

Heracio Ledger López Lázaro

Atratores pullback para equações parabólicas semilineares em domínios não cilíndricos

São José do Rio Preto

2016

Heraclio Ledger López Lázaro

Atratores pullback para equações parabólicas semilineares em domínios não cilíndricos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva

São José do Rio Preto

2016

López Lázaro, Heraclio Ledger.

Atratores pullback para equações parabólicas semilineares em domínios não cilíndricos / Heraclio Ledger López Lázaro. - São José do Rio Preto, 2016.

82 f. : il.

Orientador: Ricardo Parreira da Silva

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parabólicas. 3. Equação de calor. 4. Atratores (Matemática) I. Silva, Ricardo Parreira da. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.911

Heraclio Ledger López Lázaro

Atratores pullback para equações parabólicas semilineares em domínios não cilíndricos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. German Lozada Cruz
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto
Co-Orientador

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Professora Assistente Doutora
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Ma To Fu
Livre Docente
USP - São Carlos

São José do Rio Preto, 07 de Março de 2016.

À minha namorada
dedico.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, a minha família e a minha namorada Jackeline del Carmen Huaccha Neyra, pela força, apoio e compromisso para com a minha pessoa, respectivamente.

Aos Professores Dr. Ricardo Parreira da Silva e Dr. German Lozada Cruz por aceitarem me orientar neste trabalho, pela paciência durante os seminários, por toda dedicação, ajuda e amizade ao longo deste percurso.

Aos professores Dra. Andréa e Dr. Ma To Fu por aceitarem compor a banca examinadora.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

*“O único homem que está isento de
erros, é aquele que não arrisca
acertar.”*

(Albert Einstein)

Resumo

O problema que vamos estudar neste trabalho é motivado pela dinâmica de equações diferenciais não autônomas. Vamos estabelecer a existência e unicidade de solução para uma classe de equações parabólicas semilineares com condição de fronteira de Dirichlet, em uma família de domínios que varia com o tempo.

Além disso, sob certas hipóteses sobre a não linearidade, mostraremos a existência de uma família de atratores pullback.

Palavras-chave: Equação de calor semilinear, domínio não cilíndrico, sistema dinâmico não autônomo, atratores pullback.

Abstract

The problem that we are going to study in this work, is motivated by the dynamics of differential equations nonautonomous. We will establish the existence and uniqueness of solution for a class of parabolic semilineares equations with Dirichlet boundary condition, in a family of domains that varies with time.

In addition, certain hypotheses about the non-linearity, we will show the existence of a family of attractors pullback.

Keywords: *Semilinear heat equation, non-cylindrical domain, nonautonomous dynamical system, pullback attractor.*

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	13
1.1 Resultados importantes	13
1.2 Distribuições e Espaços Funcionais	20
1.3 $\mathfrak{D}$ -Atrator Pullback	44
2 Equação do calor semilinear em domínios que variam com o tempo	52
2.1 Existência e unicidade de solução	52
2.1.1 Existência de solução fraca do problema (EFMA) quando $u_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$	57
2.1.2 Regularidade de solução para o problema (EFMA) quando $u_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$	66
2.1.3 Existência de solução fraca para o problema (EFMA) quando $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$. .	68
2.2 Geração do processo $U(t, \tau)$ pelas soluções fracas	71
2.2.1 Existência de solução fraca para o problema (EFM) quando $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$. . .	71
2.2.2 Geração do processo $U(t, \tau)$	71
3 Atratores Pullback	74
3.1 $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ - Atrator pullback	74
3.1.1 Conjunto $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -absorvente pullback	75
3.1.2 $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -assintoticamente compacto pullback	77

Introdução

Problemas onde domínios variam com o tempo vem sendo estudados a bastante tempo, como, por exemplo, o problema de Stefan, que pode ser interpretado como um problema de propagação do calor, movimento de átomos, estudo de combustão, etc. Em [14], o autor estuda a equação do calor unidimensional onde o domínio da variável espacial varia no tempo. Por exemplo, podemos pensar na propagação do calor sobre um iceberg, onde queremos estudar a temperatura em cada um de seus pontos. Neste caso, temos que levar em conta que, dependendo da temperatura exterior, o iceberg vai mudando sua estrutura ao longo do tempo. Matematicamente podemos entender o iceberg como sendo o domínio que varia ao longo do tempo e a equação como sendo o modelo matemático que explica a variação da temperatura em cada ponto do iceberg. Podemos citar trabalhos recentes relacionados com equações diferenciais parciais sobre domínios não cilíndricos, como por exemplo [9, 11].

Este trabalho é composto de três capítulos. No Capítulo 1, colocamos os conceitos básicos que usaremos para o desenvolvimento desta dissertação. Os resultados mais importantes deste capítulo são os Teoremas de compacidade fraca-* de Alouglu (Teorema 1.15), Teorema de Imersão de Sobolev (Teorema 1.39), Teorema de regularidade para equações elípticas (Teorema 1.42) e o Teorema de existência de atratores pullback (Teorema 1.79). Adaptamos também os resultados de P. Kloeden [9] para mostrarmos a existência de uma família de atratores pullback. Também citamos os seguintes trabalhos [4, 8, 15, 10], onde os autores abordam o estudo da existência de atratores pullback.

Grosso modo, o atrator de um sistema dinâmico é um objeto que descreve completamente sua dinâmica assintótica.

Nas últimas décadas, o conceito de atrator para um sistema dinâmico autônomo tem sido consolidado e desenvolveu-se uma teoria geral bastante completa, por exemplo veja [15]. Nesta dissertação estudaremos a existência de atratores para um sistema dinâmico não autônomo (os atratores pullback).

Um dos motivos do estudo do atrator pullback é que este tem propriedades semelhantes ao atrator global para problemas autônomos (ver [8]). A ideia fundamental do estudo dos atratores pullback é

associá-los a um processo $U(\cdot, \cdot)$ de evolução para entender o comportamento assintótico do processo $U(\cdot, \cdot)$ no “passado”. Esta análise fica mais fácil se todas as soluções ficarem em uma família de subconjuntos limitados do espaço de fase. Para a existência de um atrator pullback (ou um atrator em geral) há que garantir três condições: Primeiro é que o atrator tem que atrair todas as soluções (a atração esta relacionada com as distâncias que tem as soluções até o atrator ao longo do tempo). Uma vez atraídas as soluções, a ideia é que elas entrem no atrator. Segundo, o atrator tem ser um conjunto compacto. A condição de compacidade garante que as soluções caiam no atrator e, uma vez dentro do atrator, que as soluções permaneçam aí. Terceiro, o atrator tem que ser invariante. Além dessas três condições, existe uma quarta condição que é que o atrator tem que ser minimal no sentido da primeira condição, esta condição garante a unicidade do atrator. Quando estudamos a existência e unicidade de atratores globais para semigrupos (problemas autônomos), esta quarta condição é uma consequência direta das outras três.

No capítulo 2 esta um dos resultados mais importantes de nosso trabalho, que é o Teorema de existência e unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = f(t, x) & \text{em } Q_\tau, \\ u = 0, & \text{sobre } \Sigma_\tau, \\ u(\tau, x) = u_\tau(x), & x \in \mathcal{O}_\tau, \end{cases} \quad (\text{EFM})$$

onde Q_τ é um domínio não cilíndrico.

Mais precisamente, neste capítulo apresentamos três teoremas de existência e unicidade de solução para o problema (EFM). O primeiro teorema mostra a existência de solução fraca quando $f \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$, o dado inicial $u_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$ e o domínio não cilíndrico é “cortado” em qualquer tempo $T \geq t \geq \tau$ fixado (Teorema 2.8). Além disso, com as condições de contorno neste primeiro teorema, mostramos a regularidade de solução (Teorema 2.9). O segundo Teorema de existência é praticamente um corolário do Teorema 2.8, pois usamos a densidade de $L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$ e $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$ em $L^2(\mathcal{O}_\tau)$ e $L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$ respectivamente. O terceiro teorema mostra a existência de solução fraca para o problema (EFM). Mas o primeiro teorema de existência não é demonstrado diretamente para o problema (EFM), pois não contamos com muita teoria para equações diferenciais com domínios que variam no tempo, então para poder mostrar este teorema fazemos uma mudança de variável transformando o domínio não cilíndrico em um domínio cilíndrico. Sobre o novo domínio cilíndrico, definimos um novo problema de evolução, que por meio da mudança de variável é equivalente ao problema (EFM).

No capítulo 3, mostramos a existência de uma família $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ - pullback atrator para o processo $U(\cdot, \cdot)$.

Primeiro mostramos que o processo $U(\cdot, \cdot)$ possui uma família de conjuntos $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -absorvente pullback (Lema 3.1) e que o processo $U(\cdot, \cdot)$ é $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -assintoticamente compacto pullback (Lema 3.2). Com isto provamos a existência de uma família $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ - pullback atrator para o processo $U(\cdot, \cdot)$ é consequência direta do Teorema 1.79.

Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentaremos os resultados importantes da análise matemática que usaremos para o desenvolvimento deste trabalho. Como por exemplo o Teorema de compacidade fraca-* de Alouglu (Teorema 1.15), Teorema de Imersão de Sobolev (Teorema 1.39), Teorema de regularidade para equações elípticas (Teorema 1.42) e o Teorema de existência de atratores pullback (Teorema 1.79).

1.1 Resultados importantes

Sejam $N, k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado e denotemos por $\partial\Omega$ a fronteira de Ω .

Definição 1.1. Dizemos que $\partial\Omega$ é de classe C^k se para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que

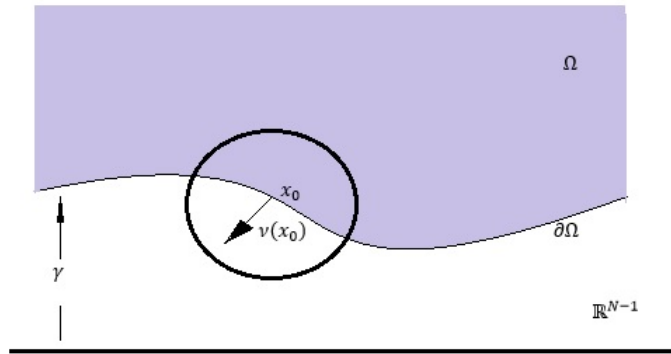
$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_N > \gamma(x_1, \dots, x_{N-1})\}.$$

Analogamente, $\partial\Omega$ é de classe C^∞ se $\partial\Omega$ é de classe C^k para $k = 1, 2, \dots$.

Agora vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e $\partial\Omega$ é de classe C^1 .

Teorema 1.2. (Formulas de Green) Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então

- (i) $\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma,$
- (ii) $\int_{\Omega} Dv Dv dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u d\sigma,$
- (iii) $\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$

Figura 1.1: A fronteira de Ω

Demonstração. Ver [7, Teorema 3, pág. 628]. □

Teorema 1.3. (Existência local) *Suponha que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é contínua e satisfaz*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(B)|x - y|$$

para x, y em conjuntos limitados $B \subset \mathbb{R}^N$ e a constante de Lipschitz $L(B)$ não depende de t . Então, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$, existe $T = T(x_0)$ tal que a equação

$$\begin{cases} x' = f(t, x) & , \\ x(0) = x_0 & , \end{cases} \quad (1.1)$$

tem uma única solução sobre $[0, T]$.

Demonstração. Ver [15, Teorema 2.3, pág. 45]. □

Lema 1.4. *Uma solução $x(t)$ da equação (1.1) tem um intervalo finito maximal de existência $[0, T^*)$ se e só se $|x(t)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow T^*$.*

Demonstração. Ver [15, Lema 2.4, pág. 48]. □

Teorema 1.5. (Teorema de Representação de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $w \in H$ tal que*

$$Tu = \langle w, u \rangle =: T_w u \quad \forall u \in H.$$

Além disso, a função $\tau : H \rightarrow \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ dada por $\tau w = T_w$ é um isomorfismo linear e uma isometria.

Demonstração. Ver [7, Teorema 2, pág. 639]. □

Espectro do Operador Laplaciano

Nesta seção faremos um estudo do espectro de operadores lineares compactos e simétricos que aparecem em vários problemas de valor de contorno. O resultado básico é o **Teorema de Courant-Fischer**, que fornece uma caracterização dos autovalores de tais operadores. Usaremos estes resultados para o operador $(-\Delta)^{-1}$ (inversa de $-\Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet).

Teorema 1.6. (Courant-Fischer) *Sejam X um espaço de Hilbert e $T : X \rightarrow X$ um operador linear compacto e simétrico. Então qualquer valor próprio positivo de T pode ser caracterizado por:*

$$\mu_n = \sup_{F_n} \inf_{\|u\|=1, u \in F_n} \langle Tu, u \rangle,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços n -dimensionais F_n . Analogamente, qualquer valor próprio negativo de T pode ser obtido como:

$$\mu_{-n} = \inf_{F_n} \sup_{\|u\|=1, u \in F_n} \langle Tu, u \rangle.$$

Demonstração. Ver [12, Teorema 5, pág. 240]. □

Autovalores do Laplaciano. Seja Ω um conjunto limitado em $\mathbb{R}^N$. Consideremos o seguinte problema de auto valor:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

isto é, queremos encontrar todas as auto funções $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $u \neq 0$, e auto valores $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo (1.2). Na formulação fraca do problema (1.2) procuramos $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, tal que

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \lambda \int_{\Omega} u v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.3)$$

onde $\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$ é um produto escalar padrão sobre o espaço de Hilbert $X = H_0^1(\Omega)$.

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ fixo. Então a aplicação $v \mapsto \int_{\Omega} u v dx$ é um funcional linear limitado definido sobre $H_0^1(\Omega)$. De fato: usando a desigualdade de Cauchy e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que $\langle u, v \rangle_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}$.

Agora, usando o teorema de representação de Riesz para funcionais lineares contínuos definidos sobre um espaço de Hilbert, obtemos que existe um elemento $Tu \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle Tu, v \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} uv dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observe que: O elemento Tu pode ser visto formalmente como $w := (-\Delta)^{-1}u$, já que $\langle w, v \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx = \int_{\Omega} (-\Delta w) v dx = \int_{\Omega} uv dx = \langle Tu, v \rangle_{H_0^1}$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Esta é a razão pela qual o operador T é às vezes escrito como $T = (-\Delta)^{-1}$ e chamado de operador solução associado a $-\Delta$.

Teorema 1.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. O operador $-\Delta$ com condição zero na fronteira possui uma sequência de valores próprios $\{\lambda_k\}$, $k \leq 1$ e*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$$

cuja caracterização variacional é dada por

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{F_k} \inf_{\|u\|_{H_0^1}=1, u \in F_k} \int_{\Omega} u^2(x) dx,$$

onde F_k são subespaços k -dimensionais de $H_0^1(\Omega)$. A sequência $\{\lambda_k\}$ tem um ponto de acumulação em ∞ ; i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$.

Demonstração. Ver [12, Teorema 7, pág. 241]. □

Observação: Se $k = 1$ então todo subespaço unidimensional F_1 é gerado por um vetor $u \neq 0$, de modo que o Teorema 1.7 implica:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} u^2 dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\lambda_1} \geq \frac{\|u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{H_0^1}^2}.$$

Assim, obtemos a seguinte versão da desigualdade de Poincaré:

Proposição 1.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Então*

$$\lambda_1 \|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H_0^1}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $\lambda_1 > 0$ é a melhor constante possível, já que para $u = \phi_1$ obtemos a desigualdade, onde ϕ_1 é a função própria associada ao valor próprio λ_1 .

Demonstração. Ver [12, Proposição 8, pág. 242]. □

Topologia fraca $\sigma(X, X')$

Sejam X um espaço de Banach, X' seu espaço dual e $f \in X'$. Denota-se por $\phi_f : X \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação dada por $\phi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Quando f percorre X' obtemos uma família $(\phi_f)_{f \in X'}$ de aplicações de X em $\mathbb{R}$.

Definição 1.9. *A topologia fraca $\sigma(X, X')$ sobre X é a topologia menos fina sobre X que torna contínuas todas as aplicações $(\phi_f)_{f \in X'}$.*

Notação: Dada uma sequência $\{x_n\}$ em X , denota-se por $x_n \rightharpoonup x$ a convergência de x_n a x na topologia fraca $\sigma(X, X')$.

Proposição 1.10. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência em X , então:*

- (i) $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in X'$.
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X')$.
- (iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X')$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- (iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X')$ e se $f_n \rightarrow f$ fortemente em X' , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração. Ver [1, Proposição III.5, pág. 35]. □

Proposição 1.11. *Quando X é de dimensão finita, a topologia fraca $\sigma(X, X')$ e a topologia usual coincidem. Em particular, uma sequência $\{x_n\}$ converge fracamente se, e somente se, converge fortemente.*

Demonstração. Ver [1, Proposição III.6, pág. 36]. □

Topologia fraca $\sigma(X', X)$

Vamos definir outra topologia sobre X' : a topologia fraca $*$ que vamos denotar por $\sigma(X', X)$. Para cada $x \in X$ considere a aplicação $\phi_x : X' \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi_x(f) = \langle f, x \rangle$. Quando x percorre X obtemos uma família de aplicações $\{\phi_x\}_{x \in X}$ de X' em $\mathbb{R}$.

Definição 1.12. *A topologia fraca $*$, designada também por $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina sobre X' que torna contínua todas as aplicações $\{\phi_x\}_{x \in X}$.*

Notação: Dada uma sequência $\{f_n\}$ em X' , denota-se por $f_n \rightharpoonup^* f$ a convergência na topologia fraca $*$, $\sigma(X', X)$.

Proposição 1.13. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em X' , então:*

- (i) $f_n \rightharpoonup^* f$ em $\sigma(X', X) \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in X$.
- (ii) Se $f_n \rightarrow f$ fortemente, então $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $\sigma(X', X'')$. Se $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $\sigma(X', X'')$, então $f_n \rightharpoonup^* f$ em $\sigma(X', X)$.
- (iii) Se $f_n \rightharpoonup^* f$ em $\sigma(X', X)$, então $\|f_n\|$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
- (iv) Se $f_n \rightharpoonup^* f$ em $\sigma(X', X)$ e se $x_n \rightarrow x$ fortemente em X , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração. Ver [1, Proposição III.12, pág. 40]. □

Teorema 1.14. (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *O conjunto $B_{X'} = \{f \in X'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca $*$, $\sigma(X', X)$.*

Demonstração. Ver [1, Teorema III.15, pág. 42]. □

Teoremas de Compacidade

Teorema 1.15. (Teorema de compacidade fraca $*$ de Alaoglu) *Seja X um espaço de Banach separável, e seja $\{f_n\}$ uma sequência limitada em X' , então $\{f_n\}$ tem uma subsequência fraca $*$ convergente.*

Demonstração. Seja $\{x_k\}$ uma sequência densa em X . Notar que se $\{f_n(x_k)\}$ converge para cada x_k , então $\{f_n(x)\}$ converge para todo $x \in X$. De fato: como $\{f_n\}$ é limitada, existe $M > 0$ tal que $\|f_n\|_{X'} \leq M$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, escolhemos k tal que $\|x_k - x\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, então temos que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x_k) - f_n(x)| + |f_n(x_k) - f_m(x_k)| + |f_m(x_k) - f_m(x)| \\ &< \varepsilon/3 + |f_n(x_k) - f_m(x_k)| + \varepsilon/3. \end{aligned}$$

O restante da demonstração segue por um argumento de diagonal. □

Corolário 1.16. (Compacidade fraca reflexiva) *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que a sequência $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ é limitada. Então existem uma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u_k\}_{k=1}^\infty$ e $u \in X$ tais que*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u.$$

Demonstração. Basta definir $G_k : X' \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo $G_k(f) = \langle f, u_k \rangle$ e depois aplicar o Teorema 1.15. $\square$

Corolário 1.17. *Seja H espaço de Hilbert então toda sequência limitada em H possui uma subsequência fracamente convergente em H .*

Demonstração. Basta usar o Corolário 1.16. $\square$

Método de Faedo-Galerkin

Este método foi idealizado para procurar soluções de problemas de evolução. Este foi desenvolvido por Sandro Faedo, trinta anos depois do método de Galerkin. Para ilustrar isto, consideremos o problema de evolução:

$$Au(t) = f(t), \quad (1.4)$$

$\Omega \times [0, \infty] \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$, onde $x = (x_1, \dots, x_N)$. A função $u(x_1, \dots, x_n, t)$ normalmente tem que satisfazer os dados iniciais

$$\frac{d^k u}{dt^k}(x, 0) = u_0^k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (1.5)$$

(onde u_0^k são funções conhecidas e $m \geq 1$ é o ordem da equação de evolução) e a condição de contorno, por exemplo,

$$u|_{\Sigma} = 0, \quad (1.6)$$

onde Σ é a fronteira lateral do cilindro $\Omega \times (0, T)$.

