

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA / UNESP  
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS DE BOTUCATU / IBB  
DEPARTAMENTO DE BIOESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA**

**LUIZ CARLOS SANTOS JÚNIOR**

**ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA APLICADA A  
PREMISSAS ATUARIAIS: O CASO DA  
PREVIDÊNCIA PÚBLICA MUNICIPAL DE  
CABEDELO/PB**

**BOTUCATU, SP  
2018**

LUIZ CARLOS SANTOS JÚNIOR

**ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA APLICADA A  
PREMISSAS ATUARIAIS: O CASO DA  
PREVIDÊNCIA PÚBLICA MUNICIPAL DE  
CABEDELO/PB**

Tese apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, PPG em Biometria, Curso de Doutorado.

Orientadora: Miriam Harumi Tsunemi, Dra.  
Coorientador: Cícero Rafael Barros Dias, Dr.

**BOTUCATU, SP  
2018**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO TÉC. AQUIS. TRATAMENTO DA INFORM.  
DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - CÂMPUS DE BOTUCATU - UNESP  
BIBLIOTECÁRIA RESPONSÁVEL: ROSANGELA APARECIDA LOBO-CRB 8/7500

Santos Júnior, Luiz Carlos.

Análise de sobrevivência aplicada a premissas atuariais  
: o caso da previdência pública municipal de Cabedelo/PB /  
Luiz Carlos Santos Júnior. - Botucatu, 2018

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista  
"Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências de  
Botucatu

Orientador: Miriam Harumi Tsunemi

Coorientador: Cícero Rafael Barros Dias

Capes: 10203001

1. Previdência social. 2. Paraíba. 3. Análise de  
sobrevivência (Biometria). 4. Atuaria.

Palavras-chave: Cálculo atuarial; Modelos de  
sobrevivência; Premissas atuariais; RPPS paraibano.

LUIZ CARLOS SANTOS JÚNIOR

**ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA APLICADA A  
PREMISSAS ATUARIAIS: O CASO DA PREVIDÊNCIA  
PÚBLICA MUNICIPAL DE CABEDELO/PB**

Tese apresentada à Universidade Estadual  
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, PPG em  
Biometria, Curso de Doutorado.  
Botucatu/SP, 06 de novembro de 2018

Aprovado em:     /     /

**Banca Examinadora:**

---

Profa. Dra. Miriam Harumi Tsunemi  
Universidade Estadual Paulista  
Orientadora

---

Profa. Dra. Cristiane Silva Corrêa  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Avaliadora

---

Prof. Dr. João Vinícius de França Carvalho  
Universidade de São Paulo  
Avaliador

---

Profa. Dra. Liciania Vaz de Arruda Silveira  
Universidade Estadual Paulista  
Avaliadora

---

Prof. Dr. Thiago Santos Mota  
Faculdade de Tecnologia de Botucatu  
Avaliador

Dedico este trabalho a Deus, a família e aos amigos. Além disso, ao povo brasileiro, pelo custeio do ensino e da pesquisa nas Universidades Públicas deste país.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus.

Agradeço a família e aos amigos pelo carinho.

Agradeço a todos - IPSEMC, atuários, professores e colegas - que viabilizaram a realização desta pesquisa.

Agradeço a Universidade Federal da Paraíba pelo acolhimento profissional e pela oportunidade de realizar um sonho de infância: ser professor.

Agradeço a Universidade Estadual Paulista pela confiança, pelo aprendizado e pela oportunidade de cursar o doutorado em Biometria.

Agradeço a todos os professores que fizeram/fazem parte desse constante caminho de desenvolvimento.

## RESUMO

Os critérios de elegibilidade e a escolha das premissas atuariais são essenciais para a estimação dos custos de um plano previdenciário e das contribuições de seus participantes. Em relação aos planos públicos previdenciários brasileiros – majoritariamente deficitários –, pode-se afirmar que a análise atuarial é prejudicada pela má qualidade dos registros sobre os servidores, seus cônjuges e dependentes. Esse quadro tem justificado a adoção das hipóteses mínimas estabelecidas pela legislação, nem sempre validadas pelos testes de aderência. Esse contexto evidencia a necessidade de ampliação de estudos técnicos sobre as premissas que impactam no cálculo atuarial. Em especial, destaca-se a idade e o tempo de contribuição para aposentadoria, dada sua centralidade na propositura de reformas previdenciárias. Assim, objetiva-se analisar, mediante estudo de caso, a aplicabilidade de modelos de sobrevivência pouco explorados para estimação de variáveis relevantes na definição dessas premissas, o “tempo de postergação de aposentadoria” e o “tempo de permanência no serviço público”, observando ainda – de forma complementar – seus efeitos sobre os cálculos atuariais. Para tanto, foram sistematizadas as informações de 2630 servidores e ex-servidores vinculados, entre 1960 e 2016, ao Regime Próprio de Previdência Social (RPPS) do município de Cabedelo/PB (IPSEMC). Utilizaram-se modelos de sobrevivência não paramétricos, paramétricos e semiparamétricos, com abordagens tradicionais e de riscos competitivos sob a perspectiva de múltiplos estados. De modo geral, os modelos bem se ajustaram aos dados, com destaque para o modelo de Cox que, independentemente da abordagem, foi capaz de captar os efeitos das covariáveis sobre ambas as variáveis-respostas e para as causas consideradas. Esses resultados demonstram que há uma gama de possibilidades metodológicas para melhor estimação de premissas atuariais – em especial as decrementais –, desde que aplicadas a conjuntos de dados adequadamente sistematizados. Espera-se que a configuração proposta contribua para o aprimoramento de estudos acerca dos critérios, premissas e cálculo atuarial, bem como o melhor equacionamento de receitas e despesas previdenciárias no país.

**Palavras-chave:** RPPS Paraibano. Modelos de Sobrevivência. Premissas Atuariais. Cálculo Actuarial.

## ABSTRACT

Eligibility criteria and actuarial premise selection are essential for estimating costs of an insurance plan and its participant's contributions. Regarding Brazilian public social security plans – running for the most part in budget deficit –, it can be said that actuarial analysis is made difficult due to the bad quality of records on the public servants, their spouses and dependents. This situation has justified the adoption of minimal hypotheses as established by law, which are not always validated by adhesion tests. This context exposes the need for increased technical studies on the premises that influence actuarial calculation. Age and contribution time for retirement are especially relevant, given their central position in proposed changes to social security. We thus aim to analyze, based on case studies, the applicability of little-explored survival models for estimating variables that are relevant in defining these premises, “retirement postponement time” and “public service permanence time”, while also observing their effect on actuarial calculation. To that end, we have indexed information on 2630 current and former public servants working under the Regime Próprio de Previdência Social (RPPS) from the municipality of Cabedelo (IPSEMC – PB/Brazil) between 1960 and 2016. Non-parametric, parametric and semi-parametric survival models were employed, with traditional and competitive risk approaches under the multiple state perspective. The models were generally well adjusted to the data, especially the Cox model which, regardless of the approach used, was able to capture the effects of co-variables under both response variables and the causes taken into consideration. These results present a range of methodological possibilities for improving actuarial premises – especially decremental premises – when applied to adequately organized data sets. We intend our proposed configuration to contribute to the improvement of studies on criteria, premises and actuarial calculation, as well as better balancing of social security income and expense in Brazil.

**Keywords:** RPPS from Paraíba. Survival Models. Actuarial Assumptions. Actuarial Calculation.

## LISTA DE SIGLAS

**AIC** Critério de Informação Akaike.

**ANFIP** Associação Nacional dos Auditores Fiscais da Receita Federal do Brasil.

**ARA** Avaliação e Reavaliação Atuarial.

**ASB** *Actuarial Standards Boards*.

**BD** Benefício Definido

**CADPREV** Sistema de Informações dos Regimes Públicos de Previdência Social.

**CAP** Caixas de Aposentadorias e Pensões.

**CF** Constituição Federal.

**CN** Custo Normal.

**CRP** Certificado de Regularidade Previdenciária.

**DAIR** Demonstrativos das Aplicações e Investimentos dos Recursos.

**Dataprev** Empresa de Tecnologia e Informações da Previdência Social.

**EC** Emenda Constitucional.

**FA** Fator de Ajuste.

**FHC** Fernando Henrique Cardoso.

**FI** Fatores de *Improvement*.

**FIA** Funções de Incidência Acumulada.

**FREC** Funções de Riscos Específicos por Causa.

**IAP** Institutos de Aposentadorias e Pensões.

**IBGE** Instituto Brasileiro de Geografia e Estatísticas.

**IPSEMC** Instituto de Previdência dos Servidores Municipais de Cabedelo/PB.

**KS** Kolmogorov-Smirnov.

**LC** Lee-Carter.

**MF** Ministério da Fazenda.

**MRC** Modelos de Riscos Competitivos.

**MRPEC** Modelo de Risco Proporcional Específico por Causa.

**MRPSR** Modelo de Risco Proporcional Subdistribuição de Riscos.

**NTA** Nota Técnica Atuarial.

**PIB** Produto Interno Bruto.

**PS** Previdência Social.

**PUC** Crédito Unitário Projetado.

**RGPS** Regime Geral de Previdência Social.

**RM** Reserva Matemática.

**RMBaC** Reservas Matemáticas de Benefícios a Conceder.

**RMBC** Reservas Matemáticas de Benefícios Concedidos.

**RPC** Regime de Previdência Complementar.

**RPPS** Regime Próprio de Previdência Social.

**SIAPE** Sistema Integrado de Administração de Recursos Humanos.

**SPrev** Secretaria da Previdência.

**TC** Tempo de Contribuição.

**TRV** Teste Razão de Verossimilhança.

**VABF** Valor Atual dos Benefícios Futuros.

**VASF** Valor Atual dos Salários Futuros.

**VACF** Valor Atual das Contribuições Futuras.

# Lista de Figuras

2.1	Investimentos dos RPPSs por modalidade de ativo, Brasil, 2015. . . . .	14
3.1	Modelo multiestado de sobrevivência sem riscos competitivos. . . . .	43
3.2	Modelo multiestado de risco competitivo com riscos específicos por causa. . . . .	50
3.3	Modelo multiestado de risco competitivo para abordagem não paramétrica. . . . .	55
4.1	Logaritmo da probabilidade de morte ( $\log({}_m q_x)$ ) por idade da tábua de mortalidade IBGE (ambos os sexos), Brasil, 1998-2016. . . . .	69
4.2	Regressão Lee-Carter Período-Idade para a tábua IBGE (ambos os sexos) Brasil, 1998-2016. . . . .	70
4.3	Logaritmo da probabilidade de morte prevista pelo modelo de Lee-Carter estendido para a Tábua IBGE (ambos os sexos), Brasil, 2017-2026. . . . .	71
4.4	Projeções, pelo modelo de Lee-Carter estendido, para o tempo de vida média residual dos brasileiros, 2017-2026. . . . .	72
4.5	Histograma e boxplot do tempo de postergação da aposentadoria, IPSEMC, 2016. . . . .	74
4.6	Boxplot do tempo de postergação de aposentadoria por sexo e carreira, IPSEMC, 2016. . . . .	75
4.7	Sobrevivência estimada por Kaplan-Meier, por níveis de covariáveis, para o tempo de postergação de aposentadoria, IPSEMC, 2016. . . . .	77
4.8	Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo de postergação de aposentadoria, IPSEMC, 2016. . . . .	80
4.9	Sobrevivências não paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016. . . . .	83

4.10	Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016. . . . .	85
4.11	Pirâmide etária da população analisada, IPSEMC, 2016. . . . .	86
4.12	Histograma e boxplot do tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2017. . . . .	88
4.13	Boxplot do tempo de permanência no serviço por categoria, carreira, regra de saída e sexo, IPSEMC, 2016. . . . .	89
4.14	Sobrevivência estimada por Kaplan-Meier, por níveis de covariáveis, para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016. . . .	90
4.15	Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016. . . . .	93
4.16	Riscos acumulados por causa estimados pelo estimador de Nelson-Aalen para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016. . . .	95
4.17	Sobrevivência estimada pelo estimados de Kaplan-Meier, com intervalo de confiança, para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016. . . . .	96
4.18	FIAs estimadas, por causa, para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016. . . . .	97
4.19	Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até morte, IPSEMC, 2016. . . . .	99
4.20	Sobrevivências não paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016.	101
4.21	Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016. . . .	103
4.22	Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por compulsória, IPSEMC, 2016.	105
4.23	Sobrevivência não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por invalidez, IPSEMC, 2016. . .	107
B.1	Sobrevivência e FIAs estimadas, IPSEMC, 2016. . . . .	137

C.1 FIA estimada, por causa, para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016. . . . .	139
--	-----

# Lista de Tabelas

2.1	Número de regimes previdenciários por unidade de federação e região, Brasil, 2017. . . . .	11
2.2	Número de segurados, por tipo, em cada categoria de RPPS ao qual estão vinculados, Brasil, 2017. . . . .	12
2.3	CRP por RPPS, Brasil, 2015. . . . .	13
4.1	Projeções, pelo modelo de Lee-Carter estendido, para o tempo de vida média residual dos brasileiros, 2017-2026. . . . .	72
4.2	Dados gerais acerca das aposentadorias programadas, IPSEMC, 2016. .	73
4.3	Idade presumida de aposentadoria conforme variação da iemt estipulada, IPSEMC, 2016. . . . .	76
4.4	Resultados dos testes logrank utilizados para as comparações dos grupos considerados no tempo postergado de aposentadoria, IPSEMC, 2016. .	78
4.5	Resultados do Modelo Gompertz ajustado para o tempo de postergação de aposentadoria, IPSEMC, 2016. . . . .	78
4.6	Resultados do Modelo de Cox ajustado para o tempo de postergação da aposentadoria, IPSEMC, 2016. . . . .	79
4.7	Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo postergado de aposentadoria, IPSEMC, 2016. .	79
4.8	Probabilidade estimada de postergação da aposentadoria por tempo adicional, IPSEMC, 2016. . . . .	80
4.9	Resultados do teste KS para as idades estimadas de concessão de aposentadoria, IPSEMC, 2016. . . . .	81

4.10	Critérios objetivos de seleção, por modelo paramétrico ajustado, para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição do servidor, IPSEMC, 2016. . . . .	82
4.11	Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016. . . . .	82
4.12	Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016. . . . .	82
4.13	Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria por idade do servidor, IPSEMC, 2016. . . .	83
4.14	Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016. . . . .	84
4.15	Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016. .	84
4.16	Dados gerais acerca dos servidores ativos, IPSEMC, 2016. . . . .	86
4.17	Dados gerais acerca de todas as aposentadorias, IPSEMC, 2016. . . . .	87
4.18	Dados gerais acerca das pensões, IPSEMC, 2016. . . . .	87
4.19	Resultados dos testes logrank utilizados para as comparações dos grupos, dois a dois, considerados no tempo de permanência no serviço, IPSEMC, 2016. . . . .	91
4.20	Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016. . . . .	91
4.21	Resultados dos Modelos Gompertz e de Cox ajustados para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016. . . . .	92
4.22	Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo de permanência no serviço público. . . . .	92
4.23	FIAs estimadas, por causa e tempo (em anos), para o tempo de permanência no serviço público. . . . .	96
4.24	Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a morte do servidor, IPSEMC, 2016. . . . .	98

4.25	Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a morte do servidor, IPSEMC, 2016. . . . .	98
4.26	Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a morte, IPSEMC, 2016. . . . .	98
4.27	Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição do servidor, IPSEMC, 2016. . . . .	99
4.28	Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016. . . . .	100
4.29	Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016 . . . . .	100
4.30	Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria por idade do servidor, IPSEMC, 2016. . . .	101
4.31	Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016. . . . .	102
4.32	Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016. .	102
4.33	Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria compulsória do servidor, IPSEMC, 2016. . .	103
4.34	Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria compulsória, IPSEMC, 2016. . . . .	104
4.35	Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria compulsória, IPSEMC, 2016.	104
4.36	Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria por invalidez do servidor, IPSEMC, 2016. .	105
4.37	Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por invalidez, IPSEMC, 2016. . . . .	106
4.38	Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por invalidez, IPSEMC, 2016.	106

4.39	Composição do Custo Normal por cenário, IPSEMC, 2016. . . . .	115
4.40	Composição da Reserva Matemática de Benefícios a Conceder por cenário, IPSEMC, 2016. . . . .	116
4.41	Composição da Reserva Matemática Total por cenário, IPSEMC, 2016.	117
A.1	Projeção da mortalidade brasileira para 2017 e 2018 pelo método AA. .	132
A.2	Projeção da mortalidade brasileira para 2017 e 2018 pelo método LC. .	133
B.1	Matriz de transição modelada para os servidores, denominada “ <i>matriz</i> ”, IPSEMC, 2016. . . . .	134
B.2	<i>Dataframe</i> criado, denominado “quadro”. . . . .	135
B.3	Argumentos do risco acumulado “0 1” (saída do serviço decorrente de morte). . . . .	136
B.4	Matriz de transição modelada para os servidores, denominada “ <i>matriz.mm</i> ”, IPSEMC, 2016. . . . .	136
B.5	FIAs estimadas para $t = 50$ anos, IPSEMC, 2016. . . . .	137
C.1	Matriz gerada pela construção dos pesos $w_l(t_j)$ . . . . .	138
C.2	Indivíduo 2500 na matriz gerada pela construção dos pesos $w_l(t_j)$ . . . .	139
D.1	Idade de concessão de aposentadoria presumida <i>versus</i> estimadas. . . .	141
E.1	Sobrevivências estimadas pelos Modelos de Kaplan-Meier, Gompertz e Cox ajustados para o tempo de permanência do servidor no serviço público - Parte 1. . . . .	142
E.2	Sobrevivências estimadas pelos Modelos de Kaplan-Meier, Gompertz e Cox ajustados para o tempo de permanência do servidor no serviço público - Parte 2. . . . .	143

# Lista de Quadros

2.1	Legislação vigente relacionada a RPPS, Brasil, 2017. . . . .	16
3.1	Funções, definições e expressões que compõem uma tábua de vida. . . .	33
4.1	Dados sobre os servidores, IPSEMC, 2016. . . . .	67
4.2	Resumo dos modelos ajustados e covariáveis significativas por causa analisada para o tempo de postergação. . . . .	108
4.3	Resumo dos modelos ajustados e covariáveis significativas por causa analisada para o tempo de permanência. . . . .	108
4.4	Descrição dos cenários, conforme as possíveis combinações de premissas.	115

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Caracterização do RPPS</b>	<b>10</b>
2.1	Regime Próprio de Previdência Social . . . . .	10
2.2	Premissas Decrementais . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Aspectos Metodológicos</b>	<b>29</b>
3.1	Metodologias para a Mortalidade . . . . .	29
3.1.1	Tábuas de Decremento Simples . . . . .	30
3.1.2	Extrapolação de Tábuas . . . . .	33
3.1.3	Projeção da Mortalidade . . . . .	35
3.2	Metodologias para a Idade de Aposentadoria . . . . .	38
3.2.1	Idade Presumida de Aposentadoria . . . . .	39
3.2.2	Idade de Concessão de Aposentadoria . . . . .	40
3.3	Metodologias para Postergação da Aposentadoria e Permanência no Ser- viço . . . . .	41
3.3.1	Análise Baseada em Risco . . . . .	42
3.3.2	Ausência de Riscos Competitivos . . . . .	47
3.3.3	Presença de Riscos Competitivos . . . . .	49
3.3.4	Avaliação e Seleção de Modelos . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>66</b>
4.1	Apresentação dos Dados . . . . .	66
4.2	Análise da Mortalidade . . . . .	69
4.3	Análise do Tempo de Postergação da Aposentadoria . . . . .	73

4.3.1	Análise Exploratória . . . . .	73
4.3.2	Análise de Sobrevivência na Ausência de Riscos Competitivos .	75
4.3.3	Análise de Sobrevivência na Presença de Riscos Competitivos .	81
4.4	Análise do Tempo de Permanência no Serviço Público . . . . .	85
4.4.1	Análise Exploratória . . . . .	87
4.4.2	Análise de Sobrevivência na Ausência de Riscos Competitivos .	89
4.4.3	Análise de Sobrevivência na Presença de Riscos Competitivos .	94
4.5	Cálculos Atuariais . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>118</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>120</b>
<b>A</b>	<b>Complemento da Mortalidade</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Complemento da Análise Não Paramétrica de Risco Competitivo</b>	<b>134</b>
<b>C</b>	<b>Complemento da Análise Semiparamétrica de Risco Competitivo</b>	<b>138</b>
<b>D</b>	<b>Idades Estimadas de Aposentadoria</b>	<b>140</b>
<b>E</b>	<b>Probabilidades de Permanecer no Serviço Público</b>	<b>142</b>
<b>F</b>	<b>Script da Análise em Linguagem R</b>	<b>144</b>

# Siglas

ACI Análise de Componentes Independentes

ACP Análise de Componentes Principais

ADL Análise de Discriminante Linear

AE Análise Espectral

D Decisão para Todos os Eletrodos

$D_l$  Decisão para o Eletrodo  $l$

DMP Decisão Média Ponderada para Todos os Eletrodos

$DMP_l$  Decisão Média Ponderada para o Eletrodo  $l$

EEG Eletroencefalografia

EWR Energia *Wavelet* Relativa

IVS Indicadores dos Vetores de Suporte

KKT Karush-Kuhn-Tucker

LS-SVM *Least Square Support Vector Machine*

ME *Mixed of Experts*

MLPNN *Multi-Layer Perceptron Neural Network*

MMC Mínimo Múltiplo Comum

MMQ Método de Mínimos Quadrados

MMS Médias Móveis Simples

MMS<sub>s</sub> Médias Móveis Simples com espaçamento  $s$

P Período da Função

RN Redes Neurais

SQ Soma de Quadrados

SQ<sub>Erros</sub> Soma de Quadrados dos Erros

SQ<sub>Fator</sub> Soma de Quadrados do Fator

SQ<sub>Total</sub> Soma de Quadrados Total

SVM *Supporte Vector Machine*

TDW Transformada *Wavelet* Discreta

WFF-SVM *Weighted Fourier Frequencies and SVM*

# Capítulo 1

## Introdução

A Previdência Social (PS) é um seguro público, coletivo e compulsório e integra, com a Assistência Social e a Saúde, o Sistema de Seguridade Social brasileiro (BRASIL, 1988).

