xi}{a})} \\ &= \frac{c}{d} \sqrt[3]{\frac{d}{c}} \frac{1}{(z-d_0)(z-d_1)}. \end{aligned}$$

Assim, $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$ e, conseqüentemente, as equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são conformemente conjugadas.

b) Considere por fim, $f(z) = \frac{c(z-c_0)}{d(z-d_0)(z-d_1)}$, $g(z) = \frac{kz}{(z-1)(z-\xi)}$ e $\phi(z) = \frac{1}{d_0-c_0}(z-c_0)$. Temos que,

$$\phi'(z)f(z) = \frac{1}{d_0-c_0} \frac{c(z-c_0)}{d(z-d_0)(z-d_1)} = \frac{1}{c_0-d_0} \frac{c(z-c_0)}{d(z-d_0)(z-d_1)}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g(\phi(z)) &= \frac{k \left(\frac{z}{d_0-c_0} - \frac{c_0}{d_0-c_0} \right)}{\left(\frac{z}{d_0-c_0} - \frac{c_0}{d_0-c_0} - 1 \right) \left(\frac{z}{d_0-c_0} - \frac{c_0}{d_0-c_0} - \xi \right)} \\ &= \frac{\frac{k}{d_0-c_0}(z-c_0)}{\frac{1}{(d_0-c_0)^2}(z-c_0-(d_0-c_0)(z-c_0-(d_0-c_0)\xi))} \\ &= \frac{\frac{k}{d_0-c_0}(z-c_0)}{\frac{1}{(d_0-c_0)^2}(z-c_0-(d_0-c_0)(z-c_0-(d_1-c_0))} \\ &= \frac{1}{d_0-c_0} \frac{c(z-c_0)}{d(z-d_0)(z-d_1)}. \end{aligned}$$

Logo, $\phi'(z)f(z) = g(\phi(z))$ e daí concluímos que as equações $\dot{z} = f(z)$ e $\dot{z} = g(z)$ são conformemente conjugadas. $\square$

A próxima proposição nos fornece os retratos de fase das formas normais da proposição anterior.

Proposição 6.7. *As seguintes afirmações são válidas:*

a) *O retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z(z-\xi)}$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da:*

a1) *Figura i)-6.14 ou a Figura ii)-6.14, se $\xi \neq 0$;*

a)) *Figura 6.15, se $\xi = 0$.*

b) *O retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z}{k(z-1)(z-\xi)}$ no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase da:*

b1) *Figura i)-6.16 ou a Figura ii)-6.16, se $\Re(L_0) = 0$;*

b2) *Figura i)-6.17 ou a Figura ii)-6.17, se $\Re(L_0) \neq 0$;*

b3) *Figura 6.18, se $\xi = 1$ e $\Re(L_0) = 0$;*

b4) *Figura 6.18, se $\xi = 1$ e $\Re(L_0) \neq 0$.*

onde L_0 é a parte linear do ponto de equilíbrio $z = 0$.

Demonstração. a) Pelo Corolário 3.28 o retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z(z-\xi)}$ no infinito é topologicamente equivalente ao retrato de fase no infinito da equação $\dot{z} = \frac{1}{z^2}$.

Além do mais, temos duas possibilidades: $\xi \neq 0$ ou $\xi = 0$. Se $\xi \neq 0$, então $z = 0$ e $z = \xi$ são pontos singulares da equação $\dot{z} = \frac{1}{z(z-\xi)}$ e são polos de ordem 1, sendo assim,

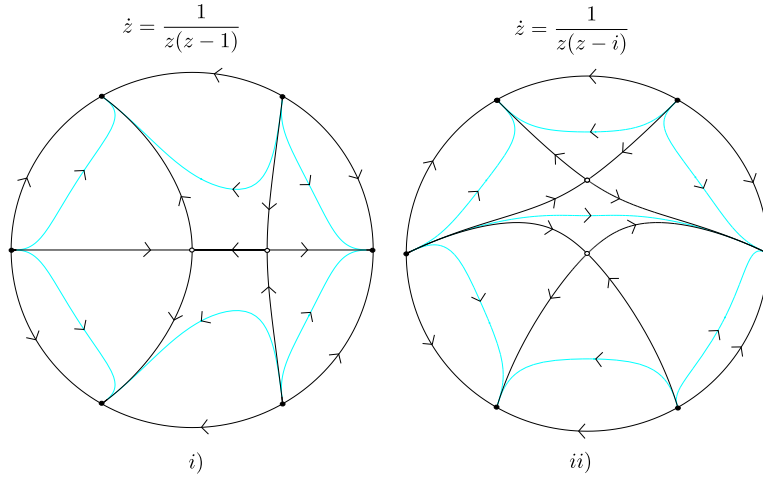


Figura 6.14: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z(z-\xi)}$ no disco de Poincaré, onde $\xi \neq 0$.

os retratos de fase locais são formados por 4 setores hiperbólicos. Desse modo, $z = 0$ e $z = \xi$ são pontos de sela.

Portanto, o retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente a equivalente ao retrato de fase apresentado na Figura *i*)-6.14 ou na Figura *ii*)-6.14, dependendo da conexão das separatrizes.

Se $\xi = 0$, então a origem é um polo de ordem 2, consequentemente o Corolário 3.22 nos diz que o retrato de fase local é a união de 6 setores hiperbólicos. Portanto, o retrato de fase no disco de Poincaré é dado pela Figura 6.15.

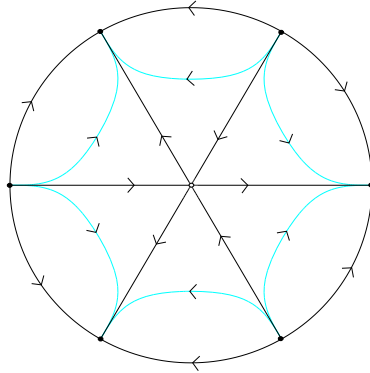


Figura 6.15: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{1}{z(z-\xi)}$ no disco de Poincaré, onde $\xi = 0$.

b) Segue do Corolário 3.28 que próximo ao infinito o retrato de fase da equação é topologicamente equivalente ao retrato de fase mostrado na Figura 3.12.

Além disso, $z = 0$ é o único ponto de equilíbrio da equação, $z = 0$ é um centro se $\Re(L_0) = 0$ ou é um foco/nó se $\Re(L_0) \neq 0$. Como no caso anterior temos duas possibilidades: $\xi \neq 0$ ou $\xi = 0$.

Se $\xi \neq 0$, então $z = 1$ e $z = \xi$ são polos de ordem 1 e segue pelo Corolário 3.22 que são pontos de selas. Portanto, se $\Re(L_0) = 0$ o retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase apresentado na Figura *i*)-6.16 ou na Figura *ii*)-6.16, dependendo da conexão das separatrizes.

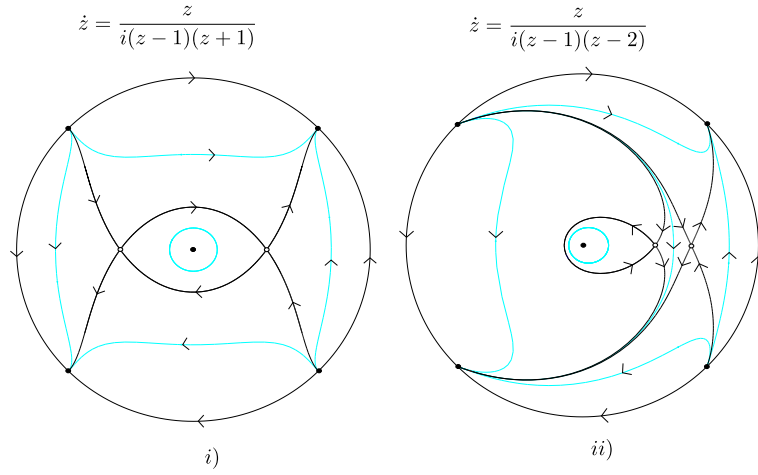


Figura 6.16: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z}{z(z-\xi)}$ no disco de Poincaré se $\xi \neq 1$ e $\Re(L_0) = 0$.

Se $\Re(L_0) \neq 0$, o retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase exibido na Figura *i*)-6.17 ou a Figura *ii*)-6.17, dependendo da conexão das separatrizes.

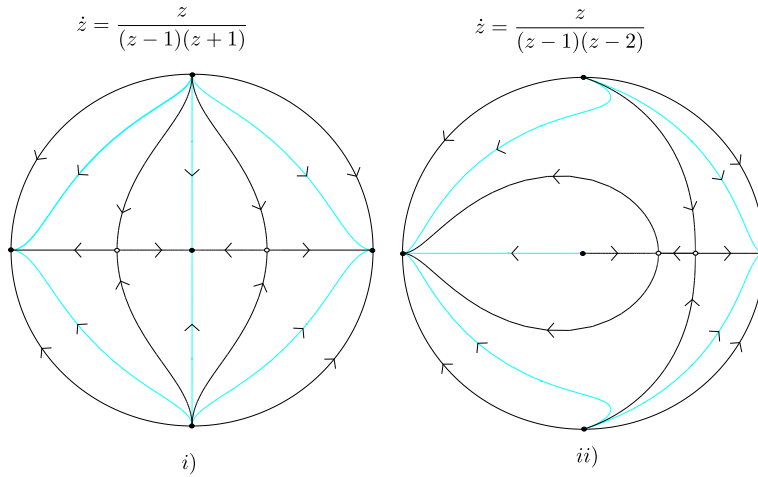


Figura 6.17: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z}{z(z-\xi)}$ no disco de Poincaré se $\xi \neq 1$ e $\Re(L_0) \neq 0$.

