ESTUDO DA ESTABILIDADE DO MOVIMENTO ROTACIONAL DE SATÉLITES ARTIFICIAIS COM VARIÁVEIS CANÔNICAS

Guaratinguetá
2012

WILLIAM REIS SILVA

ESTUDO DA ESTABILIDADE DO MOVIMENTO ROTACIONAL DE SATÉLITES ARTIFICIAIS COM VARIÁVEIS CANÔNICAS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Dinâmica Orbital e Planetologia

Orientadora: Profa. Dra. Maria Cecília Franca de Paula Santos Zanardi
Coorientador: Prof. Dr. Jorge Kennety Silva Formiga

Guaratinguetá
2012

Silva, William Reis
S586e Estudo da estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais com variáveis canônicas / William Reis Silva – Guaratinguetá : [s.n], 2012.
167 f : il.
Bibliografia: f. 108 - 111

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012.
Orientador: Profª. Drª. Maria Cecília Franca de Paula Santos Zanardi
Coorientador: Prof. Dr. Jorge Kennety Silva Formiga

1. Satélites artificiais 2. Movimento rotacional I. Título

CDU 629.783 (043)

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

WILLIAM REIS SILVA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Profª. Drª. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

B A N C A E X A M I N A D O R A:

Profª. Drª. MARIA CECÍLIA FRANÇA DE PAULA SANTOS ZANARDI
Orientador / Unesp-Feg

Prof. Dr. ERNESTO VIEIRA
Unesp-Feg

Prof. Dr. MÁRIO CESAR RICCI
INPE/SJC

Fevereiro de 2012

DADOS CURRICULARES

WILLIAM REIS SILVA

NASCIMENTO	27/11/1986 - Mogi das Cruzes/SP
FILIAÇÃO	Joaquim Fabiano da Silva Filho Maria das Graças Reis da Silva
2005 / 2009	Curso de Graduação - Licenciatura em Física Universidade Estadual Paulista - UNESP Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - FEG
2010 / 2012	Curso de Pós-Graduação em Física - nível Mestrado Universidade Estadual Paulista - UNESP Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - FEG

AGRADECIMENTOS

Essas palavras representam de maneira singela meu profundo agradecimento àqueles que contribuíram para concretização deste trabalho.

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida, por iluminar meu caminho e por me dar coragem e disposição de prosseguir sempre... Sem desistir.

Agradeço a meus pais, Joaquim Fabiano da Silva Filho e Maria das Graças Reis da Silva, por todo amor, carinho e incentivo...

Agradeço a meu irmão, Anderson Fábio Reis Silva (*Fabião*), pela amizade, carinho e ajuda nos momentos difíceis...

Agradeço a minha namorada, Eliana de Campos Leite, pelas palavras amigas, pelo incentivo a buscar novos horizontes sem temer o desconhecido... Obrigado por estar sempre ao meu lado.

Agradeço a Profª Drª Maria Cecília F. P. S. Zanardi por ter me acolhido de forma tão humana e por acreditar no meu potencial. Obrigado pela dedicação e paciência que orienta e ensina.

Agradeço ao Profº Drº Jorge Kennety S. Formiga pela coorientação, amizade, explicações e confiança no desenvolvimento deste trabalho e a Profª Drª Regina Elaine S. Cabette pela amizade, confiança e pela ajuda nos momentos de dificuldade. Obrigado pela leitura das versões preliminares e pelos valiosos comentários.

Agradeço em especial a todos os professores da pós-graduação em Física da FEG-UNESP que contribuiram na minha formação acadêmica e aos colegas de pós-graduação pelas dicas e companheirismo.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta e indireta no desenvolvimento desse trabalho.

Muito obrigado!

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Em memória de José Benedito da Cruz (*Seu Dito*).

(...)

Which way the river's going to flow

It just seems that upstream I keep rowing

Still got such a long way to go.

(...)

U.f.o. - Coldplay

SILVA, W. R. **Estudo da estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais com variáveis canônicas**. 2012. 130 f. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar a estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais simétricos (com dois momentos principais de inércia iguais), em órbita circular, sob a influência do torque de gradiente de gravidade, usando as variáveis de Andoyer. O método utilizado neste trabalho para analisar a estabilidade é o teorema de Kovalev e Savchenko,o qual requer a redução da Hamiltoniana na forma normal até quarta ordem, por meio de transformações canônicas em torno dos pontos de equilíbrio. Os coeficientes da Hamiltoniana normal são indispensáveis no estudo da estabilidade não linear de seus pontos de equilíbrio, de acordo com as três condições estabelecidas no teorema. Aplicações foram realizadas para satélites de médio e pequeno porte, com dados similares a satélites reais, utilizando o software MATHEMATICA. Diversos pontos de equilíbrio estáveis foram encontrados e regiões de equilíbrio ao redor destes pontos foram estabelecidas através de variações na inclinação orbital e nos momentos principais de inércia do satélite. Em comparação com trabalhos anteriores os resultados mostram um maior número de pontos de equilíbrio e uma otimização no algoritmo de determinação da forma normal e na análise de estabilidade, devido a possibilidade de inclusão de cálculo analítico dos coeficientes da Hamiltoniana normal de 4ª ordem. Assim, a utilização das variáveis de Andoyer se mostra adequada para a análise da estabilidade do movimento rotacional, podendo ser útil em análises de missões espaciais. Salienta-se que o lançamento do satélite em regiões de estabilidade pode contribuir para a manutenção da atitude do satélite, podendo gerar uma economia de combustível através de um menor número de manobras de atitude para manter a atitude desejada da missão.

PALAVRAS-CHAVE: Movimento rotacional, Estabilidade, Variáveis de Andoyer, Forma normal da Hamiltoniana.

SILVA, W. R. **Study of stability of rotational motion of spacecraft with canonical variables**. 2012. 130 f. Master (Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

ABSTRACT

This work aims to analyze the stability of the rotational motion of symmetrical artificial satellite (with two principal moments of inertia equal), in circular orbit with the influence of gravity gradient torque, using the variables of Andoyer. The used method in this paper to analyze stability is the Kovalev-Savchenko theorem, which requires the reduction of the Hamiltonian in its normal form up to fourth order by means of canonical transformations around equilibrium points. The coefficients of the normal Hamiltonian are indispensable in the study of nonlinear stability of its equilibrium points according the three established conditions in the theorem studied. The applications were made to satellites of medium and small size, with data similar to real satellites, using the software MATHEMATICA. Several stable equilibrium points were determined and regions around these equilibrium points have been established by variations in orbital inclination and the principal moments of inertia of the satellite. In comparison with previous results show a larger number of equilibrium points and an optimization in algorithm determining the normal form in the stability analysis, due the possibility of inclusion of analytical calculation of the coefficients of the normal Hamiltonian of 4th order. Thus, the uses of variables Andoyer are adequate for the stability analysis of rotational motion, which can be useful for the analysis of space missions. Stresses those, the launch of the satellite regions of stability can contribute to the maintenance of the satellite attitude, which can generate a fuel economy through lower number of attitude maneuvers to maintain desired attitude of the mission.

KEYWORDS: Rotational motion, Stability, Andoyer's variables, Normal form of Hamiltonian.

Lista de Figuras

3.1 Sistema principal ($Oxyz$), sistema equatorial ($OXYZ$) e o sistema do momento angular ($Ox_m y_m z_m$) 31
3.2 Sistema principal ($Oxyz$), sistema equatorial ($OXYZ$), sistema intermediário ($Ox'y'z'$) e os ângulos de Euler 31
3.3 Sistema principal ($Oxyz$), sistema equatorial ($OXYZ$), sistema do momento angular ($Ox_m y_m z_m$) e as variáveis de Andoyer 32
3.4 Sistema orbital ($Ox_s y_s z_s$) e o sistema equatorial ($OXYZ$) 33
3.5 Evolução dinâmica de uma região no espaço de fase 37
3.6 Ponto de equilíbrio estável segundo Liapunov 39
3.7 Ponto de equilíbrio instável segundo Liapunov 40
3.8 Ponto de equilíbrio assintóticamente estável segundo Liapunov 40

5.1 Mudança de variáveis 50

6.1 Fluxograma representativo da determinação do ponto de equilíbrio 63
6.2 Fluxograma representativo da análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio 64

8.1 Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ 80
8.2 Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ 81
8.3 Regiões para $a(A, C, I_0) > 0$ e $a(A, C, I_0) < 0$ e para $b(A, C, I_0) > 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,5533 rad$ 82
8.4 Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ 84
8.5 Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,5533 rad$ 86
8.6 Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,5533 rad$ 88

8.7 Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ 89
8.8 Ênfase da Fig. 8.7 onde o determinate de Arnold em função da inclinação orbital é zero para $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ 89
8.9 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,5533 rad$ 90
8.10 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,5533 rad$ 91
8.11 Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ 92
8.12 Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ 93
8.13 Regiões para $a(A, C, I_0) > 0$ e $a(A, C, I_0) < 0$ e para $b(A, C, I_0) > 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,4364 rad$ 94
8.14 Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ 96
8.15 Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$ 98
8.16 Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$ 100
8.17 Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ 101
8.18 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$ 102
8.19 Ênfase da Fig 8.18 onde o determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A é zero para $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$. 102
8.20 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$ 103
8.21 Ênfase da Fig. 8.20 onde o determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C é zero para $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$ 103

C.1 Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ 150
C.2 Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ 150

C.3 Regiões para $a(A, C, I_0) > 0$ e $a(A, C, I_0) < 0$ e para $b(A, C, I_0) > 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,4364rad$ 151
C.4 Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ . . 153
C.5 Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 155
C.6 Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 157
C.7 Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ 158
C.8 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 159
C.9 Ênfase da Fig. C.8 onde o determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A é zero para $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 159
C.10 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 160
C.11 Ênfase da Fig. C.10 onde o determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C é zero para $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 160

D.1 Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 7,35 * 10^{-6} kg\ km^2$ 162
D.2 Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 8,54 * 10^{-6} kg\ km^2$ 163
D.3 Regiões para $a(A, C, I_0) > 0$ e $a(A, C, I_0) < 0$ e para $b(A, C, I_0) > 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,4364rad$ 163
D.4 Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 9,50 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C_0 = 8,54 * 10^{-6} kg\ km^2$ 164
D.5 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 9,50 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 164
D.6 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 8,54 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 164

E.1 Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ 165
E.2 Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ 166

E.3 Regiões para $a(A, C, I_0) > 0$ e $a(A, C, I_0) < 0$ e para $b(A, C, I_0) > 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,4364rad$ 166
E.4 Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ 167
E.5 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 167
E.6 Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364rad$ 167

Lista de Tabelas

7.1 Resumo quantitativo das classificações dos pontos de equilíbrios 66
7.2 Pontos de equilíbrio Liapunov estáveis do satélite MP 66
7.3 Pontos de equilíbrio Liapunov estáveis do satélite PP-1 67
7.4 Pontos de equilíbrio Liapunov estáveis do satélite PP-2 67
7.5 Análise de possíveis singularidades para o ponto de equilíbrio MP 1.2 . . . 68
7.6 Análise da 2ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko para o ponto de equilíbrio MP 1.2 70
7.7 Análise de possíveis singularidades para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 . . 72
7.8 Análise da 2ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 73
7.9 Análise de possíveis singularidades para o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 . . 75
7.10 Análise da 2ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko para o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 76

Lista de Símbolos

A	Momentos principais de inércia nos eixos x
a	Semi eixo maior
B	Momentos principais de inércia nos eixos y
C	Momentos principais de inércia nos eixos z
D	Determinante de Arnold
E_n	Matriz nula de ordem n
e	Excentricidade
F	Hamiltoniana o movimento rotacional
F_0	Termo da Hamiltoniana do movimento rotacional não pertubado
F_1	Termo da Hamiltoniana do movimento rotacional associado ao torque de gradiente de gravidade
F_w	Vetor de derivadas parciais da Hamiltoniana F
$F(\tilde{x})$	Função do sistema Hamiltoniano
$\mathcal{F}_k$	Função homologíca da Hamiltoniana normal de ordem k
$f(\overrightarrow{x})$	Função do sistema dinâmico autônomo
$f(\overrightarrow{x}, t)$	Função do sistema dinâmico não autônomo
G	Variável de Delunay, módulo do momento angular de translação
g	Variável de Delunay, argumento do perigeu
$\mathcal{G}_n$	Função geratriz de ordem n
$g_{3,\alpha,\beta}$	Coeficiente da função geratriz $\mathcal{G}_3$
$g_{4,\alpha,\beta}$	Coeficiente da função geratriz $\mathcal{G}_4$
H	Hamiltoniana
H^*	Hamiloniana normal até a 4^{a} ordem
H_2^*	Hamiloniana normal de 2^{a} ordem
H_3^*	Hamiloniana normal de 3^{a} ordem
H_4^*	Hamiloniana normal de 4^{a} ordem
H^{nova}	Hamiltoniana normal obtida a apartir da série de Lie
H_2^{nova}	Hamiltoniana normal de 2^{a} ordem obtida a apartir da série de Lie
H_3^{nova}	Hamiltoniana normal de 3^{a} ordem obtida a apartir da série de Lie
H_4^{nova}	Hamiltoniana normal de 4^{a} ordem obtida a apartir da série de Lie
$\mathcal{H}$	Variável de Delunay, componente do momento angular de translação no eixo Z
h	Variável de Delunay, longitude do nódo ascendente do plano orbital do satélite
$h_{3,\alpha,\beta}$	Coeficiente da Hamiltoniana normal $H_3^*(x, y)$
$h_{4,\alpha,\beta}$	Coeficiente da Hamiltoniana normal $H_4^*(x, y)$
I	Inclinação orbital
I_2	Inclinação do plano do momento angular com o plano equatorial

$\mathbb{I}_n$	Matriz identidade de ordem n
J	Matriz Simplética
J_2	Inclinação do plano do principal com o plano do momento angular
k_1	Números inteiros
k_2	Números inteiros
L	Variável de Delaunay, definida como $M\sqrt{\mu a}$
l	Variável de Delaunay, anomalia média
ℓ_1	Variavel de Andoyer, ângulo entre o eixo principal Ox e a interseção do plano principal xy com o plano do momento angular $x_m y_m$
ℓ_2	Variavel de Andoyer, ângulo entre a interseção do plano principal xy com o plano do momento angular $x_m y_m$ e a interseção do plano do momento angular $x_m y_m$ com o plano equatorial XY
ℓ_3	Variavel de Andoyer, ângulo entre a interseção do plano do momento angular $x_m y_m$ com o plano equatorial XY e o eixo OX
L_1	Variavel de Andoyer, projeção do momento angular $\overrightarrow{L_s}$ no eixo principal Oz
L_2	Variavel de Andoyer, módulo do momento angular de rotação $\overrightarrow{L_s}$
L_3	Variavel de Andoyer, projeção do momento angular $\overrightarrow{L_s}$ no eixo principal OZ
$\overrightarrow{L_s}$	Vetor momento angular de rotação do satélite
$Oxyz$	Sistema de eixos principais de inércia do satélite
$OXYZ$	Sistema equatorial, com origem no centro de massa do satélite
$Ox_m y_m z_m$	Sistema do momento angular
$Ox\prime y\prime z\prime$	Sistema intermediário
$O\prime XYZ$	Sistema equatorial, com origem no centro de massa da Terra
$O\prime x_S y_S z_S$	Sistema orbital
M	Massa do satélite
$\mathcal{M}$	Anomalia média
P	Hessiana
p_j	Momentos generalizados com $j = 1, 2, ..., n$
q_j	Coordenadas generalizadas com $j = 1, 2, ..., n$
R	Região no espaço de fase
$\mathcal{R}_\nu$	Definida como $q_\nu^2 + p_\nu^2$
$r_{4,\alpha,\beta}$	Coeficiente da função $\mathfrak{R}_4$
$\mathfrak{R}_4$	Função definido com $\{\mathcal{G}_4, H_2^*\}$
T	período
t	tempo
$T(q_j, \dot{q_j})$	Energia cinética
V	Volume no espaço de fase
$\vec{v}$	Vetor de estado
$V(q_j)$	Energia potencial
x_j	Variável complexa
$\tilde{x}$	Ponto de equilíbrio
y_j	Variável complexa
$\vec{W}$	Vetor de estado nas novas variáveis
$\vec{w}$	Vetor de estado nas variáveis de Andoyer
α	Radical da variável complexa x

β	Radical da variável complexa y
δ_{jj}	Coeficiente da Hamiltoniana normal de 4^{a} ordem
θ	Ângulo de Euler
λ_j	Autovalores com $j = 1, 2, ..., n$
μ	Constante gravitacional da Terra
ω	Argumento do perigeu
τ_j	Variável ação
φ	Ângulo de Euler
ψ	Ângulo de Euler
$\boldsymbol{w}$	Velocidade angular
ω_1	Parte imaginário puro do autovalor $\lambda_1 = \pm i\omega_1$
ω_2	Parte imaginário puro do autovalor $\lambda_2 = \pm i\omega_2$
Ω	Longitude do nódo ascendente do plano orbita do satélite

Sumário

1 Introdução **21**
1.1 Objetivos 22
1.2 Motivação 23

2 Revisão Bibliográfica **25**

3 Conceitos preliminares **30**
3.1 Sistemas de coordenadas 31
3.1.1 Variáveis de Andoyer 32
3.1.2 Variáveis de Delaunay 33
3.2 Sistemas dinâmicos 34
3.3 Sistema hamiltoniano 34
3.4 Ponto de equilíbrio e estabilidade 37
3.4.1 Características dos pontos de equilíbrio 37
3.4.2 Estabilidade linear para pontos de equilíbrios de sistemas hamiltonianos 37
3.4.3 Estabilidade não linear para pontos de equilíbrios de sistemas hamiltonianos 39
3.5 Forma normal 41
3.5.1 Forma normal quadrática de um sistema hamiltoniano 42
3.6 Teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko 43

4 Hamiltoniana e equações de movimento **45**
4.1 As equações de movimento nas variáveis de Andoyer. 45

5 Forma normal da hamiltoniana do movimento rotacional e análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio **49**
5.1 Forma normal da Hamiltoniana de 2ª ordem e análise da estabilidade linear. 49
5.2 Extensão da forma normal da Hamiltoniana para ordens superiores. 51
5.2.1 Método de série de Lie-Hori. 52
5.3 Forma normal da Hamiltoniana de ordem superior e análise da estabilidade não linear 56

6 Algoritmo computacional para forma normal e análise de estabilidade do movimento rotacional **61**
6.1 Determinação dos pontos de equilíbrio 61
6.2 Determinação da forma normal da Hamiltoniana e análise de estabilidade . 62
6.3 Fluxogramas representativos 63
6.3.1 Determinação dos pontos de equilíbrio 63
6.3.2 Análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio 63

7 Simulações numéricas **65**
7.1 Aplicação do teorema de estabilidade aos pontos de equilíbrios encontrados. 65
7.2 Análise do ponto de equilíbrio MP 1.2 do satélite MP 66
7.2.1 Conjunto de dados do satélite MP 68
7.2.2 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio MP 1.2 69
7.3 Análise do ponto de equilíbrio PP-1 1.4 do satélite PP-1. 71
7.3.1 Conjunto de dados do satélite PP-1 71
7.3.2 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio PP-1 1.4 72
7.4 Análise dos pontos de equilíbrio PP-2 5.5 do satélite PP-2 74
7.4.1 Conjunto de dados do satélite PP-2 74
7.4.2 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio PP-2 5.5 75

8 Análise da estabilidade em torno dos pontos de equilíbrio **78**
8.1 Análise qualitativa da estabilidade em torno do ponto de equilíbrio MP 1.2 79
8.1.1 Comportamento da estabilidade linear 80
8.1.2 Comportamento da estabilidade não linear 89
8.2 Análise qualitativa da estabilidade em torno do ponto de equilíbrio PP-1 1.4 92
8.2.1 Comportamento da estabilidade linear 92
8.2.2 Comportamento da estabilidade não linear 101

9 Conclusões **105**

Referências bibliográficas **107**

A Hamiltoniana completa e equações de movimento **112**

B Funções $a(A, C, I)$ e $b(A, C, I)$ para o satélite MP **141**

C Estabilidade em torno do ponto de equilíbrio PP-2 5.5 **149**

C.1 Análise qualitativa da estabilidade 149

C.1.1 Comportamento da estabilidade linear 149
C.1.2 Comportamento da estabilidade não linear 158

D Resultado qualitativo da análise de estabilidade para o ponto de equilíbrio PP-1 8.3 **162**
D.1 Comportamento da estabilidade linear 162
D.2 Comportamento da estabilidade não linear 163

E Resultado qualitativo da análise de estabilidade para o ponto de equilíbrio PP-2 5.3 **165**
E.1 Comportamento da estabilidade linear 165
E.2 Comportamento da estabilidade não linear 166

Capítulo 1

Introdução

Um satélite artificial em órbita da Terra está sujeito à forças externas que podem afetar sua velocidade e consequentemente sua órbita. Por outro lado os torques oriundos destas forças são responsáveis pelo movimento do satélite ao redor de si, ou seja, alteram sua velocidade de rotação e assim modificam sua orientação espacial com o tempo. A missão espacial a que o satélite se destina muitas vezes exige que instrumentos a bordo do satélite apontem em uma dada direção previamente escolhida. Para esta orientação ser mantida é necessário estudar os torques ambientais, sendo que alguns destes torques podem também auxiliar na manutenção da orientação desejada. A orientação do satélite no espaço é conhecida como atitude.

A análise de estabilidade do movimento rotacional de um satélite artificial, levando em conta a influência dos torques externos, é muito importante na manutenção da atitude necessária para assegurar o sucesso de uma missão espacial. Neste trabalho, pontos de equilíbrio e/ou regiões de estabilidade são estabelecidos quando parcelas associadas a torques externos atuantes no satélite são consideradas na Hamiltoniana do problema e sua influência é refletida nas equações de movimento rotacional, sendo o torque de gradiente de gravidade o único torque externo considerado. Considera se também o satélite em orbital circular e com simetria em torno do eixo z (ou seja, igualdade entre os momentos principais de inércia em torno dos eixos x e y).

O movimento rotacional do satélite pode ser descrito por diversas variáveis, porém para o estudo aqui realizado, utiliza se as variáveis canônicas de Andoyer. Tais variáveis, além do fato de possuírem significado físico, são convenientes para aplicação de métodos de teoria de perturbação, quando se deseja fazer uma abordagem analítica ao movimento rotacional. Essas variáveis também são convenientes para a aplicação de métodos de estabilidade para sistemas Hamiltonianos, que é o foco desse trabalho.

Na sequência deste trabalho, no Capítulo 2 é realizada uma revisão bibliográfica de trabalhos referentes à dinâmica de movimento rotacional, análise de estabilidade de pontos de equilíbrio e determinação da forma normal da Hamiltoniana.

No Capítulo 3, são apresentados os conceitos preliminares para entendimento da

dinâmica rotacional deste estudo. São definidas as variáveis de Andoyer e de Delaunay, presentes na Hamiltoniana do problema bem como definidos os diversos sistemas de referências utilizados. Definem-se também a estabilidade linear e não linear para os pontos de equilíbrios associados à equação de movimento do problema, assim como o conceito de estabilidade segundo Liapunov. Por fim é introduzida a forma normal quadrática para sistemas hamiltonianos bem como os critérios do teorema de estabilidade de Kovalev e Savechenko [26], utilizados nesse trabalho.

No Capítulo 4 são introduzidas a Hamiltoniana do movimento rotacional sobre influência do torque de gradiente de gravidade para excentricidade nula e as equações de movimento do problema.

No Capítulo 5 é apresentada a determinação da forma normal da Hamiltoniana do problema até a 4ª ordem, a qual é necessária para a análise de estabilidade segundo os critérios do teorema de estabilidade de Kovalev e Savechenko [26]. Neste Capítulo são utilizados os resultados obtidos por Formiga [18] para os coeficientes da Hamiltoniana normal de 4ª ordem, que são fundamentais para a análise de estabilidade não linear dos pontos de equilíbrios bem como para a otimização deste trabalho.

No Capítulo 6 é introduzida a sequência lógica do algoritmo utilizado para a determinação da forma normal e análise de estabilidade, bem como dois fluxogramas representativos, um para a determinação dos pontos de equilíbrios e outro para a análise de estabilidade de tais pontos de equilíbrio.

No Capítulo 7 são apresentados os dados orbitais e físicos dos satélites hipotéticos utilizados, os resultados obtidos das simulações numéricas para determinação dos pontos de equilíbrio e da análise de estabilidade. Todas as simulações foram realizadas no software MATHEMATICA.

No Capítulo 8 é feito um estudo qualitativo do comportamento de dois pontos de equilíbrios Liapunov estáveis, obtidos das simulações numéricas apresentados no Capítulo anterior, como função de três parâmetros escolhidos para análise. Nesse estudo é possível observar regiões de estabilidade e como as variações de tais parâmetros influenciam na estabilidade linear e/ou não linear dos respectivos pontos de equilíbrios.

Finalmente, no Capítulo 9 são apresentadas as conclusões finais para o problema estudado bem como perspectivas para realização de trabalhos futuros.

1.1 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho se resumem em:

- Analisar a estabilidade de pontos de equilíbrio para sistemas dinâmicos com 2 graus de liberdade referente ao movimento rotacional de satélites artificiais simétricos em órbita circular sob a influência do torque de gradiente de gravidade, usando as

variáveis canônicas de Andoyer.

- Aplicar os critérios de estabilidade do teorema de Kovalev e Savechenko [26] para os pontos de equilíbrios encontrados e estabelecer regiões de estabilidade em torno dos pontos de equilíbrio Liapunov estáveis.

- Otimizar o algoritmo do problema em relação a trabalhos anteriores. Algoritmo este que contém o processo de normalização da Hamiltoniana e a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio.

1.2 Motivação

A motivação para o desenvolvimento de tal pesquisa é de dar continuidade a análise de estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais utilizando as variáveis canônicas de Andoyer, inicialmente desenvolvido por Cabette [9]. Em Cabette [9], o processo de determinação da forma normal da Hamiltoniana era lento e apenas poucos pontos de equilíbrio estáveis pelo critério de Kovalev e Savchenko foram encontrados [9] e [36]. Assim, seguindo as sugestões contidas em Cabette [9], pretende se nesse trabalho:

- Verificar a estabilidade de movimento rotacional utilizando apenas pequenas parcelas significativas da Hamiltoniana com influência do torque de gradiente de gravidade.

Considera se a Hamiltoniana do movimento rotacional para satélites simétricos (dois de seus momentos principais de inércia iguais) e em órbita circular (excentricidade nula). Tais considerações fazem com que a Hamiltoniana e a equação de movimento tenham um número menor de termos a serem estudados, diminuindo o grande número de cálculos envolvidos.

- Otimizar o processo de determinação de pontos de equilíbrios e normalização da Hamiltoniana do problema, de modo que possa ser analisados um conjunto maior de dados.

Para tanto, utiliza se os resultados obtidos analiticamente por Formiga [18] para os coeficientes da Hamiltoniana normal de 4^{a} ordem.

- Estabelecer regiões de equilíbrio Liapunov estáveis.

Tais regiões são obtidas em função de três parâmetros previamente escolhidos (inclinação orbital, momentos principais de inércia em torno dos eixos x e z).

Dessa forma, com a determinação de um número maior de pontos de equilíbrio estáveis e regiões de estabilidade Liapunov estáveis, os resultados deste trabalho podem

contribuir diretamente na manutenção da atitude de satélites artificiais, podendo gerar uma economia de combustível através de um menor número de manobras de atitude para manter a atitude desejada.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Nesse Capítulo é apresentada uma breve revisão da literatura envolvendo o estudo da estabilidade de sistemas Hamiltonianos, a forma normal da Hamiltoniana e o movimento rotacional utilizando as variáveis de Andoyer.

Desde a década de 60, as variáveis de Andoyer vêm sendo utilizadas para o estudo do moviemento rotacional de satélites artificiais. Em Deprit [14], é realizada uma análise qualitativa do movimento rotacional de um corpo rígido livre de torques externos utilizando tais variáveis. A função Hamiltoniana é reduzida a um sistema dinâmico com um grau de liberdade onde é possível realizar um estudo das equações de movimento por meio de um plano de fase, apontando regiões de estabilidade.

Na década de 70 alguns trabalhos relacionados com a análise de estabilidade de corpos rígidos foram desenvolvidos dos quais destacamos a seguir os que mais se relacionam com o estudo realizado neste trabalho.

Kinoshita [24], [25] estudou o movimento de dois corpos rígidos atraídos mutuamente utilizando variáveis de Andoyer. Em 1970, Kinoshita realizou seu estudo considerando um corpo esférico e o outro esferoidal (forma esférica na qual a distribuição de massa faz com que o corpo tenha dois de seus momentos principais de inércia iguais) determinando três movimentos estacionários (pontos de libração) e estabelecendo condições de estabilidade. Em 1972, Kinoshita investigou o problema com um corpo triaxial e outro esferoidal. Trabalhando com integrais, funções elípticas e suas expanções em série obteve-se soluções analíticas para as equações de movimento.

Hori [23] estuda em 1971 o movimento de dois corpos rígidos com dimensões finitas usando as variáveis canônicas de Delaunay e Andoyer através de métodos de perturbação via transformações canônicas.

Kovalev e Savchenko [26] realizaram em 1975 uma análise sobre a estabilidade de rotações uniformes de um corpo rígido em torno de um eixo principal de inércia. O movimento rotacional do corpo rígido é estudado utilizando a Hamiltoniana descrita em ângulos de Euler. Após a determinação da solução de equilíbrio, variáveis canônicas

são introduzidas e a Hamiltoniana é desenvolvida nas vizinhanças da rotação uniforme. Uma transformação canônica é definida, cujos coeficientes dependem dos autovalores do sistema linear reduzido, assim a Hamiltoniana é reduzida à sua forma normal, incluindo termos até 4ª ordem. A análise da rotação uniforme fica reduzida ao estudo da relação entre os coeficientes da forma normal da Hamiltoniana. A discussão do trabalho permite determinar regiões de estabilidade no plano de fase.

O estudo de dois corpos rígidos atraídos mutuamente também foi analisado por Bhatnagar e Gupta [5] em 1980. Na análise inicial foram considerados corpos rígidos com forma esférica, mas com uma distribuição de massa que tornasse dois de seus momentos principais de inércia iguais, ou seja, esses corpos rígidos foram considerados dinamicamente simétricos em relação ao plano equatorial do corpo. Nesse trabalho, foi realizada a análise de estabilidade pelo método de Liapunov de nove das soluções particulares correspondentes ao ponto de libração encontradas, considerando dois tipos de categorias. Na primeira, foi incluído corpos de diferentes formas e na segunda, foi considerado a massa e dimensão de um dos corpos muito menor que do outro (similar ao caso de um satélite artificia em órbita terreste). Em ambos os casos as condições de estabilidade são estabelecidas.

Uma abordagem similar a de Kovalev e Savchenko [26] foi realizada por Chudnenko [12] em 1981. Este estudo é associado ao movimento rotacional de um corpo rígido com o eixo de rotação coincidente com um dos eixos principais de inércia e supondo dois dos momentos principais de inércia iguais. A Hamiltoniana é desenvolvida em torno de uma rotação uniforme, considerando termos até sexta ordem, cujos coeficientes estão relacionados com os momentos principais de inércia e com a velocidade angular de rotação uniforme do corpo. Uma Hamiltoniana normal até sexta ordem é obtida e com a análise dos coeficientes dos polinômios de segunda, quarta e sexta ordem, obtém se regiões de estabilidade no plano de fase.

Em 1985, Heggie [21] analisou um sistema Hamiltoniano autônomo com três graus ou mais de liberdade. Neste caso, a família de órbitas periódicas pode tornar-se instáveis quando dois pares de multiplicadores que caracterizam um círculo unitário não são iguais a ± 1, sendo que eles deslocam-se para fora do círculo unitário. Este trabalho faz uso da Hamiltoniana em sua forma normal nas vizinhanças das instabilidades e esta aproximação demonstra a bifurcação de órbitas periódicas de um toro bidimensional invariante. A teoria é ilustrada pelo cálculo numérico de órbitas do problema planar de três corpos.

Em 1986, Bhatnagar e Gupta [6] estudam o movimento de dois corpos rígidos triaxiais, sendo que um total de 36 movimentos estacionários foram encontrados correspondendo aos valores constantes das coordenadas generalizadas não cíclicas dependendo dos ângulos de Euler associados com a orientação dos dois corpos. Em cada um desses movimentos estacionários, um dos eixos do momento principal de inércia alinha-se a linha imaginária de união dos dois centros de massas, o outro eixo é perpendicular a essa linha imaginária

e encontra-se no plano orbital e o terceiro eixo é perpendicular ao plano orbital. O estudo da estabilidade foi realizado no sentido Liapunov considerando diferentes formas para os corpos e posteriormente considerando o caso de satélites artificiais, em que a massa e dimensão de um dos corpos muito menor que do outro.

Diversos outros trabalhos relacionados à estabilidade de corpos rígidos continuaram a ser desenvolvidos na década de 90.

Em 1994, Cordeiro [10] apresenta um estudo de estabilidade linear de pontos de equilíbrio e de órbitas periódicas, tal análise é feita através dos autovalores do sistema linear reduzido em que é utilizado a forma normal da matriz de Jordan, quando se trata de pontos de equilíbrios, e da matriz de Monodromia no caso de órbitas periódicas. Informações importantes são obtidas quando o estudo dos autovalores associa-se a teoria de Krein. A principal característica desta teoria é que as soluções estáveis a priori permanecerão estáveis com alterações de alguns parâmetros internos ou se pequenas pertubações conservativas são aplicadas.

O trabalho de Teofilatto e Graziani [35] de 1996 trata do movimento libracional tridimensional de um veículo espacial em torno dos seus eixos principais de inércia. Este estudo apresenta a existência de movimentos periódicos assim como trajetórias caóticas no espaço de fase. Em ambos os casos a transformação de normalização reduz o sistema para três osciladores harmônicos independentes, que representam o movimento de rolamento, arfagem e guinada. A transformação normal da Hamiltoniana é sujeita a ressonância dos autovalores. Os pontos estacionários obtidos são utilizados para aplicação do algoritmo de Newton-Raphson para obtenção de superfícies de Poincaré do sistema e para obter trajetórias de atitude periódica de veículos espaciais de alta excentricidade. Os movimentos irregulares são analisados e após evidências numéricas, é discutido a transição do movimento regular para o caótico. Observa se também que o movimento irregular em torno de soluções periódicas está associado ao crescimento da excentricidade.

Em 1999, Kuzmina [28] apresentou um método de análise de sistemas dinâmicos que permite obter a solução de problemas idealizados na mecânica. A abordagem geral baseada na teoria de estabilidade de Liapunov, permite considerar vários sistemas mecânicos de um ponto de vista único e elaborar a tecnologia de modelamento com a organização de um esquema de decomposição para sistemas originais, considerando as propriedades dinâmicas envolvidas. Tal método segue as ideias de Chetayev, combinados com métodos de Liapunov e métodos de teoria de pertubação. A abordagem utiliza postulados de estabilidade e postulados de singularidades além de estender o conceito de estabilidade paramétrica para peturbações singulares.

O estudo de estabilidade utilizando a forma normal da Hamiltoniana, envolvendo o teorema de Arnold e suas extensões, vem sendo desenvolvido em alguns trabalhos mais recentes destacados a seguir.

Em 2001, em Elipe *et al.* [15], é apresentado um sistema Hamiltoniano com dois

graus de liberdade no qual é estudado a estabilidade não linear dos pontos de equilíbrio nas vizinhanças da origem por meio do teorema de Arnold. Nesse trabalho, uma normalização prévia da Hamiltoniana para ordens superiores é necessária. No caso de ressonância não é possível reduzir a Hamiltoniana a sua forma normal requerida pelo teorema de Arnold, assim a análise é feita pelo fluxo de fase normalizado.

Machuy [30] em 2001 desenvolveu um manipulador algébrico para a determinação da forma normal parcial para a Hamiltoniana de Hill. Tal manipulador consistia em realizar operações aritméticas com polinômios, derivadas de Lie e derivadas parciais de polinômios. O problema de Hill nesse trabalho é uma aproximação do problema três corpos onde um satélite artificial interage com um corpo primário (Terra) e um secundário (Lua).

Em 2002, Costa Filho [11] estudou uma forma normal para sistemas dinâmicos visando obter um novo sistema que proporcione a análise das posições de equilíbrio e de soluções periódicas. O processo de um modo geral não converge, entretanto, através de um truntamento nas expansões é obtido sistemas auxiliares muito próximo do sistema dado, tornando o método válido.

Stuchi [34] em 2001 estuda o problema de Hill $3D$ onde para ajudar na compreensão dos sistemas hamiltonianos $3D$ é construída uma forma normal que provê um conhecimento da dinâmica associado ao caráter elíptico de pontos de equilíbrio. O ponto principal deste estudo é a redução do sistema hamiltoniano em certa vizinhança dos dois pontos de equilíbrio $L1$ e $L2$ (centro-sela-centro) como órbitas periódicas e toros KAM invariantes. A série obtida diverge, exceto para variedade central unidimensional do problema planar de Hill.

Em 2006, Elipe e Moratalla [16], baseado no teorema de Arnold, apresentam um trabalho que determina a estabilidade orbital para dois graus de liberdade, para satélites naturais em ressonância $2:1$ e $3:1$ com a Terra. Neste estudo, é realizada uma normalização ordens superiores da Hamiltoniana e através de análise simples concluiu que substituído os valores dos coeficientes harmônicos da expansão do potencial, podemos obter a estabilidade orbital de pontos estacionários.

E finalmente, os três trabalhos a seguir foram de fundamental importância para o desenvolvimento deste estudo.

No trabalho de Cabette [9] e posteriormente em Vilhena de Moraes *et al.* [36], de 2006 e 2009, respectivamente, é apresentado um estudo sobre estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais considerando perturbações devido ao torque do gradiente de gravidade utilizando formulações canônicas e as variáveis canônicas de Andoyer. Esses trabalhos utilizam o procedimento apresentado por Machuy [30], onde é apresentada uma forma normal da hamiltoniana até 4^{a} ordem. Com base no teorema de Kovalev e Savchenko é verificada a estabilidade de pontos de equilíbrio do movimento rotacional para alguns satélites hipotéticos com dados orbitais similares a satélites reais.

No trabalho de Formiga [18] de 2009, é realizado um estudo da estabilidade do

ponto lagrangiano $L4$ para o problema fotogravitacional. Um método analítico-numérico para normalização de sistemas hamiltonianos com 2 e 3 graus de liberdade é apresentado. A forma normal é obtida utilizando o método de Lie-Hori. A análise da estabilidade do sistema também é feita pelo teorema de Kovalev e Savechenko que é aplicado ao estudo de estabilidade do ponto lagrangiano $L4$ no problema fotogravitacional circular restrito dos três corpos. O papel mais importante desse trabalho são os resultados obtidos para a função geratriz de 3^{a} ordem, necessária para a determinação dos coeficientes da hamiltoniana normal de 4^{a} ordem, ambos foram obtidos analiticamente.

No desenvolvimento desse trabalho, o equacionamento matemático do movimento rotacional de satélites artificiais com variáveis de Andoyer e torque de gradiente de gravidade baseou se em Cabette [9] e Vilhena de Moraes [36]. Para a otimização dos algoritmos de determinação de forma normal da Hamiltoniana e para análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio foram essenciais os coeficientes da Hamiltoniana normal de 4^{a} ordem obtidos analiticamente por Formiga [18].

Capítulo 3

Conceitos preliminares

Em geral, todos os satélites artificiais possuem instrumentos que servem para observação ou interação com outros instrumentos. Além do mais, é conveniente que tais instrumentos estejam apontando para direções específicas para seu melhor desempenho. Em várias pesquisas espaciais se faz necessária uma análise detalhada do movimento rotacional dos satélites em estudo, como por exemplo, em satélites para fins meteorológicos, de telecomunicação, de sensoriamento remoto, científico, ambientais, entre outros.

Dessa forma, além de ser necessário conhecer a órbita de um satélite (posição e velocidade de translação) também é preciso conhecer a atitude desse satélite (orientação e velocidade de rotação ao redor de seu centro de massa).

A atitude de um satélite é definida por um conjunto de parâmetros que permitem, de forma unívoca, correlacionar, num instante de tempo qualquer, um sistema de coordenadas fixo ao satélite (que acompanha seu movimento de rotação e translação) a outro sistema inercial, o qual está usualmente relacionado com a Terra. Em geral considera-se que este último seja inercial ou quase inercial, que significa que seu movimento, em relação ao sistema verdadeiramente inercial, seja desprezível quando comparado com o movimento do próprio corpo. Existem muitas formas de se representar a atitude, porém para este trabalho serão utilizadas as variáveis canônicas de Andoyer.

No início desse capítulo é feito um comentário sobre os sistemas de coordenadas utilizados para a determinação das variáveis de Andoyer (utilizada para descrever o movimento rotacional do satélite) e das variáveis de Delaunay (utilizada para descrever o movimento translacional do satélite).

Faz-se necessário também definir os sistemas dinâmicos e os sistemas hamiltonianos bem como as suas propriedades que são fundamentais para a aplicação e desenvolvimento dos métodos utilizados neste trabalho. Em seguida, é feito uma discussão preliminar sobre a determinação dos pontos de equilíbrio para sistemas não lineares e de suas estabilidades. Para isso é preciso elencar os conceitos de estabilidade linear e não linear de tais pontos de equilíbrio. Para este último tópico mencionado (estabilidade não linear) é necessário introduzir os conceitos de estabilidade segundo Liapunov.

3.1 Sistemas de coordenadas

Os sistemas de coordenadas definidos como apropriados para o estudo do movimento rotacional desse trabalho, que possuem a origem coincidente com o centro de massa O do satélite, são: *sistema de eixos principais de inércia do satélite* representado como $Oxyz$ (fixo ao satélite denominado também como sistema principal), *sistema equatorial* representado como $OXYZ$ (com eixos coincidentes com o sistema equatorial terrestre, aqui denominado também como sistema inercial) e o *sistema do momento angular* representado como $Ox_m y_m z_m$ (onde o eixo Oz_m coincide com a direção do momento angular de rotação do satélite $\overrightarrow{L_s}$). Ambos os sistemas são apresentados na Figura 3.1.

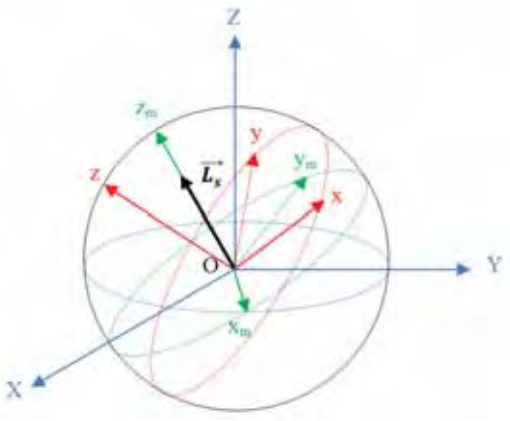


Figura 3.1: Sistema principal ($Oxyz$), sistema equatorial ($OXYZ$) e o sistema do momento angular ($Ox_m y_m z_m$)

O sistema do satélite $OXYZ$ e o sistema principal $Oxyz$ [33] relacionam-se através dos ângulos de Euler (φ, θ, ψ) via um sistema de eixos intermediário definido como $Ox\prime y\prime z\prime$. Ver Figura 3.2.

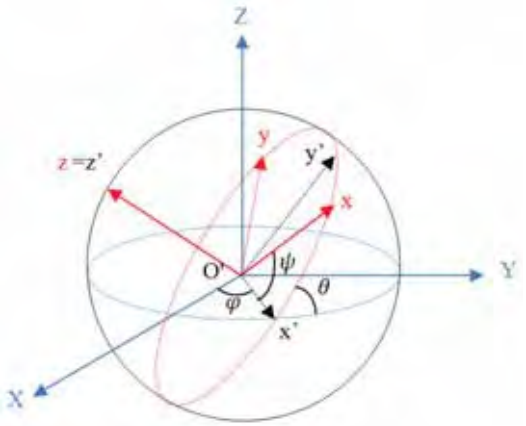


Figura 3.2: Sistema principal ($Oxyz$), sistema equatorial ($OXYZ$), sistema intermediário ($Ox'y'z'$) e os ângulos de Euler

Quando julgadas como coordenadas generalizadas adequadas do movimento rotacional, os ângulos de Euler, juntamente com seus momentos generalizados, são utilizados para descrever a atitude de um satélite artificial.

3.1.1 Variáveis de Andoyer

Neste trabalho, julgamos conveniente utilizar as variáveis de Andoyer $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, L_1, L_2, L_3)$ para descrever o movimento rotacional do satélite, por serem variáveis canônicas e por terem significado físico de fácil aplicação em métodos de teoria de perturbação, principalmente quando se deseja fazer uma abordagem analítica do movimento rotacional. Ver Figura 3.3 [25].