A PS é composta pelos regimes previdenciários obrigatórios, isto é, pelo Regime Próprio de Previdência Social (RPPS) – destinado exclusivamente aos servidores públicos (estatutários) – e pelo Regime Geral de Previdência Social (RGPS) – destinado aos demais trabalhadores. Em conjunto com o Regime de Previdência Complementar (RPC) – que complementa a renda de aposentadoria dos regimes oficiais (CORRÊA, 2018) – a PS constitui o Sistema Previdenciário Brasileiro.

Consoante o Anuário Estatístico de Previdência Social (AEPS) de 2017, sintetizado pela Empresa de Tecnologia e Informações da Previdência Social (Dataprev) e citado como Dataprev (2018), a população brasileira em 2016 era superior a 206 milhões de pessoas, sendo mais de 102 milhões integrantes da população economicamente ativa. Neste mesmo ano, a proteção previdenciária da PS (para segurados especiais, beneficiários não contribuintes, funcionários públicos estatutários, militares e demais contribuintes do RGPS) abrangeu quase 60 milhões de pessoas (ocupadas entre 16 e 59 anos de idade) – sendo o número de beneficiários ativos superior a 31 milhões. A dimensão da PS pode ser ainda ilustrada pelas seguintes informações, relativas a dezembro de 2017, publicadas pela Dataprev (2018):

- Concedeu aproximadamente 5 milhões de benefícios, com valor total dos benefí-

cios concedidos igual a R\$ 6,8 bilhões;

- Contabilizou 65,1 milhões de contribuintes (pessoas físicas) e o valor da remuneração foi de aproximadamente R\$ 1,46 trilhões;
- Sua arrecadação (que compreende as atividades relacionadas ao recolhimento de receitas de contribuições sociais, patrimoniais e de outras importâncias devidas à Previdência Social) foi de R\$ 415,5 bilhões;
- O resultado primário (arrecadação líquida menos benefícios previdenciários) do RGPS em 2017 foi de R\$ -182,5 bilhões.

Em relação à previdência do servidor público (titulares de cargo efetivo), objeto do presente estudo, cada ente federativo pode ter um RPPS, de modo que: a União tem um RPPS, cada estado tem o seu respectivo RPPS e cada município pode ter um RPPS (BRASIL, 1988). De acordo com Dataprev (2018), em 2017, dos 5.595 entes federativos, 2.123 (37,9%) vinculam seus 8 milhões de segurados a RPPSs. A dimensão dos RPPSs pode ser ainda ilustrada pelas seguintes informações:

- Em abril de 2018, segundo os Dados Abertos contidos no *site* oficial da PS, citados como Ministério da Fazenda (2018), o valor total dos recursos aplicados pelos RPPSs era de aproximadamente R\$ 148,35 bilhões e o total de ativos, R\$ 261,93 bilhões;
- Em janeiro de 2017, segundo o Indicador de Situação Previdenciária, sintetizado pela Secretaria de Previdência e citado como SPrev (2018), os valores de contribuições e aportes, bem como o de benefícios, foram de R\$ 94,10 bilhões e R\$ 160,87 bilhões, respectivamente.
- Segundo Dataprev (2018), em 2017, o resultado financeiro agregado e o resultado atuarial agregado foram deficitários, aproximada e respectivamente, R\$ -91,9 bilhões e R\$ -7.413,9 bilhões;

O desequilíbrio financeiro-atuarial está presente em aproximadamente 90% dos RPPSs do Brasil, conforme Baeta-Filho (2011) e Santos-Junior, Azevedo e Andrade

---

(2018), ensejando pesquisas que aprimorem os cálculos e viabilizem o alcance do equilíbrio.

O plano de previdência dos servidores públicos, que funciona sob o regime de financiamento de capitalização, é do tipo Benefício Definido (BD) –, cujo valor do benefício é determinado segundo regras previamente estabelecidas (NOGUEIRA, 2012). Em tais planos, o papel do atuário – técnico especializado em matemática superior que atua (...) em seguro privado e social, calculando probabilidades de eventos, avaliando riscos e fixando prêmios, indenizações, benefícios e reservas matemáticas (BRASIL, 1970) – torna-se ainda mais relevante, dada a complexidade dos fatores e incertezas que envolvem a apuração do custo previdenciário (GUSHIKEN et al., 2002). A partir dessa ideia, o foco do presente trabalho restringe-se à dinâmica do compromisso assumido com os participantes deste plano, que vai desde o estabelecimento de seu valor, denominado custo previdenciário, ao seu contínuo monitoramento.

O custo previdenciário é mensurado pela Reserva Matemática (RM) e financiado pelo Custo Normal (CN). RM é o montante calculado atuarialmente, em determinada data, que expressa, em valor presente, o total dos recursos necessários ao pagamento dos compromissos do plano de benefícios ao longo do tempo (BRASIL, 2008). Cabe destacar que neste trabalho o termo Reserva Matemática é sinônimo de Provisão Matemática e Passivo Atuarial, conforme o uso de Winklevoss (1993). CN, por sua vez, é o total de recursos destinados ao sistema por todas as partes contribuintes, de acordo com Mascarenhas, Oliveira e Caetano (2004) e Iyer (2002).

Dadas as dificuldades para mensurar a RM – oriundas do caráter estocástico da ocorrência de determinados eventos –, é necessária a suposição sobre o comportamento futuro de variáveis que interferem no equilíbrio financeiro e atuarial do RPPS, ou seja, de Premissas Atuariais (MASCARENHAS; OLIVEIRA; CAETANO, 2004). Conforme a classificação proposta por Rodrigues (2008), elas podem ser econômicas, biométricas ou genéricas.

As Premissas Econômicas lidam com as relações macroeconômicas (internas e externas) ou a elas estão submetidas. A inexistência de certeza no processo de escolha dessas premissas tende a gerar a anualização dos modelos atuariais, e consequente-

---

mente tende a consolidar uma visão de curto prazo na tomada dos riscos atuariais e financeiros. São exemplos desse tipo de premissa: o indexador dos benefícios e o ganho real dos investimentos, dentre outros.

As Premissas Biométricas impactam o modelo do ponto de vista da extensão e saúde da vida humana em várias dimensões, procurando refletir o comportamento biométrico de determinado grupo. Entre elas estão a Mortalidade Geral e a Entrada em Invalidez, dentre outros.

As Premissas Genéricas são interventoras de ordem geral (como o nome sugere), de difícil precisão, pouco controláveis pelo modelo e requerem tratamento específico, de acordo com o plano de benefícios. Tais premissas são, em geral, foco das propostas de revisão da legislação previdenciária. Em especial, discutem-se parâmetros como a idade e o tempo de contribuição mínimos para a concessão de benefícios de aposentadoria.

Segundo Rodrigues (2008), a escolha e o uso de premissas distantes da realidade à qual os agentes (participantes, patrocinadora e gestora do plano) estão vinculados podem levar a custos incorretos e ocasionar déficit ou superávit técnico, além de super ou subexposição ao risco e problemas de solvência e liquidez: por um lado, o uso de premissas conservadoras pode conduzir a custos iniciais mais elevados – o que afetaria negativamente o consumo imediato do contribuinte –, embora com riscos menores; por outro, a adoção de premissas menos conservadoras podem conduzir a custos menos elevados e maiores riscos de solvência. Apesar disso, observa-se que alguma margem de segurança é necessária e preferível.

Deste modo, a escolha das premissas deve ser orientada pelo conservadorismo, consistências retrospectiva e prospectiva, prudência, precisão e flexibilidade, de modo a minimizar os riscos (as perdas que tragam volatilidade aos resultados necessários à solvência). Dentre os diversos tipos de riscos associados a planos BD, ilustram-se dois, de acordo com os objetivos deste estudo: o risco operacional e o biométrico, relativos a perdas provenientes dos riscos tecnológico, humano, de modelagem e de regulação e a possibilidade de que as premissas assumidas pelo atuário para eventos biométricos não venham a se realizar conforme previsto no modelo atuarial, respectivamente.

Diante desse contexto de desequilíbrio financeiro-atuarial, marcado por um conjunto

---

de riscos que impactam no cálculo atuarial (Custo Normal e Reserva Matemática), apresenta-se, a seguir, o objetivo desta pesquisa.

A partir de dados dos servidores (ativos, inativos e falecidos) vinculados ao RPPS denominado Instituto de Previdência dos Servidores Municipais de Cabedelo/PB (IP-SEMC), objetiva-se:

- De modo geral, analisar a aplicabilidade de modelos de sobrevivência de riscos competitivos, sob a perspectiva de múltiplos estados, para estimação das variáveis “tempo de postergação de aposentadoria” e “tempo de permanência no serviço público”, tendo em vista seus impactos sobre a idade e o tempo de contribuição para aposentadoria, respectivamente.
- De modo específico, analisar, além da “mortalidade” – por meio de métodos de extrapolação e previsão –, o efeito das variações das premissas estimadas sobre as reservas matemáticas e o custo normal do RPPS analisado.

Essa pesquisa busca, dessa forma, contribuir para a ampliação do escopo dos estudos atuariais que podem – e precisam – fundamentar os debates sobre a previdência pública, explorando novos caminhos metodológicos pautados em dados fidedignos. Ressalva-se, contudo, que as tomadas de decisão nesse campo devem, também, levar em consideração um amplo conjunto de questões, de ordens políticas e socioeconômicas que fogem ao propósito deste trabalho.

Como dito, premissas atuariais são usadas pra calcular os custos e a reserva de um plano de previdência. Elucida-se que algumas delas são decrementais – são capazes de alterar o *status* biométrico do segurado – e aplicáveis aos membros do plano: por exemplo, os participantes podem perder o *status* de ativo em decorrência das contingências de morte, invalidez e rescisão/demissão/saída, enquanto os membros não ativos podem perder tal *status* motivados pela morte. Essas contingências são tratadas na matemática das aposentadorias por meio de taxas unidcrementais e multidecrementais, sendo que: as primeiras se referem à proporção de participantes que abandonam um *status* em decorrência de um evento aleatório particular, sob a suposição de que

---

não há outros decrementos aplicáveis; as últimas consideram que existem outros decrementos aplicáveis, ou seja, os riscos são conjuntos e excludentes (WINKLEVOSS, 1993).

Em relação à morte e à invalidez, todo plano de previdência, no momento de escolha de suas premissas, necessita adotar tábuas biométricas que reflitam a realidade mais próxima possível da massa de segurados, visto que influenciam as estimativas de seus custos, consoante Martins (2007) e Bowers et al. (1997). Elas compõem, em conjunto com as variáveis financeiras, os principais riscos relativos à modelagem da contribuição do participante de um plano de benefícios (BORGES, 2009).

A Portaria MPAS nº 403/2008 estabelece que as Avaliações e Reavaliações atuariais (ARA) dos RPPSs usem tábuas que não indiquem obrigações inferiores a: tábua atual do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para o benefício de Sobrevida de Ativos e Inválidos; tábua Álvaro Vindas para o benefício de Entrada em Invalidez. Como as tábuas devem refletir a mortalidade e a invalidez de longo prazo, além da atual, tais limites procuram evitar que os RPPSs trabalhem com premissas que possam comprometer a saúde financeira dos seus regimes, apesar de que tais limites são questionados pela comunidade atuarial por questão de defasagem e não atendimento ao seu objetivo. A premissa de Sobrevida de Ativos, por exemplo, vem aumentando consideravelmente e o uso de uma tábua defasada pode trazer sérios riscos para o RPPS, o que mostra a necessidade e a importância desses estudos.

No Brasil, quer no segmento público, quer no privado, ainda se utiliza de tábuas de referência estrangeiras, dada a carência de tábuas biométricas estabelecidas com base em nossa experiência. Nos últimos anos, no entanto, têm sido construídas tábuas biométricas baseadas em experiência de órgãos governamentais, como nos trabalhos apresentados por Beltrao e Pinheiro (2002), Beltrao e Sugahara (2002), Oliveira et al. (2012), Ribeiro (2006) e Silva (2008), dentre outros. Sucintamente, tábuas relativas à morte e à invalidez têm sido elaboradas a partir de leis de mortalidade e suavizações, isto é, de graduações não paramétricas e paramétricas.

Em relação à rescisão/demissão/saída, no caso do serviço público brasileiro – em decorrência da estabilidade –, tem-se que estão associadas à decisão de aposentar-se

---

por parte do servidor. Dado o alcance da elegibilidade, essa decisão é explicada por fatores internos e externos ao trabalho, que podem estimular sua antecipação ou seu retardo, em conformidade com Beehr et al. (2000) e Zappala et al. (2008). Logo, a efetiva idade de aposentadoria do servidor público (em especial, o municipal), além de incerta, é de difícil estimação, dada a carência de base de dados com boa qualidade disponível (CORRÊA, 2018).

Assim, a construção de estimativas com base em outros registros administrativos, como os de estados e municípios que possuam confiável massa de dados, é largamente sugerida pelos trabalhos nacionais e constitui desígnio desta pesquisa; recomenda-se que a utilização das premissas considere sempre as peculiaridades da população estudada para que se tenham cálculos mais fidedignos, objetivando a perenização do Equilíbrio Financeiro (garantia de equivalência entre as receitas auferidas e as obrigações do RPPS em cada exercício financeiro, conforme Brasil (2008)) e Atuarial (garantia de equivalência, a valor presente, entre o fluxo das receitas estimadas e das obrigações projetadas apuradas atuarialmente, em longo prazo, de acordo com Brasil (2008)) dos Sistemas Previdenciários Públicos.

Dito isto, fica clara a indicação de uma permanente busca por melhores estimativas de premissas atuariais para posterior mensuração da RM. O presente trabalho, de acordo com as lacunas existentes, analisa as contingências morte (por meio da mortalidade) e saída (por meio dos tempos de postergação de aposentadoria e de permanência no serviço público), além do efeito das premissas estimadas sobre o cálculo atuarial.

A morte é comumente estimada pelos modelos de Heligman e Pollard (1980) e de Lee e Carter (1992). Aqui, a partir de tábuas do IBGE, extrapola-se a mortalidade para além dos 80 anos de idade, consoante Castro (2018), e se predita a mortalidade (já extrapolada) por meio dos modelos AA (NUNES; CARVALHO, 2008) e de Lee-Carter estendido, conforme Butt, Haberman e Shang (2014). Por meio desta extensão, é possível adicionar efeitos de coorte durante o processo de estimação.

A rescisão/demissão/saída, quando relativa à decisão de aposentar-se, de modo geral, é analisada por meio de modelos de regressão, em que a variável qualitativa “aposenta ou permanece no trabalho” depende de variáveis internas e/ou externas ao

---

trabalho, como em Beehr (1986) e Taylor e Shore (1995). Alternativamente, Silveira e Gomes (2017) e Corrêa (2018) propuseram análises da idade de concessão de aposentadoria. Também com foco nesta variável, o presente trabalho analisa a saída do segurado por meio dos tempos de postergação da aposentadoria e de permanência no serviço público, por meio dos modelos tradicionais de sobrevivência – de acordo com Carvalho et al. (2011) e Colosimo e Giolo (2006) –, e dos modelos de riscos competitivos, sob a perspectiva de múltiplos estados – conforme Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012) e Klein et al. (2014).

Quanto ao tempo de postergação da aposentadoria – observado a partir da idade presumida de aposentadoria (considerando as regras de elegibilidade para cada servidor) até a idade que ocorre a concessão (evento de interesse) –, é possível estimar o risco de saída por parte do segurado que postergou a sua aposentadoria, tanto de modo global, quanto por diferentes causas (aposentadoria por idade e aposentadoria por idade e tempo de contribuição), e levando-se em consideração o efeito que algumas variáveis podem exercer sobre essa saída (carreira e sexo).

Quanto ao tempo de permanência no serviço público – observado a partir da data de admissão do servidor no serviço até a sua saída (evento de interesse) ou até o fim de acompanhamento do estudo (em dezembro de 2016) –, é possível estimar o risco de que o segurado abandone o *status* de “ativo”, assim que possível, globalmente e por diferentes causas (por aposentadorias voluntárias, compulsória, invalidez ou morte), levando-se em consideração o efeito que algumas variáveis podem exercer sobre essa saída (carreira, sexo e regra de saída).

Partindo da necessidade contínua de revisão das premissas utilizadas nos cálculos atuariais, utiliza-se de dados fidedignos disponibilizados pelo IPSEMC – multivencedor do Prêmio de Boas Práticas de Gestão de RPPS. A análise dessas premissas por meio de apenas um RPPS, apesar de apresentar limitações, representa contribuições relevantes ao estudo do tema nas seguintes perspectivas: a metodologia pode ser utilizada em outros RPPSs; os resultados podem ser utilizados em avaliações atuariais de municípios com características similares e destacam a heterogeneidade brasileira e a necessidade de estudos específicos para cada região, microrregião e municípios.

# Capítulo 2

## Caracterização do RPPS

Este capítulo situa o presente trabalho dentro da grande área de pesquisa em que se insere, o Sistema Previdenciário Brasileiro, por meio da apresentação de estudos, que servem como ponto de partida e ajudam no recorte do problema: a estimação de contingências/premissas utilizadas no cálculo atuarial da aposentadoria programada em RPPS. Aposentadoria programada é o conjunto de aposentadorias – formada pelas aposentadorias por idade, por idade e tempo de contribuição ou de serviço, além da aposentadoria compulsória – que permite programar o momento de início de recebimento dos benefícios previdenciários, pois é possível saber, de antemão, o tempo necessário até se atingir os requisitos à elegibilidade (CORRÊA, 2014).

### 2.1 Regime Próprio de Previdência Social

A PS, conforme o art. 6º da Constituição Federal (CF), é um direito social, ou seja, um “seguro do trabalhador”. Ela garante renda não inferior a um salário mínimo ao trabalhador (ou sua família) nas situações previstas no art. 201 da referida Carta. No Brasil, a PS é composta pelos sistemas público (RGPS e RPPS) e privado (RPC).

Segundo Brasil (2016), o RPPS é um sistema de previdência, estabelecido no âmbito de cada ente federativo, que assegura a todos os servidores titulares de cargo efetivo, os benefícios previstos no artigo 40 da CF; o RGPS vincula obrigatoriamente todos os trabalhadores do setor privado e servidores públicos não vinculados aos RPPSs; o RPC, de caráter facultativo, complementa a previdência obrigatória caso o trabalhador

receba proventos acima do teto (atualmente de R\$ 5.645,80).

Foco deste trabalho, os RPPSs são instituídos e organizados pelos respectivos entes federativos, conforme a Lei nº 9.717/98. Após sua instituição, os servidores titulares de cargos efetivos aderem ao RPPS instituído e são afastados do RGPS (BRASIL, 2016).

Essa subseção é composta por três pontos: panorama, cobertura e legislação (para cálculo atuarial) dos RPPSs. Nesse primeiro ponto, apresenta-se um panorama sobre os Regimes Próprios com base nas Estatísticas e Informações dos RPPSs, disponibilizadas no *site* da Secretaria de Previdência, ora citada Brasil (2018). O panorama aborda os regimes previdenciários a que estão vinculados os segurados, os tipos de segurados, a certificação de funcionamento dos RPPSs e os recursos investidos.

Tabela 2.1: Número de regimes previdenciários por unidade de federação e região, Brasil, 2017.

Região	UF	Regime		
		RGPS	RPPS	RPPS em extinção
Norte	AC	21	2	-
	AM	37	26	-
	AP	13	4	-
	PA	115	30	-
	RO	23	30	-
	RR	14	2	-
	TO	117	23	-
Nordeste	AL	30	72	1
	BA	380	36	2
	CE	119	65	1
	MA	173	45	-
	PB	153	71	-
	PE	36	149	-
	PI	156	67	2
	RN	130	37	1
	SE	71	4	1
Centro-Oeste	DF	-	1	-
	GO	75	171	1
	MS	29	51	-
	MT	37	105	-
Sudeste	ES	44	35	-
	MG	630	219	5
	RJ	13	79	1
	SP	422	221	3
Sul	PR	224	175	1
	RS	171	326	1
	SC	225	70	1
Total	-	3458	2116	21

Fonte: CADPREV (2017).

A Tabela 2.1 apresenta a quantidade de entes no Brasil por regime previdenciário, em abril/2017: havia no Brasil 2.116 RPPSs (federal, estaduais e municipais) em funcionamento, 21 em extinção<sup>1</sup> e 3.458 municípios que não possuem RPPS (cujos servidores vinculam-se ao RGPS). Fazendo-se a razão “número de RPPSs em funcionamento pelo total de entes (federal, estaduais e municipais)”, tem-se que apenas 37,81% dos entes públicos brasileiros possuem RPPS.