Finalmente, se $\xi = 1$, então $z = 1$ é um polo de ordem 2 e o retrato de fase local em uma vizinhança de $z = 1$ é a união de 6 setores hiperbólicos. Portanto, o retrato de fase no disco de Poincaré é topologicamente equivalente ao retrato de fase apresentado na Figura *i*)-6.18, se $\Re(L_0) = 0$ ou a Figura *ii*)-6.18, se $\Re(L_0) \neq 0$. $\square$

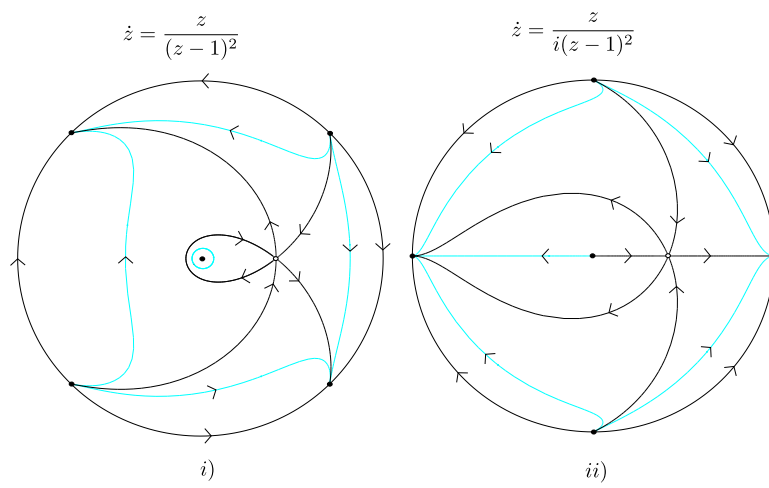


Figura 6.18: Retrato de fase da equação $\dot{z} = \frac{z}{z(z-\xi)}$ se $\xi = 1$.

7 Sistemas Holomorfos por Partes

Estudaremos neste capítulo os sistemas holomorfos por partes. Veremos alguns retratos de fase de tais sistemas a partir das formas normais que aparecem no Teorema 3.11. Além disso, daremos algumas condições que garantem a existência de ciclo limite para sistemas holomorfos por partes.

7.1 Retrato de Fase e Pontos de Tangência em Sistemas Holomorfos por Partes

Consideremos $f^+(z) = u_1(z) + iv_1(z)$ e $f^-(z) = u_2(z) + iv_2(z)$ funções holomorfas. Seja $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $h(z) = \Im(z)$. A reta $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) = 0\}$ divide o plano em duas regiões $\Sigma^+ = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$ e $\Sigma^- = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) < 0\}$.

Consideremos também o sistema holomorfo por partes

$$\begin{cases} \dot{z} = f^+(z), & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = f^-(z), & \text{se } \Im(z) < 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Vamos considerar as funções f^+ e f^- como campos vetoriais no plano, isto é, $f^+(x, y) = (u_1(x, y), v_1(x, y))$ e $f^-(x, y) = (u_2(x, y), v_2(x, y))$, onde $z = x + iy$. Além disso, vamos representar a função h em termos de suas partes real e imaginária como uma função de duas variáveis reais, $h(x, y) = y$. Note que $\Sigma = \{(x, y); y = 0\}$.

Uma vez que

$$(f^+)h(x, y) = \langle (u_1(x, y), v_1(x, y)), \nabla h(x, y) \rangle = \langle (u_1(x, y), v_1(x, y)), (0, 1) \rangle = v_1(x, y)$$

e

$$(f^-)h(x, y) = \langle (u_2(x, y), v_2(x, y)), \nabla h(x, y) \rangle = \langle (u_2(x, y), v_2(x, y)), (0, 1) \rangle = v_2(x, y),$$

segue que as regiões de costura, deslize e escape são definidas por:

$$\begin{aligned} \Sigma^c &= \{p \in \Sigma; v_1(p)v_2(p) > 0\}; \\ \Sigma^s &= \{p \in \Sigma; v_1(p) < 0 \text{ e } v_2(p) > 0\}; \\ \Sigma^e &= \{p \in \Sigma; v_1(p) > 0 \text{ e } v_2(p) < 0\}. \end{aligned}$$

Além disso, os pontos de tangência são caracterizados pelos pontos $p \in \Sigma$, tais que $v_1(p) = 0$ ou $v_2(p) = 0$.

Como mostrado no Capítulo 2, as órbitas em Σ^c são naturalmente conectadas, já as órbitas em Σ^s e Σ^e são dadas pelo campo deslizante $F^s(p)$.

Usando 2.7, temos que:

$$\begin{aligned}
 F^s(p) &= \frac{1}{(f^-)h(p) - (f^+)h(p)} \left((f^-)h(p)f^+(p) - (f^+)h(p)f^-(p) \right) \\
 &= \frac{1}{v_2(p) - v_1(p)} \left((v_2(p)u_1(p), v_2(p)v_1(p)) - (v_1(p)u_2(p), v_1(p)v_2(p)) \right) \\
 &= \left(\frac{v_2(p)u_1(p) - v_1(p)u_2(p)}{v_2(p) - v_1(p)}, 0 \right) = \left(\frac{v_1(p)u_2(p) - v_2(p)u_1(p)}{v_1(p) - v_2(p)}, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de sistemas holomorfos por partes:

Exemplo 7.1. Consideremos

$$\begin{cases} \dot{z} = z - 2i, & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = i, & \text{se } \Im(z) < 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Note que $z = 2i$ é um ponto de equilíbrio da equação $\dot{z} = f^+(z) = z - 2i$ e é um nó instável, pois $2i$ é um zero simples da função f^+ , $\Re((f^+)'(2i)) = 1 > 0$ e $\Im((f^+)'(2i)) = 0$. Note ainda que a equação $\dot{z} = f^-(z) = i$ não possui pontos de equilíbrio e nem pontos singulares.

A função $z - 2i$ pode ser representada por $(z - 2) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$, onde $u_1(x, y) = x$ e $v_1(x, y) = y - 2$, já a função constante i é representada por $i = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$, onde $u_2 = 0$ e $v_2(x, y) = 1$.

Para $p \in \Sigma$, temos $v_1(p) = -2 < 0$ e $v_2(p) = 1 > 0$. Logo, $\Sigma = \Sigma^s$. Além disso, $F^s(x, 0) = (\frac{x}{3}, 0)$. Veja a Figura 7.1.

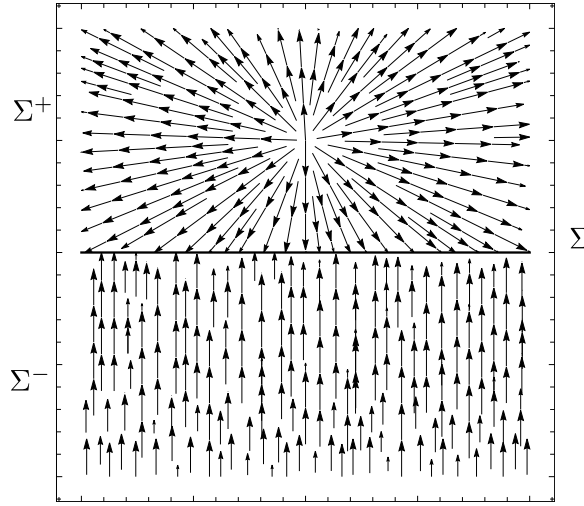


Figura 7.1: Retrato de fase do sistema (7.2).

Exemplo 7.2. Consideremos

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{1}{z - i}, & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = z + i, & \text{se } \Im(z) < 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Observe que $z = i$ é um ponto singular da equação $\dot{z} = f^+(z) = \frac{1}{z - i}$ e é um polo de ordem 1, sendo assim, $z = i$ é um ponto de sela. Observe ainda que $z = -i$ é um ponto

de equilíbrio da equação $\dot{z} = f^-(z) = z + i$ e é um nó instável, já que $z = -i$ é um zero simples, $\Re((f^-)'(-i)) = 1 > 0$ e $\Im((f^-)'(-i)) = 0$.

Temos que $\frac{1}{z-i} = u_1(x, y) + v_1(x, y)i$ e $(z + i) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$, onde $u_1(x, y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2}$, $v_1(x, y) = \frac{-y+1}{x^2+(y-1)^2}$, $u_2(x, y) = x$ e $v_2(x, y) = y + 1$.

Para $(x, 0) = p \in \Sigma$, $v_1(p) = \frac{1}{x^2} > 0$ e $v_2(p) = 1 > 0$. Logo, $\Sigma = \Sigma^c$. Veja a Figura 7.2.

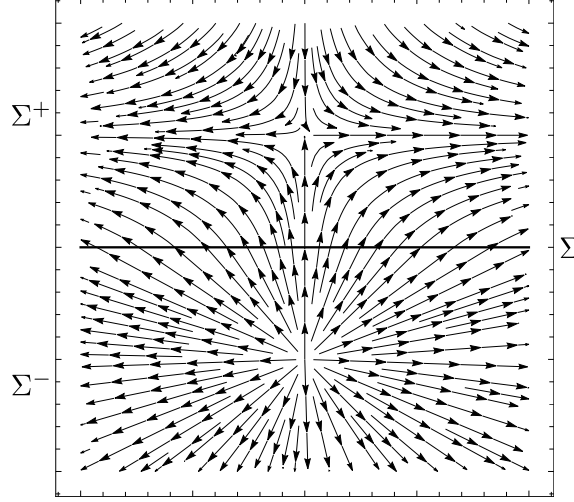


Figura 7.2: Retrato de fase do sistema (7.3).