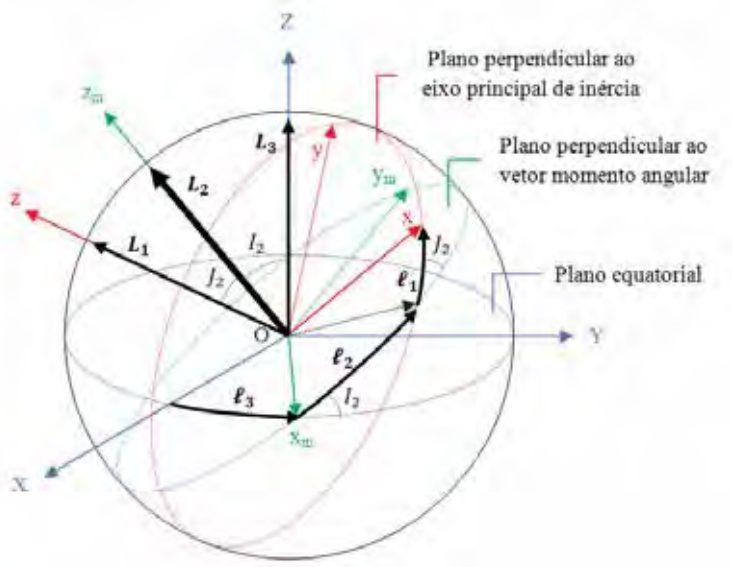


Figura 3.3: Sistema principal $(Oxyz)$, sistema equatorial $(OXYZ)$, sistema do momento angular $(Ox_m y_m z_m)$ e as variáveis de Andoyer

As coordenadas generalizadas:

- ℓ_1 representa o ângulo entre a interseção do plano principal xy com o plano do momento angular $x_m y_m$ e o eixo principal Ox.
- ℓ_2 representa o ângulo entre a interseção do plano do momento angular $x_m y_m$ com o plano equatorial XY e a interseção do plano principal xy com o plano do momento angular $x_m y_m$.
- ℓ_3 representa o ângulo entre o eixo OX e a interseção do plano do momento angular $x_m y_m$ com o plano equatorial XY.

Os momentos generalizados:

- L_1 é a projeção do momento angular $\overrightarrow{L_s}$ no eixo principal Oz.

$$L_1 = L_s \cos J_2, \tag{3.1}$$

em que J_2 é o ângulo formado entre $\overrightarrow{L_s}$ e o eixo principal Oz.

- L_2 é o módulo do momento angular de rotação $\overrightarrow{L_s}$.

- L_3 é a projeção do momento angular $\overrightarrow{L_s}$ no eixo equatorial OZ.

$$L_3 = L_s \cos I_2, \tag{3.2}$$

em que I_2 é o ângulo formado entre $\overrightarrow{L_s}$ e o eixo equatorial OZ.

3.1.2 Variáveis de Delaunay

Tais variáveis descrevem o movimento translacional do centro de massa do satélite ao redor da Terra [8]. Porém, para esse trabalho consideramos a órbita do satélite em estudo bem conhecida. Sejam o sistema equatorial geocêntrico (com origem no centro de massa da Terra $O\prime$) representado por $O\prime XYZ$ e o sistema orbital representado por $O\prime x_S y_S z_S$.

As variáveis de Delaunay são escritas em termos dos elementos orbitais (ver Figura 3.4), longitude do nodo ascendente (Ω), inclinação orbital (I), argumento do perigeu (ω), anomalia média ($\mathcal{M}$), semieixo maior (a), excentricidade (e) e definidas por [8]:

$$\begin{aligned} l &= \mathcal{M}, & L &= M\sqrt{\mu a}, \\ g &= \omega, & G &= L\sqrt{(1-e^2)}, \\ h &= \Omega, & \mathcal{H} &= G\cos I, \end{aligned} \tag{3.3}$$

sendo M a massa do satélite e μ o parâmetro gravitacional terrestre.

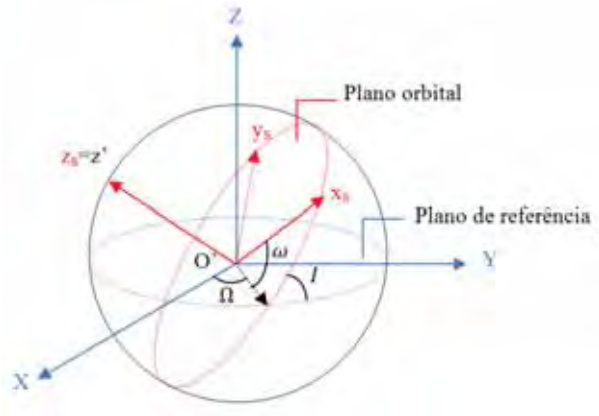


Figura 3.4: Sistema orbital ($Ox_s y_s z_s$) e o sistema equatorial ($OXYZ$)

3.2 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é classificado como uma configuração que se modifica à medida que evolui no tempo. As equações que regem o movimento de sistemas dinâmicos são na maioria das vezes complexas e não possuem soluções exatas, principalmente tratando-se de sistemas não lineares. No entanto, através de um processo de linearização para sistemas não lineares é possível obter soluções aproximadas para tal problema. Este método consiste em analisar o comportamento do sistema ao redor do ponto de equilíbrio, onde podemos obter soluções fixas ou constantes, que não possuem dependência temporal, ou soluções dinâmicas, que possuem dependência temporal.

Um sistema dinâmico contínuo, descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, é autônomo quando ele não depende explicitamente do tempo.

$$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = f(\overrightarrow{x}), \quad \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \ , \tag{3.4}$$

sendo que a função f não depende explicitamente do tempo t, tal sistema é nomeado como invariante no tempo, independente do tempo ou estacionário.

Um sistema é denominado não autônomo quando ele depende explicitamente do tempo.

$$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = f(\overrightarrow{x}, t), \quad \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in \mathbb{R} \ , \tag{3.5}$$

sendo a função f dependente explicitamente do tempo t, tal sistema é nomeado como campo vetorial. O vetor $\overrightarrow{x}$ é denominado vetor de configuração, pois descreve a posição do sistema, e o espaço $\mathbb{R}^n$ onde ocorre a evolução temporal é denominado espaço de configurações.

A projeção da solução no espaço de configuração de n dimensões é denominada trajetória ou órbita.

3.3 Sistema hamiltoniano

Enquanto na abordagem Lagrangeana lidamos com um sistema n equações diferenciais de segunda ordem, expressas em função das coordenadas generalizadas q_j, das velocidades generalizadas $\dot{q_j}$ e possivelmente do tempo, na abordagem Hamiltoniana lidamos com um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem, expressas em função das coordenadas generalizadas q_j, dos momentos generalizados p_j e possivelmente do tempo.

O conjunto (q_j), $j = 1, ...n$, é chamado espaço de configuração, sendo n o número de graus de liberdade do sistema. Pode-se denominar também o espaço de fase de um sistema dinâmico como o conjunto das n variáveis independentes (q_j, p_j), $j = 1, ...n$.

As variáveis independentes nas equações de Lagrange são apenas as coordenadas

generalizadas q_j, pois as velocidades generalizadas $\dot{q_j}$ não são consideradas independentes por serem as derivadas em relação ao tempo de q_j. Na abordagem Hamiltoniana, pelo contrário, as coordenadas generalizadas q_j e os momentos generalizados p_j são variáveis independentes entre si.

Importante destacar que é do espaço de configuração que se define as equações de Lagrange $\mathcal{L}(q_j, \dot{q_j}, t)$ e da mesma forma, é do espaço de fase que se define as equações de Hamilton $H(q_j, p_j, t)$. O espaço de configuração descreve a evolução do sistema no espaço tridimensional euclidiano ou mesmo em um espaço de geometria mais complexa. Por outro lado, o espaço de fase não representa um espaço geométrico propriamente dito, mas em determinadas condições, ele mostra ser uma construção apropriada para o estudo dos sistemas mecânicos [20].

Outro detalhe, as coordenadas *cíclicas* ou *ignoráveis* desempenham um papel muito importante para as soluções das equações de Lagrange, e continua a desempenhar um papel tão grande ou talvez ainda maior na abordagem Hamiltoniana. Pode-se mostrar que quando uma coordenada é cíclica na função de Lagrange ela também o é na função de Hamilton.

A função Lagrangiana $\mathcal{L}(q_j, \dot{q_j}, t)$ representa a diferença entre a energia cinética $T(q_j, \dot{q_j})$ e a energia potencial $V(q_j)$, isso para sistemas naturais [20]:

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q_j}, t) = T(q_j, \dot{q_j}) - V(q_j). \tag{3.6}$$

Levando em consideração o princípio de Hamilton para um sistema dinâmico holônomo descrito pela Lagrangiana $\mathcal{L}(q_j, \dot{q_j}, t)$, seu movimento do instante t_1 ao instante t_2 é tal que a ação [29]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q_j}, t)dt \tag{3.7}$$

é mínima para a trajetória real, mantidos fixos os pontos iniciais da trajetória no espaço de configuração.

Da extremização da ação (3.7) e impondo $\delta S = 0$, derivam-se as equações de Euler-Lagrange dadas por [29]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, ..., n \ . \tag{3.8}$$

Impondo $2n$ condições iniciais do problema $(q_j(0), \dot{q_j}(0))$, a trajetória no espaço de configuração é única. Se ela puder ser determinada analiticamente o sistema é denominado integrável. As coordenadas generalizadas q_j são *ignoráveis* ou *cíclicas* quando não aparecem na Lagrangiana.

Caso o sistema for não integrável, o problema será mais comodamente resolvido pela formulação Hamiltoniana. A descrição Hamiltoniana envolve a substituição das variáveis

$(q_j,\dot{q_j})$ pelas variáveis canônicas (q_j, p_j) com $(j = 1, \ldots, n)$ em todas as grandezas mecânicas e a introdução de uma função $H(q, p, t)$ em lugar a Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ para gerar a dinâmica. A formulação Hamiltoniana também é útil para a aplicação de métodos de teoria de perturbação.

Tal mudança de descrição realiza-se mediante a uma transformação de Legendre, que no presente contexto consiste na substituição das velocidades generalizadas $(\dot{q_j})$ pelos momentos canônicos p_j definidos por:

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_j}}, \quad j = 1, ..., n \ . \tag{3.9}$$

Logo a Hamiltoniana $H(q_j, p_j, t)$ é definida por:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{q_j} p_j - \mathcal{L}(q_j, \dot{q_j}, t), \tag{3.10}$$

em que $q_j, \dot{q_j} \in \mathbb{R}$ e definidos em termos da Lagrangiana.

As velocidades generalizadas devem ser expressas na forma $\dot{q_j} = f_i(q, p, t)$ resultante das n equações (3.9) para as n velocidades generalizadas.

Tomando-se o diferencial de (3.10) pode-se determinar as *equações canônicas de Hamilton* como:

$$\dot{q_j} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, ..., n \ . \tag{3.11}$$

Dadas as $2n$ condições iniciais do problema o sistema também possui uma solução única como no caso das equações de Euler-Lagrange.

Há uma propriedade importante para os sistemas Hamiltonianos que garante que uma região R do espaço de fase (q, p) tem seu volume conservado sob transformações canônicas.

De acordo com Lemos [29], se R_0 é uma região no espaço de fase no instante t_0 com volume V_0 e R_t é uma região no instante t obtida levando cada ponto de R_0 no ponto correspondente de R_t por meio de uma evolução temporal gerada pela Hamiltoniana. É garantido que $V_t = V_0$ pois a evolução temporal é uma transformação canônica.

Esta frase citada é conhecida com teorema de Liouville, que assegura que a evolução dinâmica preserva o volume de qualquer região do espaço de fase.

Veja o esquema da evolução temporal, que é uma transformação canônica na Figura 3.5.

Liouville provou o teorema de unicidade para as equações de Hamilton, assegurando que o número de pontos representativos em um dado elemento de volume é preservado pela evolução temporal [29]. Em outras palavras, cada ponto (q, p) no instante t é produto da evolução dinâmica de um único ponto (q_0, p_0) em um instante anterior t_0. Como o volume do elemento é também conservado pela evolução temporal, a distribuição de

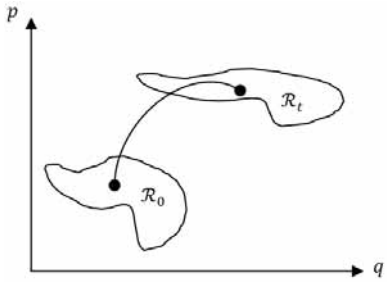


Figura 3.5: Evolução dinâmica de uma região no espaço de fase

pontos representativos move-se como um fluido incompressível no espaço de fase.

Na verdade um sistema Hamiltoniano obedece a uma propriedade ainda mais fundamental da qual a preservação do volume decorre. É a preservação da soma das áreas projetadas, A_j, por qualquer superfície definida no espaço de fase sobre os n planos conjugados (q_j, p_j). A esta soma dá-se o nome de área simplética e tal propriedade garante uma estrutura geométrica ao espaço de fase Hamiltoniano que deve ser preservado por qualquer transformação canônica de variáveis para que o sistema continue Hamiltoniano.

O método de redução da Hamiltoniana em sua forma normal, que será utilizado e demonstrado nas próximas seções, faz uso de tal propriedade, as transformações necessárias são derivadas de uma função geratriz aplicada a Hamiltoniana do problema.

Muitas vezes não é possível resolver analiticamente um sistema Hamiltoniano devido a existência de termos não lineares em sua função, porém podem-se obter informações importantes sem conhecer a solução do sistema. A primeira informação que se pode encontrar são os pontos de equilíbrio de tal sistema e logo em seguida analisar a sua estabilidade por meio da linearização do sistema nas suas vizinhanças.

3.4 Ponto de equilíbrio e estabilidade

3.4.1 Características dos pontos de equilíbrio

As características pontos de equilíbrios de um sistema de equações diferenciais podem ser encontrados através da linearização das equações dinâmicas em torno desses pontos. Tais pontos de equilíbrios são definidos de acordo com as características dos autovalores encontrados desse processo linearização [3].

3.4.2 Estabilidade linear para pontos de equilíbrios de sistemas hamiltonianos

Os sistemas hamiltonianos possuem sempre $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, do tipo

$$\dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}). \tag{3.12}$$

Encontram-se os pontos de equilíbrio do sistema em estudo anulando o lado esquerdo da equação (3.12) e resolvendo-a. Após ter determinado os pontos de equilíbrio deve-se linearizar o sistema nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, encontrando assim seus respectivos autovalores e autovetores associados. Mas antes disso, deve-se expandir a Hamiltoniana ao redor do ponto de equilíbrio, porém, é interessante fazer uma translação das coordenadas para que a origem coincida com o ponto de equilíbrio. Dessa forma podemos expandir a Hamiltoniana em série de Taylor na nova origem, ou seja, expandi-la nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. Assim tem-se.

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + \cdots, \tag{3.13}$$

em que H_j $(j \geq 0)$ é um polinômio homogêneo de grau j, nas $2n$ variáveis. Sabendo que a origem é um ponto de equilíbrio então $H_1 = 0$ e H_0 é uma constante $H_0 = H(0)$. Logo, podemos simplificar a Hamiltoniana expandida (3.13) para

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \cdots \tag{3.14}$$

Dessa forma, o sistema agora pode ser linearizado e escrito na forma geral como

$$\dot{\vec{v}} = JP\vec{v}, \tag{3.15}$$

com v sendo uma matriz coluna descrevendo um ponto no espaço de fase na vizinhança da nova origem, P é a Hessiana ao redor da nova origem e J é a matriz simplética do problema que são dadas por:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

$$J = \begin{bmatrix} E_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & E_n \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

em que $\mathbb{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n, E_n é uma matriz nula de ordem n. Lembrando que transladamos a origem para o ponto de equilíbrio, logo v e P são avaliados no ponto de equilíbrio.

Dessa forma, a estabilidade linear pode ser estabelecida através dos autovalores obtidos através do $det(\lambda\mathbb{I} - JP) = 0$.

É importante ressaltar que, para o ponto de equilíbrio ser estável, basta que seus

autovalores associados sejam imaginários puros. Porém, essa condição garante apenas a sua estabilidade linear e não assegura a sua estabilidade não linear, para essa questão há vários trabalhos no assunto, sendo muito deles relacionadas ao teorema de Arnold [2].

3.4.3 Estabilidade não linear para pontos de equilíbrios de sistemas hamiltonianos

Para resolver o problema da estabilidade não linear, pode-se utilizar diversos métodos sendo que muitos deles necessitam da forma normal da Hamiltoniana do sistema, neste caso, é conveniente obtermos uma Hamiltoniana escrita de uma maneira "bem comportada" no sentido de separá-la em contribuições com termos de mesmo grau. Trabalhos anteriores analisaram tal situação como em [31] e [7].

Para isso é necessário fazer uma transformação canônica de variáveis nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio e, além disso, é preciso elencar o conceito de estabilidade segundo Liapunov.

A análise de estabilidade de Liapunov fornece uma definição geométrica de estabilidade de um estado de equilíbrio. Seja um sistema de equações (3.12), cuja solução determinada pelas condições iniciais, é dadas por $\tilde{x}_0 = x(x_0, t)$ e cujo estado de equilíbrio é caracterizado por:

$$F(\tilde{x}_0) = 0, \quad \tilde{x}_0 = x(x_0, t) \ . \tag{3.18}$$

Seja $\tilde{x}_e = x(x_e, t)$ um ponto de equilíbrio determinado por (3.18). Então a estabilidade pode ser definida segundo Liapunov como:

i. Diz-se que $\tilde{x}_0 = x(x_0, t)$ é um ponto de equilíbrio *estável* para equação (3.12) se, dado um raio $\varepsilon > 0$, existe um raio correspondente $\delta > 0$ tal que $|\tilde{x}_0 - \tilde{x}_e| < \delta$ e que satisfaça a relação $|\tilde{x}_t - \tilde{x}_e| < \varepsilon$, para qualquer $t > 0$. Figura 3.6. Em outras palavras, a solução $\tilde{x} = x(x_t, t)$ permanece em um tubo em torno de $\tilde{x}_e = x(x_e, t)$ à medida que o tempo evolui.

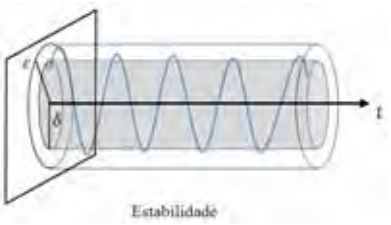


Figura 3.6: Ponto de equilíbrio estável segundo Liapunov

ii. Diz-se que $\tilde{x}_0 = x(x_0, t)$ é um ponto de equilíbrio *instável* para equação (3.12) se, dado um raio $\varepsilon > 0$, existe um raio correspondente $\delta > 0$ tal que $|\tilde{x}_0 - \tilde{x}_e| < \delta$ e

que satisfaça a relação $|\tilde{x}_t - \tilde{x}_e| \geqslant \varepsilon$, para ao menos um $t > 0$. Figura 3.7. Em outras palavras, a solução $\tilde{x} = x(x_t, t)$ sai de um tubo em torno de $\tilde{x}_e = x(x_e, t)$ pelo menos uma vez à medida que o tempo evolui.

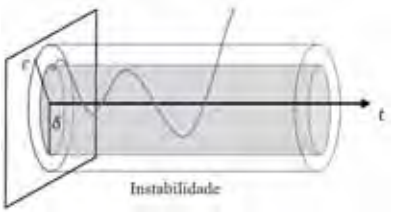


Figura 3.7: Ponto de equilíbrio instável segundo Liapunov

iii. Diz-se que $\tilde{x}_0 = x(x_0, t)$ é um ponto de equilíbrio assintóticamente estável, se $\tilde{x}_e = x(x_e, t) = 0$ é estável e se existir uma vizinhança na origem de tal forma que, para qualquer solução $\tilde{x}_t = x(x_t, t)$ continua pertencendo a vizinhança obedecendo à expressão, $\lim_{t \longrightarrow \infty} \tilde{x}_t = x(x_e, t)$. Figura 3.8.

Figura 3.8: Ponto de equilíbrio assintóticamente estável segundo Liapunov

O teorema KAM – Kolmogorov, Arnold, Moser [19] – diz que se o espaço de fase de um sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade for integrável, as trajetórias dos pontos representativos devem permanecer em um toro n-dimensional definido pelas n constantes do movimento em questão. Tal teorema estabelece que as perturbações no sistema dinâmico não destroem o toro, mas apenas o deforma, permanecendo a trajetória em torno de superfícies n-dimensionais nas vizinhanças do toro inicial. Esse teorema é válido apenas sobre determinadas condições bem específicas e restritas, pois além de supor que as perturbações no sistema hamiltoniano são pequenas, não podem ocorrer ressonâncias nos autovalores associados ao sistema linear reduzido.

Segundo Arnold [4], em um sistema Hamiltoniano, perante uma perturbação conservativa suficientemente pequena, a grande maioria dos toros invariantes não ressonantes não desaparecem, mas apenas deformam levemente, de forma que no espaço de fase do sistema perturbado também existem toros invariantes, que constituem aderências das curvas de fase e as envolvem de modo, condicionalmente periódico, com o número de frequências iguais ao de graus de liberdade.

Quanto ao estudo do movimento para sistemas perturbados fora dos toros invariantes deve-se fazer uma distinção entre os casos: sistemas dinâmicos com 2 graus de liberdade e os de maior grau.

Para um sistema dinâmico com 2 graus de liberdade, uma curva de fase, que se inicie dentro de uma fenda entre dois toros invariantes concêntricos do sistema perturbado, permanece eternamente presa entre esses toros.

Arnold [4] afirma que, por mais complexa que seja a forma desta curva, ela não sai da sua fenda, e as variáveis de ação correspondentes permanecem eternamente nas proximidades de suas condições iniciais..

Se, porém, o número de graus de liberdade n for maior que 2, as fendas entre os toros invariantes concêntricos, interligam se entre si. Dessa forma, nada impede que uma curva de fase que inicie nas proximidades de um desses toros afaste se para longe à medida que o tempo evolui.

De forma análoga, de acordo com Arnold [4], não há motivos para esperar que as variáveis de ação ao longo desta curva de fase permaneçam próximas aos seus valores iniciais em todos os instantes de tempo.

Ainda há uma consideração importante, para sistemas dinâmicos com mais de 2 graus de liberdade, nos quais, independentemente do fato de que na maioria das condições iniciais serem periódicas, para certas condições iniciais é possível um afastamento lento das variáveis de ação em relação aos seus valores iniciais.

Tais considerações se referem ao problema da difusão de Arnold para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos com mais de dois graus de liberdade. Não é garantido que uma solução próxima a um ponto de equilíbrio permaneça na superfície dos toros invariantes concêntricos eternamente, tal solução iria se distanciar da condição inicial da curva de fase, mesmo que seja em um longo período, ou seja, um afastamento lento.

3.5 Forma normal

De acordo com [18] a forma normal consiste em se obter, via uma transformação polinomial de coordenadas (canônicas para sistemas Hamiltonianos), a simplificação de um sistema dinâmico nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio ou órbita periódica. Este procedimento utiliza uma técnica analítica para reduzir sistemas de equações diferenciais, hamiltonianos ou não, a uma forma mais simples ou de uma maneira conveniente para o estudo desejado.

Nesse trabalho, a forma normal da Hamiltoniana em estudo, encontrada após utilizar o processo de normalização, separará termos da Hamiltoniana normal em contribuições de mesmo grau. Para cada contribuição da Hamiltoniana normal é possível ver, termo a termo, que a soma dos expoentes de suas variáveis possuem o mesmo grau da contribuição da Hamiltoniana normal analisada separada por grau. Essa transformação trás grande

vantagem para o estudo da estabilidade Liapunov.

O processo de determinação da forma normal da Hamiltoniana é extenso, envolvendo transformações de variáveis além de ser necessária a utilização do método de Lie-Hori [22]. Este processo é descrito detalhadamente em [36] na investigação da estabilidade de sistemas canônicos aplicados a rotações uniformes de corpos rígidos e em [18] no estudo de estabilidade do ponto L4 no movimento translacional. A seguir é introduzida a forma normal quadrática da Hamiltoniana.

3.5.1 Forma normal quadrática de um sistema hamiltoniano

Suponha que, sem perda de generalidades, o ponto de equilíbrio de sistema hamiltoniano com $2n$ dimensões seja estável, além disso, todos os n autovalores associados ao sistema linear reduzido sejam distintos. Dizemos que os autovalores ω_n satisfazem uma relação de ressonância de ordem K se existir $2n$ números k_n inteiros, diferentes de zero, satisfazendo.

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0, \quad |k_1| + \cdots + |k_n| = K \ . \tag{3.19}$$

Dessa forma, após uma transformação canônica linear por intermédio dos autovalores associados, a Hamiltoniana normal de 2ª ordem H_2^* é dada por:

$$H_2^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{2}\left(q_j^2 + p_j^2\right). \tag{3.20}$$

A forma (3.20) para a Hamiltoniana normal de 2ª ordem é garantida sempre que os autovalores forem distintos e imaginários puros, isto é $\lambda_j = \pm i\omega_j$.

Reformulando a equação (3.20), temos:

$$\ddot{q_j} + \omega_j^2 q_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \ . \tag{3.21}$$

Assumindo que as frequências ω_j são positivas, temos então um sistema de osciladores harmônicos desacoplados, ou seja, osciladores com direções independentes uma das outras.

É importante ressaltar que (3.20) é uma constante, a energia do sistema é dada por:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{2}\left(q_j^2 + p_j^2\right) = E_0. \tag{3.22}$$

Tal solução representa uma família de elipsóides que pode ser melhor entendida se escrevermos (3.21) como:

$$H_2^* = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \tau_j = E_0, \tag{3.23}$$

em que $\tau_j = \frac{1}{2}\left(q_j^2 + p_j^2\right)$ é a variável ação do oscilador harmônico simples que parametriza os n-toros e que possui variáveis canonicamente conjugadas, θ_j que podem ser encontradas utilizando a equação de Hamilton.

$$\dot{\theta_j} = \frac{\partial H_2^*}{\partial \tau_j} = \omega_j, \tag{3.24}$$

com ω_j a frequência com que cada j-ésimo circuito do n-toro é percorrido.

Neste trabalho, o objetivo é verificar se ao introduzir perturbações até a 4ª ordem da hamiltoniana os pontos de equilíbrio permanecem estáveis embora haja deformação nos toros. A obtenção da forma normal de 4ª ordem será discutida posteriormente.

3.6 Teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko

A investigação da estabilidade não linear dos pontos de equilíbrio para sistemas dinâmicos com 2 graus de liberdade, será realizada neste trabalho através do teorema de Kovalev e Savchenko que, por consequência, precisa da forma normal da Hamiltoniana em estudo até a 4ª ordem.

Teorema: Seja a Hamiltoniana H uma função analítica de coordenadas (q_ν) e momentos generalizados (p_ν) para um ponto P fixo. Sua forma normal representada por H^{nova} é expressa por:

$$H^{nova} = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\omega_\nu}{2}\mathcal{R}_\nu + \sum_{\nu,\eta=1}^{2} \frac{\delta_{\nu,\eta}}{4}\mathcal{R}_\nu\mathcal{R}_\eta + O_5, \tag{3.25}$$

em que O_5 representa termos de ordem superior; ω_ν é a parte imaginária dos autovalores associados a matriz definida pelo produto de uma matriz simplética de ordem 4 com a Hessiana da Hamiltoniana expandida em série de Taylor até 2ª ordem em torno do ponto de equilíbrio; $\delta_{\nu,\eta}$ dependem dos autovalores ω_ν e dos coeficientes da Hamiltoniana expandida em série de Taylor de 3ª e 4ª ordem em torno do ponto de equilíbrio que são apresentados analiticamente em [18]; e

$$\mathcal{R}_\nu = q_\nu^2 + p_\nu^2, \quad \nu = 1, 2\ . \tag{3.26}$$

O teorema de Kovalev e Savchenko [26] garante que o movimento é Liapunov estável se as seguintes condições são satisfeitas:

i. Os autovalores do sistema linear reduzido são imaginários puros $\pm i\omega_1$ e $\pm i\omega_2$;

ii. A condição

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \tag{3.27}$$

é válida para todo k_1 e k_2 inteiro satisfazendo a desigualdade.

$$|k_1| + |k_2| \leqslant 4; \tag{3.28}$$

iii. O determinante D deve satisfazer a desigualdade

$$D = -\left(\delta_{11}\omega_2^2 - \delta_{12}\omega_1\omega_2 + \delta_{22}\omega_1^2\right) \neq 0, \tag{3.29}$$

em que $\delta_{\nu,\eta}$ são os coeficientes da Hamiltoniana normal de quarta ordem.

Assim, para analisarmos a estabilidade dos pontos de equilíbrio é necessário determinar os coeficientes ω_ν e $\delta_{\nu,\upsilon}$ que são associados com a Hamiltoniana normal de 2^a e 4^a ordem como apresentado na equação (3.25).

Deve-se perguntar qual a profundidade do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko [26], ou seja, o que cada uma dessas condições está investigando. A resposta dessa questão é fundamental, a 1^a condição verifica a existência de soluções periódicas ao redor do ponto de equilíbrio, a 2^a condição verifica se há ressonância entre os autovalores do sistema linear reduzido, ou seja, ressonância entre as frequências de oscilação e a 3^a condição, porém não menos importante, verifica a existência de toros invariantes ao redor do ponto de equilíbrio.

Esse teorema nos diz que se reduzirmos uma Hamiltoniana a sua forma normal até a 4^a ordem na ausência da condição de ressonância dos autovalores associados e se a condição (3.29) for satisfeita, é garantido a existência de toros invariantes numa vizinhança suficientemente pequena da posição de equilíbrio [1].

Capítulo 4

Hamiltoniana e equações de movimento

Neste Capítulo é apresentada a Hamiltoniana do problema em estudo, nas variáveis canônicas de Andoyer, para satélites simétricos (dois de seus momentos principais de inércia iguais $B = A$), em órbita circular, sob influência do torque de gradiente de gravidade. Além disso, é introduzida a equação de movimento rotacional para tais condições.

4.1 As equações de movimento nas variáveis de Andoyer.

As variáveis de Andoyer, definidas no capítulo anterior, são usadas para caracterizar o movimento rotacional de um satélite ao redor de seu centro de massa e as variáveis de Delaunay descrevem o movimento translacional do centro de massa do satélite ao redor da Terra [25].

Considerando que o satélite em estudo tem órbita conhecida, voltamos nossa atenção apenas para seu movimento rotacional.

Na análise do movimento rotacional consideramos que o satélite possui dois de seus momentos principais de inércia iguais, $B = A$, em que A representa o momento principal de inércia ao redor do eixo x e B representa o momento principal de inércia ao redor do eixo y. Além disso, consideramos como torque externo atuante no satélite o torque de gradiente de gravidade, perturbação decorrente da não esfericidade do campo gravitacional terrestre, que causa diferença no módulo da força gravitacional atuante em diferentes partes do satélite. Esse torque é importante quando o corpo não possui simetria esférica na distribuição de massa.

Logo, a Hamiltoniana do problema é expressa em termos das variáveis de Andoyer $(L_1, L_2, L_3, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ e das variáveis de Delaunay (L, G, H, l, g, h) da seguinte forma [37]:

$$F(L_1, L_2, L_3, \ell_1, \ell_2, \ell_3, L, G, H, l, g, h) = F_0(L, \ell_1, L_1, L_2) \\ +F_1(L_1, L_2, L_3, \ell_2, \ell_3, L, G, H, l, g, h), \tag{4.1}$$

em que, F_0 é a Hamiltoniana não perturbada e F_1 é o termo associado com a Hamiltoniana do torque de gradiente de gravidade. Para esse trabalho é conveniente simplificar um pouco mais a Hamiltoniana e decidiu-se trabalhar com órbitas circulares. Logo os termos da Hamiltoniana são respectivamente descritos em [9] para excentricidade nula, $e = 0$, como:

$$F_0 = -\tfrac{\mu^2 M^3}{2L^2} + \tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{1}{C} - \tfrac{1}{2A} - \tfrac{1}{2B}\right) L_1^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{A} + \tfrac{1}{B}\right) L_2^2\right) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{B} - \tfrac{1}{A}\right)\left(L_2^2 - L_1^2\right)\cos\left(2\ell_1\right), \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
F_1 = \tfrac{\mu^4 M^7}{L^6}\{\tfrac{C-A}{M}\{(&\left(\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{L_1}{L_2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\right)(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8}\left(1 + \left(\tfrac{H}{G}\right)^2 + \left(\tfrac{L_3}{L_2}\right)^2 - 3\left(\tfrac{H}{G}\right)^2\left(\tfrac{L_3}{L_2}\right)^2\right) \\
&-\tfrac{3}{8}\sin\left(2I\right)\sin\left(2I_2\right)\cos\left(h - \ell_3\right) - \tfrac{3}{8}\sin^2\left(I\right)\sin^2\left(I_2\right)\cos\left(2h - 2\ell_3\right)) \\
&-\tfrac{3}{16}\left(1 - 3\left(\tfrac{H}{G}\right)^2\right)\sin\left(2I_2\right)\sin\left(2J_2\right)\cos\left(\ell_2\right) \\
&+\tfrac{3}{16}\left(1 - 3\left(\tfrac{H}{G}\right)^2\right)\sin^2\left(I_2\right)\sin^2\left(J_2\right)\cos\left(2\ell_2\right) \\
&+\tfrac{3}{16}\left(1 - \tfrac{L_3}{L_2}\right)\left(1 + 2\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin\left(2I\right)\sin\left(2J_2\right)\cos\left(h - \ell_3 - \ell_2\right) \\
&+\tfrac{3}{16}\left(1 + \tfrac{L_3}{L_2}\right)\left(1 - 2\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin\left(2I\right)\sin\left(2J_2\right)\cos\left(h - \ell_3 + \ell_2\right) \\
&+\tfrac{3}{16}\left(1 - \tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin^2\left(I\right)\sin\left(I_2\right)\sin\left(2J_2\right)\cos\left(2h - 2\ell_3 + \ell_2\right) \\
&-\tfrac{3}{16}\left(1 + \tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin^2\left(I\right)\sin\left(I_2\right)\sin\left(2J_2\right)\cos\left(2h - 2\ell_3 - \ell_2\right) \\
&-\tfrac{3}{16}\left(1 - \tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin\left(2I\right)\sin\left(I_2\right)\sin^2\left(J_2\right)\cos\left(h - \ell_3 + 2\ell_2\right) \\
&+\tfrac{3}{16}\left(1 + \tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin\left(2I\right)\sin\left(I_2\right)\sin^2\left(J_2\right)\cos\left(h - \ell_3 - 2\ell_2\right) \\
&-\tfrac{3}{32}\left(1 - \tfrac{L_3}{L_2}\right)^2\sin^2\left(I\right)\sin^2\left(J_2\right)\cos\left(2h - 2\ell_3 + 2\ell_2\right) \\
&-\tfrac{3}{32}\left(1 + \tfrac{L_3}{L_2}\right)^2\sin^2\left(I\right)\sin^2\left(J_2\right)\cos\left(2h - 2\ell_3 - 2\ell_2\right)) \\
&+\left(\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{L_1}{L_2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\right)\{\tfrac{3}{8}\sin^2\left(I\right)\left(1 - 3\left(\tfrac{L_3}{L_2}\right)^2\right)\cos\left(2l + 2g\right) \\
&+\tfrac{3}{8}\left(1 + \tfrac{H}{G}\right)\sin\left(I\right)\sin\left(I_2\right)\cos\left(2l + 2g + \left(h - \ell_3\right)\right) \\
&-\tfrac{3}{8}\left(1 - \tfrac{H}{G}\right)\sin\left(I\right)\sin\left(I_2\right)\cos\left(2l + 2g - \left(h - \ell_3\right)\right) \\
&-\tfrac{3}{16}\left(1 + \tfrac{H}{G}\right)^2\sin^2\left(I_2\right)\cos\left(2l + 2g + \left(2h - 2\ell_3\right)\right) \\
&-\tfrac{3}{16}\left(1 - \tfrac{H}{G}\right)^2\sin^2\left(I_2\right)\cos\left(2l + 2g - \left(2h - 2\ell_3\right)\right)\} \\
&+\tfrac{9}{32}\sin^2\left(I\right)\sin\left(2I_2\right)\sin\left(2J_2\right)\cos\left(2l + 2g + \ell_2\right) \\
&+\tfrac{9}{32}\sin^2\left(I\right)\sin\left(2I_2\right)\sin\left(2J_2\right)\cos\left(2l + 2g - \ell_2\right) \\
&-\tfrac{3}{16}\left(1 + \tfrac{H}{G}\right)\left(1 - \tfrac{L_3}{L_2}\right)\left(1 + 2\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin\left(I\right)\sin\left(2J_2\right)\cos\left(2l + 2g + \left(h - \ell_3\right) + \ell_2\right) \\
&-\tfrac{3}{16}\left(1 + \tfrac{H}{G}\right)\left(1 + \tfrac{L_3}{L_2}\right)\left(1 - 2\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin\left(I\right)\sin\left(2J_2\right)\cos\left(2l + 2g + \left(h - \ell_3\right) - \ell_2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{3}{16}\left(1-\tfrac{H}{G}\right)\left(1-\tfrac{L_3}{L_2}\right)\left(1+2\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I)\sin(2J_2)\cos(2l+2g-(h-\ell_3)-\ell_2)\\
&+\tfrac{3}{16}\left(1-\tfrac{H}{G}\right)\left(1+\tfrac{L_3}{L_2}\right)\left(1-2\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I)\sin(2J_2)\cos(2l+2g-(h-\ell_3)+\ell_2)\\
&+\tfrac{3}{32}\left(1+\tfrac{H}{G}\right)^2\left(1-\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I_2)\sin(2J_2)\cos(2l+2g+(2h-2\ell_3)-\ell_2)\\
&-\tfrac{3}{32}\left(1+\tfrac{H}{G}\right)^2\left(1+\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I_2)\sin(2J_2)\cos(2l+2g+(2h-2\ell_3)+\ell_2)\\
&+\tfrac{3}{32}\left(1-\tfrac{H}{G}\right)^2\left(1-\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I_2)\sin(2J_2)\cos(2l+2g-(2h-2\ell_3)+\ell_2)\\
&-\tfrac{3}{32}\left(1-\tfrac{H}{G}\right)^2\left(1+\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I_2)\sin(2J_2)\cos(2l+2g-(2h-2\ell_3)-\ell_2)\\
&-\tfrac{9}{32}\sin^2(I)\sin^2(I_2)\sin^2(J_2)\cos(2l+2g+2\ell_2)\\
&-\tfrac{9}{32}\sin^2(I)\sin^2(I_2)\sin^2(J_2)\cos(2l+2g-2\ell_2)\\
&+\tfrac{3}{16}\left(1+\tfrac{H}{G}\right)\left(1-\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I)\sin(I_2)\sin^2(J_2)\cos(2l+2g+(h-\ell_3)+2\ell_2)\\
&-\tfrac{3}{16}\left(1+\tfrac{H}{G}\right)\left(1+\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I)\sin(I_2)\sin^2(J_2)\cos(2l+2g+(h-\ell_3)-2\ell_2)\\
&-\tfrac{3}{16}\left(1-\tfrac{H}{G}\right)\left(1-\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I)\sin(I_2)\sin^2(J_2)\cos(2l+2g-(h-\ell_3)-2\ell_2)\\
&+\tfrac{3}{16}\left(1-\tfrac{H}{G}\right)\left(1+\tfrac{L_3}{L_2}\right)\sin(I)\sin(I_2)\sin^2(J_2)\cos(2l+2g-(h-\ell_3)+2\ell_2)\\
&-\tfrac{3}{64}\left(1-\tfrac{H}{G}\right)^2\left(1-\tfrac{L_3}{L_2}\right)^2\sin^2(J_2)\cos(2l+2g+(2h-2\ell_3)+2\ell_2)\\
&+\tfrac{3}{64}\left(1-\tfrac{H}{G}\right)^2\left(1+\tfrac{L_3}{L_2}\right)^2\sin^2(J_2)\cos(2l+2g+(2h-2\ell_3)-2\ell_2)\\
&+\tfrac{3}{64}\left(1+\tfrac{H}{G}\right)^2\left(1-\tfrac{L_3}{L_2}\right)^2\sin^2(J_2)\cos(2l+2g-(2h-2\ell_3)-2\ell_2)\\
&-\tfrac{3}{64}\left(1+\tfrac{H}{G}\right)^2\left(1+\tfrac{L_3}{L_2}\right)^2\sin^2(J_2)\cos(2l+2g-(2h-2\ell_3)+2\ell_2)\}\},
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

em que:

A é o momento principal de inércia no eixo x;

B é o momento principal de inércia no eixo y;

C é o momento principal de inércia no eixo z;

M é a massa do satélite;

μ é a constante gravitacional;

I é a inclinação da órbita;

I_2 é a inclinação do plano do momento angular com o plano do equador;

J_2 é a inclinação do plano principal com o plano do momento angular;

É importante ressaltar que, para satélites simétricos, com momentos principais de inércia $B = A$, a variável ℓ_1 não estará presente na Hamiltoniana. Assim a coordenada generalizada ℓ_1, que só aparece em (4.2), é denominada uma variável ignorável ou cíclica; de modo que, seu momento conjugado L_1 é uma constante de movimento. Logo, temos um sistema dinâmico com 2 graus de liberdade, em que torna possível o estudo de estabilidade dos pontos de equilíbrio pelo teorema de Kovalev e Savchenko [26].

Na equação (4.3) os momentos generalizados (L_1, L_2, L_3) estão implícitos em alguns termos, usando as definições dos momentos generalizados (3.1) e (3.2) presente no capítulo anterior e propriedades trigonométricas pode-se explicitá-los como:

$$\sin(I_2) = \sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}}, \tag{4.4}$$

$$\sin^2(I_2) = 1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}, \tag{4.5}$$

$$\sin(2I_2) = \frac{2L_3}{L_2}\sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}}, \tag{4.6}$$

$$\sin(J_2) = \sqrt{1 - \frac{L_1^2}{L_2^2}}, \tag{4.7}$$

$$\sin^2(J_2) = 1 - \frac{L_1^2}{L_2^2}, \tag{4.8}$$

$$\sin(2J_2) = \frac{2L_1}{L_2}\sqrt{1 - \frac{L_1^2}{L_2^2}}. \tag{4.9}$$

Logo, as equações de movimento associadas à Hamiltoniana, equação (4.1), são dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\ell_j} &= \frac{\partial F}{\partial L_j}, \\ \dot{L_j} &= -\frac{\partial F}{\partial \ell_j}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

com $j = 1, 2, 3$.

Sua forma completa encontra-se no Apêndice A deste trabalho.

Essas equações são utilizadas para encontrar os possíveis pontos de equilíbrio do movimento rotacional.

Capítulo 5

Forma normal da hamiltoniana do movimento rotacional e análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio

Neste Capítulo é apresentada a normalização do sistema Hamiltoniano nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio até termos de 4ª ordem, que permitirá a aplicação dos critérios de estabilidade de Kovalev e Savchenko [26] mencionados no Capítulo 3 desse trabalho. Se tais critérios forem satisfeitos é garantida à estabilidade segundo as concepções de Liapunov para o ponto de equilíbrio em estudo.

5.1 Forma normal da Hamiltoniana de 2ª ordem e análise da estabilidade linear.

Como a variável ℓ_1 é cíclica, a Hamiltoniana (4.1) é escrita na forma $F(L_2, L_3, \ell_2, \ell_3)$ e as equações de movimento (4.10) podem ser escrita na forma vetorial como [9]:

$$\dot{\vec{w}} = \mathbb{J} F_w, \tag{5.1}$$

em que $\vec{w}$ é o vetor de estado e F_w é a matriz de derivadas parciais em relação as suas respectivas variáveis dadas por:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \ell_2 \\ L_2 \\ \ell_3 \\ L_3 \end{bmatrix}, \quad F_w = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \ell_2} \\ \frac{\partial F}{\partial L_2} \\ \frac{\partial F}{\partial \ell_3} \\ \frac{\partial F}{\partial L_3} \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

e J uma matriz dada por:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Deve-se agora linearizar o sistema nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, mas antes, é conveniente fazer uma mudança das coordenadas (ver Figura 5.1) na Hamiltoniana (4.1) para que a origem coincida com o ponto de equilíbrio em estudo.

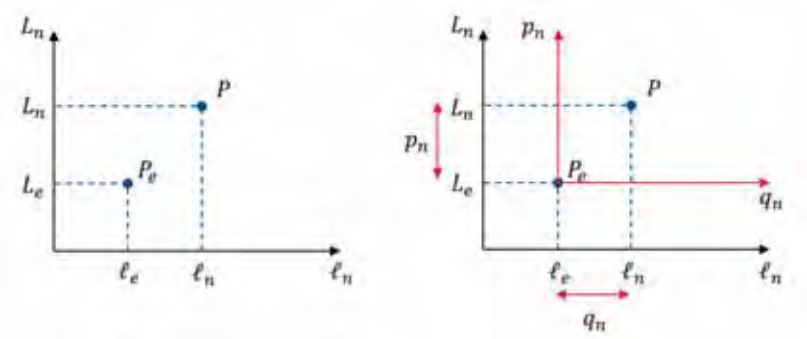


Figura 5.1: Mudança de variáveis

Em que,

$$\begin{aligned} L_1 &= L_{1e}, \\ \ell_2 &= \ell_{2e} + q_1, \\ L_2 &= L_{2e} + p_1, \\ \ell_3 &= \ell_{3e} + q_2, \\ L_3 &= L_{3e} + p_2, \end{aligned} \tag{5.4}$$

e L_{1e}, ℓ_{2e}, L_{2e}, ℓ_{3e} e L_{3e} são as coordenadas dos pontos de equilíbrio.