Segundo Brasil (2018), os RPPSs em julho de 2018 asseguravam a proteção previdenciária a aproximadamente 10 milhões de pessoas, entre servidores públicos titulares de cargos efetivos (ativos, aposentados) e seus familiares (pensionistas e dependentes). A Tabela 2.2, no entanto, apresenta quantidade inferior, pois os dependentes não foram considerados.

Tabela 2.2: Número de segurados, por tipo, em cada categoria de RPPS ao qual estão vinculados, Brasil, 2017.

	Ativos (At)	Aposentados (Ap)	Pensionistas (Pe)	Total	Razão At/(Ap +Pe)
União (Civis)	691.342	436.535	300.937	1.428.814	0,94
União (Mil.)	368.601	158.284	158.284	685.169	1,16
Estados	2.448.057	1.680.280	529.584	4.657.921	1,11
Municípios	2.337.281	480.326	135.322	2.952.929	3,80
Total	5.476.680	2.597.141	965.843	9.039.664	1,51

Fonte: Adaptado de Dataprev (2018).

O funcionamento do RPPS é examinado pela Subsecretaria dos Regimes Próprios de Previdência Social, vinculada à Secretaria de Previdência, que emite, caso o ente atenda aos critérios estabelecidos de boa gestão, o Certificado de Regularidade Previdenciária (CRP), instituído pelo Decreto nº 3.788, de 11 de abril de 2001. Trata-se de um documento que atesta que o ente federativo segue normas de boa gestão, de forma que assegure o pagamento dos benefícios previdenciários aos seus segurados. Ele é exigido para que o DF, Estados e Municípios tenham acesso a acordos, contratos, convênios, concessão de empréstimos e financiamento, além da realização de transferências voluntárias de recursos da União (BRASIL, 2018).

<sup>1</sup>A instituição ou extinção de um RPPS se dá por meio de lei local e atualmente não existe fundamento normativo para a exigência de requisitos prévios destinados à análise de sua viabilidade.

Conforme exposto na Tabela 2.3, em 21 de janeiro de 2016 aproximadamente metade dos RPPSs apresentavam riscos em seu funcionamento, vinculados ao não recebimento de CRP via atendimento de critérios.

Tabela 2.3: CRP por RPPS, Brasil, 2015.

Frequência	Com CRP Administrativo	Com CRP por Decisão Judicial	Sem CRP Vigente*	Total
Absoluta	1023	268	789	2080
Relativa	0,491826923	0,128846154	0,379326923	1

Fonte: CADPREV (2016).

Dados mais recentes disponibilizados por Brasil (2018) – para estados, capitais e DF, um total de 53 entes – apontam 35 com CRP válidos e 18 com CRP vencidos, avaliados em fevereiro de 2018.

Em relação aos investimentos realizados pelos RPPSs – com o objetivo de capitalizar as contribuições recebidas e obter montante suficiente para realização de pagamentos dos benefícios –, distribuem-se no Brasil os percentuais expostos na Figura 2.1, em relação a um total de R\$ 165.645.295.626,61, auferidos em setembro de 2015. Conforme o propósito de seu funcionamento, além de postura conservadora, a renda fixa representa o destino de maior parte dos investimentos (58,86%) de RPPS no Brasil, enquanto a modalidade “outros” (ativos em enquadramento + demais bens, direitos e ativos + disponibilidades financeiras), a menor (1,11%).

As aplicações dos RPPSs instituídos pela União, pelos Estados, pelo Distrito Federal e pelos Municípios obedecem ao disposto na Resolução CMN nº 3.922, de 25 de novembro de 2010 e representaram, em 2015, quase 10% do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil.

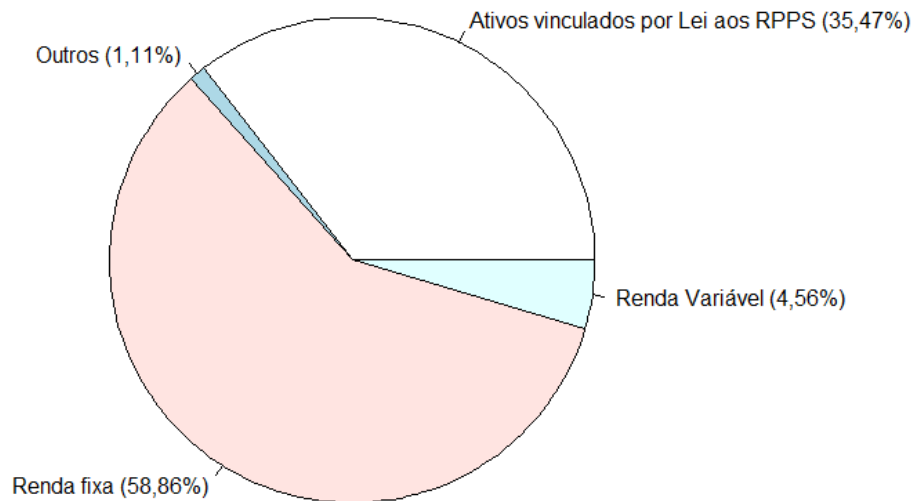


Figura 2.1: Investimentos dos RPPSs por modalidade de ativo, Brasil, 2015.

Fonte: DAIR (2015).

Segundo Nogueira (2016), dentre os desafios dos RPPSs se encontram: a judicialização do CRP – um risco para a supervisão; a “descapitalização dos fundos previdenciários”<sup>2</sup>; o equacionamento do déficit atuarial passado; as regras especiais de acesso a benefícios; o aumento da expectativa de sobrevivência da população brasileira.

Uma vez apresentado este panorama, trata-se do segundo ponto, referente aos aspectos gerais de cobertura (benefícios e contribuições) dos RPPSs. Com exceção dos casos especificados na CF, Emenda Constitucional (EC) nº 20/98, EC nº 41/2003 e EC nº 47/2005, o RPPS se limita a conceder benefício apenas aos dependentes constantes do rol definido pelo RGPS (cônjuge/companheiro, filhos, pais e irmãos) e não poderá conceder benefício distinto dos previstos pelo RGPS (BRASIL, 2016), quais sejam:

- a) Ao servidor
- aposentadoria por invalidez;
  - aposentadoria compulsória;
  - aposentadoria voluntária por idade e tempo de contribuição, aqui denominada aposentadoria por tempo de contribuição;

---

<sup>2</sup>Prática de alguns RPPSs que, apesar de optarem pela segregação de massa – alternativa de equacionamento do déficit atuarial que consiste na separação dos segurados e dos recursos em dois Planos (Previdenciário, que é capitalizado, e o Financeiro, sob o regime de repartição simples) –, utilizam-se de recursos capitalizados do Plano Previdenciário.

- aposentadoria voluntária por idade;
- aposentadoria especial;
- auxílio-doença;
- salário-família;
- salário-maternidade.

b) Ao dependente

- pensão por morte;
- auxílio-reclusão.

De acordo com o objetivo do trabalho, o Quadro 2.1 apresenta as definições de alguns desses benefícios. Sob a regra permanente (regramento previdenciário ao qual os servidores efetivos que ingressaram no serviço público a partir de 01/01/2004 estão submetidos), o cálculo desses proventos considera, a partir de 20/02/2004, a média aritmética simples das maiores remunerações<sup>3</sup> ou subsídios (com valores atualizados, mês a mês), correspondentes a 80% de todo o período contributivo desde a competência julho/1994 ou desde a competência do início da contribuição, se posterior àquela (BRASIL, 2016).

---

<sup>3</sup>As remunerações consideradas no cálculo da média, depois de atualizadas, não poderão ser inferiores ao valor do salário-mínimo e nem superiores ao limite máximo do salário-de-contribuição.

Norma	Disposição
Aposentadoria por invalidez	Benefício concedido ao servidor titular de cargo efetivo da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, incluídas suas suas autarquias e fundações, que apresentar incapacidade permanente para o trabalho, conforme definido em laudo médico pericial.
Aposentadoria compulsória	Benefício concedido ao servidor titular de cargo efetivo da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, incluídas suas autarquias e fundações, que completar setenta anos de idade.
Aposentadoria voluntária	Benefício concedido ao servidor titular de cargo efetivo da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, incluídas suas autarquias e fundações, que preencher, cumulativamente os requisitos mínimos exigidos de tempo de efetivo exercício no serviço público, tempo de efetivo exercício no cargo efetivo em que se der a aposentadoria, idade e tempo de contribuição, que ingressaram no serviço público a partir de 01/01/2004, ou àqueles que não optaram pelas regras dos artigos 2º e 6º da EC 41/03 ou do artigo 3º da EC 47/04. Há dois tipos: aposentadoria voluntária por idade e tempo de contribuição e aposentadoria por idade.
Aposentadoria voluntária por idade e tempo de contribuição	Benefício concedido ao servidor titular de cargo efetivo da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, incluídas suas autarquias e fundações que preencher, cumulativamente, os seguintes requisitos: tempo mínimo de efetivo exercício no serviço público de 10 anos; tempo mínimo de efetivo exercício no cargo em que se der a aposentadoria de 5 anos; idade mínima: 60 anos, se homem e 55, se mulher; tempo de contribuição: 35 anos, se homem, 30, se mulher.
Aposentadoria voluntária por idade	Benefício concedido ao servidor titular de cargo efetivo da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, incluídas suas autarquias e fundações que preencher, cumulativamente, os seguintes requisitos: tempo mínimo de efetivo exercício no serviço público de 10 anos; tempo mínimo de efetivo exercício no cargo em que se der a aposentadoria de 5 anos; idade mínima: 65 anos, se homem e 60 anos, se mulher.
Aposentadoria especial do professor	Benefício concedido ao servidor titular de cargo efetivo da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, incluídas suas autarquias e fundações que comprove, exclusivamente, tempo de efetivo exercício das funções de magistério na educação infantil e no ensino fundamental e médio. Nesse caso, para efeito da aposentadoria voluntária por “idade e tempo de contribuição”, terá os requisitos de idade e de tempo de contribuição reduzido em 5 anos.
Pensão por morte	Benefício concedido ao conjunto dos dependentes do segurado falecido. A partir de 20/02/2004, data de publicação da MP nº 167, o valor dos proventos na pensão por morte será a totalidade dos proventos percebidos pelo aposentado na data anterior à do óbito.

Fonte: Adaptado de Brasil (2016).

Quadro 2.1: Legislação vigente relacionada a RPPS, Brasil, 2017.

Para o cálculo do valor inicial dos proventos proporcionais ao tempo de contribuição, utiliza-se a razão cujo numerador é o total de tempo trabalhado e o denominador é o tempo necessário à respectiva aposentadoria voluntária com proventos integrais (60 anos de idade e 35 anos de tempo de contribuição, se homem e 55 anos de idade e 30 anos de tempo de contribuição, se mulher), ambos em número de dias (BRASIL, 2016).

O valor dos proventos na pensão por morte, limitado pelo valor estabelecido para os benefícios do RGPS (acrescida de setenta por cento da parcela excedente a esse limite), será igual a totalidade da remuneração (ou provento) do servidor ativo (ou aposentado), na data anterior à do óbito (BRASIL, 2016).

Tais benefícios são financiados mediante contribuições do ente federativo, dos servidores ativos, inativos e pensionistas, observados critérios que preservem o equilíbrio financeiro e atuarial. A alíquota de contribuição dos segurados (ativos, aposentados e pensionistas) ao RPPS não poderá ser inferior à dos servidores titulares de cargo efetivo da União, atualmente fixada em 11% (onze por cento), e também incidirá sobre o décimo terceiro salário; a contribuição do ente federativo não poderá ser inferior ao valor da contribuição do servidor ativo nem superior ao dobro desta, observado o cálculo atuarial anual.

No que diz respeito à legislação em RPPS, terceiro ponto abordado sobre o tema, para fins de cálculo atuarial, tem-se como base a Consolidação da Legislação sobre Regimes Próprios (atualizada até 04/09/2018)<sup>4</sup>, e comentam-se a EC nº 41/2003 e a portaria nº 403/2008, ora citada como Brasil (2008).

Segundo Mascarenhas, Oliveira e Caetano (2004), a EC nº 41/2003 instituiu modificações paramétricas (aquelas que alteram o plano de benefícios previdenciários sem mudar a sua forma de financiamento) e estruturais (aquelas que alteram a forma de financiamento dos benefícios) em RPPS. As mudanças paramétricas afetaram os planos de benefícios no que tange à base de cálculo dos benefícios, às regras (permanente e de transição) de elegibilidade, à indexação dos benefícios e à contribuição previdenciária de inativos e pensionistas.

Em relação às modificações estruturais, a EC nº 41/2003 possibilitou a criação do

---

<sup>4</sup>Disponível em: <http://sa.previdencia.gov.br/site/2018/09/CONSOLIDACAO-LEGISLACAO-RPPS-atualizada-ate-04-setembro-2018.pdf>

RPC, mais tarde implementada pela Lei nº 12.618/2012, para os servidores públicos federais titulares de cargo efetivo (tal lei não contempla servidores públicos estaduais ou municipais) (MASCARENHAS; OLIVEIRA; CAETANO, 2004).

A portaria nº 403 de 10 de dezembro de 2008, ora citada Brasil (2008), dispõe sobre as normas aplicáveis às Avaliações e Reavaliações Atuariais (ARAs) dos RPPSs da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios (...) e dá outras providências”. Em seu art. 1º, afirma que as ARAs, com o objetivo de dimensionar os compromissos do plano de benefícios e estabelecer o Plano de Custeio que observe o equilíbrio financeiro e atuarial dos RPPSs, devem ser elaboradas utilizando-se dos parâmetros fixados nesta portaria. O Plano ou Método de Custeio, por sua vez, define o modo de financiamento dos benefícios oferecidos pelo plano de benefícios, representadas pelas alíquotas de contribuições previdenciárias (normais e suplementares, quando for o caso) a serem pagas pelo ente federativo, pelos servidores ativos e inativos e pelos pensionistas ao respectivo RPPS, de modo que se atinja o equilíbrio financeiro e atuarial (BRASIL, 2008).

Em seu art. 2º, define-se Avaliação Atuarial como

estudo técnico desenvolvido pelo atuário, baseado nas características biométricas, demográficas e econômicas da população analisada, com o objetivo principal de estabelecer, de forma suficiente e adequada, os recursos necessários para a garantia dos pagamentos dos benefícios previstos pelo plano (BRASIL, 2008).

É necessário determinar a situação econômico-financeira de longo prazo de um RPPS, avaliando-se a capacidade financeira do regime em solver suas obrigações previdenciais com os seus associados e dependentes. Tais obrigações não apresentam valor e data para pagamento conhecidos, sendo geradoras de incertezas e aproximadas por meio de premissas, conforme Mascarenhas, Oliveira e Caetano (2004).

As ARAs, segundo o art. 3º, devem obedecer às premissas e diretrizes fixadas na Nota Técnica Atuarial (NTA) – documento exclusivo de cada RPPS que descreve detalhadamente as características gerais dos planos de benefícios, as premissas adotadas, a formulação para o cálculo do custeio e das reservas matemáticas (BRASIL, 2008) – do respectivo RPPS e os resultados devem constar do Parecer Atuarial – documento

que apresenta, de forma conclusiva, a situação financeira e atuarial do plano, certifica a adequação da base de dados e das hipóteses utilizadas na avaliação e aponta medidas para a busca e manutenção do equilíbrio financeiro e atuarial (BRASIL, 2008).

Quanto aos Regimes de Financiamento de seu Plano de Benefícios, expostos no art. 4º, os RPPSs podem adotar três modalidades, obedecidos os parâmetros mínimos de prudência estabelecidos nesta Portaria:

- Regime Financeiro de Capitalização – regime em que as contribuições estabelecidas no plano de custeio, a serem pagas pelo ente federativo, pelos servidores ativos e inativos e pelos pensionistas, acrescidas ao patrimônio existente, às receitas por ele geradas e a outras espécies de aportes, sejam suficientes para a formação dos recursos garantidores a cobertura dos compromissos futuros do plano de benefícios e da taxa de administração (BRASIL, 2008). Custeiam aposentadorias e pensões dos RPPSs;
- Regime Financeiro de Repartição de Capitais de Cobertura – Regime em que as contribuições estabelecidas no plano de custeio, a serem pagas pelo ente federativo, pelos servidores ativos e inativos e pelos pensionistas, em um determinado exercício, sejam suficientes para a constituição das reservas matemáticas dos benefícios iniciados por eventos que ocorram nesse mesmo exercício, admitindo-se a constituição de fundo previdencial para oscilação de risco (BRASIL, 2008);
- Regime Financeiro de Repartição Simples – Regime em que as contribuições estabelecidas no plano de custeio, a serem pagas pelo ente federativo, pelos servidores ativos e inativos e pelos pensionistas, em um determinado exercício, sejam suficientes para o pagamento dos benefícios nesse exercício, sem o propósito de acumulação de recursos, admitindo-se a constituição de fundo previdencial para oscilação de risco (BRASIL, 2008).

O art. 5º afirma que “o ente federativo, a unidade gestora do RPPS e o atuário responsável pela elaboração da avaliação atuarial devem eleger as hipóteses (...) adequadas às características da massa de segurados e de seus dependentes”, obedecendo-se os parâmetros estabelecidos.

O art. 6º (BRASIL, 2008), por sua vez, trata das tábuas biométricas referenciais que devem ser utilizadas para projeção da biometria dos segurados (e de seus dependentes). Tratam-se de instrumentos estatísticos utilizados na avaliação atuarial que expressam as probabilidades de ocorrência de eventos relacionados com sobrevivência, invalidez ou morte de determinado grupo de pessoas vinculadas ao plano (BRASIL, 2008). Elas não podem indicar obrigações inferiores às alcançadas pelas seguintes tábuas: i) Sobrevivência de Válidos e Inválidos – Tábua atual de mortalidade elaborada para ambos os sexos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatísticas (IBGE); ii) Entrada em Invalidez – Álvaro Vindas, como limite mínimo de taxa de entrada em invalidez.

Dos artigos 7º ao 11º (BRASIL, 2008), são detalhadas outras premissas que compõem os cálculos atuariais. No Anexo da mesma portaria se apresentam, por fim, os elementos mínimos de uma NTA: seus objetivos, premissas, modalidade dos benefícios, regimes financeiros, métodos de financiamento, contribuições, reservas, compensação previdenciária e segregação de massa.

## 2.2 Premissas Decrementais

Como dito, aqui, observam-se as contingências Morte e Saída. Em decorrência desse recorte, as premissas de interesse são, conseqüentemente, Mortalidade e Idade de Aposentadoria – aqui investigada por meio dos tempos, quer seja até a saída do servidor, assim que possível, quer seja postergadamente.

Em relação à Mortalidade aplicada ao âmbito securitário/previdenciário, buscou-se, na literatura (estrangeira e nacional), compreender quais os problemas que vem sendo abordados, bem como quais métodos vêm sendo utilizados – nas últimas décadas e em diferentes lugares. Assim, observou-se que, de um modo geral, os trabalhos:

- Estimam estática e parametricamente a mortalidade – tais como Aucejo, Suay e Garrido (2005), Butt e Haberman (2004), Beltrao e Pinheiro (2002), Heligman e Pollard (1980) –, inclusive por meio de Modelos Lineares Generalizados – Wong-Fupuy e Haberman (2004), Frias e Rodriguez (1997), Paes (1995), Renshaw

(1991);

- Estimam estática e não parametricamente a mortalidade – (Aucejo, Suay e Garrido (2009), Martins (2007), Aucejo (2003));
- Estimam a mortalidade de forma dinâmica – Fernandez (2008), Haberman e Russolillo (2005), Neves e Migon (2004), Coelho (2001), Lee e Carter (1992);
- Analisam a mortalidade sob a ótica dos múltiplos decrementos – Borges (2009), Macdonald (1996a), Macdonald (1996b), Macdonald (1996c);
- Investigam a mortalidade para idade avançadas (estudos de fim de tábua) – Martins (2007), Huestead (2005), Thatcher, Kannisto e Vaupel (2001), Kannisto (1996).

De acordo com os trabalhos listados, observa-se que a mortalidade é comumente estimada, de forma estática, por meio de modelos de sobrevivência paramétricos (leis de mortalidade), com destaque para os propostos por Makeham (1867) e Heligman e Pollard (1980); suas estimativas dinâmicas, que consideram o efeito do tempo, são viabilizadas principalmente pelo modelo de Lee e Carter (1992).

Além disso, foi possível notar que os estudos sobre mortalidade realizados fora do Brasil se concentram na estimativa das taxas de mortalidade (e outros decrementos), na construção de tábuas biométricas e na proposição de novos modelos de graduação paramétrica. Os estudos no Brasil, por sua vez, se concentram em: estimar a mortalidade (e outros decrementos) e construir tábuas biométricas; investigar as diferentes causas de saída do funcionalismo público; compreender as transições entre diferentes estados relacionados ao sistema previdenciário brasileiro; etc. Destes, grande parte se utilizou de dados de previdência obrigatória, com destaque para: os inválidos segurados de clientela urbana do RGPS (RIBEIRO; REIS; BARBOSA, 2010); a população idosa aposentada pelo RGPS (SOUZA, 2009); os servidores civis do Poder Executivo Federal (BORGES, 2009); os servidores públicos civis do poder executivo do Estado de São Paulo no período de 1990 a 2005 (SILVA, 2008); os servidores públicos estatutários

da administração direta do município do Rio de Janeiro (MARTINS, 2007); os funcionários públicos civis federais no período de 1993 a 1999 (BELTRAO; SUGAHARA, 2002). Por tratarem especificamente do funcionalismo público brasileiro, alguns deles são explanados a seguir.