Observação 7.3. Se $f_{\pm}^h := h \circ \varphi_{\pm}(t, p)$, então $(f_{\pm}^h)'(0) = \langle \nabla h(p), f^{\pm}(p) \rangle = f^{\pm}h(p)$.

Proposição 7.4. Sejam $f^{\pm}$ e $g^{\pm}$ funções holomorfas e 0-conformemente conjugadas pela função ϕ . Então ϕ preserva regiões de costura, deslize, e escape. Isto é, valem as seguintes afirmações:

- a) Se $p \in \Sigma^c$, então $\phi(z) \in \tilde{\Sigma}^c := \phi(\Sigma^c)$;
- b) Se $p \in \Sigma^s$, então $\phi(z) \in \tilde{\Sigma}^s := \phi(\Sigma^s)$;
- c) Se $p \in \Sigma^e$, então $\phi(z) \in \tilde{\Sigma}^e := \phi(\Sigma^e)$.

Demonstração. Seja $\tilde{h}$ uma função tal que $\tilde{\Sigma} = \tilde{h}^{-1}(0)$. Temos que $\tilde{h} = \phi(\Sigma)$, implica que $h(x, y) = \tilde{h} \circ \phi(x, y)$ para todo $(x, y) \in \Sigma$. Além disso, pela regra da cadeia

$$\nabla h(p) = \nabla \tilde{h}(\phi(p)) D\phi(p). \quad (7.4)$$

Considere agora $p \in \Sigma^c$, então $(f^+)h(p)(f^-)h(p) > 0$. Queremos mostrar que $\phi(p) \in \tilde{\Sigma}^c$, ou seja, $(g^+)\tilde{h}(p)(g^-)\tilde{h}(p) > 0$. Para verificar tal afirmação seja $f_{\pm}^h = \tilde{h} \circ \varphi_{g^{\pm}}(t, \phi(p))$.

Como por hipótese $f^{\pm}$ e $g^{\pm}$ são 0-conformemente conjugadas, então $\varphi_{g^{\pm}}(t, \phi(x, y)) = \phi \circ \varphi_{f^{\pm}}(t, x, y)$. Logo $f_{\pm}^h(t) = \tilde{h} \circ \phi \circ \varphi_{f^{\pm}}(t, p)$ e, usando a equação (7.4), obtemos que:

$$\begin{aligned} (f_{\pm}^h)'(0) &= \nabla h(\phi(p)) D\phi(p) f^{\pm}(p) \\ &= \nabla \tilde{h}(p) f^{\pm}(p). \end{aligned}$$

Portanto, $(g^+)\tilde{h}(p)(g^-)\tilde{h}(p) = (f^+)h(p)(f^-)h(p) > 0$ e consequentemente $\phi(p) \in \tilde{\Sigma}^c$. De maneira semelhante os itens b) e c) são verificados. $\square$

Usando as mesmas ideias da proposição anterior, temos o resultado:

Corolário 7.5. *Se $f^\pm$ e $g^\pm$ são conformemente conjugadas próximas a origem através das aplicações $\phi^\pm$. Se $\phi^\pm(\Sigma) = \widetilde{(\Sigma)}$, então*

$$\phi = \left(\frac{1 + \operatorname{sgn}(x)}{2} \right) \phi^+ + \left(\frac{1 - \operatorname{sgn}(x)}{2} \right) \phi^-$$

preserva as regiões de costura, deslize e escape.

Para concluir a seção, vamos estudar os pontos de contato entre $f^+ = u_i + iv_1$ e $f^- = u_2 + iv_2$ com $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) = 0\}$. Consideremos $p \in \Sigma$ um ponto de dobra de f^+ com Σ , então $(f^+)h(p) = 0$ e $(f^+)^2h(p) \neq 0$.

Como

$$(f^+)h(p) = \langle (u_1(p), v_2(p)), (0, 1) \rangle = v_1(p)$$

e

$$\begin{aligned} (f^+)^2h(p) &= \left\langle (u_1(p), v_2(p)), \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}(p), \frac{\partial v_1}{\partial y}(p) \right) \right\rangle \\ &= u_1(p) \frac{\partial v_1}{\partial x}(p) + v_1(p) \frac{\partial v_1}{\partial y}(p), \end{aligned}$$

então $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra se $v_1(p) = 0$, $u_1(p) \neq 0$ e $\frac{\partial v_1}{\partial x}(p) \neq 0$. Além disso, $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra visível para f^+ (respectivamente invisível) se $u_1(p) \frac{\partial v_1}{\partial x}(p) > 0$ (respectivamente, $u_1(p) \frac{\partial v_1}{\partial x}(p) < 0$).

De maneira semelhante, $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra visível para f^- (respectivamente, invisível) se $u_2(p) \frac{\partial v_2}{\partial x}(p) > 0$ (respectivamente, $u_2(p) \frac{\partial v_2}{\partial x}(p) < 0$).

Mais geralmente:

Definição 7.6. Considere o sistema (7.1), $k \in \mathbb{N}$ e $q \in \Sigma$ tal que $v_1(p) = 0$ ou $v_2(p) = 0$.

- Dizemos que f^+ tem **contato de multiplicidade** k com Σ no ponto p , se $v_1(p) = 0$, $u_1(p) \neq 0$, $\frac{\partial^{i-1}v_1}{\partial x^{k-1}}(p) = 0$ para $i = 2, \dots, k-1$ e $\frac{\partial^{k-1}v_1}{\partial x^{k-1}}(p) \neq 0$. Além disso, se k é par então o contato é **visível**, se $u_1^{k-1}(p) \frac{\partial^{k-1}v_1}{\partial x^{k-1}}(p) > 0$ e **invisível**, se $u_1^{k-1}(p) \frac{\partial^{k-1}v_1}{\partial x^{k-1}}(p) < 0$.
- Dizemos que f^- tem **contato de multiplicidade** k com Σ no ponto p , se $v_2(p) = 0$, $u_2(p) \neq 0$, $\frac{\partial^{i-1}v_2}{\partial x^{k-1}}(p) = 0$ para $i = 2, \dots, k-1$ e $\frac{\partial^{k-1}v_2}{\partial x^{k-1}}(p) \neq 0$. Além disso, se k é par então o contato é **visível**, se $u_2^{k-1}(p) \frac{\partial^{k-1}v_2}{\partial x^{k-1}}(p) < 0$ e **invisível**, se $u_2^{k-1}(p) \frac{\partial^{k-1}v_2}{\partial x^{k-1}}(p) > 0$.

A próxima proposição caracteriza o contato de multiplicidade $k = 2$ de uma função holomorfa F com Σ .

Proposição 7.7. *Sejam $F(z) = u + iv$ uma função holomorfa e $z = x + iy$. Então $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra se, e somente se, $v(p) = 0$, $u(p) \neq 0$ e $\Im(F'(p)) \neq 0$.*

Demonstração. Como F é uma função holomorfa em p , então $F'(q) = \frac{\partial u}{\partial x}(p) + i \frac{\partial v}{\partial x}(p)$. Logo, $\Im(F'(p)) = \frac{\partial v}{\partial x}(p)$ e o resultado segue das considerações anteriores. $\square$

Exemplo 7.8. Seja $\dot{z} = f(z)$, onde $f(z) = i(z + i)$.

Observe que $u(x, y) = \Re(f(z)) = -y - 1$ e $v(x, y) = \Im(f(z)) = x$. Logo, $p = (0, 0)$ é o único ponto de contato de f com Σ e é um ponto de dobra, pois $u(p) = -1 \neq 0$ e $\frac{\partial v}{\partial x}(p) = 1 \neq 0$. Veja a Figura 7.3.

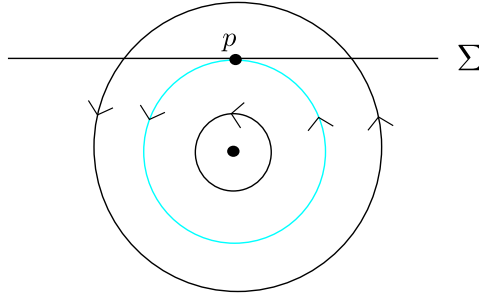


Figura 7.3: Contato entre a função $i(z + i)$ e Σ .

Exemplo 7.9. Consideremos a equação $\dot{z} = (z + i)^3$. A função $(z + i)^3$ é representada em termos de suas partes real e imaginária por:

$$(z + i)^3 = (x^3 - 6xy - 3x - 3xy^2) + i(-3y^2 + 3x^2y + 3x^2 - y^3 - 3y - 1) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Para $(x, 0) = p \in \Sigma$, $v(p) = 3x^2 - 1$. Logo, $p_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ e $p_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ são pontos de contato entre f e Σ . Uma vez que, $u(p_1) = -\frac{8\sqrt{3}}{9}$, $u(p_2) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$, $\frac{\partial v}{\partial x}(p_1) = 2\sqrt{3} \neq 0$ e $\frac{\partial v}{\partial x}(p_2) = -2\sqrt{3} \neq 0$, então p_1 e p_2 são pontos de dobra. Veja a Figura 7.4.