Com essa translação, pode-se expandir a Hamiltoniana em série de Taylor na nova origem que nada mais é que expandir a Hamiltoniana nas vizinhanças do ponto de equilíbrio quando tomamos $q_1 = p_1 = q_2 = p_2 = 0$. Logo:

$$F(q_n, p_n) = \sum_{k=2}^{\infty} F_k(q_n, p_n) = F_2(q_n, p_n) + F_3(q_n, p_n) + F_4(q_n, p_n) + ... \tag{5.5}$$

em que $n = 1, 2$ e F_k é a Hamiltoniana expandida até termos de ordem k, sendo $k = 2, 3, 4, \ldots$

A Hessiana P do problema é calculada da Hamiltoniana expandida até 2ª ordem nas vizinhanças do ponto de equilíbrio.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial q_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial q_2} & \frac{\partial 2 F}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_2 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial p_2^2} \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Assim o sistema de equações linearizado pode ser escrito como:

$$\dot{\vec{W}} = \mathbb{J} P \vec{W}, \tag{5.7}$$

em que $\vec{W}$ é o vetor de estado nas novas variáveis.

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Logo, JP é a matriz a ser diagonalizada através do $det(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{J}P) = 0$, e se seus autovalores forem imaginários puros $\lambda_j = \pm i\omega_j$, a primeira condição de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita, e dessa forma pode-se dizer que esse ponto de equilíbrio é linearmente estável.

A forma normal da Hamiltoniana de 2ª ordem pode ser expressa como:

$$H_2^* (q_j, p_j) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\omega_j}{2} \left(q_j^2 + p_j^2 \right) \tag{5.9}$$

em que ω_j está associado com os autovalores imaginários puros da matriz $\mathbb{J}P$: $\lambda_j = \pm i\omega_j$

Ainda com esses autovalores imaginários puros é possível verificar se a segunda condição de estabilidade de Kovalev e Savchenkov é satisfeita. Neste caso, se faz necessário a extensão do processo de normalização para verificar a estabilidade não linear do ponto de equilíbrio por intermédio da verificação da terceira condição de estabilidade do Teorema de Kovalev e Savchenko.

5.2 Extensão da forma normal da Hamiltoniana para ordens superiores.

Estendendo o processo de normalização da Hamiltoniana para ordens superiores (H_3^*, $H_4^*, \ldots$) a Hamiltoniana normal em termos das variáveis q_j e p_j pode ser expressa por:

$$H^* (q_j, p_j) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\omega_j}{2} \left(q_j^2 + p_j^2 \right) + H_3^* (q_j, p_j) + H_4^* (q_j, p_j) + ... \tag{5.10}$$

Para obter-se a Hamiltoniana normal de $H_3^*,\ H_4^*, \ldots$ é necessário a utilização do método de Lie-Hori. De acordo com [34], é conveniente que a Hamiltoniana normal seja escrita em variáveis complexas antes de usar tal método.

Essa mudança de variáveis é dada por:

$$\begin{aligned} q_j &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x_j + iy_j\right), \\ p_j &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(ix_j + y_j\right), \end{aligned} \tag{5.11}$$

com inversa dada por:

$$\begin{aligned} x_j &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(q_j - ip_j\right), \\ y_j &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-iq_j + p_j\right), \end{aligned} \tag{5.12}$$

Assim, a Hamiltoniana normal de 2ª ordem é dada por:

$$H_2^*\left(x_j, y_j\right) = \sum_{j=1}^{2} i\omega_j x_j y_j, \tag{5.13}$$

e a Hamiltoniana até a 4ª ordem nas variáveis complexas é representada por:

$$H^*\left(x_j, y_j\right) = \sum_{j=1}^{2} i\omega_j x_j y_j + H_3^*\left(x_j, y_j\right) + H_4^*\left(x_j, y_j\right) + ..., \tag{5.14}$$

em que $H_3^*\left(x_j, y_j\right)$ e $H_4^*\left(x_j, y_j\right)$ podem ser expressos em uma forma mais compacta como:

$$H_3^*\left(x, y\right) = \sum_{\alpha+\beta=3} h_{3,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta, \tag{5.15}$$

$$H_4^*\left(x, y\right) = \sum_{\alpha+\beta=4} h_{4,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta, \tag{5.16}$$

que estão expressos em [9] e em [18] assumindo $\alpha,\ \beta > 0$, sendo que $\alpha + \beta = 3$ ou $\alpha + \beta = 4$ significa que a soma dos exponentes das novas variáveis devem satisfazer a ordem da Hamiltoniana, ou seja H_3^* ou H_4^* respectivamente.

Dessa forma temos a Hamiltoniana escrita em variáveis complexas, lembrando que H_2^* já se encontra normalizado, agora precisamos aplicar o método de Lie-Hori para encontrarmos a forma normal para ordens superiores H_3^*, H_4^*.

5.2.1 Método de série de Lie-Hori.

A forma normal é obtida da expansão da Hamiltoniana em série de Lie dada por [22] e [17].

$$H^{nova} = H^* + \left\{H^*, \mathcal{G}\right\} + \frac{1}{2!}\left\{\left\{H^*, \mathcal{G}\right\}, \mathcal{G}\right\} + \frac{1}{3!}\left\{\left\{\left\{H^*, \mathcal{G}\right\}, \mathcal{G}\right\}, \mathcal{G}\right\} + ..., \tag{5.17}$$

em que H^{nova} é a Hamiltoniana normal com termos em todas as ordens obtida através de transformações canônicas nas vizinhanças da identidade, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x_j, y_j)$ é a função geratriz que também é considerada uma série de potência, em que cada grau $\mathcal{G}_n$ é uma soma de polinômios homogêneos de grau n e $\{H^*, \mathcal{G}\}$ é o parênteses de Poisson de ordem $r+s-2$, em que r e s representam a ordem dos polinômios H^* e $\mathcal{G}$ respectivamente.

O parêntese de Poisson é definido como:

$$\{H^*, \mathcal{G}\} = \frac{\partial H^*}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} - \frac{\partial H^*}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}. \tag{5.18}$$

A nova Hamiltoniana H^{nova} após a transformação canônica nas vizinhanças da identidade pode ser expressa como [36]:

$$H^{nova} = H_2^{nova} + H_3^{nova} + H_4^{nova} + ... \tag{5.19}$$

De modo que a nova Hamiltoniana, ordenada em grau, pode ser expressa seguindo a forma [34] e [17]:

$$Grau \quad 2: \quad H_2^{nova} = H_2^* \ ; \tag{5.20}$$

$$Grau \quad 3: \quad H_3^{nova} = H_3^* + \{H_2^*, \mathcal{G}_3\} \ ; \tag{5.21}$$

$$Grau \quad 4: \quad H_4^{nova} = H_4^* + \{H_3^*, \mathcal{G}_3\} + \tfrac{1}{2!}\left\{\{H_2^*, \mathcal{G}_3\}, \mathcal{G}_3\right\} + \{H_2^*, \mathcal{G}_4\} \ . \tag{5.22}$$

Como H_2^{nova} já está em sua forma normal, o próximo passo é calcular a função geratriz que levará à forma normal até termos de quarta ordem. Este procedimento nos permite obter o número mínimo de monômios não ressonantes definidos em [30], ou seja, a função geratriz $\mathcal{G}_n$ é escolhida de modo a eliminar da Hamiltoniana total nas variáveis complexas (5.14) os monômios nos quais x_j e y_j tenham expoentes diferentes do grau desejado, restando apenas os monômios que carregam a ressonância intrínseca dos sistemas Hamiltonianos. A seguir é apresentado um procedimento para se obter a Hamiltoniana normal até quarta ordem [9][18].

I. Sabe-se que os sistemas Hamiltonianos são naturalmente ressonantes nas ordens pares (2^a, 4^a,...) [30][34], assim para se encontrar a Hamiltoniana normal total, primeiramente deve-se eliminar de H^{nova} a perturbação de grau 3, H_3^{nova}, ou seja.

$$H_3^{nova} = 0. \tag{5.23}$$

Assumindo que H_3^* tem a forma resumida definida em (5.15), para eliminar os termos de grau 3, considera-se a função geratriz $G_3(x, y)$ expressa em sua forma compacta como:

$$\mathcal{G}_3(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=3} g_{3,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{5.24}$$

Dessa forma é necessário encontrar $\mathcal{G}_3(x, y)$ da equação homológica de terceira ordem (5.21) onde teremos:

$$\{H_2^*, \mathcal{G}_3\} = -H_3^*. \tag{5.25}$$

Após algumas manipulações algébricas encontraremos os coeficientes de $\mathcal{G}_3(x, y)$ dados por [18]:

$$g_{3,\alpha,\beta} = -\frac{h_{3,\alpha,\beta}}{\langle \beta - \alpha, \lambda \rangle}, \tag{5.26}$$

em que $\langle \beta - \alpha, \lambda \rangle$ representa um produto interno entre:

$$\beta - \alpha = (\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, ..., \beta_n - \alpha_n) \tag{5.27}$$

e

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = (i\omega_1, i\omega_2, ..., i\omega_n) \tag{5.28}$$

que são os autovalores imaginários puros obtidos da parte quadrática da Hamiltoniana normal.

Portanto, a função geratriz G_3, procurada tem a forma compacta expressa por:

$$\mathcal{G}_3\left(x, y\right) = \sum_{\alpha+\beta=3} -\frac{h_{3,\alpha,\beta}}{\langle \beta - \alpha, \lambda \rangle} x^\alpha y^\beta. \tag{5.29}$$

Para a condição de não ressonância ser aceita $\langle \beta - \alpha, \lambda \rangle \neq 0$, que é sempre verdadeira para os monômios da hamiltoniana de terceira ordem quando se considera apenas a ressonância natural da Hamiltoniana.

II. Este processo deve ser repetido para o polinômio de grau 4 encontrando $\mathcal{G}_4\left(x, y\right)$ que eliminará alguns monômios de H_4^* em (5.21). Os monômios que permanecem em H_4^{nova} são chamados de monômios ressonantes [30]. Logo (5.21) pode ser reduzido como [9]:

$$\{\mathcal{G}_4, H_2^*\} + H_4^{nova} = H_4^* + \{H_3^*, \mathcal{G}_3\} + \frac{1}{2!}\left\{\{H_2^*, \mathcal{G}_3\}, \mathcal{G}_3\right\}, \tag{5.30}$$

$$\{\mathcal{G}_4, H_2^*\} + H_4^{nova} = \mathcal{F}_4. \tag{5.31}$$

A equação (5.31) é chamada equação homológica de quarta ordem, podendo ser reescrita como:

$$\{\mathcal{G}_4, H_2^*\} = \mathcal{F}_4 - H_4^{nova}, \tag{5.32}$$

$$\{\mathcal{G}_4, H_2^*\} = \mathfrak{R}_4. \tag{5.33}$$

Assumindo que $\mathfrak{R}_4(x,y)$ e $\mathcal{G}_4(x,y)$ serão expressos na forma compacta como:

$$\mathfrak{R}_4 = \sum_{\alpha+\beta=4} r_{4,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta, \tag{5.34}$$

$$G_4 = \sum_{\alpha+\beta=4} g_{4,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{5.35}$$

Após algumas manipulações algébricas encontraremos os coeficientes de $\mathcal{G}_4(x,y)$ dados por [18]:

$$g_{4,\alpha,\beta} = \frac{r_{4,\alpha,\beta}}{\langle \alpha - \beta, \lambda \rangle}. \tag{5.36}$$

Portanto, a função geratriz $G_4(x,y)$, procurada tem a forma compacta expressa por:

$$\mathcal{G}_4\,(x,y) = \sum_{\alpha+\beta=4} \frac{r_{4,\alpha,\beta}}{\langle \alpha - \beta, \lambda \rangle} x^\alpha y^\beta, \tag{5.37}$$

em que $\langle \alpha - \beta, \lambda \rangle \neq 0$ representa um produto interno como mencionado em (5.27) e (5.28).

Assim, utilizando $\mathcal{G}_4(x,y)$ em (5.32) é possível encontrar H_4^{nova} depois de algumas manipulações algébricas.

III. Pode-se generalizar o procedimento acima através de uma equação homológica [32].

$$\{\mathcal{G}_k, H_2^*\} + H_k^{nova} = \mathcal{F}_k, \tag{5.38}$$

para $k \geq 3$, se $k = 3$ tem-se $H_3^{nova} = 0$

$$\mathcal{F}_k = \sum_{m=1}^{3} \left\{ H_{k-m}^*, \mathcal{G}_{2+m} \right\} + \sum_{m=1}^{k-2} H_{k-m,k-m-2}^*, \tag{5.39}$$

sendo

$$\sum_{m=1}^{k-2} H_{k-m,k-m-2}^* = \sum_{j=1}^{k-m-3} \frac{j}{(k-m-2)!} \left\{ H_{2+m,k-m-2-j}^*, \mathcal{G}_{2+j} \right\}. \tag{5.40}$$

Logo a equação homológica de grau 4 é dada como (5.31) [9].

Este procedimento pode se repetir até o grau que se deseja encontrar a forma normal da nova Hamiltoniana H^{nova}.

5.3 Forma normal da Hamiltoniana de ordem superior e análise da estabilidade não linear

Como já obtemos a forma normal da Hamiltoniana de 2ª ordem (5.9), aplicaremos o método descrito acima para encontramos a Hamiltoniana normal até a 4ª ordem.

Após a substituição de variáveis complexas descritas em (5.11) na equação (5.10) tem-se a Hamiltoniana total nas variáveis complexas (5.14) representada por [9] e [18]:

$$H^*\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)=i\omega_1x_1y_1+i\omega_2x_2y_2+H_3^*\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)+H_4^*\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)+..., \quad (5.41)$$

em que $H_3^*\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)$ e $H_4^*\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)$ são obtidos das expressões:

$$H_3^*\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)=\sum_{\alpha+\beta=3}h_{3,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2}x_1^{\alpha_1}y_1^{\beta_1}x_2^{\alpha_2}y_2^{\beta_2}, \quad (5.42)$$

$$H_4^*\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)=\sum_{\alpha+\beta=4}h_{4,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2}x_1^{\alpha_1}y_1^{\beta_1}x_2^{\alpha_2}y_2^{\beta_2}, \quad (5.43)$$

com

$$\begin{aligned}H_3^*\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)=&h_{3,3,0,0,0}x_1^3+h_{3,2,1,0,0}x_1^2y_1+h_{3,2,0,1,0}x_1^2x_2+h_{3,2,0,0,1}x_1^2y_2\\&+h_{3,1,2,0,0}x_1y_1^2+h_{3,1,0,2,0}x_1x_2^2+h_{3,1,0,0,2}x_1y_2^2+h_{3,0,3,0,0}y_1^3\\&+h_{3,0,2,1,0}y_1^2x_2+h_{3,1,1,1,0}x_1y_1x_2+h_{3,1,1,0,1}x_1y_1y_2+h_{3,1,0,1,1}x_1x_2y_2\\&+h_{3,0,1,1,1}y_1x_2y_2+h_{3,0,2,0,1}y_1^2y_2+h_{3,0,1,2,0}y_1x_2^2+h_{3,0,1,0,2}y_1y_2^2\\&+h_{3,0,0,3,0}x_2^3+h_{3,0,0,2,1}x_2^2y_2+h_{3,0,0,1,2}x_2y_2^2+h_{3,0,0,0,3}y_2^3,\end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned}H_4^*\left(x_1,y_1,x_2,y_2\right)=&h_{4,4,0,0,0}x_1^4+h_{4,3,1,0,0}x_1^3y_1+h_{4,3,0,1,0}x_1^3x_2+h_{4,3,0,0,1}x_1^3y_2\\&+h_{4,2,2,0,0}x_1^2y_1^2+h_{4,2,1,1,0}x_1^2y_1x_2+h_{4,2,1,0,1}x_1^2y_1y_2+h_{4,2,0,2,0}x_1^2x_2^2\\&+h_{4,2,0,1,1}x_1^2x_2y_2+h_{4,2,0,0,2}x_1^2y_2^2+h_{4,1,3,0,0}x_1y_1^3+h_{4,1,2,1,0}x_1y_1^2x_2\\&+h_{4,1,2,0,1}x_1y_1^2y_2+h_{4,1,1,2,0}x_1y_1x_2^2+h_{4,1,1,1,1}x_1y_1x_2y_2+h_{4,1,1,0,2}x_1y_1y_2^2\\&+h_{4,1,0,3,0}x_1x_2^3+h_{4,1,0,2,1}x_1x_2^2y_2+h_{4,1,0,1,2}x_1x_2y_2^2+h_{4,1,0,0,3}x_1y_2^3\\&+h_{4,0,4,0,0}y_1^4+h_{4,0,3,1,0}y_1^3x_2+h_{4,0,3,0,1}y_1^3y_2+h_{4,0,2,2,0}y_1^2x_2^2\\&+h_{4,0,2,1,1}y_1^2x_2y_2+h_{4,0,2,0,2}y_1^2x_2^2+h_{4,0,2,2,0}y_1^2y_2^2+h_{4,0,1,3,0}y_1x_2^3\\&+h_{4,0,1,2,1}y_1x_2^2y_2+h_{4,0,1,1,2}y_1x_2y_2^2+h_{4,0,1,0,3}y_1y_2^3+h_{4,0,0,4,0}x_2^4\\&+h_{4,0,0,3,1}x_2^3y_2+h_{4,0,0,1,3}x_2y_2^3+h_{4,0,0,0,4}y_2^4.\end{aligned} \quad (5.45)$$

Através do método de Lie-Hori apresentado anteriormente, pode-se determinar a função geratriz $G_3(x_1,y_1,x_2,y_2)$ de modo a satisfazer a equação homológica (5.25), sendo que $G_3(x_1,y_1,x_2,y_2)$ foi determinado analiticamente por [18]. A função geratriz é respon-

sável pela eliminação dos termos de 3ª ordem da Hamiltoniana (5.41).

Deve-se utilizar a função geratriz $G_3(x_1, y_1, x_2, y_2)$ para encontrar os termos de grau 4, ou seja $\mathcal{F}_4$, além de realizar a separação descrita na equação (5.30), obtendo-se H_4^* e $G_4(x_1, y_1, x_2, y_2)$, com os termos obtidos em H_4^* e com os autovalores de H_2^* pode-se calcular os coeficientes da forma normal H_4^{nova}.

Dessa forma, tem-se a Hamiltoniana normal nas variáveis complexas separadas por grau como [18]:

$$Grau \quad 2: \quad H_2^{nova} = i\omega_1 x_1 y_1 + i\omega_2 x_2 y_2 \ ; \tag{5.46}$$

$$Grau \quad 3: \quad H_3^{nova} = 0 \ ; \tag{5.47}$$

$$Grau \quad 4: \quad H_4^{nova} = \delta_{11}\left(x_1 y_1\right)^2 + \delta_{12}\left(x_1 y_1 x_2 y_2\right) + \delta_{22}\left(x_2 y_2\right)^2 \ ; \tag{5.48}$$

em que ω_j $(j = 1, 2)$ é a parte imaginária dos autovalores associados a matriz definida pelo produto de uma matriz simplética de ordem 4 com a Hessiana da Hamiltoniana expandida em série de Taylor até 2ª ordem em torno do ponto de equilíbrio; δ_{jj} são coeficientes reais obtidos da combinação dos $h_{k,\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta$ com $k = 3, 4$.

Porém para o estudo de estabilidade de Kovalev e Savchenko é necessário que a Hamiltoniana normal esteja em variáveis reais, assim aplica-se a mudança de variáveis (5.12) e tem-se a Hamiltoniana normal no formato desejado e expressa como:

$$Grau \quad 2: \quad H_2^{nova} = \tfrac{\omega_1}{2}\left(q_1^2 + p_1^2\right) + \tfrac{\omega_2}{2}\left(q_2^2 + p_2^2\right) \ ; \tag{5.49}$$

$$Grau \quad 3: \quad H_3^{nova} = 0 \ ; \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned} Grau \quad 4: \quad H_4^{nova} = {} & \delta_{11}\left(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2p_1^2\right) + \delta_{22}\left(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2p_2^2\right) \\ & + \delta_{12}\left(q_1^2q_2^2 + q_1^2p_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_1^2p_2^2\right); \end{aligned} \tag{5.51}$$

em que δ_{jj} são expressos segundo [18] como:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \tfrac{1}{64\omega_1^3\omega_2 - 16\omega_1\omega_2^3}\big(& (-8\omega_1^3 + 3\omega_1\omega_2^2)h_{3,0,2,0,1}^2 - 60\omega_1^2\omega_2 h_{3,0,3,0,0}^2 + 15\omega_2^3 h_{3,0,3,0,0}^2 \\ & + \omega_1\omega_2^2 h_{3,1,1,0,1}^2 + 24\omega_1^3\omega_2 h_{4,0,4,0,0} - 6\omega_1\omega_2^3 h_{4,0,4,0,0} + \omega_1\omega_2^2 h_{3,1,1,1,0}^2 \\ & - 12\omega_1^2\omega_2 h_{3,1,2,0,0}^2 + 3\omega_2^3 h_{3,1,2,0,0}^2 - 4\omega_1\omega_2 h_{3,1,1,1,0}h_{3,2,0,0,1} - 8\omega_1^3 h_{3,2,0,0,1}^2 \\ & + 3\omega_1\omega_2^2 h_{3,2,0,0,1}^2 + 2\omega_1 h_{3,0,2,0,1}\left(2\omega_1\omega_2 h_{3,1,1,1,0} + (-8\omega_1^2 + \omega_2^2)\, h_{3,2,0,0,1}\right) \\ & - 8\omega_1^3 h_{3,2,0,1,0}^2 + 3\omega_1\omega_2^2 h_{3,2,0,1,0}^2 + (-8\omega_1^3 + 3\omega_1\omega_2^2)\, h_{3,0,2,1,0}^2 \\ & + 2\omega_1 h_{3,0,2,1,0}\left(-2\omega_1\omega_2 h_{3,1,1,0,1} + (-8\omega_1^2 + \omega_2^2)\, h_{3,2,0,1,0}\right) \\ & - 24\omega_1^2\omega_2 h_{3,0,3,0,0,0}h_{3,2,1,0,0} + 6\omega_1^3 h_{3,0,3,0,0,0}h_{3,2,1,0,0} - 12\omega_1^2\omega_2 h_{3,2,1,0,0}^2 \\ & + 3\omega_2^3 h_{3,2,1,0,0}^2 - 24\omega_1^2\omega_2 h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0} + 6\omega_2^3 h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0} \\ & - 60\omega_1^2\omega_2 h_{3,3,0,0,0}^2 + 15\omega_2^3 h_{3,3,0,0,0}^2 + 8\omega_1^3\omega_2 h_{4,2,2,0,0} - 2\omega_1\omega_2^3 h_{4,2,2,0,0} \end{aligned} \tag{5.52}$$

$$+6\omega_1\omega_2\left(4\omega_1^2-\omega_2^2\right)h_{4,4,0,0,0}\Big);$$

$$\begin{aligned}\delta_{12}=\tfrac{1}{4\left(4\omega_1^5\omega_2-17\omega_1^3\omega_2^3+4\omega_1\omega_2^5\right)}\Big(&2\omega_1\omega_2^2\left(-4\omega_1^2+\omega_2^2\right)h_{3,0,1,0,2}^2+2\omega_1\omega_2^2\left(-4\omega_1^2+\omega_2^2\right)h_{3,0,1,1,1}^2\\&+12\omega_1\omega_2^4h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,2,0,1}+4\omega_1^5h_{3,0,0,2,1}h_{3,0,2,0,1}-17\omega_1^3\omega_2^2h_{3,0,0,2,1}h_{3,0,2,0,1}\\&+4\omega_1\omega_2^4h_{3,0,0,2,1}h_{3,0,2,0,1}+2\omega_1^4\omega_2h_{3,0,2,0,1}^2-8\omega_1\omega_2^3h_{3,0,2,0,1}^2+4\omega_1^5h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,2,1,0}\\&-17\omega_1^3\omega_2^2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,2,1,0}+4\omega_1\omega_2^2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,2,1,0}+12\omega_1^5h_{3,0,0,3,0}h_{3,0,2,1,0}\\&-51\omega_1^3\omega_2^2h_{3,0,0,3,0}h_{3,0,2,1,0}+12\omega_1\omega_2^4h_{3,0,0,3,0}h_{3,0,2,1,0}+2\omega_1^4\omega_2h_{3,0,2,1,0}^2\\&-8\omega_1^2\omega_2^3h_{3,0,2,1,0}^2-4\omega_1^5\omega_2h_{4,0,2,0,2}+17\omega_1^3\omega_2^3h_{4,0,2,0,2}-4\omega_1\omega_2^5h_{4,0,2,0,2}\\&+12\omega_1^4\omega_2h_{3,0,1,2,0}h_{3,0,3,0,0}-51\omega_1^2\omega_2^3h_{3,0,1,2,0}h_{3,0,3,0,0}+12\omega_2^5h_{3,0,1,2,0}h_{3,0,3,0,0}\\&-8\omega_1^3\omega_2^2h_{3,1,0,0,2}^2-4\omega_1^5\omega_2h_{4,0,2,2,0}+17\omega_1^3\omega_2^3h_{3,1,0,0,2}^2-4\omega_1\omega_2^5h_{4,0,2,2,0}\\&+8\omega_1^4\omega_2h_{3,0,1,2,0}h_{3,1,0,1,1}-2\omega_1^2\omega_2^3h_{3,0,1,2,0}h_{3,1,0,1,1}+4\omega_1^4\omega_2h_{3,0,1,2,0}h_{3,2,1,0,0}\\&-8\omega_1^3\omega_2^2h_{3,1,0,1,1}^2+2\omega_1\omega_2^4h_{3,1,0,1,1}^2+2\omega_1^2\omega_2\left(4\omega_1^2-\omega_2^2\right)h_{3,0,1,1,1}\left(h_{3,1,0,0,2}-h_{3,1,0,2,0}\right)\\&+16\omega_1^3\omega_2^2h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0}-4\omega_1\omega_2^4h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0}-8\omega_1^3\omega_2^2h_{3,1,0,2,0}^2\\&+2\omega_1\omega_2^4h_{3,1,0,2,0}^2-2\omega_1^3\omega_2^2h_{3,0,2,1,0}h_{3,1,1,0,1}+8\omega_1\omega_2^4h_{3,0,2,1,0}h_{3,1,1,0,1}\\&+2\omega_1^4\omega_2h_{3,1,1,0,1}^2-8\omega_1^2\omega_2^3h_{3,1,1,0,1}^2+2\omega_1^3\omega_2^2h_{3,0,2,0,1}h_{3,1,1,1,0}+2\omega_1^4\omega_2h_{3,1,1,1,0}^2\\&-8\omega_1\omega_2^4h_{3,0,2,0,1}h_{3,1,1,1,0}-8\omega_1^2\omega_2^3h_{3,1,1,1,0}^2+4\omega_1^4\omega_2h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,2,0,0}\\&-17\omega_1^2\omega_2^3h_{3,1,0,0,2}h_{16,1,2,0,0}+4\omega_2^5h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,2,0,0}+4\omega_1^4\omega_2h_{3,1,2,0,0}h_{3,1,2,0,0}\\&-17\omega_1^2\omega_2^3h_{3,1,0,2,0}h_{3,1,2,0,0}+4\omega_2^5h_{3,1,0,2,0}h_{3,1,2,0,0}+12\omega_1^4\omega_2h_{3,0,0,0,3}h_{3,2,0,0,1}\\&-51\omega_1^3\omega_2^2h_{3,0,0,0,3}h_{3,2,0,0,1}+12\omega_1\omega_2^4h_{3,0,0,0,3}h_{3,2,0,0,1}+4\omega_1^5h_{3,0,0,2,1}h_{3,2,0,0,1}\\&-17\omega_1^3\omega_2^2h_{3,0,0,2,1}h_{3,2,0,0,1}+4\omega_1\omega_2^4h_{3,0,0,2,1}h_{3,2,0,0,1}-4\omega_1^4\omega_2h_{3,0,2,0,1}h_{3,2,0,0,1}\\&+16\omega_1^2\omega_2^3h_{3,0,2,0,1}h_{3,2,0,0,1}-2\omega_1^3\omega_2^2h_{3,1,1,1,0}h_{3,2,0,0,1}+8\omega_1\omega_2^4h_{3,1,1,1,0}h_{3,2,0,0,1}\\&+2\omega_1^4\omega_2h_{3,2,0,0,1}^2-8\omega_1^2\omega_2^3h_{3,2,0,0,1}^2+4\omega_1^5h_{3,0,0,1,2}h_{3,2,0,1,0}+2\omega_1^4\omega_2h_{3,2,0,1,0}^2\\&-17\omega_1^3\omega_2^2h_{3,0,0,1,2}h_{3,2,0,1,0}+4\omega_1\omega_2^4h_{3,0,0,1,2}h_{3,2,0,1,0}+12\omega_1^5h_{3,0,0,3,0}h_{3,2,0,1,0}\\&-51\omega_1^3\omega_2^2h_{3,0,0,3,0}h_{3,2,0,1,0}+12\omega_1\omega_2^4h_{3,0,0,3,0}h_{3,2,0,1,0}-4\omega_1^4\omega_2h_{3,0,2,1,0}h_{3,2,0,1,0}\\&+16\omega_1^2\omega_2^3h_{3,0,2,1,0}h_{3,2,0,1,0}+2\omega_1^3\omega_2^2h_{3,1,1,0,1}h_{3,2,0,1,0}-8\omega_1\omega_2^4h_{3,1,1,0,1}h_{3,2,0,1,0}\\&-17\omega_1^2\omega_2^3h_{3,0,1,2,0}h_{3,2,1,0,0}+4\omega_2^5h_{3,0,1,2,0}h_{3,2,1,0,0}+12\omega_1^4\omega_2h_{3,1,0,0,2}h_{3,3,0,0,0}\\&-51\omega_1^2\omega_2^3h_{3,1,0,0,2}h_{3,3,0,0,0}+12\omega_2^5h_{3,1,0,0,2}h_{3,3,0,0,0}+12\omega_1^4\omega_2h_{3,1,0,2,0}h_{3,3,0,0,0}\\&-4\omega_1\omega_2^5h_{4,2,0,0,2}^2-51\omega_1^2\omega_2^3h_{3,1,0,2,0}h_{3,3,0,0,0}+12\omega_2^5h_{3,1,0,2,0}h_{3,3,0,0,0}\\&-4\omega_1^5\omega_2h_{4,2,0,0,2}+17\omega_1^3\omega_2^3h_{4,2,0,0,2}+\omega_1\omega_2\left(-4\omega_1^4+17\omega_1^2\omega_2^2-4\omega_2^4\right)h_{4,2,0,2,0}\\&+\omega_2\left(-4\omega_1^2+\omega_2^2\right)h_{3,0,1,0,2}\left(-4\omega_1\omega_2h_{3,0,1,2,0}-3\left(\omega_1^2-4\omega_2^2\right)h_{3,0,3,0,0}\right)\\&+2\omega_1^2h_{3,1,0,1,1}-\left(\omega_1^2-4\omega_2^2\right)h_{3,2,1,0,0}\Big)+2\omega_1\omega_2^4h_{3,1,0,0,2}^2-8\omega_1^2\omega_2^3h_{3,2,0,1,0}^2;\end{aligned}\tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}\delta_{22} = \frac{1}{16\omega_1\omega_2\left(\omega_1^2-4\omega_2^2\right)}(&-15(\omega_1^3-4\omega_1\omega_2^2)h_{3,0,0,0,3}^2+6\omega_1\omega_2\left(\omega_1^2-4\omega_2^2\right)h_{4,0,0,0,4}\\ &-3\omega_1^3h_{3,0,0,1,2}^2+12\omega_1\omega_2^3h_{3,0,0,1,2}^2-6\omega_1\left(\omega_1^2-4\omega_2^2\right)h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,0,2,1}\\ &-3\omega_1^3h_{3,0,0,2,1}^2+12\omega_1\omega_2^2h_{3,0,0,2,1}^2+2\omega_1^3\omega_2h_{4,0,0,2,2}-8\omega_1\omega_2^3h_{4,0,0,2,2}\\ &-6\omega_1^3h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0}+24\omega_1\omega_2^2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0}-15\omega_1^3h_{3,0,0,3,0}^2\\ &+60\omega_1\omega_2^2h_{3,0,0,3,0}^2+6\omega_1^3\omega_2h_{4,0,0,4,0}-24\omega_1\omega_2^3h_{4,0,0,4,0}-3\omega_1^2\omega_2h_{3,0,1,0,2}^2\\ &+8\omega_2^3h_{3,0,1,0,2}^2-\omega_1^2\omega_2h_{3,0,1,1,1}^2-2\omega_1^2\omega_2h_{3,0,1,0,2}h_{3,0,1,2,0}+16\omega_2^3h_{3,0,1,0,2}h_{3,0,1,2,0}\\ &-3\omega_1^2\omega_2h_{3,0,1,2,0}^2+8\omega_2^3h_{3,0,1,2,0}^2+4\omega_1\omega_2^2h_{3,0,1,1,1}h_{3,1,0,0,2}-3\omega_1^2\omega_2h_{3,1,0,0,2}^2\\ &+8\omega_2^3h_{3,1,0,0,2}^2-4\omega_1\omega_2^2h_{3,0,1,0,2}h_{3,1,0,1,1}+4\omega_1\omega_2^2h_{3,0,1,2,0}h_{3,1,0,1,1}\\ &-\omega_1^2\omega_2h_{3,1,0,1,1}^2+\omega_2\left(-3\omega_1^2+8\omega_2^2\right)h_{3,1,0,2,0}^2\\ &+2\omega_2\left(-2\omega_1\omega_2h_{3,0,1,1,1}-\left(\omega_1^2-8\omega_2^2\right)h_{3,1,0,0,2}\right)h_{3,1,0,2,0});\end{aligned} \tag{5.54}$$

em que esses coeficientes δ_{jj} da Hamiltoniana normal de 4ª ordem são fundamentais para construção da terceira condição de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko, ou seja, verificar a estabilidade não linear do ponto de equilíbrio.

Tal análise, baseada na condição estabelecida por Arnold, é chamada de determinante de Arnold dado por:

$$D = \det\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \omega_1\\ \delta_{12} & \delta_{22} & \omega_2\\ \omega_1 & \omega_2 & 0\end{bmatrix}. \tag{5.55}$$

Para se garantir a estabilidade não linear o determinante de Arnold deve ser diferente de zero, logo:

$$D = -\left(\delta_{11}\omega_2^2-2\delta_{12}\omega_1\omega_2+\delta_{22}\omega_1^2\right)\neq 0. \tag{5.56}$$

Se essa condição é satisfeita, classifica-se o ponto de equilíbrio em estudo como Liapunov estável, onde termos de ordem superior da Hamiltoniana normal não desestabiliza a condição de estabilidade linear do ponto de equilíbrio.

O determinante de Arnold pode ser determinada apartir das equações (5.52), (5.53) e (5.54) e das frequências de oscilação ω_1 e ω_2. Assim tem-se:

$$\begin{aligned}D = \frac{1}{16\left(4\omega_1^5\omega_2-17\omega_1^3\omega_2^3+4\omega_1\omega_2^5\right)}(&4\omega_1^7(15h_{3,0,0,0,3}^2+6h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,0,2,1}+3(h_{3,0,0,1,2}^2\\ &+h_{3,0,0,2,1}^2+2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0}+5h_{3,0,0,3,0}^2)-2\omega_2(3h_{4,0,0,0,4}+h_{4,0,0,2,2}\\ &+3h_{4,0,0,4,0}))+12\omega_2^7(5h_{3,3,0,0,0}^2+h_{3,1,2,0,0}^2+2h_{3,0,3,0,0}h_{3,2,1,0,0}+h_{3,1,2,0,0}^2\\ &+2h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0}+5h_{3,3,0,0,0}^2)+\omega_1^4\omega_2^3(29h_{3,0,1,0,2}^2+69h_{3,1,0,1,1}^2+29h_{3,0,1,2,0}^2\\ &-194h_{3,0,1,0,2}h_{3,0,1,2,0}+60h_{3,0,3,0,0}^2+29h_{3,1,0,0,2}^2+63h_{3,1,0,1,1}^2+29h_{3,1,0,2,0}^2\\ &-194h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0}+4(5h_{3,1,1,1,0}(h_{3,2,0,0,1}-h_{3,0,2,0,1})\end{aligned} \tag{5.57}$$

$$+102h_{3,0,0,0,3}(h_{3,0,2,0,1}+h_{3,2,0,0,1})+34h_{3,0,0,2,1}(h_{3,0,2,0,1}+h_{3,2,0,0,1}))$$
$$+4(5h_{3,1,1,0,1}(h_{3,0,2,1,0}-h_{3,2,0,1,0})+34h_{3,0,0,1,2}(h_{3,0,2,1,0}+h_{3,2,0,1,0})$$
$$+102h_{3,0,0,3,0}(h_{3,0,2,1,0}+h_{3,2,0,1,0})+24h_{3,0,3,0,0}h_{3,2,1,0,0}+12(h_{3,1,2,0,0}^2+h_{3,2,1,0,0}^2$$
$$+2h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0}+5h_{3,3,0,0,0}^2)-136\omega_2(h_{4,0,2,0,2}+h_{4,0,2,2,0}+h_{4,2,0,0,2}$$
$$+h_{4,2,0,2,0}))+4\omega_1^6\omega_2(3h_{3,0,1,0,2}^2+h_{3,0,1,1,1}^2+2h_{3,0,1,0,2}h_{3,0,1,2,0}+3h_{3,0,1,2,0}^2$$
$$+3h_{3,0,1,0,2}^2+h_{3,1,0,1,1}^2+2h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0}+3h_{3,1,0,2,0}^2-8(3h_{3,0,0,0,3}$$
$$+h_{3,0,0,2,1})(h_{3,0,2,0,1}+h_{3,2,0,0,1})-8(h_{3,0,0,1,2}+3h_{3,0,0,3,0})(h_{3,0,2,1,0}+h_{3,2,0,1,0})$$
$$+8\omega_2(h_{4,0,2,0,2}+h_{4,0,2,2,0}+h_{4,2,0,0,2}+h_{4,2,0,2,0}))+\omega_1^2\omega_2^5(-16h_{3,0,1,1,1}^2$$
$$-8(h_{3,0,1,0,2}^2-6h_{3,0,1,0,2}h_{3,0,1,2,0}+h_{3,0,1,2,0}^2)-16h_{3,1,0,1,1}^2-8(h_{3,1,0,0,2}^2$$
$$-6h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0}+h_{3,1,0,2,0}^2)-16(h_{3,0,2,0,1}(6h_{3,0,0,0,3}+2h_{3,0,0,2,1}$$
$$-5h_{3,1,1,1,0})+(6h_{3,0,0,0,3}+2h_{3,0,0,2,1}+5h_{3,1,1,1,0})h_{3,2,0,0,1}$$
$$-16(h_{3,0,2,1,0}(2h_{3,0,0,1,2}+6h_{3,0,0,3,0}+5h_{3,1,1,0,1})+(2h_{3,0,0,1,2}+6h_{3,0,0,3,0}$$
$$-5h_{3,1,1,0,1})h_{3,2,0,1,0})-51(5h_{3,0,3,0,0}^2+2h_{3,0,3,0,0}h_{3,2,1,0,0}+h_{3,2,1,0,0}^2)$$
$$-51(h_{3,1,2,0,0}^2+2h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0}+5h_{3,3,0,0,0}^2)+32\omega_2(h_{4,0,2,0,2}+h_{4,0,2,2,0}$$
$$+h_{4,2,0,0,2}+h_{4,2,0,2,0}))-4\omega_1\omega_2^6(-3h_{3,0,2,0,1}^2-3h_{3,0,2,1,0}^2-h_{3,1,1,0,1}^2-h_{3,1,1,1,0}^2$$
$$-2h_{3,0,2,0,1}h_{3,2,0,0,1}-2h_{3,0,2,1,0}h_{3,2,0,1,0}-3(h_{3,2,0,0,1}^2+h_{3,2,0,1,0}^2)+8(h_{3,0,1,0,2}$$
$$+h_{3,0,1,2,0})(3h_{3,0,3,0,0}+h_{3,2,1,0,0})+8(h_{3,1,0,0,2}+h_{3,1,0,2,0})(h_{3,1,2,0,0}+3h_{3,3,0,0,0})$$
$$+2\omega_2(h_{4,0,4,0,0}+h_{4,2,2,0,0}+3h_{4,4,0,0,0}))+\omega_1^5\omega_2^2(-51(5h_{3,0,0,0,3}^2$$
$$+2h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,0,2,1}+h_{3,0,0,2,1}^2)-51(h_{3,0,0,1,2}^2+2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0}+5h_{3,0,0,3,0}^2)$$
$$-8(h_{3,0,2,0,1}^2+h_{3,0,2,1,0}^2-6h_{3,0,2,0,1}h_{3,2,0,0,1}+h_{3,2,0,0,1}^2-6h_{3,0,2,1,0}h_{3,2,0,1,0}$$
$$+h_{3,2,0,1,0}^2+2(5h_{3,0,1,1,1}(h_{3,1,0,0,2}-h_{3,1,0,2,0})+h_{3,1,1,0,1}^2+h_{3,1,1,1,0}^2$$
$$+h_{3,0,1,0,2}(6h_{3,0,3,0,0}-5h_{3,1,0,1,1}+2h_{3,2,1,0,0})$$
$$+h_{3,0,1,2,0}(6h_{3,0,3,0,0}+5h_{3,1,0,1,1}+2h_{3,2,1,0,0})$$
$$2(h_{3,1,0,0,2}+h_{3,1,0,2,0})(h_{3,1,2,0,0}+3h_{3,3,0,0,0})))+2\omega_2(51h_{4,0,0,0,4}+17h_{4,0,0,2,2}$$
$$+51h_{4,0,0,4,0}-4(3h_{4,0,4,0,0}+h_{4,2,2,0,0}+3h_{4,4,0,0,0})))+\omega_1^3\omega_2^4(12(5h_{3,0,0,0,3}^2$$
$$+2h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,0,2,1}+h_{3,0,0,2,1}^2)+12(h_{3,0,0,1,2}^2+2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0}+5h_{3,0,0,3,0}^2)$$
$$+29h_{3,0,2,0,1}^2+29h_{3,0,0,2,1}^2+63(h_{3,1,1,0,1}^2+h_{3,1,1,1,0}^2)-194h_{3,0,2,0,1}h_{3,2,0,0,1}$$
$$+29h_{3,2,0,0,1}^2-194h_{3,0,2,1,0}h_{3,2,0,1,0}+29h_{3,2,0,1,0}^2+4h_{3,0,1,0,2}(102h_{3,0,3,0,0}$$
$$-5h_{3,1,0,1,1}+34h_{3,2,1,0,0})+4h_{3,0,1,2,0}(102h_{3,0,3,0,0}+5h_{3,1,0,1,1}+34h_{3,2,1,0,0})$$
$$+4(5h_{3,0,1,1,1}(h_{3,1,0,0,2}-h_{3,1,0,2,0})+34(h_{3,1,0,0,2}+h_{3,1,0,2,0})(h_{3,1,2,0,0}+3h_{3,3,0,0,0})))$$

Capítulo 6

Algoritmo computacional para forma normal e análise de estabilidade do movimento rotacional

Nesse Capítulo é apresentada passo a passo a sequência lógica do algoritmo utilizado para análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio. Dois algoritmos são apresentados, o primeiro relacionado com a determinação dos pontos de equilíbrio e o segundo diretamente relacionado com a análise da estabilidade. A aplicação ao movimento rotacional é discutida com o auxílio do software MATHEMATICA.

6.1 Determinação dos pontos de equilíbrio

O algoritmo para a determinação dos pontos de equilíbrio do sistema de equações do movimento rotacional é dado por:

Passo 1: Substituir na Hamiltoniana do movimento rotacional com influência do torque de gradiente de gravidade (4.1) as características físicas e geométricas do satélite, as condições iniciais do movimento rotacional e translacional.

Passo 2: Obter a equação de movimento (4.10) associada à Hamiltoniana do problema.

Passo 3: Determinar o(s) ponto(s) de equilíbrio da equação de movimento (4.10) associada à Hamiltoniana do problema, através da função específica do MATHEMATICA relacionada com o método de Newton-Raphson.

Passo 4: Utilizando a definição das variáveis de Andoyer citadas no Capítulo 1 e o(s) ponto(s) de equilíbrio encontrado(s), devem-se verificar os valores dos ângulos I_2 e J_2, a velocidade de rotação ω e o período de rotação T. De acordo com esses valores verifica-se

a não existência de singularidades nesse(s) ponto(s), uma vez que se os ângulos I_2 e J_2 forem nulos, as variáveis de Andoyer ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 tornam-se indeterminadas.

6.2 Determinação da forma normal da Hamiltoniana e análise de estabilidade

O algoritmo para a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio já envolve a determinação da forma normal e segue os seguintes passos:

Passo 1: Substituir na Hamiltoniana do movimento rotacional com influência do torque de gradiente de gravidade (4.1) os parâmetros considerados constantes. Para cada conjunto de pontos de equilíbrio, é necessário fazer uma substituição de variáveis na Hamiltoniana, como citado na equação (5.4) do capítulo anterior.

Passo 2: Expandir essa Hamiltoniana nas novas coordenadas em série de Taylor até 2ª ordem nas vizinhanças do ponto de equilíbrio com a utilização de função especifica do MATHEMATICA.

Passo 3: Calcular a Hessiana P da Hamiltoniana expandida até a segunda ordem ao redor do ponto de equilíbrio, multiplicar P pela matriz simplética $\mathbb{J}$ e diagonalizar a matriz $\mathbb{J}P$.