Borges (2009), a partir de dados coletados em outubro de 2008 junto ao Sistema Integrado de Administração de Recursos Humanos (SIAPE), construiu, segundo escolaridade e sexo: tábuas de mortalidade para os aposentados por invalidez e para os ativos e aposentados por outras causas, considerando a morte como único decremento possível, por meio dos modelos de Heligman e Pollard (1980) e de Lee e Carter (1992); tábuas de múltiplos decrementos considerando as diferentes formas de saída do funcionalismo público, como a morte, aposentadoria (exceto invalidez), aposentadoria por invalidez e exoneração/demissão. Concluiu que a mortalidade dos ativos do sexo masculino é maior que a do sexo feminino, assim como as probabilidades de morte são maiores para o grupo de nível médio em relação ao pessoal com nível superior, com tendência de queda nos níveis de mortalidade. Quanto à entrada em invalidez, ela é direta e inversamente proporcional a idade e a escolaridade, respectivamente.

Martins (2007) investigou duas populações: os servidores públicos estatutários da administração direta do município do Rio de Janeiro, observados de 01/04/2000 a 18/12/2006, envolvendo 134.792 registros; aposentados por invalidez do INSS, que rege a previdência básica compulsória dos trabalhadores do setor privado na iniciativa urbana, observados de 1999 a 2003, compreendendo uma exposição central de 3,0 e 4,6 milhões de vidas-anos para os sexos feminino e masculino respectivamente. O trabalho construiu parametricamente tábuas (estáticas e dinâmicas) biométricas para mortalidade de ativos e mortalidade de inválidos e ratificou empiricamente que não há modelo melhor que o outro, e só o caso prático irá direcionar para qual deva ser utilizado. Portanto, a conclusão é que o maior número de modelos possível, paramétricos e não-paramétricos, deve ser testado antes de se decidir pela utilização de um determinado.

Beltrao e Sugahara (2002) construíram, a partir de dados do SIAPE, tábuas de vida para os funcionários públicos civis federais no período de 1993 a 1999. As tábuas foram construídas desagregando-se os funcionários por nível educacional (nível superior

ou não) e ajustadas pelo modelo de Heligman e Pollard (1980). Dentre os principais resultados, encontraram que para as idades intermediárias entre 40 e 90 anos, a aderência dos dados ao modelo parece muito boa; a sobremortalidade masculina por nível de escolaridade; as sobremortalidades, tanto de homens quanto de mulheres, são de pelo menos 50% a mais para o pessoal de médio do que para o de nível superior.

Os trabalhos nacionais ratificam a necessidade da construção de tábuas biométricas no Brasil. Para justificar tal necessidade, Ramos (2015) aponta as diferenças entre a população que gerou as estimativas da tabela e a população-objeto do seguro, a vastidão do território brasileiro e as diferenças regionais em associação com os processos migratórios e as diferenças entre as metodologias de construção. Deste modo, esta tese opta por construir estimativas para a mortalidade – depois de sua extrapolação pelo método de Castro (2018) –, a partir de tábuas do IBGE e por meio do modelo de Lee-Carter estendido, que considera os efeitos de idade, tempo e coorte, conforme notação de Butt, Haberman e Shang (2014) e explicitação na subseção 3.1.

Em relação à Idade de Aposentadoria, tem-se que apesar de estudos concluírem que a decisão de aposentadoria pode se dar em idades diferentes da idade mínima de elegibilidade (BEEHR et al., 2000), para os servidores públicos municipais brasileiros não é evidente como se dá essa postergação (CORRÊA, 2014).

A postergação da aposentadoria (o adiamento da saída do serviço público), seja compulsória (pelo aumento da idade presumida), seja voluntária (por meio de incentivos de permanência), está relacionada a diversas questões, tais quais:

- As discussões acerca da determinação da idade presumida de aposentadoria;
- Os fatores que influenciam a decisão voluntária de aposentar-se;
- A dinâmica conceitual de aposentadoria;
- A permanência no mercado de trabalho após a aposentadoria.

O primeiro desses pontos, a determinação da idade presumida de aposentadoria, é discutido há muito tempo. Rosen e Jerdee (1985) e Galasso (2008), por exemplo, afirmam que devido ao processo de envelhecimento, os sistemas de seguridade social

terão que ser reduzidos. Este, inclusive, realizou simulações e sugeriu que, para 2050, na França, Itália, Reino Unido e EUA, a idade de aposentadoria será adiada, enquanto a taxa de contribuição previdenciária aumentará.

Como as populações mais velhas estão significativamente associadas a um maior tempo de aposentadoria e menor tempo de trabalho (PROFETA, 2002), alguns autores, como Breyer e Kifmann (2002) tentam induzir os trabalhadores a se aposentarem mais tarde fortalecendo a ligação entre a idade de aposentadoria e o nível de benefício, ou seja, analisam as implicações financeiras de longo prazo que tal reforma provocariam.

De fato, em muitos países do mundo, algumas reformas já foram implementadas, mediante o aumento da idade legal de aposentadoria, maior flexibilidade nas regras de aposentadoria compulsória e redução de provisões para aposentadoria antecipada (PROFETA, 2002).

O segundo dos pontos, ou seja, os fatores que influenciam a decisão voluntária de aposentar-se, são classificados como sendo dos domínios interno (autonomia, variedade de habilidades, importância da tarefa, interação com os outros, redução da força de trabalho, incentivo à aposentadoria das organizações e cansaço no trabalho) e externo (disponibilidade de seguro saúde, necessidade de cuidar de outra pessoa, idade legal obrigatória para aposentadoria) ao trabalho, em conformidade com Beehr (1986), Feldman (1994), Taylor e Shore (1995), Beehr et al. (2000) e Zappala et al. (2008).

A literatura, de modo geral, conclui que dentre os principais preditores de decisões de aposentadoria estão as finanças – como em Beehr (1986), Robinson, Coberly e Paul (1985), Talaga e Beehr (1989) e Taylor e Shore (1995) – e a saúde, de acordo com Talaga e Beehr (1989) e Taylor e Shore (1995).

No entanto, observa-se que a natureza e definição da aposentadoria vem mudando nos últimos anos, de modo que a aposentadoria (o terceiro dos pontos) não significa necessariamente a retirada total e permanente do trabalho remunerado – consoante Beehr (1986), Feldman (1994), Lawson (1991) e Talaga e Beehr (1989). Muitos aposentados trabalham nas mais diversas cargas horárias (períodos integral ou parcial), para si ou para um novo empregador, e na mesma ou numa nova ocupação (LAWSON, 1991). A divisão entre trabalho e aposentadoria, portanto, não é totalmente distinta.

Na prática, um fator que incentiva o adiamento da aposentadoria por parte do servidor público no Brasil (o quarto dos pontos elencados) é o abono de permanência. O segurado ativo que tenha completado as exigências para aposentadoria voluntária pela regra permanente por idade e tempo de contribuição e especial do professor, e por aquela da regra de transição estabelecida no artigo 2º da EC 41/2003, que optar por permanecer em atividade fará jus a um abono de permanência equivalente ao valor<sup>5</sup> da sua contribuição previdenciária até completar as exigências para aposentadoria compulsória. (BRASIL, 2016).

No Brasil, recentemente, investigaram a idade de aposentadoria em RPPSs, os trabalhos de Silveira e Gomes (2017) e Corrêa (2018).

Silveira e Gomes (2017), partindo da ideia de aposentadoria tardia, propôs, para aposentadoria programada, a ponderação entre a idade real da entrada em benefício com a estimada, através de um estudo do comportamento histórico dos servidores públicos do município de Três Marias/MG, observados até dezembro de 2013.

Corrêa (2018), por sua vez, propôs uma função a ser utilizada como premissa para a probabilidade de se aposentar por aposentadoria programada. Para isso, recorreu a dados de aposentadorias do RGPS, dado que não existem informações disponíveis para o RPPS. Inicialmente, estimou-se a taxa de entrada em aposentadoria como a razão entre o número de aposentadorias concedidas e o número de contribuintes, a cada grupo etário, em determinado período. Depois de anualizadas, as taxas foram convertidas em probabilidades de aposentadoria a cada idade e sexo.

A presente tese investiga a idade de concessão de aposentadoria do servidor a partir da idade presumida de aposentadoria e do tempo postergado de aposentadoria. Para isso, utilizou-se dos dados dos segurados inativos do IPSEMC até dezembro de 2016. Dado que a idade presumida de aposentadoria é pré-estabelecida pelos critérios de elegibilidade, em conformidade com (BRASIL, 1988) e a EC nº 20/1998, foco foi dado ao tempo postergado, analisado por meio de modelos de sobrevivência tradicionais –

---

<sup>5</sup>O valor do abono de permanência será equivalente ao valor da contribuição efetivamente descontada do servidor, ou recolhida por este, relativamente a cada competência. O pagamento do abono de permanência é de responsabilidade do respectivo ente federativo e será devido a partir do cumprimento dos requisitos para obtenção do benefício, mediante opção expressa pela permanência em atividade (BRASIL, 2016).

conforme Carvalho et al. (2011) e Colosimo e Giolo (2006) –, por modelos de sobrevivência de riscos competitivos – de acordo com Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012) e Klein et al. (2014). Assim, é possível estimar o tempo de postergação de aposentadoria desses servidores, globalmente e por causa (aposentadoria por idade e tempo de contribuição, aposentadoria por idade), considerando-se o efeito de algumas covariáveis (sexo e carreira).

Além disso, aqui se estima o tempo de permanência no serviço público, também com dados dos segurados (ativos, inativos e pensionistas) do IPSEMC. A partir da data de admissão dos (ex) servidores, foi possível acompanhá-los até a data de sua saída ou até o término do seguimento, em dezembro de 2016. Assim, estima-se, por meio dos modelos apresentados no parágrafo anterior, o tempo de permanência, considerando cinco causas de saída (morte, aposentadoria por idade, aposentadoria por idade e tempo de contribuição, aposentadoria compulsória, aposentadoria por invalidez) e três covariáveis (sexo, carreira e regra de saída).

As transições entre estados apontadas nos parágrafos anteriores nos leva a algumas definições: um modelo básico de sobrevivência descreve a probabilidade de se mover do estado inicial para o estado de interesse (ocorrência do evento de interesse ou constatação de falha) no decorrer do tempo; modelos de sobrevivência de riscos competitivos descrevem as probabilidades de saída do estado inicial para um dos estados de interesse, que concorrem entre si, em vários pontos no tempo; modelos de múltiplos estados descrevem as probabilidades de movimentação entre os vários estados, incluindo a possibilidade de retornar ao estado inicial ou outro estado qualquer (DANIEL, 2004).

Analogamente, tabelas de vida de múltiplos estados são consideradas uma generalização das tabelas de múltiplos decrementos; estas, por sua vez, são consideradas uma generalização da tabela unidcremental, como a de mortalidade. A diferença essencial entre um modelo de múltiplos estados e o de múltiplos decrementos é que o primeiro permite transições em ambas as direções entre pelo menos dois dos estados, enquanto no segundo, as transições entre qualquer par de estados estão em apenas uma direção, se forem possíveis (WATERS, 1984).

Assim, nota-se que o modelo de sobrevivência de riscos competitivos e o de múltiplos

decrementos se equivalem. Os modelos de sobrevivência se diferenciam por, mediante o tempo até a ocorrência do evento de interesse (também conhecido como “tempo de falha”), estimar o risco de saída do *status* inicial levando em conta a presença de censuras (não ocorrência do evento de interesse no decorrer do tempo de acompanhamento). Além disso, apresentam a vantagem de, quando comparados aos modelos de múltiplos decrementos, levarem em conta a presença de censuras apropriarem-se das abordagens não paramétricas, paramétricas e semiparamétricas e considerarem o efeito de covariáveis sobre o tempo de falha. De acordo com o problema e a característica dos dados, também dispõem de modelos de longa duração, de fragilidade, de riscos competitivos, eventos recorrentes, dentre outros.

No meio atuarial, uma operação com múltiplos estados é caracterizada por contemplar simultaneamente várias contingências ou riscos pessoais que afetam os segurados, como morte ou invalidez (GARCIA, 2000). Esses modelos foram utilizados por Pitacco (1999), que adotou uma abordagem de tempo contínuo e multiestado para expressar a estrutura atuarial dos produtos de seguro de cuidados de longa duração.

Em relação aos modelos de múltiplos decrementos, Bernoulli (1766) considerou a taxa de inoculação da doença da varíola e da mortalidade, cuja proposta consistia numa operação com três estados possíveis: as pessoas poderiam abandonar o status de saudáveis por duas causas (doença ou morte); e abandonar o status de doentes por meio da morte; as pessoas não abandonavam o status de mortos.

Dado que a consideração dos múltiplos decrementos começou com a matemática da varíola e que continuou com o financiamento do fundo de pensão envolvendo o pagamento de anuidades a vidas inválidas, Seal (1977) elaborou uma revisão da história dos múltiplos decrementos, tanto das contribuições atuariais, quanto das estatísticas.

No Brasil, Paes (1985) analisou a incidência de causas de morte – para a construção de tábuas de vida de múltiplo decremento –, segundo a probabilidade de morte, sobrevivência e esperança de vida, por meio da metodologia de Chiang (1968) e a partir da população residente do município de Recife/PE, em 1979.

Em relação aos modelos de riscos competitivos, Macdonald (1996a), Macdonald (1996b) e Macdonald (1996c) realizou investigações atuariais de modelos estatísticos

para decrementos e dados de transição, em que se analisam modelos de tempo até a morte, modelos de múltiplo estado, modelos binomial e poisson, riscos competitivos, estimação não paramétrica, modelos de regressão e processo de contagem. Contudo, os trabalhos associaram, de forma teórica, os métodos à mortalidade, sem posterior aplicação. Ilustram-se, ainda, os trabalhos de Chiang (1961) e David (1970), que estudaram os aspectos de estimação relacionados às probabilidades em modelos de riscos competitivos.

Em decorrência da escassez de trabalhos que tratem dos Modelos de Riscos Competitivos (MRC) aplicados ao tempo no serviço público e à previdência, optou-se pela busca de trabalhos que desenvolveram e/ou aplicaram os MRC em áreas diversas (economia e saúde). Em Economia, citam-se os trabalhos de Gandrud (2013), Dolton e Klaaum (1999), Mealli e Pudney (1996), Narendranathan e Stewart (1993) e Butler, Anderson e Burkhauser (1989); na área da Saúde, ilustram-se os trabalhos de Green et al. (2015), Baer et al. (2010), Varadhan et al. (2010), Cortese e Andersen (2009) e Grun-kemeier et al. (2007). Por meio deles, constatou-se que na análise de riscos competitivos – independente da área de aplicação e apesar do uso dos modelos não paramétricos –, é comum a utilização dos modelos semiparamétricos<sup>6</sup> no ajuste da variável de interesse em função de covariáveis.

Depois de estimadas as premissas referentes à mortalidade e à idade de aposentadoria, são efetuados os cálculos atuariais, ou seja, de CN e RM, para a aposentadoria programada. Isso significa que não se consideram as obrigações referentes à morte e invalidez. A formulação é apresentada na subseção 4.5 e segue a notação de Winklevoss (1993).

---

<sup>6</sup>Existe uma gama de modelos semiparamétricos, tais quais os que consideram proporcionalidade, dependência e/ou heterogeneidade dos riscos, associados a diferentes métodos de estimação.

# Capítulo 3

## Aspectos Metodológicos

### 3.1 Metodologias para a Mortalidade

No presente capítulo se apresentam os aspectos referentes à definição dos elementos que compõem uma tábua de vida (ORTEGA, 1987) e sua extrapolação (CASTRO, 2018), além da previsão de mortalidade – conforme Nunes e Carvalho (2008) e Butt, Haberman e Shang (2014).

Por meio da Biometria Atuarial – ciência que tem por objeto a elaboração de modelos biométricos, com fundamento biológico e método estatístico – investiga-se o fenômeno da sobrevivência. Este se estuda através de grupos fechados, especificando-se as variações decorrentes da mudança de idade ou de tempo atuarial (ALBA, 1965).

O termo “tábuas biométricas” compreende, além das tábuas de mortalidade propriamente ditas, diversas outras, como as tábuas de entrada em invalidez e de mortalidade de inválidos. A tábua de mortalidade (ou tábua de vida) é um instrumento teórico que permite medir as probabilidades de vida e morte de uma população em função da idade. A descrição da tábua compreende uma parte considerável de toda a notação e as relações básicas utilizadas em demografia (ORTEGA, 1987).

De acordo com Borges (2009), a primeira tábua de vida desenvolvida através de um caminho lógico foi construída por Edmond Halley e publicada em 1693, baseada em registros de nascimentos e morte da cidade de Breslau de 1687 a 1691. Outras tábuas de vida foram preparadas durante os séculos XVII e XVIII com base em informações limitadas e pressupostos simplificadores. Desde então, tábuas de mortalidade têm sido

construídas para diversas regiões e grupos populacionais, devido à sua importância para analisar estudos atuariais e definição de políticas públicas (BELTRAO; SUGAHARA, 2002).

Segundo Ortega (1987), existem cinco características principais da tábua de mortalidade em sua utilização dentro do campo demográfico: i) permite descrever o comportamento da mortalidade por idade; ii) permite obter probabilidades e outras medidas convencionais de mortalidade; iii) fornece uma medida sumária de mortalidade, a expectativa de vida ao nascer; iv) pode ser assimilada a um modelo teórico de população (população estacionária), por meio da manutenção da mortalidade por idade e nascimentos constantes ao longo do tempo; v) permite realizar diversas aplicações numa grande variedade de problemas.

Ortega (1987) classifica as tábuas de acordo com o período de referência (gerações e de momentos) e de acordo com a extensão do intervalo de idades (completas e abreviadas).

Numa tábua de vida por gerações, uma geração ou coorte (conjunto de pessoas que viveram um evento similar no decorrer de um curto período de tempo) de pessoas é seguida ao longo do tempo, determinando em cada idade o número de sobreviventes até que o grupo seja extinto. Essas tabelas são pouco usadas porque é necessário acompanhar a geração por muito tempo, sendo comum o uso das tabelas de momentos (ou de contemporâneos), que se baseiam na experiência de mortalidade observada durante um curto período de tempo (geralmente um ano), por todas as gerações de uma população real. Em geral, quando se fala em tábuas de mortalidade, faz-se referência a este tipo.

As tábuas completas são aquelas em que as diferentes funções são elaboradas para cada ano de idade, enquanto as tábuas abreviadas são aquelas em que as diferentes funções são calculadas por faixas etárias, geralmente grupos de cinco anos.

No estudo em tela, as tábuas utilizadas são do tipo de momentos e completas.

### 3.1.1 Tábuas de Decremento Simples

A tábua de vida é composta por oito funções, apresentadas a seguir, consoante notação de Ortega (1987).

A primeira delas é a função Sobreviventes  $l_x$ , que estabelece o número de sobreviventes a idade  $x$ . Por sua natureza, é uma função positiva e decrescente; os valores sucessivos de  $l_x$  na tabela não resultam da observação direta de uma população, eles são calculados a partir de outras funções; quando  $x = 0$ , tem-se o número de sobreviventes a idade 0 ( $l_0$ ), ou seja, a raiz da tabela (comumente assume a constante 100.000); é designada  $\omega$  (omega) a idade em que o número de sobreviventes  $l_\omega = 0$ ;  $l_{x+n}$  representa o número de sobreviventes a idade futura  $x + n$  anos.

Quanto à função Mortes ( ${}_n d_x$ ), número de mortes ocorridas entre as idades  $x$  e  $x + n$ , observa-se que é a partir de sua dinâmica que se constrói a tábua. A obtenção de sua distribuição pode ser teórica ou empírica, desde que discreta.

As Probabilidades de Morte entre as idades  $x$  e  $x + n$ ,  ${}_n q_x$ , não são calculadas na prática pela forma sugerida no Quadro 3.1. O ponto de partida são as probabilidades de morte  ${}_n q_x$ , das quais os sobreviventes e os óbitos são calculados, conforme as equações (3.1) e (3.2). Se os valores de  ${}_n q_x$  são conhecidos para cada idade ou faixa etária, além da raiz arbitrária  $l_0$ , é possível obter os valores sucessivos de  $l_x$  e  ${}_n d_x$ , através das relações:

$$l_x \times {}_n q_x = {}_n d_x, \quad (3.1)$$

$$l_x - {}_n d_x = l_{x+n}. \quad (3.2)$$

Em particular, para  $x = 0$  e  $n = 1$ , tem-se a probabilidade de morte do primeiro ano de vida, denominada taxa de mortalidade infantil ( $q_0$ ).

As Probabilidades de Sobrevivência ( ${}_n p_x$ ), por sua vez, são complementares as Probabilidades de Morte ( ${}_n q_x$ ), ou seja,  ${}_n p_x = 1 - {}_n q_x \rightarrow {}_n p_x + {}_n q_x = 1$ .

Em relação ao cálculo do Tempo Vivido entre  $x$  e  $x + n$  ( ${}_n L_x$ ), separam-se os grupos centrais, de acordo com a idade. Para os grupos centrais cuja idade  $x \geq 5$  anos, e quando o intervalo de idades  $n$  é igual a um, o cálculo do tempo vivido pode ser feito com precisão suficiente, admitindo que em cada intervalo  $[x, x + n]$  a função de sobrevivência  $l_x$  é linear:  ${}_n L_x = \frac{l_x + l_{x+n}}{2} \times n$ .