Dado um sistema completo de funções $\{w_j\}$ ortonormalizadas, $w_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e satisfazendo (1.6), queremos aproximar a solução de (1.4) - (1.6) por

$$u^N(x, t) = \sum_{j=1}^N g_j(t) w_j(x), \quad (1.7)$$

onde as funções $g_j(t)$ são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\int_{\Omega} \{A[u^N] - f\} w_j dx = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.8)$$

com condições iniciais

$$\frac{d^k g_j}{dt^k}(0) = \int_{\Omega} u_0^k w_j dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Se o sistema (1.8) é da forma normal, então as $g_j(t)$ estão bem definidas pelo menos localmente no tempo, e a solução $u(x, t)$ é obtida tomando limite em (1.7) quando $N \rightarrow \infty$.

1.2 Distribuições e Espaços Funcionais

No estudo de equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares (que possuem derivada no sentido clássico) faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1. Espaços das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ e $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, define-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte de ϕ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}$ em $\mathbb{R}^N$.

Introduzimos a seguinte noção de convergência. Uma sequência $\{\phi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge para zero e denotamos $\phi_n \rightarrow 0$ se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω , tal que:

- i) $\text{supp}(\phi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$;
- ii) $D^\alpha \phi_n \rightarrow 0$ uniformemente sobre $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que uma sequência $\{\phi_n\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ quando a sequência $\{\phi_n - \phi\}$ converge para zero no sentido de i) e ii) acima.

O espaço $C_c^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções teste, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2. Distribuições sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Definimos como distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado

espaço das distribuições sobre Ω , munido da seguinte noção de convergência: Seja $\{T_n\}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a sequência numérica $\{\langle T_n, \phi \rangle\}$ converge para $\langle T, \phi \rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3. Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço (das classes de) de funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω .

Destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω de $\mathbb{R}^N$, cuja fronteira $\partial\Omega$ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Se u e v se anulam sobre $\partial\Omega$ obtemos, do lema de Gauss, que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Embora, tal conceito de derivada tenha sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ele apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. A derivada de ordem α de T , no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição 1.18. *Seja $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$, como o espaço das (classes de) funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis em Ω e tais que $|f|^p$ é integrável segundo Lebesgue em Ω , isto é,*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mensurável e } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}.$$

O número

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

denomina-se norma do elemento $f \in L^p(\Omega)$.

Definição 1.19. *O espaço $L^\infty(\Omega)$, denomina-se espaço das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas e é dado por*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mensurável e } \exists C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\},$$

com norma definida por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \min\{M \geq 0 : |f| \leq M \text{ q.s. em } \Omega\},$$

onde q.s. significa: para quase todo ponto $x \in \Omega$.

Teorema 1.20. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $\{u_n\}$ uma sequência de funções, integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, que converge quase sempre para uma função u . Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_n| \leq u_0$ quase sempre, $\forall n \in \mathbb{N}$, então u é integrável e tem-se*

$$\int_{\Omega} u = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n.$$

Demonstração. Ver [1, Teorema IV.2, pág. 54]. □

Proposição 1.21. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [1, Teorema IV.6, pág. 56]. □

Proposição 1.22. (Desigualdade de Minkowski) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e f, g em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [1, Teorema IV.7, pág. 57]. □

O espaço $L^p(\Omega)$ foi definido para todo $1 \leq p \leq \infty$. Pelas Proposições 1.22 e 1.21 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma no espaço $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$, e pelo Teorema 1.20 o espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.

No caso particular $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Corolário 1.23. (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam $f_1, f_2, \dots, f_k$ funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$ onde $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração. Consequência do Teorema 1.21 (Desigualdade de Hölder). □

Proposição 1.24. (Desigualdade de Interpolação) *Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p < q \leq \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$ e tem-se a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta},$$

onde $\theta \in [0, 1]$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração. Consequência do Teorema 1.21 (Desigualdade de Hölder). □

Além dos resultados acima, temos que:

Proposição 1.25. i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$.

ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$.

iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem uma imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$.

iv) Se $\{f_n\}$ é uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω .

Demonstração. Ver [1, Teoremas IV.8, IV.9, IV.10, IV.12 e IV.13, pág. 57-62]. $\square$

Proposição 1.26. (Teorema de Representação de Riesz) *Sejam $p, q \in (1, +\infty)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\phi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única $u \in L^q(\Omega)$, tal que*

$$\langle \phi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

para todo $v \in L^p(\Omega)$ e $\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))'}$

Demonstração. Ver [1, Teorema IV.11, pág. 61]. $\square$

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.27. *Seja $\phi \in (L^1(\Omega))'$. Então existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \phi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

para todo $v \in L^1(\Omega)$ e $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^1(\Omega))'}$

Demonstração. Ver [1, Teorema IV.14, pág. 63]. $\square$

As Proposições 1.26 e 1.27 são muito importantes, pois expressam que toda forma bilinear continua sobre $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, pode ser representada por uma função em $L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. A aplicação $\phi \rightarrow u$ é uma isometria linear e sobrejetiva que permite identificar o dual de $L^p(\Omega)$ com $L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposição 1.28. (Lema de Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ q.t.p. em Ω , onde T_u é a distribuição definida por*

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [1, Teorema IV.2, pág. 61]. $\square$

Desta proposição tem-se que T_u é univocamente determinado por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$, se, e somente se, $u = v$ q.s. em Ω .

Proposição 1.29. *Seja $\{u_n\} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_{u_n} \rightarrow T_u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração. Consequência do Lema de Du Bois Raymond. □

Espaços de Sobolev

Seja Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Porém, não é verdade em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev que definiremos a seguir:

Definição 1.30. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty]$, o espaço de Sobolev $W^{n,p}(\Omega)$ define-se por*

$$W^{n,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq n\},$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada fraca.

No espaço $W^{n,p}(\Omega)$ define-se a norma:

Se $p \in [1, \infty)$

$$\|u\|_{W^{n,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq n} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

Se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{n,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq n} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Definição 1.31. *Seja $p \in [1, \infty]$, $W_0^{n,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com a norma de $W^{n,p}(\Omega)$.*

Dizemos que $u_m \rightarrow u$ em $W^{n,p}(\Omega)$ se, e somente se, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{n,p}(\Omega)} = 0$, e que $u_m \rightarrow u$ em $W_{loc}^{n,p}(\Omega)$ se, e somente se $u_m \rightarrow u$ em $W^{n,p}(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$. A notação $\subset\subset$ indica que $\bar{\Omega}'$ é compacto e $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

Observações:

1. $W^{0,p}(\Omega) = L^p$.
2. $u \in W_0^{n,p}(\Omega)$, então $\exists \{u_m\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \rightarrow u$ em $W^{n,p}(\Omega)$.
3. Assim como em $L^p(\Omega)$, em $W^{n,p}(\Omega)$ identificamos funções iguais q.t.p..
4. Usa-se a notação $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Teorema 1.32. *$W^{n,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Temos que $W^{n,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_{W^{n,p}(\Omega)}$ é uma norma. Seja $\{u_m\}$ uma sequência de Cauchy em $W^{n,p}(\Omega)$, então $\{D^\alpha u_m\}$, $|\alpha| \leq n$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é Banach, existem funções $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u_m \rightarrow u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$.

Vamos demonstrar que $D^\alpha u = u_\alpha$ de fato: Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, assim

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m D^\alpha \phi dx = \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_m \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi dx,$$

e então $D^\alpha u = u_\alpha$ no sentido fraco. Portanto $u \in L^p(\Omega)$ e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $|\alpha| \leq n$. Logo $u \in W^{n,p}(\Omega)$. $\square$

Observação: $W^{n,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. É possível mostrar que $W^{n,p}(\Omega)$ é separável ($1 \leq p < \infty$), usando o fato que $L^p(\Omega)$ é separável.

Teorema 1.33. (Propriedades de $W^{n,p}(\Omega)$) *Sejam $u, v \in W^{n,p}(\Omega)$, então:*

1. $D^\alpha u \in W^{n-|\alpha|,p}(\Omega)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\beta+\alpha}u$ para todo multi-índice α, β , com $|\alpha| + |\beta| \leq n$.
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{n,p}(\Omega)$ e $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha(u) + \mu D^\alpha(v)$.
3. Se Ω' é aberto e $\Omega' \subset \Omega$, então $u \in W^{n,p}(\Omega')$.
4. Se $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $\zeta u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $D(\zeta u) = (D\zeta)u + \zeta(Du)$.

Observação: Usando o fato 4 e indução tem-se que

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\beta \leq \alpha$ se, e somente se, $\beta_i \leq \alpha_i$

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \text{ com } \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!.$$

Teorema 1.34. (Aproximação global até a fronteira) *Seja $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e de classe C^1 . Seja $u \in W^{n,p}(\Omega)$, então existe $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ tal que $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\forall m \in \mathbb{N}$, e $u_m \rightarrow u$ em $W^{n,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [7, Teorema 3, pág. 252]. $\square$

Teorema 1.35. *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Demonstração. Ver [1, Teorema IX.5, pág. 155]. □

Teorema 1.36. (Mudança de variável) *Sejam Ω e Ω' dois abertos de $\mathbb{R}^N$ e seja $H : \Omega' \rightarrow \Omega$ uma aplicação bijetora, $x = H(y)$, tal que*

$$H \in C^1(\Omega'), \quad H^{-1} \in C^1(\Omega), \quad \text{Jac}(H) \in L^\infty(\Omega'), \quad \text{Jac}(H^{-1}) \in L^\infty(\Omega).$$

onde $\text{Jac}(H)$ é o jacobiano da aplicação H . Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ e

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y), \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Demonstração. Ver [1, Teorema IX.6, pág. 156]. □

Definição 1.37. Se $1 \leq p \leq N$ o conjugado de Sobolev de p é

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Note que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad p^* > p.$$

Teorema 1.38. (Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) *Suponha que $1 \leq p < N$. Existe uma constante C que depende somente de p e N tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Teorema 1.39. (Teorema de imersão de Sobolev) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^k e $u \in H^k(\Omega)$.*

i) *Se $k < N/2$, então $u \in L^{2N/(N-2k)}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^{2N/(N-2k)}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

ii) *Se $k = N/2$, então $u \in L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$ e, para cada p , existe uma constante $C = C(p) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

iii) Se $k > j + (N/2)$, então $u \in C^j(\overline{\Omega})$ e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u(x)\|_{C^j(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [15, Teorema 5.31, pág. 142]. □

Teorema 1.40. (Teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado de classe C^1 . Então $H^1(\Omega)$ esta compactamente imerso em $L^2(\Omega)$.

Demonstração. Ver [15, Teorema 5.32, pág. 143]. □

Proposição 1.41. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ aberto e limitado. Sejam $\{g_n\}$ e g funções em $L^q(\Omega)$ tais que

$$\|g_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C \text{ e } g_n \rightarrow g \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

então $g_n \rightharpoonup g$ em $L^q(\Omega)$.

Demonstração. Ver [15, Lema 8.3, pág. 218]. □

Resultado de Regularidade

Consideremos o operador diferencial de segunda ordem em sua forma divergente

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^N b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

para funções coeficientes dadas a^{ij}, b^i, c ($i, j = 1, \dots, N$).

Assumiremos também a condição de simetria $a^{ij} = a^{ji}$ ($i, j = 1, \dots, N$).

Teorema 1.42. (Regularidade H^2) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado, aberto e de classe C^2 , $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ ($i, j = 1, \dots, N$) e $f \in L^2(\Omega)$.

Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in H^2(\Omega)$ e, além disso,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

onde a constante $C > 0$ depende somente de Ω e dos coeficientes de L .

Demonstração. Ver [7, Teorema 4, pág. 317]. □

Teorema 1.43. (Regularidade H^m) Seja $m \in \mathbb{N}$ e assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, aberto e de classe C^{m+2} , a^{ij} , b^i , $c \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ ($i, j = 1, \dots, N$) e $f \in H^m(\Omega)$.

Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} Lu = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

Então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ e, além disso,

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

onde a constante $C > 0$ depende somente de m , Ω e dos coeficientes de L .

Demonstração. Ver [7, Teorema 5, pág. 323]. □

Espaço $L^p(\tau, T; X)$

Seja X um espaço de Banach, para cada $t \in [\tau, T]$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x, t)$ como um elemento do espaço X . Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$ com valores no espaço X .

Definição 1.44. Sejam X um espaço de Banach, τ, T fixos, com $\tau \leq T$ e $p \in [1, \infty]$. Denotamos por $L^p(\tau, T; X)$, o conjunto de funções mesuráveis $u : (\tau, T) \rightarrow X$ tal que $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(\tau, T)$.

Define-se a seguinte norma para o espaço $L^p(\tau, T; X)$

$$\|u\|_{L^p(\tau, T; X)} = \|\|u(\cdot)\|_X\|_{L^p(\tau, T)}.$$

O espaço $C^m([\tau, T]; X)$, $m = 1, 2, \dots$ consiste de todas as funções contínuas $u : [\tau, T] \rightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até o ordem m em $[\tau, T]$. A norma em $C^m([\tau, T]; X)$ é dada por

$$\|u\|_{C^m([\tau, T]; X)} = \sum_{i=1}^m \max_{t \in [\tau, T]} \|u^{(i)}(t)\|_X.$$

Proposição 1.45. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, X e Y espaços de Banach e $\mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.*

- (a) $C^m([\tau, T]; X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.
- (b) $L^p(\tau, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, e $L^\infty([\tau, T]; X)$ são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.
- (c) O conjunto de todas as funções escada é denso em $L^p(\tau, T; X)$.
- (d) $C^m([\tau, T]; X)$ é denso em $L^p(\tau, T; X)$ e a imersão $C^m([\tau, T]; X) \hookrightarrow L^p(\tau, T; X)$ é contínua.
- (e) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(\cdot, \cdot)_X$, então $L^2(\tau, T; X)$ também é um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u, v)_{L^2(\tau, T; X)} := \int_{\tau}^T (u(t), v(t))_X dt.$$

- (f) $L^p(\tau, T; X)$ é separável, se X é separável e $1 \leq p < \infty$.
- (g) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(\tau, T; X) \hookrightarrow L^q(\tau, T; Y)$, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

Demonstração. Ver [17, Proposição 23.2, pág. 407]. □

Sejam U e V dois espaços vetoriais topológicos. Denotamos por $\mathcal{L}(U, V)$ o espaço dos funcionais lineares e contínuos de U em V .

O espaço das distribuições sobre (τ, T) com imagem sobre X será denotado por $\mathcal{D}'(\tau, T; X)$. Assim $\mathcal{D}'(\tau, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\tau, T); X)$ é o conjunto de todas as aplicações lineares e limitadas de $\mathcal{D}(\tau, T)$ em X . A noção de convergência em $\mathcal{D}'(\tau, T; X)$ é dada como segue: Seja $S \in \mathcal{D}'(\tau, T; X)$, logo $S : \mathcal{D}(\tau, T) \rightarrow X$ é linear e se $\theta_n \rightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(\tau, T)$ então $S(\theta_n) \rightarrow S(\theta)$ em X . Diremos que $S_n \rightarrow S$ em $\mathcal{D}'(\tau, T; X)$ se $S_n(\theta) \rightarrow S(\theta)$ em X para todo $\theta \in \mathcal{D}(\tau, T)$.

A derivada $\frac{dS}{dt}$, para $S \in \mathcal{D}'(\tau, T; X)$, é definida como o único elemento deste espaço que satisfaz

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \phi \right\rangle = - \left\langle S, \frac{d\phi}{dt} \right\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\tau, T).$$

A função $S \rightarrow \frac{dS}{dt}$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(\tau, T; X)$ sobre ele mesmo.

Agora, se $f \in L^2(\tau, T; X)$, definimos $\tilde{f}$ por

$$\langle \tilde{f}, \phi \rangle = \int_{\tau}^T f(t)\phi(t)dt, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\tau, T).$$

A função $f \rightarrow \tilde{f}$, de $L^2(\tau, T; X)$ em $\mathcal{D}'(\tau, T; X)$ é linear e continua, e ainda é injetora. Desta forma, identificamos $\tilde{f}$ por f e obtemos

$$L^2(\tau, T; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\tau, T; X).$$

O espaço $L^1_{loc}(\tau, T; X)$ é o espaço das funções u tais que para todo compacto $K \subset (\tau, T)$, $u\chi_K \in L^1(\tau, T; X)$, onde χ_K denota a função característica de K .

Definição 1.46. *Seja $J \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $J(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\int_{\mathbb{R}} J(t)dt = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, definamos*

$$J_{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}J\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \text{ e } (J_{\varepsilon} * u)(t) = \int_{\mathbb{R}} J_{\varepsilon}(t-s)u(s)ds,$$

para as funções u em que o lado direito da última igualdade faz sentido.

Proposição 1.47. *Seja u uma função definida sobre $\mathbb{R}$ que anula-se fora de um intervalo I .*

(a) *Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; X)$, então $J_{\varepsilon} * u \in C^{\infty}(\mathbb{R}; X)$.*

(b) *Se $u \in L^2(\mathbb{R}; X)$, então $J_{\varepsilon} * u \in L^2(\mathbb{R}; X)$. Além disso, $\|J_{\varepsilon} * u\|_{L^2(\mathbb{R}; X)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}; X)}$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|J_{\varepsilon} * u - u\|_{L^2(\mathbb{R}; X)} = 0$.*

Demonstração. Ver [17, pág. 410]. □

Consideremos $L^p(\tau, T; X)$ e $L^q(\tau, T; X')$. Então temos a seguinte relação de dualidade $(L^p(\tau, T; X))' = L^q(\tau, T; X')$ quando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ devido ao teorema seguinte.

Teorema 1.48. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(a) *Cada função $v \in L^q(\tau, T; X')$ corresponde a um único funcional $\bar{v} \in (L^p(\tau, T; X))'$ dado por*

$$\langle \bar{v}, u \rangle = \int_{\tau}^T \langle v(t)u(t) \rangle_X dt, \quad \forall u \in L^p(\tau, T; X). \quad (1.10)$$

Reciprocamente, cada $\bar{v} \in (L^p(\tau, T; X))'$ corresponde a exatamente uma função $v \in L^q(\tau, T; X')$ dada por (1.10). Além disso $\|\bar{v}\|_{(L^p(\tau, T; X))'} = \|v\|_{L^q(\tau, T; X')}.$

(b) *O espaço de Banach $L^p(\tau, T; X)$ é reflexivo e separável.*

Demonstração. Ver [17, Teorema 23.7, pág. 411]. □

Espaço $L^p(\tau, T; X_t)$

Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto, limitado e não vazio com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe C^2 e

$$\begin{aligned} r : \overline{\mathcal{O}} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (y, t) &\mapsto r(y, t) \end{aligned}$$

uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:

H1: r é de classe $C^1(\overline{\mathcal{O}} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$,

H2: $r(\cdot, t) : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_t$ é um difeomorfismo de classe C^2 , $\forall t \in \mathbb{R}$, onde $\mathcal{O}_t = r(\mathcal{O}, t)$.

Agora denotemos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} Q_{\tau, T} &:= \bigcup_{t \in (\tau, T)} \mathcal{O}_t \times \{t\}, \quad \forall T > \tau, \\ Q_{\tau} &:= \bigcup_{t \in (\tau, +\infty)} \mathcal{O}_t \times \{t\}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \\ \Sigma_{\tau, T} &:= \bigcup_{t \in (\tau, T)} \partial\mathcal{O}_t \times \{t\}, \\ \Sigma_{\tau} &:= \bigcup_{t \in (\tau, +\infty)} \partial\mathcal{O}_t \times \{t\}. \end{aligned}$$

O conjunto $Q_{\tau, T}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{N+1}$ cuja fronteira é dada por

$$\partial Q_{\tau, T} = \Sigma_{\tau, T} \cup (\mathcal{O}_{\tau} \times \{\tau\}) \cup (\mathcal{O}_T \times \{T\}).$$

Suponhamos que a função $\bar{r} = \bar{r}(x, t)$, dada por $\bar{r}(\cdot, t) = r^{-1}(\cdot, t)$, satisfaz

H3: $\bar{r} \in C^{2,1}(\overline{Q}_{\tau, T}; \mathbb{R}^N) \quad \forall \tau < T$, i.e., $\bar{r}$, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x_i \partial x_j}$ pertencem a $C(\overline{Q}_{\tau, T}; \mathbb{R}^N)$, para todo $1 \leq i, j \leq N$, para todo $\tau < T$.