Passo 4: Encontrado o polinômio característico $\mathbb{J}P$, pode-se determinar os autovalores associados à matriz $\mathbb{J}P$ e verificar se são imaginários puros, o que corresponde a primeira condição de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko.

Se aceito nessa condição, considera-se esse ponto de equilíbrio linearmente estável e pode-se escrever a Hamiltoniana normal de segunda ordem como:

$$H_2^{nova} = \frac{\omega_1}{2}\left(q_1^2 + p_1^2\right) + \frac{\omega_2}{2}\left(q_2^2 + p_2^2\right) \tag{6.1}$$

Passo 5: Verificar se a condição (3.27) é válida para todo k_1 e k_2 inteiro satisfazendo a desigualdade (3.28), que é a segunda condição de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko.

Se aceito nessa condição, continua-se o teste de estabilidade e o processo de normalização.

Passo 6: Escrever a forma da Hamiltoniana expandida em série de Taylor de 3ª e 4ª ordem nas novas variáveis e determinar os seus coeficientes com auxílio do software utilizado.

Passo 7: Utilizar os resultados obtidos por [18] para calcular os coeficientes da Hamiltoniana normal de quarta ordem para sistemas dinâmicos com dois graus de liberdade, equações (5.52), (5.53) e (5.54). Tais coeficientes são indispensáveis na construção da terceira condição de estabilidade não linear do teorema de Kovalev e Savchenko.

Passo 8: Verificar se o determinante de Arnold D satisfaz a desigualdade (3.29), que é a terceira condição de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko.

Se aceito também nessa condição, pode-se concluir que o ponto de equilíbrio em estudo é Liapunov estável, ou seja, que os termos de ordem superior da Hamiltoniana normal não desestabilizam o ponto de equilíbrio linearmente estável.

Passo 9: Por fim, obtido esses coeficientes pode-se determinar a Hamiltoniana normal de quarta ordem como:

$$\begin{aligned} H_4^{nova} = \delta_{11}\left(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2p_1^2\right) + \delta_{22}\left(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2p_2^2\right) \\ +\delta_{12}\left(q_1^2q_2^2 + q_1^2p_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_1^2p_2^2\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Assim, a Hamiltoniana normal até 4ª ordem é dada por:

$$H^{nova} = H_2^{nova} + H_4^{nova} \tag{6.3}$$

6.3 Fluxogramas representativos

A seguir apresenta-se um fluxograma relacionado a cada algoritmo apresentado.

6.3.1 Determinação dos pontos de equilíbrio

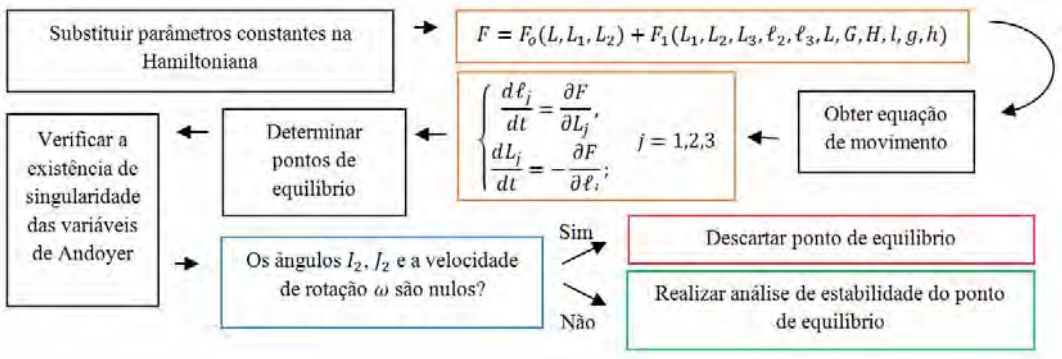


Figura 6.1: Fluxograma representativo da determinação do ponto de equilíbrio

6.3.2 Análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio

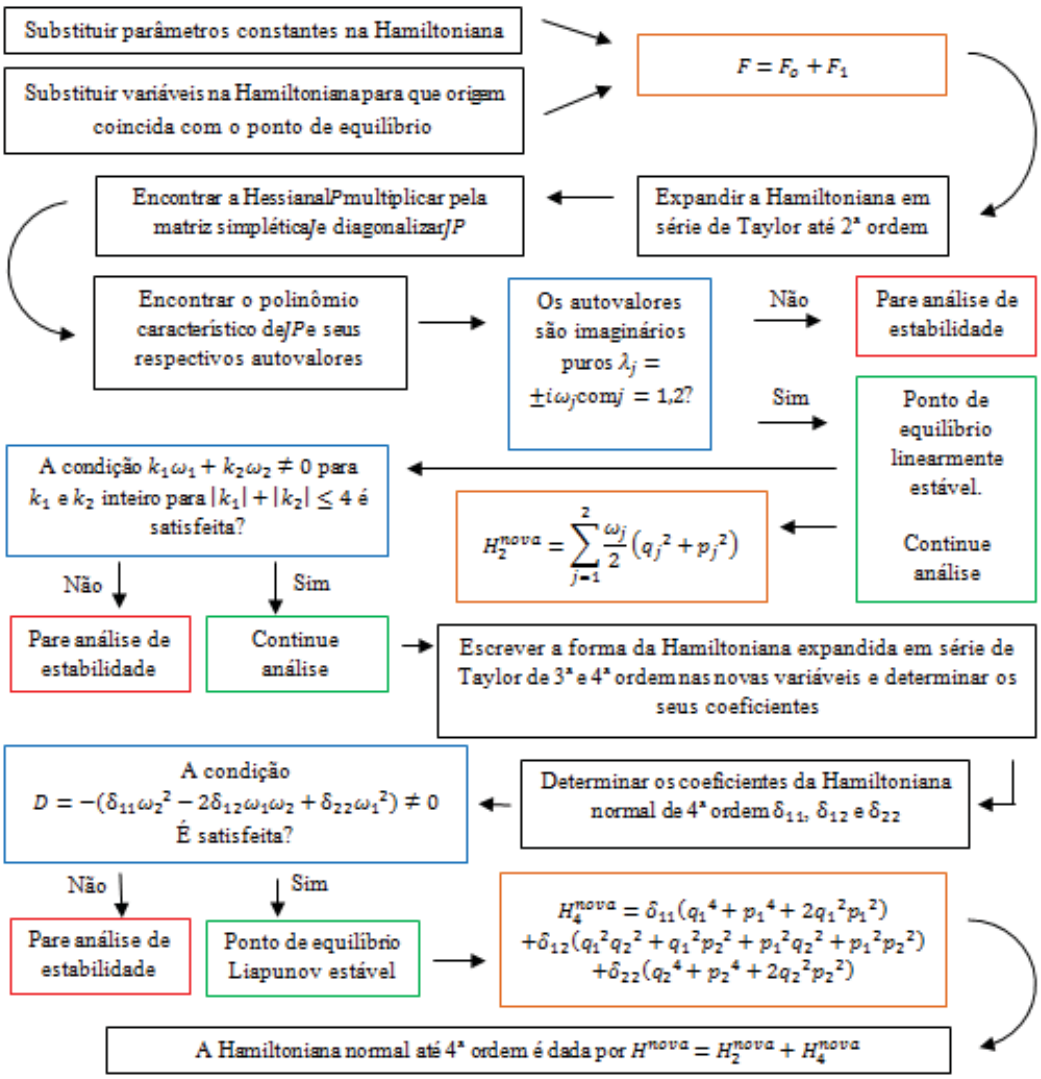


Figura 6.2: Fluxograma representativo da análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio

Capítulo 7

Simulações numéricas

Nesse Capítulo são determinados alguns pontos de equilíbrio associados ao movimento rotacional, sob influência do torque de gradiente de gravidade para dois tipos de satélites. São também apresentados resultados da análise de estabilidade de tais pontos de equilíbrio segundo os critérios do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko.

Os pontos de equilíbrios e a forma normal da Hamiltoniana, necessária para uso desse teorema de estabilidade, são obtidos por meio do algoritmo apresentado no Capítulo anterior.

7.1 Aplicação do teorema de estabilidade aos pontos de equilíbrios encontrados.

Para realização desse trabalho, consideramos dois tipos de satélites: médio porte (MP), que possui características orbitais similares com o satélite americano PEGASUS [13] e pequeno porte (PP-1 e PP-2), que possui características orbitais similares aos satélites brasileiros de coleta de dados SCD-1 e SCD-2 [27].

Para ambos os satélites foi considerado que esses possuiam uma órbita circular (excentricidade nula). Essa consideração, diminui o grande número de termos na Hamiltoniana e nas equações de movimento do problema.

Definem-se também, os conjuntos de dados para cada satélite. Cada conjunto de dados contém as informações orbitais e físicas do satélite, a diferença entre os conjuntos de dados está relacionada com os valores dos momentos principais de inércia (A, B e C). Os dados orbitais são fixos, variando somente os momentos principais de inércia para cada conjunto de dados sempre obedecem à relação $A = B \neq C$. Para o satélite MP definimos 12 conjuntos de dados, para o satélite PP-1 definimos 10 conjuntos de dados e para o satélite PP-2 definimos 10 de dados também.

Para cada conjunto de dados foram obtidos 5 pontos de equilíbrios, em que, sempre foi verificado a condição de não singularidade das variáveis de Andoyer, utilizando o

software MATHEMATICA por meio do algoritmo enunciando no Capítulo anterior. Dessa forma, encontramos no total: 60 pontos de equilíbrio para o satélite MP, 50 pontos de equilíbrios para o satélite PP-1 e 50 pontos de equilíbrio para o satélite PP-2.

A Tabela 7.1 a seguir, mostra um resumo dos pontos de equilíbrio encontrados e de sua estabilidade, segundo o critério de Kovalev e Savchenko [26]. Verifica-se que a condição de equilíbrio não linear não satisfeita está relacionada com os autovalores com parte real não nula (não imaginários puros) ou autovalores reais associados à matriz $\mathbb{J}P$.

Tabela 7.1: Resumo quantitativo das classificações dos pontos de equilíbrios

Satélite	Conjunto de dados	Total de pontos de equilíbrio	Pontos Liapunov estáveis	Pontos instáveis		
MP	12	60	2	58 Falha na 1ª condição 58	Falha na 2ª condição 0	Falha na 3ª condição 0
PP-1	10	50	7	43 Falha na 1ª condição 43	Falha na 2ª condição 0	Falha na 3ª condição 0
PP-2	10	50	10	40 Falha na 1ª condição 40	Falha na 2ª condição 0	Falha na 3ª condição 0

Nas Tabela 7.2, 7.3 e 7.4 são apresentados os pontos de equilíbrio Liapunov estáveis do satélite MP, PP-1 e PP-2 respectivamente encontrados nas simulações numéricas.

Tabela 7.2: Pontos de equilíbrio Liapunov estáveis do satélite MP

Pontos de equilíbrio	$L_1(kg.km^2/s)$	$L_2(kg.km^2/s)$	$L_3(kg.km^2/s)$	$\ell_2(rad)$	$\ell_3(rad)$
MP 1.1	$-2,446 * 10^{-10}$	$3,1516 * 10^{-10}$	$-1,806 * 10^{-10}$	$0,970128$	$0,4812$
MP 1.2	$2,5072 * 10^{-4}$	$3,8538 * 10^{-4}$	$-2,285 * 10^{-4}$	$-1,6 * 10^{-7}$	$0,5235$

A seguir, é apresentada detalhadamente a análise de estabilidade de alguns pontos de equilíbrio encontrado para cada satélite estudado.

7.2 Análise do ponto de equilíbrio MP 1.2 do satélite MP

Como comentado anteriormente o satélite MP possui características orbitais similares com o satélite americano PEGASUS [13].

Tabela 7.3: Pontos de equilíbrio Liapunov estáveis do satélite PP-1

Pontos de equilíbrio	$L_1(kg.km^2/s)$	$L_2(kg.km^2/s)$	$L_3(kg.km^2/s)$	$\ell_2(rad)$	$\ell_3(rad)$
PP-1 1.4	$5,8367 * 10^{-11}$	$4,0802 * 10^{-11}$	$1,9716 * 10^{-11}$	$-0,00749$	$0,07$
PP-1 4.3	$-2,675 * 10^{-6}$	$9,3596 * 10^{-6}$	$6,5103 * 10^{-6}$	$0,007$	$0,9$
PP-1 5.2	$2,3630 * 10^{-12}$	$1,8226 * 10^{-10}$	$9,2602 * 10^{-11}$	$0,066484$	$0,4$
PP-1 5.3	$2,4612 * 10^{-12}$	$1,6284 * 10^{-10}$	$8,2368 * 10^{-11}$	$0,0658$	$0,4$
PP-1 6.1	$2,6936 * 10^{-7}$	$2,0792 * 10^{-5}$	$1,0563 * 10^{-5}$	$0,06656$	$0,4$
PP-1 8.2	$4,3757 * 10^{-6}$	$1,8920 * 10^{-4}$	$9,4683 * 10^{-5}$	$0,060383$	$0,4$
PP-1 8.3	$2,7208 * 10^{-12}$	$1,5715 * 10^{-10}$	$7,9329 * 10^{-11}$	$0,063797$	$0,4$

Tabela 7.4: Pontos de equilíbrio Liapunov estáveis do satélite PP-2

Pontos de equilíbrio	$L_1(kg.km^2/s)$	$L_2(kg.km^2/s)$	$L_3(kg.km^2/s)$	$\ell_2(rad)$	$\ell_3(rad)$
PP-2 4.3	$5,8807 * 10^{-6}$	$5,0409 * 10^{-5}$	$1,3346 * 10^{-5}$	$0,104315$	$1,43951$
PP-2 4.4	$7,0929 * 10^{-8}$	$6,0636 * 10^{-7}$	$1,6621 * 10^{-7}$	$0,106359$	$1,43624$
PP-2 5.2	$-1,211 * 10^{-4}$	$2,9718 * 10^{-4}$	$2,4976 * 10^{-4}$	$-0,32088$	$1,75457$
PP-2 5.3	$6,2550 * 10^{-5}$	$7,2479 * 10^{-4}$	$2,1756 * 10^{-4}$	$0,098581$	$1,42527$
PP-2 5.5	$6,5454 * 10^{-8}$	$6,8624 * 10^{-7}$	$1,8041 * 10^{-7}$	$0,08484$	$1,44181$
PP-2 6.3	$9,9910 * 10^{-9}$	$7,5010 * 10^{-8}$	$1,4028 * 10^{-8}$	$0,083806$	$1,46592$
PP-2 6.4	$1,0681 * 10^{-8}$	$8,5757 * 10^{-8}$	$1,7092 * 10^{-8}$	$0,084558$	$1,47126$
PP-2 8.4	$6,1700 * 10^{-5}$	$5,1459 * 10^{-4}$	$1,0343 * 10^{-4}$	$0,095289$	$1,46383$
PP-2 10.3	$9,2583 * 10^{-9}$	$7,9694 * 10^{-8}$	$1,7694 * 10^{-8}$	$0,121655$	$1,45581$
PP-2 10.4	$9,6980 * 10^{-9}$	$7,9255 * 10^{-8}$	$1,7259 * 10^{-8}$	$0,091325$	$1,46228$

Dos 60 pontos de equilíbrio encontrados dos 12 conjuntos de dados utilizado nas simulações, apenas 2 satisfizeram as condições de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko, logo esses 2 pontos de equilíbrio são classificados como Liapunov estáveis, para os quais, os termos de ordem superiores da Hamiltoniana normal não desestabilizam a estabilidade linear do ponto de equilíbrio.

Os outros 58 pontos de equilíbrio falharam na 1ª condição do teorema de estabilidade em estudo, logo é garantido que nenhum desses pontos instáveis apresentam estabilidade linear.

A seguir é apresentado o conjunto de dados do satélite MP para obtenção do ponto de equilíbrio MP 1.2 através da equação de movimento do problema.

7.2.1 Conjunto de dados do satélite MP

Dados orbitais e geométricos

Constante gravitacional: $\mu = 3,986003 * 10^5 km^3/s^2$;
Inclinação orbital: $I = 0,5533 rad$;
Excentricidade: $e = 0$;
Raio da orbita: $r = 6959,64 km$;
Massa do satélite: $M = 11550 kg$;
Momento principal de inércia em relação ao eixo Ox: $A = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$;
Momento principal de inércia em relação ao eixo Oy: $B = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$;
Momento principal de inércia em relação ao eixo Oz: $C = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$.

Variáveis de Delaunay

$l = 0 rad$;
$g = 0 rad$;
$h = 0,5235 rad$;
$L = 608336931,2 kg\ km^2/s$;
$G = 608336931,2 kg\ km^2/s$;
$H = 517570028,7 kg\ km^2/s$.

Substituindo esses parâmetros constantes na Hamiltoniana e obtendo suas respectivas equações de movimento encontra-se o ponto de equilíbrio MP 1.2.

Na Tabela 7.5 são apresentados, para o ponto de equilíbrio MP 1.2, os valores dos ângulos I_2, J_2, a velocidade de rotação $\boldsymbol{w}$ e o período de rotação T, sendo I_2 o ângulo entre $\overrightarrow{L_s}$ e o eixo equatorial Z, J_2 o ângulo entre $\overrightarrow{L_s}$ e o eixo do satélite z. Estes valores caracterizam a não existência de singularidades neste ponto, uma vez que, se os ângulos I_2 e J_2 forem nulos as variáveis de Andoyer ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 ficam indeterminadas. Tal análise foi realizada em todos os pontos de equilíbrio encontrados nas simulações realizadas.

Tabela 7.5: Análise de possíveis singularidades para o ponto de equilíbrio MP 1.2

Ponto de equilíbrio	$I_2(rad)$	$J_2(rad)$	$w(rad/s)$	$T(s)$
MP 1.2	2,20566	0,862451	0,00373909	1680,4

A seguir é discutida a análise das condições de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko para o ponto de equilíbrio apresentado, juntamente com sua equação característica e a forma normal da Hamiltoniana para respectivo conjunto de dados.

7.2.2 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio MP 1.2

Equação característica

$$\lambda^4 + 3,57645 * 10^{-6}\lambda^2 + 1,04546 * 10^{-13} = 0 \ . \tag{7.1}$$

Autovalores

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \pm\omega_1 i \Rightarrow \lambda_1 = \pm\ 0,00188334i; \\ &\lambda_2 = \pm\omega_2 i \Rightarrow \lambda_2 = \pm\ 0,000171682i. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Como seus autovalores são imaginários puros, a 1ª condição do teorema estabilidade de Kovalev e Savchenko é satisfeita, sendo assim garantida a estabilidade linear do ponto de equilíbrio MP 1.2.

Forma normal de 2ª ordem

$$\begin{aligned} &H_2^{nova} = \tfrac{\omega_1}{2}\left(q_1^2 + p_1^2\right) + \tfrac{\omega_2}{2}\left(q_2^2 + p_2^2\right), \\ &H_2^{nova} = 0,000941671\left(q_1^2 + p_1^2\right) + 0,0000858408\left(q_2^2 + p_2^2\right). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Análise da 2ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko

Verificando se a condição $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$, para $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$ é verdadeira, seu resultado está apresentado na Tabela 7.6 a seguir.

Visto que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita dentro de nossa precisão numérica de 10^{-12}, deve-se continuar a análise de estabilidade para verificar a estabilidade não linear do ponto de equilíbrio em estudo.

Determinação dos coeficientes da Hamiltoniana normal de 4ª ordem

$$\begin{aligned} &\delta_{11} = -6,89364 * 10^{10}; \\ &\delta_{12} = -1,29877 * 10^{10}; \\ &\delta_{22} = -7,84331 * 10^{9}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Análise da 3ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko

$$\begin{aligned} &D = -\left(\delta_{11}\omega_2^2 - \delta_{12}\omega_1\omega_2 + \delta_{22}\omega_1^2\right) \neq 0, \\ &D = 21453,2 \neq 0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Como a condição é satisfeita, o ponto de equilíbrio MP 1.2 é classificado como Liapunov estável.

Apenas por ilustração, apresenta-se a seguir a forma normal da Hamiltoniana até a 4ª ordem, a qual será útil em trabalhos futuros que venham considerar a Hamiltoniana normal de ordem superior.

Tabela 7.6: Análise da 2ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko para o ponto de equilíbrio MP 1.2

$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$		$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$		$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$		$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$	
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 1$	$0,000171$	$k_2 = -1$	$-0,000171$	$k_2 = 1$	$0,000171$	$k_2 = -1$	$-0,000171$
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 2$	$0,000343$	$k_2 = -2$	$-0,000343$	$k_2 = 2$	$0,000343$	$k_2 = -2$	$-0,000343$
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 3$	$0,000515$	$k_2 = -3$	$-0,000515$	$k_2 = 3$	$0,000515$	$k_2 = -3$	$-0,000515$
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 4$	$0,000686$	$k_2 = -4$	$-0,000686$	$k_2 = 4$	$0,000686$	$k_2 = -4$	$-0,000686$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 0$	$0,001883$	$k_2 = 0$	$-0,001883$	$k_2 = 0$	$-0,001883$	$k_2 = 0$	$0,001883$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 1$	$0,002055$	$k_2 = -1$	$-0,002055$	$k_2 = 1$	$-0,001711$	$k_2 = -1$	$0,001711$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 2$	$0,002226$	$k_2 = -2$	$-0,002226$	$k_2 = 2$	$-0,001539$	$k_2 = -2$	$0,001539$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 3$	$0,002398$	$k_2 = -3$	$-0,002398$	$k_2 = 3$	$-0,001368$	$k_2 = -3$	$0,001368$
$k_1 = 2$		$k_1 = -2$		$k_1 = -2$		$k_1 = 2$	
$k_2 = 0$	$0,003766$	$k_2 = 0$	$-0,003766$	$k_2 = 0$	$-0,003766$	$k_2 = 0$	$0,003766$
$k_1 = 2$		$k_1 = -2$		$k_1 = -2$		$k_1 = 2$	
$k_2 = 1$	$0,003938$	$k_2 = -1$	$-0,003938$	$k_2 = 1$	$-0,003595$	$k_2 = -1$	$0,003595$
$k_1 = 2$		$k_1 = -2$		$k_1 = -2$		$k_1 = 2$	
$k_2 = 2$	$0,004110$	$k_2 = -2$	$-0,004110$	$k_2 = 2$	$-0,003423$	$k_2 = -2$	$0,003423$
$k_1 = 3$		$k_1 = -3$		$k_1 = -3$		$k_1 = 3$	
$k_2 = 0$	$0,005650$	$k_2 = 0$	$-0,005650$	$k_2 = 0$	$-0,005650$	$k_2 = 0$	$0,005650$
$k_1 = 3$		$k_1 = -3$		$k_1 = -3$		$k_1 = 3$	
$k_2 = 1$	$0,005821$	$k_2 = -1$	$-0,005821$	$k_2 = 1$	$-0,005478$	$k_2 = -1$	$0,005478$
$k_1 = 4$		$k_1 = -4$		$k_1 = -4$		$k_1 = 4$	
$k_2 = 0$	$0,007533$	$k_2 = 0$	$-0,007533$	$k_2 = 0$	$-0,007533$	$k_2 = 0$	$0,007533$

Forma normal de 4ª ordem

$$\begin{aligned} H_4^{nova} &= \delta_{11}\left(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2p_1^2\right) + \delta_{22}\left(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2p_2^2\right) \\ &\quad +\delta_{12}\left(q_1^2q_2^2 + q_1^2p_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_1^2p_2^2\right), \\ H_4^{nova} &= -6,89364 * 10^{10}\left(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2p_1^2\right) - 7,84331 * 10^9\left(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2p_2^2\right) \\ &\quad -1,29877 * 10^{10}\left(q_1^2q_2^2 + q_1^2p_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_1^2p_2^2\right). \end{aligned} \tag{7.6}$$

Forma normal da hamiltoniana até a 4ª ordem

$$\begin{aligned} &H^{nova} = H_2^{nova} + H_4^{nova}, \\ &H^{nova} = 0,000941671\left(q_1^2 + p_1^2\right) + 0,000085840\left(q_2^2 + p_2^2\right) - 6,89364 * 10^{10}\left(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2p_1^2\right) \\ &-7,84331 * 10^9\left(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2p_2^2\right) - 1,29877 * 10^{10}\left(q_1^2q_2^2 + q_1^2p_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_1^2p_2^2\right). \end{aligned} \tag{7.7}$$

7.3 Análise do ponto de equilíbrio PP-1 1.4 do satélite PP-1.

Como comentado anteriormente o satélite PP-1 possui algumas características orbitais similares com o satélite brasileiro de coleta de dados SCD-1 [27].

Dos 50 pontos de equilíbrio encontrados dos 10 conjuntos de dados utilizado nas simulações, apenas 7 satisfizeram as condições de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko, logo esses 7 pontos de equilíbrio são classificados como Liapunov estáveis,para os quais, os termos de ordem superiores da Hamiltoniana normal não desestabiliza a estabilidade linear do ponto de equilíbrio.

Os outros 43 pontos de equilíbrio falharam na 1ª condição do teorema de estabilidade em estudo, logo é garantido que nenhum desses pontos instáveis apresentam estabilidade linear.

A seguir é apresentado o conjunto de dados do satélite PP-1 para obtenção do ponto de equilíbrio PP-1 1.4 através da equação de movimento do problema.

7.3.1 Conjunto de dados do satélite PP-1

Dados orbitais e geométricos

Constante gravitacional: $\mu = 3,986003 * 10^5 km^3/s^2$;
Inclinação orbital: $I = 0,4364 rad$;
Excentricidade: $e = 0$;
Raio da orbita: $r = 7139,61585 km$;
Massa do satélite: $M = 100 kg$;
Momento principal de inércia em relação ao eixo Ox: $A = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$;
Momento principal de inércia em relação ao eixo Oy: $B = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$;
Momento principal de inércia em relação ao eixo Oz: $C = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$.

Variáveis de Delaunay

$l = 0 rad$;
$g = 4,542 rad$;
$h = 4,545 rad$;
$L = 5334653,709 kg\ km^2/s$;
$G = 5334653,709 kg\ km^2/s$;
$H = 4834685,585 kg\ km^2/s$.

Substituindo esses parâmetros constantes na Hamiltoniana e obtendo suas respectivas equações de movimento encontra se o ponto de equilíbrio PP-1 1.4.

Na Tabela 7.7 é apresentado para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4, os valores dos ângulos I_2, J_2, a velocidade de rotação $\boldsymbol{w}$ e o período de rotação T.

Tabela 7.7: Análise de possíveis singularidades para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4

Ponto de equilíbrio	$I_2(rad)$	$J_2(rad)$	$w(rad/s)$	$T(s)$
PP-1 1.4	$2,20566$	$0,862451$	$0,00373909$	$1680,4$

A seguir é demonstrada a análise das condições de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko para o ponto de equilíbrio apresentado, juntamente com sua equação característica e a forma normal da Hamiltoniana para respectivo conjunto de dados.

7.3.2 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio PP-1 1.4

Equação característica

$$\lambda^4 + 9,95662 * 10^{-6}\lambda^2 + 9,86778 * 10^{-12} = 0 \ . \tag{7.8}$$

Autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \pm\omega_1 i \Rightarrow \lambda_1 = \pm\ 0,00297328i; \\ \lambda_2 = \pm\omega_2 i \Rightarrow \lambda_2 = \pm\ 0,00105651i. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Como seus autovalores são imaginários puros, a 1ª condição do teorema estabilidade de Kovalev e Savchenko é satisfeita, sendo assim garantida a estabilidade linear do ponto de equilíbrio PP-1 6.1.

Forma normal de 2ª ordem

$$\begin{aligned} H_2^{nova} &= \tfrac{\omega_1}{2}\left(q_1^2 + p_1^2\right) + \tfrac{\omega_2}{2}\left(q_2^2 + p_2^2\right), \\ H_2^{nova} &= 0,00148664\left(q_1^2 + p_1^2\right) + 0,000528255\left(q_2^2 + p_2^2\right). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Análise da 2ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko

Verificando se a condição $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$, para $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$ é verdadeira, seu resultado está apresentado na Tabela 7.8 a seguir.

Visto que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita dentro de nossa precisão numérica de 10^{-12}, deve-se continuar a análise de estabilidade para verificar a estabilidade não linear do ponto de equilíbrio em estudo.

Determinação dos coeficientes da Hamiltoniana normal de 4ª ordem

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= -2,12648 * 10^{35}; \\ \delta_{12} &= 8,15057 * 10^{36}; \\ \delta_{22} &= -2,48611 * 10^{35}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Tabela 7.8: Análise da 2ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4

$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$		$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$		$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$		$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$	
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 1$	$0,001056$	$k_2 = -1$	$-0,001056$	$k_2 = 1$	$0,001056$	$k_2 = -1$	$-0,001056$
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 2$	$0,002113$	$k_2 = -2$	$-0,002113$	$k_2 = 2$	$0,002113$	$k_2 = -2$	$-0,002113$
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 3$	$0,003169$	$k_2 = -3$	$-0,003169$	$k_2 = 3$	$0,003169$	$k_2 = -3$	$-0,003169$
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 4$	$0,004226$	$k_2 = -4$	$-0,004226$	$k_2 = 4$	$0,004226$	$k_2 = -4$	$-0,004226$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 0$	$0,002973$	$k_2 = 0$	$-0,002973$	$k_2 = 0$	$-0,002973$	$k_2 = 0$	$0,002973$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 1$	$0,004029$	$k_2 = -1$	$-0,004029$	$k_2 = 1$	$-0,001916$	$k_2 = -1$	$0,001916$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 2$	$0,005086$	$k_2 = -2$	$-0,005086$	$k_2 = 2$	$-0,000860$	$k_2 = -2$	$0,000860$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 3$	$0,006142$	$k_2 = -3$	$-0,006142$	$k_2 = 3$	$-0,000196$	$k_2 = -3$	$0,000196$
$k_1 = 2$		$k_1 = -2$		$k_1 = -2$		$k_1 = 2$	
$k_2 = 0$	$0,005946$	$k_2 = 0$	$-0,005946$	$k_2 = 0$	$-0,005946$	$k_2 = 0$	$0,005946$
$k_1 = 2$		$k_1 = -2$		$k_1 = -2$		$k_1 = 2$	
$k_2 = 1$	$0,007003$	$k_2 = -1$	$-0,007003$	$k_2 = 1$	$-0,004890$	$k_2 = -1$	$0,004890$
$k_1 = 2$		$k_1 = -2$		$k_1 = -2$		$k_1 = 2$	
$k_2 = 2$	$0,008059$	$k_2 = -2$	$-0,008059$	$k_2 = 2$	$-0,003833$	$k_2 = -2$	$0,003833$
$k_1 = 3$		$k_1 = -3$		$k_1 = -3$		$k_1 = 3$	
$k_2 = 0$	$0,008919$	$k_2 = 0$	$-0,008919$	$k_2 = 0$	$-0,008919$	$k_2 = 0$	$0,008919$
$k_1 = 3$		$k_1 = -3$		$k_1 = -3$		$k_1 = 3$	
$k_2 = 1$	$0,009976$	$k_2 = -1$	$-0,009976$	$k_2 = 1$	$-0,007863$	$k_2 = -1$	$0,007863$
$k_1 = 4$		$k_1 = -4$		$k_1 = -4$		$k_1 = 4$	
$k_2 = 0$	$0,011893$	$k_2 = 0$	$-0,011893$	$k_2 = 0$	$-0,011893$	$k_2 = 0$	$0,011893$

Análise da 3ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko

$$\begin{aligned} D &= -\left(\delta_{11}\omega_2^2 - \delta_{12}\omega_1\omega_2 + \delta_{22}\omega_1^2\right) \neq 0, \\ D &= 5,3642 * 10^{31} \neq 0. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Como a condição é satisfeita, o ponto de equilíbrio MP 1.2 é classificado como Liapunov estável.

Forma normal de 4ª ordem

$$\begin{aligned} H_4^{nova} &= \delta_{11}\left(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2p_1^2\right) + \delta_{22}\left(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2p_2^2\right) \\ &\quad +\delta_{12}\left(q_1^2q_2^2 + q_1^2p_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_1^2p_2^2\right), \\ H_4^{nova} &= -2,12648 * 10^{35}\left(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2p_1^2\right) - 2,48611 * 10^{35}\left(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2p_2^2\right) \\ &\quad +8,15057 * 10^{36}\left(q_1^2q_2^2 + q_1^2p_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_1^2p_2^2\right). \end{aligned} \tag{7.13}$$

Forma normal da hamiltoniana até a 4ª ordem

$$H^{nova} = H_2^{nova} + H_4^{nova},$$
$$H^{nova} = 0,00148664\,(q_1^2 + p_1^2) + 0,000528255\,(q_2^2 + p_2^2) - 2,12648 * 10^{35}\,(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2p_1^2)$$
$$-2,48611 * 10^{35}\,(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2p_2^2) + 8,15057 * 10^{36}\,(q_1^2q_2^2 + q_1^2p_2^2 + p_1^2q_2^2 + p_1^2p_2^2)\,. \tag{7.14}$$

7.4 Análise dos pontos de equilíbrio PP-2 5.5 do satélite PP-2

Como comentado anteriormente o satélite PP-2 possui algumas características orbitais similares com o satélite brasileiro de coleta de dados SCD-2 [27].

Dos 50 pontos de equilíbrio encontrados dos 10 conjuntos de dados utilizado nas simulações, apenas 10 satisfizeram as condições de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko, logo esses 10 pontos de equilíbrio são classificados como Liapunov estáveis, para os quais, os termos de ordem superior da Hamiltoniana normal não desestabiliza a estabilidade linear do ponto de equilíbrio.

Os outros 40 pontos de equilíbrio falharam na 1ª condição do teorema de estabilidade em estudo, logo é garantido que nenhum desses pontos instáveis apresentam estabilidade linear.

A seguir é apresentado o conjunto de dados do satélite PP-2 para obtenção do ponto de equilíbrio PP-2 5.5 através das equações de movimento do problema.

7.4.1 Conjunto de dados do satélite PP-2

Dados orbitais e geométricos

Constante gravitacional: $\mu = 3,986003 * 10^5 km^3/s^2$;
Inclinação orbital: $I = 0,4364 rad$;
Excentricidade: $e = 0$;
Raio da orbita: $r = 7133,6797 km$;
Massa do satélite: $M = 100 kg$;
Momento principal de inércia em relação ao eixo Ox: $A = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$
Momento principal de inércia em relação ao eixo Oy: $B = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$
Momento principal de inércia em relação ao eixo Oz: $C = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

Variáveis de Delaunay

$l = 0 rad$;
$g = 1,0629 rad$;

$h = 5,4341rad$;
$L = 5332435,53kg\ km^2/s$;
$G = 5332435,53kg\ km^2/s$;
$H = 4832900,66kg\ km^2/s$.

Substituindo esses parâmetros constantes na Hamiltoniana e obtendo suas respectivas equações de movimento encontra-se o ponto de equilíbrio PP-2 5.5.

Na Tabela 7.9 é apresentado para o ponto de equilíbrio PP-1 5.5, os valores dos ângulos I_2, J_2, a velocidade de rotação $\boldsymbol{w}$ e o período de rotação T.

Tabela 7.9: Análise de possíveis singularidades para o ponto de equilíbrio PP-2 5.5

Ponto de equilíbrio	$I_2(rad)$	$J_2(rad)$	$w(rad/s)$	$T(s)$
PP-2 5.5	$1,30477$	$1,47527$	$0,000185974$	$33785,2$

A seguir é discutida a análise das condições de estabilidade do teorema de Kovalev e Savchenko para o pontos de equilíbrio apresentado, juntamente com sua equação característica e a forma normal da Hamiltoniana para respectivo conjunto de dados.

7.4.2 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio PP-2 5.5

Equação característica

$$\lambda^4 + 6,65644 * 10^{-6}\lambda^2 + 5,24762 * 10^{-12} = 0\ . \tag{7.15}$$

Autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \pm\omega_1 i \Rightarrow \lambda_1 = \pm\ 0,00239638i; \\ \lambda_2 = \pm\omega_2 i \Rightarrow \lambda_2 = \pm\ 0,000955928i. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Como seus autovalores são imaginários puros, a 1ª condição do teorema estabilidade de Kovalev e Savchenko é satisfeita, sendo assim garantida a estabilidade linear do ponto de equilíbrio PP-2 5.5.

Forma normal de 2ª ordem

$$\begin{aligned} H_2^{nova} &= \tfrac{\omega_1}{2}\left(q_1^2 + p_1^2\right) + \tfrac{\omega_2}{2}\left(q_2^2 + p_2^2\right), \\ H_2^{nova} &= 0,00239638\left(q_1^2 + p_1^2\right) + 0,000955928\left(q_2^2 + p_2^2\right). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Análise da 2ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko. Verificando se a condição $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$, para $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$ é verdadeira, seu resultado está apresentado na Tabela 7.10 a seguir.

Visto que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita dentro de nossa precisão numérica de 10^{-12}, deve-se continuar a análise de estabilidade para verificar a estabilidade não linear do ponto de equilíbrio em estudo.

Tabela 7.10: Análise da 2ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko para o ponto de equilíbrio PP-2 5.5

$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$		$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$		$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$		$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$	
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 1$	$0,000955$	$k_2 = -1$	$-0,000955$	$k_2 = 1$	$0,000955$	$k_2 = -1$	$-0,000955$
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 2$	$0,001911$	$k_2 = -2$	$-0,001911$	$k_2 = 2$	$0,001911$	$k_2 = -2$	$-0,001911$
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 3$	$0,002867$	$k_2 = -3$	$-0,002867$	$k_2 = 3$	$0,002867$	$k_2 = -3$	$-0,002867$
$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$		$k_1 = 0$	
$k_2 = 4$	$0,003823$	$k_2 = -4$	$-0,003823$	$k_2 = 4$	$0,003823$	$k_2 = -4$	$-0,003823$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 0$	$0,002396$	$k_2 = 0$	$-0,002396$	$k_2 = 0$	$-0,002396$	$k_2 = 0$	$0,002396$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 1$	$0,003352$	$k_2 = -1$	$-0,003352$	$k_2 = 1$	$-0,001440$	$k_2 = -1$	$0,001440$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 2$	$0,004308$	$k_2 = -2$	$-0,004308$	$k_2 = 2$	$-0,000484$	$k_2 = -2$	$0,000484$
$k_1 = 1$		$k_1 = -1$		$k_1 = -1$		$k_1 = 1$	
$k_2 = 3$	$0,005264$	$k_2 = -3$	$-0,005264$	$k_2 = 3$	$-0,000471$	$k_2 = -3$	$0,000471$
$k_1 = 2$		$k_1 = -2$		$k_1 = -2$		$k_1 = 2$	
$k_2 = 0$	$0,004792$	$k_2 = 0$	$-0,004792$	$k_2 = 0$	$-0,004792$	$k_2 = 0$	$0,004792$
$k_1 = 2$		$k_1 = -2$		$k_1 = -2$		$k_1 = 2$	
$k_2 = 1$	$0,005748$	$k_2 = -1$	$-0,005748$	$k_2 = 1$	$-0,003836$	$k_2 = -1$	$0,003836$
$k_1 = 2$		$k_1 = -2$		$k_1 = -2$		$k_1 = 2$	
$k_2 = 2$	$0,006704$	$k_2 = -2$	$-0,006704$	$k_2 = 2$	$-0,002880$	$k_2 = -2$	$0,002880$
$k_1 = 3$		$k_1 = -3$		$k_1 = -3$		$k_1 = 3$	
$k_2 = 0$	$0,007189$	$k_2 = 0$	$-0,007189$	$k_2 = 0$	$-0,007189$	$k_2 = 0$	$0,007189$
$k_1 = 3$		$k_1 = -3$		$k_1 = -3$		$k_1 = 3$	
$k_2 = 1$	$0,008145$	$k_2 = -1$	$-0,008145$	$k_2 = 1$	$-0,006233$	$k_2 = -1$	$0,006233$
$k_1 = 4$		$k_1 = -4$		$k_1 = -4$		$k_1 = 4$	
$k_2 = 0$	$0,009585$	$k_2 = 0$	$-0,009585$	$k_2 = 0$	$-0,009585$	$k_2 = 0$	$0,009585$

Determinação dos coeficientes da Hamiltoniana normal de 4ª ordem

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= -5,21497 * 10^{20}; \\ \delta_{12} &= 7,40372 * 10^{22}; \\ \delta_{22} &= -1,19946 * 10^{21}. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Análise da 3ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko

$$\begin{aligned} D &= -\left(\delta_{11}\omega_2^2 - \delta_{12}\omega_1\omega_2 + \delta_{22}\omega_1^2\right) \neq 0, \\ D &= 3,46569 * 10^{17} \neq 0. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Como a condição é satisfeita, esse o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 é classificado como Liapunov estável.

Forma normal de 4ª ordem

$$\begin{aligned} H_4^{nova} &= \delta_{11}\left(q_1^4+p_1^4+2q_1^2p_1^2\right)+\delta_{22}\left(q_2^4+p_2^4+2q_2^2p_2^2\right) \\ &\quad +\delta_{12}\left(q_1^2q_2^2+q_1^2p_2^2+p_1^2q_2^2+p_1^2p_2^2\right), \\ H_4^{nova} &= -5,21497*10^{20}\left(q_1^4+p_1^4+2q_1^2p_1^2\right)-1,19946*10^{21}\left(q_2^4+p_2^4+2q_2^2p_2^2\right) \\ &\quad +7,40372*10^{22}\left(q_1^2q_2^2+q_1^2p_2^2+p_1^2q_2^2+p_1^2p_2^2\right). \end{aligned} \tag{7.20}$$

Forma normal da hamiltoniana até a 4ª ordem

$$\begin{aligned} &H^{nova} = H_2^{nova}+H_4^{nova} \\ &H^{nova} = 0,00239638\left(q_1^2+p_1^2\right)+0,000955928\left(q_2^2+p_2^2\right)-5,21497*10^{20}\left(q_1^4+p_1^4+2q_1^2p_1^2\right) \\ &-1,19946*10^{21}\left(q_2^4+p_2^4+2q_2^2p_2^2\right)+7,40372*10^{22}\left(q_1^2q_2^2+q_1^2p_2^2+p_1^2q_2^2+p_1^2p_2^2\right) \end{aligned} \tag{7.21}$$

A seguir, é feita uma análise de possíveis regiões de estabilidade ao redor desses pontos de equilíbrio Liapunov estáveis.

Capítulo 8

Análise da estabilidade em torno dos pontos de equilíbrio

Neste Capítulo, o comportamento de pontos de equilíbrio Liapunov estáveis dos satélites MP e PP-1 mostrados no Capítulo anterior serão estudados, através de pequenas variações em três parâmetros: momento principal de inércia no eixo x (A), momento principal de inércia no eixo z (C) e inclinação orbital (I).

Esta análise se justifica pela necessidade de se conhecer regiões de estabilidade associadas com variações de tais parâmetros que podem influenciar na estabilidade linear e/ou estabilidade não linear do ponto de equilíbrio.

Dessa forma pode-se:

- Encontrar regiões em que esteja garantida a estabilidade linear segundo variações desses parâmetros;
- Tomar conhecimento sobre o comportamento do determinante de Arnold segundo variações desses parâmetros, ou seja, quão próximo este ponto estável pode estar da instabilidade não linear;

Analisaremos dois pontos de equilíbrio MP 1.2 e PP-1 1.4. Para esse estudo, serão considerados os mesmos conjuntos de dados (parâmetros constantes) relacionados aos dois pontos de equilíbrio em análise.

O estudo foi realizado seguindo o mesmo algoritmo apresentado anteriormente no Capítulo 6, utilizado para determinação da forma normal e análise de estabilidade em que é necessário substituir os parâmetros constantes e o próprio ponto de equilíbrio em estudo na Hamiltoniana, lembrando que é necessário fazer uma substituição de variáveis para que o ponto de equilíbrio seja a nova origem do sistema e coordenadas.

Assim, com a Hamiltoniana em função de (A, C e I), pode-se verificar como os pontos de equilíbrios MP 1.2 e PP-1 1.4, que são Liapunov estáveis, se comportam com

pequenas variações desses parâmetros por meio da análise qualitativa do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko [26].

Para cada um dos pontos de equilíbrios, são feitas as seguintes análises:

1) Comportamento da estabilidade linear

a) Análise da 1ª condição: Como o desenvolvimento do algoritmo da forma normal e análise de estabilidade para o ponto de equilíbrio em questão, obtêm-se resultados analíticos para os autovalores λ_j que são expressos como:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \pm\sqrt{a(A,C,I)}, \\ \lambda_2 &= \pm\sqrt{b(A,C,I)}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

As funções $a(A,C,I)$ e $b(A,C,I)$ dependem da inclinação I através de funções trigonométricas em senos e cossenos e dos momentos principais de inércia A e C através de potências de várias ordens (ver Apêndice B).

Deve-se verificar para quais condições dos parâmetros A, C e I, fazem com que as funções dentro das raízes ($a(A,C,I)$ e $b(A,C,I)$) sejam menores que zero. Nessa situação os autovalores são obrigatoriamente imaginários puros.

b) Análise da 2ª condição: É verificado se a inequação $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$ é válida para todo k_1 e k_2 inteiro satisfazendo a desigualdade $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$. Ou seja, para que valores dos parâmetros em estudo A, C e I, a inequação $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$ é satisfeita, lembrando que ω_1 e ω_2 são funções de $a(A,C,I)$ e $b(A,C,I)$ respectivamente, que são observados em:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \pm\sqrt{a(A,C,I)} = \pm i\omega_1 \\ \lambda_2 &= \pm\sqrt{b(A,C,I)} = \pm i\omega_2 \end{aligned} \tag{8.2}$$

2) Comportamento da estabilidade não linear

Esse tópico consiste na análise da 3ª condição, verifica se o determinante de Arnold D satisfaz a desigualdade $D = -\left(\delta_{11}\omega_2^2 - \delta_{12}\omega_1\omega_2 + \delta_{22}\omega_1^2\right) \neq 0$ em função dos parâmetros em estudo A, C e I.