Para as primeiras idades ( $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ) as mortes são distribuídas de forma mais irregular,  $L_x = f_x \times l_x + (1 - f_x) \times l_{x+1}$ , em que  $f_x$  é o fator de separação de mortes e

vale em torno de 0,10 a 0,35, dependendo do nível de mortalidade (isto é, se o grupo morre muito ou pouco). Para as idades de 1, 2, 3 e 4, os fatores de separação são próximos de 0,50 e podem ser calculados a partir de  $f_0 = \frac{L_0 - l_1}{d_0}$ .

Finalmente, para o grupo aberto final ( $x+$ ), o cálculo do tempo vivido é  ${}_{\omega}L_x = \frac{{}_{\omega}d_x}{{}_{\omega}m_x} = \frac{l_x}{{}_{\omega}m_x}$ , cujo  ${}_{\omega}m_x$  é a taxa de mortalidade central do grupo aberto de  $x$  a  $\omega$  anos. De  $x$  a  $n$ , tem-se a taxa central de mortalidade

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \frac{{}_n d_x}{\int_x^{x+n} l_a da}, \quad (3.3)$$

razão entre o número de mortes entre as idades  $x$  e  $x+n$  e a integração do número de sobreviventes (que tem como limites as idades  $x$  e  $x+n$ ). Conforme Ortega (1987), a conversão das taxas centrais de mortalidade ( ${}_n m_x$ ) em probabilidades de morte ( ${}_n q_x$ ) constitui uma importante etapa na construção de uma tábua. Deste modo, comparam-se as duas funções, mostrando que ambas podem ser expressas em função de  $l_x$  (ver (3.3) e função  ${}_n q_x$  do Quadro 3.1).

Se a forma funcional de  $l_x$  for conhecida, a função que relaciona  ${}_n m_x$  e  ${}_n q_x$  pode ser determinada. É possível trabalhar com a suposição de formas analíticas para as funções da tábua ou adotar uma tábua de vida com pressuposições sobre a distribuição da mortalidade entre as idades. Se  $l_x$  varia linearmente no intervalo  $[x, x+n]$ , tem-se  ${}_n q_x = \frac{2n \times {}_n m_x}{2n + {}_n m_x}$ , válida para  ${}_n m_x$  com valores baixos. Esta e outras formas para  ${}_n q_x$ , supondo o comportamento de  $l_x$ , são apresentadas por Borges (2009).

Quanto à Esperança de Vida à idade  $x$  ( $e_x^0$ ), devido à mortalidade em relação aos primeiros anos (o número de mortes entre as idades 0 e 1 é muito alto), a expectativa de vida aumenta nas idades iniciais e, em seguida, diminui continuamente até o final da vida; em particular, se  $x=0$ , obtém-se a expectativa de vida ao nascer ( $e_x^0$ ).

A Força de Mortalidade  $\mu_x$  ou Taxa Instantânea de Mortalidade, do campo contínuo, corresponde à probabilidade de morte  $q_x$  do campo discreto. Ambas dão uma medida anual de mortalidade:  $q_x$  como função do  $l_0$  observado em um ano (de idades  $x$  a  $x+1$ ), enquanto o  $\mu_x$  como função do observado em torno do ponto  $x$  Ortega (1987).

É possível obter  $l_x$  por meio de  $\mu_x$ , conforme expressão  $l_x = l_0 \times \exp \left\{ - \int_0^x \mu_a da \right\}$ ,

ou seja, pelo produto entre a raiz da tábua e o exponencial da integração da taxa de mortalidade (tendo como limites as idades 0 e  $x$ ). Se os limites da integral forem trocados por  $x$  a  $x + n$  chega-se à probabilidade de sobrevivência  ${}_n p_x$ . A relação entre  $\mu_x$  e  $q_x$  depende da forma da curva da função sobreviventes ( $l_x$ ).

Função	Definição	Expressão Matemática
Sobreviventes ( $l_x$ )	Número de pessoas que atingem a idade exata $x$ .	$l_x = \sum_{a=x}^{w-1} d_a$
Mortes ( ${}_n d_x$ )	Número de mortes ocorridos entre as idades $x$ e $x + 1$ .	${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$
Probabilidade de morte ( ${}_n q_x$ )	A probabilidade que tem uma pessoa de idade exata $x$ de morrer no ano seguinte ao tempo em que ela atingiu essa idade.	${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{{}_n d_x}{l_x}$
Probabilidade de sobrevivência ( ${}_n p_x$ )	A probabilidade que tem uma pessoa de idade exata $x$ de sobreviver um ano, isto é, de chegar com vida a idade $x + 1$ .	${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$
Tempo vivido entre $x$ e $x + n$ ( ${}_n L_x$ )	O número de anos vividos pela geração $l_0$ entre as idades $x$ e $x + n$ .	${}_n L_x = \int_x^{x+n} l_a da$
Tempo vivido entre $x$ e $\omega$ ( $T_x$ )	O número total de anos vividos pela geração de $l_0$ nascimentos entre as idades $x$ e $\omega$ .	$T_x = \int_x^{\omega} l_a da = \sum_{a=x}^{\omega-1} L_a$
Esperança de vida a idade $x$ ou vida média a idade $x$ ( $e_x^0$ )	O número médio de anos que uma pessoa vive desde a idade $x$ até o final da vida.	$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$
Taxa instantânea de mortalidade $\mu_x$	Probabilidade de morte do campo contínuo.	$\mu_x = \frac{x}{l_x}$

Fonte: Adaptado de Ortega (1987).

Quadro 3.1: Funções, definições e expressões que compõem uma tábua de vida.

O Quadro 3.1 resume, conforme notação de Ortega (1987), e supondo uma geração inicial de  $l_0$  nascimentos, uma tábua de vida.

### 3.1.2 Extrapolação de Tábuas

A tábua do IBGE 2014 (ambos os sexos), para ambos os sexos, foi utilizada pelo IPSEMC na avaliação atuarial de 2016. Como ela só fornece a probabilidade de morte para indivíduos de até 80 anos, é necessário extrapolar essa informação para além da referida idade.

Nesse sentido, Castro (2018) apresentou um método de extrapolação que consiste em encontrar um Fator de Ajuste (FA) – para idades acima de 80 anos – a ser utilizado na formulação do número de sobreviventes a idade  $x$  ( $l_x$ ), de modo que a esperança

de sobrevivida a partir dos 80 anos ( $e_{80}$ ) seja igual àquela calculada pelo IBGE e disponibilizada nas tábuas. Tal método é constituído por nove etapas, apresentadas a seguir.

1) Calcular  $d_x$  referentes às idades de 0 a 79 anos, a partir dos  $q_x$  disponibilizados:

$$d_x = \frac{q_x}{1000} \times l_x.$$

2) A raiz da tábua é  $l_0 = 100.000$ . A partir dela, calcular os  $l_x$  até  $x = 80$  anos:

$$l_{x+1} = l_x - d_x.$$

3) Calcular  $l_x$  das idades individuais acima de 80 anos:

$$l_{x+2} = l_{x+1} \times \left( \frac{l_{x+1}}{l_x + FA} \right).$$

Iniciam-se os cálculos com FA, por exemplo, igual a 100, calculando  $l_x$  até  $x = 115$  anos ( $l_{115}$ ).

4) A partir dos  $l_x$  encontrados até  $x = 115$  anos, calcular  $d_x$  para  $x = [80; 115]$  anos:

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

5) A partir de  $l_x$  e  $d_x$  até  $x = 115$  anos, calcular os  $q_x$  para  $x = [80; 115]$  anos:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

6) A partir dos  $l_x$  encontrados, calcular os  $L_x$  para  $x = [0; 115]$  anos, utilizando-se a fórmula do fator de separação das mortes ( $f_x$ ):

$$L_x = f_x \times l_x + (1 - f_x) \times l_{x+1}.$$

Na primeira idade ( $f_0$ ),  $f_x$  assume valores entre 0,05 e 0,35; para as outras idades, assume valor igual a 0,5, pois as mortes acabam ocorrendo de forma uniforme ao longo do ano, em média, na metade dele (CASTRO, 2018). Como no primeiro ano de vida as mortes não se distribuem uniformemente ao longo do ano, calcular  $f_0$  da tábua do

IBGE:

$$f_0 = \frac{(L_0 - l_1)}{d_0}.$$

7) A partir dos  $L_x$  encontrados, calcular  $T_x$  para  $x = [0; 115]$  anos:

$$T_x = \sum_{a=x}^{\omega-1} L_a = L_x + L_{x+1} + \dots + L_{\omega-1}$$

8) A partir dos  $T_x$  e  $l_x$  encontrados, calcular  $e_x$  (esperanças de sobrevida na idade  $x$ ) para  $x = [0; 115]$  anos:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}.$$

9) Depois de calculadas as esperanças de sobrevida na idade  $x$ , observa-se o valor resultante para a esperança de sobrevida na idade de 80 anos ( $e_{80}$ ) resultante da utilização de  $FA = 100$  e que provavelmente resulta em uma  $e_{80}$  diferente daquela divulgada pelo IBGE. O passo seguinte consiste em modificar o valor de FA até que a  $e_{80}$  calculada convirja para  $e_{80}$  divulgada pelo IBGE. Para maiores detalhes sobre o método de extrapolação, consultar Castro (2018).

### 3.1.3 Projeção da Mortalidade

É sabido que o Brasil vem observando um aumento contínuo na expectativa de sobrevida de seus habitantes. Em decorrência disso, os atuários são obrigados a rever, periodicamente, as tábuas de mortalidade adotadas como hipótese atuarial. Nesse contexto, as tábuas geracionais surgiram como uma forma de incluir nos modelos atuariais um acompanhamento das oscilações demográficas, já que contemplam aumentos na expectativa de vida dos participantes de um plano através de um contínuo decréscimo da probabilidade de morte a cada período (NUNES; CARVALHO, 2008).

Como a mortalidade não permanece constante em relação ao tempo, introduz-se a discussão acerca dos Fatores de *Improvement* (FI), isto é, fatores de redução de mortalidade que consideram, durante a construção de tábuas de mortalidade, a mudança

dos padrões de mortalidade ao longo dos anos. Eles consideram dependência entre as covariáveis e o tempo, incorporando o ganho de longevidade da população. Dentre os métodos existentes para sua estimação, apresentam-se, a seguir, a Escala AA e o modelo de Lee-Carter estendido.

### Escala AA

Os métodos utilizados para estimar o *improvement* envolvem cálculos complexos, o que dificulta sua aplicação. Visando minimizar tal problema, algumas tábuas fazem uso do método de *improvement* por escala de projeção, que traz fatores (distribuídos por idade e sexo) de melhoria anual da mortalidade. Por exemplo, comitês da *Society of Actuaries* criaram a Escala AA para projeções de mortalidade a partir de suas tábuas básicas (NUNES; CARVALHO, 2008).

A equação (3.4) exhibe, conforme notação de Nunes e Carvalho (2008), a projeção de mortalidade a partir de uma escala de projeção:

$$q_x^{\text{projetado}} = q_x \times (1 - s_x)^n, \quad (3.4)$$

em que  $q_x$  é a probabilidade de morte de um indivíduo com idade  $x$  segundo uma tábua básica qualquer;  $s_x$  é o fator de melhoria anual para a idade  $x$  trazido pela escala utilizada; e  $n$  é o número de períodos (em anos) que se deseja projetar a probabilidade referência.

É possível notar, por meio da visualização da equação 3.4, que as melhorias sofridas pelas taxas são lineares, ou seja, o método assume que a longevidade aumenta linearmente com o passar do tempo.

Segundo Nunes e Carvalho (2008), a tábua projetada pela escala, apesar de ajustar suas taxas, não incorporam uma melhoria continuada das expectativas de vida. Isso significa que suas taxas se tornam defasadas à medida que o ano-calendário se distancia do ano base da tábua. Como uma alternativa a esse problema, foram criadas as tábuas geracionais, tema abordado na subseção 3.1.3.

### Lee-Carter

A elaboração de uma tábua geracional consiste em selecionar valores a partir de uma série de tábuas estáticas, incluindo a tábua básica e as projetadas, baseando-se em uma determinada idade e no ano em que essa idade é atingida.

Em conformidade com a revisão de literatura, Santos (2007) afirma que o método de Lee-Carter (LC) é o mais utilizado para modelar e projetar a variação da mortalidade considerando-se o efeito do tempo. Ele é dado por um modelo de estimação de uma matriz de taxas específicas de mortalidade no tempo  $t$  para a idade  $x$  ( $m_{x,t}$ ) através da estimativa de mínimos quadrados como solução para a equação:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

onde  $\alpha_x$  representa um padrão constante de mortalidade por idade;  $\beta_x$  descrevem a tendência da mortalidade à idade  $x$  quando o nível geral de mortalidade  $k_t$  se altera;  $k_t$  é a tendência da mortalidade ao longo do tempo;  $\varepsilon_{x,t}$  é um termo de erro (efeitos aleatórios) com distribuição normal de média zero e variância constante  $\sigma^2$ . Os detalhes do processo de estimação dos parâmetros  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  e  $k_t$  também são apresentados por Monteiro e Leao (2012) e Butt, Haberman e Shang (2014).

Após a estimação dos parâmetros, realiza-se a previsão dos valores de  $k_t$ , para os anos futuros, por meio da seleção de um modelo Autoregressivo Integrado de Médias Móveis<sup>1</sup>, ARIMA ( $p, d, q$ ). Com os valores previstos de  $k_t$ , é possível descrever o valor de  $m_{x,t}$  em termo de seu FI, conforme:  $FI(x, t) = \exp(\beta_x(k_t - k_{t-1}))$ , entre os tempos  $t-1$  e  $t$ . Assim, chega-se ao valor de  $m_{x,t}$  e de  $q_{x,t}$  através das equações  $m_{x,t} = m_{x,0} \times FI(x, t)$  e  $q_{x,t} = q_{x,0} \times FI(x, t)$ .

Um ponto positivo do método é o fato de combinar um modelo demográfico com um modelo de séries temporais, permitindo a obtenção de intervalos probabilísticos para as respectivas previsões, além do decréscimo exponencial das taxas de mortalidade sem o estabelecimento de um limite arbitrário (MONTEIRO; LEO, 2012).

<sup>1</sup>Este modelo regride a variável aleatória em função dela mesma no passado (daí o termo autorregressivo – AR) e em função dos erros (daí o termo “médias móveis” – MA), conforme Box e Jenkins (1976), em que  $p$  é a ordem do processo autorregressivo,  $q$  é a ordem do processo de médias móveis e  $d$  é de homogeneidade não estacionária.

Em um desenvolvimento mais recente, a configuração básica foi ampliada para incluir um termo adicional, contendo um efeito de segundo período ou um efeito de coorte (como em Renshaw e Haberman (2003)). O modelo LC básico pode ser transformado num quadro mais geral para analisar a relação entre idade e tempo e seu impacto conjunto sobre as forças de mortalidade (BUTT; HABERMAN; SHANG, 2014).

$$\mu_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x^{(0)}l_{t-x} + \beta_x^{(1)} \times k_t) \quad (3.5)$$

onde  $\alpha_x$  mapeia o perfil de idade principal da mortalidade;  $l_{t-x}$  e  $k_t$  representam os efeitos de coorte e período, respectivamente; os parâmetros  $\beta_x^0$  e  $\beta_x^1$  medem as interações correspondentes com a idade.

Observa-se que o modelo (3.5) representa uma família de seis modelos não-lineares generalizados da estrutura do tipo LC com função de ligação logarítmica. As subcategorias do modelo geral são determinadas definindo-se os parâmetros de interação ( $\beta_x^{0,1}$ ): a) desconhecido (a ser estimado); = 1 (fixo); = 0 (vazio). Assim, a estrutura do tipo LC básico resulta da definição dos parâmetros específicos da idade como:  $\beta_x^{(0)} = 0$  ( $\forall x$ ) e  $\beta_x^{(1)} = \beta_x$  (BUTT; HABERMAN; SHANG, 2014).

## 3.2 Metodologias para a Idade de Aposentadoria

A previsão da idade de concessão de aposentadoria é a soma entre a idade presumida de aposentadoria, variável determinística, e o tempo estimado de postergação de aposentadoria, variável estocástica.

A subseção 3.3 apresenta os aspectos metodológicos para estimação do tempo de postergação (diferença entre a idade de concessão de aposentadoria observada e a idade presumida de aposentadoria), cabendo à presente subseção a apresentação da metodologia referente à idade presumida de aposentadoria e à idade de concessão de aposentadoria — variáveis relevantes para a composição das reservas.

### 3.2.1 Idade Presumida de Aposentadoria

Conforme o capítulo 2, uma avaliação atuarial apresenta, além das obrigações (em termos monetários) de um plano com os seus segurados, o regime financeiro (e método de custeio, dependendo do tipo de regime), num dado exercício, que alcance o equilíbrio financeiro e atuarial.

Observa-se, ainda, que na composição do custo normal, os benefícios de aposentadoria programada representam a parcela mais onerosa para o plano e são financiados durante o período de atividade do segurado, qual seja, entre a idade de entrada no plano (e/ou a idade de entrada no mercado de trabalho) e a idade presumida de aposentadoria, que é estipulada conforme as regras de elegibilidade, e pressupõe que o segurado se aposenta assim que possível (SILVEIRA; GOMES, 2017).

Segundo Caetano (2006), não existe uma definição técnico-científica acerca do momento que um segurado reduz sua capacidade laborativa e necessita do recebimento de benefício previdenciário; o que existe é uma escolha de ordem jurídica, que estabelece um limite de corte objetivo no qual os segurados passam a ter direito de aposentadoria. Quanto à essa definição, há países que estabelecem uma idade mínima para aposentadoria programada, outros que unificarão a idade no futuro (mas hoje permanecem com a diferença), aqueles com idades diferenciadas por sexo e/ou carreira (CAETANO, 2006) e outros que não definem uma idade mínima de aposentadoria para servidores públicos (PALACIOS; WHITEHOUSE, 2006).

No Brasil, a idade presumida de aposentadoria depende de uma combinação de variáveis: da idade de entrada no mercado de trabalho (tempo de contribuição anterior) e da data de admissão do servidor (indicadora da regra que norteará os critérios de elegibilidade para cada servidor). Dentre os critérios, citam-se sexo, idade, carreira, tempo de contribuição, tempo no serviço público, tempo na carreira e tempo no cargo. Para ilustrar, servidores do sexo masculino, não professores, que ingressaram no serviço público até 31 de dezembro de 2003, poderão se aposentar quando obtiverem: 60 anos de idade, 35 anos de tempo de contribuição, 20 anos no serviço público, 10 anos de carreira e 5 anos de cargo.

Apesar da exigência dos critérios, eles nem sempre constam nos bancos de dados

disponibilizados para os cálculos. Para a idade (ou a data) de entrada do servidor no mercado de trabalho, por exemplo, costuma-se estipular seus valores baseando-se em informações de transição para a vida adulta, como as estudadas por Santos (2018) e Vieira (2008), ou em experiências de outros grupos. Uma alternativa a essa prática seria, talvez, estimar o “tempo de contribuição do trabalhador” por meio da análise de sobrevivência, de modo que fossem acompanhadas, por um período qualquer, pessoas com idade igual ou superior a idade mínima de entrada no mercado de trabalho (18 anos), cuja ocorrência de falha se daria com a efetiva entrada no mercado de trabalho.

### 3.2.2 Idade de Concessão de Aposentadoria

Segundo Queiroz (2007), há uma tendência mundial de diminuição da idade mediana de aposentadoria. Matsuyama (1998), por sua vez, identificou tendências diferentes entre os países desenvolvidos e em desenvolvimento: nestes, os agentes economizam pouco e se aposentam tardiamente; naqueles, os agentes recebem renda alta quando jovens e se aposentam precocemente.

No Brasil, as reformas da previdência têm influenciado a decisão de aposentar-se por parte do servidor público – postergam sua saída e gozo de benefício, pois a EC nº 41/2003 retirou a paridade (direito a reajustes em sua aposentadoria idênticos aos de quem está na ativa) e a integralidade (direito à remuneração integral que recebia na ativa) para os novos admitidos; para os servidores admitidos antes da reforma foram criadas regras de transição (SILVEIRA; GOMES, 2017). Além disso, o abono de permanência devido ao servidor que tenha completado as exigências para aposentadoria voluntária e que opte por permanecer em atividade, estimula o trabalhador a postergar sua aposentadoria.

Assim, houve reflexos das reformas sobre a demanda por concessões de aposentadoria programadas – o servidor está se aposentando mais tarde – e a utilização da idade mínima de aposentadoria como premissa no cálculo atuarial é uma questão de conservadorismo e prudência, já que ela desconsidera o tempo de portergação da aposentadoria e subestima a idade de sua concessão. A partir dessa ideia, é possível estimar a idade de concessão de aposentadoria do servidor, conforme definição exposta

no primeiro parágrafo deste capítulo.

Destaca-se, ainda, que a idade de concessão de aposentadoria representa, bem como o RPPS em si, um dos itens das propostas de reformas na previdência, em conformidade com ANFIP (2016).