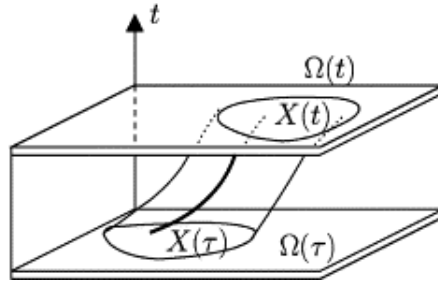


Figura 1.2: Interpretação geométrica domínios não cilíndricos

Exemplo 1.49. Suponhamos que $\mathcal{O} = (0, 1)$, $\tau = 0$ e $T > 0$. Então o conjunto $Q_{0,T}$ é dado por

$$Q_{0,T} = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T); \alpha(t) < x < \beta(t)\},$$

onde $\alpha, \beta \in C^1(0, \infty)$ são tais que $\gamma(t) := \beta(t) - \alpha(t) > 0$, $\forall t \geq 0$. Fazendo uma mudança de coordenadas no conjunto $Q_{0,T}$ obtemos o conjunto $Q = \mathcal{O} \times (0, T)$, dado por

$$\begin{aligned} r : Q_{0,T} &\rightarrow Q \\ (x, t) &\mapsto (y, t) = \left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}, t \right) \end{aligned}$$

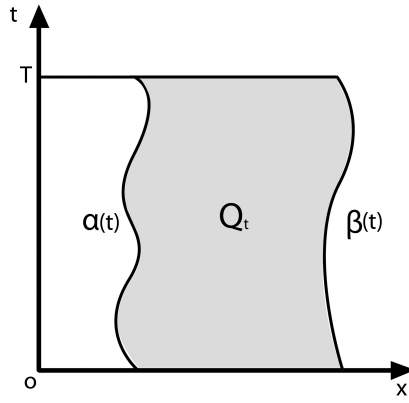


Figura 1.3:

Sejam $\tau, T \in \mathbb{R}$ com $\tau \leq T$ e seja $\{X_t\}_{t \in [\tau, T]}$ uma família de espaços de Banach com $\|\cdot\|_{X_t}$ sendo suas respectivas normas, tal que $X_t \subset L^1_{loc}(\mathcal{O}_t)$ para todo $t \in [\tau, T]$.

Definição 1.50. Para $p \in [1, \infty]$, denotamos por $L^p(\tau, T; X_t)$ o conjunto das funções $u \in L^1_{loc}(Q_{\tau, T})$ tal que $u(t) = u(\cdot, t) \in X_t$ para q.s. $t \in (\tau, T)$, e a função $\|u(\cdot)\|_X$ definida por $t \mapsto \|u(t)\|_{X_t}$, pertence a $L^p(\tau, T)$.

Em $L^p(\tau, T; X_t)$ consideramos a norma

$$\|u\|_{L^p(\tau, T; X_t)} := \|\|u(\cdot)\|_X\|_{L^p(\tau, T)}.$$

Cada $u \in L^1_{loc}(Q_{\tau, T})$, pode ser estendida trivialmente a $\mathbb{R}^n \times (\tau, T)$ da seguinte forma:

$$\hat{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & (x, t) \in \mathcal{O}_t \times (\tau, T), \\ 0, & (x, t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_t) \times (\tau, T). \end{cases}$$

Para $1 \leq p, q \leq \infty$, temos

$$u \in L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t)) \Rightarrow \widehat{u} \in L^p(\tau, T; L^q(\mathbb{R}^N)) \quad (1.11)$$

e

$$u \in L^p(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t)) \Rightarrow \widehat{u} \in L^p(\tau, T; H_0^1(\mathbb{R}^N)), \quad (1.12)$$

com

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_i} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \quad \forall 1 \leq i \leq N. \quad (1.13)$$

Definição 1.51. *Seja $u \in L_{loc}^1(Q_{\tau, T})$. Se existe $v \in L_{loc}^1(Q_{\tau, T})$ tal que*

$$\langle v, \phi \rangle = - \int_{Q_{\tau, T}} \phi'(x, t) u(x, t) dx dt, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(Q_{\tau, T}),$$

dizemos que v é a derivada de u com respeito ao tempo, no sentido das distribuições em $Q_{\tau, T}$, e denotamos por $u' = u_t := v$, onde $\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ é a derivada parcial clássica.

Lema 1.52. *Se $u \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))$ e $u' \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$, então a extensão trivial $\widehat{u}$ de u pertence a $H^1(\mathbb{R}^N \times (\tau, T))$ e sua derivada com respeito ao tempo é dada por*

$$\widehat{u}' = \widehat{u}'. \quad (1.14)$$

Demonstração. Como $u \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))$ e $u' \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$, segue que $u \in H^1(Q_{\tau, T})$. De (1.13) segue que

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_i} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Agora mostremos que $\widehat{u}' = \widehat{u}'$. De fato; Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times (\tau, T))$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \times (\tau, T)} \widehat{u}(x, t) \phi'(x, t) dx dt &= \int_{Q_{\tau, T}} u(x, t) \phi'(x, t) dx dt \\ &= - \int_{Q_{\tau, T}} u'(x, t) \phi(x, t) dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N \times (\tau, T)} \widehat{u}'(x, t) \phi(x, t) dx dt \end{aligned}$$

e isto mostra (1.14). □

Definição 1.53. *Dizemos que uma função $u \in L_{loc}^1(Q_{\tau, T})$ pertence a $C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}_t))$ se a extensão trivial $\widehat{u} \in C([\tau, T]; L^2(\mathbb{R}^N))$ e dizemos que uma sequência $\{u_m\}$ converge para u em $C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}_t))$,*

quando $m \rightarrow \infty$, se a sequência $\{\widehat{u_m}\}$ converge para $\widehat{u}$ em $C([\tau, T]; L^2(\mathbb{R}^N))$, quando $m \rightarrow \infty$.

Definição 1.54. Dizemos que uma função $u \in L^1_{loc}(Q_{\tau, T})$ está em $C([\tau, T]; H^1_0(\mathcal{O}_t))$ se a extensão trivial $\widehat{u} \in C([\tau, T]; H^1(\mathbb{R}^N))$ e dizemos que uma sequência $\{u_m\}$ converge para u em $C([\tau, T]; H^1_0(\mathcal{O}_t))$, quando $m \rightarrow \infty$, se a sequência $\{\widehat{u_m}\}$ converge para $\widehat{u}$ em $C([\tau, T]; H^1(\mathbb{R}^N))$, quando $m \rightarrow \infty$.

A partir de agora usaremos $(\cdot, \cdot)_t$ e $|\cdot|_t$ para denotar o produto interno usual e a norma associada em $L^2(\mathcal{O}_t)$ ou $(L^2(\mathcal{O}_t))^N$.

Corolário 1.55. Se $u \in L^2(\tau, T; H^1_0(\mathcal{O}_t))$ e $u' \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$, então $u \in C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}_t))$ e satisfaz a igualdade de energia

$$|u(t_2)|_{t_2}^2 - |u(t_1)|_{t_1}^2 = 2 \int_{t_1}^{t_2} (u'(t), u(t))_t dt.$$

Demonstração. Do Lema 1.52 segue que $\widehat{u} \in H^1(\mathbb{R}^N \times (\tau, T))$. Da densidade de $C^\infty(\mathbb{R}^N \times [\tau, T])$, existe uma sequência $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^N \times [\tau, T])$ tal que $u_m \rightarrow \widehat{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^N \times (\tau, T))$. Pelo teorema fundamental do calculo obtemos

$$|u_m(t_2)|_{t_2}^2 - |u_m(t_1)|_{t_1}^2 = 2 \int_{t_1}^{t_2} ((u'_m(t), u_m(t))_t) dt.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$|\widehat{u}(t_2)|_{t_2}^2 - |\widehat{u}(t_1)|_{t_1}^2 = 2 \int_{t_1}^{t_2} (\widehat{u}'(t), \widehat{u}(t))_t dt,$$

para q.s. $\tau < t_1 < t_2 < T$. Portanto redefinindo u (sobre um conjunto de medida nula) segue que $u \in C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}_t))$. $\square$

Consideremos o intervalo finito $[\tau, T]$. Seja

$$v(y, t) = u(r(y, t), t) \quad \text{para } y \in \mathcal{O}, t \in [\tau, T]$$

ou equivalentemente,

$$u(x, t) = v(\bar{r}(x, t), t) \quad \text{para } x \in \mathcal{O}_t, t \in [\tau, T].$$

Das hipóteses **H1**, **H2** e **H3** sob r e $\bar{r}$, temos os seguintes resultados.

Lema 1.56. Para $1 \leq p, q \leq \infty$, $u \in L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t))$ se, e somente se, $v \in L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}))$. Além disso, existem duas constantes positivas C_1 e C_2 (que dependem unicamente de p, q, r, τ e T) tais que

$$C_1 \|u\|_{L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t))} \leq \|v\|_{L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}))} \leq C_2 \|u\|_{L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t))}, \quad (1.15)$$

para todo $u \in L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t))$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t))}^p &= \int_{\tau}^T \left(\int_{\mathcal{O}_t} |u(x, t)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \\ &= \int_{\tau}^T \left(\int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t, t)} |u(r(y, t), t)|^q Jac(r, y, t) dy \right)^{\frac{p}{q}} dt \\ &\leq \left(\max_{(y, t) \in \bar{\mathcal{O}} \times [\tau, T]} |Jac(r, y, t)| \right)^{\frac{p}{q}} \int_{\tau}^T \left(\int_{\mathcal{O}} |v(y, t)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} dt \end{aligned}$$

escolhendo $0 < C_1 \leq \frac{1}{(\max_{(y, t) \in \bar{\mathcal{O}} \times [\tau, T]} |Jac(r, y, t)|)^{\frac{p}{q}}}$, temos

$$C_1 \|u\|_{L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t))} \leq \|v\|_{L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}))}.$$

Por outro lado, da hipótese sobre $\bar{r}$ segue que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}))} \leq C_2 \|u\|_{L^p(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t))}$$

e isto mostra a desigualdade (1.15). □

Se para algum $t \in (\tau, T)$ a função $u(t) = u(\cdot, t) \in H^1(\mathcal{O}_t)$, então a função $v(\cdot, t) = u(r(\cdot, t), t) \in H^1(\mathcal{O})$ e

$$\frac{\partial v}{\partial y_j}(y, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(r(y, t), t) \frac{\partial r_i(y, t)}{\partial y_j}.$$

Analogamente, se para algum $t \in (\tau, T)$ a função $v(t) = v(\cdot, t) \in H^1(\mathcal{O})$, então a função $u(\cdot, t) = v(\bar{r}(\cdot, t), t) \in H^1(\mathcal{O}_t)$ e

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial y_j}(\bar{r}(x, t), t) \frac{\partial \bar{r}_j(x, t)}{\partial x_i}.$$

Lema 1.57. $u \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))$ se, e somente se, $v \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))$. Além disso, existem duas constantes positivas C_1 e C_2 (que dependem somente de r, τ e T) tais que

$$C_1 \|u\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))} \leq \|v\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))} \leq C_2 \|u\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))}, \quad (1.16)$$

para todo $u \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))}^2 &= \int_{\tau}^T \int_{\mathcal{O}_t} |u(x, t)|^2 + |Du(x, t)|^2 dx dt \\
&= \int_{\tau}^T \int_{\mathcal{O}_t} |u(x, t)|^2 + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right|^2 dx dt \\
&= \int_{\tau}^T \int_{\mathcal{O}_t} |u(x, t)|^2 + \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial y_j}(\bar{r}(x, t), t) \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial x_i}(x, t) \right|^2 dx dt \\
&= \int_{\tau}^T \int_{\mathcal{O}} (|v(y, t)|^2 + \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial y_j}(\bar{r}(r(y, t), t), t) \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial x_i}(r(y, t), t) \right|^2) Jac(r, y, t) dy dt \\
&\leq \max_{i,j=1,\dots,N} \left\{ \left\| \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial x_i} \right\|_{\infty}^2 \right\} \left(\max_{(y,t) \in \bar{\mathcal{O}} \times [\tau, T]} |Jac(r, y, t)| \right) \int_{\tau}^T \int_{\mathcal{O}} |v(y, t)|^2 \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial v}{\partial y_j}(y, t) \right|^2 dy dt.
\end{aligned}$$

Escolhendo $0 < C_1 \leq (\max_{i,j=1,\dots,N} \left\{ \left\| \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial x_i} \right\|_{\infty}^2 \right\} (\max_{(y,t) \in \bar{\mathcal{O}} \times [\tau, T]} |Jac(r, y, t)|))^{-1/2}$, segue que

$$C_1 \|u\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))} \leq \|v\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))}.$$

Fazendo as mesmas contas e sob a hipótese relativa a $\bar{r}$, segue que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))} \leq C_2 \|u\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))},$$

e isto mostra a desigualdade (1.16). □

Lema 1.58. $u \in L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O}_t)) \Leftrightarrow v \in L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O}))$. Além disso, existem duas constantes positivas C_1 e C_2 (que dependem unicamente de r , τ e T) tais que

$$C_1 \|u\|_{L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O}_t))} \leq \|v\|_{L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O}))} \leq C_2 \|u\|_{L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O}_t))}, \quad (1.17)$$

para todo $u \in L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O}_t))$.

Demonstração. A demonstração é análoga a dos lemas anteriores. □

Lema 1.59. Suponhamos que **H1** e **H2** valem. A função $u \in C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}_t))$ se, e somente se, $v \in C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}))$.

Demonstração.

(a) Suponhamos que $v \in C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}))$. Vamos mostrar que a extensão trivial $\widehat{u} \in C([\tau, T]; L^2(\mathbb{R}^N))$.

Para $t_0, t \in [\tau, T]$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(x, t) - \widehat{u}(x, t_0)|^2 dx &= \int_{\mathcal{O}_{t_0} \cap \mathcal{O}_t} |u(x, t) - u(x, t_0)|^2 dx + \int_{\mathcal{O}_{t_0} \setminus \mathcal{O}_t} |u(x, t_0)|^2 dx \\ &\quad + \int_{\mathcal{O}_t \setminus \mathcal{O}_{t_0}} |u(x, t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.18)$$

No que segue, vamos estimar cada um dos termos do lado direito de (1.18).

Pela continuidade uniforme de r sobre $\overline{\mathcal{O}} \times [\tau, T]$, temos

$$mes(\mathcal{O}_{t_0} \setminus \mathcal{O}_t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0, \quad (1.19)$$

onde mes indica a medida de Lebesgue de um conjunto.

Por outro lado, sabemos que $v(\cdot, t_0) \in L^2(\mathcal{O})$, então $u(x, t_0) = v(\bar{r}(x, t_0), t_0) \in L^2(\mathcal{O}_{t_0})$, por (1.19) temos

$$\int_{\mathcal{O}_{t_0} \setminus \mathcal{O}_t} |u(x, t_0)|^2 dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \quad (1.20)$$

De (1.19) e das propriedades de $\bar{r}$, obtemos $mes(\bar{r}(\mathcal{O}_t \setminus \mathcal{O}_{t_0}, t)) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow t_0$, logo pela continuidade de v obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}_t \setminus \mathcal{O}_{t_0}} |u(x, t)|^2 dx &= \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \setminus \mathcal{O}_{t_0}, t)} |v(y, t)|^2 Jac(r, y, t) dy \\ &= \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \setminus \mathcal{O}_{t_0}, t)} |v(y, t) - v(y, t_0) + v(y, t_0)|^2 Jac(r, y, t) dy \\ &\leq C_r \left(\int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \setminus \mathcal{O}_{t_0}, t)} |v(y, t) - v(y, t_0)|^2 dy + \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \setminus \mathcal{O}_{t_0}, t)} |v(y, t_0)|^2 dy \right) \\ &\leq C_r \left(\int_{\mathcal{O}} |v(y, t) - v(y, t_0)|^2 dy + \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \setminus \mathcal{O}_{t_0}, t)} |v(y, t_0)|^2 dy \right) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

onde $Jac(r, y, t)$ denota o valor absoluto do determinante da matriz jacobiana $(\frac{\partial r_i}{\partial y_j}(y, t))_{N \times N}$.

Finalmente

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}} |u(x, t) - u(x, t_0)|^2 dx = \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}, t_0)} |u(r(y, t_0), t) - v(y, t_0)|^2 Jac(r, y, t_0) dy \\
& = \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}, t_0)} |v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t) - v(y, t_0)|^2 Jac(r, y, t_0) dy \\
& = \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}, t_0)} |v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t) - v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t_0) \\
& \quad + v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t_0) - v(y, t_0)|^2 Jac(r, y, t_0) dy \\
& \leq C_r \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}, t_0)} (|v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t) - v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t_0)|^2 \\
& \quad + |v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t_0) - v(y, t_0)|^2) dy.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
& \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}, t_0)} (|v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t) - v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t_0)|^2 dy \\
& \leq \int_{U_t} (|v(z, t) - v(z, t_0)|^2 Jac(f^{-1}, z, t) dz \\
& \leq C_r \int_{U_t} (|v(z, t) - v(z, t_0)|^2 dz \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0,
\end{aligned} \tag{1.22}$$

onde $z = f(y) = \bar{r}(r(y, t_0), t)$, $(\mathcal{O} \supset) U_t := \bar{r}(\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}, t_0)$ e usamos a continuidade de v .

Por outro lado, para $\varepsilon \ll 1$, temos

$$\bar{r}(r(y, t_0), t) \rightarrow y \quad \forall y \in \bar{r}\left(\bigcap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s, t_0\right) \quad t \rightarrow t_0,$$

$$(\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}) \setminus \bigcap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s \subset \mathcal{O}_{t_0} \setminus \bigcap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s,$$

e já que

$$\bar{r}(\mathcal{O}_{t_0} \setminus \bigcap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s, t_0) \subset \mathcal{O} \setminus \bar{r}\left(\bigcap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s, t_0\right)$$

$$mes(\bar{r}(\mathcal{O}_{t_0} \setminus \bigcap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s, t_0)) \leq mes(\mathcal{O} \setminus \bar{r}\left(\bigcap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s, t_0\right)) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

além disso, como $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, de

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}, t_0)} |v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t_0) - v(y, t_0)|^2 dy \\ & \leq \int_{\bar{r}(\cap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s, t_0)} |v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t_0) - v(y, t_0)|^2 dy \\ & + 2 \int_{\bar{r}((\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}) \setminus \cap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s, t_0)} (|v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t_0)|^2 + |v(y, t_0)|^2) dy, \end{aligned}$$

obtemos

$$\int_{\bar{r}(\mathcal{O}_t \cap \mathcal{O}_{t_0}, t_0)} |v(\bar{r}(r(y, t_0), t), t_0) - v(y, t_0)|^2 dy \rightarrow 0 \quad t \rightarrow t_0. \quad (1.23)$$

Substituindo (1.20)-(1.23) em (1.18), obtemos que $\hat{u} \in C([\tau, T]; L^2(\mathbb{R}^N))$.

- (b) Agora, assumindo que $\hat{u} \in C([\tau, T]; L^2(\mathbb{R}^N))$, vamos mostrar que $v \in C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}))$ para quaisquer $t_0, t \in [\tau, T]$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} |v(y, t) - v(y, t_0)|^2 dy &= \int_{\mathcal{O}_{t_0}} |v(\bar{r}(x, t_0), t) - u(x, t_0)|^2 Jac(\bar{r}, x, t_0) dy \\ &= \int_{\mathcal{O}_{t_0}} |u(r(\bar{r}(x, t_0), t), t) - u(x, t_0)|^2 Jac(\bar{r}, x, t_0) dy \\ &\leq \int_{\mathcal{O}_{t_0}} |u(r(\bar{r}(x, t_0), t), t) - \hat{u}(r(\bar{r}(x, t_0), t), t_0)|^2 Jac(\bar{r}, x, t_0) dy \\ &+ \int_{\mathcal{O}_{t_0}} |\hat{u}(r(\bar{r}(x, t_0), t), t_0) - u(x, t_0)|^2 Jac(\bar{r}, x, t_0) dy \\ &\leq C_r(I_1(t) + I_2(t)), \end{aligned}$$

aqui

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_{\mathcal{O}_{t_0}} |u(r(\bar{r}(x, t_0), t), t) - \hat{u}(r(\bar{r}(x, t_0), t), t_0)|^2 dy \\ &= \int_{\mathcal{O}_t} |u(z, t) - \hat{u}(z, t), t_0)|^2 Jac(h^{-1}, z, t) dz \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde $z = h(x) = r(\bar{r}(x, t_0), t) : \mathcal{O}_{t_0} \rightarrow \mathcal{O}_t$ e usamos a continuidade de $\hat{u}$, e

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \int_{\mathcal{O}_{t_0}} |\hat{u}(r(\bar{r}(x, t_0), t), t_0) - u(x, t_0)|^2 dy \\
&= \int_{\bigcap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s} |\hat{u}(r(\bar{r}(x, t_0), t), t_0) - u(x, t_0)|^2 dy \\
&\quad + \int_{\mathcal{O}_{t_0} \setminus \bigcap_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \mathcal{O}_s} |\hat{u}(r(\bar{r}(x, t_0), t), t_0) - u(x, t_0)|^2 dy.
\end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento feito na parte (a) temos

$$I_2(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow t_0. \quad (1.25)$$

A continuidade de v segue imediatamente de (1.24) e (1.25).