Exemplo 7.10. Consideremos a equação $\dot{z} = \frac{1}{(z+i)^3} = f(z)$.

Temos que

$$\frac{1}{(z+i)^3} = \frac{x(x^2 - 3(y+1)^2)}{(x^2 + (y+1)^2)^3} + i \frac{(y+1)((y+1)^2 - 3x^2)}{(x^2 + (y+1)^2)^3} = u(x, y) + iv(x, y).$$

Para $(x, 0) = p \in \Sigma$, $v(p) = \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}$, daí segue que $p_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ e $p_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ são pontos de contato entre f e Σ .

Como $u(p_1) = u(p_2) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}(p_1) = \frac{\partial v}{\partial x}(p_2) = -\frac{81}{32}$, segue que p_1 e p_2 são pontos de dobra. Veja a Figura 7.5.

Exemplo 7.11. Seja $\dot{z} = f(z)$, onde $f(z) = \frac{(z+i)^2}{1+(z+i)}$.

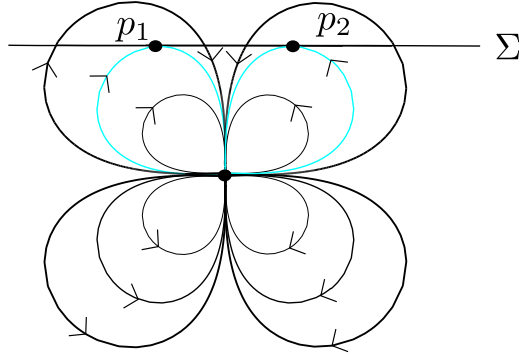


Figura 7.4: Contato entre a função $(z+i)^3$ e Σ .

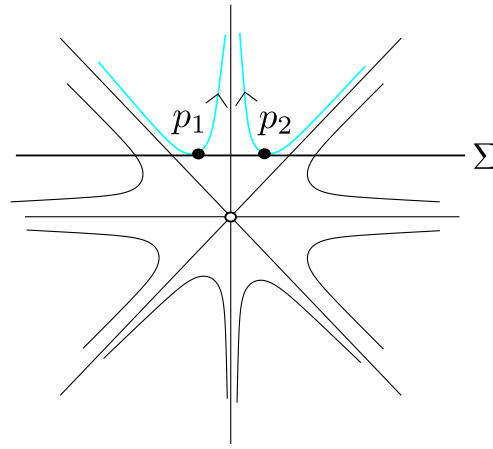


Figura 7.5: Contato entre a função $\frac{1}{(z+i)^3}$ e Σ .

Temos que

$$u(x, y) = \Re(f(z)) = \frac{x^2 + x^3 + (x-1)(1+y)^2}{(x+1)^2 + (y+1)^2}$$

e

$$v(x, y) = \Im(f(z)) = \frac{(1+y)(2x + x^2 + (1+y)^2)}{(x+1)^2 + (y+1)^2}.$$

Para $(x, 0) = p \in \Sigma$, $v(p) = \frac{2x + x^2 + 1}{(x+1)^2 + 1}$, daí segue que $(-1, 0)$ é o único ponto de contato entre f e Σ . Uma vez que, $u(-1, 0) = -2$, $\frac{\partial v}{\partial x}(-1, 0) = 0$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(-1, 0) = 2 \neq 0$, então $f(z)$ tem um contato de multiplicidade $k = 3$ com Σ . Veja a Figura 7.6.

7.2 Ciclos Limites em Sistemas Holomorfos por Partes

No Capítulo 4 vimos que os sistemas holomorfos não possuem ciclo limite, porém é possível mostrar que os sistemas holomorfos por partes possuem ciclo limite. Por está

razão, encontraremos condições que garantem a existência de ciclo limite para sistemas holomorfos por partes.

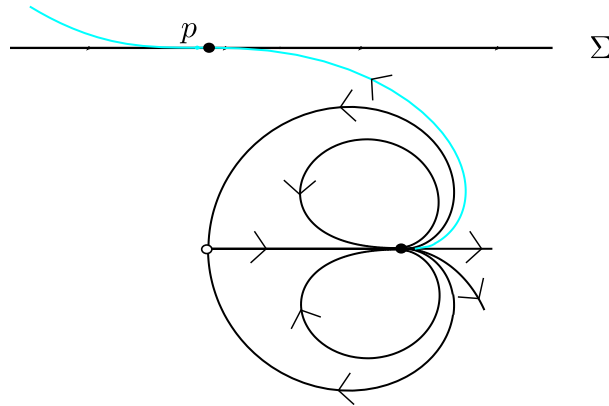


Figura 7.6: Contato entre a função $\frac{(z+i)^2}{1+(z+i)}$ e Σ .

Iniciaremos estudando o caso linear.

Proposição 7.12. *Os sistemas holomorfos lineares por partes cujos pontos de equilíbrio estão na região Σ têm no máximo um ciclo limite.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que um dos campos lineares tem um ponto de equilíbrio na origem. Assim, podemos escrever o sistema como

$$\begin{cases} \dot{z} = (a + ib)(z - x_0) & \text{se } \Im(z) < 0, \\ \dot{z} = (c + id)z & \text{se } \Im(z) > 0, \end{cases} \quad (7.5)$$

onde a, b, c, d e x_0 são números reais.

Note que se d, b e x_0 são zeros, então o sistema não tem ciclo limite. Então assumiremos que d, b e x_0 são não nulos. Considere $w_0 \in \mathbb{R}^+$.

Se $b > 0$, então

$$z^+(t) = (w_0 - x_0)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) + x_0$$

é solução da equação $\dot{z} = (a + ib)(z - x_0)$ com $z^+(0) = w_0$ e $z^+(\frac{\pi}{b}) = x_0 - (w_0 - x_0)e^{\frac{a\pi}{b}}$.

Além disso,

$$z^-(t) = -e^{ct}((w_0 - x_0)e^{\frac{a\pi}{b}} - x_0)(\cos(dt) + i \sin(dt))$$

é a solução da equação $\dot{z} = (c + id)z$, tal que $z^-(0) = x_0 - (w_0 - x_0)e^{\frac{a\pi}{b}}$, $z^-(\frac{\pi}{d}) = e^{\frac{c\pi}{d}}((w_0 - x_0)e^{\frac{a\pi}{b}} - x_0)$ e $d < 0$. Por outro lado, se $b < 0$, então

$$z^+(t) = -(w_0 + x_0)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) + x_0$$

é solução da equação $\dot{z} = (a + ib)(z - x_0)$ que satisfaz $z^+(0) = -w_0$ e $z^+(\frac{-\pi}{b}) = x_0 + (w_0 + x_0)e^{\frac{-a\pi}{b}}$. Além do mais,

$$z^-(t) = e^{ct}((w_0 + x_0)e^{\frac{-a\pi}{b}} + x_0)(\cos(dt) + i \sin(dt))$$

é solução da equação $\dot{z} = (c + id)z$ satisfazendo $z^-(0) = x_0 + (w_0 + x_0)e^{-\frac{a\pi}{b}}$ e $z^-(\frac{-\pi}{d}) = e^{-\frac{c\pi}{d}}((-w_0 - x_0)e^{-\frac{a\pi}{b}} - x_0)$ com $d < 0$.

Logo, a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = \pm w_0$ é dada por

$$\Pi(z) = e^{\frac{\pm c\pi}{d}}((z - x_0)e^{\frac{\pm a\pi}{b}} - x_0)$$

Temos que a derivada da aplicação de Poincaré em $\pm w_0$ é $\Pi(\pm) = e^{\pm(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})\pi}$.

Agora vamos buscar as soluções da equação $\Pi(\pm w_0) = \pm w_0$. O número de zeros desta equação corresponde ao número de ciclos limites.

Se $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 0$, então a equação $\Pi(\pm w_0) = \pm w_0$ não tem solução. Por outro lado, se $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq 0$, então a equação $\Pi(\pm w_0) = \pm w_0$ tem uma única solução que é dada por $w_0 = \frac{e^{\frac{c\pi}{d}}(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})x_0}{-1 + e^{(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})\pi}}$, se $b > 0$ e $w_0 = \frac{e^{-\frac{c\pi}{d}}(1 + e^{-\frac{a\pi}{b}})x_0}{-1 + e^{(-\frac{a}{b} - \frac{c}{d})\pi}}$, se $b < 0$. Logo, o sistema (7.5) tem no máximo um ciclo limite. $\square$

Observação 7.13. É possível encontrar sistemas holomorfos lineares por partes que satisfazem as condições dadas na demonstração da proposição anterior, como por exemplo, se tomarmos $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -1$ e $x_0 = 1$, então o sistema (7.5) tem um único ciclo limite (veja a Figura 7.7).

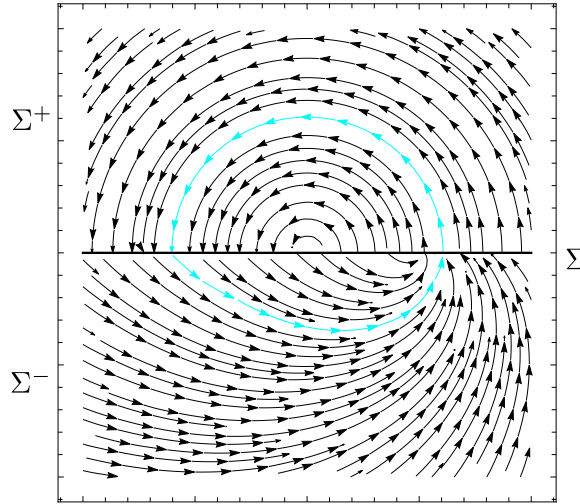


Figura 7.7: Retrato de fase do sistema 7.5, onde $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -1$ e $x_0 = 1$.