A discussão acerca da questão previdenciária no Brasil é antiga. Rezende (1984), por exemplo, identificou quatro óticas interpretativas relativas a este debate: para o Estruturalismo, a transição demográfica explica a crise previdenciária brasileira; para o Conjunturalismo, essa crise é consequência da crise econômica; o Assistencialismo atribui a crise à progressiva ampliação das responsabilidades da previdência no âmbito da seguridade social; o Moralismo responsabiliza a crise à má-fé e à corrupção.

Segundo Fagnani (2008), as diversas abordagens sobre as questões previdenciárias polarizam o debate em duas visões: as causas seriam internas (endógenas), ou seja, referentes ao próprio sistema previdenciário (suas regras, planos de benefícios, etc.) e o foco do saldo previdenciário recairia sobre os gastos; ou seriam externas (exógenas), isto é, viriam de fora do sistema (estagnação econômica, precarização do mercado de trabalho, etc.), com foco do saldo previdenciário recaindo sobre as receitas. Sendo assim, qualquer discussão que aborde apenas parte dessas causas naturalmente deixa uma lacuna.

Logo, quanto melhor for o entendimento acerca da idade de concessão de aposentadoria, conforme a importância atribuída pela ótica endógena, melhor a estimativa do resultado de uma avaliação atuarial. Neste sentido, estudos com foco no impacto de premissas sobre o cálculo atuarial, em especial, a idade de concessão de aposentadoria, podem nortear mudanças normativas relativas aos critérios de elegibilidade, justificativa adicional do presente trabalho.

### **3.3 Metodologias para Postergação da Aposentadoria e Permanência no Serviço**

Esta subseção apresenta os modelos utilizados no estudos dos mencionados tempos de falha.

O tempo de postergação da aposentadoria corresponde à diferença (em anos) entre a data do alcance da elegibilidade de aposentadoria e a data da concessão da aposentadoria. Sua análise, na prática, permite estimar probabilidades de o servidor postergar a aposentadoria, bem como os riscos de se aposentar postergadamente, a cada ano postergado, considerando a censura e o efeito de covariáveis.

O tempo de permanência no serviço público corresponde à diferença (em anos) entre a data de ingresso e a data de saída do servidor no serviço público. Sua análise, na prática, permite estimar probabilidades de o servidor permanecer no serviço público, bem como os riscos de sair, a cada ano trabalhado, considerando a censura e o efeito de covariáveis.

No Brasil, não se exigia um tempo mínimo de permanência no serviço público àqueles que completaram o tempo para aposentadoria até o dia 16 de dezembro de 1998. Já para os demais servidores que ingressaram no serviço público até esta data passou-se a exigir o tempo igual a 25 anos (pelas regras previstas na EC nº 47/05) ou 20 anos (pelas regras previstas EC nº 41/03); dos servidores que ingressaram até 31 de dezembro de 2003, passou-se a exigir o tempo igual a 20 anos; dos servidores que ingressaram no serviço público a partir de 01 de janeiro de 2004, passou-se a requerer o tempo igual a 10 anos.

A fim de investigar e obter estimativas acerca deste critério de elegibilidade para a aposentadoria, qual seja, o tempo de permanência no serviço público, apresentam-se neste capítulo as modelagens de sobrevivência não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica – na ausência (COLOSIMO; GIOLO, 2006) e presença de riscos competitivos (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012). A aplicação desses modelos constitui uma significativa contribuição do presente trabalho ao propor o uso de uma ferramenta pouco comum no tratamento da seguinte questão de interesse público: a previdência.

### 3.3.1 Análise Baseada em Risco

Pode-se pensar no risco como sendo a probabilidade, dado estar livre de eventos em  $t$ , de experimentar um evento dentro da próxima unidade de tempo ( $t + \Delta t$ ).

Essa informação, por vezes, pode ser mais relevante do que uma probabilidade de sobrevivência incondicional, sendo, desta forma, bem adaptada para analisar dados de sobrevivência (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012).

A Figura 3.1 apresenta o mais simples dos modelos multiestados de sobrevivência: o caso com apenas dois estados, em que o indivíduo está vivo ou morto. Nesse caso, tem-se interesse na variável aleatória “tempo até a ocorrência do evento ( $T$ )”, também chamado de “tempo de sobrevivência” ou “tempo de falha”.



Figura 3.1: Modelo multiestado de sobrevivência sem riscos competitivos.

Fonte: Adaptado de Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012).

No tempo inicial  $t = 0$ , o indivíduo se encontra no estado inicial 0, ou seja, está vivo. Transcorrido algum tempo  $T$ , o indivíduo se move para o estado absorvente<sup>2</sup> 1, ou seja, morre.

Para saber mais sobre  $T$ , é preciso registrar em qual estado (0 ou 1) o indivíduo se encontra para cada ponto no tempo, procedimento realizado por meio de processo estocástico. Assim, denota-se  $X_t$  para o estado ocupado pelo indivíduo no tempo  $t \geq 0$ , em que  $X_t \in \{0, 1\}$ .  $T$  é o menor tempo em que o processo não está mais no estado inicial 0, ou seja,  $T = \inf\{t : X_t \neq 0\}$ . Configura-se, assim, a relação entre o processo estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  e o tempo de falha  $T$  (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012), em que os dados observados,  $[0, \infty] \ni t \rightarrow X_t$ , são contínuos à direita. Além disso, tem-se que o registro de dados, para um indivíduo, para no tempo  $T$ , quando o mesmo atinge o estado 1 absorvente.

A análise estatística de  $T$  é baseada no risco  $\lambda(t)$  associado à distribuição de  $T$ :

$$\lambda(t) \times dt = P(T \in dt | T \geq t), \quad (3.6)$$

<sup>2</sup>Absorvente significa que o indivíduo não pode se deslocar para fora do estado 1 ou que esse tipo de transição não é modelada.

em que  $dt$  representa tanto o comprimento do intervalo de tempo infinitesimal (isto é, muito pequeno)  $[t, t + dt]$ , quanto o próprio intervalo. A função de risco acumulado  $A(t)$  é dada por  $A(t) = \int_0^t \lambda(u)du$ .

A função de distribuição de  $T$ , por sua vez, é  $F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - S(t) = 1 - \exp(-A(t))$ , para  $t > 0$ . Logo,  $S(t) = \exp(-A(t))$ , ou seja, é a função de sobrevivência de  $T$ . A partir da expressão (3.6), define-se o incremento do risco acumulado  $dA(u) = \lambda(u)du$ , utilizado na estimação da função de sobrevivência, via integral produto, conforme (3.7).

$$S(t) = \prod_{u=0}^t (P(T \geq u + du | T \geq u)) = \prod_{u=0}^t (1 - dA(u)), \quad (3.7)$$

$$\approx \prod_{k=1}^K (1 - \Delta A(t_k)) \approx \prod_{k=1}^K P(T > t_k | T > t_{k-1}), \quad (3.8)$$

em que  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{K-1} < t_K = t$  são  $k$  partições do intervalo de tempo  $[0, t]$ ; e  $\Delta A(t_k) = A(t_k) - A(t_{k-1})$ . A aproximação (3.8) da integral produto (3.7) resulta no estimador de Kaplan e Meier (1958) de  $S(t)$  quando se substitui o incremento do risco acumulado por um estimador adequado, como é o caso do estimador Nelson-Aalen do risco acumulado (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012).

Muitas vezes uma análise de dados é realizada sem que ocorram todos os tempos de falha. Nesses casos, só se sabe, sem precisão, que o verdadeiro tempo de falha é maior que determinado valor, deparando-se então com as observações incompletas conhecidas como censura. Assim, introduz-se um tempo de censura  $C$ , independente do tempo de evento  $T$  (modelo de censura aleatória), na análise, observando-se  $\{\min(T, C), 1(T \leq C)\}$ , ou seja, o mínimo entre o tempo de falha ( $T$ ) e o tempo de censura ( $C$ ), que assume valor 1 caso o tempo de falha seja menor do que o tempo de censura, ou valor 0, caso contrário.

A probabilidade de observar o tempo do evento no pequeno intervalo de tempo  $dt = [t, t + dt]$ , condicionado ao fato de que nenhum evento (nem censura) ocorreu antes de  $t$  ( $\min(T, C) \geq t$ ) – porque  $T$  e  $C$  são independentes –, é a mesma que na

ausência de censura:

$$\lambda(t) \times dt = P(T \in dt | T \geq t) = P(T \in dt, T \leq C | \min(T, C) \geq t).$$

Assim, verifica-se que a censura não perturbou o risco (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012). Como consequência, é possível estimar o risco acumulado dos dados, considerando-se a censura. Como antes, utiliza-se a integração produto para obtenção do estimador da função de sobrevivência. Inicialmente, estima-se o incremento  $\Delta A(t)$ ,

$$\Delta \hat{A}(t) = \frac{\text{número de indivíduos observados que falham em } t}{\text{número de indivíduos em risco antes de } t},$$

de modo a estimar o risco acumulado

$$\hat{A}(t) = \sum_{k=1}^K \frac{\text{número de indivíduos observados que falham em } t_k}{\text{número de indivíduos em risco antes de } t_k}, \quad (3.9)$$

se  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{K-1} < t_K = t$  é a sequência ordenada de tempos de falha observados;  $\hat{A}$  é o estimador de Nelson-Aalen do risco acumulado até o tempo  $t$ . A integral produto de  $\hat{A}$  é o estimador de Kaplan-Meier da função de sobrevivência

$$\hat{S}(t) = \prod_0^t (1 - d\hat{A}u) \approx \prod_{K=1}^K (1 - \Delta \hat{A}(t_k)). \quad (3.10)$$

Até agora, estimou-se a função de sobrevivência apenas num ponto de tempo. A equação (3.10), para cada tempo de eventos observados, produz uma estimativa da curva de sobrevivência por meio dos riscos acumulados estimados.

Em resumo, a análise de sobrevivência baseia-se em risco porque é possível estimar o risco acumulado na presença de dados censurados à direita. Basta usar a integração produto para recuperar a função de sobrevivência ou, de forma equivalente, a função de distribuição do tempo (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012).

Até aqui, considerou-se a presença da censura à direita na apresentação de algumas estimativas. Há, além disso, situações em que os indivíduos entram no estudo depois de  $t = 0$ . Nesses casos, os dados são chamados de “truncados à esquerda”. Deste

modo, além de  $T$  e  $C$ , denota-se por  $L$  o tempo truncado à esquerda de entrada (de um indivíduo no estudo), de modo que: o evento só será observado – e  $T$  será conhecido – se  $T$  ocorrer no intervalo  $(L, C]$ ; um indivíduo que experimenta um evento antes do tempo de truncamento esquerdo (ou seja,  $T \leq L$ ) nunca entrará no estudo; um indivíduo em estudo (ou seja, um indivíduo com  $L < T$ ) está censurado à direita se ele experimentar um evento após o tempo de censura (ou seja,  $C < T$ ).

Assume-se, no momento, a censura à direita aleatória e a restrição de truncamento à esquerda aleatória, isto é, que  $T$  é independente de  $(L, C)$ , de modo que

$$E(1(T \in dt, L < T \leq C) | \text{Passado}) = 1(L < t \leq \min(T, C)) \times \lambda(t)dt, \quad (3.11)$$

onde “Passado” significa conhecimento sobre todos os eventos de falha, truncamento ou censura antes de  $t$ . O ponto chave é que no processo em risco, um indivíduo está em risco logo após o tempo  $L$  de entrada no estudo, ou seja,  $t \rightarrow 1(L < t \leq \min(T, C))$ .

Para os casos que incluem o truncamento à esquerda, o estimador de Nelson-Aalen para o risco acumulado  $A(t)$  não se difere do já apresentado em (3.9).

Em relação à equação (3.11), tem-se que ela permite relaxar o pressuposto de censura aleatória à direita e truncamento aleatório à esquerda. A aplicação da teoria de martingale<sup>3</sup> e dos processos de contagem requer apenas que (3.11) contemple a possibilidade, mas não necessariamente exija a existência de censura à direita aleatória e/ou truncamento esquerdo aleatório (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012).

Como os dados de sobrevivência são frequentemente observados de forma incompleta, como consequência do truncamento esquerdo e da censura à direita, a análise de sobrevivência baseia-se em riscos (KLEIN et al., 2014).

---

<sup>3</sup>Representa os ruídos ao longo do tempo. Forma, em conjunto com os processos estocásticos (que contam diferentes tipos de evento ao longo do tempo), a base matemática por trás das estimativas de equações e propriedades de pequenas e grandes amostras, inclusive o risco acumulado. Para mais detalhes, ver o capítulo 2 de Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012).

### 3.3.2 Ausência de Riscos Competitivos

Nesta subseção se apresentam, na ausência de riscos competitivos – isto é, sob a abordagem tradicional –, o estimador não paramétrico de Kaplan-Meier, alguns modelos probabilísticos utilizados pela abordagem paramétrica, bem como o modelo semiparamétrico de Cox. Por se tratar de uma abordagem comum<sup>4</sup>, especialmente na medicina e engenharias, tais modelos são exibidos de forma sucinta e servirão para investigar tanto o tempo de postergação de aposentadoria do servidor, quanto o tempo de permanência no serviço público, independentemente da causa de sua saída.

Especificado o tempo de sobrevivência e algumas das funções relativas a ele (subseção 3.3.1), apresentam-se: o tempo médio (tm), ou seja, a esperança de sobrevivência no início da contagem ( $t = 0$ ),  $tm = \int_0^\infty S(t)dt$  (GARCIA; SIMOES, 2010); o valor médio residual (vmr), isto é, o tempo médio restante de sobrevivência (de  $t$  a  $\infty$ ), dada a sobrevivência em  $t$ ,  $vmr = \frac{\int_t^\infty S(u)du}{S(t)}$  (COLOSIMO; GIOLO, 2006).

O estimador de Kaplan-Meier para a função de sobrevivência é definido como

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_j < t} \left( \frac{n_j - d_j}{n_j} \right) = \prod_{j:t_j < t} \left( 1 - \frac{d_j}{n_j} \right),$$

em que o tempo  $t_j$ , com  $j = 1, \dots, k$ , apresenta tempos distintos e ordenados de falha, isto é,  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ;  $d_j$  é o número de falhas em  $t_j$ ;  $n_j$  é o número de indivíduos sob risco em  $t_j$ . Para detalhes sobre estimadores da variância e do intervalo de confiança da função de sobrevivência, consultar Colosimo e Giolo (2006).

Em relação aos modelos probabilísticos, apresentam-se algumas das principais distribuições de probabilidade utilizadas na análise estatística de dados de sobrevivência, conforme Colosimo e Giolo (2006): Exponencial ( $\lambda$ ), Weibull ( $\lambda, \gamma$ ), Log-normal ( $\mu, \sigma$ ), Log-logística ( $\lambda, \gamma$ ), Gama Generalizada ( $\lambda, \gamma, \tau$ ), com as respectivas funções de risco  $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{1}{\alpha},$$

---

<sup>4</sup>Por exemplo, os dois artigos mais citados em toda a literatura estatística no período de 1987 a 1989 foram os Kaplan e Meier (1958) e o de Cox (1972), conforme Colosimo e Giolo (2006).

$$\lambda(t) = \frac{\gamma}{\alpha^\gamma} t^{\gamma-1},$$

$$\lambda(t) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \exp\left[\frac{-1}{2} \left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\Phi\left(\frac{-\log(t) + \mu}{\sigma}\right)},$$

$$\lambda(t) = \frac{\gamma \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\gamma-1}}{\alpha \left[1 + \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\gamma\right]},$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha \Gamma(\tau)} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta\tau-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] Q\left[\tau, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]^{-1},$$

sendo  $\alpha$  e  $\sigma$  parâmetros de escala;  $\tau$  e  $\gamma$  parâmetros de forma;  $\mu$  parâmetro de locação;  $Q(\tau, a)$  é a função integral gama incompleta e  $\Gamma(\tau)$  é a função gama (SILVA, 2015).

Além dessas, apresenta-se a distribuição probabilística de Gompertz, conforme a notação de Jackson (2016), bastante utilizada para estimar a probabilidade associada à vida humana na fase adulta, cuja função de risco é

$$\lambda(t) = be^{at},$$

sendo  $a$  o parâmetro de forma e  $b$  é o parâmetro de escala (equivalente ao parâmetro  $1/\alpha$  da distribuição exponencial).

Destaca-se que a distribuição Exponencial, Weibull, Log-normal, Log-logística e Gompertz são casos particulares da distribuição Gama Generalizada.

O modelo semiparamétrico de Cox, por sua vez, pressupõe proporcionalidade dos riscos para realizar ajuste da função de sobrevivência, por meio da função de risco

$$\lambda(t|\mathbf{x}) = \lambda_0(t)g(\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}),$$

em que  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)'$ ;  $\boldsymbol{\beta}$  é o vetor de parâmetros associado às covariáveis;  $g(\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta})$  é uma função não negativa que deve ser especificada, tal que  $g(0) = 1$ .

A abordagem semiparamétrica de Cox se utiliza do método de estimação de verossimilhança parcial, quer seja exata, quer seja alguma de suas aproximações, de acordo

com a presença de empates – repetições dos tempos de falha. Seu número excessivo é fortemente associado a dados agrupados, um caso particular de censura intervalar.

A função de verossimilhança parcial pode ser aproximada pelo método de Breslow, Exato ou de Efron (COLOSIMO; GIOLO, 2006) e suas equações podem ser escritas como, respectivamente

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^k \frac{\exp[s'_i \boldsymbol{\beta}]}{\left[ \sum_{j \in R(t_i)} \exp[x'_j \boldsymbol{\beta}] \right]^{d_i}},$$

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^k \left[ \exp[s'_i \boldsymbol{\beta}] \sum_{P \in Q_i} \prod_{r=1}^{d_i} \left( \sum_{l \in R(t_i, p_r)} \exp[x'_l \boldsymbol{\beta}] \right)^{-1} \right],$$

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^k \frac{\exp[s'_i \boldsymbol{\beta}]}{\prod_{r=1}^{d_i} \left[ (\sum_{l \in R_i} \exp[x'_l \boldsymbol{\beta}]) - (r-1) d_i^{-1} (\sum_{l \in D_i} \exp[x'_l \boldsymbol{\beta}]) \right]}.$$

em que  $s'_i = \sum_{l \in D_i} x_l$  e  $D_i$  é o conjunto dos indivíduos que falham no tempo  $t_i$ .

Segundo Chalita, Colosimo e Demétrio (2002), a decisão sobre o caminho mais adequado a ser seguido para análise de dados empatados pode ser tomada com base na regra empírica para a proporção de empates  $pe$

$$pe = \frac{d - k}{n}, \tag{3.12}$$

em que  $n$  é o tamanho amostral,  $d$  é o número total de falhas e  $k$  é o número de falhas distintas. Para valores de  $pe$  abaixo de 20%, deve ser usado o modelo contínuo com aproximações para a função de verossimilhança parcial; para valores de  $pe$  entre 20% e 25%, pode ser usado o modelo contínuo com aproximações para a função de verossimilhança parcial; para valores de  $pe$  acima de 25%, deve ser usado um modelo discreto.

### 3.3.3 Presença de Riscos Competitivos

Esta subseção apresenta conceitos de riscos competitivos (ou concorrentes) sob a perspectiva de um modelo multiestado, com o intuito de generalizar muitas das definições expostas na subseção 3.3.1. Além disso, trata das Funções de Riscos Específicos

por Causa (FREC), das Funções de Incidência Acumulada (FIA), dos modelos proporcionais de Riscos Específicos por Causa e Subdistribuição de Riscos - e servirão para investigar o tempo de permanência do servidor no serviço público levando-se em conta a causa de sua saída.

Até agora, foi considerado um tempo  $T$  até a ocorrência de um único evento possível. Para além desse caso, é comum deparar-se com situações que analisam a ocorrência de mais de um evento, sendo esse o objeto de estudo dos MRC. Tais modelos, conforme discutido nesta subseção, consideram o tempo até o primeiro evento e o tipo do primeiro evento (KLEIN et al., 2014).

Assim, o modelo de dois estados de vida pode ser generalizado para o MRC, introduzindo vários estados absorventes concorrentes que representam os possíveis tipos de eventos de interesse (desfechos). Na perspectiva de multiestado, os eventos são modelados como transições entre os estados (KLEIN et al., 2014), sendo esse modelo representado na Figura 3.2, em que  $J$  é um número finito de riscos concorrentes, com os riscos de transição (ou funções de falha)  $\lambda_{01}(t)$  (risco de ocorrer a transição do estado 0 para o estado 1),  $\lambda_{02}(t)$  (risco de ocorrer a transição do estado 0 para o estado 2), ...,  $\lambda_{0J}(t)$  (risco de transição do estado 0 para o estado  $J$ ).

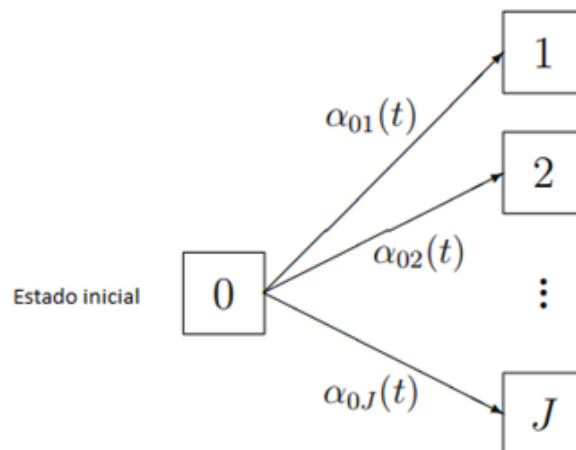


Figura 3.2: Modelo multiestado de risco competitivo com riscos específicos por causa.  
Fonte: Adaptado de Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012).