□

Lema 1.60. *Das hipóteses **H1** e **H2** sobre r , a função $u \in C([\tau, T]; H_0^1(\mathcal{O}_t))$ se, e somente se, $v \in C([\tau, T]; H_0^1(\mathcal{O}))$.*

Demonstração. Pela regra da cadeia, temos que: Se para algum $t \in (\tau, T)$ a função $u(t) = u(\cdot, t) \in H^1(\mathcal{O}_t)$, então a função $v(\cdot, t) = u(r(\cdot, t), t) \in H^1(\mathcal{O})$ e

$$\frac{\partial v}{\partial y_j}(y, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(r(y, t), t) \frac{\partial r_i(y, t)}{\partial y_j}.$$

Analogamente, se para algum $t \in (\tau, T)$ a função $v(t) = v(\cdot, t) \in H^1(\mathcal{O})$, então a função $u(\cdot, t) = v(\bar{r}(\cdot, t), t) \in H^1(\mathcal{O}_t)$ e

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial y_j}(\bar{r}(x, t), t) \frac{\partial \bar{r}_j(x, t)}{\partial x_i},$$

então a demonstração segue do mesmo argumento do Lema 1.59.

□

Do Lema 1.52 sabemos que, se $u \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))$ e $u' \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$, então $u \in H^1(Q_{\tau, T})$ e consequentemente pelo Teorema da regra da cadeia sabemos que $v(y, t) = u(r(y, t), t)$ pertence a $H^1(\mathcal{O} \times (\tau, T))$ e em particular

$$v'(y, t) = u'(r(y, t), t) + [(\nabla_x u)(r(y, t), t)] \cdot \frac{\partial r}{\partial t}(y, t),$$

onde “ $\cdot$ ” denota o produto interno em $\mathbb{R}^N$.

Para qualquer subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ o dual de $H_0^1(\Omega)$, com isto podemos observar que, dado $F \in H^{-1}(\Omega)$, pelo Teorema de representação de Riesz, existe $f \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle F, g \rangle_{H^{-1}(\Omega)} = (f, g)_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $g \in H_0^1(\Omega)$ e, além disso, $\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|f\|_{H_0^1(\Omega)}$. Agora observando que

$$(f, g)_{H_0^1(\Omega)} = (f, g)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)},$$

podemos identificar F como sendo $F = f + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}$, e isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.61. *Definimos o espaço $L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$ como o espaço vetorial de todas as distribuições w em $Q_{\tau, T}$ da forma*

$$w = f_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad (1.26)$$

com $f_i \in L^2(Q_{\tau, T})$, $i = 0, \dots, N$, i.e.,

$$\langle w, \phi \rangle = \int_{Q_{\tau, T}} f_0 \phi dx dt + \sum_{i=1}^N \int_{Q_{\tau, T}} f_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(Q_{\tau, T}).$$

Se w é dada por (1.26), vamos denotar

$$w(t) = f_0(t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i(t)}{\partial x_i}$$

no sentido das distribuições em $\mathcal{O}_t$, q.s. $t \in (\tau, T)$, onde $f_i(t) := f_i(\cdot, t)$.

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1, t}$ o produto dual entre $H^{-1}(\mathcal{O}_t)$ e $H_0^1(\mathcal{O}_t)$. Uma consequência do Teorema de representação de Riesz é:

$$\|w(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_t)}^2 = \sum_{i=1}^N \|f_i(t)\|_{L^2(\mathcal{O}_t)}^2.$$

Com isto podemos definir

$$\|w\|_{L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))} := \left(\int_{\tau}^T \|w(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_t)}^2 dt \right)^{1/2}, \quad (1.27)$$

e obtemos

$$\|w\|_{L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))} = \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2(Q_{\tau, T})}. \quad (1.28)$$

Além disso, se $\phi \in C_c^1(Q_{\tau,T})$, então $\phi(t) = \phi(\cdot, t) \in C_c^1(\mathcal{O}_t)$ para qualquer $t \in (\tau, T)$ e portanto,

$$\begin{aligned} \langle w, \phi \rangle &= \int_{Q_{\tau,T}} f_0 \phi dx dt + \sum_{i=1}^N \int_{Q_{\tau,T}} f_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt \\ &= \int_{\tau}^T \int_{\mathcal{O}_t} f_0(x, t) \phi(x, t) dx dt + \sum_{i=1}^N \int_{\tau}^T \int_{\mathcal{O}_t} f_i(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x, t) dx dt \\ &\quad \int_{\tau}^T \langle w(t), \phi(t) \rangle_{-1,t} dt. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Dizemos que $u' \in L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$ se existe uma função $w \in L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$ tal que

$$\int_{\tau}^T \langle w(t), \phi(t) \rangle_{-1,t} dt = - \int_{Q_{\tau,T}} u(x, t) \phi'(x, t) dx dt \quad \forall \phi \in C_c^1(Q_{\tau,T}).$$

Lema 1.62. $u \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))$ e $u' \in L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$ se, e somente se, $v \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))$ e $v' \in L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}))$.

Além disso, existem duas constantes positivas C_3 e C_4 (as quais dependem unicamente de τ, T) tais que

$$\|v'\|_{L^2(\tau,T;H^{-1}(\mathcal{O}))} \leq C_3(\|u'\|_{L^2(\tau,T;H^{-1}(\mathcal{O}_t))} + \|u\|_{L^2(\tau,T;H_0^1(\mathcal{O}_t))}) \quad (1.30)$$

e

$$\|u'\|_{L^2(\tau,T;H^{-1}(\mathcal{O}_t))} \leq C_4(\|v'\|_{L^2(\tau,T;H^{-1}(\mathcal{O}))} + \|v\|_{L^2(\tau,T;H_0^1(\mathcal{O}))}). \quad (1.31)$$

Demonstração. Ver [9, Lema 3.11, pág. 4712]. □

Seja $p \geq 2$, e consideremos os seguintes espaços de Banach

$$X = L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}_t)),$$

$$Y = L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O})),$$

sendo $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^2(\tau,T;H_0^1(\mathcal{O}_t))} + \|\cdot\|_{L^p(\tau,T;L^p(\mathcal{O}_t))}$ a norma de X e $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{L^2(\tau,T;H_0^1(\mathcal{O}))} + \|\cdot\|_{L^p(\tau,T;L^p(\mathcal{O}))}$ a norma de Y .

E os espaços

$$X^* = L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t)) + L^q(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t)),$$

$$Y^* = L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O})) + L^q(\tau, T; L^q(\mathcal{O})),$$

sendo $\|\cdot\|_{X^*} = \|\cdot\|_{L^2(\tau,T;H^{-1}(\mathcal{O}_t))} + \|\cdot\|_{L^q(\tau,T;L^q(\mathcal{O}_t))}$ a norma de X^* e $\|\cdot\|_{Y^*} = \|\cdot\|_{L^2(\tau,T;H^{-1}(\mathcal{O}))} + \|\cdot\|_{L^q(\tau,T;L^q(\mathcal{O}))}$ a norma de Y^* , onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Corolário 1.63. $u \in X \Leftrightarrow v \in Y$

Demonstração. Usar o Lema 1.56 e o Lema 1.57. □

Lema 1.64. $u \in X$ e $u' \in X^*$ se, e somente se, $v \in Y$ e $v' \in Y^*$.

Além disso, existem duas constantes positivas C_5 e C_6 (as quais dependem unicamente de τ, T) tais que

$$\|v'\|_{Y^*} \leq C_5(\|u'\|_{X^*} + \|u\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t))}) \quad (1.32)$$

e

$$\|u'\|_{X^*} \leq C_6(\|v'\|_{Y^*} + \|v\|_{L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))}). \quad (1.33)$$

Demonstração. Ver [9, Lema 3.13, pág. 4716]. □

Como consequência dos resultados anteriores, obtemos o lema a seguir.

Lema 1.65. Suponha que a sequência $\{u_m\}$ é limitada em X e $\{u'_m\}$ é limitada em X^* . Então, $\{u_m\}$ é relativamente compacto em $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$.

Demonstração. Seja $v_m(y, t) = u_m(r(y, t), t)$. Do Lema 1.64, sabemos que a sequência $\{v_m\}$ é limitada em Y e $\{v'_m\}$ é limitada em Y^* . Logo, pelo Teorema 1.45 sabemos que $\{v_m\}$ é relativamente compacto em $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $v_m \rightarrow v$ em $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$, então, de

$$\int_{\tau}^T \int_{\mathcal{O}_t} |u_m(x, t) - u(x, t)|^2 dx dt = \int_{\tau}^T \int_{\mathcal{O}} |v_m(y, t) - v(y, t)|^2 Jac(r, t, t) dy dt,$$

concluimos que $u_m \rightarrow u$ em $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$, onde $u(x, t) = v(\bar{r}(x, t), t)$. □

1.3 $\mathfrak{D}$ -Atrator Pullback

Seja $\{(X_t, d_t); t \in \mathbb{R}\}$ uma família de espaços métricos com suas respectivas métricas.

Definição 1.66. Uma família a dois parâmetros $\{U(t, \tau); -\infty < \tau \leq t < \infty\}$ de aplicações contínuas $U(t, \tau) : X_{\tau} \rightarrow X_t$, é dita um processo se:

1. $U(\tau, \tau)x = x, \forall x \in X_{\tau}$,
2. $U(t, r)U(r, \tau) = U(t, \tau), \forall \tau \leq r \leq t$.

Além disso, consideremos $\mathfrak{D}$ uma classe não vazia de conjuntos parametrizados da forma $\widehat{D} = \{D(t); D(t) \subset X_t, D(t) \neq \emptyset, t \in \mathbb{R}\}$.

Definição 1.67. O processo $U(\cdot, \cdot)$ é dito um pullback $\mathfrak{D}$ -assintoticamente compacto se a sequência $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ é relativamente compacta em X_t para cada $t \in \mathbb{R}$, qualquer $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$ e quaisquer sequências $\{\tau_n\}$ e $\{x_n\}$, com $\tau_n \rightarrow -\infty$ e $x_n \in D(\tau_n)$.

Definição 1.68. Uma família $\widehat{B} \in \mathfrak{D}$ é dita um pullback $\mathfrak{D}$ -absorvente para o processo $U(\cdot, \cdot)$ se para cada $t \in \mathbb{R}$ e qualquer $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$, $\exists \tau_0(t, \widehat{D}) \leq t$ tal que

$$U(t, \tau)D(\tau) \subset B(t), \quad \forall \tau \leq \tau_0(t, \widehat{D}).$$

Proposição 1.69. Se $\widehat{B} \in \mathfrak{D}$ é um pullback $\mathfrak{D}$ -absorvente para o processo $U(\cdot, \cdot)$ e $B(t) \subset X_t$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$, então o processo $U(\cdot, \cdot)$ é pullback $\mathfrak{D}$ -assintoticamente compacto.

Demonstração. Sejam $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$, $\tau_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $x_n \in D(\tau_n)$.

Como $\widehat{B} \in \mathfrak{D}$ é pullback $\mathfrak{D}$ -absorvente para o processo $U(\cdot, \cdot)$, então, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\exists \tau_0(t, \widehat{D}) \leq t$ tal que

$$U(t, \tau)D(\tau) \subset B(t), \quad \forall \tau \leq \tau_0(t, \widehat{D}). \quad (1.34)$$

Agora, conforme $\tau_n \rightarrow -\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $\tau_n \leq \tau_0(t, \widehat{D})$. Mais ainda, de (1.34) temos

$$U(t, \tau_n)x_n \in B(t), \quad \forall n \geq n_0.$$

Como $B(t)$ é compacto em X_t para cada $t \in \mathbb{R}$, então a sequência $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ é relativamente compacta em X_t para cada $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Definição 1.70. Dizemos que $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$ é invariante sobre a ação do processo $U(\cdot, \cdot)$ se

$$U(t, \tau)D(\tau) = D(t), \quad \forall t \geq \tau.$$

Sejam $D_1, D_2 \subset X_t$ não vazios. Denotaremos por $dist_t(D_1, D_2)$ a semidistância de Hausdorff entre os conjuntos não vazios D_1 e D_2 , definida por

$$dist_t(D_1, D_2) = \sup_{x \in D_1} \inf_{y \in D_2} d_t(x, y) \quad \text{para } D_1, D_2 \subset X_t.$$

Definição 1.71. i) Uma família $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$ atrai no sentido pullback a $\widehat{B} \in \mathfrak{D}$, em tempo t , sob a ação do processo $U(\cdot, \cdot)$ se

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_t(U(t, \tau)B(\tau), D(t)) = 0.$$

ii) Uma família $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$ atrai no sentido pullback a $\widehat{B} \in \mathfrak{D}$ sob a ação do processo $U(\cdot, \cdot)$ se

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_t(U(t, \tau)B(\tau), D(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

iii) Uma família $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$ é dita $\mathfrak{D}$ -atraente pullback sob a ação do processo $U(\cdot, \cdot)$ se

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_t(U(t, \tau)B(\tau), D(t)) = 0, \quad \forall \widehat{B} \in \mathfrak{D} \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.72. Uma família $\widehat{A} = \{A(t); A(t) \subset X_t, A(t) \neq \emptyset, t \in \mathbb{R}\}$ é dita $\mathfrak{D}$ -atrator pullback para o processo $U(\cdot, \cdot)$ se:

i) $A(t)$ é um subconjunto compacto de X_t para todo $t \in \mathbb{R}$,

ii) $\widehat{A}$ é um $\mathfrak{D}$ -atraente pullback,

iii) $\widehat{A}$ é invariante sobre a ação de $U(\cdot, \cdot)$.

Definição 1.73. Seja $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$. O Λ -limite pullback de $\widehat{D}$ define-se como

$$\Lambda(\widehat{D}, t) := \bigcap_{s \leq t} \overline{\bigcup_{\tau \leq s} U(t, \tau)D(\tau)}^{X_t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.74. Se $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$, então

$$\Lambda(\widehat{D}, t) = \{y \in X_t; \text{ existe uma sequencia } \{s_k\} \text{ tal que } \{s_k\} \leq t, \forall k \in \mathbb{N}, \text{ com } s_k \rightarrow -\infty, \text{ quando } k \rightarrow \infty, \\ \text{ e, para cada } k \in \mathbb{N}, \text{ existe } x_k \in D(s_k) \text{ tal que } y = \lim_{k \rightarrow \infty} U(t, s_k)x_k\}.$$

Demonstração. Seja $y \in \Lambda(\widehat{D}, t)$, então $y \in \overline{\bigcup_{\tau \leq s} U(t, \tau)D(\tau)}^{X_t}$, $\forall s \leq t$, assim para cada $s \leq t$ existe $\{y_n^s\}$ em $\bigcup_{\tau \leq s} U(t, \tau)D(\tau)$ tal que

$$y_n^s \rightarrow y \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.35)$$

Como $y_n^s \in \bigcup_{\tau \leq s} U(t, \tau)D(\tau)$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $\tau_n^s \leq s$ e $x_n^s \in D(\tau_n^s)$ tais que

$$y_n^s = U(t, \tau_n^s)x_n^s. \quad (1.36)$$

Agora, seja $\{s_m\} \subset \mathbb{R}$, $s_m \leq t$, $\forall m \in \mathbb{N}$, tal que $s_m \rightarrow -\infty$ quando $m \rightarrow \infty$, então, de (1.35), para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $\{y_n^m\}$ em $\bigcup_{\tau \leq s_m} U(t, \tau)D(\tau)$ tal que

$$y_n^m \rightarrow y \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.37)$$

E de (1.36), para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $\tau_n^m \leq s_m$ e $x_n^m \in D(\tau_n^m)$ tais que

$$y_n^m = U(t, \tau_n^m)x_n^m. \quad (1.38)$$

Logo,

$$U(t, \tau_n^m)x_n^m \rightarrow y, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $\tau_m = \tau_m^m$ e $x_m = x_m^m$ obtemos $U(t, \tau_m)x_m \rightarrow y$, $m \rightarrow \infty$. □

Lema 1.75. *Seja $U(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução, então as seguintes afirmações valem:*

(i) *Para todo $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$, $\Lambda(\widehat{D}, t)$ é positivamente invariante, i.e.,*

$$U(t, s)\Lambda(\widehat{D}, s) \subset \Lambda(\widehat{D}, t), \quad -\infty < s \leq t < \infty.$$

(ii) *Se $\Lambda(\widehat{D}, s)$ é compacto em X_s e atrai no sentido pullback $\widehat{D}$ em tempo s , então*

$$U(t, s)\Lambda(\widehat{D}, s) = \Lambda(\widehat{D}, t), \quad \forall t \geq s.$$

Demonstração.

(i) Seja $y \in U(t, s)\Lambda(\widehat{D}, s)$, então existe $x \in \Lambda(\widehat{D}, s)$ tal que $y = U(t, s)\Lambda(\widehat{D}, s)x$. Como $x \in \Lambda(\widehat{D}, s)$, pela Proposição 1.74, existe uma sequência $\{s_n\}$, com $\{s_n\} \leq s$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e com $s_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in D(s_n)$ tais que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} U(s, s_n)x_n.$$

Pela continuidade de $U(t, s)$, temos

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} U(t, s)U(s, s_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U(t, s_n)x_n.$$

Portanto, pela Proposição 1.74, $y \in \Lambda(\widehat{D}, t)$.

(ii) Seja $x \in \Lambda(\widehat{D}, t)$, então pela Proposição 1.74, existe uma sequência τ_n tal que $\{\tau_n\} \leq t$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $\tau_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, e para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in D(\tau_n)$ tais que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} U(t, \tau_n)x_n.$$

Como $\tau_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_n \leq s$, $\forall n \geq n_0$. Portanto,

$$U(t, s)U(s, \tau_n)x_n = U(t, \tau_n)x_n \rightarrow x, \quad \forall n \geq n_0.$$

Além disso, como $\Lambda(\widehat{D}, s)$ é compacto e atrai pullback a $\widehat{D}$ em tempo s , então

$$\text{dist}_s(U(s, \tau_n)x_n, \Lambda(\widehat{D}, s)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Então, $\{U(s, \tau_n)x_n\}$ tem uma subsequência que converge para algum $y \in \Lambda(\widehat{D}, s)$. Assim, segue da continuidade de $U(t, s)$ que $U(t, s)y = x$ portanto $x \in U(t, s)\Lambda(\widehat{D}, s)$.

□

Lema 1.76. *Seja $U(\cdot, \cdot)$ um processo. Seja $\widehat{B} \in \mathfrak{D}$ um pullback atraído em tempo t por $\widehat{K} \in \mathfrak{D}$, onde $K(t)$ é compacto. Então $\Lambda(\widehat{B}, t)$ é não vazio, compacto, atrai no sentido pullback $\widehat{B}$ em tempo t e $U(s, t)\Lambda(\widehat{D}, t) = \Lambda(\widehat{D}, s)$, $\forall s \geq t$.*

Demonstração. Seja $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$, $\tau_n \leq t$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que $\tau_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e seja para cada $n \in \mathbb{N}$ algum $x_n \in B(\tau_n)$. Como $\widehat{K}$ atrai no sentido pullback $\widehat{B}$ em tempo t , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}_t(U(t, \tau_n)x_n, K(t)) = 0.$$

Isto mostra que $U(t, \tau_n)x_n$ tem uma subsequência que convergente em $K(t)$ pois $K(t)$ é compacto, e pela Proposição 1.74 o limite da subsequência é um elemento de $\Lambda(\widehat{B}, t)$.

Isto mostra que $\Lambda(\widehat{B}, t)$ é não vazio e que $\Lambda(\widehat{B}, t) \subset K(t)$, isto também mostra que $\Lambda(\widehat{B}, t)$ atrai no sentido pullback $\widehat{B}$ em tempo t , caso contrario, existiria $\varepsilon > 0$, uma subsequência $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$ com $s_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria $x_n \in B(s_n)$ tal que

$$\text{dist}_t(U(t, s_n)x_n, \Lambda(\widehat{B}, t)) > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

contradizendo a existência de uma subsequência convergente de $\{U(t, s_n)x_n\}$ que converge a um elemento de $\Lambda(\widehat{B}, t)$.

Como $\Lambda(\widehat{B}, t)$ por definição é fechado e é um subconjunto de um compacto, portanto $\Lambda(\widehat{B}, t)$ é compacto.

Por último, pelo Lema 1.75, obtemos $U(s, t)\Lambda(\widehat{D}, t) = \Lambda(\widehat{D}, s) \quad \forall s \geq t$. $\square$

Este resultado é interessante quando exista uma família $\widehat{K} \in \mathfrak{D}$ formada por conjuntos compactos tal que $\widehat{K}$ atrai no sentido pullback $\widehat{B}$.