Vamos estudar agora os campos vetoriais z^n , em que $n \geq 2$. Dividiremos nossa análise em 5 casos que dependem de n . Em cada caso, usaremos a simetria das formas normais e que os raios $\frac{j\pi}{n-1}$, $j = 1, \dots, (2n-1)$ (respectivamente, $\frac{j\pi}{2(n-1)}$, $j = 1, 3, \dots, 4(n-1) - 1$) são invariantes pelo fluxo da equação $\dot{z} = z^n$, se n é par (respectivamente, $\dot{z} = iz^n$, se n é ímpar).

Teorema 7.14. *Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Então, existem números reais não nulos a , b , d , y_0 e $z = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ que satisfazem a Tabela 7.1 tal que o sistema holomorfo por partes*

$$\begin{cases} \dot{z} = i^m(z + z_0)^n, & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) < 0, \end{cases}$$

tem um único ciclo limite estável, onde $m = 0$ se n é par e $m = 1$ se n é ímpar.

n	k	a	b	d	x_0	y_0	Hipótese Principal
$4k - 2$	1	−	+	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	+	$d > -x_0$
$4k - 1$	≥ 1	−	−	−	0	+	$\cotg\left(\frac{n\pi}{2(n-1)}\right) y_0 < -\frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}} < 0$
$4k$	≥ 1	−	−	−	0	0	$\cotg\left(\frac{n\pi}{2(n-1)}\right) y_0 < -\frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}} < 0$
$4k - 2$	> 1	−	+	+	0	+	$0 < \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}} < \cotg\left(\frac{(n-2)\pi}{2(n-1)}\right) y_0$
$4k + 1$	≥ 1	−	+	+	0	+	$0 < \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}} < \cotg\left(\frac{(n-2)\pi}{2(n-1)}\right) y_0$

Tabela 7.1: Tabela Teorema 7.14.

A demonstração do teorema é consequência das próximas proposições.

Proposição 7.15. *Sejam a e b números reais não nulos, $d \in \mathbb{R}$ e $z_0 = x_0 + iy_0$ com $y_0 > 0$. Se $a < 0 < b$ e $d > -x_0$, então o sistema holomorfo por partes*

$$\begin{cases} \dot{z} = (z + z_0)^2, & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) < 0, \end{cases} \quad (7.6)$$

tem um ciclo limite estável.

Demonstração. O sistema (7.6) pode ser escrito em coordenadas cartesianas como

$$\begin{cases} (\dot{x}, \dot{y}) = ((x + x_0)^2 - (y + y_0)^2, 2(x + x_0)(y + y_0)), & \text{se } y > 0, \\ (\dot{x}, \dot{y}) = (a(x - d) - by, b(x - d) + ay), & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Considerando as órbitas do sistema (7.7), quando $y > 0$, temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x + x_0)(y + y_0)}{(x + x_0)^2 - (y + y_0)^2},$$

ou equivalentemente

$$-2(x + x_0)(y + y_0)dx + ((x + x_0)^2 - (y + y_0)^2)dy = 0. \quad (7.8)$$

A forma (7.8) não é exata, porém ela torna-se exata após multiplicarmos pelo fator de integração $\mu(y) = \frac{1}{(y + y_0)^2}$. Logo, a solução da equação (7.8) com condição inicial $x(0) = w_0 > -x_0$ e $y(0) = 0$, satisfaz que

$$\frac{(x + x_0)^2}{y + y_0} + y = \frac{(w_0 + x_0)^2}{y_0}.$$

Note que $y = 0$ se, e somente se, $x = w_0$ ou $x = -2x_0 - w_0$, então existe $t_0 > 0$ tal que $x(t_0) = -2x_0 - w_0$ e $y(t_0) = 0$. Além disso,

$$z^-(t) = -(d + w_0 + 2x_0)e^{at}(\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt)) + d$$

é solução de $\dot{z} = (a + bi)(z - d)$ satisfazendo que $z^-(0) = -2x_0 - w_0$ e

$$z^-\left(\frac{\pi}{b}\right) = d + (d + 2x_0 + w_0)e^{\frac{a\pi}{b}}. \quad (7.9)$$

Logo, a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = w_0$ é dado por $\Pi(z) = d + (d + 2x_0 + z)e^{\frac{a\pi}{b}}$ e a derivada de Π em w_0 é $\Pi'(w_0) = e^{\frac{a\pi}{b}} < 1$.

Agora, vamos buscar as soluções da equação $\Pi(w_0) = w_0$. O número de soluções desta equação corresponde ao número de ciclos limite do sistema.

Como por hipótese $a \neq 0$, decorre que a equação $\Pi(w_0) = w_0$ tem uma única solução que é dado por $\frac{d + e^{\frac{a\pi}{b}}(d + 2x_0)}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}}$. Portanto, o sistema (7.6) tem um único ciclo limite estável. $\square$

Observação 7.16. É possível encontrar sistemas holomorfos partes que satisfazem as condições dadas na Proposição 7.15. De fato, se tomarmos $a = -1$, $b = 1$, $d = 1$ e $z_0 = i$ então o sistema holomorfo por partes (7.6) tem um ciclo limite estável (veja a Figura 7.8).

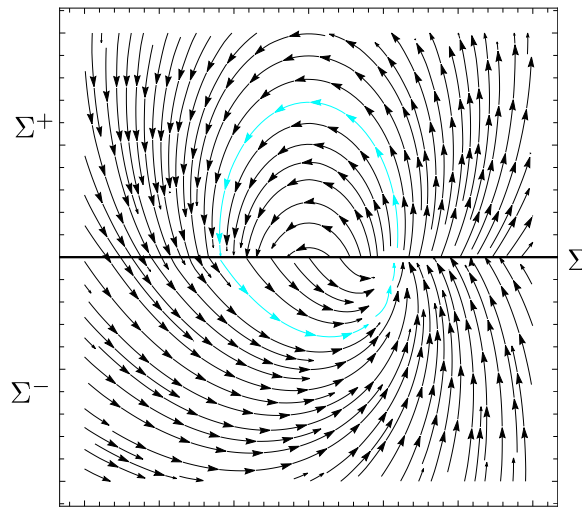


Figura 7.8: Retrato de fase do sistema (7.6) com $a = -1$, $b = 1$, $d = 1$ e $z_0 = i$.

Proposição 7.17. *Sejam a, d, d e y_0 números reais não nulos. Se $a, b, d < 0$, $y_0 > 0$, $n = 4k$ para algum inteiro $k \geq 1$ e $\cotg\left(\frac{n\pi}{2(n-1)}\right)y_0 < \frac{-d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}} < 0$, então o sistema*

$$\begin{cases} \dot{z} = (z + iy_0)^n, & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) < 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

tem um único ciclo limite estável.

Demonstração. Na seção 3 do Capítulo 3 vimos que as soluções da equação $\dot{z} = z^n$ são simétricas em relação ao eixo y . Considere então a solução $z^+(t)$ de (7.10) com condição $z^+(0) = -w_0 < 0$. Pela simetria das soluções da equação $\dot{z} = (z + iy_0)^n$, existe $t_0 > 0$ tal que $z^+(t_0) = w_0$. Além do mais,

$$z^-(t) = -(d - w_0)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) + d$$

é uma solução de $\dot{z} = (a + ib)(z - d)$ satisfazendo $z^-(0) = w_0$ e $z^-(-\frac{\pi}{b}) = d + (d - w_0)e^{-\frac{a\pi}{b}}$.

Logo, a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = -w_0$ é dada por $\Pi(z) = d + (d - z)e^{-\frac{a\pi}{b}}$ e $\Pi'(-w_0) = e^{-\frac{a\pi}{b}} < 1$.

Como $a \neq 0$, então $w_0 = \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}}$ é a única solução da equação $\Pi(-w_0) = -w_0$.

Portanto, o sistema tem um único ciclo limite que é estável. $\square$

Observação 7.18. É possível encontrar sistemas holomorfos por partes que satisfazem as condições dadas na Proposição 7.17. De fato, se tomarmos $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{1}{2}$ e $y_0 = 1$ então o sistema holomorfo por partes (7.10) tem um ciclo limite estável (veja a Figura 7.9).

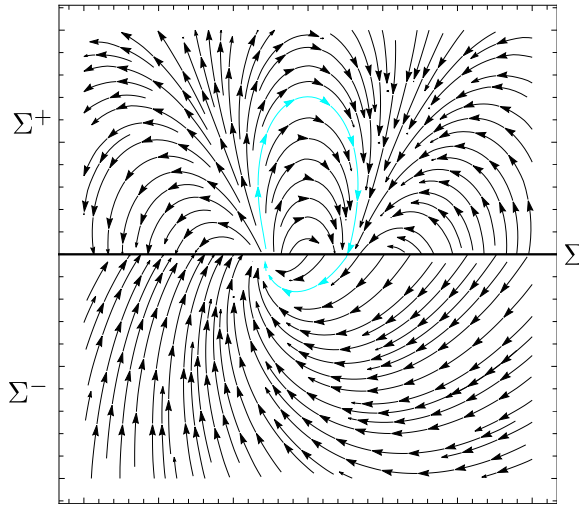


Figura 7.9: Retrato de fase do sistema (7.10) com $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{1}{2}$ e $y_0 = 1$.