8.1 Análise qualitativa da estabilidade em torno do ponto de equilíbrio MP 1.2

Os valores das variáveis de Andoyer para o ponto de equilíbrio MP 1.2 encontram se na Tabela 7.2 e possui características orbitais e físicas dadas no item 7.2.1, sendo os momentos principais de inércia $A = 3,9499 * 10^{-1} kg.km^2$, $C = 1,0307 * 10^{-1} kg.km^2$ e com inclinação orbital $I = 0,5533 rad$.

Para este ponto de equilíbrio foram escolhidos arbitrariamente variações de momentos de inércia entre 0 e $0,8kg.km^2$ e variações na inclinação orbital entre 0 e $1rad$. Não foram feitas grandes variações em tais parâmetros por se ter consciência da imprecisão que esses resultados poderiam apresentar, uma vez que os pontos de equilíbrios são determinados numericamente para valores constantes de A, C e I.

8.1.1 Comportamento da estabilidade linear

Análise da 1ª condição

A seguir, são apresentadas as regiões encontradas considerando três casos, em que ora um dos parâmetros é considerado constante e os outros dois são variáveis e assim sucessivamente para todos os três parâmetros em investigação.

Caso I: $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$

A Figura 8.1 apresenta o resultado da estabilidade linear para o momento principal de inércia A constante, com variações no momento principal de inércia C e na inclinação orbital I. Na Região 1 da Figura 8.1, em azul, tem se regiões em que $a(A_0, C, I) < 0$ onde os autovalores λ_1 e λ_2 são imaginários puros. Na Região 2 da Figura 8.1, em azul, tem se regiões em que $b(A_0, C, I) < 0$ onde os autovalores λ_3 e λ_4 também são imaginários puros. Neste caso, observando as Regiões 1 e 2 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros I e C, para que seja garantida a estabilidade linear do ponto de equilíbrio MP 1.2.

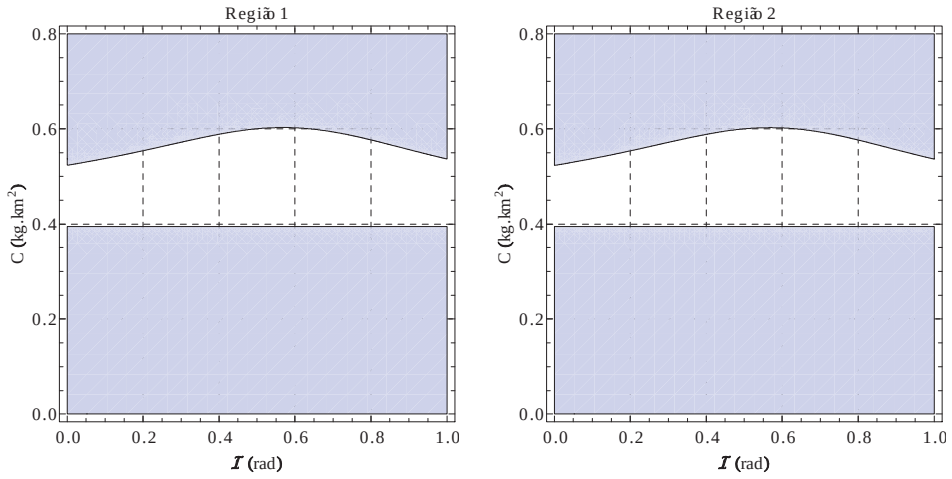


Figura 8.1: Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$

Verifica se na Figura 8.1 que existem apenas regiões linearmente estáveis para $C < A$ e para $C > A$ existem regiões instáveis e estáveis (para maiores valores de C).

Caso II: $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$

A Figura 8.2 apresenta o resultado da estabilidade linear para o momento principal de inércia C constante, com variações no momento principal de inércia A e na inclinação orbital I. Na Região 3 e 4 da Figura 8.2, em azul, tem se regiões em que $a(A, C_0, I) < 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$, respectivamente, onde os autovalores λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são imaginários puros. Neste caso, observando as Regiões 3 e 4 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros I e A, para que seja garantida a estabilidade linear do ponto MP 1.2.

Novamente, nas Regiões 3 e 4 da Figura 8.2 observam se regiões de instabilidade linear quando $C > A$ e regiões linearmente estáveis quando $C < A$, confirmando o resultado obtido anteriormente.

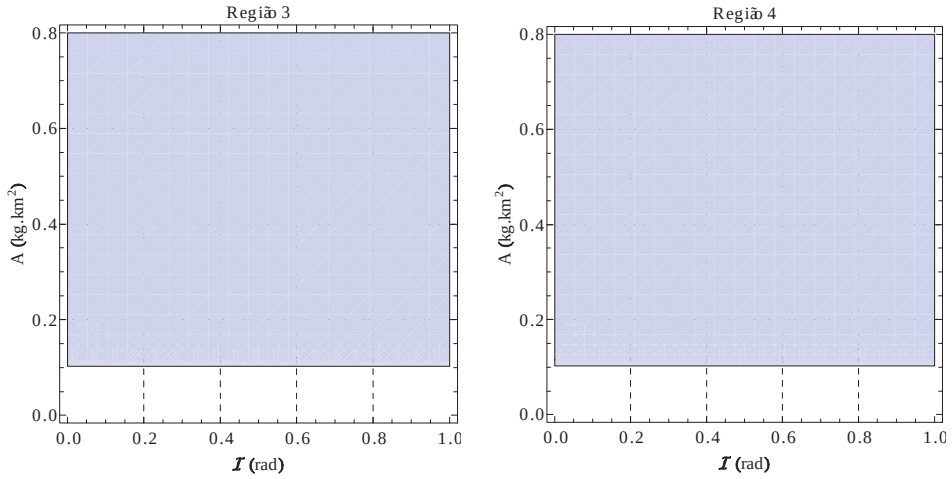


Figura 8.2: Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$

Caso III: $I_0 = 0,5533 rad$

A Figura 8.3 apresenta o resultado da estabilidade linear para a inclinação I constante, com variações nos momentos principais de inércia A e C. Na Região 5 e 6 da Fig. 8.3, em azul, tem se regiões em que $a(A, C, I_0) < 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$, respectivamente, onde os autovalores λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são imaginários puros. Neste caso, observando as Regiões 5 e 6 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros A e C, para que seja garantida a estabilidade linear do ponto MP 1.2.

Mais uma vez, observam se que nas Regiões 5 e 6 da Figura 8.3, quando $C < A$ existem regiões linearmente estáveis (na Figura 8.3 corresponde as regiões triangulares a direita nas Regiões 5 e 6), e quando $C > A$ existe uma região instável e outra linearmente estável.

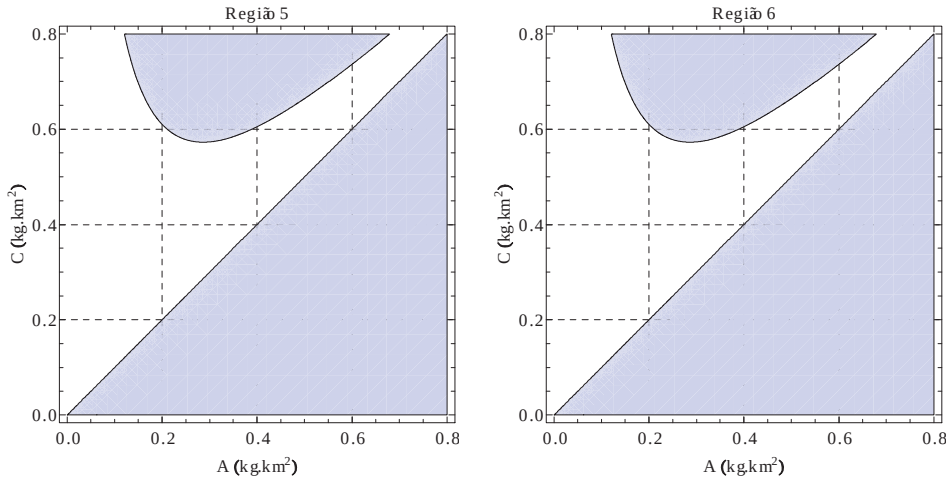


Figura 8.3: Regiões para $a(A, C, I_0) > 0$ e $a(A, C, I_0) < 0$ e para $b(A, C, I_0) > 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,5533rad$

Salienta se que, em ambas as seis regiões que apresentam o comportamento da estabilidade linear, existe uma separação entre estabilidade e instabilidade quando os momentos principais de inércia são iguais ($C = A$). Essa configuração corresponde a uma distribuição uniforme de massa do satélite, ou seja, todos os momentos principais de inércia seriam iguais ($A = B = C$).

Nessa situação, o torque de gradiente de gravidade atuante no satélite se anula (ver equação (4.3)) e o movimento rotacional se caracteriza por um movimento livre de torques externos, uma vez que não estão sendo consideradas outras perturbações. A rotação do satélite alinha se ao longo do eixo do momento angular Oz_m. Logo, para essa configuração de distribuição uniforme de massa, a qualquer pequeno aumento no momento de inércia C ou diminuição no momento de inércia A torna esse movimento linearmente instável e qualquer pequena diminuição no momento de inércia C ou aumento no momento de inércia A torna esse movimento linearmente estável (ver Figura 8.3).

Além disso, pode se verificar que em todas as seis regiões, para a configuração original de A, C e I, os autovalores são imaginários puros, confirmando o resultado obtido numericamente de estabilidade linear do ponto de equilíbrio MP 1.2

Análise da 2ª condição

A seguir, são apresentados os resultados encontrados considerando três casos, em que ora dois dos parâmetros são considerados constantes e o outro é variável, e assim sucessivamente. O resultado apresenta o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiro satisfazendo a desigualdade $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$.

O objetivo é analisar para que frequências ω_j a desigualdade $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$ será satisfeita para que se possam desprezar as ressonâncias entre as frequências de oscilação.

Caso I: $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ **e** $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$

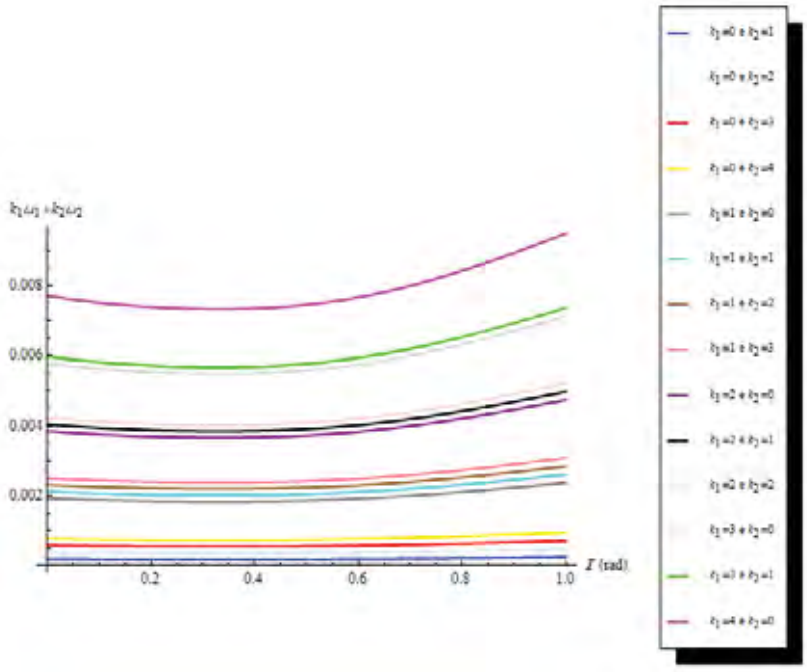
As Figuras 8.4 (a) e (b) apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, com variações apenas na inclinação orbital I, considerando os momentos principais de inércia A e C constantes.

Obviamente, quando tem se $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.4 (a) porém com conjunto imagem de sinal oposto, ou seja, seriam como uma reflexão das curvas da Figura 8.4 (a) no eixo das abscissas. Da mesma maneira para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.4 (b) porém com conjunto imagem e sinal oposto.

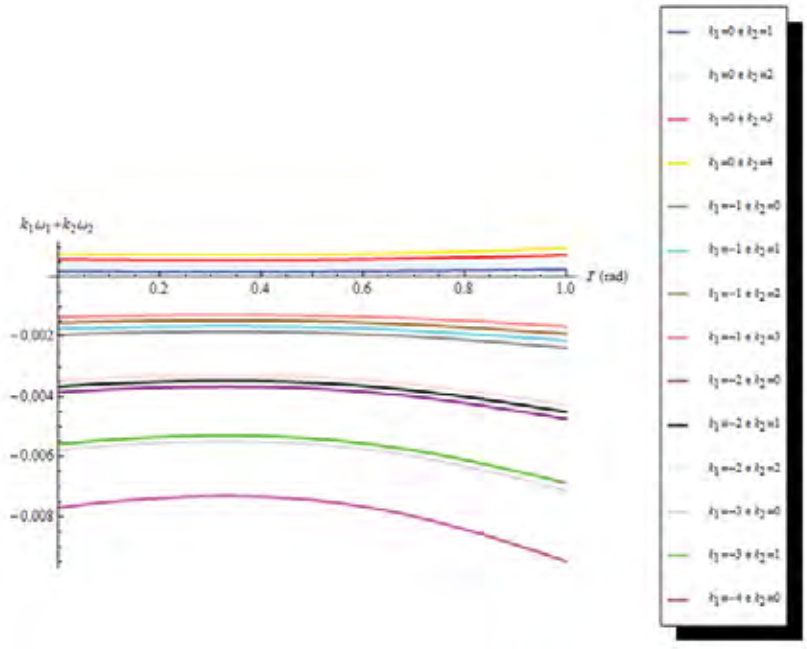
Analisando as curvas das Figuras 8.4 (a) e (b), observa se que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita, ou seja, para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiro sempre obedecendo a relação$|k_1|+|k_2| \leqslant 4$ tem se que $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$ para qualquer valor de inclinação orbital I, resultado já esperado, pois para ser garantida a estabilidade linear os autovalores além de serem imaginários puros devem ser não ressonantes entre si.

Esses resultados gráficos completam as informações dadas nas Figura 8.1 e Figura 8.2. Para os valores fixos de $A = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $C = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$, observam se nas Regiões 1 e 2, da Figura 8.1 e nas Regiões 3 e 4 da Figura 8.2, que para qualquer valor de inclinação orbital de 0 a $1rad$ tem se autovalores imaginários puros.

As curvas dos gráficos das Figuras 8.4 (a) e (b) representam a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, que dependem de ω_1 e ω_2. Estas curvas são contínuas, pois para qualquer valor de inclinação tem se autovalores imaginários puros, como pode ser observado nas Figura 8.1 e Figura 8.2.



(a)



(b)

Figura 8.4: Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$

Caso II: $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,5533 rad$

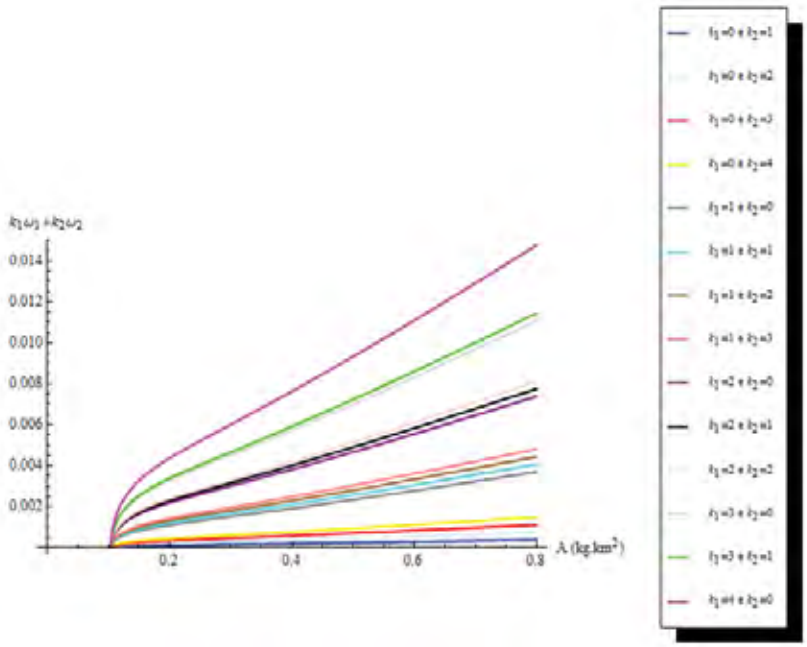
As Figuras 8.5 (a) e (b) apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, com variações apenas no momento principal de inércia A, considerando o momento principal de inércia C e a inclinação orbital I constantes.

Obviamente, quando tem se $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.5 (a) porém com conjunto imagem de sinal oposto, ou seja, seriam como uma reflexão das curvas da Figura 8.5 (a) no eixo das abscissas. Da mesma maneira para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.5 (b) porém com conjunto imagem de sinal oposto.

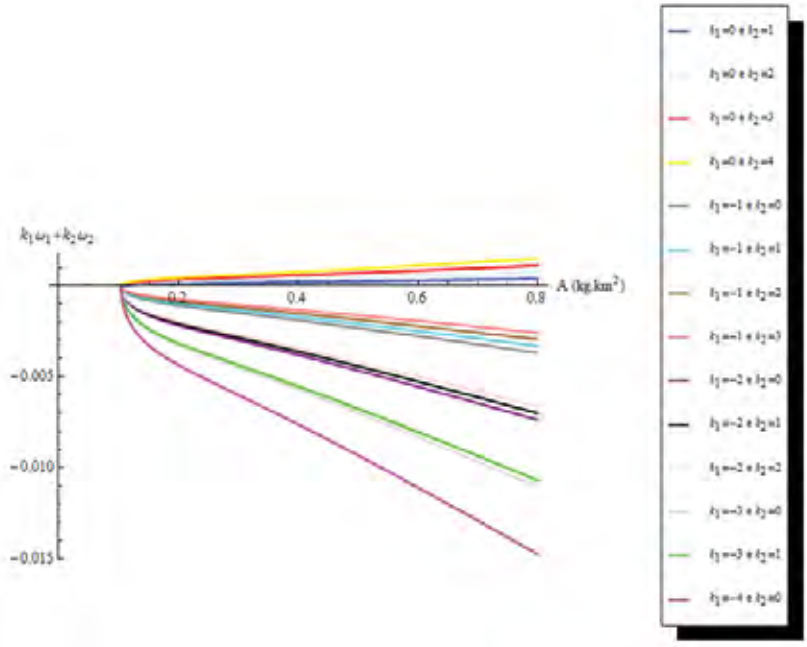
Analisando os gráficos das Figuras 8.5 (a) e (b), verifica se que as curvas iniciam para valores de $A > 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$, ou seja a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita para $A > C$, de modo que para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiros, sempre obedecendo a relação $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$, tem se $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$, resultado já esperado.

Verifica-se que, esses resultados gráficos completam as informações dadas na Figura 8.2 e Figura 8.3. Para valores fixos de $C = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I = 0,5533 rad$: quando $A > C$, observam se nas Regiões 3 e 4 da Figura 8.2, e nas Regiões 5 e 6 da Figura 8.3, que os autovalores são imaginários puros e quando $A \leq C$ os autovalores são reais ou não imaginários puros, ou seja, não apresentam oscilações periódicas em torno do ponto de equilíbrio.

A função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, representada nos gráficos das Figuras 8.5 (a) e (b), também não assume valores para $A \leq C$, pois só existem autovalores imaginários puros na configuração com $A > C$.



(a)



(b)

Figura 8.5: Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,5533 rad$

Caso III: $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,5533 rad$

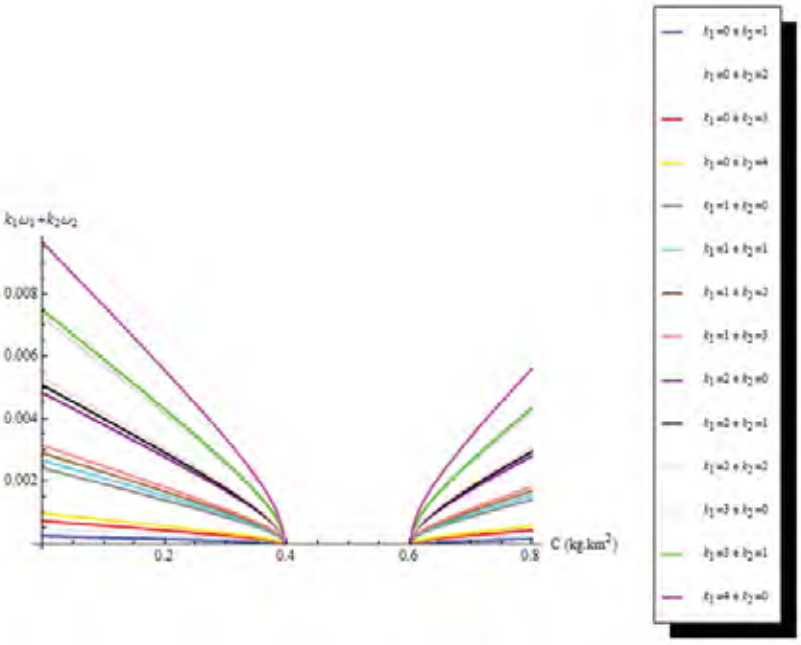
As Figuras 8.6 (a) e (b) apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, com variações apenas no momento principal de inércia C, considerando o momento principal de inércia A e a inclinação orbital I constantes.

Obviamente, quando tem se $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.6 (a) porém com conjunto imagem de sinal oposto, ou seja, seriam como uma reflexão das curvas da Figura 8.6 (a) no eixo das abscissas. Da mesma maneira para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.6 (b) porém com conjunto imagem de sinal oposto.

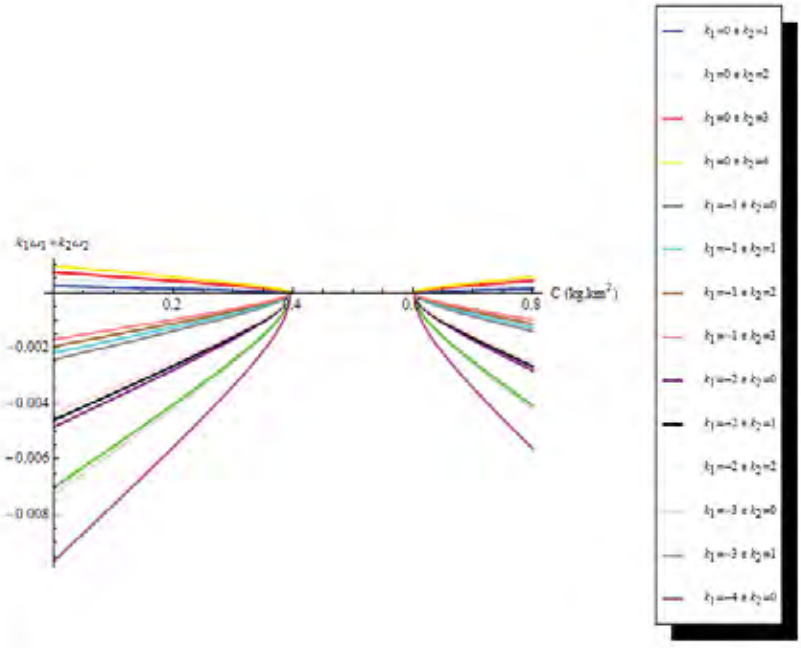
Analisando os gráficos das Figuras 8.6 (a) e (b), observa se que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita para $0 < C < 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $C > 0,6028 kg\ km^2$, ou seja, para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiro sempre obedecendo a relação $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$ tem se $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$, resultado já esperado.

Verifica-se que, esses resultados gráficos completam as informações dadas na Figura 8.1 e Figura 8.3. Considerando os valores fixos de $A = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I = 0,5533 rad$: para $0 < C < A$ e $C > 0,6028 kg\ km^2$ nas Regiões 1 e 2, da Figura 8.1 e nas Regiões 5 e 6 da Figura 8.3, observa se que os autovalores são imaginários puros; e para $A \leq C \leq 0,6028 kg\ km^2$ os autovalores são reais ou não imaginários puros.

Do mesmo modo que nos casos anteriores, pelos gráficos da Figuras 8.6 (a) e (b), verifica se que a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ também não assume valores para $A \leq C \leq 0,6028 kg\ km^2$, pois só existem autovalores imaginários puros quando $0 < C < A$ e $C > 0,6028 kg\ km^2$.



(a)



(b)

Figura 8.6: Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,5533 rad$

8.1.2 Comportamento da estabilidade não linear

Análise da 3ª condição

Baseado no estudo da estabilidade linear realizado anteriormente definiu se possíveis regiões estáveis, segundo Liapunov, nas quais agora será realizada a análise da estabilidade não linear, através do comportamento do determinante de Arnold.

Caso I: $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ **e** $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$

As Figuras 8.7 e 8.8 apresentam o comportamento do determinante de Arnold em função da inclinação orbital I, com os momentos principais de inércia A e C constantes.

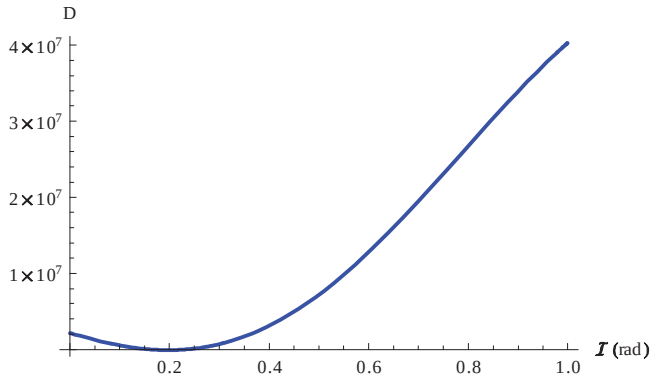


Figura 8.7: Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$

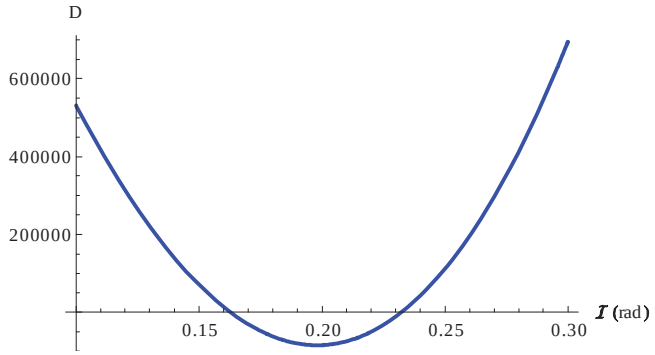


Figura 8.8: Ênfase da Fig. 8.7 onde o determinate de Arnold em função da inclinação orbital é zero para $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$

Observe que com essa configuração de A e C, existem duas inclinações na Figura 8.8 em que o determinante de Arnold é zero para o ponto de equilíbrio em estudo ($I = 0,1594 rad$ e $I = 0,2353 rad$), ou seja, para esses valores de inclinação o ponto de equilíbrio MP 1.2 não apresenta estabilidade não linear. Este caso corresponderia a condições capotamento do satélite.

Combinando esse resultado de estabilidade não linear com os resultados obtidos anteriormente, nos quais o ponto de equilíbrio MP 1.2 permanece linearmente estável para qualquer valor de inclinação orbital I de 0 a $1rad$ considerando os valores fixos de $A = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $C = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$(ver Figuras 8.1, 8.2, 8.4 (a) e 8.4 (b)), verifica se que a estabilidade linear não garante a estabilidade não linear, ou seja, a estabilidade linear obtida anteriormente para qualquer valor de inclinação de 0 a $1rad$ não é obtida para todos os valores de inclinação orbital. Essa instabilidade não linear é gerada devido aos termos de ordem superior da Hamiltoniana normal do problema.

Assim é possível determinar configurações bem definidas de inclinação orbital I para que o ponto de equilíbrio MP 1.2 permaneça Liapunov estável.

Caso II: $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,5533rad$

Na Figura 8.9 apresenta o comportamento do determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A, com o momento principal de inércia C e a inclinação orbital I constantes.

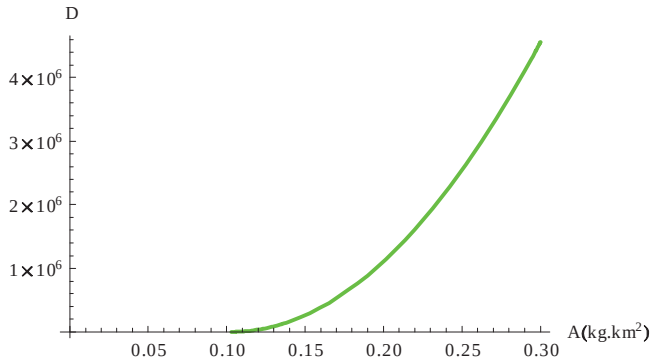


Figura 8.9: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,5533rad$

A região de $A < 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$ corresponde a regiões de instabilidade linear como já observado na análise da 1ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko anteriormente realizada.

Observe que com essa configuração de C e I, existe um valor para o momento principal de inércia no eixo x ($A = C = 1,0307 * 10^{-1} kg\ km^2$) em que o determinante de Arnold é zero, ou seja, para esse valor de momento principal de inércia A, não é satisfeita a estabilidade não linear.

Para $A < C$, o determinante de Arnold não assume valores, pois com essa configuração os autovalores são reais ou não imaginários puros, fatos observados na 1ª e 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko [26] (ver Figura 8.2, 8.3, 8.5 (a) e 8.5(b)). Para $A > C$ o determinante de Arnold apresenta resultados não nulos.

Combinando esse resultado de estabilidade não linear com os resultados anteriores (ver Figura 8.2, 8.3, 8.5 (a) e 8.5(b)), em que o ponto de equilíbrio MP 1.2 permanece linearmente estável apenas para $A < C$, é possível determinar configurações bem definidas de A tomando C e I constantes para que esse ponto de equilíbrio permaneça Liapunov estável.

Caso III: $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,5533 rad$

A Figura 8.10 apresenta o comportamento do determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C, com o momento principal de inércia A e a inclinação orbital I constantes.

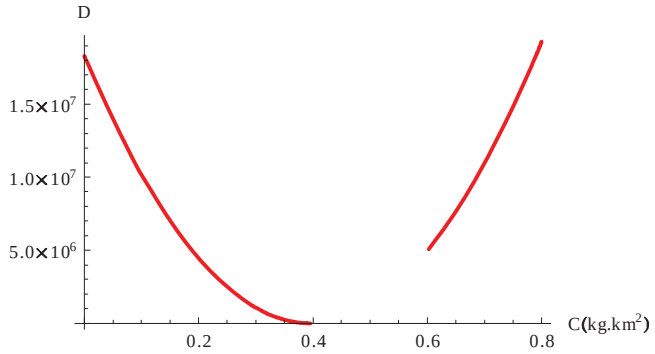


Figura 8.10: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,5533 rad$

Observe que com essa configuração de A e I, existe um valor para o momento principal de inércia no eixo z ($C = A = 3,9499 * 10^{-1} kg\ km^2$) em que o determinante de Arnold é zero, ou seja, para esse valor de momento principal de inércia C a estabilidade não linear não é satisfeita.

Para $A < C < 0,6028 kg\ km^2$, o determinante de Arnold não assume valores, pois com essa configuração os autovalores são reais ou não imaginários puros, fatos observados na 1ª e 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko [26] (ver Figura 8.1, 8.3, 8.6 (a) e 8.6 (b)). Para $0 < C < A$ e $C > 0,6028 kg\ km^2$ o determinante de Arnold apresenta resultados diferentes de zero.

Combinando esse resultado de estabilidade não linear com os resultados anteriores (ver Figura 8.1, 8.3, 8.6 (a) e 8.6 (b)), em que o ponto de equilíbrio MP 1.2 permanece linearmente estável apenas para $0 < C < A$ e $C > 0,6028 kg\ km^2$, é possível determinar configurações bem definidas de C para que esse ponto de equilíbrio em estudo permaneça Liapunov estável.

8.2 Análise qualitativa da estabilidade em torno do ponto de equilíbrio PP-1 1.4

O ponto de equilíbrio PP-1 1.4 encontra se na Tabela 7.3 e possui características orbitais e físicas dadas no item 7.3.1, sendo os momentos principais de inércia $A = 9,855 * 10^{-6} kkg\ km^2$, $C = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e com inclinação orbital $I = 0,4364 rad$.

Para este ponto de equilíbrio foram escolhidos arbitrariamente variações entre 0 e $18 * 10^{-6} kg\ km^2$ para o momentos de inércia C, variações entre 0 e $16 * 10^{-6} kg\ km^2$ para o momentos de inércia A e variações na inclinação orbital I entre 0 e $1 rad$. Novamente, não foram feitas grandes variações em tais parâmetros por se ter consciência da imprecisão que esses resultados poderiam apresentar, uma vez que os pontos de equilíbrios são determinados numericamente para valores constantes de A, C e I.

8.2.1 Comportamento da estabilidade linear

Análise da 1ª condição

A seguir, de forma semelhante ao caso estudado anteriormente, são apresentadas as regiões encontradas considerando três casos, em que ora um dos parâmetros é considerado constante e os outros dois são variáveis e assim sucessivamente para todos os três parâmetros em investigação.

Caso I: $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$

A Figura 8.11 apresenta o resultado da estabilidade linear para o momento principal de inércia A constante, com variações no momento de inércia C e na inclinação orbital I.

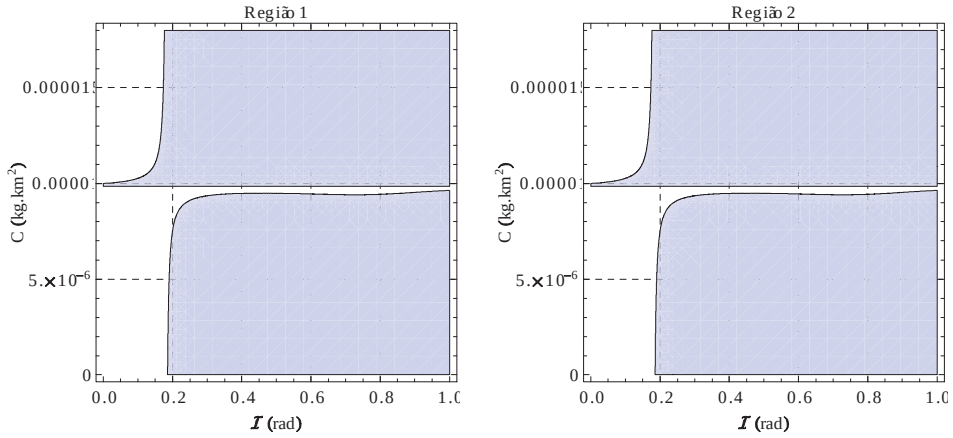


Figura 8.11: Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$

Na Região 1 da Figura 8.11, em azul, temos regiões em que $a(I, C) < 0$ onde os autovalores λ_1 e λ_2 são imaginários puros. Na Região 2 da Figura 8.11, em azul, temos regiões em que $b(I, C) < 0$ onde os autovalores λ_3 e λ_4 também são imaginários puros. Neste caso, observando as Regiões 1 e 2 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros I e C, para que seja garantida a estabilidade linear do ponto de equilíbrio PP-1 1.4.

Verifica se nas Regiões 1 e 2 da Figura 8.11 que existem regiões linearmente instáveis para $C = A$ e para órbitas com baixa inclinação, assim como regiões linearmente estáveis para $C < A$ e $C > A$.

Caso II: $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$

A Figura 8.12 apresenta o resultado da estabilidade linear para o momento principal de inércia C constante, com variações no momento de inércia A e na inclinação orbital I.

Na Região 3 e 4 da Figura 8.12, em azul, tem se regiões em que $a(I, A) < 0$ e $b(I, A) < 0$, respectivamente, onde os autovalores λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são imaginários puros. Neste caso, observando as Regiões 3 e 4 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros I e A , para que seja garantida a estabilidade linear do ponto PP-1 1.4.

Novamente, nas Regiões 3 e 4 da Figura 8.12, observa se regiões de instabilidade linear para $C = A$ e para órbitas com baixa inclinação, assim como regiões linearmente estáveis para $C < A$ e $C > A$, confirmando o resultado obtido anteriormente.

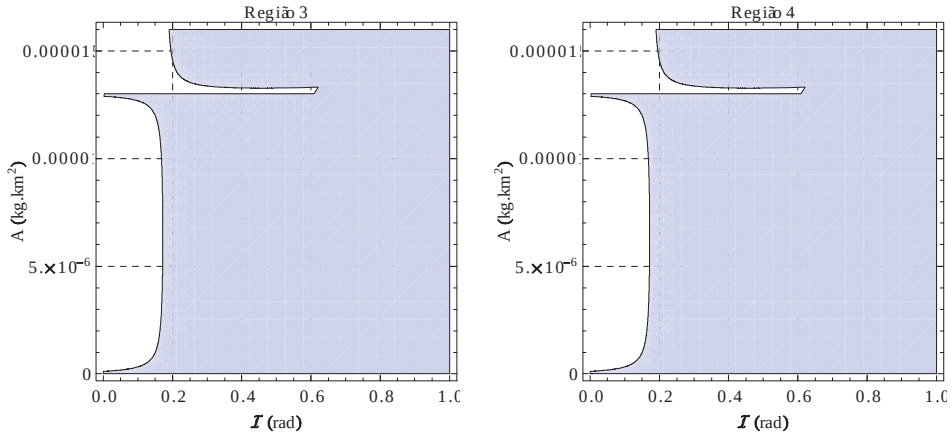


Figura 8.12: Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$

Caso III: $I_0 = 0,4364rad$

A Figura 8.13 apresenta o resultado da estabilidade linear para a inclinação I constante, com variações nos momentos principais de inércia A e C.

Na Região 5 e 6 da Figura 8.13, em azul, tem se regiões em que $a(A,C) < 0$ e $b(A,C) < 0$, respectivamente, onde os autovalores λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são imaginários puros. Neste caso, observando as Regiões 5 e 6 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros A e C, para que seja garantida a estabilidade linear do ponto PP-1 1.4.

Mais uma vez, nas Regiões 5 e 6 da Figura 8.13, observam se regiões de instabilidade linear para $C = A$, assim como regiões linearmente estáveis para $C < A$ e $C > A$.

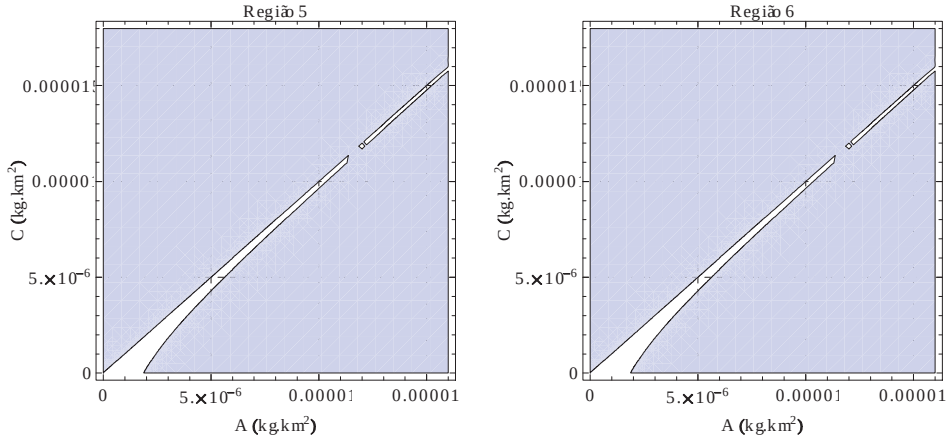


Figura 8.13: Regiões para $a(A,C,I_0) > 0$ e $a(A,C,I_0) < 0$ e para $b(A,C,I_0) > 0$ e $b(A,C,I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,4364rad$

Da mesma forma observada para o ponto de equilíbrio analisado anteriormente, salienta se que em ambas as seis regiões que apresentam o comportamento da estabilidade linear, existe uma separação entre estabilidade, instabilidade e estabilidade linear, fazendo a ressalva que para os momentos principais de inércia são iguais ($C = A$) temos instabilidade. Essa configuração corresponde a uma distribuição uniforme de massa do satélite, ou seja, todos os momentos principais de inércia seriam iguais ($A = B = C$).

Outra característica observada, é que em baixas inclinações o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 também torna se linearmente instável (ver Figuras 8.11 e 8.12). Pela equação (4.3) verifica se que para pequenas inclinações, a maioria dos termos da Hamiltoniana associada ao torque de gradiente de gravidade são eliminados. Assim, com os termos restantes em (4.3), a influência do torque de gradiente de gravidade gera instabilidade linear nessa configuração de inclinação orbital.

Além disso, pode se verificar que em todas as seis regiões, para a configuração original de A, C e I, os autovalores são imaginários puros, confirmando o resultado obtido

numericamente de estabilidade linear do ponto de equilíbrio PP-1 1.4.

Análise da 2ª condição

A seguir, são apresentados os resultados encontrados considerando três casos, em que ora dois dos parâmetros são considerados constantes e o outro é variável, e assim sucessivamente. O resultados apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiros satisfazendo a desigualdade $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$.

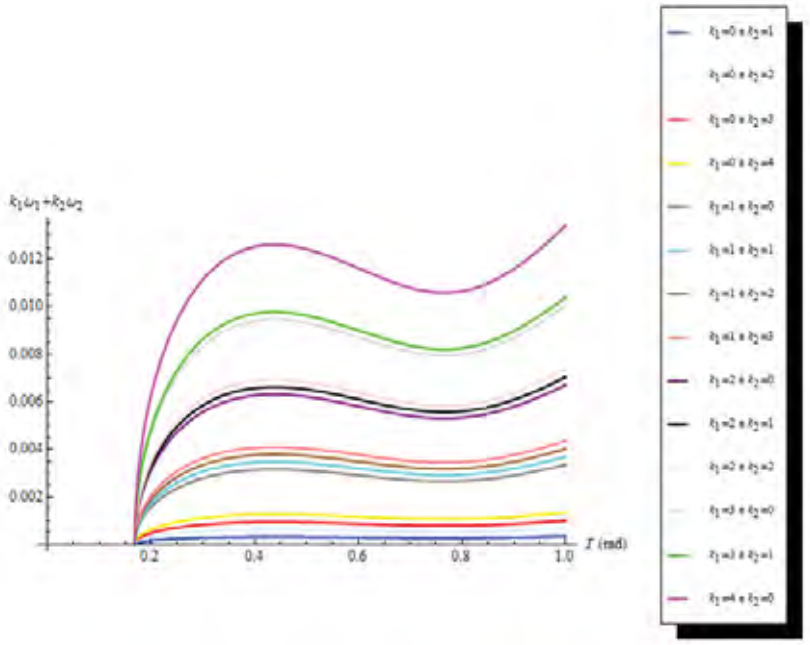
Caso I: $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ **e** $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$

As Figuras 8.14 (a) e (b) apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, com variações apenas na inclinação orbital I, considerando os momentos principais de inércia A e C constantes.

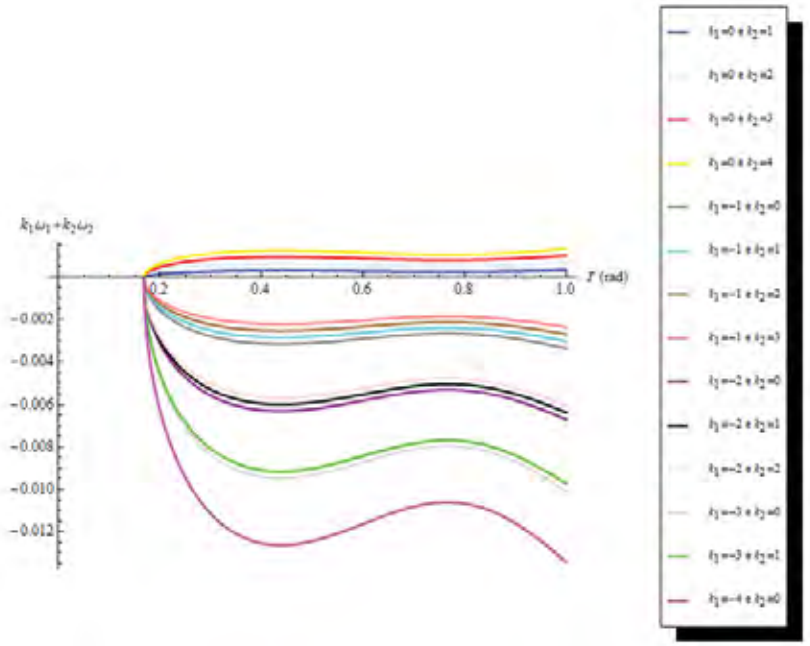
Obviamente, quando tem se $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.14 (a) porém com conjunto imagem de sinal oposto, ou seja, seriam como uma reflexão das curvas da Figura 8.14 (a) no eixo das abscissas. Da mesma maneira para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.14 (b) porém com conjunto imagem de sinal oposto.