Lema 1.77. *Se $U(\cdot, \cdot)$ tem uma família $\widehat{K} \in \mathfrak{D}$ de conjuntos compactos e $\mathfrak{D}$ -atraente pullback, então é pullback $\mathfrak{D}$ -assintoticamente compacto.*

Demonstração. Sejam $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$, $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$, $s_n \leq t$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $\tau_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D(\tau_n)$. Como $\widehat{K}$ é $\mathfrak{D}$ -atraente pullback, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}_t(U(t, \tau_n)x_n, K(t)) = 0.$$

Como $K(t)$ é compacto, então $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ tem uma subsequência convergente em $K(t)$, portanto $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ é relativamente compacto em X_t para cada $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Lema 1.78. *Se o processo $U(\cdot, \cdot)$ é pullback $\mathfrak{D}$ -assintoticamente compacto e $\widehat{B} \in \mathfrak{D}$ é $\mathfrak{D}$ -absorvente pullback para o processo $U(\cdot, \cdot)$, então para cada $t \in \mathbb{R}$, $\Lambda(\widehat{B}, t)$ atrai no sentido pullback $\widehat{B}$ em tempo t e a família $\{\Lambda(\widehat{B}, t); t \in \mathbb{R}\}$ é invariante.*

Demonstração. Como $\widehat{B}$ é $\mathfrak{D}$ -absorvente pullback, então para cada $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $\tau_0(\widehat{D}, t) \leq t$ tal que

$$U(t, \tau)D(\tau) \subset B(t) \quad \forall \tau \leq \tau_0(\widehat{D}, t).$$

Isto implica que

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_t(U(t, \tau)D(\tau), B(t)) = 0,$$

e portanto, $\widehat{B}$ é $\mathfrak{D}$ -atraente pullback.

Agora seja $\{y_k\} \in \Lambda(\widehat{B}, t)$, então pela Proposição 1.74, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\{s_n^k\}$ com $s_n^k \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n^k \in B(s_n^k)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(t, s_n^k)x_n^k = y_k.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_t(U(t, s_{n_k}^k)x_{n_k}^k, y_k) < \frac{1}{k}. \quad (1.39)$$

Denotando por $s_k := s_{n_k}^k$ e $x_k := x_{n_k}^k$ observamos que $s_k \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $x_k \in B(s_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Como o processo $U(\cdot, \cdot)$ é pullback $\mathfrak{D}$ -assintoticamente compacto, $U(t, s_k)x_k$ possui subsequência convergente. Portanto, de (1.39), $\{y_k\}$ possui uma subsequência convergente e assim $\Lambda(\widehat{B}, t)$ é compacto. Segue do Lema 1.76 que $\Lambda(\widehat{B}, t)$ atrai no sentido pullback $\widehat{B}$ em tempo t e pelo Lema 1.75, a família $\{\Lambda(\widehat{B}, t); t \in \mathbb{R}\}$ é invariante. $\square$

Teorema 1.79. *Se o processo $U(\cdot, \cdot)$ é pullback $\mathfrak{D}$ -assintoticamente compacto e $\widehat{B} \in \mathfrak{D}$ é $\mathfrak{D}$ -absorvente pullback para o processo $U(\cdot, \cdot)$, então a família $\widehat{A} = \{A(t); t \in \mathbb{R}\}$ definida por $A(t) = \Lambda(\widehat{B}, t)$, $t \in \mathbb{R}$, é um $\mathfrak{D}$ -atrator pullback para o processo $U(\cdot, \cdot)$ que satisfaz*

$$A(t) = \overline{\bigcup_{\widehat{D} \in \mathfrak{D}} \Lambda(\widehat{D}, t)}^{X_t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, $\widehat{A}$ é minimal no sentido que, se $\widehat{C} = \{C(t); t \in \mathbb{R}\}$ é uma família não vazia tal que $C(t)$ é um subconjunto fechado de X_t e

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_t(U(t, \tau)B(\tau), C(t)) = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, então $A(t) \subset C(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pelo Lema 1.78, $A(t)$ é compacto, não vazio para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\widehat{A}$ é invariante. Para mostrar que $\widehat{A}$ é $\mathfrak{D}$ -atrator pullback só falta mostrar que $\widehat{A}$ é $\mathfrak{D}$ -atraente pullback. De fato, Pelo Lema 1.78, $\widehat{A}$ atrai no sentido pullback $\widehat{B}$, e como $\widehat{B}$ é $\mathfrak{D}$ -absorvente pullback, então $\widehat{A}$ é $\mathfrak{D}$ -atraente pullback.

Como $A(t) \subset \overline{\bigcup_{\widehat{D} \in \mathfrak{D}} \Lambda(\widehat{D}, t)}^{X_t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Então só falta mostrar que $\overline{\bigcup_{\widehat{D} \in \mathfrak{D}} \Lambda(\widehat{D}, t)}^{X_t} \subset A(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. De fato, seja $y \in \overline{\bigcup_{\widehat{D} \in \mathfrak{D}} \Lambda(\widehat{D}, t)}$, logo existe $\widehat{D} \in \mathfrak{D}$ tal que $y \in \widehat{D}$, então existem $\{s_k\}$, $s_k \leq t$, $\forall k \in \mathbb{N}$, com $s_k \rightarrow -\infty$, quando $n \rightarrow \infty$, e $x_k \in D(s_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, tal que $y = \lim_{k \rightarrow \infty} U(t, s_k)x_k$.

Como $\widehat{A}$ é $\mathfrak{D}$ -atraente pullback, então

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_t(U(t, \tau)D(\tau), A(t)) = 0, \quad \forall \widehat{D} \in \mathfrak{D}, \forall t \in \mathbb{R},$$

em particular, obtemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_t(U(t, s_k)x_k, A(t)) = 0.$$

Como $A(t)$ é compacto, segue que $y \in A(t)$. Portanto, segue de ambas implicações que

$$A(t) = \overline{\bigcup_{\hat{D} \in \mathfrak{D}} \Lambda(\hat{D}, t)}^{X_t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por fim, vamos mostrar que $\hat{A}$ é minimal.

De fato, Seja $y \in A(t)$, então existem duas sequência $\{s_k\}$ e $\{x_k\}$ tais que $s_k \leq t$, $\forall k \in \mathbb{N}$, com $s_k \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, $x_k \in B(s_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e $y = \lim_{k \rightarrow \infty} U(t, s_k)x_k$.

Como

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_t(U(t, \tau)B(\tau), C(t)) = 0,$$

então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_t(U(t, s_k)x_k, C(t)) = 0$$

e, como $C(t)$ é fechado em X_t , segue que $y \in C(t)$. □

Equação do calor semilinear em domínios que variam com o tempo

Neste capítulo tratamos o problema de existência e unicidade para a equação de calor semilinear definida sobre um domínio não cilíndrico, para isto usamos o Método de Faedo-Galerkin, desenvolvida no Capítulo 1, sendo assim o resultado principal o Teorema 2.8 que mostra a existência de solução fraca quando a condição inicial $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$ e $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$.

2.1 Existência e unicidade de solução

Sejam $\tau \in \mathbb{R}$, $u_\tau : \mathcal{O}_\tau \rightarrow \mathbb{R}$, $f : Q_\tau \rightarrow \mathbb{R}$ e $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tais que existem constantes não negativas α_1 , α_2 , β , l e $p \geq 2$ de modo que

$$-\beta + \alpha_1|s|^p \leq g(s)s \leq \beta + \alpha_2|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

e

$$g'(s) \geq -l, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

De (2.1) existem constantes não negativas $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\beta}$ tais que

$$-\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}_1|s|^p \leq G(s) \leq \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}_2|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

onde

$$G(s) := \int_0^s g(r) dr.$$

Agora consideremos os seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = f(t, x) & \text{em } Q_\tau, \\ u = 0, & \text{sobre } \Sigma_\tau, \\ u(\tau, x) = u_\tau(x), & x \in \mathcal{O}_\tau, \end{cases} \quad (\text{EFM})$$

e para cada $T > \tau$, o problema auxiliar

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = f(t, x) & \text{em } Q_{\tau, T}, \\ u = 0, & \text{sobre } \Sigma_{\tau, T}, \\ u(\tau, x) = u_\tau(x), & x \in \mathcal{O}_\tau. \end{cases} \quad (\text{EFMA})$$

Definição 2.1 (Solução forte do problema (EFMA)). *Uma função $u = u(x, t)$ definida em $Q_{\tau, T}$ é uma solução forte do problema (EFMA) se:*

1. $u \in L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O}_t)) \cap C([\tau, T]; H_0^1(\mathcal{O}_t)) \cap L^\infty(\tau, T; L^p(\mathcal{O}_t));$
2. $u' \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$

e as três equações em (EFMA) são satisfeitas quase sempre sobre seus domínios correspondentes.

Consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\tau, T} := \{ \phi \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t)) \cup L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}_t)) : \quad & \phi' \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t)), \\ & \phi(\tau) = \phi(T) = 0 \}. \end{aligned}$$

Dado $\phi \in \mathcal{U}_{\tau, T}$, multiplicando ϕ na primeira equação de (EFMA) e integrando por partes, obtemos

$$\int_\tau^T \int_{\mathcal{O}_t} u \phi' dx dt - \int_\tau^T \int_{\mathcal{O}_t} \nabla_x u \nabla_x \phi dx dt = \int_\tau^T \int_{\mathcal{O}_t} g(u) \phi dx dt - \int_\tau^T \int_{\mathcal{O}_t} f \phi dx dt. \quad (2.4)$$

De (2.4), temos a seguinte definição de solução fraca para o problema (EFMA).

Definição 2.2 (Solução fraca do problema (EFMA)). *Dizemos que u é uma solução fraca de (EFMA) se:*

1. $u \in C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}_t)) \cap L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}_t))$ com $u(\tau) = u_\tau$;

2. *Existem uma sequência de dados regulares $u_{\tau m} \in H_0^1(\mathcal{O}_\tau) \cap L^p(\mathcal{O}_\tau)$ e $f_m \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$, com $m \in \mathbb{N}$, tais que*

$$u_{\tau m} \rightarrow u_\tau \text{ em } L^2(\mathcal{O}_\tau), \quad f_m \rightarrow f \text{ em } L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$$

e

$$u_m \rightarrow u \text{ em } C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}_t)),$$

onde u_m é a única solução forte de (EFMA) correspondente a $(u_{\tau m}, f_m)$;

3. *u satisfaz (2.4) para todo $\phi \in \mathcal{U}_{\tau, T}$.*

Das hipóteses sobre r , fazendo a mudança de variável $v(y, t) = u(r(y, t), t)$, obtemos o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v(y, t)}{\partial t} - \sum_{k,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{jk}(y, t) v_{y_k}(y, t)) + b(y, t) \cdot \nabla_y v(y, t) + g(v(y, t)) \\ = f(r(y, t), t), \quad \text{em } \mathcal{O} \times (\tau, T), \\ v = 0, \quad \text{sobre } \partial \mathcal{O} \times (\tau, T), \\ v_\tau = v(y, \tau) = u_\tau(r(y, \tau)), \quad y \in \mathcal{O}, \end{array} \right. \quad (\text{EFF})$$

onde

$$a_{jk}(y, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_i}(r(y, t), t) \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial x_i}(r(y, t), t), \quad j, k = 1, \dots, N,$$

e $b(y, t) = (b_1(y, t), \dots, b_N(y, t))$ é definido por

$$b_k(y, t) = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}(r(y, t), t) - \Delta_x \bar{r}_k(r(y, t), t) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}(y, t), \quad k = 1, \dots, N.$$

Definição 2.3 (Solução forte do problema (EFF)). *Uma função $v = v(y, t)$ definida em $\mathcal{O} \times (\tau, T)$ é uma solução forte do problema (EFF) se:*

1. $v \in L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O})) \cap C([\tau, T]; H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^\infty(\tau, T; L^p(\mathcal{O}))$;
2. $v' \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$

e as três equações em (EFF) são satisfeitas quase sempre sobre seus domínios correspondentes.

Lema 2.4. *Para quaisquer $-\infty < \tau \leq T < \infty$, temos $a_{jk} \in C^1(\bar{\mathcal{O}} \times [\tau, T])$, $b_k \in C^0(\bar{\mathcal{O}} \times [\tau, T])$, $j, k = 1, \dots, N$. Em particular, $a_{jk}, \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}, b_k \in L^\infty(\mathcal{O} \times (\tau, T))$, $j, k = 1, \dots, N$.*

Por outro lado, existe $\delta = \delta(r, \tau, T) > 0$ tal que, para qualquer $(y, t) \in \mathcal{O} \times [\tau, T]$,

$$\sum_{j,k=1}^N a_{jk}(y, t) \varepsilon_j \varepsilon_k \geq \delta |\varepsilon|^2, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Seja $A(y, t) = (a_{jk}(y, t))_{N \times N}$, então $A(y, t) = T^*(y, t)T(y, t)$, onde $T(y, t) := F(r(y, t), t)$, com

$$F(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{r}_1(x, t)}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{r}_2(x, t)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{r}_N(x, t)}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \bar{r}_1(x, t)}{\partial x_N} & \frac{\partial \bar{r}_2(x, t)}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial \bar{r}_N(x, t)}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

e $T^*(y, t)$ é a transposta de $T(y, t)$.

Para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\sum_{j,k=1}^N a_{jk}(y, t) \varepsilon_j \varepsilon_k = (A(y, t)\varepsilon, \varepsilon)_{\mathbb{R}^N} = (T^*(y, t)T(y, t)\varepsilon, \varepsilon)_{\mathbb{R}^N} = (T\varepsilon, T\varepsilon)_{\mathbb{R}^N} = \|T(y, t)\varepsilon\|^2.$$

Note que $T(y, t)$ é invertível, logo

$$\|T(y, t)\varepsilon\| \geq \|T^{-1}(y, t)\|^{-1} |\varepsilon|,$$

onde $\|T^{-1}(y, t)\|$ é a norma do operador $T^{-1}(y, t)$ em $\mathbb{R}^N$. Consequentemente, temos

$$(A(y, t)\varepsilon, \varepsilon) \geq \frac{|\varepsilon|^2}{\|T^{-1}(y, t)\|^2}.$$

Finalmente, pela continuidade de $T^{-1}(y, t)$ e a compacidade de $\overline{\mathcal{O}} \times [\tau, T]$, sabemos que $\|T^{-1}(y, t)\|$ é uniformemente limitada sobre $\overline{\mathcal{O}} \times [\tau, T]$ por uma constante positiva. $\square$

Lema 2.5. Para quaisquer $-\infty < \tau \leq T < \infty$, existem constantes positivas δ_0 e c_0 , que dependem de r, τ, T , tais que, para qualquer $u \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$, a seguinte estimação vale

$$\delta_0 \int_{\mathcal{O}} |\Delta u(y)|^2 dy \leq \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N a_{kj}(y, t) u_{y_k y_j} \Delta u dy + c_0 \int_{\mathcal{O}} |u(y)|^2 dy, \quad \forall t \in [\tau, T].$$

Com as mesmas hipóteses do Lema 2.4, vamos definir o operador bilinear que depende do tempo

$$B[v, w; t] = \int_{\mathcal{O}} \left(\sum_{k,j=1}^N a_{kj}(y, t) \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^N b_k(y, t) \frac{\partial v}{\partial y_k} w \right) dy, \quad (2.5)$$

para $v, w \in H_0^1(\mathcal{O})$ e $\tau \leq t \leq T$.

Definição 2.6 (Solução fraca do problema (EFF)). *Dizemos que uma função $v(y, t)$ é solução fraca do problema (EFF) se:*

1. $v \in C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O})) \cap L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}))$;
2. $v' \in L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}))$;
3. $\langle v'(t), w \rangle + B[v(t), w; t] + (g(v), w) = (\tilde{f}(t), w)$, para toda $w \in H_0^1(\mathcal{O}) \cap L^p(\mathcal{O})$ e q.s. $\tau \leq t \leq T$;
4. $v(\tau) = v_\tau$,

onde $\tilde{f}(y, t) := f(r(y, \tau), t)$ e $v_\tau(y) := u_\tau(r(y, \tau))$.

Dos resultados da seção anterior e usando a regra da cadeia, vemos que $u = u(x, t)$ é solução fraca (solução forte) do problema (EFMA) se, e somente se, a função $v = v(y, t) := u(r(y, t), t)$ é solução fraca (solução forte) do problema (EFF).

Assim, para mostrarmos a existência de solução fraca (solução forte) do problema (EFMA) é suficiente provarmos a existência de solução fraca (solução forte) do problema (EFF). Para fazermos isto usaremos o método de Faedo-Galerkin.

Agora, sejam $w_k = w_k(y) \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$, $k \in \mathbb{N}$, as funções próprias de $-\Delta$ sobre $H_0^1(\mathcal{O})$, e seja $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ seus correspondentes valores próprios. Do teorema 1.7, sabemos que $\lambda_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, e podemos assumir que $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ é uma base ortogonal de $H_0^1(\mathcal{O})$ e uma base ortonormal de $L^2(\mathcal{O})$.

Seja $m \in \mathbb{N}$ fixo. Do método de Faedo-Galerkin sugere que escolhamos funções $v_m : [\tau, T] \rightarrow H_0^1(\mathcal{O})$ da forma

$$v_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k, \quad (2.6)$$

onde os coeficientes $d_m^k(t)$, $t \in [\tau, T]$, $k = 1, \dots, m$ satisfazem

$$d_m^k(\tau) = (v_\tau, w_k), \quad (2.7)$$

e

$$(v_m'(t), w_k) + B[v_m(t), w_k; t] + (g(v_m(t)), w_k) = (\tilde{f}, w_k), \quad t \in [\tau, T], \quad (2.8)$$

para todo $k = 1, \dots, m$.

Teorema 2.7. (Construção de sequência de soluções) *Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma única função v_m da forma (2.6) satisfazendo as condições (2.7) e (2.8).*

Demonstração. Suponha que v_m é da forma (2.6), então

$$(v'_m, w_k) = (d_m^k)'(t)$$

e

$$B[v_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t),$$

onde $e^{kl}(t) := B[w_l, w_k; t]$, para $k, l = 1, \dots, m$.

Consideremos o seguinte sistema semilinear de EDO

$$\begin{cases} (v'_m(t), w_k) + B[v_m(t), w_k; t] + (g(v_m(t)), w_k) = (\tilde{f}(t), w_k), \\ d_m^k(\tau) = (v_\tau, w_k), \quad k = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Como $g \in C^1(\mathbb{R})$, da Existência e Unicidade para um problema de Cauchy de EDO's, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma única solução $d_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$ do problema (2.9), definida num intervalo $[\tau, T_m]$. $\square$

2.1.1 Existência de solução fraca do problema (EFMA) quando $u_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$

Teorema 2.8. (Existência de solução fraca quando $u_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$) *Sejam $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}; L^2(\mathcal{O}_t))$, r e $\bar{r}$ satisfazendo as hipóteses **H1**, **H2** e **H3**. Também suponhamos que*

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{O} \text{ é de classe } C^2 \text{ e } N \leq 2p/(p-2) \text{ ou} \\ \partial\mathcal{O} \text{ é de classe } C^m \text{ com } m \geq 2 \text{ inteiro, tal que } m \geq N(p-2)/2p. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Então para qualquer $u_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$ e para qualquer $-\infty < \tau \leq T < \infty$, existe uma única solução fraca $u(t) = u(t; \tau, u_\tau)$ para o problema (EFMA).

Demonstração. A demonstração será feita em duas etapas. A primeira etapa é a unicidade da solução fraca, e a segunda etapa é a existência de solução fraca para $u_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$. Como já mencionamos acima, é suficiente mostrar existência de solução fraca para o problema (EFF), para então garantir a existência de solução fraca do problema (EFMA) e para isto precisamos das condições de contorno dadas em (2.10). A pergunta é: Por que? e a resposta é a seguinte: Queremos garantir que as funções próprias do operador $-\Delta$ são todas elementos de $L^p(\mathcal{O})$, onde p vem da condição sobre g dada em (2.1). Usando o Teorema 1.39, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$H^k(\mathcal{O}) \subset L^p(\mathcal{O}), \quad (2.11)$$

com

$$k \geq N(p-2)/2p. \quad (2.12)$$

Note que k depende de N . Em particular, se $N = 1$ ou $N = 2$, podemos tomar $k = 1$, independente do valor de p .