Proposição 7.19. Sejam a, d, d e y_0 números reais não nulos. Se $a < 0 < b, y_0, d > 0$, $n = 4k - 2$ para algum inteiro $k > 1$ e $0 < \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}} < \cotg\left(\frac{(n-2)\pi}{2(n-1)}\right) y_0$, então o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = (z + iy_0)^n, & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) < 0. \end{cases} \quad (7.11)$$

tem um único ciclo limite estável.

Demonstração. Consideremos uma solução $z^+(t)$ da equação $\dot{z} = (z + iy_0)^n$ com a condição $z^+(0) = w_0 > 0$, pela simetria das soluções existe $t_0 > 0$ tal que $z^+(t_0) = -w_0$. Além do mais,

$$z^-(t) = -(d + w_0)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) + d$$

é uma solução da equação $\dot{z} = (a + ib)(z - d)$ satisfazendo que $z^-(0) = -w_0$ e $z^-\left(\frac{\pi}{b}\right) = d + (d + w_0)e^{\frac{a\pi}{b}}$.

Assim, a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = -w_0$ é dada por $\Pi(z) = d + (d + z)e^{\frac{a\pi}{b}}$ e $\Pi'(w_0) = e^{\frac{a\pi}{b}} < 1$.

A equação $\Pi(w_0) = w_0$ tem uma única solução que é dada por $w_0 = \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}}$.

Consequentemente, o sistema tem um único ciclo limite estável. $\square$

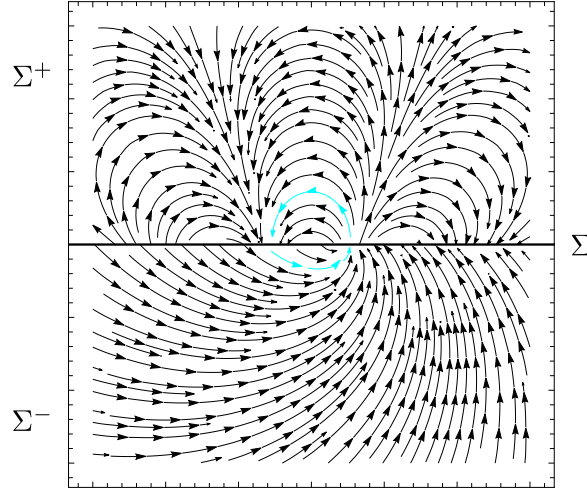


Figura 7.10: Retrato de fase do sistema (7.11), onde $a = -1$, $b = 1$, $d = -\frac{1}{5}$ e $y_0 = 1$.

Observação 7.20. É possível encontrar sistemas holomorfos por partes que satisfazem as condições dadas na Proposição 7.19. De fato, se tomarmos $a = -1$, $b = 1$, $d = -\frac{1}{5}$ e $y_0 = 1$ então o sistema holomorfo por partes (7.11) tem um ciclo limite estável (veja a Figura 7.10).

Proposição 7.21. *Sejam a, d, d e y_0 números reais não nulos. Se $a, b, d < 0, y_0 > 0$, $n = 4k - 1$ para algum inteiro $k \geq 1$ e $\cotg\left(\frac{n\pi}{2(n-1)}\right) y_0 < \frac{-d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}} < 0$, então o sistema*

$$\begin{cases} \dot{z} = i(z + iy_0)^n, & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) < 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

tem um único ciclo limite estável.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que as órbitas da equação $\dot{z} = f(z) = i(z + iy_0)^n$ são simétricas em relação ao eixo y . De fato, a equação $\dot{z} = f(z)$ é escrita em coordenadas polares como

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^n \cos((n-1)\theta), \\ \dot{\theta} = r^{n-1} \sin((n-1)\theta), \end{cases}$$

daí segue que $r = K |\cos((n-1)\theta)|^{\frac{1}{n-1}}$.

Como $r(\pi - \theta) = r(\theta)$, segue que as órbitas são simétricas em relação $\theta = \frac{\pi}{2}$, de onde concluímos que as órbitas da equação $\dot{z} = f(z)$ são simétricas em relação ao eixo y .

Agora, consideremos $z^+(t)$ a solução da equação (7.12) com condição inicial $z^+(0) = -w_0 < 0$. Pela simetria das órbitas, existe $t_0 > 0$ tal que $z^+(t_0) = w_0$. Além disso,

$$z^-(t) = -(d - w_0)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) + d$$

é solução de $\dot{z} = (a + ib)(z - d)$ que satisfaz $z^-(0) = w_0$ e $z^-(-\frac{\pi}{b}) = d + (d - w_0)e^{\frac{-a\pi}{b}}$.

Logo, a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = -w_0$ é dado por $\Pi(z) = d + (d + z)e^{\frac{-a\pi}{b}}$.

Como $a \neq 0$, então a equação $\Pi(-w_0) = -w_0$ tem uma única solução que é dado por $w_0 = \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}}$. Portanto, o sistema tem um único ciclo limite e ele é estável, pois $\Pi'(-w_0) = e^{\frac{-a\pi}{b}} < 1$. $\square$

Observação 7.22. É possível encontrar sistemas holomorfos por partes que satisfazem as condições dadas na Proposição 7.21. Como exemplo, tome $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{3}{10}$, $y_0 = 1$ e $n = 4$, então o sistema (7.12) tem um único ciclo limite estável (veja a Figura 7.11).

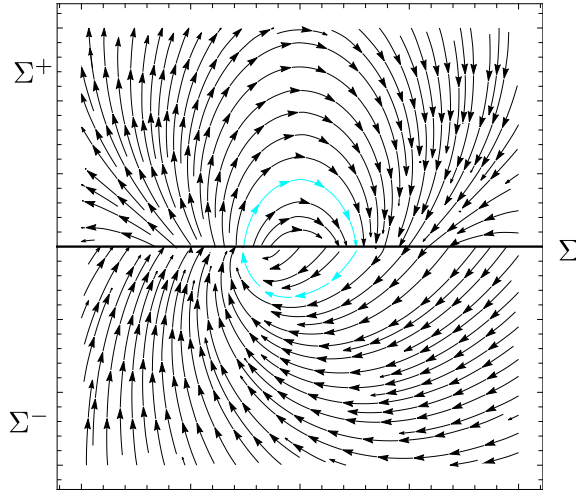


Figura 7.11: Retrato de fase do sistema (7.12), onde $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{3}{10}$, $y_0 = 1$ e $n = 4$.

Proposição 7.23. Sejam a, d, d e y_0 números reais não nulos. Se $a < 0 < b, d, y_0 > 0$, $n = 4k + 1$ para algum inteiro $k \geq 1$ e $0 < \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}} < \cotg\left(\frac{(n-2)\pi}{2(n-1)}\right) y_0$, então o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = i(z + iy_0)^n, & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) < 0. \end{cases} \quad (7.13)$$

tem um único ciclo limite estável.

Demonstração. Na demonstração da proposição anterior, vimos que as órbitas da equação $\dot{z} = i(z + iy_0)^n$ são simétricas em relação ao eixo y .

Seja $z^+(t)$ uma solução de $\dot{z} = (z + iy_0)$ com condição inicial $z^+(0) = w_0 > 0$. Pela simetria das soluções, existe $t_0 > 0$ tal que $z^+(t_0) = -w_0$. Além disso,

$$z^-(t) = -(d + w_0)e^{at}(\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt)) + d$$

é solução de $\dot{z} = (a + ib)(z - d)$ satisfazendo $z^-(0) = -w_0$ e $z^-(\frac{\pi}{b}) = d + (d + w_0)e^{\frac{a\pi}{b}}$.

Consequentemente, a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = w_0$ é dada por $\Pi(z) = d + (d + z)e^{\frac{a\pi}{b}}$ e $\Pi'(w_0) = e^{\frac{a\pi}{b}} < 1$.

Por fim, vamos buscar as soluções da equação $\Pi(w_0) = w_0$. Uma vez que $a \neq 0$, a equação $\Pi(w_0) = w_0$ tem uma única solução que é dada por $w_0 = \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{\frac{a\pi}{b}}}$. $\square$

Observação 7.24. É possível encontrar sistemas holomorfos por partes que satisfazem as condições dadas na Proposição 7.23. Como exemplo, tome $a = -1$, $b = 1$, $d = \frac{3}{10}$, $y_0 = 1$ e $n = 5$, então o sistema (7.13) tem um único ciclo limite estável (veja a figura 7.12).

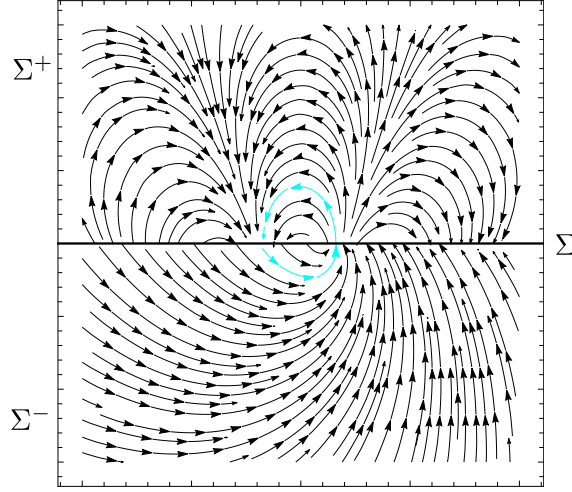


Figura 7.12: Retrato de fase do sistema (7.13), onde $a = -1$, $b = 1$, $d = \frac{3}{10}$, y_0 e $n = 5$.