Para Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012), o tempo  $T$  de ocorrência de evento é o menor tempo em que o processo de riscos concorrentes não está mais no estado inicial

0;  $T = \inf\{t > 0 : X_t \neq 0\}$ ,  $X_t \in \{0, 1, 2, \dots, J\}$ . Além do tempo  $T$  de ocorrência de evento, os dados de riscos concorrentes consistem num segundo componente, o tipo de evento  $X_t$ , cujo  $X_T$  denota o estado absorvente inserido no tempo  $T$ . Ou seja, os dados completos de riscos concorrentes consistem em  $(T, X_T)$ .

Para Crowder (2012), em situações que envolvem os riscos competitivos clássicos, o resultado observado compreende  $T$ , o tempo até a falha, e  $j$ , a causa (o tipo ou o modo) de falha. A estrutura de probabilidade básica é, portanto, uma distribuição bivariada em que um componente  $j$  (que pode tomar um número fixo e pequeno de valores rotulados  $1, \dots, J$ ) é discreto e o outro,  $T$ , é contínuo. Diferencia, ainda, os riscos das causas: os riscos competem como causa, ou seja, utiliza-se o termo “risco” antes da falha; e “causa”, depois.

A observação do processo de riscos concorrentes  $(X_t)_{t \geq 0}$  está, em geral, sujeita a censura à direita e/ou truncamento à esquerda: se sujeita apenas ao tempo de censura à direita  $C$ , os dados observados serão  $(\min(T, C), 1(T \leq C) \times X_T)$ ; se também houver tempo de truncamento esquerdo  $L$ , os dados observados serão  $([L, \min(T, C)], 1(T \leq C) \times X_T)$ .

O comportamento estocástico do processo de riscos concorrentes é completamente determinado pelas FREC  $\lambda_{0j}(t)$  (KLEIN et al., 2014) – também chamados de funções de subrisco (CROWDER, 2012) –, sendo estas as principais quantidades em estudos que envolvem riscos competitivos (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012)

$$\lambda_{0j}(t) \times dt = P(T \in dt, X_T = j | T \geq t) = \frac{f(t, j)}{S(t)}, j = 1, \dots, J. \quad (3.13)$$

O índice  $0j$  denota o tipo de transição “saída do estado inicial 0 para o estado do evento concorrente  $j$ ”;  $\lambda_{0j}$ 's são os riscos específicos por causa (PRENTICE et al., 1978);  $f(t, j)$  é definida em (3.18). A interpretação de (3.13), é que  $\lambda_{0j}(t) \times dt$  é a probabilidade de um evento do tipo  $j$  acontecer no pequeno intervalo de tempo  $dt = [t, t + dt)$ , condicionada ao fato de que nenhum evento (de qualquer tipo) aconteceu antes de  $t$ . A expressão (3.13) pode ser reescrita na forma (DEMASI, 2000)

$$\lambda_{0j}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t, X_T = j | T \geq t)}{\Delta t}.$$

Para os modelos multiestados mais complexos, é útil reescrever (3.13) em termos do processo estocástico  $(X_t)_{(t \geq 0)}$ ,

$$\lambda_{0j}(t) \times dt = P(X_{(t+dt)-} = j | X_{t-} = 0), j = 1, \dots, J,$$

onde  $X_{t-}$  denota o estado ocupado pouco antes do tempo  $t$ . Como o truncamento esquerdo e a censura à direita são independentes, tem-se novo arranjo para (3.11), que agora incorpora a causa  $j$ :

$$E(1(T \in dt, X_T = j, L < T \leq C) | \text{Passado}) = 1(L < t \leq \min(T, C)) \times \lambda_{0j}(t)dt,$$

com  $j = 1, \dots, J$ . Um estimador Nelson-Aalen do risco acumulado específico por causa  $A_{0j}(t) = \int_0^t \lambda_{0j}(u)du$  é dado como

$$\hat{A}_{0j}(t) = \sum_{k=1}^K \frac{\text{número de eventos do tipo } j \text{ observados em } t_k}{\text{número de indivíduos em risco pouco antes de } t_k}, \quad (3.14)$$

com  $j = 1, \dots, J$ , onde a soma é completa em todos os tempos de eventos  $t_k$ . Aqui, observam-se dois fatos importantes: primeiro, o numerador em (3.14) representa os incrementos de um processo de contagem específico por causa; em segundo lugar, o risco definido em (3.14) exclui todos os eventos de tipo  $j$  anteriores, todos os eventos de censura anteriores e todos os eventos anteriores de um tipo  $\tilde{j}$ ,  $\tilde{j} \neq j$ . Durante a codificação em R, considera-se que os eventos  $\tilde{j}$  são censuras, enquanto os eventos  $j$  são eventos de interesse, o que permite estimar  $A_{0j}(t)$ . Observa-se que as censuras em eventos competitivos são informativas no sentido em que as estimativas de probabilidade dependem da computação de todos  $\hat{A}_{01}(t), \dots, \hat{A}_{0j}(t)$  (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012). Noutras palavras, numa análise de riscos concorrentes (em risco específico por causa), eventos concorrentes podem ser codificados como um evento de censura e isso deve ser feito para cada tipo de evento concorrente.

É crucial para qualquer análise de riscos concorrentes que ambos os riscos específicos por causa determinem completamente o comportamento estocástico do processo de riscos concorrentes (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012). Os  $\lambda_{0j}$ 's

resumem o risco por todas as causas  $\lambda_0(t)$ :

$$\lambda_0(t)dt = p(T \in dt|T \geq t) = (\lambda_{01}(t) + \lambda_{02}(t) + \dots + \lambda_{0J}(t))dt.$$

Assim, a soma de todos os riscos específicos por causa é igual ao risco correspondente ao tempo até um primeiro evento qualquer (KLEIN et al., 2014) e é consequência da aditividade usual de probabilidades (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012). O risco acumulado por todas as causas, logo, é  $A_0(t) = A_{01}(t) + A_{02}(t) + \dots + A_{0J}(t)$ .

A função de sobrevivência do tempo de espera  $T$  no estado inicial 0 é:

$$P(T > t) = S(t) = \exp(-A_0(t)) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_0(u)du\right). \quad (3.15)$$

A função de sobrevivência é uma função de ambos  $\lambda_{0j}$ 's, porque  $\lambda_0(t) = \lambda_{01}(t) + \lambda_{02}(t) + \dots + \lambda_{0J}(t)$ .

Muitas vezes, o interesse em riscos concorrentes concentra-se na FIA, também conhecida como função de subdistribuição (CROWDER, 2012), ou seja, na proporção esperada de indivíduos que experimentam determinado evento competitivo ao longo do tempo:

$$P(T \leq t, X_T = j) = F(t, j) = \int_0^t P(T > u-) \lambda_{0j}(u)du, j = 1, 2, \dots, J. \quad (3.16)$$

Existe uma interpretação intuitiva para o lado direito de (3.16), que aparece novamente quando se considera a estimativa não paramétrica: trata-se da integral do produto entre a probabilidade de o indivíduo estar no estado inicial 0 pouco antes de  $u$  e a probabilidade infinitesimal de fazer a transição  $0 \rightarrow j$  exatamente no momento  $u$ , de acordo com (3.14) (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012). Observa-se que a FIA é uma função de ambos  $\lambda_{0j}$ 's através de  $P(T > u-)$ . Seu complementar,

$$S(t, j) = P(T > t, X_T = j), \quad (3.17)$$

é conhecido como função de subsobrevivência, de modo que a soma dessas funções resulta numa probabilidade marginal, isto é,  $F(t, j) + S(t, j) = P(X_T = j)$ . A partir

de (3.16), é possível calcular a função subdensidade (CROWDER, 2012)

$$f(t, j) = -\frac{dS(t, j)}{dt}. \quad (3.18)$$

As funções de sobrevivência marginal e a densidade marginal de  $T$  podem ser calculadas a partir de (3.17) (CROWDER, 2012)

$$S(t) = \sum_{j=1}^p S(t, j) \quad \text{e} \quad f(t) = -\frac{dS(t)}{dt} = \sum_{j=1}^p f(t, j).$$

A FIA para o estado de evento 1 de interesse,  $P(T \leq t, X_T = 1)$ , bem como as demais FIAs (para os estados de eventos concorrentes), somam-se à função de distribuição por todas as causas,

$$P(T \leq t, X_T = 1) + P(T \leq t, X_T = 2) + \dots + P(T \leq t, X_T = J) = P(T \leq t). \quad (3.19)$$

Além do mais, as FIAs se aproximam de  $P(X_T = j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , à medida que o tempo  $t$  aumenta,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(T \leq t, X_T = j) = P(X_T = j), \quad j = 1, 2, \dots, J$$

assumindo que  $T$  seja um tempo finito.

### Estimação Não Paramétrica

Apresentam-se os principais estimadores não paramétricos, o estimador de Nelson-Aalen para os riscos acumulados específicos por causa e o estimador de Aalen-Johansen para as funções de incidência cumulativa.

Por serem funções de densidade,  $\lambda_{0j}$ 's podem assumir qualquer função não negativa (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012). Com o objetivo de facilitar os cálculos, estimam-se as quantidades acumuladas em vez de  $\lambda_{0j}$ 's. Para isso, são considerados  $n$  indivíduos em estudo com processo de riscos competitivos individuais  $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ ,  $X_t^{(i)} \in \{0, 1, 2\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . O tempo de falha do indivíduo  $i$  é  $T_i$  com causa de falha  $X_{T_i}^{(i)} = X_{T_i}$ . Assume-se que a censura à direita e o truncamento esquerdo são independentes.

Apresenta-se notação relativa à ocupação dos estados e as possíveis transições entre eles na Figura 3.3, conforme Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012). O  $i$ -ésimo processo de risco é  $Y_{0;i}(t) = 1(L_i < t \leq \min(T_i, C_i))$ , em que  $Y_{0;i}(t)$  representa se o indivíduo  $i$  está exposto ou não ao risco em  $t$ ; o indivíduo  $i$  pode experimentar um dos dois eventos concorrentes 1 e 2 no tempo  $T_i$ , fazendo a transição do estado 0 para o estado 1 (se o evento 1 ocorrer) ou para o estado 2 (se o evento 2 ocorrer).

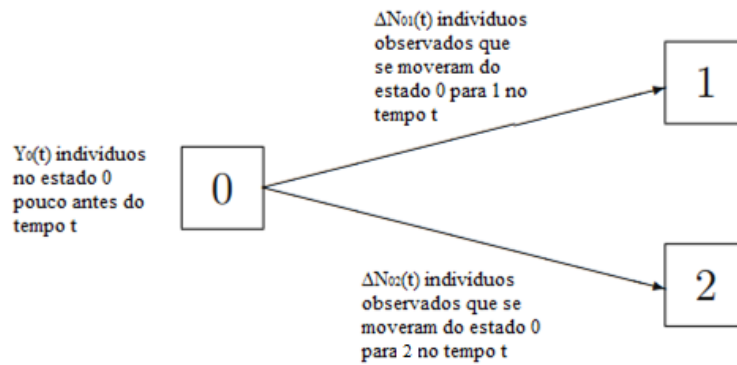


Figura 3.3: Modelo multiestado de risco competitivo para abordagem não paramétrica. Fonte: Adaptado de Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012).

Contando-se os tipos de eventos observados ao longo do tempo tem-se  $N_{01;i}(t) = 1(\min(T_i, C_i) \leq t, L_i < T_i \leq C_i, X_{(T_i)} = 1)$ , que é igual a 1 se o indivíduo  $i$  fizer a transição do estado 0 para o estado 1 durante o intervalo de tempo  $[0, t]$ ; caso contrário,  $N_{01;i}(t) = 0$ . Ou seja,  $N_{01;i}(t)$  representa se o indivíduo  $i$  migrou ou não do estado 0 para o estado 1 em  $t$ .

Agregando-se todos os indivíduos  $i = 1, \dots, n$ , tem-se que o número de indivíduos a serem observados, em risco, no estado inicial 0 imediatamente antes do tempo  $t$  é  $Y_0(t) = \sum_{i=1}^n Y_{0;i}(t)$ ; o número de indivíduos observados para fazer a transição  $0 \rightarrow j$  durante o intervalo de tempo  $[0, t]$  é  $N_{0j}(t) = \sum_{i=1}^n N_{0j;i}(t)$ , de modo que  $N_0(t) = N_{01}(t) + N_{02}(t)$  é o número de transições observadas para fora do estado inicial 0 (por todas as causas) durante o intervalo de tempo  $[0, t]$ ; também se escreve  $\Delta N_{0j}(t) = N_{0j}(t) - N_{0j}(t-)$  e  $\Delta N_0(t) = N_0(t) - N_0(t-)$  para os incrementos de  $N_{0j}(t)$  (isto é, o número de  $0 \rightarrow j$  transições observadas exatamente no tempo  $t$ ) e para os incrementos de  $N_0(t)$ , respectivamente.

Assim, apresenta-se o estimador de Nelson-Aalen para o risco específico acumulado

(perspectiva de riscos competitivos):

$$\widehat{A}_{0j}(t) = \sum_{\min(T_i, C_i) \leq t} \frac{\Delta N_{0j}(\min(T_i, C_i))}{Y_0(\min(T_i, C_i))} \quad (3.20)$$

Generalizando-se (3.20), tem-se que os estimadores adequados de Nelson-Aalen para outros riscos de transição acumulados (perspectiva de modelos multiestados),  $A_{lj}(t) = \int_0^t a_{lj}(u)du$ , podem ser escritos como

$$\widehat{A}_{lj}(t) = \sum_{k=1}^K \frac{\text{número de transições de } l \text{ para } j \text{ observados em } t_k}{\text{número de indivíduos em risco no estado } l \text{ pouco antes de } t_k}, \quad (3.21)$$

em que  $l, j = 0, \dots, J$ , com  $l \neq j$ , se  $k = 1, \dots, K$  é um índice que ordena os tempos de falha observados.

O risco estabelecido em 3.21 inclui tanto os indivíduos que entraram no estado  $l$  antes do tempo  $t_k$ , quanto os que ainda não se mudaram para fora do estado  $l$  ou foram censurados. Isso tem três implicações importantes: primeiro, com os estimadores de Nelson-Aalen específicos por causa, é possível codificar a computação de  $\widehat{A}_{lj}(t)$  via codificação das transições  $l \rightarrow \tilde{j}, l \neq j$ ; em segundo lugar, um indivíduo apenas contribui para o risco definido no estado  $l$  após a entrada no estado; em terceiro lugar, cada indivíduo em estado  $l$  e sob observação contribui para o conjunto de riscos. Essas três implicações são as consequências dos modelos multiestado sendo realizados como uma série de experimentos de riscos concorrentes (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012).

A soma dos estimadores de Nelson-Aalen do risco acumulado específicos por causa totaliza o estimador de Nelson-Aalen do risco acumulado por todas as causas  $A_0(t)$ :

$$\widehat{A}_0(t) = \widehat{A}_{01}(t) + \widehat{A}_{02}(t) = \sum_{\min(T_i, C_i) \leq t} \frac{\Delta N_0(\min(T_i, C_i))}{Y_0(\min(T_i, C_i))} \quad (3.22)$$

Estimadores da variância e do intervalo de confiança para  $\widehat{A}_{0j}$  e  $\widehat{A}_0$  são apresentados por Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012).

Devido à Equação (3.22), o estimador de Kaplan-Meier também é uma função determinística de ambos os estimadores de Nelson-Aalen específicos por causa. Em

riscos concorrentes, o estimador de Kaplan-Meier estima a função de sobrevivência do tempo de espera  $T$  no estado inicial 0.

$$\hat{P}(T > t) = \prod_{s=\min(T_i, C_i) \leq t} \left(1 - \Delta \hat{A}_0(s)\right) = \prod_{s=\min(T_i, C_i) \leq t} \left(1 - \frac{\Delta N_0(\min(T_i, C_i))}{Y_0(\min(T_i, C_i))}\right), \quad (3.23)$$

com estimadores da variância (fórmula de Greenwood) e intervalo de confiança da função de sobrevivência dados por Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012).

Derivou-se, finalmente, um estimador das funções de incidência cumulativa do estimador de Kaplan-Meier da função de sobrevivência. Recorde de (3.19) que as funções de incidência acumulada  $P(T \leq t, X_T = 1)$  e  $P(T \leq t, X_T = 2)$  somam a função de distribuição de todas as causas  $P(T \leq t)$ . Um estimador de  $P(T \leq t)$  é:

$$\begin{aligned} 1 - \hat{S}(t) &= 1 - \hat{P}(T > t) = 1 - \prod_{s=\min(T_i, C_i) \leq t} \left(1 - \frac{\Delta N_0(\min(T_i, C_i))}{Y_0(\min(T_i, C_i))}\right) \\ &= \sum_{s=\min(T_i, C_i) \leq t} \hat{P}(T > (\min(T_i, C_i)) -) \times \frac{\Delta N_0(\min(T_i, C_i))}{Y_0(\min(T_i, C_i))} \\ &= \sum_{s=\min(T_i, C_i) \leq t} \hat{P}(T > (\min(T_i, C_i)) -) \times \Delta \hat{A}_0(s), \end{aligned} \quad (3.24)$$

em que  $\hat{S}(t)$  é o estimador de Kaplan-Meier da função de sobrevivência no tempo  $t$ . A equação (3.25) representa o risco no tempo exato  $s$  por todas as causas (KLEIN et al., 2014); o lado direito de (3.25) se divide nos estimadores da função de incidência cumulativa, lembrando que  $N_0 = N_{01} + N_{02}$ :

$$\begin{aligned} \hat{P}(T \leq t, X_T = j) &= \sum_{s=\min(T_i, C_i) \leq t} \hat{P}(T > (\min(T_i, C_i)) -) \frac{\Delta N_0(\min(T_i, C_i))}{Y_0(\min(T_i, C_i))} \\ &= \sum_{s=\min(T_i, C_i) \leq t} \hat{P}(T > (\min(T_i, C_i)) -) \times \Delta \hat{A}_0(s), j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Os estimadores (3.25) são casos especiais do estimador de Aalen-Johansen num processo de Markov<sup>5</sup> não homogêneo no tempo e representam a probabilidade de ocorrer o evento do tipo  $j$  no tempo exato  $s$  (KLEIN et al., 2014).

<sup>5</sup>Em essência, indica que o curso futuro de um indivíduo depende do passado apenas através do tempo atual e do estado atualmente ocupado pelo indivíduo (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012).

Finalmente, estimadores da variância e do intervalo de confiança da função de incidência cumulativa são apresentados por Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012).

### Estimação Semiparamétrica

Apresentam-se nesta subseção os Modelos de Riscos Proporcionais. Por meio desses modelos, a variável resposta – na presença de censura à direita e truncamento esquerdo – pode depender de covariáveis, tratando-se dos modelos de regressão mais utilizados em casos de riscos concorrentes. Discutem-se os Modelos de Riscos Proporcionais Específico por Causa (MRPEC, já definidos na seção 3.3.3) e o de Subdistribuição (MRPSR, uma noção de risco diferente, a saber, o risco “associado” à função de incidência cumulativa de interesse).

Dentre os trabalhos que analisaram falhas relativas a questões previdenciárias, por meio de modelo de risco competitivo semiparamétrico, destaca-se o de Butler, Anderson e Burkhauser (1989), que desenvolveram e aplicaram modelo para examinar o risco de reentrada no mercado de trabalho e de morte dos trabalhadores após a sua aposentadoria.

O risco de falha relativo à causa  $j$  no tempo  $t$  é  $h(j, t)/h(t)$ ,  $t > 0$ . Se essa razão for independente de  $t$  para cada  $j$  então riscos proporcionais são obtidos (CROWDER, 2012).

Na primeira perspectiva, isto é, Risco Específico por Causa, cada evento é modelado separadamente e os demais eventos são considerados censura. Esse modelo mede o efeito bruto de uma covariável, num contexto em que os eventos competitivos não existem, sobre cada uma das causas específicas de saída do serviço público.

Esse modelo relaciona  $\lambda_{0j}$ 's com um vetor de covariáveis  $Z_i$  para o indivíduo  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , conhecido na origem do tempo, que são as covariáveis basais. Assume-se que os  $n$  processos de riscos concorrentes são condicionalmente independentes, dados os valores das covariáveis basais.

Os modelos proporcionais de riscos específicos por causa assumem que cada risco específico por causa segue um modelo de Cox (1972).

$$\lambda_{0j;i}(t; Z_i) = \lambda_{0j;0}(t) \times \exp(\beta_{0j} \times Z_i), \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.26)$$

em que  $\beta_{0j}$  é um vetor  $1 \times p$  de coeficientes de regressão,  $Z_i$  é um vetor  $p \times 1$  de covariáveis para indivíduo  $i$  e  $\lambda_{0j;0}(t)$  é uma função de risco de linha de base não especificada e não negativa. Também se escreve  $A_{0j;i}(t; Z_i) = \int_0^t \lambda_{0j;i}(u; Z_i) du$  para os respectivos riscos cumulativos específicos por causa,  $j = 1, 2, \dots, J; i = 1, \dots, n$ , considerando a presença de covariáveis.