Agora vamos supor que $\mathcal{O}$ é um conjunto limitado de classe C^k , onde k é escolhido como em (2.12). Então o teorema de regularidade das equações elípticas garante que as funções próprias do Laplaciano são elementos de $H^k(\mathcal{O})$ e assim, de $L^p(\mathcal{O})$ por (2.11). Sob as condições de contorno deste teorema, podemos mostrar que se $u \in L^p(\mathcal{O})$ é suficientemente suave, então as projeções de u sobre o $\text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ convergem em $L^p(\mathcal{O})$, i.e., $P_n u \rightarrow u$ em $L^p(\mathcal{O})$ (ver [15] pág. 220). Além disso, estas condições de contorno garantem a regularidade da solução fraca, o que será demonstrado no Teorema 2.9.

a. (Unicidade)

Suponhamos que existem duas soluções fracas v e u de (EFF), então elas tem que satisfazer:

1. $(v'(t), \phi) + B[v(t), \phi; t] + (g(v(t)), \phi) = (\tilde{f}(t), \phi),$
2. $(u'(t), \phi) + B[u(t), \phi; t] + (g(u(t)), \phi) = (\tilde{f}(t), \phi),$

para todo $\phi \in H_0^1(\mathcal{O}) \cap L^p(\mathcal{O})$ e q.s. $t \in [\tau, T]$. Tomando $w = v - u$, segue que $w(\tau) = 0$, e daí, para $\phi = w(t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |w(t)|^2 \right) + B[w(t), w(t); t] + (g(v(t)) - g(u(t))), w(t)) = 0 \quad (2.13)$$

para q.s. $t \in [\tau, T]$. Pelo Lema 2.4 temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |w(t)|^2 \right) + \delta |\nabla w(t)|^2 \\ & \leq \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |w(t)|^2 \right) + B[w(t), w(t); t] + \int_{\mathcal{O}} (g(v(t)) - g(u(t))) w(t) dy \\ & \quad - \int_{\mathcal{O}} \sum_{k=1}^N b_k(y, t) \frac{\partial w(t)}{\partial y_k} w(t) dy - \int_{\mathcal{O}} (g(v(t)) - g(u(t))) w(t) dy \\ & = - \int_{\mathcal{O}} \sum_{k=1}^N b_k(y, t) \frac{\partial w(t)}{\partial y_k} w(t) dy - \int_{\mathcal{O}} (g(v(t)) - g(u(t))) w(t) dy \\ & \leq C_b |\nabla w(t)| |w(t)| + l |w(t)|^2, \end{aligned}$$

onde $C_b := N \max_k \{ \|b_k\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times [\tau, T])} \}$. Agora, utilizando a desigualdade de Cauchy- ε ($ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$) para $\varepsilon = \frac{2\delta}{C_b^2}$, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|w(t)|^2\right) + \delta|\nabla w(t)|^2 \leq \delta|\nabla w(t)|^2 + \left(\frac{C_b^2}{4\delta} + l\right)|w(t)|^2,$$

e assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|w(t)|^2\right) \leq \left(\frac{C_b^2}{4\delta} + l\right)|w(t)|^2. \quad (2.14)$$

Integrando sobre $[\tau, T]$, levando em conta que $w(\tau) = 0$ e aplicando o Lema de Gronwall (ver [7] pág. 625) em (2.14), obtemos

$$|w(t)|^2 \leq 0e^{2\left(\frac{C_b^2}{4\delta} + l\right)(T-\tau)}, \quad q.s. \ t \in [\tau, T]. \quad (2.15)$$

Nesta última desigualdade segue a unicidade.

b. Seja $v_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$.

Pelo Teorema 2.7 segue que, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo, existe

$$v_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t)w_k \quad (2.16)$$

satisfazendo o sistema

$$\begin{cases} (v_m'(t), w_k) + B[v_m(t), w_k; t] + (g(v_m)(t), w_k) = (\tilde{f}(t), w_k), \\ k = 1, \dots, m \text{ e } \tau \leq t \leq T_m, \\ v_m(\tau) = P_m v_\tau, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde P_m é a projeção de $L^2(\mathcal{O})$ sobre $\text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$. Como $v_\tau \in H_0^1(\mathcal{O}) \cap L^p(\mathcal{O})$ e $\{w_j : j \geq 1\}$ é uma base de Hilbert ortonormal de $L^2(\mathcal{O})$, que é formada pelos vetores próprios associando aos valores próprios $\{\lambda_j : j \geq 1\}$ do operador $-\Delta$ com condição de Dirichlet zero sobre a fronteira de $\mathcal{O}$, então, pelo Teorema de regularidade de equações elípticas, segue que $w_j \in H^2(\mathcal{O})$ e, se denotamos por

$$v_{\tau_n} := P_n v_\tau = \sum_{j=1}^N (v_\tau, w_j) w_j,$$

então a sequência $\{v_{\tau_n}\}$ converge para v_τ em $H_0^1(\mathcal{O})$, e assim, pelo Teorema de imersão de Sobolev, segue que, se $N \leq 2p/(p-2)$, a sequência $\{v_{\tau_n}\}$ converge a u_τ em $L^p(\mathcal{O})$.

Além disso, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^k , com $k \geq 2$ e $k \geq N(p-2)/2p$, podemos provar (ver [15]) que $\{w_j : j \geq 1\}$ é denso em $L^p(\mathcal{O})$.

Agora vamos obter estimativas para v_m :

Passo 1. (Esta primeira estimativa permitirá estender a solução aproximada $v_m(t)$, definida para todo $t \in [\tau, T_m)$ e $T_m < T$, a todo o intervalo $[\tau, T]$). Multiplicando a (2.17) por $d_m^k(t)$ e somando com respeito a k (para $k = 1, \dots, m$), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m|^2 + B[v_m(t), v_m(t); t] + (g(v_m(t)), v_m(t)) = (\tilde{f}(t), v_m(t)), \quad \tau \leq t \leq T_m.$$

Logo, do Lema 2.4 e da desigualdade (2.1), sabemos que existe uma constante δ (que depende somente de τ , T e r) tal que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m|^2 + \delta |\nabla v_m(t)|^2 + \alpha_1 \|v_m(t)\|_{L^p(\mathcal{O})}^p \\ & \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m|^2 + B[v_m(t), v_m(t); t] + (g(v_m(t)), v_m(t)) \\ & \quad - \int_{\mathcal{O}} \left(\sum_{k=1}^N b_k(y, t) \frac{\partial v_m(t)}{\partial y_k} v_m(t) \right) dy + \beta |\mathcal{O}| \\ & \leq \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \|v_m\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + \beta |\mathcal{O}| + C_b |\nabla v_m(t)| |v_m(t)|, \end{aligned}$$

onde $C_b = N \max_{1 \leq k \leq N} \{\|b_k\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times [\tau, T])}\}$.

Agora, usando a desigualdade de Cauchy- ε para $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \|v_m\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + \beta |\mathcal{O}| + C_b |\nabla v_m(t)| |v_m(t)| \\ & \leq 2^{1/2} \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} (|v_m(t)| + |\nabla v_m(t)|) + \frac{\delta |\nabla v_m(t)|^2}{4} + \frac{C_b^2 |v_m(t)|^2}{\delta} + \beta |\mathcal{O}| \\ & \leq \frac{\delta |\nabla v_m(t)|^2}{4} + \frac{\delta |v_m(t)|^2}{4} + \frac{4 \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2}{\delta} + \frac{\delta |\nabla v_m(t)|^2}{4} + \frac{C_b^2 |v_m(t)|^2}{\delta} + \beta |\mathcal{O}| \\ & \leq \frac{\delta |\nabla v_m(t)|^2}{2} + C_{\delta, b} (\|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |v_m(t)|^2) + \beta |\mathcal{O}|, \end{aligned}$$

onde $C_{\delta, b} := \max\{\frac{\delta}{4} + \frac{C_b^2}{\delta}, \frac{4}{\delta}\}$. Portanto, destas desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m(t)|^2 + \frac{\delta}{2} |\nabla v_m(t)|^2 + \alpha_1 \|v_m(t)\|_{L^p(\mathcal{O})}^p \\ & \leq C_{\delta, b} (\|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |v_m(t)|^2) + \beta |\mathcal{O}|. \end{aligned}$$

Integrando a expressão acima de τ até T_m e usando o Teorema fundamental do cálculo,

segue que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|v_m(t)|^2 + \frac{\delta}{2} \int_{\tau}^{T_m} |\nabla v_m(t)|^2 dt + \alpha_1 \int_{\tau}^{T_m} \|v_m(t)\|_{L^p(\mathcal{O})}^p dt \\ & \leq \int_{\tau}^{T_m} (C_{\delta,b}(\|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + \beta|\mathcal{O}|) dt + C_{\delta,b} \int_{\tau}^{T_m} |v_m(t)|^2 dt + \frac{1}{2}|v_m(\tau)|^2. \end{aligned}$$

Além disso, usando a Desigualdade de Gronwall e o fato que $|v_m(\tau)| \leq |v_\tau|$, obtemos

$$\begin{aligned} & |v_m(t)|^2 + \delta \int_{\tau}^{T_m} |\nabla v_m(t)|^2 dt + 2\alpha_1 \int_{\tau}^{T_m} \|v_m(t)\|_{L^p(\mathcal{O})}^p dt \\ & \leq (2 \int_{\tau}^T (C_{\delta,b}(\|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + \beta|\mathcal{O}|) dt + |v_\tau|^2) e^{2C_{\delta,b}(T-\tau)}. \end{aligned}$$

Desta última desigualdade e do Lema 1.4, segue que

$$\{v_m\} \text{ é limitada em } C^0([\tau, T]; L^2(\mathcal{O})) \cap L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O})). \quad (2.18)$$

Passo 2. Analogamente, multiplicando (2.17) por $(d_m^k)'(t)$, somando com respeito a k (para $k = 1, \dots, m$) e tendo em conta que $a_{kj} = a_{jk}$, obtemos

$$\begin{aligned} & |v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N a_{kj}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_j}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_k}(y, t) dy \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N \frac{\partial a_{kj}}{\partial t}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_j}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_k}(y, t) dy + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} G(v_m(y, t)) dy \\ & = |v'_m(t)|^2 + \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N a_{kj}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_j}(y, t) \frac{\partial v'_m}{\partial y_k}(y, t) dy + (g(v_m), v'_m) \\ & = |v'_m(t)|^2 + B[v_m(t), v'_m(t); t] + (g(v_m), v'_m) - \int_{\mathcal{O}} \sum_{k=1}^N b_k(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_k}(y, t) v'_m(y, t) dy \\ & \leq \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} |v'_m(t)| + C_b |\nabla v_m(t)| |v'_m(t)|, \quad t \in [\tau, T], \end{aligned}$$

onde $C_b = N \max_{1 \leq k \leq N} \{\|b_k\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times [\tau, T])}\}$. Agora, da Desigualdade de Cauchy- ε para $\varepsilon = \sqrt{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} & |v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N a_{kj}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_j}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_k}(y, t) dy \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N \frac{\partial a_{kj}}{\partial t}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_j}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_k}(y, t) dy + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} G(v_m(y, t)) dy \\ & \leq \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + \frac{|v'_m(t)|^2}{2} + C_b^2 |\nabla v_m(t)|^2, \quad t \in [\tau, T], \end{aligned}$$

e do fato que $a_{kj} \in C^1(\bar{\mathcal{O}} \times [\tau, T])$ ($k, j = 1, \dots, K$) temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & \frac{|v'_m(t)|^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N a_{kj}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_j}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_k}(y, t) dy + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} G(v_m(y, t)) dy \\ & \leq \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + C_{\partial a, b} |\nabla v_m(t)|^2, \quad t \in [\tau, T], \end{aligned}$$

onde $C_{\partial a, b} = C_b^2 + \frac{N^2}{2} \max_{k,j=1,\dots,N} \{\|\frac{\partial a_{kj}}{\partial t}\|_{L^\infty(\bar{\mathcal{O}} \times [\tau, T])}\}$. Integrando a desigualdade acima de τ até t , da desigualdade (2.3) e do Lema 2.4, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t \frac{|v'_m(t)|^2}{2} dt + \frac{\delta}{2} \int_{\mathcal{O}} |\nabla v_m(y, t)|^2 dy - \tilde{\beta}|\mathcal{O}| + \tilde{\alpha}_1 \int_{\mathcal{O}} |v_m(y, t)|^p dy \\ & \leq \int_{\tau}^t \frac{|v'_m(t)|^2}{2} dt + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N a_{kj}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_j}(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y_k}(y, t) dy + \int_{\mathcal{O}} G(v_m(y, t)) dy \\ & \leq \int_{\tau}^T \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 dt + C_{\partial a, b} \int_{\tau}^t |\nabla v_m(t)|^2 dt + \int_{\mathcal{O}} G(v_m(y, \tau)) dy \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N a_{kj}(y, \tau) \frac{\partial v_m}{\partial y_j}(y, \tau) \frac{\partial v_m}{\partial y_k}(y, \tau) dy \\ & \leq \int_{\tau}^T \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 dt + C_{\partial a, b} \int_{\tau}^t |\nabla v_m(t)|^2 dt + C_a \int_{\mathcal{O}} |\nabla v_m(y, \tau)|^2 dy \\ & \quad + \tilde{\beta}|\mathcal{O}| + \tilde{\alpha}_2 \|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathcal{O})}^p, \end{aligned}$$

onde $C_a := N^2 \max\{\|a_{kj}\|_{L^\infty(\bar{\mathcal{O}} \times [\tau, T])}\}$. Disto, segue que

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t |v'_m(t)|^2 dt + \delta \int_{\mathcal{O}} |\nabla v_m(y, t)|^2 dy + 2\tilde{\alpha}_1 \int_{\mathcal{O}} |v_m(y, t)|^p dy \\ & \leq 2\|\tilde{f}\|_{L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}))}^2 + 2C_{\partial a, b} \int_{\tau}^t |\nabla v_m(t)|^2 dt + 2C_a |\nabla v_m(\tau)|^2 \\ & \quad + 2\tilde{\alpha}_2 \|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathcal{O})}^p + 4\tilde{\beta}|\mathcal{O}|. \end{aligned}$$

Usando as condições de contorno e o fato que $v_m(y, \tau)$ é limitada em $H_0^1(\mathcal{O}) \cap L^p(\mathcal{O})$, $\|v_m(\tau)\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq \|v_\tau\|_{L^p(\mathcal{O})}$ e $|\nabla v_m(\tau)| \leq |\nabla v_\tau|$. Fazendo $C := \max\{2, 2C_{\partial a, b}\}$ temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t |v'_m(t)|^2 dt + \delta \int_{\mathcal{O}} |\nabla v_m(y, t)|^2 dy + 2\tilde{\alpha}_1 \int_{\mathcal{O}} |v_m(y, t)|^p dy \\ & \leq C(\|\tilde{f}\|_{L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}))}^2 + \int_{\tau}^t |\nabla v_m(t)|^2 dt) + 2C_a |\nabla v_\tau|^2 \\ & \quad + 2\tilde{\alpha}_2 \|v_\tau\|_{L^p(\mathcal{O})}^p + 4\tilde{\beta}|\mathcal{O}|, \end{aligned}$$

e assim, aplicando o Lema de Gronwall na última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^T |v'_m(t)|^2 dt + \int_{\mathcal{O}} |\nabla v_m(y, t)|^2 dy + \frac{2\tilde{\alpha}_1}{\delta} \int_{\mathcal{O}} |v_m(y, t)|^p dy \\ & \leq \frac{1}{\delta} (C \|\tilde{f}\|_{L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}))}^2 + 2C_a |\nabla v_{\tau}|^2 + 2\tilde{\alpha}_2 \|v_{\tau}\|_{L^p(\mathcal{O})}^p + 4\tilde{\beta} |\mathcal{O}|) e^{\frac{C}{\delta}(T-\tau)}. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\{v_m\} \text{ é limitada em } L^{\infty}(\tau, T; L^p(\mathcal{O})), \quad (2.19)$$

$$\{v_m\} \text{ é limitada em } L^{\infty}(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O})) \quad (2.20)$$

e

$$\{v'_m\} \text{ é limitada em } L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O})). \quad (2.21)$$

Passo 3. De (2.18) sabemos que $\{v_n\}$ é limitada em $L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))$ e, como $L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))$ é reflexivo, então, pelo Teorema 1.16, existe uma subsequência de $\{v_n\}$, que denotaremos por $\{v_n\}$, e existe $v \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))$ tais que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O})). \quad (2.22)$$

Sabemos também que, de (2.18), $\{v_n\}$ é limitada em $L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}))$ e, como $L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}))$ é reflexivo, então, do Teorema 1.16, segue que, existe uma subsequência de $\{v_n\}$, que denotaremos por $\{v_n\}$, e existe $\bar{v} \in L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}))$ tais que

$$v_n \rightharpoonup \bar{v} \text{ em } L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O})). \quad (2.23)$$

De (2.21), $\{v'_n\}$ é limitada em $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$ e, como $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$ é reflexivo, então, pelo Teorema 1.16, existe uma subsequência de $\{v'_n\}$, que denotaremos por $\{v'_n\}$, e existe $\tilde{v} \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$ tais que

$$v'_n \rightharpoonup \tilde{v} \text{ em } L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O})). \quad (2.24)$$

Como $p \geq 2$ e $|\mathcal{O}| < \infty$ então $L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O})) \hookrightarrow L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$. Logo, de (2.22), temos que $v \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$ e, de (2.23), $\bar{v} \in L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}))$. Então, $\bar{v} \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$ e, da unicidade do limite fraco, concluimos que $\bar{v} = v$.

Agora, como

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T v \frac{\partial \phi}{\partial t} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tau}^T v_n \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tau}^T v'_n \phi dt \\ &= - \int_{\tau}^T \tilde{v} \phi dt, \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\tau, T), \end{aligned}$$

então $\frac{\partial v}{\partial t} = \tilde{v}$.

Além disso, já que $\{v_n\}$ é limitada em $L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))$ e $\{v'_n\}$ é limitada em $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$, obtém-se que $\{v_n\}$ é limitada em $H^1(\mathcal{O} \times (\tau, T))$ e como

$$H^1(\mathcal{O} \times (\tau, T)) \hookrightarrow L^2(\mathcal{O} \times (\tau, T)),$$

existe uma subsequência de $\{v_n\}$, que denotaremos novamente por $\{v_n\}$, que converge fortemente a um elemento de $L^2(\mathcal{O} \times (\tau, T))$ e portanto, da unicidade do limite fraco, segue que

$$v_n \rightarrow v \text{ em } L^2(\mathcal{O} \times (\tau, T)).$$

Assim, $v_n(y, t) \rightarrow v(y, t)$ q.s. em $\mathcal{O} \times (\tau, T)$. Mais ainda, como a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $g(v_n(y, t)) \rightarrow g(v(y, t))$ q.s. em $\mathcal{O} \times (\tau, T)$.

Além disso, g satisfaz

$$|g(s)| \leq k(1 + |s|^{p-1})$$

e, dessa forma, tomando $q = \frac{p}{p-1}$ obtemos

$$\|g(v_n)\|_{L^q(\mathcal{O} \times (\tau, T))} \leq k(|\mathcal{O} \times (\tau, T)| + (\int_{\mathcal{O} \times (\tau, T)} |v_n(y, t)|^p dy dt)^{\frac{p-1}{p}}). \quad (2.25)$$

De (2.18), segue que $\|v_n\|_{L^p(\mathcal{O} \times (\tau, T))} \leq K$ e assim, $\|g(v_n)\|_{L^q(\mathcal{O} \times (\tau, T))} \leq K_1$ e, pela Proposição 1.41,

$$g(v_n) \rightharpoonup g(v) \text{ em } L^q(\mathcal{O} \times (\tau, T)). \quad (2.26)$$

Portanto, usando as estimativas acima, concluímos que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O})), \quad (2.27)$$

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O})), \quad (2.28)$$

$$v'_n \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{em } L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O})), \quad (2.29)$$

$$g(v_n) \rightharpoonup g(v) \quad \text{em } L^q(\mathcal{O} \times (\tau, T)). \quad (2.30)$$

Seja $w \in H_0^1(\mathcal{O}) \cap L^p(\mathcal{O})$. Pela mesma construção da sequência de soluções feita anteriormente, temos que

$$\int_{\tau}^T (v'_m(t), w) + B[v_m(t), w; t] + (g(v_m(t)), w) dt = \int_{\tau}^T (\tilde{f}(t), w) dt. \quad (2.31)$$

Por (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30), fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.31), obtemos

$$\int_{\tau}^T (v'(t), w) + B[v(t), w; t] + (g(v(t)), w) dt = \int_{\tau}^T (\tilde{f}(t), w) dt, \quad (2.32)$$

para todo $w \in H_0^1(\mathcal{O}) \cap L^p(\mathcal{O})$.

Seja $\phi \in C^1([\tau, T]; H_0^1(\mathcal{O}) \cap L^p(\mathcal{O}))$, com $\phi(T) = 0$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T -(v(t), \phi'(t)) + B[v, \phi; t] + (g(v(t)), \phi(t)) dt &= \int_{\tau}^T (\tilde{f}(t), \phi(t)) dt \\ &+ (v(\tau), \phi(\tau)). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Fazendo o mesmo em (2.31) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T -(v_m(t), \phi'(t)) + B[v_m, \phi; t] + (g(v_m(t)), \phi(t)) dt &= \int_{\tau}^T (\tilde{f}(t), \phi(t)) dt \\ &+ (v_m(\tau), \phi(\tau)). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Logo, como $v_m(\tau) \rightarrow v_{\tau}$ em $L^2(\mathcal{O})$, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.34), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T -(v(t), \phi'(t)) + B[v, \phi; t] + (g(v(t)), \phi(t)) dt &= \int_{\tau}^T (\tilde{f}(t), \phi(t)) dt \\ &+ (v_{\tau}, \phi(\tau)). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Pela arbitrariedade de $\phi(\tau)$, comparando (2.33) com (2.35), concluímos que $v(\tau) = v_{\tau}$.