Analisando as curvas das Figuras 8.14 (a) e (b), perceberemos que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita para $I > 0,1651 rad$, ou seja, para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiro sempre obedecendo a relação $|k_1|+|k_2| \leqslant 4$ temos $k_1\omega_1+k_2\omega_2 \neq 0$ para $I > 0,1651 rad$, resultado já esperado, pois para ser garantida a estabilidade linear os autovalores além de serem imaginários puros devem ser não ressonantes entre si.

Os gráficos presentes nas Figuras 8.14 (a) e (b) completam as informações dadas na Figura 8.11 e Figura 8.12 no que diz respeito a estabilidade linear. Nas Regiões 1 e 2 da Figura 8.11 e nas Regiões 3 e 4 da Figura 8.12 em que foi considerado $A = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ para valores da inclinação orbital $I > 0,1651 rad$ os autovalores são imaginários puros. Já para o estudo feito no intervalo $0 < I \leq 0,1651 rad$ os autovalores são reais ou não imaginários puros, que não nos interessa por não apresentarem oscilações periódicas ao redor do ponto de equilíbrio.



(a)



(b)

Figura 8.14: Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$

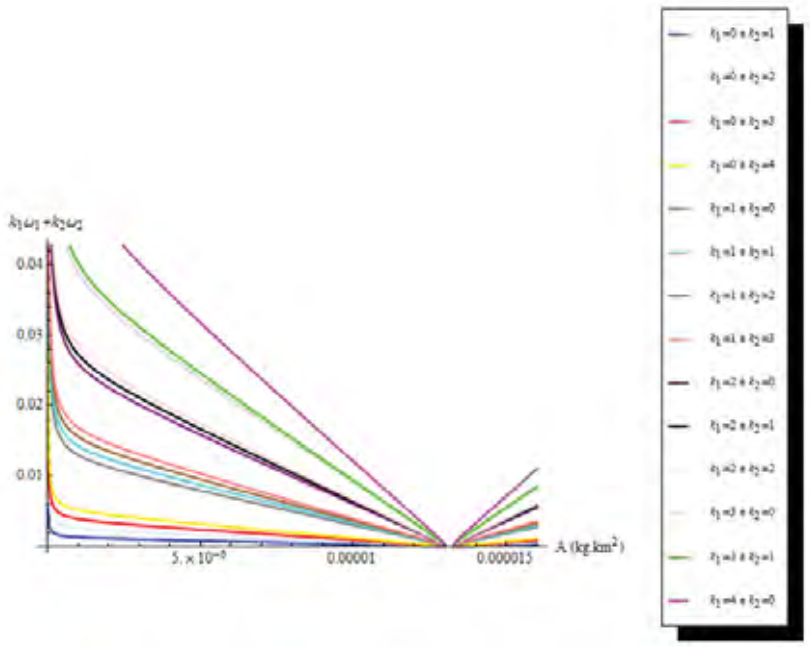
Caso II: $C = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ **e** $I = 0,4364 rad$

As Figuras 8.15 (a) e (b) apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, com variações apenas no momento principal de inércia A, considerando o momento principal de inércia C e a inclinação orbital I constante.

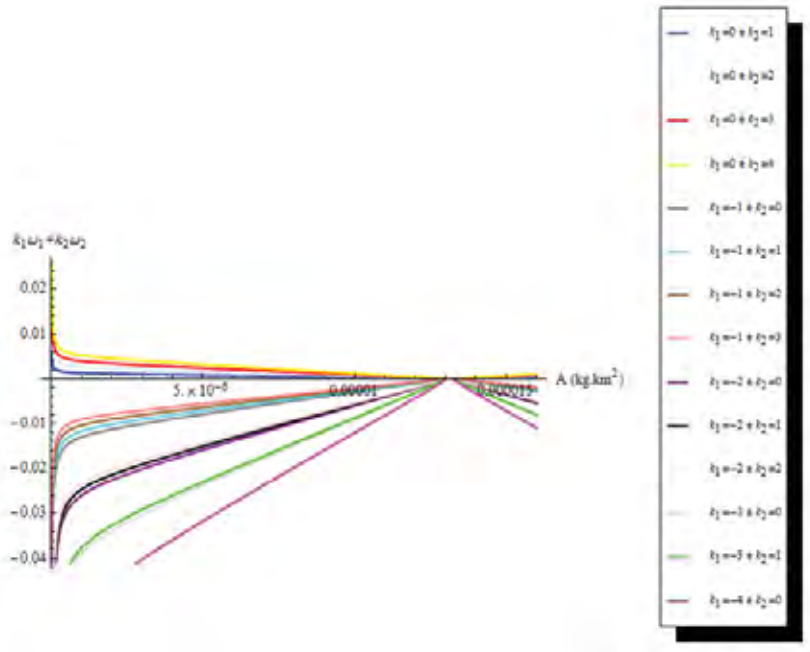
Obviamente, quando tem se $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Fig. 19 porém com conjunto imagem de sinal oposto, ou seja, seriam como uma reflexão das curvas da Figura 8.15 (a) no eixo das abscissas. Da mesma maneira para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.15 (b) porém com conjunto imagem de sinal oposto.

Analisando as curvas das Figuras 8.15 (a) e (b), verifica se que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita para $0 < A < 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $A > 13,26 * 10^{-6} kg\ km^2$. Isto é, para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiro sempre obedecendo a relação $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$, temos $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$ para $0 < A < C$ e $A > 13,26 * 10^{-6} kg\ km^2$, resultado já esperado.

Os gráficos presentes nas Figuras 8.15 (a) e (b) completam as informações dadas na Figura 8.12 e Figura 8.13 no que diz respeito à estabilidade linear. Nas Regiões 3 e 4 da Figura 8.12 e nas Regiões 5 e 6 da Figura 8.13 em que foi considerado $C = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I = 0,4364 rad$, para valores do momento de inércia $0 < A < C$ e $A > 13,26 * 10^{-6} kg\ km^2$ tem se que os autovalores são imaginários puros. Já na análise do intervalo de $C \leq A \leq 13,26 * 10^{-6} kg\ km^2$ os autovalores são reais ou não imaginários puros, o qual não faz parte do nosso estudo.



(a)



(b)

Figura 8.15: Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

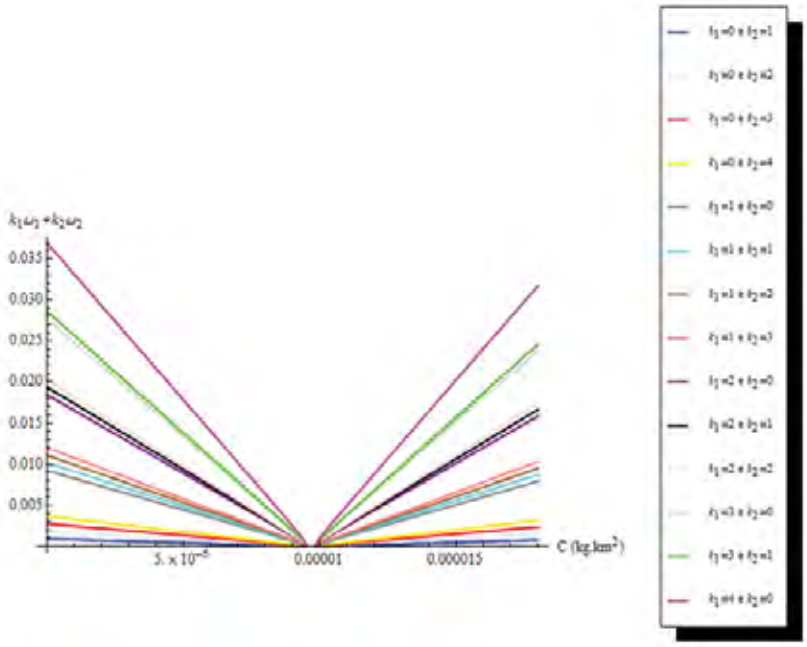
Caso III: $A = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ **e** $I = 0,4364 rad$

As Figuras 8.16 (a) e (b) apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiro satisfazendo a desigualdade $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$, com variações apenas no momento principal de inércia C, considerando o momento principal de inércia A e a inclinação orbital I constantes.

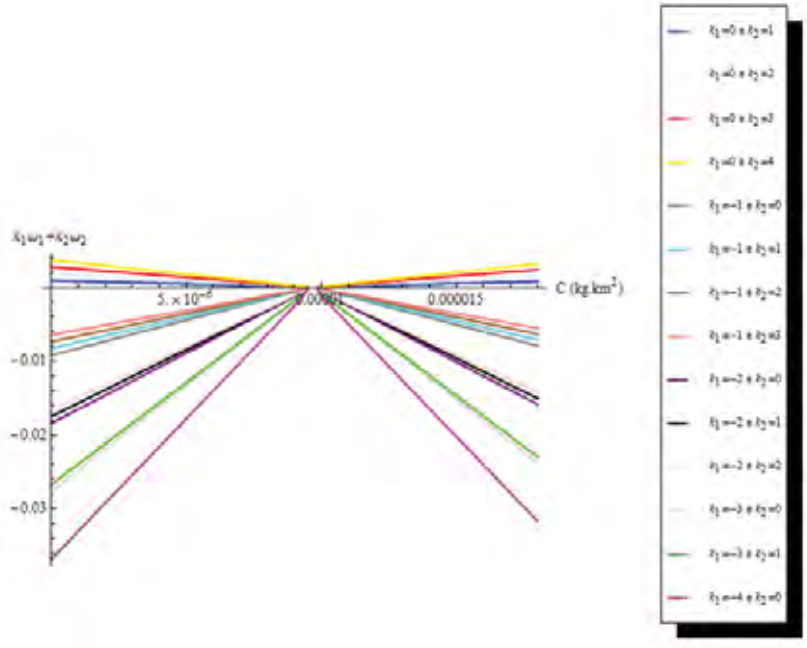
Obviamente, quando tem se $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.16 (a) porém com conjunto imagem de sinal oposto, ou seja, seriam como uma reflexão das curvas da Figura 8.16 (a) no eixo das abscissas. Da mesma maneira para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura 8.16 (b) porém com conjunto imagem opostos.

Analisando as curvas das Figuras 8.16 (a) e (b), verifica se que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita para $0 < C < 9,5 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C > 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$, resultado já esperado.

Os gráficos presentes nas Figuras 8.16 (a) e (b) completam as informações dadas na Figura 8.11 e Figura 8.13 no que diz respeito à estabilidade linear. Nas Regiões 1 e 2 da Figura 8.11 e nas Regiões 5 e 6 da Figura 8.13 em que foi considerado $A = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I = 0,4364 rad$, para valores do momento de inércia $0 < C < 9,5 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C > A$ tem se que os autovalores são imaginários puros. Já na análise do intervalo de $9,5 * 10^{-6} kg\ km^2 \leq C \leq A$ os autovalores são reais ou não imaginários puros, o qual não faz parte do nosso estudo.



(a)



(b)

Figura 8.16: Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

8.2.2 Comportamento da estabilidade não linear

Análise da 3ª condição

Finalizando a análise, apresentamos os resultados encontrados considerando três casos fixando dois parâmetros e variando o terceiro.

Caso I: $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ **e** $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$

Na Figura 8.17 apresenta o comportamento do determinante de Arnold em função da inclinação orbital I, com os momentos principais de inércia A e C constantes.

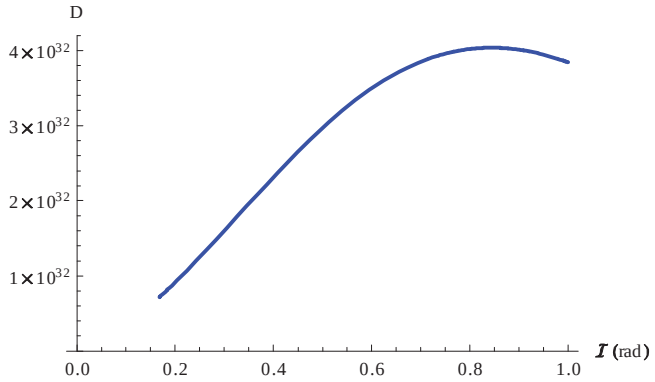


Figura 8.17: Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$

Observe que com essa configuração de A e C, não existem inclinações que conduzem o determinante de Arnold a zero, para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4, isso dentro do limite imposto pela 1ª e 2ª condição para valores de inclinação, ou seja, para esses valores de inclinação o ponto de equilíbrio em estudo é Liapunov estável.

Para o intervalo $0 < I \leq 0,1651 rad$, não temos solução para o determinante de Arnold, pois com essa configuração os autovalores são reais ou não imaginários puros, que corresponde a não existência de estabilidade linear, como já visto anteriormente de acordo com as Figura 8.11, 8.12, 8.14 (a) e 8.14 (b). Para $I > 0,1651 rad$ o determinante de Arnold apresenta resultados diferentes de zero.

Combinando esse resultado de estabilidade não linear com os resultados obtidos anteriormente, nos quais o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 permanece linearmente estável considerando os valores fixos de $A = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ apenas para $I > 0,1651 rad$ (ver Figura 8.11, 8.12, 8.14 (a) e 8.14 (b)), é possível determinar configurações bem definidas de inclinação para que o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 permaneça Liapunov estável.

Caso II: $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,4364 rad$

As Figura 8.18 e Figura 8.19 apresentam o comportamento do determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A, com o momento principal de inércia C e a inclinação orbital I constantes.

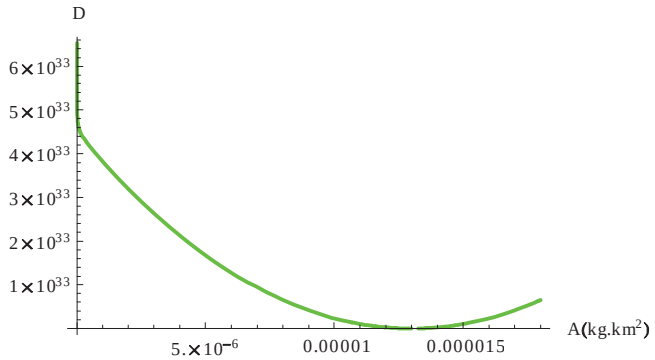


Figura 8.18: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

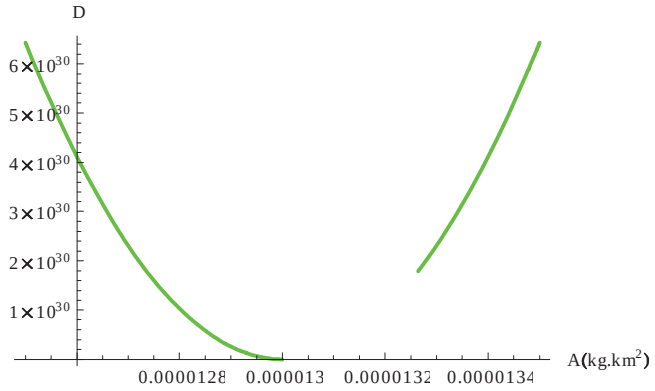


Figura 8.19: Ênfase da Fig 8.18 onde o determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A é zero para $C_0 = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

Observe que com essa configuração de C e I, existe um valor para o momento principal de inércia no eixo x ($A = C = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$) em que o determinante de Arnold é zero, ou seja, para esse valor de momento principal de inércia A, não é satisfeita a estabilidade não linear.

Analisando o intervalo $C < A < 13,26 * 10^{-6} kg\ km^2$, não temos solução para o determinante de Arnold, pois com essa configuração a primeira condição do teorema não é satisfeita, fato confirmado na 1ª e 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko [26] (ver Figura 8.12, 8.13, 8.15 (a) e 8.15 (b)). Verifica-se também, para $0 < A < C$ e $A > 13,26 * 10^{-6} kg\ km^2$ o determinante de Arnold apresenta resultados diferente de zero.

Combinando esse resultado de estabilidade não linear com os resultados obtidos anteriormente, nos quais o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 permanece linearmente estável considerando os valores fixos de $C = 13 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I = 0,4364 rad$ apenas para $0 < A < C$ e $A > 13,26 * 10^{-6} kg\ km^2$ (ver Figura 8.12, 8.13, 8.15 (a) e 8.15 (b)), é possível determinar configurações bem definidas de A para que o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 permaneça Liapunov estável.

Caso III: $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,4364 rad$

As Figura 8.20 e 8.21 apresenta o comportamento do determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C, com o momento principal e inércia A e a inclinação orbital I constantes.

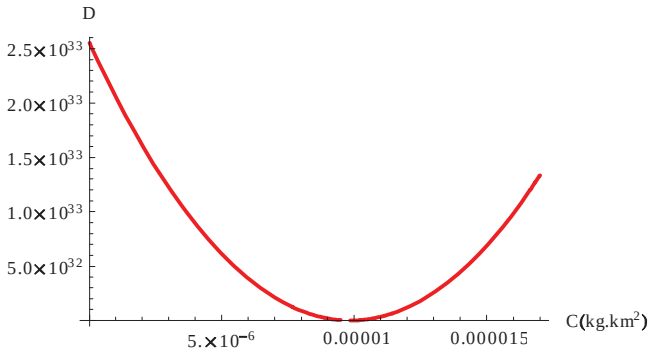


Figura 8.20: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

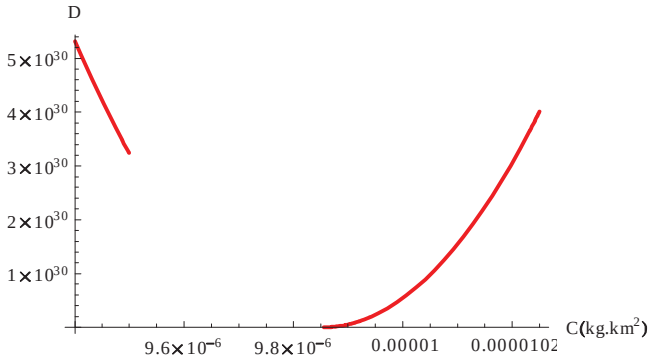


Figura 8.21: Ênfase da Fig. 8.20 onde o determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C é zero para $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

Observe que com essa configuração de A e I, existe um valor para o momento principal de inércia no eixo z ($C = A = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$) em que o determinante de Arnold é zero, ou seja, para esse valor de momento principal de inércia C a estabilidade não linear não é satisfeita.

Ainda analisando a Figura 8.21, considerando o intervalo $9,5 * 10^{-6} kg\ km^2 < C < A$, é possível observar que o determinante de Arnold não é satisfeito, pois com essa configuração os autovalores são reais ou não imaginários puros, fato confirmado na 1ª e 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko [26] (ver Figuras 8.11, 8.13, 8.16 (a) e 8.16 (b)). Já no intervalo $0 < C < 9,5 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C > A$ o determinante de Arnold apresenta resultados diferente de zero.

Combinando esse resultado de estabilidade não linear com os resultados obtidos anteriormente, nos quais o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 permanece linearmente estável considerando os valores fixos de $A = 9,855 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I = 0,4364 rad$ apenas para $0 < C < 9,5 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C > A$ (ver Figuras 8.11, 8.13, 8.16 (a) e 8.16 (b)), é possível determinar configurações bem definidas de C para que o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 permaneça Liapunov estável.

No Apêndice C encontra se uma análise similar da estabilidade para o ponto de equilíbrio PP-2 5.5.

Os Apêndices D e E apresentam sucintamente as regiões de estabilidade linear e não linear para os pontos de equilíbrio PP-1 8.3 e PP-2 5.3.

Capítulo 9

Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma análise semianalítica da estabilidade do movimento rotacional de um satélite artificial simétrico, em óbita circular, considerando a influência do torque de gradiente de gravidade. As aplicações foram realizadas para satélites de médio porte (MP) e pequeno porte (PP) utilizando o software MATHEMATICA.

As variáveis canônicas de Andoyer mostraram se adequadas para a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrios utilizando o teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko [26]. Para aplicação desse teorema foi necessário à determinação da forma normal da Hamiltoniana do problema até a 4^{a} ordem.

Inicialmente os pontos de equilíbrios foram determinados utilizando as características físicas, orbitais e de atitude de cada satélite. A seguir o algoritmo para a análise da estabilidade foi aplicado, tendo sido obtidos 2 pontos de equilíbrio estáveis para os satélites de médio porte MP, 7 pontos estáveis para o satélite de pequeno porte PP-1 e 10 para o satélite de pequeno porte PP-2.

A obtenção de dois pontos de equilíbrio do satélite MP se justifica pelo fato de que este satélite possui características similares ao satélite PEGASUS [37], o qual apresenta pouca estabilidade quanto a sua dinâmica de atitude, sendo que, segundo Crenshaw e Fitzpatrick [13] tal satélite está capotando nas condições iniciais adotadas. Para os satélites PP-1 e PP-2 foram obtidos muitos pontos de equilíbrios, porém muitos deles foram descartados por levarem a uma condição em que as variáveis de Andoyer não são definidas. Esse grande número de pontos de equilíbrios singulares já era esperado, pois os satélites PP-1 e PP-2 possuem características físicas e orbitais similares aos satélites brasileiros de coleta de dados SBCD1 e SBCD2 respectivamente, os quais são estabilizados por rotação e possuem o eixo de rotação coincidente com o eixo de maior momento principal de inércia, o que corresponde ao ângulo J_2 entre os eixos Oz e Oz_m igual a zero, fazendo com que as variáveis de Andoyer ℓ_1 e ℓ_2 sejam indefinidas.

Pode-se afirmar que um número maior de pontos de equilíbrio estáveis foi determinado em comparação com os resultados de Cabette [9] e Vilhena de Moraes et al. [36], os quais mostram a análise da estabilidade do movimento rotacional com o torque de

gradiente de gravidade, mas com órbita de pequena excentricidade. Em termos da determinação da forma normal e da análise da estabilidade houve uma otimização no algoritmo, utilizando resultados obtidos por Formiga [18] para os coeficientes da Hamiltoniana normal de 4ª ordem.

Na análise qualitativa de estabilidade em torno dos pontos de equilíbrios MP 1.2 e PP-1 1.4 foram observados os seguintes resultados.

Com relação à estabilidade linear para o ponto MP 1.2, observou se que existe uma separação entre estabilidade e instabilidade quando os momentos principais de inércia são iguais ($C = A$). Salienta se que, para esse ponto de equilíbrio, toda configuração de $C < A$ tem se estabilidade linear e para quase todas as configurações de $C > A$ tem se instabilidade linear. A configuração de ($C = A$), corresponde a uma distribuição uniforme de massa do satélite, ou seja, todos os momentos principais de inércia seriam iguais ($A = B = C$). Nessa situação, o torque de gradiente de gravidade atuante no satélite se anula e o movimento rotacional se caracteriza por um movimento livre de torques externos, com o eixo principal de inércia Oz tendo movimento de precessão em torno do eixo de maior momento angular de rotação Oz_m [38].

Com relação à estabilidade não linear do ponto de equilíbrio MP 1.2, o resultado mais curioso foi que para dois valores de inclinação orbital o ponto de equilíbrio apresentou estabilidade linear mas instabilidade não linear. Logo observa se que a estabilidade linear não garante a estabilidade não linear, ou seja, a estabilidade linear do ponto MP 1.2 obtida anteriormente para qualquer valor de inclinação de 0 a $1rad$ não garantiu a estabilidade não linear para a inclinação orbital de $I = 0,1594rad$ e $I = 0,2353rad$.

Com relação à estabilidade linear para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4, observou se um resultado semelhante ao ponto MP 1.2. Para valores de momentos principais de inércia ($C \neq A$), o ponto de equilíbrio apresentou estabilidade linear para a grande maioria dessas configurações, a exceção é feita para órbitas de baixa inclinação, que torna o ponto de equilíbrio linearmente instável. Nessa configuração, verifica se que a maioria dos termos da Hamiltoniana associada ao torque de gradiente de gravidade são eliminados, porém, com os termos restantes, a influência do torque externo gera instabilidade linear para esse ponto de equilíbrio

Com relação à estabilidade não linear do ponto de equilíbrio PP-1 1.4, verificou se que os resultados coincidiram com a região delimitada pela 1ª e 2ª condição do teorema estudado relacionado com a estabilidade linear.

Portanto, a abordagem aqui realizada para a análise de estabilidade de satélites artificiais simétrios e em orbita circular, mostra se adequado para análise de missões espaciais. Salienta que o lançamento do satélite nas de regiões de estabilidade determinadas, pode contribuir diretamente na manutenção da atitude de satélites artificiais, podendo gerar uma economia de combustível através de um menor número de manobras de atitude para manter a atitude desejada da missão espacial.

Nesse trabalho, os pontos de equilíbrios foram obtidos numericamente, com as regiões de estabilidade em torno do pontos estáveis determinadas com as variações da inclinação orbital e dos momento principais de inércia em torno do eixo x e z. Em continuação a esse trabalho, uma interessante abordagem seria a determinação analítica de pontos de equilíbrio em função de parâmetros previamente escolhidos, e posterior determinação de regiões de estabilidade. Resultados significativos desse problema poderia ser também obtidos através de analises do espaço defase da Hamiltoniana e seções de Poincaré.

Para trabalhos futuros, pode se também sugerir o estudo da estabilidade do movimento rotacional com a Hamiltoniana do problema completa, não apenas para órbitas circulares como realizada nesse estudo. Além disso, outros torques externos poderão ser incluídos nas equações de movimento rotacional, tornando o problema o mais próximo do real possível.

Outra perspectiva, seria utilizar métodos numéricos para analisar o comportamente ao redor dos pontos de equilíbrios, uma vez que no desenvolvimento desse trabalho houve uma grande dificuldade de encontrar pontos de equlíbrios analíticos devido ao grande números de termos na Hamiltoniana e nas equações de movimento.

Referências Bibliográficas

[1] ARNOLD, V. I.: **The Stability of equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case**. Soviet Mathematic, v.2, n. 247, p. 255-257, (1961)

[2] ARNOLD, V. I.: **Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations**. Berlin: Springer- Verlag, p. 334, (1983).

[3] ARNOLD, V. I.: **Equações diferenciais ordinárias**. Editora Mir Moscovo, p. 327, Moscou, (1985).

[4] ARNOLD, V. I.: **Métodos matemáticos da mecânica clássica**. Editora Mir Moscovo, p. 479, (1987).

[5] BHATNAGAR, K. B.; GUPTA, U.: **The existence and stability of the libration points of an axisymmetric body moving around axisymmetric body**. Astronomy and Astrophysics, v. 91, p. 194-201, (1980).

[6] BHATNAGAR, K. B.; GUPTA, U.: **The existence and stability of the equilibrium pointsof a triaxial rigid body moving around another body**. Celestial Mechanics, v. 39, p. 67-83, (1986).

[7] BIRKHOFF, G. **Collected mathematical papers**. 2.ed. New York: American math. society, (1950).

[8] BROUWER, O.; CLEMENCE, G. M.: **Methods of celestial mechanics**. Academic Press, New York, (1961).

[9] CABETTE, R. E. S.: **Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais**. Tese de doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, (2006).

[10] CORDEIRO, R. R.: **Estabilidade linear de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas aplicadas a alguns problemas da dinâmica orbital**. Tese de doutorado, Observatório Nacional, Rio de Janeiro, (1994).

[11] COSTA FILHO, O. O.: **Uma forma normal para sistemas dinâmicos hamiltonianos**. Anais do I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicação, v. 1, p. 211-234, (2002).

[12] CHUDNENKO, A. N.: **On the stability of uniform rotations of a rigid body around the principal axis**. PMM, U.S.S.R., v. 44, n. 245-253, p. 174-179, (1981).

[13] CRENSHAW, J. U.; FITZPATRICK, P. M.: **Gravity effects on the rotational motion of a uniaxial artificial satellite**. AIAAJ. 6, 2140, (1968).

[14] DEPRIT, A.: **Free rotation of a rigid body studied in the phases plane**. Am. J. Phys., v. 55, p. 424 – 428, (1967).

[15] ELIPE, A., LANCHARES, V., MORATALLA, L.,T. RIAGUAS. A.: **On the Lyapunov stability of stationary points around central body**. Nonlinear Science, v.11, p.221-222, (2001).

[16] ELIPE, A.; MORATALLA, L., T. **On the Lyapunov stability of stationary points around central body**, Journal of Guidance, Control and dynamics, v.29, n.6, p.1376-1383, (2006).

[17] FERRAZ-MELLO, S.: **Canonical perturbation theories-degenerate systems and resonance**. Springer, New York, (2007).

[18] FORMIGA, J. K.: **Formas normais no estudo da estabilidade para L4 no problema fotogravitacional**. Tese de doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, (2009).

[19] GIORGILLI, A.: **New insights on the stability from recent results in classical perturbation theory**. LesMethodes Modernes de la Mécanique Celeste, Besnet, D. Froeschlet eds., Edition Frontières, Goutelas, (1989).

[20] GOLDSTEIN, H.: **Classical Mechanics**. Addison-Wesley, Reading, MA, 2ª edição, (1980).

[21] HEGGIE, D. C.: **Bifurcation at complex instability**. Celestial Mechanics, v. 35, n. 4, p. 357-382, (1985).

[22] HORI, G.: **Theory of general perturbations with unspecified canonical variables**. Publ. Astron. Soc. Jap. 18, 287 – 299, (1966).

[23] HORI, G.: **Finite two body problems**. Reprinted from the Extra Collection of Papers Contributed to the IAU Symposium n. 48, (1971).

[24] KINOSHITA, H.: **Station motions of an axisymmetric body around a spherical body and their stabilities**. Publ. Astron. Soc. Japan. V. 22, p. 383 – 403, 1970.

[25] KINOSHITA, H.: **First order perturbation of the two finite body problem**. Publ. Astron. Soc. Japan. 24, 423 – 439, (1972).

[26] KOVALEV, A. M.; SAVCHENKO, A. Ia.: **Stability of uniform rotations of a rigid body about a principal axis**. PMM, v. 39, n. 4, 650 – 660, (1975).

[27] KUGA, H. K.; ORLANDO, V.; LOPES, R. V. F.: **Flight dynamics operations during leap for the INPE's second environmental data collecting satellite SCD 2**. RBCM J. Brazilian Soc. Mech. Sci., 21, 339 – 344, (1999).

[28] KUZMINA, L. K.: **Methods of stability theory in general idealization problem of mechanics**. Applied Mechanics in the Americas, v. 8, p. 1247-1250, (1999).

[29] LEMOS, N. A.: **Mecânica analítica**, Livraria da Física, 1ª ed., São Paulo, (2004).

[30] MACHUY, A. L. F. **Cálculo efetivo da forma normal parcial para o problema de Hill**. 2001. 71p. Dissertação de mestrado-instituto de matemática, UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, (2001).

[31] POINCARÉ, H.: **Sur un theorem de geometrie**. Palermo: Rend. Del Cir. Mat., v. 33, p. 375-407, (1912).

[32] SIMÓ, C.: **Estabilitat de sistemes hamiltonians**. Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, v. 48, n. 7, p.1-38, (1989).

[33] SHUSTER, M. D.: **A survey of attitude representation**. Journal of Astron. Sciences, v.41, 4, (1993).

[34] STUCHI , T. J.: **KAM tori in the center manifold of the 3-D Hill problem**. Advanced in Space Dynamics, O.C. Winter, A. F. B. Prado editors, Vol. 2, pp. 112-127, INPE, São José dos Campos, SP, Brasil, 2002.

[35] TEOFILATTO, P.; GRAZIANI, F.: **On libration motion of spacecraft**. Chaos, Solutions and Fractals, Inglaterra, v. 7, n. 10, p. 1721-1744, (1996).

[36] VILHENA DE MORAES, R.; CABETTE, R. E. S.; ZANARDI, M. C.; STUCHI, T. J.; FORMIGA, J. K.: **Attitude stability of artificial satellites subject to gravity gradient torque**. Celes. Mech., 104, 337 – 353, (2009).

[37] ZANARDI, M. C.: **Study of the terms of coupling between rotational and translational motion**. Celes. Mech. 39(2), 147 – 164, (1986).

[38] ZANARDI, M. C.: **Movimento rotacional e translacional acoplado de satélites artificiais**. Dissertação de mestrado, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, (1983).

Apêndice A

Hamiltoniana completa e equações de movimento

Nesse apêndice são apresentadas a Hamiltoniana do movimento rotacional completa para excentricidade nula e as respectivas equações de movimento, resultados obtidos do software MATHEMATICA.

$$F = -\frac{\mu^2 * M^3}{2 * L^2} + \frac{1}{2} * \left(\left(\frac{1}{CC} - \frac{1}{2 * A} - \frac{1}{2 * B}\right) * L1^2 + \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) * L2^2\right) +$$

$$\left(\frac{1}{4}\right) \left(\left(\frac{1}{B}\right) - \left(\frac{1}{A}\right)\right) \left(L2^2 - L1^2\right) \cos(2\, l1) + \frac{\mu^4 * M^7}{L^6} * \left(\frac{2 * CC - A - B}{2 * M} *\right.$$

$$\left(\left(\left(\frac{3}{2} * \left(\frac{L1}{L2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) * \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} * \left(1 + \left(\frac{H}{G}\right)^2 + \left(\frac{L3}{L2}\right)^2 - 3\left(\frac{H}{G}\right)^2 * \left(\frac{L3}{L2}\right)^2\right) - \frac{3}{8} * \text{Sin}[2\, I] *\right.\right.$$

$$\left.\left(2 * \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} * \frac{L3}{L2}\right) * \text{Cos}[h - l3] - \frac{3}{8} * (\text{Sin}[I])^2 * \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\, h - 2\, l3]\right) -$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 - 3 * \left(\frac{H}{G}\right)^2\right) * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} * \frac{L3}{L2}\right) * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) * \text{Cos}[l2] +$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 - 3 * \left(\frac{H}{G}\right)^2\right) * \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\, l2] +$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) * \left(1 + 2\,\frac{L3}{L2}\right) * \text{Sin}[2\, I] * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) * \text{Cos}[h - l3 - l2] +$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) * \left(1 - 2\,\frac{L3}{L2}\right) * \text{Sin}[2\, I] * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) * \text{Cos}[h - l3 + l2] +$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) * (\text{Sin}[I])^2 * \left(\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\right) * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) * \text{Cos}[2\, h - 2\, l3 + l2] -$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) * (\text{Sin}[I])^2 * \left(\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\right) * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) * \text{Cos}[2\, h - 2\, l3 - l2] -$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) * \text{Sin}[2\, I] * \left(\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\right) * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[h - l3 + 2\, l2] +$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) * \text{Sin}[2\, I] * \left(\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\right) * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[h - l3 - 2\, l2] - \qquad \text{A.1}$$

$$\frac{3}{32} * \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 * (\text{Sin}[\mathcal{I}])^2 * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\,h - 2\,l3 + 2\,l2] -$$

$$\frac{3}{32} * \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 * (\text{Sin}[\mathcal{I}])^2 * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\,h - 2\,l3 - 2\,l2]\Bigg) +$$

$$\left(\frac{3}{2} * \left(\frac{L1}{L2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) * \left(\frac{3}{8} * \left(1 - 3 * \left(\frac{L3}{L2}\right)^2\right) * (\text{Sin}[\mathcal{I}])^2 * \text{Cos}[2\,l + 2\,g] +\right.$$

$$\frac{3}{8} * \left(1 + \frac{H}{G}\right) * \text{Sin}[\mathcal{I}] * \left(\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g + (h - l3)] -$$

$$\frac{3}{8} * \left(1 - \frac{H}{G}\right) * \text{Sin}[\mathcal{I}] * \left(\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g - (h - l3)] - \frac{3}{16} * \left(1 + \frac{H}{G}\right)^2 * \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) *$$

$$\left.\text{Cos}[2\,l + 2\,g + (2\,h - 2\,l3)] - \frac{3}{16} * \left(1 - \frac{H}{G}\right)^2 * \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g - (2\,h - 2\,l3)]\right) +$$

$$\frac{9}{32} * (\text{Sin}[\mathcal{I}])^2 * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} * \frac{L3}{L2}\right) * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g + l2] +$$

$$\frac{9}{32} * (\text{Sin}[\mathcal{I}])^2 * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} * \frac{L3}{L2}\right) * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g - l2] -$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 + \frac{H}{G}\right) * \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) * \left(1 + 2\,\frac{L3}{L2}\right) * \text{Sin}[\mathcal{I}] * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) *$$

$$\text{Cos}[2\,l + 2\,g + (h - l3) + l2] - \frac{3}{16} * \left(1 + \frac{H}{G}\right) * \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) * \left(1 - 2\,\frac{L3}{L2}\right) *$$

$$\text{Sin}[\mathcal{I}] * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g + (h - l3) - l2] +$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 - \frac{H}{G}\right) * \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) * \left(1 + 2\,\frac{L3}{L2}\right) * \text{Sin}[\mathcal{I}] * \left(2 * \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} * \frac{L1}{L2}\right) *$$

$$\cos[2l+2g-(h-l3)-l2]+\frac{3}{16}*\left(1-\frac{H}{G}\right)*\left(1+\frac{L3}{L2}\right)*\left(1-2\,\frac{L3}{L2}\right)*\sin[I]*$$

$$\left(2*\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}*\frac{L1}{L2}\right)*\cos[2l+2g-(h-l3)+l2]+\frac{3}{32}*\left(1+\frac{H}{G}\right)^2*\left(1-\frac{L3}{L2}\right)*$$

$$\left(\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\right)*\left(2*\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}*\frac{L1}{L2}\right)*\cos[2l+2g+(2h-2l3)+l2]-$$

$$\frac{3}{32}*\left(1+\frac{H}{G}\right)^2*\left(1+\frac{L3}{L2}\right)*\left(\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\right)*\left(2*\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}*\frac{L1}{L2}\right)*$$

$$\cos[2l+2g+(2h-2l3)-l2]+\frac{3}{32}*\left(1-\frac{H}{G}\right)^2*\left(1-\frac{L3}{L2}\right)*\left(\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\right)*$$

$$\left(2*\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}*\frac{L1}{L2}\right)*\cos[2l+2g-(2h-2l3)-l2]-\frac{3}{32}*\left(1-\frac{H}{G}\right)^2*$$

$$\left(1+\frac{L3}{L2}\right)*\left(\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\right)*\left(2*\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}*\frac{L1}{L2}\right)*\cos[2l+2g-(2h-2l3)+l2]-$$

$$\frac{9}{32}*(\sin[I])^2*\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)*\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)*\cos[2l+2g+2l2]-$$

$$\frac{9}{32}*(\sin[I])^2*\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)*\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)*\cos[2l+2g-2l2]+$$

$$\frac{3}{16}*\left(1+\frac{H}{G}\right)*\left(1-\frac{L3}{L2}\right)*\sin[I]*\left(\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\right)*\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)*\cos[2l+2g+(h-l3)+2l2]-$$

$$\frac{3}{16}*\left(1+\frac{H}{G}\right)*\left(1+\frac{L3}{L2}\right)*\sin[I]*\left(\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\right)*\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)*\cos[2l+2g+(h-l3)-2l2]-$$

$$\frac{3}{16}*\left(1-\frac{H}{G}\right)*\left(1-\frac{L3}{L2}\right)*\sin[I]*\left(\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\right)*\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)*\cos[2l+2g-(h-l3)-2l2]+$$

$$\frac{3}{16} * \left(1 - \frac{H}{G}\right) * \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) * \text{Sin}[I] * \left(\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\right) * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g - (h - l3) + 2\,l2] -$$

$$\frac{3}{64} * \left(1 - \frac{H}{G}\right)^2 * \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g + (2\,h - 2\,l3) + 2\,l2] -$$

$$\frac{3}{64} * \left(1 - \frac{H}{G}\right)^2 * \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g + (2\,h - 2\,l3) - 2\,l2] -$$

$$\frac{3}{64} * \left(1 + \frac{H}{G}\right)^2 * \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g - (2\,h - 2\,l3) - 2\,l2] -$$

$$\frac{3}{64} * \left(1 + \frac{H}{G}\right)^2 * \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 * \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) * \text{Cos}[2\,l + 2\,g - (2\,h - 2\,l3) + 2\,l2]\Bigg)\Bigg);$$

D[F, l1] =

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) \cos\left(-L1^2 + L2^2\right) \qquad \text{A.2}$$

D[F, l2] =

$$\frac{1}{2\,L^6}\,(-A - B + 2\,CC)\,M^6\,\mu^4$$

$$\Bigg(\frac{3\left(1 - \frac{3\,H^2}{G^2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}\; L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\; \text{Sin}[l2]}{4\,L2^2} - \frac{3}{8}\left(1 - \frac{3\,H^2}{G^2}\right)\left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)\text{Sin}[2\,l2] -$$

$$\frac{3}{32}\left(1 - \frac{H}{G}\right)^2\left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \text{Sin}[2\,g + 2\,h + 2\,l - 2\,l2 - 2\,l3] -$$

$$\frac{3\left(1 + \frac{H}{G}\right)^2 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1 + \frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Sin}[2\,g + 2\,h + 2\,l - l2 - 2\,l3]}{16\,L2} -$$

$$\frac{3\left(1 + \frac{H}{G}\right)^2 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1 - \frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Sin}[2\,g + 2\,h + 2\,l + l2 - 2\,l3]}{16\,L2} +$$

$$\frac{3}{32}\left(1 - \frac{H}{G}\right)^2\left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \text{Sin}[2\,g + 2\,h + 2\,l + 2\,l2 - 2\,l3] - \qquad \text{A.3}$$

$$\frac{3}{32}\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Sin}[2\,g-2\,h+2\,l-2\,l2+2\,l3]+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Sin}[2\,g-2\,h+2\,l-l2+2\,l3]}{16\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Sin}[2\,g-2\,h+2\,l+l2+2\,l3]}{16\,L2}+$$

$$\frac{3}{32}\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Sin}[2\,g-2\,h+2\,l+2\,l2+2\,l3]-$$

$$\frac{3}{8}\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Sin}[2\,g+h+2\,l-2\,l2-l3]\,\text{Sin}[I]-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Sin}[2\,g+h+2\,l-l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Sin}[2\,g+h+2\,l+l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3}{8}\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Sin}[2\,g+h+2\,l+2\,l2-l3]\,\text{Sin}[I]-$$

$$\frac{3}{8}\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Sin}[2\,g-h+2\,l-2\,l2+l3]\,\text{Sin}[I]+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Sin}[2\,g-h+2\,l-l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Sin}[2\,g-h+2\,l+l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3}{8}\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Sin}[2\,g-h+2\,l+2\,l2+l3]\,\text{Sin}[I]-$$

$$\frac{9}{16}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\text{Sin}[2\,g+2\,l-2\,l2]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+$$

$$\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Sin}[2\,g+2\,l-l2]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Sin}[2\,g+2\,l+l2]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2}{8\,L2^2}+\frac{9}{16}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)$$

$$\text{Sin}[2\,g+2\,l+2\,l2]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2-\frac{3}{16}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Sin}[2\,h-2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Sin}[2\,h-l2-2\,l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Sin}[2\,h+l2-2\,l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2}{8\,L2}+$$

$$\frac{3}{16}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Sin}[2\,h+2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+$$

$$\frac{3}{8}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Sin}[h-2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,\mathcal{I}]+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Sin}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Sin}[h+l2-l3]\,\text{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{8\,L2}+$$

$$\left.\frac{3}{8}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Sin}[h+2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,\mathcal{I}]\right)$$

D[F, l3] =

$$\frac{1}{2\,L^6}\,(-A-B+2\,CC)\,M^6\,\mu^4\left(-\frac{3}{32}\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\sin[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l2-2\,l3]-\right.$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\sin[2\,g+2\,h+2\,l-l2-2\,l3]}{8\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\sin[2\,g+2\,h+2\,l+l2-2\,l3]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3}{32}\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\sin[2\,g+2\,h+2\,l+2\,l2-2\,l3]+$$

$$\frac{3}{32}\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\sin[2\,g-2\,h+2\,l-2\,l2+2\,l3]-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\sin[2\,g-2\,h+2\,l-l2+2\,l3]}{8\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\sin[2\,g-2\,h+2\,l+l2+2\,l3]}{8\,L2}+$$

$$\frac{3}{32}\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\sin[2\,g-2\,h+2\,l+2\,l2+2\,l3]-$$

$$\frac{3}{16}\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\sin[2\,g+h+2\,l-2\,l2-l3]\sin[\mathcal{I}]-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sin[2\,g+h+2\,l-l2-l3]\sin[\mathcal{I}]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\sin[2\,g+h+2\,l+l2-l3]\sin[\mathcal{I}]}{8\,L2}+$$

$$\frac{3}{16}\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\sin[2\,g+h+2\,l+2\,l2-l3]\sin[\mathcal{I}]+ \qquad \text{A.4}$$

$$\frac{3}{16}\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Sin}[2\,g-h+2\,l-2\,l2+l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Sin}[2\,g-h+2\,l-l2+l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Sin}[2\,g-h+2\,l+l2+l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3}{16}\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Sin}[2\,g-h+2\,l+2\,l2+l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]-$$

$$\frac{3}{16}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Sin}[2\,h-2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Sin}[2\,h-l2-2\,l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2}{4\,L2}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Sin}[2\,h+l2-2\,l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2}{4\,L2}-$$

$$\frac{3}{16}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Sin}[2\,h+2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\,L1^2}{2\,L2^2}\right)\left(-\frac{3}{8}\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\text{Sin}[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l3]+\frac{3}{8}\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\right.$$

$$\text{Sin}[2\,g-2\,h+2\,l+2\,l3]+\frac{3}{8}\left(1+\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Sin}[2\,g+h+2\,l-l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]+$$

$$\left.\frac{3}{8}\left(1-\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Sin}[2\,g-h+2\,l+l3]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]\right)+\frac{3}{16}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}$$

$$\text{Sin}[h-2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,\mathcal{I}]+\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Sin}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{8\,L2}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Sin}[h+l2-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3}{16}\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Sin}[h+2\,l2-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]+$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\,L1^2}{2\,L2^2}\right)\left(-\frac{3}{4}\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\mathrm{Sin}[2\,h-2\,l3]\,\mathrm{Sin}[\mathcal{I}]^2-\frac{3\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Sin}[h-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{4\,L2}\right)$$