Por fim, vamos estudar os campos $\dot{z} = \frac{1}{z^n}$, $n \geq 1$. Dividiremos nosso estudo em 4 casos dependendo de n . Em cada caso, usaremos a simetria das formas normais e que os raios $\frac{j\pi}{n+1}$, $j = 1, \dots, (2n-1)$ (respectivamente, $\frac{j\pi}{2(n+1)}$, $j = 1, 3, \dots, 4(n-1)-1$) são invariantes pelo fluxo da equação $\dot{z} = \frac{1}{z^n}$, se n é par (respectivamente, $\dot{z} = \frac{i}{z^n}$, se n é ímpar).

Teorema 7.25. *Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$. Então existem números reais não nulos que satisfazem a Tabela 7.1, tal que o sistema holomorfo por partes*

$$\begin{cases} \dot{z} = (a+ib)(z-d), & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = \frac{1}{(z+iy_0)^n}, & \text{se } \Im(z) < 0 \end{cases}$$

tem um único ciclo limite estável, onde $m = 0$ se n é par e $m = 1$ se n é ímpar.

n	k	a	b	d	y_0	Hipótese Principal
$4k-2$	$k \geq 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$0 < \frac{d(1+e^{\frac{a\pi}{b}})}{e^{\frac{a\pi}{b}}-1} < \cotg\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right) y_0$
$4k-1$	$k \geq 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$0 < \frac{d(1+e^{\frac{a\pi}{b}})}{e^{\frac{a\pi}{b}}-1} < \cotg\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right) y_0$
$4k$	$k \geq 1$	$-$	$+$	$-$	$+$	$\cotg\left(\frac{(n+2)\pi}{2(n+1)}\right) y_0 < -\frac{d(1+e^{\frac{a\pi}{b}})}{e^{\frac{a\pi}{b}}-1} < 0$
$4k+1$	$k \geq 0$	$-$	$+$	$-$	$+$	$\cotg\left(\frac{(n+2)\pi}{2(n+1)}\right) y_0 < -\frac{d(1+e^{\frac{a\pi}{b}})}{e^{\frac{a\pi}{b}}-1} < 0$

Tabela 7.2: Tabela Teorema 7.25

A demonstração do teorema é consequência das próximas 4 proposições.

Proposição 7.26. *Sejam a, b, d e y_0 números reais não nulos. Se $a, b < 0$ e $d, y_0 > 0$, $n = 4k - 2$ para algum k inteiro $k \geq 1$, e $0 < \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{e^{\frac{a\pi}{b}} - 1} < \cotg\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right) y_0$, então o sistema*

$$\begin{cases} \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = \frac{1}{(z + iy_0)^n}, & \text{se } \Im(z) < 0, \end{cases} \quad (7.14)$$

tem um único ciclo limite estável.

Demonstração. As soluções da equação $\dot{z} = \frac{1}{(z + iy_0)^n}$ são simétricas em relação ao eixo y . Considere z^- a solução de (7.14) com condição inicial $z^-(0) = w_0 > 0$. Pela simetria das soluções da equação $\dot{z} = \frac{1}{(z + iy_0)^n}$, existe $t_0 > 0$ tal que $z^-(t_0) = -w_0$. Além disso,

$$z^+(t) = -(d + w_0)e^{at}(\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt)) + d$$

é uma solução de $\dot{z} = (a + ib)(z - d)$ que satisfaz $z^+(0) = -w_0$ e $z^+(-\frac{\pi}{b}) = d + (d + w_0)e^{-\frac{a\pi}{b}}$.

De onde resulta que a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = w_0$ é $\Pi(z) = d + (d + z)e^{-\frac{a\pi}{b}}$. Temos ainda que a derivada da aplicação de Poincaré em w_0 é $\Pi'(w_0) = e^{-\frac{a\pi}{b}} < 1$.

Como por hipótese $a \neq 0$, então $\frac{d(1 + e^{-\frac{a\pi}{b}})}{1 - e^{-\frac{a\pi}{b}}}$ é a única solução da equação $\Pi(w_0) = w_0$.

Logo, sistema (7.14) tem um único ciclo limite estável. $\square$

Observação 7.27. É possível encontrar sistemas holomorfos por partes que satisfazem as condições dadas na Proposição 7.26. Por exemplo, se considerarmos $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{1}{2}$ e $n = 2$, então o sistema (7.14) tem um único ciclo limite estável (veja a Figura 7.13).

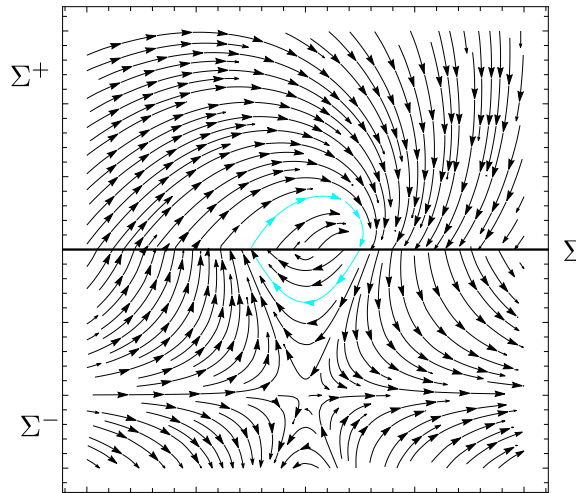


Figura 7.13: Retrato de fase do sistema (7.14), onde $a = -1$, $b = -1$, $d = \frac{1}{2}$ e $n = 2$.

Proposição 7.28. *Sejam a, b, c e y_0 números reais não nulos. Se $a, d < 0$, $y_0 > 0$, $n = 4k$ para algum $k \geq 1$ e $\cotg\left(\frac{(n-2)\pi}{2(n+1)}\right) y_0 < -\frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{e^{\frac{a\pi}{b}} - 1} < 0$, então o sistema*

holomorfo por partes

$$\begin{cases} \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = \frac{1}{(z + iy_0)^n}, & \text{se } \Im(z) < 0, \end{cases} \quad (7.15)$$

tem um único ciclo limite estável

Demonstração. Seja $z^-(t)$ uma solução de (7.15) com a condição inicial $z^-(0) = -w_0$. Pela simetria das soluções da equação $\dot{z} = \frac{1}{(z + iy_0)^2}$ em relação ao eixo y , existe t_0 tal que $z^-(t_0) = w_0$. Além do mais,

$$z^+(t) = -(d - w_0)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) + d$$

é solução de $\dot{z} = (a + ib)(z - d)$ que satisfaz $z^+(0) = w_0$ e $z^+(\frac{\pi}{b}) = d + (d - w_0)e^{\frac{a\pi}{b}}$.

Assim, a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = -w_0$ é dada por $\Pi(z) = d + (d - z)e^{\frac{a\pi}{b}}$ e $\Pi'(-w_0) = e^{\frac{a\pi}{b}} < 1$. Dado que $a \neq 0$, então $\frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{-1 + e^{\frac{a\pi}{b}}}$ é a única solução de $\Pi(-w_0) = -w_0$.

Portanto, o sistema (7.15) tem um único ciclo limite que é estável. $\square$

Observação 7.29. É possível encontrar sistemas holomorfos por partes que satisfazem as condições dadas na Proposição 7.28. Se tomarmos $a = -1$, $b = 1$, $d = \frac{-1}{5}$, $y_0 = 1$ e $n = 4$, então o sistema (7.15) tem um único ciclo limite (veja a Figura 7.14).

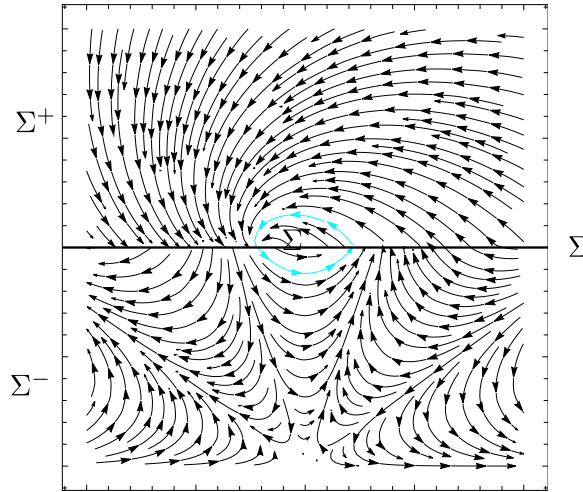


Figura 7.14: Retrato de fase do sistema (7.15), onde $n = 2$, $a = -1$, $b = -1$ e $d = \frac{1}{2}$.

Proposição 7.30. Sejam a , b , d e y_0 números reais não nulos. Se $a, d < 0$, $y_0 > 0$, $n = 4k + 1$ para algum inteiro $k > 0$ e $\cotg\left(\frac{(n+2)\pi}{2(n+1)}\right)y_0 < \frac{-d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{-1 + e^{\frac{a\pi}{b}}} < 0$, então o sistema holomorfo por partes

$$\begin{cases} \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = \frac{i}{(z + iy_0)^n}, & \text{se } \Im(z) < 0, \end{cases} \quad (7.16)$$

tem um único ciclo limite estável.