Portanto, v é solução fraca do problema (EFF).

□

2.1.2 Regularidade de solução para o problema (EFMA) quando $u_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$

Teorema 2.9. (Solução forte) *Sejam $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}; L^2(\mathcal{O}_t))$ e as funções r e $\bar{r}$ satisfazendo as hipóteses **H1**, **H2** e **H3**. Também assumimos que:*

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{O} \text{ é de classe } C^2 \text{ e } N \leq 2p/(p-2) \text{ ou} \\ \partial\mathcal{O} \text{ é de classe } C^m \text{ com } m \geq 2 \text{ inteiro, tal que } m \geq N(p-2)/2p. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Então, para qualquer $u_\tau \in L^p(\mathcal{O}_\tau) \cap H_0^1(\mathcal{O}_\tau)$ e para qualquer $-\infty < \tau \leq T < \infty$, existe uma única solução forte $u(t) = u(t; \tau, u_\tau)$ para o problema (EFMA).

Demonstração. A demonstração deste teorema vai ser feita em dois casos. O primeiro caso é quando $g(0) = 0$ e o segundo caso é quando $g(0) \neq 0$ (um resultado parecido pode-se encontrar em [15] Teorema 8.5 (pág. 227) e Exercício 8.3 (pág. 231)).

Caso 1. ($g(0) = 0$) Vamos provar que a sequência aproximada, construída no Teorema (2.10), $\{v_m\}$ é limitada em $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$.

Multiplicando $\lambda_k d_m^k(t)$ à primeira equação de (2.17) e somando com respeito a k de 1 até m , levando em conta que $-\Delta v_m = \sum_{k=1}^m \lambda_k d_m^k(t) w_k$ é 0 sobre $\partial\mathcal{O}$ e usando o Lema 2.5, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla v_m|^2 + \delta_0 |\Delta v_m(t)|^2 - \int_{\mathcal{O}} g(v_m(y, t)) \Delta v_m(y, t) dy \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla v_m|^2 \\ & + \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N a_{kj}(y, t) (v_m)_{y_k y_j} \Delta v_m dy + c_0 \int_{\mathcal{O}} |v_m(y, t)|^2 dy - \int_{\mathcal{O}} g(v_m(y, t)) \Delta v_m(y, t) dy \\ & = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla v_m|^2 - \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N (v_m)_{y_k} (a_{kj}(y, t) \Delta v_m)_{y_j} dy + c_0 \int_{\mathcal{O}} |v_m(y, t)|^2 dy \\ & - \int_{\mathcal{O}} g(v_m(y, t)) \Delta v_m(y, t) dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla v_m|^2 + B[v_m, -\Delta v_m; t] \\ & - \int_{\mathcal{O}} g(v_m(y, t)) \Delta v_m(y, t) dy - \int_{\mathcal{O}} \sum_{k,j=1}^N (v_m)_{y_k} a_{kj}(y, t)_{y_j} \Delta v_m dy \\ & + \int_{\mathcal{O}} \sum_{k=1}^N b_k(y, t) \frac{\partial v_m(t)}{\partial y_k} \Delta v_m(t) dy + c_0 \int_{\mathcal{O}} |v_m(y, t)|^2 dy \\ & \leq \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} |\Delta v_m(t)| + c_0 |v_m(t)|^2 + C_{\tilde{b}} |\nabla v_m(t)| |\Delta v_m(t)|, \end{aligned}$$

onde $C_{\tilde{b}} = N \max_{k=1, \dots, N} \{\|\tilde{b}_k\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times [\tau, T])}\}$ com $\tilde{b}_k(y, t) = b_k(y, t) - \sum_{j=1}^N (a_{jk}(y, t))_{y_j}$, $k = 1, \dots, N$.

Agora, da Desigualdade de Poincaré e a Desigualdade de Cauchy- ε para $\varepsilon = \frac{\delta_0}{4}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}|\Delta v_m(t)| + c_0|v_m(t)|^2 + C_{\tilde{b}}|\nabla v_m(t)||\Delta v_m(t)| \\ & \leq \frac{\delta_0}{2}|\Delta v_m(t)|^2 + \frac{1}{\delta_0}\|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + c_0C|\nabla v_m(t)|^2 + \frac{C_{\tilde{b}}^2}{\delta_0}|\nabla v_m(t)|^2, \end{aligned}$$

onde C é a constante da Desigualdade de Poincaré.

Se tomamos $C_{\delta_0,b} = c_0C + \frac{C_{\tilde{b}}^2}{\delta_0}$ então

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla v_m|^2 + \frac{\delta_0}{2}|\Delta v_m(t)|^2 - \int_{\mathcal{O}} g(v_m(y,t))\Delta v_m(y,t)dy \\ & \leq \frac{1}{\delta_0}\|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + C_{\delta_0,b}|\nabla v_m(t)|^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Integrando por partes $g(v_m(y,t))\Delta v_m(y,t)dy$ e levando em conta que $g(0) = 0$ e $\Delta v_m|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ conseguimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} g(v_m(y,t))\Delta v_m(y,t)dy &= - \int_{\mathcal{O}} g'(v_m(y,t))|\nabla v_m(y,t)|^2dy \\ &+ \int_{\partial\mathcal{O}} g(v_m(y,t))\frac{\partial v_m(y,t)}{\partial\nu}d\sigma_y \\ &= - \int_{\mathcal{O}} g'(v_m(y,t))|\nabla v_m(y,t)|^2dy \\ &\leq l \int_{\mathcal{O}} |\nabla v_m(y,t)|^2dy. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Denotando por $C_{\delta_0,b,l} = \max\{\frac{1}{\delta_0}, C_{\delta_0,b} + l\}$, de (2.39) e (2.38), segue que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla v_m|^2 + \frac{\delta_0}{2}|\Delta v_m(t)|^2 \\ & \leq C_{\delta_0,b,l}(\|\tilde{f}(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |\nabla v_m(t)|^2). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Integrando (2.39), de τ até t

$$|\nabla v_m(t)|^2 + \delta_0 \int_{\tau}^t |\Delta v_m(t)|^2 dt \leq 2C_{\delta_0,b,l} \int_{\tau}^t (|f(t)|^2 + |\nabla v_m(t)|^2) dt + |\nabla v_m(\tau)|^2.$$

Aplicando o Lema de Gronwall na última desigualdade e levando em conta que $|\nabla v_m(\tau)| \leq |\nabla v_{\tau}|$ obtemos

$$|\nabla v_m(t)|^2 + \delta_0 \int_{\tau}^t |\Delta v_m(t)|^2 dt \leq (2C_{\delta_0,b,l}\|f\|_{L^2(\tau,T;H^{-1}(\mathcal{O}))} + |\nabla v_{\tau}|^2)e^{2C_{\delta_0,b,l}(T-\tau)}.$$

Desta desigualdade e da estimativa em (2.18) concluímos que a sequência $\{v_m\}$ é limitada em

$$C^0([\tau, T]; H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O})). \quad (2.40)$$

Caso 2. ($g(0) \neq 0$) Pelo Teorema 2.8 sabemos que $\frac{dv}{dt} \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$, $v \in L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}))$ e $g(v) \in L^q(\tau, T; L^q(\mathcal{O}))$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Já que $q \geq 2$, segue que $g(u) \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$.

Tomando $h = \tilde{f} - v' - g(v)$, $h \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}))$ e como v é solução fraca do problema (EFF), então para q.s. $t \in (\tau, T)$, $v(t)$ é solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases} Lv(t) = h(t) & \text{em } \mathcal{O}, \\ v(t) = 0, & \text{sobre } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \quad (2.41)$$

onde $Lv(t) = -\sum_{k,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{jk}(y, t) v_{y_k}(t)) + b(y, t) \cdot \nabla_y v(t)$.

Logo, do teorema de regularidade de equações elípticas (Teorema 1.42) segue que, para q.s. $t \in (\tau, T)$, $v(t) \in H^2(\mathcal{O}_t)$ e, além disso, temos a seguinte estimativa

$$\|v(t)\|_{H^2(\mathcal{O})}^2 \leq C(|h(t)|^2 + |v(t)|^2) \leq C(|\tilde{f}(t)|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |v'(t)|^2 + |g(v(t))|^2 + |v(t)|^2), \quad (2.42)$$

onde a constante C só depende de $\mathcal{O}$ e dos coeficientes de L .

Assim, integrando de τ até T em (2.42) e usando (2.21) segue que

$$v \in C^0([\tau, T]; H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^2(\tau, T; H^2(\mathcal{O})). \quad (2.43)$$

□

2.1.3 Existência de solução fraca para o problema (EFMA) quando $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$

Teorema 2.10. (Existência de solução fraca quando $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$). *Sejam $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$ e r e $\bar{r}$ satisfazendo as hipóteses **H1**, **H2** e **H3**. Também suponha que*

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{O} &\text{ é de classe } C^2 \text{ e } N \leq 2p/(p-2) \text{ ou} \\ \partial\mathcal{O} &\text{ é de classe } C^m \text{ com, } m \geq 2 \text{ inteiro tal que } m \geq N(p-2)/2p. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Então, para qualquer $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$ e para qualquer $-\infty < \tau \leq T < \infty$, existe uma única solução fraca $u(t)$ para (EFMA). Além disso, $u(t) = u(t; \tau, u_\tau)$ satisfaz a igualdade de energia

$$\begin{aligned} |u(t)|_t^2 + 2 \int_\tau^t |\nabla u(s)|_s^2 ds + 2 \int_\tau^t \int_{\mathcal{O}_s} g(u(x, s)) u(x, s) dx ds \\ = |u_\tau|_\tau^2 + \int_\tau^t \langle f(s), u(s) \rangle_s ds, \end{aligned} \quad (2.45)$$

para todo $t \in [\tau, T]$, e as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} |u(t)|_t^2 \leq e^{-\lambda_\tau t(t-\tau)} |u_\tau|_\tau^2 + e^{-\lambda_\tau t} \int_\tau^t e^{\lambda_\tau s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds \\ + 2\beta e^{-\lambda_\tau t} \int_\tau^t e^{\lambda_\tau s} |\mathcal{O}_s| ds, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\int_\tau^t (|\nabla u(s)|_s^2 + 2\alpha_1 \int_{\mathcal{O}_s} |u(s)|^p dx) ds \leq \int_\tau^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta \int_\tau^t |\mathcal{O}_s| ds + |u_\tau|_\tau^2, \quad (2.47)$$

para todo $t \in [\tau, T]$, onde λ_τ é o primeiro valor próprio de $-\Delta$ sobre $H_0^1(\bigcup_{\tau \leq s \leq t} \mathcal{O}_s)$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.8 e o Corolário 1.55 a igualdade (2.45) é imediata.

Como consequência de (2.45) e de (2.1) e da Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |u(s)|_s^2 + |\nabla u(s)|_s^2 + \alpha_1 \|u(s)\|_{L^p(\mathcal{O}_s)}^p \\ \leq \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |u(s)|_s^2 + |\nabla u(s)|_s^2 + (g(u(s)), u(s))_s + \beta |\mathcal{O}_s| \\ = \langle f(s), u(s) \rangle_{-1,s} + \beta |\mathcal{O}_s| \leq \|f(s)\|_{-1,s} |u(s)|_s + \beta |\mathcal{O}_s|. \end{aligned}$$

Agora, vamos supor que $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$. Para provar a existência de solução fraca da equação (EFMA), levando em conta que $H_0^1(\mathcal{O}_\tau) \cap L^p(\mathcal{O}_\tau)$ é denso em $L^2(\mathcal{O}_\tau)$, vamos considerar uma sequência $\{u_{\tau m}\} \subset H_0^1(\mathcal{O}_\tau) \cap L^p(\mathcal{O}_\tau)$ tal que $u_{\tau m} \rightarrow u_\tau$ em $L^2(\mathcal{O}_\tau)$ quando $m \rightarrow \infty$, e, da densidade de $L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$ em $L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$, seja $f_m \in L^2(\tau, T; L^2(\mathcal{O}_t))$ tal que $f_m \rightarrow f$ em $L^2(\tau, T; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$ quando $m \rightarrow \infty$.

Logo, pelo Teorema 2.9, para cada dado inicial $(u_{\tau m}, f_m)$, $m = 1, 2, \dots$, existe uma única solução forte $u_m = u_m(t)$ para o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_m}{\partial t} - \Delta u_m + g(u_m) = f_m(t) \quad \text{em } Q_{\tau, T}, \\ u_m = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_{\tau, T}, \\ u_m(\tau) = u_{\tau m}, \quad \text{em } \mathcal{O}_\tau. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Por outro lado, de (2.46) e (2.47), sabemos que a sequência $\{u_m\}$ é limitada em $L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}_t))$, então, pelo Teorema 1.16 e pelo mesmo argumento em (2.30), podemos extrair uma subsequência, que denotaremos por $\{v_n\}$, tal que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(\tau, T; H_0^1(\mathcal{O}_t)), \quad (2.49)$$

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\tau, T; L^p(\mathcal{O}_t)), \quad (2.50)$$

$$g(u_m) \rightharpoonup g(u) \text{ em } L^q(\tau, T; L^q(\mathcal{O}_t)). \quad (2.51)$$

De

$$u'_m - \Delta u_m + g(u_m) = f_m(t),$$

$$u'_n - \Delta u_n + g(u_n) = f_n(t),$$

segue que

$$u'_m - u'_n = \Delta u_m - \Delta u_n + g(u_n) - g(u_m) + f_m(t) - f_n(t).$$

Multiplicando esta última desigualdade por $u_m - u_n$ obtemos

$$\begin{aligned} (u'_m(t) - u'_n(t), u_m(t) - u_n(t))_t &= (\Delta u_m(t) - \Delta u_n(t), u_m(t) - u_n(t))_t \\ &\quad + (g(u_n(t)) - g(u_m(t)), u_m(t) - u_n(t))_t \\ &\quad + (f_m(t) - f_n(t), u_m(t) - u_n(t))_t. \end{aligned}$$

Se integramos por partes o primeiro membro, usamos a desigualdade (2.2) no segundo membro e aplicamos a Desigualdade de Cauchy no terceiro membro desta expressão, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t) - u_n(t)|_t^2 &\leq -|\nabla u_m(t) - \nabla u_n(t)|_t \\ &\quad + (l + \frac{1}{2}) |u_m(t) - u_n(t)|_t^2 + \frac{1}{2} \|f_m(t) - f_n(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_t)}^2. \end{aligned}$$

Portanto, chegamos na seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt} |u_m(t) - u_n(t)|_t^2 \leq (2l + 1) |u_m(t) - u_n(t)|_t^2 + \|f_m(t) - f_n(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_t)}^2.$$

Integrando esta expressão de τ até T temos

$$|u_m(t) - u_n(t)|_t^2 \leq |u_{\tau m} - u_{\tau n}|_\tau^2 + (2l + 1) \int_\tau^t |u_m(t) - u_n(t)|_t^2 dt + \int_\tau^t \|f_m(t) - f_n(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_t)}^2 dt, \quad (2.52)$$

e, pelo Lema de Gronwall, concluímos em

$$|u_m(t) - u_n(t)|_t^2 \leq e^{(2l+1)(t-\tau)} |u_{\tau m} - u_{\tau n}|_\tau^2 + e^{(2l+1)(t-\tau)} \int_\tau^T \|f_m(t) - f_n(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_t)}^2 dt. \quad (2.53)$$

Portanto, $\{u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}_t))$. Assim, pela unicidade do limite e por (2.49), sabemos que

$$u_m \rightarrow u \text{ em } C([\tau, T]; L^2(\mathcal{O}_t)). \quad (2.54)$$

Por outro lado, para cada função teste $\phi \in \mathcal{U}_{\tau T}$, sabemos que u_m satisfaz (2.4). Então, utilizando (2.49), (2.50), (2.51) e (2.54), passando o limite, quando $m \rightarrow \infty$ obtemos que u satisfaz (2.4). Assim, temos que u é solução fraca do problema (EFMA) com dado inicial u_τ . $\square$

2.2 Geração do processo $U(t, \tau)$ pelas soluções fracas

2.2.1 Existência de solução fraca para o problema (EFM) quando $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$

Definição 2.11. Uma função $u : \bigcup_{t \in [\tau, \infty)} \mathcal{O}_t \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *solução fraca do problema (EFM)* se, para todo $T \geq \tau$, a restrição de u sobre $\bigcup_{t \in [\tau, T]} \mathcal{O}_t \times \{t\}$ é *solução fraca do problema (EFMA)*.

Pelo Teorema 2.10, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.12. (Existência de solução fraca quando $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$) Sob as hipóteses do Teorema 2.10, para cada $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$ e $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$, o problema (EFM) tem uma única solução fraca. Além disso, esta solução fraca satisfaz (2.46) e (2.47) para todo $t \in [\tau, \infty)$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.10 podemos definir $u : \bigcup_{t \in [\tau, \infty)} \mathcal{O}_t \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a solução fraca do problema (EFMA) para u restrita a $\bigcup_{t \in [\tau, T]} \mathcal{O}_t \times \{t\}$ para qualquer $T \geq \tau$.

A unicidade de solução é imediata pois, do contrário, existiriam duas soluções do problema (EFM) e assim, existiria $T \geq \tau$ tal que as soluções restringidas a $\bigcup_{t \in [\tau, T]} \mathcal{O}_t \times \{t\}$ seriam diferentes mas, ainda seriam soluções do problema EFMA, o que é um absurdo. $\square$

2.2.2 Geração do processo $U(t, \tau)$

Consideremos $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$ fixo. Do Teorema 2.12, podemos definir o operador

$$U(t, \tau) : L^2(\mathcal{O}_\tau) \rightarrow L^2(\mathcal{O}_t), \quad -\infty < \tau \leq t < \infty, \quad (2.55)$$

por

$$U(t, \tau)u_\tau := u(t; \tau, u_\tau) = u(t), \quad \forall u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau), \quad (2.56)$$

onde $u(\cdot; \tau, u_\tau)$ é a única solução fraca do problema (EFM). Já que $u \in C([\tau, T] : L^2(\mathcal{O}_t))$ para todo $T \geq \tau$, a inclusão $u(t) \in L^2(\mathcal{O}_t)$ tem sentido.

Da existência e unicidade, sabemos que a família de operadores $\{U(t, \tau) : -\infty < \tau \leq t < \infty\}$ forma um processo tal que

$$U(\tau, \tau) = Id \text{ (identidade em } L^2(\mathcal{O}_\tau), \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.57)$$

$$U(t, s)U(s, \tau) = U(t, \tau), \quad \forall -\infty < \tau \leq s \leq t < \infty. \quad (2.58)$$

No que segue, vamos apresentar umas propriedades do processo $\{U(t, \tau) : -\infty < \tau \leq t < \infty\}$ definido acima.

Lema 2.13. *Seja $u_\tau^i \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$ e $u_i(s) = U(s, \tau)u_\tau^i$ ($i = 1, 2$) então, temos*

$$|u^1(t) - u^2(t)|_t^2 \leq e^{2l(t-s)} |u^1(s) - u^2(s)|_s^2, \quad \forall \tau \leq s \leq t. \quad (2.59)$$

Demonstração. Fixemos $t > \tau$, pela densidade de $H_0^1(\mathcal{O}_\tau) \cup L^p(\mathcal{O}_\tau)$ em $L^2(\mathcal{O}_\tau)$, existem duas seqüências $\{u_{\tau m}^i\}$, $i = 1, 2$, satisfazendo $u_{\tau m}^i \in H_0^1(\mathcal{O}_\tau) \cup L^p(\mathcal{O}_\tau)$ e

$$u_{\tau m}^i \rightarrow u_\tau^i \text{ em } L^2(\mathcal{O}_\tau), \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.60)$$

e

$$u_m^i \rightarrow u^i \text{ em } C^0([\tau, t]; L^2(\mathcal{O}_s)), \quad i = 1, 2, \quad (2.61)$$

onde u_m^i é a única solução forte correspondente aos dados regular $(u_{\tau m}^i, f)$.

Logo, similar a (2.53), temos

$$|u_m^1(t) - u_m^2(t)|_t^2 \leq e^{2l(t-s)} |u_m^1(s) - u_m^2(s)|_s^2. \quad (2.62)$$

Portanto, obtemos (2.59) imediatamente de (2.60) e (2.61). $\square$

Lema 2.14. *Para todo $-\infty < \tau \leq t < \infty$, o operador $U(t, \tau) : L^2(\mathcal{O}_\tau) \rightarrow L^2(\mathcal{O}_t)$ é contínuo.*

Demonstração. Segue diretamente de (2.59). □

Atratores Pullback

Neste capítulo abordaremos outro resultado muito importante deste trabalho que é mostrar a existência de atratores pullback para o processo $U(.,.)$ definido pelas soluções fracas do problema (EFM) sendo o resultado principal o Teorema 3.4.