D[F, L1] =

$$\left(-\frac{1}{2\,A}-\frac{1}{2\,B}+\frac{1}{CC}\right)L1-\left(-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\cos l1\,L1+\frac{1}{2\,L^6}\,(-A-B+2\,CC)\,M^6\,\mu^4$$

$$\left(\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right)L1^2\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[l2]}{4\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^4}-\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right)\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[l2]}{4\,L2^2}-\right.$$

$$\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right)L1\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\mathrm{Cos}[2\,l2]}{8\,L2^2}+\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2L1\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l2-2\,l3]}{32\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2L1^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-l2-2\,l3]}{16\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-l2-2\,l3]}{16\,L2}-$$

$$\left.\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l+l2-2\,l3]}{16\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}+\right.$$

A.5

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g+2h+2l+l2-2l3]}{16\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Cos}[2g+2h+2l+2l2-2l3]}{32\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Cos}[2g-2h+2l-2l2+2l3]}{32\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-2h+2l-l2+2l3]}{16\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-2h+2l-l2+2l3]}{16\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-2h+2l+l2+2l3]}{16\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-2h+2l+l2+2l3]}{16\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Cos}[2g-2h+2l+2l2+2l3]}{32\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g+h+2l-2l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1^2\left(1-\frac{2L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g+h+2l-l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g+h+2\,l-l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g+h+2\,l+l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g+h+2\,l+l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,g+h+2\,l+2\,l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,g-h+2\,l-2\,l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l-l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l-l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1^2\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+2\,l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{9\,L1\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\mathrm{Cos}[2\,g+2\,l-2\,l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{16\,L2^2}-\frac{9\,L1^2\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,g+2\,l-l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^4}+$$

$$\frac{9\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,g+2\,l-l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{9\,L1^2\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,g+2\,l+l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^4}+$$

$$\frac{9\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,g+2\,l+l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{9\,L1\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\mathrm{Cos}[2\,g+2\,l+2\,l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{16\,L2^2}+\frac{3\,L1\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\mathrm{Cos}[2\,h-2\,l2-2\,l3]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{16\,L2^2}+$$

$$\frac{3\,L1^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,h-l2-2\,l3]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}-$$

$$\frac{3\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,h-l2-2\,l3]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\,L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,h+l2-2\,l3]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^3}+$$

$$\frac{3\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\mathrm{Cos}[2\,h+l2-2\,l3]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\,L2}+$$

$$\frac{3\,L1\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\,\text{Cos}[2\,h+2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2^2}+$$

$$\frac{1}{L2^2}\,3\,L1\left(-\frac{3}{16}\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\text{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l3]-\frac{3}{16}\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\right.$$

$$\text{Cos}[2\,g-2\,h+2\,l+2\,l3]+\frac{3}{8}\left(1+\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,g+h+2\,l-l3]\,\text{Sin}[I]-$$

$$\left.\frac{3}{8}\left(1-\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+l3]\,\text{Sin}[I]+\frac{3}{8}\left(1-\frac{3\,L3^2}{L2^2}\right)\text{Cos}[2\,g+2\,l]\,\text{Sin}[I]^2\right)-$$

$$\frac{3\,L1\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[h-2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\,L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L2^3}+$$

$$\frac{3\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2}-$$

$$\frac{3\,L1^2\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h+l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L2^3}+$$

$$\frac{3\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h+l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2}+$$

$$\frac{3\,L1\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[h+2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2^2}+\frac{1}{L2^2}3\,L1\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\left(1+\frac{H^2}{G^2}+\frac{L3^2}{L2^2}-\frac{3\,H^2\,L3^2}{G^2\,L2^2}\right)-\right.$$

$$\left.\left.\frac{3}{8}\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\text{Cos}[2\,h-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2-\frac{3\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[h-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{4\,L2}\right)\right)$$

D[F, L2] =

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right) L2+\left(-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\cos l1\, L2+\frac{1}{2\,L^6}$$

$$(-A-B+2\,CC)\,M^6\,\mu^4\left(-\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right) L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3^3\cos[l2]}{4\,L2^5\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right) L1^3\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\cos[l2]}{4\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L2^5}+\right.$$

$$\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right) L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\cos[l2]}{2\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) L3^2\cos[2\,l2]}{8\,L2^3}+\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right) L1^2\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\cos[2\,l2]}{8\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\cos[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l2-2\,l3]}{32\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\cos[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l2-2\,l3]}{32\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\cos[2\,g+2\,h+2\,l-l2-2\,l3]}{16\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\cos[2\,g+2\,h+2\,l-l2-2\,l3]}{16\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1^3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\cos[2\,g+2\,h+2\,l-l2-2\,l3]}{16\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L2^4}+$$

$$\left.\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\cos[2\,g+2\,h+2\,l-l2-2\,l3]}{16\,L2^2}+\right)$$

A.6

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\cos[2g+2h+2l+l2-2l3]}{16\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\cos[2g+2h+2l+l2-2l3]}{16\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1^3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\cos[2g+2h+2l+l2-2l3]}{16\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L2^4}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\cos[2g+2h+2l+l2-2l3]}{16\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\cos[2g+2h+2l+2l2-2l3]}{32\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\cos[2g+2h+2l+2l2-2l3]}{32\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\cos[2g-2h+2l-2l2+2l3]}{32\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\cos[2g-2h+2l-2l2+2l3]}{32\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\cos[2g-2h+2l-l2+2l3]}{16\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\cos[2g-2h+2l-l2+2l3]}{16\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1^3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-2h+2l-l2+2l3]}{16\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^4}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-2h+2l-l2+2l3]}{16\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g-2h+2l+l2+2l3]}{16\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-2h+2l+l2+2l3]}{16\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1^3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-2h+2l+l2+2l3]}{16\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^4}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-2h+2l+l2+2l3]}{16\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g-2h+2l+2l2+2l3]}{32\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Cos}[2g-2h+2l+2l2+2l3]}{32\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g+h+2l-2l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g+h+2l-2l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L1^2 \left(1+\frac{L3}{L2}\right) \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Cos}[2\,g+h+2\,l-2\,l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{8\,L2^3} +$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right) \text{Cos}[2\,g+h+2\,l-l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{8\,L2^3} -$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right) \text{Cos}[2\,g+h+2\,l-l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{4\,L2^3} -$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L1^3 \left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right) \left(1+\frac{L3}{L2}\right) \text{Cos}[2\,g+h+2\,l-l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L2^4} +$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right) \left(1+\frac{L3}{L2}\right) \text{Cos}[2\,g+h+2\,l-l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{8\,L2^2} +$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right) \text{Cos}[2\,g+h+2\,l+l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{4\,L2^3} -$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right) \text{Cos}[2\,g+h+2\,l+l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{8\,L2^3} -$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L1^3 \left(1-\frac{L3}{L2}\right) \left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right) \text{Cos}[2\,g+h+2\,l+l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L2^4} +$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{L3}{L2}\right) \left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right) \text{Cos}[2\,g+h+2\,l+l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{8\,L2^2} +$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) \left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) L3^2 \left(1-\frac{L3}{L2}\right) \text{Cos}[2\,g+h+2\,l+2\,l2-l3]\ \text{Sin}[I]}{16\,L2^3 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}} +$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g+h+2l+2l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g+h+2l+2l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g-h+2l-2l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-h+2l-2l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2g-h+2l-2l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^3}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g-h+2l-l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{4\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\left(1+\frac{2L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g-h+2l-l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1^3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g-h+2l-l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^4}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g-h+2l-l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\left(1-\frac{2L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g-h+2l+l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right) L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2g-h+2l+l2+l3]\,\mathrm{Sin}[I]}{4\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right) L1^3\left(1-\frac{2L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2g-h+2l+l2+l3]\,\mathrm{Sin}[I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L2^4}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right) L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{2L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2g-h+2l+l2+l3]\,\mathrm{Sin}[I]}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) L3^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2g-h+2l+2l2+l3]\,\mathrm{Sin}[I]}{16\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \mathrm{Cos}[2g-h+2l+2l2+l3]\,\mathrm{Sin}[I]}{16\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right) L1^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \mathrm{Cos}[2g-h+2l+2l2+l3]\,\mathrm{Sin}[I]}{8\,L2^3}-$$

$$\frac{9\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) L3^2\,\mathrm{Cos}[2g+2l-2l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{16\,L2^3}-\frac{9\,L1^2\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\mathrm{Cos}[2g+2l-2l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{16\,L2^3}+$$

$$\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3^3\,\mathrm{Cos}[2g+2l-l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\,L2^5\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+\frac{9\,L1^3\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \mathrm{Cos}[2g+2l-l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L2^5}-$$

$$\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \mathrm{Cos}[2g+2l-l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{4\,L2^3}+$$

$$\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L3^3\,\mathrm{Cos}[2g+2l+l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\,L2^5\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+\frac{9\,L1^3\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \mathrm{Cos}[2g+2l+l2]\,\mathrm{Sin}[I]^2}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ L2^5}-$$

$$\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,g+2\,l+l2]\,\text{Sin}[I]^2}{4\,L2^3}-$$

$$\frac{9\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3^2\,\text{Cos}[2\,g+2\,l+2\,l2]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2^3}-\frac{9\,L1^2\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\text{Cos}[2\,g+2\,l+2\,l2]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2^3}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,h-2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2^2}-$$

$$\frac{3\,L1^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Cos}[2\,h-2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2^3}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,h-l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,h-l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^3}-$$

$$\frac{3\,L1^3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,h-l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L2^4}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,h-l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,h+l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,h+l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^3}+$$

$$\frac{3\,L1^3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,h+l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^4}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,h+l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,h+2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2^2}-$$

$$\frac{3\,L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)^2\text{Cos}[2\,h+2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2^3}+$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\,L1^2}{2\,L2^2}\right)\left(-\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2L3^2\,\text{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l3]}{8\,L2^3}-\right.$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2L3^2\,\text{Cos}[2\,g-2\,h+2\,l+2\,l3]}{8\,L2^3}+\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L3^2\,\text{Cos}[2\,g+h+2\,l-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\left.\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L3^2\,\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+\frac{9\,L3^2\,\text{Cos}[2\,g+2\,l]\,\text{Sin}[I]^2}{4\,L2^3}\right)-$$

$$\frac{1}{L2^3}3\,L1^2\left(-\frac{3}{16}\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\text{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l3]-\frac{3}{16}\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\right.$$

$$\text{Cos}[2\,g-2\,h+2\,l+2\,l3]+\frac{3}{8}\left(1+\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,g+h+2\,l-l3]\,\text{Sin}[I]-$$

$$\left.\frac{3}{8}\left(1-\frac{H}{G}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+l3]\,\text{Sin}[I]+\frac{3}{8}\left(1-\frac{3\,L3^2}{L2^2}\right)\text{Cos}[2\,g+2\,l]\,\text{Sin}[I]^2\right)+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{16\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[h-2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{16\,L2^2}+$$

$$\frac{3\,L1^2\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[h-2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2^3}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{4\,L2^3}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2^3}+$$

$$\frac{3\,L1^3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^4}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[h+l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2^3}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h+l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{4\,L2^3}+$$

$$\frac{3\,L1^3\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h+l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L2^4}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[h+l2-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[h+2\,l2-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{16\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\mathrm{Cos}[h+2\,l2-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{16\,L2^2}-$$

$$\frac{3\,L1^2\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\mathrm{Cos}[h+2\,l2-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{8\,L2^3}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\,L1^2}{2\,L2^2}\right)$$

$$\left(\frac{3}{8}\left(-\frac{2\,L3^2}{L2^3}+\frac{6\,H^2\,L3^2}{G^2\,L2^3}\right)-\frac{3\,L3^2\,\mathrm{Cos}[2\,h-2\,l3]\,\mathrm{Sin}[\mathcal{I}]^2}{4\,L2^3}-\frac{3\,L3^3\,\mathrm{Cos}[h-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{4\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+\right.$$

$$\left.\frac{3\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\mathrm{Cos}[h-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{4\,L2^2}\right)-\frac{1}{L2^3}3\,L1^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\left(1+\frac{H^2}{G^2}+\frac{L3^2}{L2^2}-\frac{3\,H^2\,L3^2}{G^2\,L2^2}\right)-\right.$$

$$\left.\left.\frac{3}{8}\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)\mathrm{Cos}[2\,h-2\,l3]\,\mathrm{Sin}[\mathcal{I}]^2-\frac{3\,L3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\mathrm{Cos}[h-l3]\,\mathrm{Sin}[2\,\mathcal{I}]}{4\,L2}\right)\right)$$

D[F, L3] =

$$\frac{1}{2\,L^6}\;(-A-B+2\,CC)\;M^6\,\mu^4$$

$$\left(\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3^2\,\mathrm{Cos}[l2]}{4\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-\frac{3\left(1-\frac{3\,H^2}{G^2}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\mathrm{Cos}[l2]}{4\,L2^2}-\right.$$

A.7

$$\frac{3\left(1-\frac{3H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\,\mathrm{Cos}[2\,l2]}{8\,L2^2}-\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l2-2\,l3]}{32\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-l2-2\,l3]}{16\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-l2-2\,l3]}{16\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l+l2-2\,l3]}{16\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l+l2-2\,l3]}{16\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l+2\,l2-2\,l3]}{32\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2\,g-2\,h+2\,l-2\,l2+2\,l3]}{32\,L2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2\,g-2\,h+2\,l-l2+2\,l3]}{16\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\mathrm{Cos}[2\,g-2\,h+2\,l-l2+2\,l3]}{16\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\mathrm{Cos}[2\,g-2\,h+2\,l+l2+2\,l3]}{16\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Cos}[2g-2h+2l+l2+2l3]}{16\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g-2h+2l+2l2+2l3]}{32\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g+h+2l-2l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2^2\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Cos}[2g+h+2l-2l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{2L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g+h+2l-l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g+h+2l-l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{4\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g+h+2l+l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{4\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\ \left(1+\frac{2L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g+h+2l+l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2g+h+2l+2l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2^2\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\ \text{Cos}[2g+h+2l+2l2-l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l-2\,l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2^2\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,g-h+2\,l-2\,l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l-l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{4\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l-l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{4\,L2^2}-$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+2\,l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2^2\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+2\,l2+l3]\,\text{Sin}[I]}{16\,L2}+$$

$$\frac{9\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\,\text{Cos}[2\,g+2\,l-2\,l2]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2^2}-\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,L3^2\,\text{Cos}[2\,g+2\,l-l2]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[2\,g+2\,l-l2]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3^2\,\text{Cos}[2\,g+2\,l+l2]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^4\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{9\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,g+2\,l+l2]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{9\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)L3\,\text{Cos}[2\,g+2\,l+2\,l2]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2^2}-\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,h-2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,h-l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,h-l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,h+l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\;\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\;\text{Cos}[2\,h+l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[2\,h+2\,l2-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{16\,L2}+$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\,L1^2}{2\,L2^2}\right)\left(\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right)^2 L3\,\text{Cos}[2\,g+2\,h+2\,l-2\,l3]}{8\,L2^2}+\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right)^2 L3\,\text{Cos}[2\,g-2\,h+2\,l+2\,l3]}{8\,L2^2}-\right.$$

$$\frac{3\left(1+\frac{H}{G}\right) L3\,\text{Cos}[2\,g+h+2\,l-l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+\frac{3\left(1-\frac{H}{G}\right) L3\,\text{Cos}[2\,g-h+2\,l+l3]\,\text{Sin}[I]}{8\,L2^2\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-$$

$$\left(\frac{9\,L3\,\text{Cos}[2\,g+2\,l]\,\text{Sin}[I]^2}{4\,L2^2}-\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) L3\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{16\,L2^2\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+\right.$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[h-2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{16\,L2}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{4\,L2^2}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1+\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[h-l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2^2}+$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1-\frac{2\,L3}{L2}\right)\text{Cos}[h+l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{8\,L2^2}-$$

$$\frac{3\,L1\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}\,\left(1+\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h+l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{4\,L2^2}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) L3\left(1-\frac{L3}{L2}\right)\text{Cos}[h+2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{16\,L2^2\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}+$$

$$\frac{3\left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right)\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[h+2\,l2-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{16\,L2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\,L1^2}{2\,L2^2}\right)\left(\frac{3}{8}\left(\frac{2\,L3}{L2^2}-\frac{6\,H^2\,L3}{G^2\,L2^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.\frac{3\,L3\,\text{Cos}[2\,h-2\,l3]\,\text{Sin}[I]^2}{4\,L2^2}+\frac{3\,L3^2\,\text{Cos}[h-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{4\,L2^3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}}-\frac{3\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}\,\text{Cos}[h-l3]\,\text{Sin}[2\,I]}{4\,L2}\right)\right)$$

Apêndice B

Funções $a(A, C, I)$ e $b(A, C, I)$ para o satélite MP

Nesse apêndice são apresentadas as funções $a(A, C, I)$ e $b(A, C, I)$, resultados também obtidos do software MATHEMATICA.

$$
\begin{aligned}
a[A, CC, I] = \;& -1.54258\times10^{-6} + 2.06795\times10^{-25}\,A - 0.0000303794\,A^2 - 2.06795\times10^{-24}\,A^3 + 2.3169\times10^{-10}\,A^4 - \\
& 4.1359\times10^{-25}\,CC + \frac{1.54258\times10^{-6}\,CC}{A} + 0.0000607589\,A\,CC + 1.98523\times10^{-23}\,A^2\,CC - \\
& 9.26759\times10^{-10}\,A^3\,CC - 0.0000303794\,CC^2 + \frac{2.06795\times10^{-25}\,CC^2}{A} - 1.98523\times10^{-23}\,A\,CC^2 + \\
& 1.39014\times10^{-9}\,A^2\,CC^2 + 2.06795\times10^{-24}\,CC^3 - \frac{1.13772\times10^{-11}\,CC^3}{A} - 9.26759\times10^{-10}\,A\,CC^3 + \\
& 2.3169\times10^{-10}\,CC^4 + 7.96522\times10^{-7}\,\mathrm{Sin}[I] + 0.000051155\,A^2\,\mathrm{Sin}[I] - 2.64698\times10^{-23}\,A^3\,\mathrm{Sin}[I] - \\
& 8.69303\times10^{-11}\,A^4\,\mathrm{Sin}[I] - \frac{7.96522\times10^{-7}\,CC\,\mathrm{Sin}[I]}{A} - 0.00010231\,A\,CC\,\mathrm{Sin}[I] + \\
& 1.05879\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\mathrm{Sin}[I] + 3.47721\times10^{-10}\,A^3\,CC\,\mathrm{Sin}[I] + 0.000051155\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I] - \\
& 1.05879\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I] - 5.21582\times10^{-10}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I] + 2.64698\times10^{-23}\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I] - \\
& \frac{1.64096\times10^{-12}\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I]}{A} + 3.47721\times10^{-10}\,A\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I] - 8.69303\times10^{-11}\,CC^4\,\mathrm{Sin}[I] - \\
& 9.36209\times10^{-7}\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - 8.27181\times10^{-25}\,A\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - 0.0000229674\,A^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - \\
& 2.64698\times10^{-23}\,A^3\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - 1.1117\times10^{-9}\,A^4\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] + 1.65436\times10^{-24}\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] + \\
& \frac{9.36209\times10^{-7}\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]}{A} + 0.0000459348\,A\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] + \\
& 5.29396\times10^{-23}\,A^2\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] + 4.44678\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - \\
& 0.0000229675\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - \frac{8.27181\times10^{-25}\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]}{A} - \\
& 5.29396\times10^{-23}\,A\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - 6.67017\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] + \\
& 2.64698\times10^{-23}\,CC^3\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] + \frac{4.00342\times10^{-11}\,CC^3\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]}{A} + \\
& 4.44678\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - 1.1117\times10^{-9}\,CC^4\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - 1.69596\times10^{-6}\,\mathrm{Sin}[I]^2 - \\
& 1.65436\times10^{-24}\,A\,\mathrm{Sin}[I]^2 - 0.0000876681\,A^2\,\mathrm{Sin}[I]^2 + 6.08568\times10^{-10}\,A^4\,\mathrm{Sin}[I]^2 + \\
& 3.30872\times10^{-24}\,CC\,\mathrm{Sin}[I]^2 + \frac{1.69596\times10^{-6}\,CC\,\mathrm{Sin}[I]^2}{A} + 0.000175336\,A\,CC\,\mathrm{Sin}[I]^2 - \\
& 2.11758\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\mathrm{Sin}[I]^2 - 2.43427\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\mathrm{Sin}[I]^2 - 0.0000876681\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I]^2 - \\
& \frac{1.65436\times10^{-24}\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I]^2}{A} + 2.11758\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I]^2 + 3.65141\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I]^2 - \\
& \frac{1.61439\times10^{-11}\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I]^2}{A} - 2.43427\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I]^2 + 6.08568\times10^{-10}\,CC^4\,\mathrm{Sin}[I]^2 + \\
& 5.77228\times10^{-6}\,A^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 - 2.64698\times10^{-23}\,A^3\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 + \\
& 8.37815\times10^{-10}\,A^4\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 - 0.0000115446\,A\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 - \\
& 1.05879\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 - 3.35126\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 + \\
& 5.7723\times10^{-6}\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 + 1.05879\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 + \\
& 5.02689\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 + 2.64698\times10^{-23}\,CC^3\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^2 -
\end{aligned}
$$

B.1

$$\frac{1.03137\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2}{A}-3.35126\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+$$
$$8.37815\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+0.000042071\,A^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2-$$
$$1.32349\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+1.20417\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2-$$
$$0.000084142\,A\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+2.64698\times10^{-23}\,A^2\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2-$$
$$4.8167\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+0.000042071\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2-$$
$$2.64698\times10^{-23}\,A\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+7.22505\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+$$
$$1.32349\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2-\frac{1.75478\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2}{A}-$$
$$4.8167\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+1.20417\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^2+$$
$$0.0000357495\,A^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-5.29396\times10^{-23}\,A^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-2.89353\times10^{-10}\,A^4\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-$$
$$0.000071499\,A\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+2.11758\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+1.15741\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$0.0000357495\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-2.11758\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-1.73612\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$5.29396\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+\frac{1.09117\times10^{-12}\,CC^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3}{A}+1.15741\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-$$
$$2.89353\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+0.0000144869\,A^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-2.64698\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-$$
$$2.57923\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-0.0000289737\,A\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$1.03169\times10^{-8}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+0.0000144868\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-$$
$$3.17637\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-1.54754\times10^{-8}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$7.94093\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+\frac{4.92704\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3}{A}+$$
$$1.03169\times10^{-8}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-2.57923\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-$$
$$3.59468\times10^{-11}\,A^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-1.49367\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$1.07841\times10^{-10}\,A\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+5.29396\times10^{-23}\,A^2\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$5.97468\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-1.07841\times10^{-10}\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-$$
$$5.29396\times10^{-23}\,A\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-8.96202\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$\frac{3.59468\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3}{A}+5.97468\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-$$
$$1.49367\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+3.2381\times10^{-11}\,A^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-$$
$$1.32349\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+4.63875\times10^{-10}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-$$
$$9.7143\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-1.8555\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$9.7143\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+2.78325\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$1.32349\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3-\frac{3.2381\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3}{A}-$$
$$1.8555\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+4.63875\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^3+$$
$$1.03398\times10^{-25}\,A\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4-0.0000432135\,A^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4+2.64698\times10^{-23}\,A^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4+$$
$$7.49012\times10^{-10}\,A^4\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4-2.06795\times10^{-25}\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4+0.000086427\,A\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4-$$
$$1.58819\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4-2.99605\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4-0.0000432135\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4+$$
$$\frac{1.03398\times10^{-25}\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4}{A}+1.58819\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4+4.49407\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^4-$$

$$2.64698\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Sin}[I]^4-\frac{7.92145\times10^{-12}\,CC^3\,\text{Sin}[I]^4}{A}-2.99605\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$7.49012\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Sin}[I]^4+4.33721\times10^{-12}\,A^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+5.29396\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$1.43611\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-1.30116\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$1.05879\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-5.74443\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$1.30116\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+8.61665\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$5.29396\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-\frac{4.33721\times10^{-12}\,CC^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4}{A}-$$
$$5.74443\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+1.43611\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$2.14118\times10^{-11}\,A^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-1.32349\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$2.40248\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-6.42355\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$2.64698\times10^{-23}\,A^2\,CC\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-9.60991\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$6.42355\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-2.64698\times10^{-23}\,A\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$1.44149\times10^{-8}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+1.32349\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$\frac{2.14118\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4}{A}-9.60991\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$2.40248\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+1.61843\times10^{-12}\,A^4\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$6.47374\times10^{-12}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4+9.71061\times10^{-12}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$6.47374\times10^{-12}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4+1.61843\times10^{-12}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$4.68168\times10^{-10}\,A^4\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4+1.87267\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$2.80901\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4+1.87267\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$4.68168\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4-4.23704\times10^{-12}\,A^2\,\text{Sin}[I]^5-3.77078\times10^{-10}\,A^4\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$1.27111\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Sin}[I]^5-1.05879\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\text{Sin}[I]^5+1.50831\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Sin}[I]^5-$$
$$1.27111\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Sin}[I]^5+1.05879\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\text{Sin}[I]^5-2.26247\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$\frac{4.23704\times10^{-12}\,CC^3\,\text{Sin}[I]^5}{A}+1.50831\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Sin}[I]^5-3.77078\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Sin}[I]^5-$$
$$1.65874\times10^{-11}\,A^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5-1.32349\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5-$$
$$2.22631\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5+4.97623\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$7.94093\times10^{-23}\,A^2\,CC\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5+8.90526\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5-$$
$$4.97623\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5-7.94093\times10^{-23}\,A\,CC^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5-$$
$$1.33579\times10^{-8}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5+1.32349\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$\frac{1.65874\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5}{A}+8.90526\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5-$$
$$2.22631\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^5-1.45452\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$5.81809\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^5-8.72713\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$5.81809\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^5-1.45452\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$5.97336\times10^{-10}\,A^4\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^5-2.38934\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$3.58402\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^5-2.38934\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$5.97336\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^5-7.55209\times10^{-13}\,A^2\,\text{Sin}[I]^6+5.01478\times10^{-24}\,A^3\,\text{Sin}[I]^6+$$
$$3.86272\times10^{-10}\,A^4\,\text{Sin}[I]^6+2.26563\times10^{-12}\,A\,CC\,\text{Sin}[I]^6-2.63664\times10^{-24}\,A^2\,CC\,\text{Sin}[I]^6-$$
$$1.54509\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Sin}[I]^6-2.26563\times10^{-12}\,CC^2\,\text{Sin}[I]^6+2.63664\times10^{-24}\,A\,CC^2\,\text{Sin}[I]^6+$$

$$2.31763\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I]^6 - 5.01478\times10^{-24}\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I]^6 + \frac{7.55209\times10^{-13}\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I]^6}{A} -$$
$$1.54509\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I]^6 + 3.86272\times10^{-10}\,CC^4\,\mathrm{Sin}[I]^6 + 6.78031\times10^{-10}\,A^4\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^6 -$$
$$2.71212\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^6 + 4.06818\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^6 -$$
$$2.71212\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^6 + 6.78031\times10^{-10}\,CC^4\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^6 +$$
$$8.2031\times10^{-10}\,A^4\,\mathrm{Cos}[I]^2\,\mathrm{Sin}[I]^6 - 3.28124\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\mathrm{Cos}[I]^2\,\mathrm{Sin}[I]^6 +$$
$$4.92186\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]^2\,\mathrm{Sin}[I]^6 - 3.28124\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\mathrm{Cos}[I]^2\,\mathrm{Sin}[I]^6 +$$
$$8.2031\times10^{-10}\,CC^4\,\mathrm{Cos}[I]^2\,\mathrm{Sin}[I]^6 - 1.33511\times10^{-10}\,A^4\,\mathrm{Sin}[I]^7 + 5.34042\times10^{-10}\,A^3\,CC\,\mathrm{Sin}[I]^7 -$$
$$8.01063\times10^{-10}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I]^7 + 5.34042\times10^{-10}\,A\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I]^7 - 1.33511\times10^{-10}\,CC^4\,\mathrm{Sin}[I]^7 -$$
$$5.9621\times10^{-10}\,A^4\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^7 + 2.38484\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^7 -$$
$$3.57726\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^7 + 2.38484\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^7 -$$
$$5.9621\times10^{-10}\,CC^4\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]^7 - 1.66397\times10^{-11}\,A^4\,\mathrm{Sin}[I]^8 + 6.65588\times10^{-11}\,A^3\,CC\,\mathrm{Sin}[I]^8 -$$
$$9.98382\times10^{-11}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I]^8 + 6.65588\times10^{-11}\,A\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I]^8 - 1.66397\times10^{-11}\,CC^4\,\mathrm{Sin}[I]^8$$

b[A, CC, I] =

$$-1.54258\times10^{-6} + 2.06795\times10^{-25}\,A - 0.0000303794\,A^2 - 2.06795\times10^{-24}\,A^3 + 2.3169\times10^{-10}\,A^4 -$$
$$4.1359\times10^{-25}\,CC + \frac{1.54258\times10^{-6}\,CC}{A} + 0.0000607589\,A\,CC + 1.98523\times10^{-23}\,A^2\,CC -$$
$$9.26759\times10^{-10}\,A^3\,CC - 0.0000303794\,CC^2 + \frac{2.06795\times10^{-25}\,CC^2}{A} - 1.98523\times10^{-23}\,A\,CC^2 +$$
$$1.39014\times10^{-9}\,A^2\,CC^2 + 2.06795\times10^{-24}\,CC^3 - \frac{1.13772\times10^{-11}\,CC^3}{A} - 9.26759\times10^{-10}\,A\,CC^3 +$$
$$2.3169\times10^{-10}\,CC^4 + 7.96522\times10^{-7}\,\mathrm{Sin}[I] + 0.000051155\,A^2\,\mathrm{Sin}[I] - 2.64698\times10^{-23}\,A^3\,\mathrm{Sin}[I] -$$
$$8.69303\times10^{-11}\,A^4\,\mathrm{Sin}[I] - \frac{7.96522\times10^{-7}\,CC\,\mathrm{Sin}[I]}{A} - 0.00010231\,A\,CC\,\mathrm{Sin}[I] +$$
$$1.05879\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\mathrm{Sin}[I] + 3.47721\times10^{-10}\,A^3\,CC\,\mathrm{Sin}[I] + 0.000051155\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I] -$$
$$1.05879\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I] - 5.21582\times10^{-10}\,A^2\,CC^2\,\mathrm{Sin}[I] + 2.64698\times10^{-23}\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I] -$$
$$\frac{1.64096\times10^{-12}\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I]}{A} + 3.47721\times10^{-10}\,A\,CC^3\,\mathrm{Sin}[I] - 8.69303\times10^{-11}\,CC^4\,\mathrm{Sin}[I] -$$
$$9.36209\times10^{-7}\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - 8.27181\times10^{-25}\,A\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - 0.0000229674\,A^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] -$$
$$2.64698\times10^{-23}\,A^3\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - 1.1117\times10^{-9}\,A^4\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] + 1.65436\times10^{-24}\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] +$$
$$\frac{9.36209\times10^{-7}\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]}{A} + 0.0000459348\,A\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] +$$
$$5.29396\times10^{-23}\,A^2\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] + 4.44678\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] -$$
$$0.0000229675\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I] - \frac{8.27181\times10^{-25}\,CC^2\,\mathrm{Cos}[I]\,\mathrm{Sin}[I]}{A} - \qquad \text{B.2}$$

$$5.29396\times10^{-23}\,A\,CC^2\,Cos[I]\,Sin[I]-6.67017\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,Cos[I]\,Sin[I]+$$
$$2.64698\times10^{-23}\,CC^3\,Cos[I]\,Sin[I]+\frac{4.00342\times10^{-11}\,CC^3\,Cos[I]\,Sin[I]}{A}+$$
$$4.44678\times10^{-9}\,A\,CC^3\,Cos[I]\,Sin[I]-1.1117\times10^{-9}\,CC^4\,Cos[I]\,Sin[I]-1.69596\times10^{-6}\,Sin[I]^2-$$
$$1.65436\times10^{-24}\,A\,Sin[I]^2-0.0000876681\,A^2\,Sin[I]^2+6.08568\times10^{-10}\,A^4\,Sin[I]^2+$$
$$3.30872\times10^{-24}\,CC\,Sin[I]^2+\frac{1.69596\times10^{-6}\,CC\,Sin[I]^2}{A}+0.000175336\,A\,CC\,Sin[I]^2-$$
$$2.11758\times10^{-22}\,A^2\,CC\,Sin[I]^2-2.43427\times10^{-9}\,A^3\,CC\,Sin[I]^2-0.0000876681\,CC^2\,Sin[I]^2-$$
$$\frac{1.65436\times10^{-24}\,CC^2\,Sin[I]^2}{A}+2.11758\times10^{-22}\,A\,CC^2\,Sin[I]^2+3.65141\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,Sin[I]^2-$$
$$\frac{1.61439\times10^{-11}\,CC^3\,Sin[I]^2}{A}-2.43427\times10^{-9}\,A\,CC^3\,Sin[I]^2+6.08568\times10^{-10}\,CC^4\,Sin[I]^2+$$
$$5.77228\times10^{-6}\,A^2\,Cos[I]\,Sin[I]^2-2.64698\times10^{-23}\,A^3\,Cos[I]\,Sin[I]^2+$$
$$8.37815\times10^{-10}\,A^4\,Cos[I]\,Sin[I]^2-0.0000115446\,A\,CC\,Cos[I]\,Sin[I]^2-$$
$$1.05879\times10^{-22}\,A^2\,CC\,Cos[I]\,Sin[I]^2-3.35126\times10^{-9}\,A^3\,CC\,Cos[I]\,Sin[I]^2+$$
$$5.7723\times10^{-6}\,CC^2\,Cos[I]\,Sin[I]^2+1.05879\times10^{-22}\,A\,CC^2\,Cos[I]\,Sin[I]^2+$$
$$5.02689\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,Cos[I]\,Sin[I]^2+2.64698\times10^{-23}\,CC^3\,Cos[I]\,Sin[I]^2-$$
$$\frac{1.03137\times10^{-11}\,CC^3\,Cos[I]\,Sin[I]^2}{A}-3.35126\times10^{-9}\,A\,CC^3\,Cos[I]\,Sin[I]^2+$$
$$8.37815\times10^{-10}\,CC^4\,Cos[I]\,Sin[I]^2+0.000042071\,A^2\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2-$$
$$1.32349\times10^{-23}\,A^3\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2+1.20417\times10^{-9}\,A^4\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2-$$
$$0.000084142\,A\,CC\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2+2.64698\times10^{-23}\,A^2\,CC\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2-$$
$$4.8167\times10^{-9}\,A^3\,CC\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2+0.000042071\,CC^2\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2-$$
$$2.64698\times10^{-23}\,A\,CC^2\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2+7.22505\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2+$$
$$1.32349\times10^{-23}\,CC^3\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2-\frac{1.75478\times10^{-11}\,CC^3\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2}{A}-$$
$$4.8167\times10^{-9}\,A\,CC^3\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2+1.20417\times10^{-9}\,CC^4\,Cos[I]^2\,Sin[I]^2+$$
$$0.0000357495\,A^2\,Sin[I]^3-5.29396\times10^{-23}\,A^3\,Sin[I]^3-2.89353\times10^{-10}\,A^4\,Sin[I]^3-$$
$$0.000071499\,A\,CC\,Sin[I]^3+2.11758\times10^{-22}\,A^2\,CC\,Sin[I]^3+1.15741\times10^{-9}\,A^3\,CC\,Sin[I]^3+$$
$$0.0000357495\,CC^2\,Sin[I]^3-2.11758\times10^{-22}\,A\,CC^2\,Sin[I]^3-1.73612\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,Sin[I]^3+$$
$$5.29396\times10^{-23}\,CC^3\,Sin[I]^3+\frac{1.09117\times10^{-12}\,CC^3\,Sin[I]^3}{A}+1.15741\times10^{-9}\,A\,CC^3\,Sin[I]^3-$$
$$2.89353\times10^{-10}\,CC^4\,Sin[I]^3+0.0000144869\,A^2\,Cos[I]\,Sin[I]^3-2.64698\times10^{-23}\,A^3\,Cos[I]\,Sin[I]^3-$$
$$2.57923\times10^{-9}\,A^4\,Cos[I]\,Sin[I]^3-0.0000289737\,A\,CC\,Cos[I]\,Sin[I]^3+$$
$$1.03169\times10^{-8}\,A^3\,CC\,Cos[I]\,Sin[I]^3+0.0000144868\,CC^2\,Cos[I]\,Sin[I]^3-$$
$$3.17637\times10^{-22}\,A\,CC^2\,Cos[I]\,Sin[I]^3-1.54754\times10^{-8}\,A^2\,CC^2\,Cos[I]\,Sin[I]^3+$$
$$7.94093\times10^{-23}\,CC^3\,Cos[I]\,Sin[I]^3+\frac{4.92704\times10^{-11}\,CC^3\,Cos[I]\,Sin[I]^3}{A}+$$
$$1.03169\times10^{-8}\,A\,CC^3\,Cos[I]\,Sin[I]^3-2.57923\times10^{-9}\,CC^4\,Cos[I]\,Sin[I]^3-$$
$$3.59468\times10^{-11}\,A^2\,Cos[I]^2\,Sin[I]^3-1.49367\times10^{-9}\,A^4\,Cos[I]^2\,Sin[I]^3+$$
$$1.07841\times10^{-10}\,A\,CC\,Cos[I]^2\,Sin[I]^3+5.29396\times10^{-23}\,A^2\,CC\,Cos[I]^2\,Sin[I]^3+$$

$$5.97468\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^3-1.07841\times10^{-10}\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^3-$$
$$5.29396\times10^{-23}\,A\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^3-8.96202\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^3+$$
$$\frac{3.59468\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^3}{A}+5.97468\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^3-$$
$$1.49367\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^3+3.2381\times10^{-11}\,A^2\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3-$$
$$1.32349\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3+4.63875\times10^{-10}\,A^4\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3-$$
$$9.7143\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3-1.8555\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3+$$
$$9.7143\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3+2.78325\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3+$$
$$1.32349\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3-\frac{3.2381\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3}{A}-$$
$$1.8555\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3+4.63875\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^3+$$
$$1.03398\times10^{-25}\,A\,\text{Sin}[I]^4-0.0000432135\,A^2\,\text{Sin}[I]^4+2.64698\times10^{-23}\,A^3\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$7.49012\times10^{-10}\,A^4\,\text{Sin}[I]^4-2.06795\times10^{-25}\,CC\,\text{Sin}[I]^4+0.000086427\,A\,CC\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$1.58819\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\text{Sin}[I]^4-2.99605\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Sin}[I]^4-0.0000432135\,CC^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$\frac{1.03398\times10^{-25}\,CC^2\,\text{Sin}[I]^4}{A}+1.58819\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\text{Sin}[I]^4+4.49407\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$2.64698\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Sin}[I]^4-\frac{7.92145\times10^{-12}\,CC^3\,\text{Sin}[I]^4}{A}-2.99605\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$7.49012\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Sin}[I]^4+4.33721\times10^{-12}\,A^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+5.29396\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$1.43611\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-1.30116\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$1.05879\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-5.74443\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$1.30116\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+8.61665\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$5.29396\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4-\frac{4.33721\times10^{-12}\,CC^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4}{A}-$$
$$5.74443\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+1.43611\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[I]\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$2.14118\times10^{-11}\,A^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-1.32349\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$2.40248\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-6.42355\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$2.64698\times10^{-23}\,A^2\,CC\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-9.60991\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$6.42355\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-2.64698\times10^{-23}\,A\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$1.44149\times10^{-8}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+1.32349\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$\frac{2.14118\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4}{A}-9.60991\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+$$
$$2.40248\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^2\,\text{Sin}[I]^4+1.61843\times10^{-12}\,A^4\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$6.47374\times10^{-12}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4+9.71061\times10^{-12}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$6.47374\times10^{-12}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4+1.61843\times10^{-12}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^3\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$4.68168\times10^{-10}\,A^4\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4+1.87267\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$2.80901\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4+1.87267\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4-$$
$$4.68168\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[I]^4\,\text{Sin}[I]^4-4.23704\times10^{-12}\,A^2\,\text{Sin}[I]^5-3.77078\times10^{-10}\,A^4\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$1.27111\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Sin}[I]^5-1.05879\times10^{-22}\,A^2\,CC\,\text{Sin}[I]^5+1.50831\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Sin}[I]^5-$$
$$1.27111\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Sin}[I]^5+1.05879\times10^{-22}\,A\,CC^2\,\text{Sin}[I]^5-2.26247\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Sin}[I]^5+$$
$$\frac{4.23704\times10^{-12}\,CC^3\,\text{Sin}[I]^5}{A}+1.50831\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Sin}[I]^5-3.77078\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Sin}[I]^5-$$

$$1.65874\times10^{-11}\,A^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-1.32349\times10^{-23}\,A^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-$$
$$2.22631\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+4.97623\times10^{-11}\,A\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+$$
$$7.94093\times10^{-23}\,A^2\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+8.90526\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-$$
$$4.97623\times10^{-11}\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-7.94093\times10^{-23}\,A\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-$$
$$1.33579\times10^{-8}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+1.32349\times10^{-23}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+$$
$$\frac{1.65874\times10^{-11}\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5}{A}+8.90526\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-$$
$$2.22631\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-1.45452\times10^{-9}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+$$
$$5.81809\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-8.72713\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+$$
$$5.81809\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-1.45452\times10^{-9}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+$$
$$5.97336\times10^{-10}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-2.38934\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+$$
$$3.58402\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-2.38934\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5+$$
$$5.97336\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^5-7.55209\times10^{-13}\,A^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+5.01478\times10^{-24}\,A^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+$$
$$3.86272\times10^{-10}\,A^4\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+2.26563\times10^{-12}\,A\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6-2.63664\times10^{-24}\,A^2\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6-$$
$$1.54509\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6-2.26563\times10^{-12}\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+2.63664\times10^{-24}\,A\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+$$
$$2.31763\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6-5.01478\times10^{-24}\,CC^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+\frac{7.55209\times10^{-13}\,CC^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6}{A}-$$
$$1.54509\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+3.86272\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+6.78031\times10^{-10}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6-$$
$$2.71212\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+4.06818\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6-$$
$$2.71212\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+6.78031\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+$$
$$8.2031\times10^{-10}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6-3.28124\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+$$
$$4.92186\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6-3.28124\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6+$$
$$8.2031\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^6-1.33511\times10^{-10}\,A^4\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7+5.34042\times10^{-10}\,A^3\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7-$$
$$8.01063\times10^{-10}\,A^2\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7+5.34042\times10^{-10}\,A\,CC^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7-1.33511\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7-$$
$$5.9621\times10^{-10}\,A^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7+2.38484\times10^{-9}\,A^3\,CC\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7-$$
$$3.57726\times10^{-9}\,A^2\,CC^2\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7+2.38484\times10^{-9}\,A\,CC^3\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7-$$
$$5.9621\times10^{-10}\,CC^4\,\text{Cos}[\mathcal{I}]\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^7-1.66397\times10^{-11}\,A^4\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^8+6.65588\times10^{-11}\,A^3\,CC\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^8-$$
$$9.98382\times10^{-11}\,A^2\,CC^2\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^8+6.65588\times10^{-11}\,A\,CC^3\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^8-1.66397\times10^{-11}\,CC^4\,\text{Sin}[\mathcal{I}]^8$$

Apêndice C

Estabilidade em torno do ponto de equilíbrio PP-2 5.5

C.1 Análise qualitativa da estabilidade

A análise feita no presente apêndice, para o ponto de equilíbro PP-2 5.5, é similar as realizadas anteriormente para os ponto de equilíbrio MP 1.2 e PP-1 1.4.

O ponto de equilíbrio PP-2 5.5 encontram se na Tabela 7.4 e possui características orbitais e físicas dadas no item 7.4.1, sendo os momentos principais de inércia $A = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$, $C = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e com inclinação orbital $I = 0,4364 rad$.

Para este ponto de equilíbrio foram escolhidos arbitrariamente variações entre 0 e $45 * 10^{-4} kg\ km^2$ para os momentos de inércia A e C e variações na inclinação orbital I entre 0 e $1 rad$.

C.1.1 Comportamento da estabilidade linear

Análise da 1ª condição

A seguir, são apresentadas as regiões encontradas considerando três casos.

Caso I: $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$

A Figura C.1 apresenta o resultado da estabilidade linear para o momento principal de inércia A constante, com variações no momento de inércia C e na inclinação orbital I.

Na Região 1 e 2 da Figura C.1, em azul, tem se regiões em que $a(A_0, C, I) < 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ onde os autovalores λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são imaginários puros. Neste caso, observando as Regiões 1 e 2 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros I e C, para que seja garantida a estabilidade linear do ponto de equilíbrio PP-2 5.5.