Demonstração. Considere $\dot{z} = \frac{i}{(z + iy_0)} = f^-(z)$. Inicialmente vamos mostrar que as soluções de $\dot{z} = f^-(z)$ são simétricas em relação ao eixo y . De fato, a equação $\dot{z} = f^-(z)$ pode ser escrita em coordenadas polares como

$$\begin{cases} \dot{r} = r^{-n} \sin((n+1)\theta), \\ \dot{\theta} = r^{-1-n} \cos((n+1)\theta), \end{cases}$$

de onde segue que $r = \frac{K}{|\cos((n+1)\theta)|^{\frac{1}{n+1}}}$.

Como $r(\theta) = r(\pi - \theta)$, segue que as soluções são simétricas em relação ao eixo y .

Consideremos agora $z^-(t)$ solução do sistema (7.16) com condição inicial $z^-(0) = -w_0$. Pela simetria das soluções de $\dot{z} = f^-(z)$, existe $t_0 > 0$ tal que $z^-(t_0) = w_0$. Além disso,

$$z^+ = -(d - w_0)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) + d$$

é solução da equação $\dot{z} = (a+ib)(z-d)$ satisfazendo $z^+(0) = w_0$ e $z^+(\frac{\pi}{b}) = d + (d - w_0)e^{\frac{a\pi}{b}}$.

Consequentemente, a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = -w_0$ é dada por $\Pi(z) = d + (d + z)e^{\frac{a\pi}{b}}$ e a sua derivada em $-w_0$ é $\Pi'(-w_0) = e^{\frac{a\pi}{b}} < 1$.

Buscaremos as soluções da equação $\Pi(-w_0) = -w_0$, o número de zeros desta equação corresponde ao número de ciclo limites do sistema (7.16).

Dado que $a \neq 0$, então a equação $\Pi(-w_0) = -w_0$ tem uma única solução que é dada por $\frac{d(1+e^{\frac{a\pi}{b}})}{-1+e^{\frac{a\pi}{b}}}$.

Portanto, o sistema (7.16) tem um único ciclo limite estável. $\square$

Observação 7.31. É possível encontrar sistemas holomorfos por partes que satisfazem as condições dadas na Proposição 7.30. Como exemplo, tome $a = -1$, $b = 1$, $d = -\frac{1}{2}$, $y_0 = 1$ e $n = 4$, então o sistema (7.16) tem um único ciclo limite estável (veja a figura 7.15).

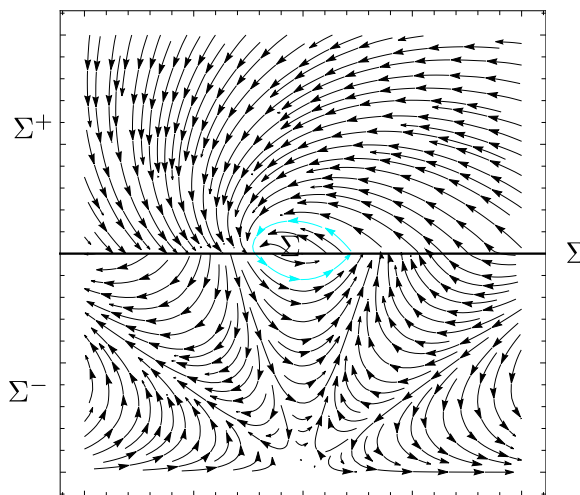


Figura 7.15: Retrato de fase do sistema (7.16), onde $a = -1$, $b = 1$, $d = -\frac{1}{2}$, $y_0 = 1$ e $n = 4$.

Proposição 7.32. *Sejam a, b, d e y_0 números reais não nulos. Se $a, b < 0, y_0 > 0$ $n = 4k - 1$ para algum inteiro $k \geq 1$ e $0 < \frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{-1 + e^{\frac{a\pi}{b}}} < \cotg\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right) y_0$, então o sistema holomorfo por partes*

$$\begin{cases} \dot{z} = (a + ib)(z - d), & \text{se } \Im(z) > 0, \\ \dot{z} = \frac{i}{(z + iy_0)^n}, & \text{se } \Im(z) < 0, \end{cases} \quad (7.17)$$

tem um único ciclo limite estável.

Demonstração. Seja z^- a solução de (7.17) com a condição $z^-(0) = w_0$. Pela simetria das soluções de $\dot{z} = \frac{i}{(z + iy_0)^n} = f^-(z)$, existe $t_0 > 0$ tal que $z^-(t_0) = -w_0$. Além disso,

$$z^+(t) = -(d + w_0)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) + d$$

é uma solução de $\dot{z} = (a + bi)(z - d)$ satisfazendo que

$$z^+(0) = -w_0 \quad \text{e} \quad z^+\left(-\frac{\pi}{b}\right) = d + (d + w_0)e^{-\frac{a\pi}{b}}.$$

Consequentemente, a aplicação de Poincaré em uma vizinhança de $z = -w_0$ é dada por $\Pi(z) = d + (d + z)e^{-\frac{a\pi}{b}}$ e $\Pi'(w_0) = e^{-\frac{a\pi}{b}} < 1$.

Uma vez que $a \neq 0$, então a equação $\Pi(w_0) = w_0$ tem uma única solução que é dada por $\frac{d(1 + e^{\frac{a\pi}{b}})}{-1 + e^{\frac{a\pi}{b}}}$.

Portanto, o sistema (7.17) tem um único ciclo limite estável. $\square$

Observação 7.33. É possível encontrar sistemas holomorfos por partes que satisfazem as condições dadas na Proposição 7.32. Como exemplo, tome $a = -1, b = -1, d = \frac{3}{10}, y_0 = 1$ e $n = 4$, então o sistema (7.17) tem um único ciclo limite estável (veja a Figura 7.16).

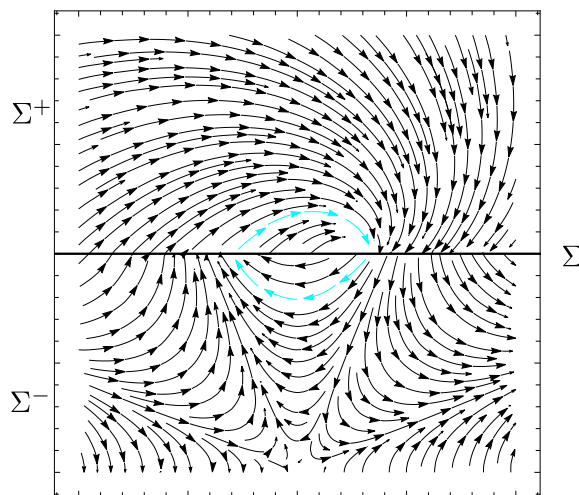


Figura 7.16: Retrato de fase do sistema (7.17), onde $a = -1, b = -1, d = \frac{3}{10}, y_0 = 1$ e $n = 4$.

Referências

- [1] Garijo, A., Gasull, A., and Jarque, X. *Normal forms for singularities of one dimensional holomorphic vector fields. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]*, 2004:Paper–No, 2004.
- [2] Garijo, A., Gasull, A., and Jarque, X. *Local and global phase portrait of equation $\dot{z} = f(z)$. Discrete Continuous Dynamical Systems*, 17(2):309, 2007.
- [3] Filippov, A. F. *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, volume 18. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] Garcia, A.S. *Holomorphic differential equations. Final Degree Project*. Master’s thesis, 2014.
- [5] Dumortier, F., Llibre, J., and Artés, J.C. *Qualitative theory of planar differential systems*. Springer, 2006.
- [6] Ávila, G. *Variáveis complexas e aplicações*. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2000.
- [7] Llibre, J., Messias, M., and Silva, P.R. *On the global dynamics of the Rabinovich system. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(27):275210, 2008.
- [8] Song, J. *On the local and global phase portrait of the 1-dimensional complex equation $\dot{z} = f(z)$ and perturbations*. Master’s thesis, 2014.
- [9] Sotomayor, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [10] Brickman, L. and Thomas, E. S. *Conformal equivalence of analytic flows. Journal of Differential Equations*, 25(3):310–324, 1977.
- [11] Jibin, L. *Hilbert’s 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(01):47–106, 2003.
- [12] Perko, L. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [13] Gouveia, L. F. S., Rondón, G., and Silva, P.R. *On Planar Holomorphic Systems. arXiv preprint arXiv:2201.04159*, 2022.
- [14] Gouveia, L. F. S., Rondón, G., and Silva, P.R. *Piecewise holomorphic systems. Journal of Differential Equations*, 332:440–472, 2022.

- [15] Ahlfors, L. V. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 1953.
- [16] Guardia, M., Seara, T.M., and Teixeira, M.A. *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems*. *Journal of Differential equations*, 250(4):1967–2023, 2011.
- [17] Soares, M. G. *Cálculo em uma variável complexa*. Impa, 2012.
- [18] Alvarez, M.J., Gasull, A., and Prohens, R. *Configurations of critical points in complex polynomial differential equations*. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(3-4):923–934, 2009.
- [19] Hajek, O. *Notes on meromorphic dynamical systems, I*. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 16(1):14–27, 1966.
- [20] Sverdlove, R. *Vector fields defined by complex functions*. *Journal of Differential Equations*, 34(3):427–439, 1979.