3.1 $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ - Atrator pullback

Ao longo do capítulo, vamos supor que

$$\Omega_t := \bigcup_{s \leq t} \mathcal{O}_s \quad \text{limitado } \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, denotamos

$$\lambda_{1,t} := \min_{v \in H_0^1(\Omega_t), v \neq 0} \frac{|\nabla v|_{(L^2(\Omega_t))^N}^2}{|v|_{L^2(\Omega_t)}^2}, \quad (3.2)$$

o primeiro valor próprio de $-\Delta$ sobre $H_0^1(\Omega_t)$. Observe que

$$\lambda_{\tau t} \geq \lambda_{1,t}, \quad \forall \tau \leq t, \quad (3.3)$$

e

$$\lambda_{1,s} \geq \lambda_{1,t}, \quad \forall s \leq t. \quad (3.4)$$

3.1.1 Conjunto $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -absorvente pullback

Sejam $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$ e $u(t) = U(t, \tau)u_\tau$. De (2.46) obtemos

$$|u(t)|_t^2 \leq e^{-\lambda_{\tau t}(t-\tau)} |u_\tau|_\tau^2 + e^{-\lambda_{\tau t}t} \int_\tau^t e^{\lambda_{\tau t}s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta e^{-\lambda_{\tau t}t} \int_\tau^t e^{\lambda_{\tau t}s} |\mathcal{O}_s| ds. \quad (3.5)$$

Já de (3.3) temos a seguinte desigualdade

$$e^{-\lambda_{\tau t}(t-s)} \leq e^{-\lambda_{1,t}(t-s)}, \quad \forall \tau \leq s \leq t, \quad (3.6)$$

e de (3.6) obtemos

$$\begin{aligned} 2\beta e^{-\lambda_{\tau t}t} \int_\tau^t e^{\lambda_{\tau t}s} |\mathcal{O}_s| ds &\leq 2\beta e^{-\lambda_{1,t}t} \int_\tau^t e^{\lambda_{1,t}s} |\mathcal{O}_s| ds \\ &\leq 2\beta e^{-\lambda_{1,t}t} |\Omega_t| \int_\tau^t e^{\lambda_{1,t}s} ds \\ &= 2\beta e^{-\lambda_{1,t}t} \frac{|\Omega_t|}{\lambda_{1,t}} (e^{\lambda_{1,t}t} - e^{\lambda_{1,t}\tau}) \\ &\leq 2\beta \frac{|\Omega_t|}{\lambda_{1,t}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5) obtemos

$$|u(t)|_t^2 \leq e^{-\lambda_{1,t}(t-\tau)} |u_\tau|_\tau^2 + e^{-\lambda_{1,t}t} \int_\tau^t e^{\lambda_{1,t}s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta \frac{|\Omega_t|}{\lambda_{1,t}}. \quad (3.8)$$

Agora, consideremos o seguinte conjunto

$$R_{\lambda_1} = \{\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) : \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{\lambda_{1,\tau}\tau} \rho^2(\tau) = 0\} \quad (3.9)$$

e seja $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ a classe de todas as famílias $\hat{D} = \{D(t) : t \in \mathbb{R}, D(t) \neq \emptyset\}$ tais que $D(t) \subset \{u \in L^2(\mathcal{O}_t) : |u|_t \leq \rho_{\hat{D}}(t)\}$ para algum $\rho_{\hat{D}} \in R_{\lambda_1}$.

Além disso, vamos assumir que $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}; H^{-1}(\mathcal{O}_t))$ satisfaz a condição

$$\int_{-\infty}^t e^{\lambda_{1,t}s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, vamos definir o número positivo $R^2(t)$ dado por

$$R^2(t) = e^{-\lambda_{1,t}t} \int_{-\infty}^t e^{\lambda_{1,t}s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta \frac{|\Omega_t|}{\lambda_{1,t}} + 1.$$

Lema 3.1. *A família de conjuntos*

$$\widehat{D}_0 := \{ \{u \in L^2(\mathcal{O}_t) : |u|_t \leq R(t)\} : t \in \mathbb{R} \} \quad (3.11)$$

é um $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -absorvente pullback para o processo $U(\cdot, \cdot)$, i.e., para qualquer $\widehat{D} \in \mathfrak{D}_{\lambda_1}$ e qualquer $t \in \mathbb{R}$, existe $T(t, \widehat{D}) > 0$ satisfazendo

$$U(t, \tau)D(\tau) \subset \{u \in L^2(\mathcal{O}_t) : |u|_t \leq R(t)\}, \quad \forall t - \tau > T(t, \widehat{D}). \quad (3.12)$$

Além disso, $\widehat{D}_0 \in \mathfrak{D}_{\lambda_1}$.

Demonstração. Se $u \in U(t, \tau)D(\tau)$, então existe $u_\tau \in D(\tau)$ tal que $u = U(t, \tau)u_\tau$. De (3.8) obtemos

$$\begin{aligned} |u|_t^2 &\leq e^{-\lambda_{1,t}(t-\tau)} |u_\tau|_\tau^2 + e^{-\lambda_{1,t}t} \int_\tau^t e^{\lambda_{1,t}s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta \frac{|\Omega_t|}{\lambda_{1,t}} \\ &= e^{-\lambda_{1,t}(t-\tau)} |u_\tau|_\tau^2 + R^2(t) - 1 \\ &\leq e^{-\lambda_{1,t}(t-\tau)} \rho_{\widehat{D}}^2(\tau) + R^2(t) - 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

De (3.9) segue que existe $T(t, \widehat{D}) > 0$ tal que

$$|u|_t \leq R(t), \quad \forall t - \tau > T(t, \widehat{D}). \quad (3.14)$$

Agora, para mostrar que $\widehat{D}_0 \in \mathfrak{D}_{\lambda_1}$, é suficiente mostrar que $R \in R_{\lambda_1}$ i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\lambda_{1,t}t} R^2(t) = 0.$$

De fato, vamos considerar $t < 0$. Então, de (3.4) e da definição de $R(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\lambda_{1,t}t} R^2(t) &= \int_\tau^t e^{\lambda_{1,t}s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta \frac{|\Omega_t|}{\lambda_{1,t}} e^{\lambda_{1,t}t} + e^{\lambda_{1,t}t} \\ &\leq \int_\tau^t e^{\lambda_{1,0}s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta \frac{|\Omega_t|}{\lambda_{1,0}} e^{\lambda_{1,0}t} + e^{\lambda_{1,0}t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

□

3.1.2 $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -assintoticamente compacto pullback

Para mostrar que o processo $U(t, \tau)$ é $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -assintoticamente compacto pullback, vamos considerar, para cada $t \in \mathbb{R}$, o seguinte conjunto

$$B_{t-1} := \{u \in L^2(\mathcal{O}_{t-1}) : |u|_{t-1} \leq e^{\lambda_{1,t}/2} R(t)\}.$$

Lema 3.2. *A família de conjuntos $\{U(t, t-1)B_{t-1} : t \in \mathbb{R}\}$ é $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -absorvente pullback para o processo $U(\cdot, \cdot)$. Além disso, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $U(t, t-1)B_{t-1}$ é relativamente compacto em $L^2(\mathcal{O}_t)$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que para qualquer $\widehat{D} \in \mathfrak{D}_{\lambda_1}$ e qualquer $t \in \mathbb{R}$, existe $\tau_0(t, \widehat{D}) \leq t$ tal que $U(t-1, \tau)D(\tau) \subset B_{t-1} \ \forall \tau \leq \tau_0(t, \widehat{D})$. De fato, seja $u(t-1) \in U(t-1, \tau)D(\tau)$, então existe $u_\tau \in D(\tau)$ tal que $u(t-1) = U(t-1, \tau)u_\tau$. De (3.8) obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} |u(t-1)|_{t-1}^2 &\leq e^{-\lambda_{1,t-1}(t-1-\tau)} |u_\tau|_\tau^2 + e^{-\lambda_{1,t-1}(t-1)} \int_\tau^{t-1} e^{\lambda_{1,t-1}s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta \frac{|\Omega_{t-1}|}{\lambda_{1,t-1}} \\ &\leq e^{\lambda_{1,t}t} (e^{-\lambda_{1,t}(t-\tau)} |u_\tau|_\tau^2 + e^{-\lambda_{1,t}t} \int_\tau^{t-1} e^{\lambda_{1,t}s} \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta \frac{|\Omega_{t-1}|}{\lambda_{1,t}}) \\ &= e^{\lambda_{1,t}t} (e^{-\lambda_{1,t}(t-\tau)} |u_\tau|_\tau^2 + R^2(t) - 1) \end{aligned}$$

Da mesma forma como procedemos no Lema 3.1, existe $\tau_0(t, \widehat{D}) \leq t-1$ tal que

$$e^{-\lambda_{1,t}(t-\tau)} |u_\tau|_\tau^2 - 1 \leq 0 \quad \forall \tau \leq \tau_0(t, \widehat{D})$$

e, a partir disto, obtemos

$$|u(t-1)|_{t-1}^2 < e^{\lambda_{1,t}t} \cdot R^2(t), \quad \tau \rightarrow -\infty \quad (3.15)$$

Isto mostra que

$$U(t-1, \tau)D(\tau) \subset B_{t-1}, \quad \forall \tau \leq \tau_0(t, \widehat{D}),$$

e consequentemente, a família $\{U(t, t-1)B_{t-1} : t \in \mathbb{R}\}$ é $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -absorvente pullback para o processo $U(\cdot, \cdot)$. No que segue, vamos a mostrar que para cada $t \in \mathbb{R}$ o conjunto $U(t, t-1)B_{t-1}$ é relativamente compacto em $L^2(\mathcal{O}_t)$.

Passo 1. Seja $u_0 \in B_{t-1}$ e consideremos a função $v(s) := U(s, t-1)u_0$. De (2.47) temos a seguinte

desigualdade

$$\begin{aligned} & \int_{t-1}^t (|\nabla v(s)|_s^2 + 2\alpha_1 \int_{\mathcal{O}_s} |v(s)|^p dx) ds \\ & \leq \int_{t-1}^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta|\Omega_t| + |u_0|_{t-1}^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Fazendo a mudança de variável $\theta = s + t - 1$, $s \in [0, 1]$, em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{t-1}^t (|\nabla v(\theta)|_\theta^2 + 2\alpha_1 \int_{\mathcal{O}_\theta} |v(\theta)|^p dx) d\theta \\ & = \int_0^1 (|\nabla v(t-1+s)|_{t-1+s}^2 + 2\alpha_1 \int_{\mathcal{O}_{t-1+s}} |v(t-1+s)|^p dx) ds. \end{aligned}$$

Mais ainda, redefinindo $u(s) := v(t-1+s) = U(t-1+s, t-1)u_0$, com $s \in [0, 1]$, ($u(s) \in L^2(\mathcal{O}_{t-1+s})$) e substituindo em (3.16), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (|\nabla u(s)|_{t-1+s}^2 + 2\alpha_1 \int_{\mathcal{O}_{t-1+s}} |u(s)|^p dx) ds \\ & \leq \int_{t-1}^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\mathcal{O}_s)}^2 ds + 2\beta|\Omega_t| + |u_0|_{t-1}^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agora, considere a função $U(t-1+\cdot, t-1)u_0 : s \in [0, 1] \rightarrow U(t-1+s, t-1)u_0 \in L^2(\mathcal{O}_{t-1+s})$, e denotemos por

$$A_{[t-1, t]} := \{U(t-1+\cdot, t-1)u_0 : u_0 \in B_{t-1}\}.$$

Observe que, da desigualdade (3.17), obtemos que

$$A_{[t-1, t]} \text{ limitado em } L^2(0, 1; H_0^1(\mathcal{O}_{t-1+s})) \cap L^p(0, 1; L^p(\mathcal{O}_{t-1+s})). \quad (3.18)$$

Consequentemente, combinando isto com a equação

$$u' = \Delta u - g(u) + f(t),$$

como $\Delta u - g(u) \in L^2(0, 1; H^{-1}(\mathcal{O}_{t-1+s}))$ e $f(t) \in L^q(0, 1; L^q(\mathcal{O}_{t-1+s}))$ então o conjunto $\{u' : u \in A[t-1, t]\}$ é limitado em $L^2(0, 1; H^{-1}(\mathcal{O}_{t-1+s})) + L^q(0, 1; L^q(\mathcal{O}_{t-1+s}))$, então combinando isto com (3.18), do Lema 1.65, sabemos que

$$A[t-1, t] \text{ relativamente compacto em } L^2(0, 1; L^2(\mathcal{O}_{t-1+s})). \quad (3.19)$$

Passo 2. Sejam $u_{0i} \in L^2(\mathcal{O}_{t-1})$ e $u_i(s) = U(t-1+s, t-1)u_{0i}$, $i = 1, 2$. Definamos $w(s) = u_1(s) - u_2(s)$.

Do Lema (2.13) temos

$$|w(1)|_t^2 \leq e^{2l} |w(s)|_{t-1+s}^2, \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (3.20)$$

Paso 3. De (3.19), para cada $\varepsilon > 0$, existem, $u_i \in A[t-1, t]$, $i = 1, \dots, m_\varepsilon$, tais que para qualquer $u \in A[t-1, t]$, existe algum u_j , $j \in \{1, \dots, m_\varepsilon\}$, satisfazendo

$$\int_0^1 |u(s) - u_i(s)|_{t-1+s}^2 ds < e^{-2l} \varepsilon,$$

consequentemente, do Teorema de valor médio, existe $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$|u(\theta) - u_i(\theta)|_{t-1+\theta}^2 ds < e^{-2l} \varepsilon,$$

e assim, de (3.20), temos

$$|u(1) - u_i(1)|_t^2 ds < \varepsilon.$$

Logo, pela arbitrariedade de ε sabemos que $U(t, t-1)B_{t-1}$ é relativamente compacto em $L^2(\mathcal{O}_t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

□

Corolário 3.3. O processo $U(\cdot, \cdot)$ é $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -assintoticamente compacto pullback.

Demonstração. Sejam $\widehat{D} \in \mathfrak{D}_{\lambda_1}$ e $t \in \mathbb{R}$. Consideremos uma sequência $\{s_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$ e $s_n \leq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$, além disso consideremos a sequência $\{x_n\}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D(s_n)$. Do Lema 3.2 temos que a família $\{U(t, t-1)B_{t-1} : t \in \mathbb{R}\}$ é $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -absorvente pullback, logo existe $\tau_0(t, \widehat{D}) \leq t$ tal que

$$U(t, \tau)D(\tau) \subset U(t, t-1)B_{t-1}, \quad \forall \tau \leq \tau_0(t, \widehat{D}).$$

Agora, já que $s_n \rightarrow -\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, $s_n \leq \tau_0(t, \widehat{D})$, o implica em

$$U(t, s_n)x_n \in U(t, t-1)B_{t-1}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Do Lema 3.2, $U(t, t-1)B_{t-1}$ é relativamente compacto em $L^2(\mathcal{O}_t)$, logo a sequência $\{U(t, s_n)x_n\}$ possui uma subsequência convergente em $L^2(\mathcal{O}_t)$. □

Teorema 3.4. *Sob as hipóteses do Teorema 2.10, a definição do conjunto Ω_t dada em (3.1) e f satisfazendo (3.10). Então, a família $\hat{A} = \{A(t); t \in \mathbb{R}\}$, definida por*

$$A(t) = \Lambda(\hat{D}_0, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\hat{D}_0$ é dado por (3.11), é a única $\mathfrak{D}$ -atrator pullback para o processo $U(\cdot, \cdot)$. Além disso,

$$A(t) = \overline{\bigcup_{\hat{D} \in \mathfrak{D}} \Lambda(\hat{D}, t)}^{L^2(\mathcal{O}_t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\hat{A}$ é minimal no sentido que, se $\hat{C} = \{C(t); t \in \mathbb{R}\}$ é uma família não vazia tal que $C(t)$ é um subconjunto fechado de $L^2(\mathcal{O}_t)$, e

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}_t(U(t, \tau)D_0(\tau), C(t)) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, então $A(t) \subset C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.3 sabemos que o processo $U(\cdot, \cdot)$ é $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -assintoticamente compacto pullback e, pelo Lema 3.1, a família $\hat{D}_0$ é $\mathfrak{D}_{\lambda_1}$ -absorvente pullback. Então, pelo Teorema 1.79, obtemos que $\hat{A} = \{A(t); t \in \mathbb{R}\}$, definida por

$$A(t) = \Lambda(\hat{D}_0, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

é $\mathfrak{D}$ -atrator pullback para o processo $U(\cdot, \cdot)$.

Além disso, ela satisfaz

$$A(t) = \overline{\bigcup_{\hat{D} \in \mathfrak{D}} \Lambda(\hat{D}, t)}^{L^2(\mathcal{O}_t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e $\hat{A}$ é minimal. □

Conclusão

Neste trabalho fizemos um revisão sobre a teoria básica de equações de evolução não autônomas, bem como tópicos atuais sobre existência e comportamento assintótico de soluções. Aplicamos os resultados estudados a um problema de propagação de calor em domínios que podem deformar-se ao longo do tempo. Como condições de contorno, escolhemos desenvolver o caso Dirichlet devido à maior facilidade na escolha dos espaços funcionais onde se procurou a solução, mas a aplicação estudada é relevante e é interessante estudar este mesmo problema sujeito a outras condições, por exemplo, condição de fronteira de Neumann ou Robin.

Referências Bibliográficas

- [1] BRÉZIS, H. Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones. Madrid: Alianza Universidad Textos, 1984.
- [2] CARABALLO, T.; KLOEDEN, P. E.; REAL, J. Unique strong solutions and V-attractors of a tree dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations. *Adv. Nonlinear Stud.*, v. 6, p. 411–436, 2006.
- [3] CARABALLO, T.; LUKASZEWICZ, G.; REAL, J. Pullback attractors for non-autonomous 2D-Navier-Stokes equation in some unbounded domains. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, v. 342, n. 4, p. 263–268, 2006.
- [4] CARABALLO, T.; LUKASZEWICZ, G.; REAL, J. Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems. *Nonlinear Anal.*, v. 64, n. 3, p. 484–498, 2006.
- [5] CARVALHO, A.N.; LANGA, J.A.; ROBINSON, J.C. Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems. New York: Springer-Verlag, 2012.
- [6] CHEPYZHOV, V.V.; VISHIK, M. I. Attractors for equations of mathematical physics. American Mathematical Society, 2002. 363 p. (Colloquium publications, v. 49)
- [7] EVANS L. C. Partial Differential Equation. American Mathematical Society, 1998. 662 p. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19)
- [8] JARA PÉREZ, J. C. Caracterización de los atractores en sistemas dinámicos no autónomos. 2013. 131 f. Tese (Doutorado em Matemática), Dpto. Ecuaciones diferenciales y Análisis numérico Facultad de Matematica, Universidad de Sevilla, Sevilla. 2013.
- [9] KLOEDEN, P. E.; MARIN-RUBIO, P.; REAL, J. Pullback attractors for a semilinear heat equation in a non-cylindrical domain. *Journal Differential Equation*, v. 244, n. 8, p. 2062–2090, 2008.
- [10] KLOEDEN, P. E.; REAL, J.; SUN, C. Pullback attractors for a semilinear heat equation on time-varying domains. *Journal Differential Equations*, v. 246, n. 12, p. 4702–4730, 2009.

-
- [11] LIMACO, J.; MEDEIROS, L. A.; ZUAZUA, E. Existence, uniqueness and controllability for parabolic equation in non-cylindrical domains. *Matemática Contemporânea*, v. 23, p. 49-70, 2002
 - [12] MITROVIĆ D.; ŽUBRINIĆ D. Fundamentals of Applied Functional Analysis: distributions - Sobolev spaces - nonlinear elliptic equations. Harlow: Longman, 1998. (Pitmn monographs and surveys in pure in applied mathematics, v. 91).
 - [13] PEREIRA, J. V.; SILVA, R. P. Reaction-diffusion equations in a noncylindrical thin domain. *Boundary Value Problems*, 2013. 9 p.
 - [14] RINCON, M. A.; SCARDUA, A. The Stefan problem with moving boundary. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, v. 26, p. 91–106, 2008.
 - [15] ROBINSON, J. C. Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractor. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
 - [16] TANABE, H. Equations of evolution. *Pitman Publishing Limited*, v. 3, n. 2, p. 1113–1119, 1979.
 - [17] ZEIDLER, E. Linear monotone operators. *Nonlinear functional analysis and its applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1990. p. 1–467.