Verifica se nas Regiões 1 e 2 da Figura C.1 que existem regiões linearmente instáveis para $C = A$, assim como regiões linearmente estáveis para $C < A$ e $C > A$.

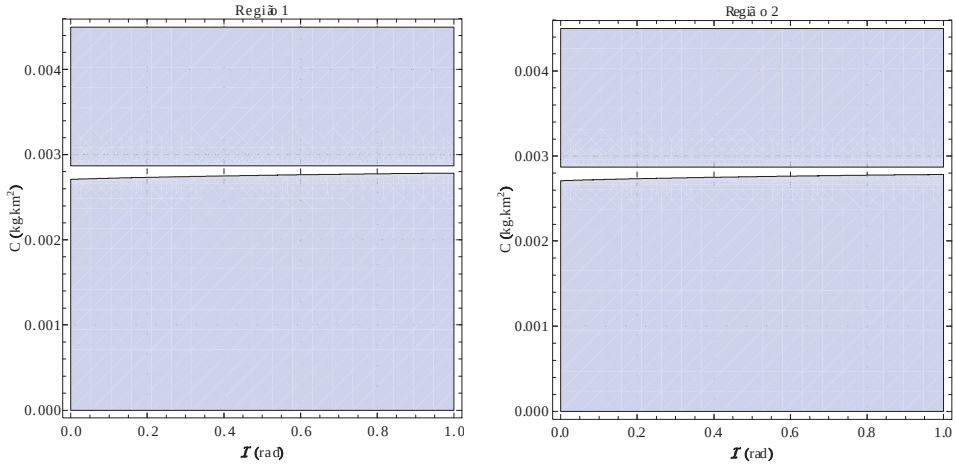


Figura C.1: Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$

Caso II: $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

A Figura C.2 apresenta o resultado da estabilidade linear para o momento principal de inércia C constante, com variações no momento de inércia A e na inclinação orbital I.

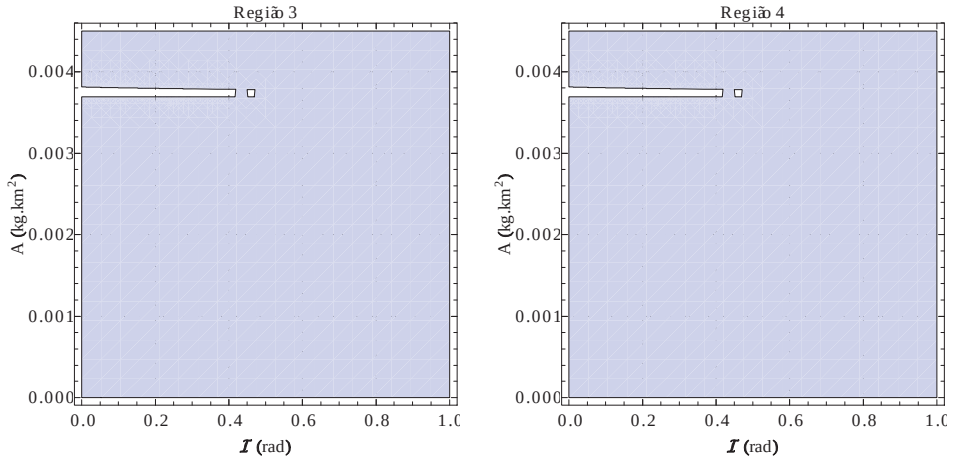


Figura C.2: Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

Na Região 3 da Figura C.2, em azul, tem se regiões em que $a(A, C_0, I) < 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ onde os autovalores λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são imaginários puros.Neste caso,

observando as Regiões 3 e 4 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros I e A , para que seja garantida a estabilidade linear do ponto PP-2 5.5.

Novamente, nas Regiões 3 e 4 da Figura C.2, observa se regiões de instabilidade linear para $C = A$ em órbitas com baixa inclinação, assim como regiões linearmente estáveis para $C < A$ e $C > A$, confirmando o resultado obtido anteriormente.

Caso III: $I_0 = 0,4364rad$

A Figura C.3 apresenta o resultado da estabilidade linear para a inclinação I constante, com variações nos momento de inércia A e C.

Na Região 5 e 6 da Figura C.3, em azul, tem se regiões em que $a(A, C, I_0) < 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ onde os autovalores λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4. Neste caso, observando as Regiões 5 e 6 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros A e C, para que seja garantida a estabilidade linear do ponto PP-2 5.5.

Mais uma vez, nas Regiões 5 e 6 da Figura C.3, observam se regiões de instabilidade linear para $C = A$, assim como regiões linearmente estáveis para $C < A$ e $C > A$.

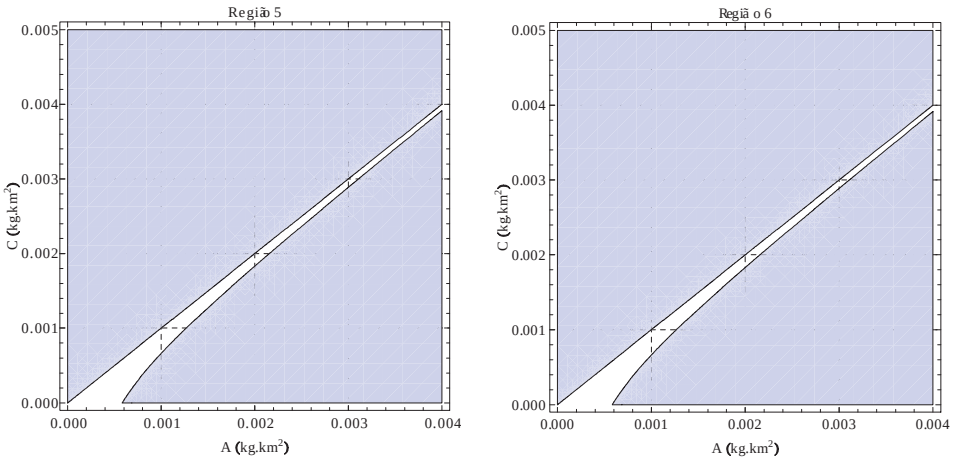


Figura C.3: Regiões para $a(A, C, I_0) > 0$ e $a(A, C, I_0) < 0$ e para $b(A, C, I_0) > 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,4364rad$

Pode se verificar em todas as seis regiões, que para a configuração original de tais parâmetros A, C e I, as funções $a(A, C, I)$ e $b(A, C, I)$ se encontra nas regiões em azul, ou seja, a estabilidade linear do ponto de equilíbrio PP-2 5.5 é garantida pois essas funções são menores que zero para essa configuração original, logo temos autovalores imaginários puros, satisfazendo a 1ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko [26].

Como nos casos anteriores, existe uma separação entre estabilidade, instabilidade e estabilidade linear, fazendo a ressalva que quando os momentos principais de inércia são iguais ($C = A$) tem se instabilidade linear. Essa configuração corresponde a uma

distribuição uniforme de massa do satélite, ou seja, todos os momentos principais de inércia seriam iguais ($A = B = C$).

Análise da 2ª condição

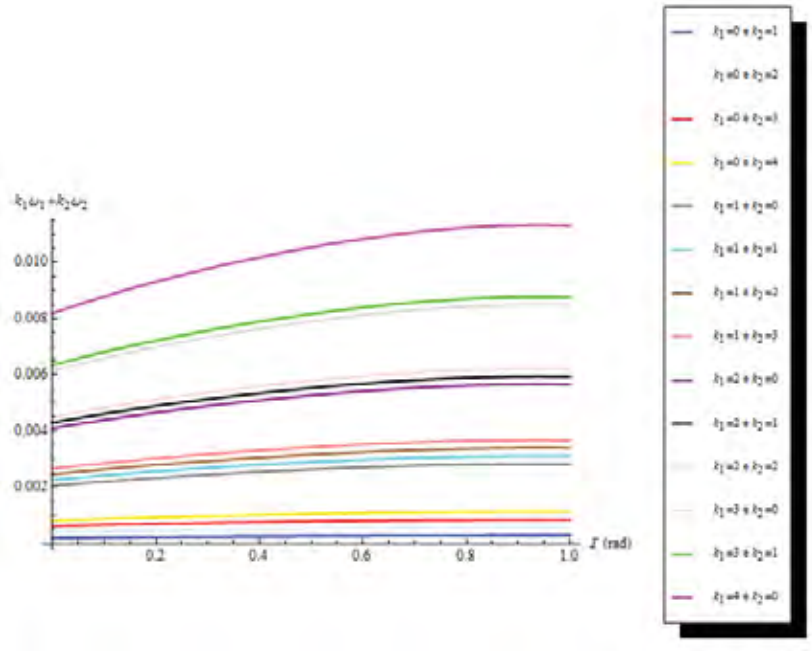
A seguir, são apresentados os resultados encontrados considerando três casos para o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiro satisfazendo a desigualdade $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$.

Caso I: $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ **e** $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

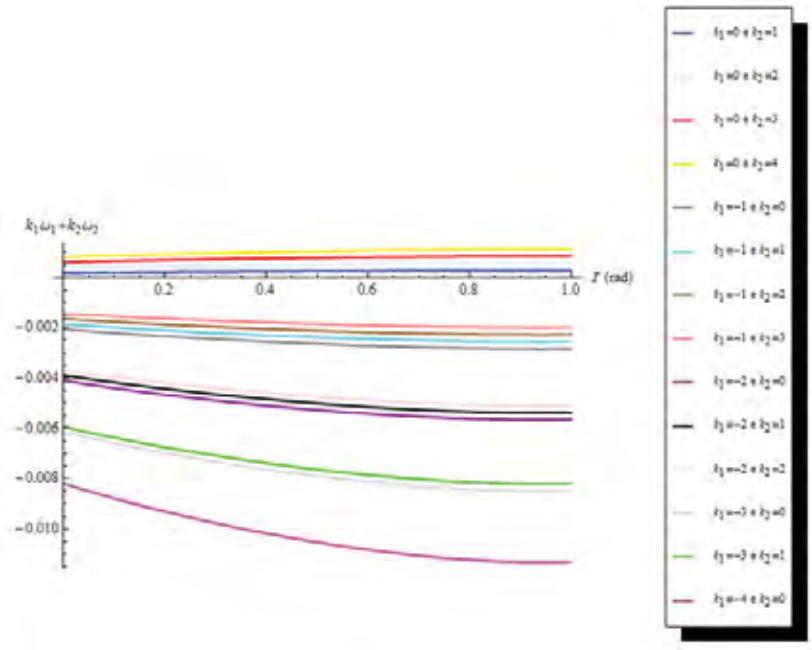
As Figuras C.4 (a) e (b) apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, com variações apenas na inclinação orbital I, considerando os momentos principais de inércia A e C constantes.

Obviamente, quando tem se $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura C.4 (a) porém com conjunto imagem de sinal oposto, ou seja, seriam como uma reflexão das curvas da Figura C.4 (a) no eixo das abscissas. Da mesma maneira para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura C.4 (b) porém com conjunto imagem de sinal oposto.

Analisando tais curvas da Figura C.4, percebece que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita, esses gráficos completam as informações dadas na Figura C.1 e Figura C.2. Nas Regiões 1 e 2 da Figura C.1 e as Regiões 3 e da Figura C.2 considerando os momentos principais de inércia $A = 28,7{*}10^{-4} kg\ km^2$ e $C = 36,9{*}10^{-4} kg\ km^2$, para qualquer valor de inclinação orbital de 0 a $1 rad$ teremos autovalores imaginários puros.



(a)



(b)

Figura C.4: Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

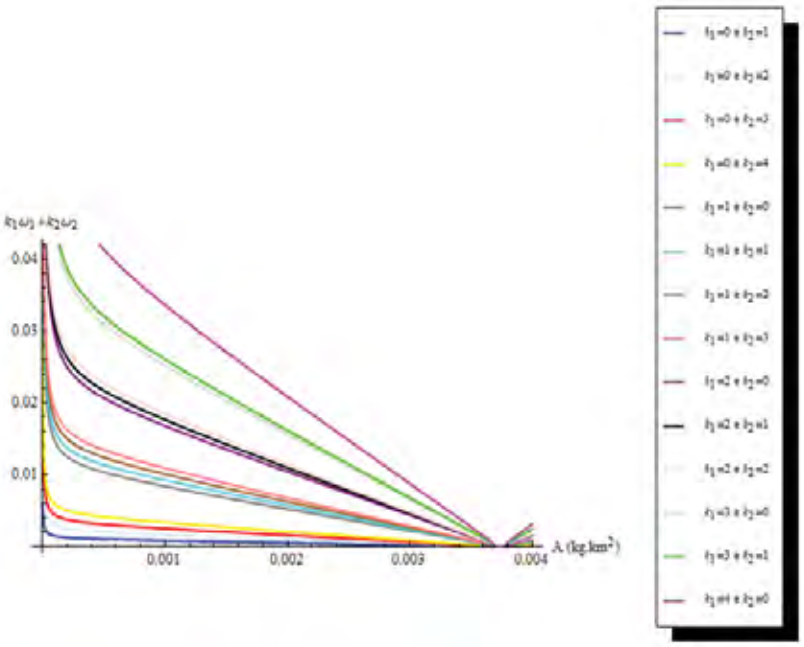
Caso II: $C = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ **e** $I = 0,4364 rad$

As Figuras C.5 (a) e (b) apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, com variações apenas no momento principal de inércia A, considerando o momento principal de inércia C e a inclinação orbital I constantes.

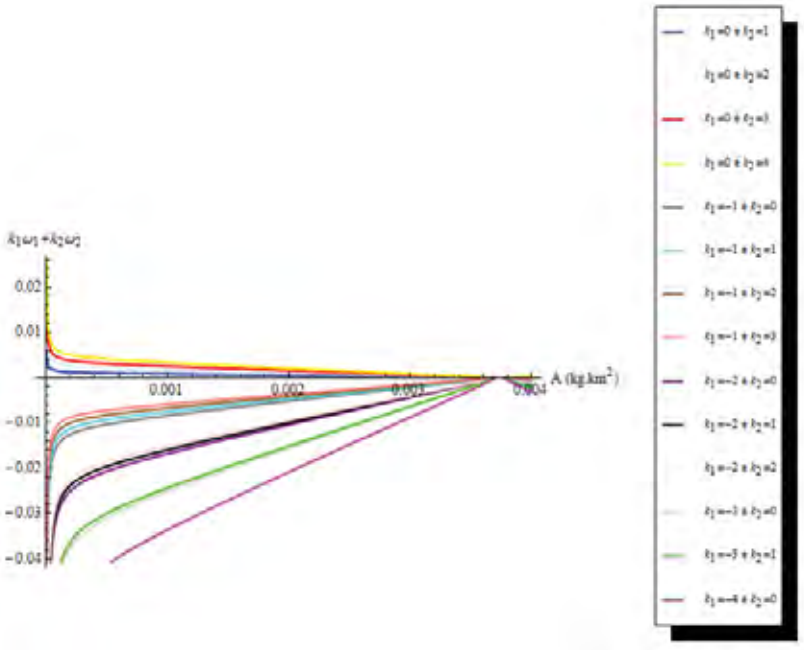
Obviamente, quando tem se $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura C.5 (a) porém com conjunto imagem de sinal oposto, ou seja, seriam como uma reflexão das curvas da Figura C.5 (a) no eixo das abscissas. Da mesma maneira para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura C.5 (b) porém com conjunto imagem de sinal oposto.

Analisando as curvas da Figuras C.5 (a) e (b), verifica se que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita para $0 < A < 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $A > 37,79 * 10^{-4} kg\ km^2$, ou seja, para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiro sempre obedecendo a relação $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$, temos $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$ para $0 < A < C$ e $A > 37,79 * 10^{-4} kg\ km^2$.

Além disso, tais curvas das Figuras C.5 (a) e (b) completam as informações dadas na Figura C.2 e Figura C.3. Nas Regiões 3 e 4 da Figura C.2 e nas Regiões 5 e 6 da Figura C.3, considerando $C = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I = 0,4364 rad$, para valores do momento principal de inércia $0 < A < C$ e $A > 37,79 * 10^{-4} kg\ km^2$ os autovalores são imaginários puros. Já na análise do intervalo de $C \leq A \leq 37,79 * 10^{-4} kg\ km^2$ os autovalores são reais ou não imaginários puros, que não nos interessa.



(a)



(b)

Figura C.5: Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

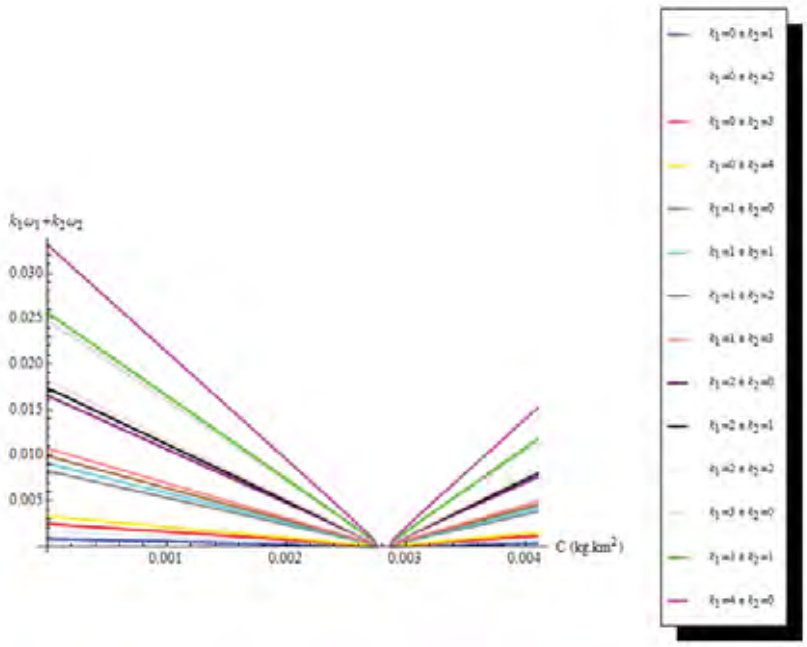
Caso III: $A = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ **e** $I = 0,4364 rad$

As Figuras C.6 (a) e (b) apresentam o comportamento da função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, com variações apenas no momento principal de inércia C, considerando o momento principal de inércia A e a inclinação orbital I constantes.

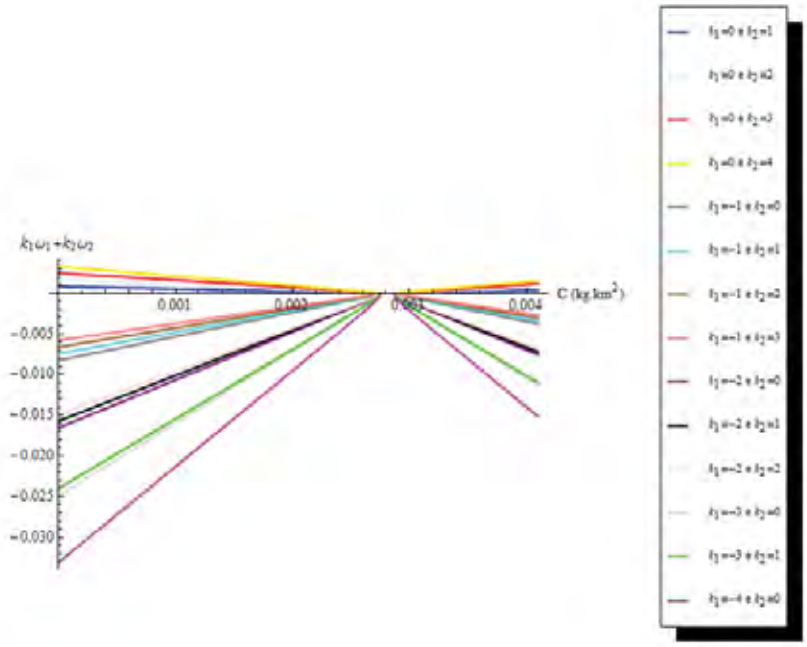
Obviamente, quando tem se $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura C.6 (a) porém com conjunto imagem de sinal oposto, ou seja, seriam como uma reflexão das curvas da Figura C.6 (a) no eixo das abscissas. Da mesma maneira para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$, a função $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ teria curvas parecidas com a presente no gráfico da Figura C.6 (b) porém com conjunto imagem de sinal oposto.

Analisando as curvas presentes nas Figuras C.6 (a) e (b), verifica se que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita para $0 < C < 27,53 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C > 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$, ou seja, para diferentes valores de k_1 e k_2 inteiro sempre obedecendo a relação $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$ temos $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$ para $0 < C < 27,53 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C > A$.

Além disso, tais curvas das Fig. C.6 (a) e (b) completam as informações dadas na Figura C.1 e Figura C.3. Nas Regiões 1 e 2 da Figura C.1 e nas Regiões 5 e 6 da Figura C.3 considerando $A = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I = 0,4364 rad$, para valores do momento principal de inércia $0 < C < 27,53 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C > A$ os autovalores são imaginários puros. Já para o intervalo de $27,53 * 10^{-4} kg\ km^2 \leq C \leq A$ os autovalores são reais ou não imaginários puros, que não nos interessa.



(a)



(b)

Figura C.6: Segunda condição, em (a) para $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ e em (b) para $k_1 \leq 0$ e $k_2 \geq 0$ considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

C.1.2 Comportamento da estabilidade não linear

Análise da 3ª condição

Finalizando a análise, apresentamos os resultados encontrados considerando três casos.

Caso I: $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ **e** $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

A Figura C.7 apresenta o comportamento do determinante de Arnold em função da inclinação orbital I, com os momentos principais de inércia A e C constantes.

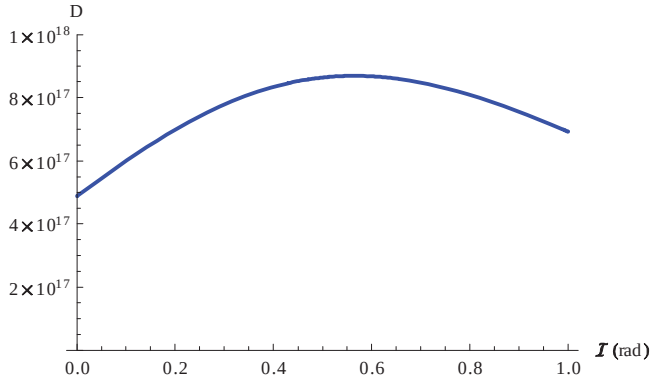


Figura C.7: Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

Observe que com essa configuração de A e C, não existem inclinações que conduza o determinante de Arnold a zero para o ponto de equilíbrio em estudo, ou seja, para qualquer valor de inclinação orbital o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 apresenta estabilidade não linear.

Combinando esse resultado de estabilidade linear com os resultados obtidos anteriormente, o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 que permanece linearmente estável para qualquer valor de inclinação orbital I considerando $A = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ (ver Figuras C.1, C.2, C.4 (a) e C.4 (b)), é possível determinar configurações bem definidas de inclinação orbital o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 permanece Liapunov estável.

Caso II: $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,4364 rad$

As Figuras C.8 e C.9 apresentam o comportamento do determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A, com o momento principal de inércia C e a inclinação orbital I constantes.

Observe que com essa configuração de C e I, existe um valor para o momento principal de inércia no eixo x ($A = C = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$) em que o determinante de Arnold é zero, ou seja, para esse valor de momento principal de inércia A, não é satisfeita a estabilidade não linear.

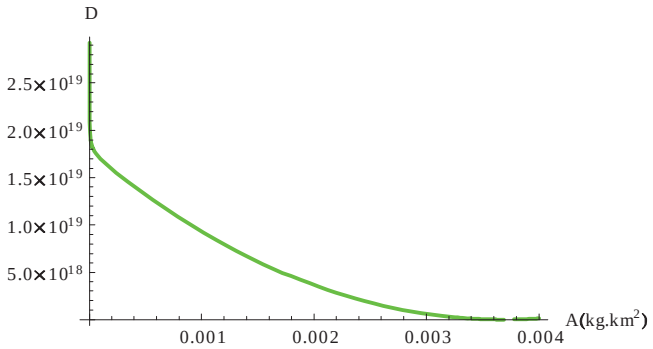


Figura C.8: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

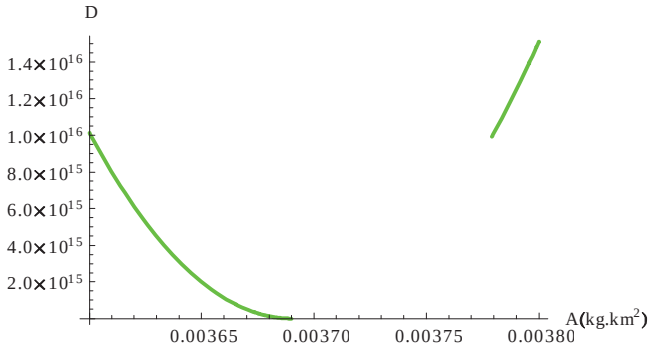


Figura C.9: Ênfase da Fig. C.8 onde o determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A é zero para $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

Para $A \leq C < 37,79 * 10^{-4} kg\ km^2$, não temos solução para o determinante de Arnold, pois com essa configuração os autovalores são reais ou não imaginários puros, fato confirmado na 1ª e 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko [26] (ver Figuras C.2, C.3, C.5 (a) e C.5 (b)). Observa se que para o intervalo de $0 < A < C$ e $A > 37,79 * 10^{-4} kg\ km^2$ o determinante de Arnold apresenta resultados diferente de zero.

Combinando esse resultado de estabilidade não linear com os resultados anteriormente, nos quais o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 permanece linearmente estável considerando $C = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I = 0,4364 rad$ apenas para o intervalo de $0 < A < C$ e $A > 37,79 * 10^{-4} kg\ km^2$(ver Figuras C.2, C.3, C.5 (a) e C.5 (b)), é possível determinar configurações bem definidas de A para que esse ponto de equilíbrio permaneça Liapunov estável.

Caso III: $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,4364 rad$

As Figuras C.10 e C.11 apresentam o comportamento do determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C, com o momento principal de inércia A e a inclinação orbital I constantes.

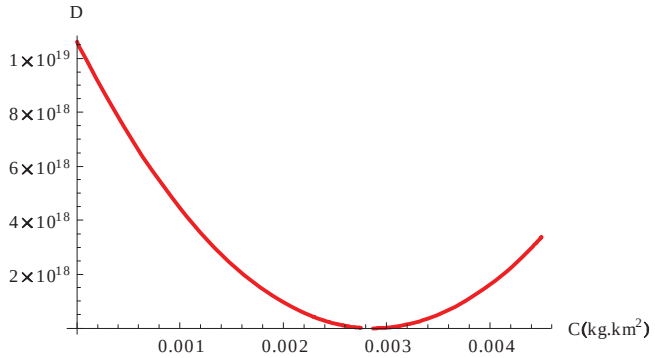


Figura C.10: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

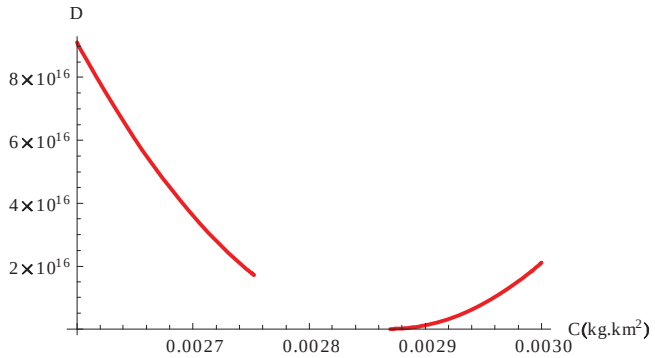


Figura C.11: Ênfase da Fig. C.10 onde o determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C é zero para $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

Observe que com essa configuração de A e I, existe um valor para o momento principal de inércia no eixo z ($C = A = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$) em que o determinante de Arnold é zero, ou seja, para esse valor de momento principal de inércia C a estabilidade não linear não é satisfeita.

Para o intervalo de $27,53 * 10^{-4} kg\ km^2 < C \leq A$, não temos solução para o determinante de Arnold, pois com essa configuração os autovalores são reais ou não imaginários puros, fato confirmado na 1ª e 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko [26] (ver Figuras C.1, C.3, C.6 (a) e C.6 (b)). Verifica-se que em $0 < C < 27,53 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C > A$ o determinante de Arnold apresenta resultados diferente de zero.

Combinando esse resultado de estabilidade não linear com os resultados anteriormente, nos quais o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 permanece linearmente estável, considerando $A = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I = 0,4364 rad$ apenas para o intervalo de $0 < C < 27,53 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C > A$ (ver Figuras C.1, C.3, C.6 (a) e C.6 (b)), logo, é possível determinar configurações bem definidas de C para que esse ponto de equilíbrio permaneça Liapunov estável.

Analisando o resultado da estabilidade dos três pontos de equilíbrio, observa se que

o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 apresenta maior região de estabilidade linear e não linear quando comparado aos pontos de equilíbrio MP 1.2 do satélite MP e PP-1 1.4 do satélite PP-1.

Esse resultado já era esperado, pois os conjuntos dados físicos e orbitais do satélite PP-2 possui características similares ao satélite brasileiro de coleta de dados SBCD2 que apresenta maior estabilidade em sua dinâmica rotacional quando comparado aos satélites PEGASUS e SBCD1, no qual seus dados físicos e orbitais foram utilizados para o conjunto de dados dos satélites MP-1 e PP-1 respectivamente.

Apêndice D

Resultado qualitativo da análise de estabilidade para o ponto de equilíbrio PP-1 8.3

As Figuras D.1 - D.6 a seguir, apresetam as regiões de estabilidade linear e não linear, obtidas por um estudo similar ao realizado para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 presente no Capítulo 8.

D.1 Comportamento da estabilidade linear

Caso I: $A_0 = 7,35 * 10^{-6} kg\ km^2$

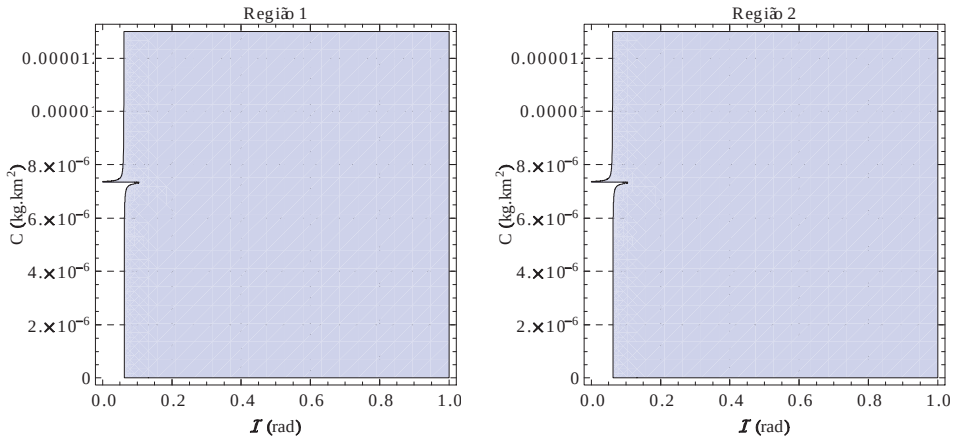


Figura D.1: Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 7,35 * 10^{-6} kg\ km^2$

Caso II: $C_0 = 8,54 * 10^{-6} kg\ km^2$

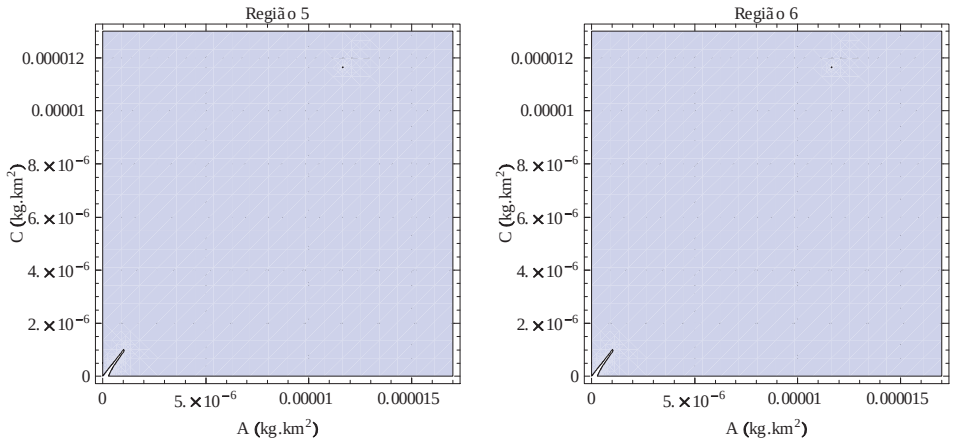


Figura D.2: Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 8,54 * 10^{-6} kg\ km^2$

Caso III: $I_0 = 0,4364 rad$

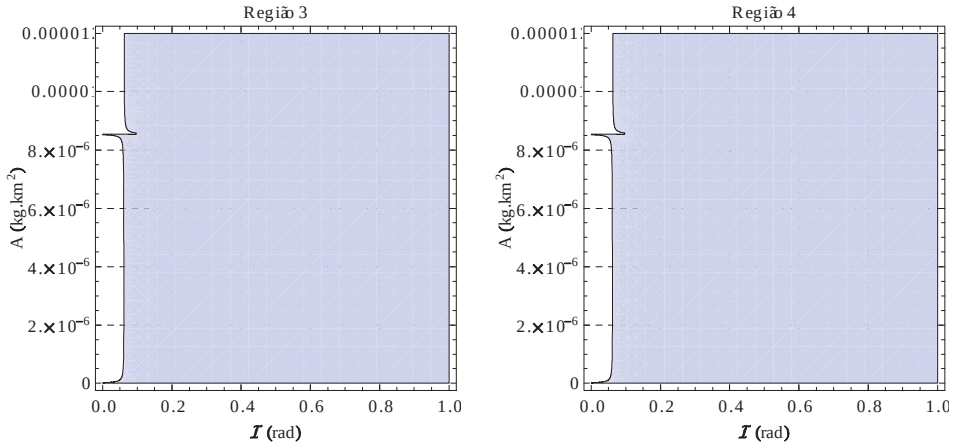


Figura D.3: Regiões para $a(A, C, I_0) > 0$ e $a(A, C, I_0) < 0$ e para $b(A, C, I_0) > 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,4364 rad$

D.2 Comportamento da estabilidade não linear

Caso I: $A_0 = 9,50 * 10^{-6} kg\ km^2$ **e** $C_0 = 8,54 * 10^{-6} kg\ km^2$

Caso II: $A_0 = 9,50 * 10^{-6} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,4364 rad$

Caso III: $C_0 = 8,54 * 10^{-6} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,4364 rad$

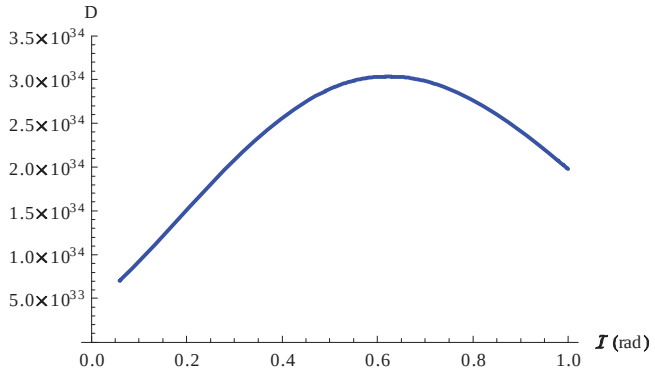


Figura D.4: Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 9,50 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $C_0 = 8,54 * 10^{-6} kg\ km^2$

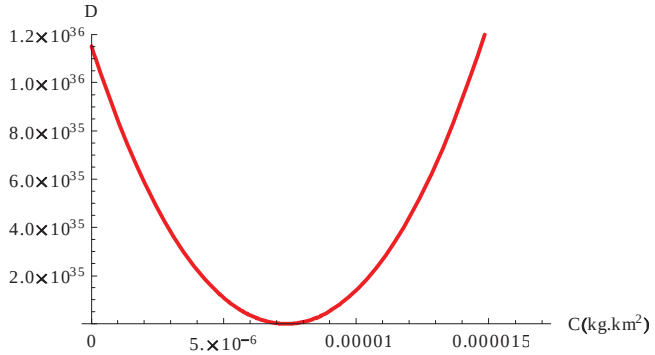


Figura D.5: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 9,50 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

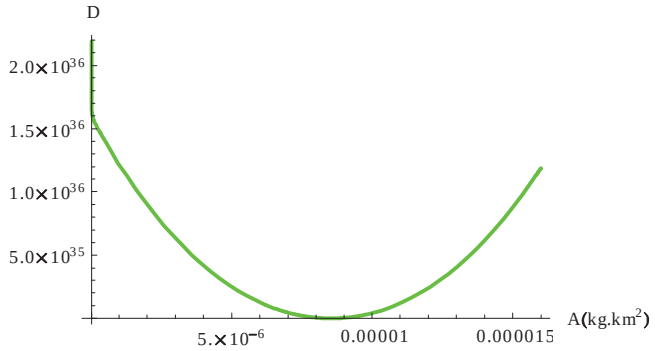


Figura D.6: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 8,54 * 10^{-6} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

Apêndice E

Resultado qualitativo da análise de estabilidade para o ponto de equilíbrio PP-2 5.3

As Figuras E.1 - E.6 a seguir, apresetam as regiões de estabilidade linear e não linear, obtidas por um estudo similar ao realizado para o ponto de equilíbrio PP-2 5.5 presente no Apêndice A.

E.1 Comportamento da estabilidade linear

Caso I: $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$

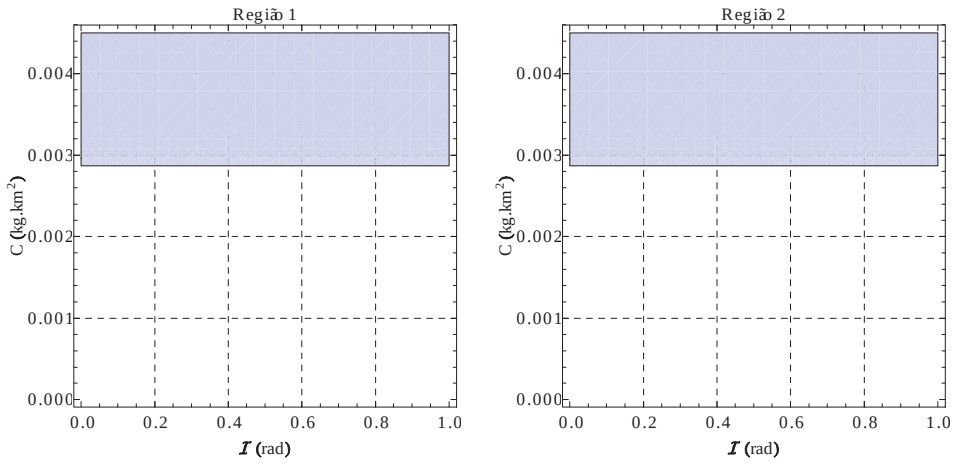


Figura E.1: Regiões para $a(A_0, C, I) > 0$ e $a(A_0, C, I) < 0$ e para $b(A_0, C, I) > 0$ e $b(A_0, C, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$

Caso II: $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

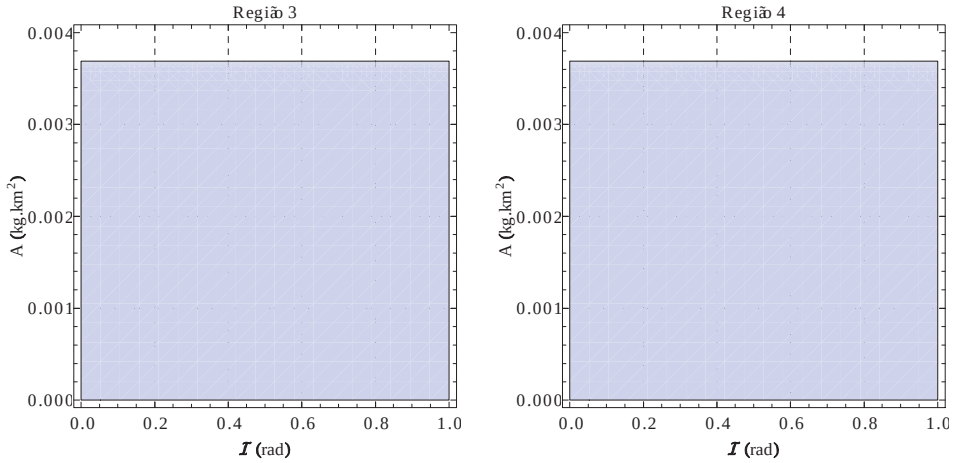


Figura E.2: Regiões para $a(A, C_0, I) > 0$ e $a(A, C_0, I) < 0$ e para $b(A, C_0, I) > 0$ e $b(A, C_0, I) < 0$ considerando o momento principal de inércia $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

Caso III: $I_0 = 0,4364 rad$

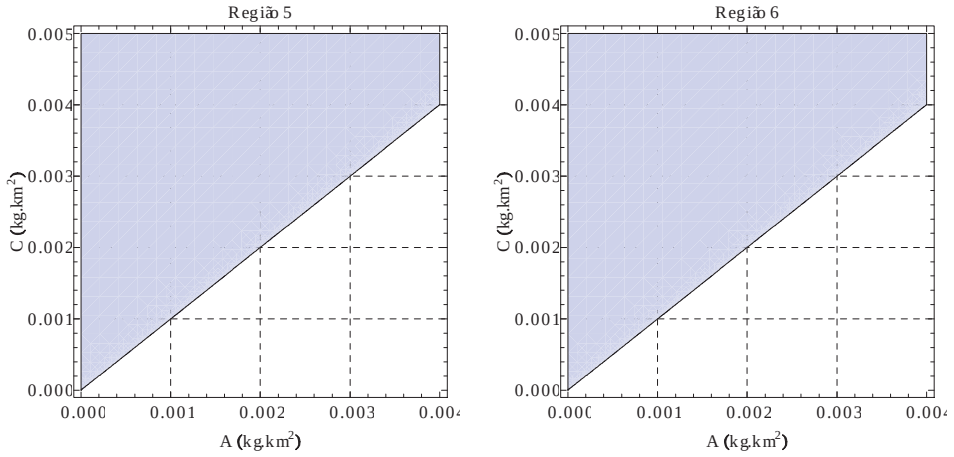


Figura E.3: Regiões para $a(A, C, I_0) > 0$ e $a(A, C, I_0) < 0$ e para $b(A, C, I_0) > 0$ e $b(A, C, I_0) < 0$ considerando a inclinação orbital $I_0 = 0,4364 rad$

E.2 Comportamento da estabilidade não linear

Caso I: $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ **e** $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

Caso II: $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,4364 rad$

Caso I: $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ **e** $I_0 = 0,4364 rad$

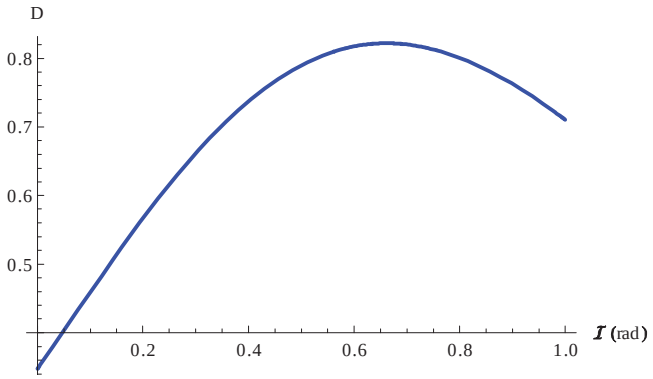


Figura E.4: Determinante de Arnold em função da inclinação orbital I considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$

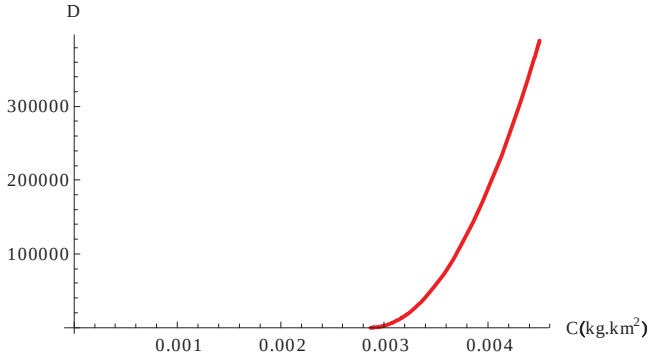


Figura E.5: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia C considerando $A_0 = 28,7 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$

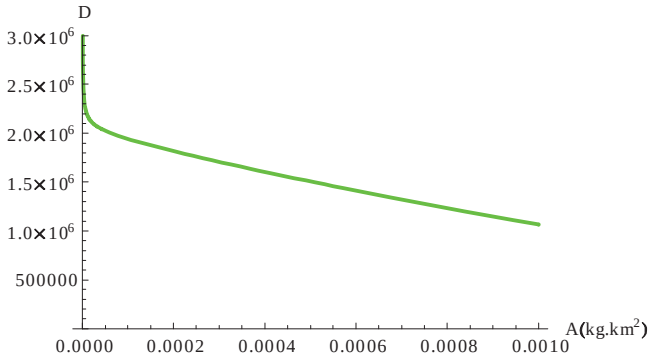


Figura E.6: Determinante de Arnold em função do momento principal de inércia A considerando $C_0 = 36,9 * 10^{-4} kg\ km^2$ e $I_0 = 0,4364 rad$