Andersen et al. (1985) derivaram uma verossimilhança parcial, que é um produto em todos os tempos de eventos observados, todos os indivíduos e todos os tipos de riscos concorrentes (logo, assume-se independência). Assumindo efeitos específicos por causas  $\beta_{0j}, j = 1, 2, \dots, J$  e fatores de verossimilhança parcial em  $J$  partes, a  $j$ -ésima parte é algebricamente idêntica à verossimilhança parcial que se obtém ao tratar eventos concorrentes observados como censura (KLEIN et al., 2014). Como consequência, é possível usar qualquer rotina de Cox num pacote de *software* estatístico, para ajustar um modelo de Cox ao  $j$ -ésimo risco específico por causa, codificando tanto os eventos de censura usuais, quanto outros eventos concorrentes observados como um evento de censura. Escrevendo  $\hat{\beta}_{0j}$  para o estimador de  $\beta_{0j}, j = 1, 2, \dots, J$  obtido pela maximização da verossimilhança parcial, a causa específica cumulativa prevista para um vetor covariável igual a  $z$  é  $\hat{A}_{0j}(t; Z) = \hat{A}_{0j;0}(t) \times \exp(\hat{\beta}_{0j} \times Z)$  (KLEIN et al., 2014). Reitera-se que uma análise da Cox na presença de riscos concorrentes permanece incompleta, desde que essa abordagem não tenha sido aplicada a todos os riscos concorrentes.

Às vezes, pode-se desejar modelar um efeito comum de uma covariável em ambos os riscos específicos por causa. Portanto, é útil reformular (3.26) com apenas um vetor  $\beta$ , que contém todos os coeficientes de regressão e não depende do tipo de evento, e vetores específicos por causa de covariáveis  $Z_{0j;i}$ :  $\lambda_{0j;i}(t; Z_i) = \lambda_{0j;0}(t) \times \exp(\beta \times Z_{0j;i}), j = 1, 2; i = 1, \dots, n$ .

Na ausência de risco competitivo, os modelos se reduzem a um modelo de sobrevivência de Cox padrão, o que permite fazer uma interpretação direta em termos de probabilidade de sobrevivência. A interpretação, contudo, torna-se mais complicada na presença de riscos concorrentes: o aumento da ocorrência de uma falha não é ne-

cessariamente resultado do aumento do respectivo risco específico por causa; ele pode ser provocado pela diminuição do risco específico da causa concorrente.

Dificuldades interpretativas como essas levaram à modelagem de riscos de subdistribuição, que oferece uma síntese das análises de riscos específicos. Os efeitos que uma covariável basal exerce sobre os riscos específicos por causa são, desse modo, resumidos em termos de um único efeito, numa função de incidência cumulativa. A ideia-chave é introduzir uma nova noção de risco para o evento de interesse, o risco de subdistribuição, que estabelece uma correspondência um-para-um com a FIA.

A abordagem de Fine e Gray (1999) considera um tempo de subdistribuição até a ocorrência de certo risco competitivo, por exemplo, do tipo 1,  $\tilde{T} = \inf \{t > 0 | X_t = 1\}$ . Sugeriram, então, o ajuste de um modelo de Cox por meio do risco de subdistribuição

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt} \log(1 - P(T \leq t, X_T = 1)) = \frac{P(T > t)}{1 - P(T \leq t, X_T = 1)} \lambda_{01}(t).$$

O risco de subdistribuição  $\lambda(t)$ , por sua vez, é necessário para preencher

$$P(T \leq t, X_T = 1) = F(t, j) = 1 - S(t, j) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right), \quad (3.27)$$

de acordo com (3.15). A expressão (3.27), de acordo com Beyersmann, Allignol e Schumacher (2012), é válida quando

$$\lambda(t) \times dt = \frac{P(T \in dt, X_T = 1)}{1 - P(T \leq t, X_T = 1)}.$$

Também decorre das representações (3.16) e (3.27) que

$$\lambda_{01}(t) = \left(1 + \frac{P(T \leq t, X_T = 2)}{P(T > t)}\right) \times \lambda(t). \quad (3.28)$$

A interpretação de (3.28) é que o risco de subdistribuição para o evento do tipo 1 é ponderado, em comparação com o risco específico da causa  $\lambda_{01}(t)$ , pelo tempo e pelos eventos concorrentes (KLEIN et al., 2014). Assim, (3.27) implica que

$$P(X_T = 1) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right) = 1 - P(X_T = 2).$$

Esses resultados medem o efeito direto sobre FIA do tipo 1 (KLEIN et al., 2014). A função de incidência cumulativa para o evento do tipo 1, conforme (3.16), é função de todos os riscos específicos por causas (BEYERSMANN; ALLIGNOL; SCHUMACHER, 2012). Supondo que apenas dois riscos concorrem, tem-se:

$$P(T \leq t, X_T = 1) = \int_0^t \exp\left(-\int_0^u \lambda_{01}(\nu) + \lambda_{02}(\nu)(d\nu)\right) \lambda_{01}(u) du.$$

Na modelagem proporcional dos riscos de subdistribuição (FINE; GRAY, 1999), tem-se

$$\lambda_i(t; Z_i) = \lambda_0(t) \times \exp(\gamma \times Z_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

em que  $Z_i$  é similar a (3.26);  $\gamma$  é um vetor de  $1 \times p$  de coeficientes de regressão; e  $\lambda_0(t)$  é uma função de risco de subdistribuição de linha de base não especificada e não negativa. Os resultados têm uma interpretação de probabilidade direta em termos da função de incidência cumulativa. Em geral,  $\gamma \neq \beta_{0j}, j = 1, 2$ .

Sua função de verossimilhança parcial, em relação a do Modelo de Cox padrão, diferencia-se principalmente por causa da definição do grupo sob risco, ou seja, da quantidade de indivíduos  $l$  no estado 0 pouco antes do tempo  $t$  ( $Y_{(0;i)}(t)$ ). A população em risco, que agora inclui além de todos os indivíduos que não sofreram qualquer evento, todos os que sofreram o evento competitivo, e que até a censura administrativa (aquela em que a censura ocorre pelo fim do período de acompanhamento) não saem do conjunto de risco. Esses indivíduos não contribuem da mesma forma que os demais, atribuindo-se aos que sofreram um evento competitivo um peso que muda a cada tempo  $t_j$  no qual ocorre o evento de interesse. Assim, o peso  $w_l(t_j)$  de cada indivíduo  $l$  ( $l = 1, \dots, n$ ) a cada momento  $t_j$  pode ser definido como (CARVALHO et al., 2011),

$$w_l(t_l) = \begin{cases} 1, & \text{se } l \text{ não tiver sofrido evento ou censura} \\ \frac{\hat{G}_{km}(t_j)}{\hat{G}_{km}(t_i)}, & \text{se } l \text{ sofreu evento competitivo em } t_i < t_j \\ 0, & \text{quando o indivíduo é retirado do estudo,} \end{cases} \quad (3.29)$$

em que  $t_i$  é o tempo de ocorrência do evento competitivo;  $t_j$  é o tempo de ocorrência do evento de interesse;  $\hat{G}_{km}(t)$  é a função de sobrevivência não paramétrica.

Calcula-se, agora, o **peso**  $w_l(t_j)$ , apresentado em (3.29), por meio do pacote `ms-tate` (WREEDE; FIOCCO; PUTTER, 2011), função `crprep`. Assim, indivíduos que sofreram o evento competitivo antes da ocorrência de qualquer evento de interesse nos pontos  $t_j > t_i$  permanecem no grupo de risco (mas não contribuem de maneira integral para a função de verossimilhança) e recebem um peso sempre que ocorre um evento de interesse.

Deste modo, somente a análise de risco de subdistribuição permite uma interpretação de probabilidade direta. As análises dos riscos específicos por causa também permitem uma interpretação de probabilidade, mas a interpretação requer maior cuidado (CARVALHO et al., 2011). Tais modelagens abordam diferentes aspectos dos dados; além disso, o risco de subdistribuição  $\lambda(t)$  está para a função de incidência acumulada assim como o risco específico por causa  $\lambda_{jl}(t)$  está para a função de distribuição de  $T$ .

### 3.3.4 Avaliação e Seleção de Modelos

Nesta seção se apresentam algumas ferramentas gráficas e testes com o intuito de verificar a adequabilidade, comparar e selecionar modelos.

Em relação ao ajuste do modelo de sobrevivência não paramétrico, é comum a comparação de suas curvas entre os níveis de uma variável categórica, a fim de elucidar se há ou não diferença entre as sobrevivências estimadas. Dentre os testes que se propõem a isso, o teste *logrank*<sup>6</sup> é o mais utilizado. Trata-se de um teste aproximado para a igualdade das duas funções de sobrevivência baseada na estatística

$$T = \frac{\left[ \sum_{j=1}^k (d_{2j} - w_{2j}) \right]^2}{\sum_{j=1}^k (V_j)_2},$$

sendo  $d_{2j}$  o número de mortes do segundo grupo pela causa  $j$ , que segue distribuição hipergeométrica, numa tabela de contingência;  $w_{2j}$  é a média de  $d_{2j}$ ;  $(V_j)_2$  é a variância de  $d_{2j}$ ;  $T$ , sob a hipótese nula  $H_0 : S_1(t) = S_2(t)$ , tem uma distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade para grandes amostras. Para maiores detalhes, consultar

---

<sup>6</sup>Teste adequado quando as populações possuem taxas de falhas proporcionais.

Colosimo e Giolo (2006).

Em relação aos ajustes dos modelos de sobrevivência paramétricos, é comum a utilização de métodos subjetivo (gráfico) e objetivo (teste) para seleção do modelo (COLOSIMO; GIOLO, 2006).

Quanto ao subjetivo, as curvas de sobrevivência referentes à estimação de cada uma das distribuições são comparadas com o ajuste não paramétrico de Kaplan-Meier. Quanto mais próximas àquelas estão desta, melhor o ajuste paramétrico.

Quanto ao objetivo, utiliza-se do Teste de Razão de Verossimilhança (TRV), um método (absoluto) que não verifica se um ajuste é melhor que outro; ele informa apenas se o ajuste, por si só, é ou não adequado ( $H_0$ : o modelo de interesse é adequado, rejeitada caso valor-p  $\leq 0,05$ ).

$$TRV = 2[\log L(\hat{\theta}_G) - \log L(\hat{\theta}_M)],$$

$L(\hat{\theta}_G)$  é a verossimilhança do modelo generalizado (tal que os modelos de interesse sejam casos particulares);  $L(\hat{\theta}_M)$  é a verossimilhança do modelo de interesse. Sob  $H_0$ ,  $TRV$  tem uma distribuição (aproximadamente) qui-quadrado com número de graus de liberdade igual a diferença do número de parâmetros ( $\hat{\theta}_G$  e  $\hat{\theta}_M$ ) dos modelos comparados. Isso quer dizer que sua operacionalização só é permitida caso os modelos sejam encaixados, ou seja, casos particulares de um modelo mais geral (COLOSIMO; GIOLO, 2006). Como as distribuições Exponencial, Weibull, Log-normal, Gompertz e Log-logística são casos particulares de uma Gama Generalizada, elas são utilizadas.

Em relação ao ajuste do modelo de sobrevivência semiparamétrico, qual seja, do Modelo de Cox, é necessário verificar o pressuposto de proporcionalidade dos riscos para que seus resultados sejam críveis (COLOSIMO; GIOLO, 2006). Isso é possível por meio do método com coeficiente dependente do tempo, ou seja, dos Resíduos de Schoenfeld (1982). Considere que se o  $i$ -ésimo indivíduo com vetor de covariáveis  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})'$  é observado falhar, tem-se para ele um vetor de resíduos de

Schoenfeld  $\mathbf{r}_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{ip})$ . Cada componente  $r_{iq}$ , para  $q = 1, \dots, p$ , é definido por:

$$r_{iq} = x_{iq} - \frac{\sum_{j \in R(t_i)} x_{jq} \exp \{x'_j \hat{\beta}\}}{\sum_{j \in R(t_i)} \exp \{x'_j \hat{\beta}\}},$$

sendo  $\hat{\beta}$  o estimador do vetor de coeficientes;  $R(t_i)$  é o conjunto dos índices das observações sob risco no tempo  $t_i$ . Assim, os resíduos são definidos para cada falha, mas não são definidos para censuras. Para cada uma das  $p$  covariáveis consideradas, tem-se, para o indivíduo  $i$ , um correspondente resíduo de Schoenfeld.

Outras ferramentas podem ser usadas para confrontar ajustes paramétricos e semi-paramétricos, tal qual o Critério de Informação Akaike (AIC). O AIC é um método relativo (comparativo), em que o modelo com menor valor de AIC é preferível. É calculado pela expressão

$$AIC_p = -2 \log(L_p) + 2[(p + 1) + 1],$$

em que  $L_p$  é a verossimilhança do modelo e  $p$  é o número de covariáveis consideradas no modelo. O AIC é diretamente proporcional à Soma dos Quadrados dos Erros e penaliza o modelo que possui muitas variáveis.

Depois de estimada a idade de concessão de aposentadoria, realiza-se um teste de aderência para investigar se os anos postergados estimados e observados possuem a mesma distribuição probabilística. No meio atuarial, é comum a utilização do teste Kolmogorov-Smirnov (KS) para testar hipóteses análogas: para duas amostras, comprova se ambas foram extraídas da mesma população.

O teste KS, segundo Bravo (2007), e se fazendo as devidas adaptações, pode ser usado para comparar as distribuições dos anos postergados esperados ( $D^{esp} = \sum_{k=x_{min}}^{x_{max}} d_k^{esp}$ ) e observados ( $D^{obs} = \sum_{k=x_{min}}^{x_{max}} d_k$ ) entre as idades  $x_{min}$  e  $x_{max}$ :

$$F(x) = \frac{1}{D^{obs}} \left( \sum_{k=x_{min}}^x d_k \right), G(x) = \frac{1}{D^{eps}} \left( \sum_{k=x_{min}}^x d_k^{esp} \right),$$

em que  $d_k$  é o número de anos postergados de aposentadoria observados entre as idades  $k$  e  $k + 1$ ;  $d_k^{esp}$  é o número de anos postergados de aposentadoria esperados entre as

idades  $k$  e  $k + 1$ . A estatística do teste ( $W^{KS}$ ) pode ser escrita conforme

$$W^{KS} = Dev^{max} \left( \frac{D^{obs} \times D^{esp}}{D^{obs} + D^{esp}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$Dev^{max} = \text{Max}_x |F(x) - G(x)|$  é a diferença máxima entre as duas distribuições.  $W^{KS}$  tem distribuição conhecida, de modo que  $P(W^{KS})$  pode ser calculada e tabelada. Fixado o nível de significância, compara-se  $W^{KS}$  com o respectivo valor crítico e se conclui sobre a rejeição ou não da hipótese nula, quer seja, há igualdade de distribuições entre o número de anos postergados observados e esperados.

# Capítulo 4

## Resultados e Discussões

### 4.1 Apresentação dos Dados

Nesta tese, utilizaram-se dois conjuntos de dados. O primeiro, corresponde à série histórica de tábuas de vida (para ambos os sexos) sintetizada e disponibilizada pelo IBGE, que compreende o período de 1998 a 2016. Nessas, são apresentadas, dentre outras variáveis, as probabilidades de morte (mortalidade) entre duas idades exatas para pessoas com até 80 anos de idade. A partir dessa informação, o presente trabalho promove a extrapolação da mortalidade para além dos 80 anos, bem como a estimação para anos seguintes, considerando os efeitos da idade, do tempo e da coorte.

Para obtenção do segundo conjunto de dados, recorreu-se, inicialmente, a RPPSs dos estados do Rio Grande do Norte e da Paraíba. Depois de contato inicial e posterior envio de ofícios a cada um deles, para formalizar as solicitações, apenas um RPPS enviou resposta positiva. Assim, caracterizou-se o estudo de caso e o segundo conjunto de dados, utilizado para fins de objetivo geral, foi disponibilizado pelo Instituto de Previdência dos Servidores Municipais de Cabedelo/PB (IPSEMC).

O IPSEMC, vencedor do Prêmio de Boas Práticas de Gestão de RPPS em 2010, 2011, 2012, 2013 e 2015, o IPSEMC é uma autarquia do município de Cabedelo/PB com personalidade jurídica própria, que dispõe de autonomia administrativa, financeira e patrimonial e é responsável pela execução da política de Previdência e Assistência dos Servidores de tal Município (IPSEMC, 2017), desde 1993.

Em 31 de dezembro de 2016, o IPSEMC possuía o CRP Administrativo, ou seja,

preenchia os critérios exigidos pela Secretaria de Previdência, tais como: Demonstrativo das Receitas e Despesas; Avaliação Atuarial; Demonstrativo Financeiro relativo às aplicações dos recursos; Comprovantes de Repasses dos valores das contribuições sociais (servidor e patronal), entre outros. Como os CRPs são válidos por 180 dias, o instituto precisa comprovar o atendimento aos critérios de forma periódica.

Foram disponibilizadas informações sobre todos os seus segurados (e ex-segurados), um total de 2630 pessoas (2216 servidores ativos, 366 inativos e 48 falecidos), registrados de 1960 a 2016, de acordo com o Quadro 4.1.

<b>Nome da Variável</b>	<b>Tipo de variável</b>	<b>Nível</b>
<b>Data de Nascimento</b>	<b>Quantitativa</b>	—
<b>Data de Ingresso no Serviço Público</b>	<b>Quantitativa</b>	—
<b>Data de Saída no Serviço Público</b>	<b>Quantitativa</b>	—
<b>Status</b>	<b>Qualitativa</b>	<b>Ativo, Não ativo</b>
<b>Tipo de Saída (Causa)</b>	<b>Qualitativa</b>	<b>Morte, Tempo de Contribuição, Idade, Compulsória, Invalidez</b>
Carreira	Qualitativa	Professor, Outros
Regras de Saída	Qualitativa	Admitidos até 1988, Entre 1988 e 1998, Após 1998
Sexo	Qualitativa	Feminino, Masculino

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Quadro 4.1: Dados sobre os servidores, IPSEMC, 2016.

As variáveis negritadas são consideradas fundamentais e caracterizam os modelos de análise de sobrevivência (sem e com riscos competitivos), já que fornecem para cada unidade observacional (servidor público): o índice de falha  $\delta$  (Status do Servidor), que indica se o servidor é ativo (0) ou não (1); a causa  $J$  ou Tipo de Saída (por morte, aposentadoria por tempo de contribuição, aposentadoria por idade, aposentadoria compulsória ou aposentadoria por invalidez). Não houve registro de aposentadoria especial, ou seja, benefício previdenciário concedido ao trabalhador que exerce atividades laborais exposto a agentes nocivos (que podem causar algum prejuízo à sua saúde e integridade física ao longo do tempo).

Aqui, em análises distintas, observa-se o tempo até a ocorrência de dois eventos

de interesse (dois tempos de falha)  $T$ , obtidos indiretamente por meio das variáveis expostas no Quadro 4.1:

- A variável-resposta denominada tempo de postergação da aposentadoria, determinada pela diferença entre a idade de concessão de aposentadoria (Data de Saída no Serviço Público subtraída da Data de Nascimento) e a idade presumida de aposentadoria (determinada pela Data de Ingresso no Serviço Público). Como o servidor elegível só pode postergar sua aposentadoria voluntária, a ocorrência de aposentadoria compulsória constitui uma censura.
- A variável-resposta intitulada tempo de permanência do servidor no serviço público, dada pela diferença entre a data de Saída no Serviço Público e a Data de Ingresso no Serviço Público. Aqui, ocorre a censura do Tipo I (administrativa), em que o acompanhamento (de janeiro de 1960 a dezembro de 2016, em anos) se encerra e o servidor não apresenta a falha de interesse. Tratam-se de censura não informativa, ou seja, supõe-se não existir correlação entre os tempos de falha ( $T$ ) e a censura ( $C$ ) ( $T$  e  $C$  são independentes).

Na análise dos tempos de falha, as modelagens podem considerar a presença de até três covariáveis relativas ao servidor, com o intuito de verificar se exercem efeito significativo sobre o tempo até a saída do servidor: Sexo (possui dois níveis, Masculino e Feminino), Carreira (possui dois níveis, Professor e Outros) e Regra de saída. Esta permite considerar todo o grupo de servidores registrados durante o período compreendido entre 1960 e 2016, já que seus três níveis – Admitidos até 21/09/1988, Admitidos entre 22/09/1988 e 15/12/1998, Admitidos após 16/12/1998 – inclui nos modelos ajustados, e de forma qualitativa, o efeito do tempo. Esses níveis foram estipulados com base nas datas de promulgação da CF e da EC nº 20/1998. A covariável Idade de Entrada foi descartada da modelagem, já que sua exclusão melhorou os ajustes. Assim, priorizou-se o bom ajuste dos tempos referidos em detrimento do efeitos exercidos pelas covariáveis, apenas um *plus*.

Finalmente, para a análise da mortalidade, do tempo de postergação da aposentadoria e do tempo de permanência no serviço público, utilizou-se o software R 3.4.0, com

script disponível no Apêndice F; para os cálculos atuariais, o Microsoft Excel 2010.

## 4.2 Análise da Mortalidade

Esta subseção apresenta resultados pertinentes à mortalidade. A partir da série histórica de tábuas disponibilizadas pelo IBGE, referente ao período de 1998 a 2016, para ambos os sexos, extrapolaram-se e se projetaram mortalidades. Elas foram analisadas para que se pudesse comparar o impacto de sua variação (sobre as reservas) com àquele proporcionado pela variação do tempo postergado de aposentadoria.

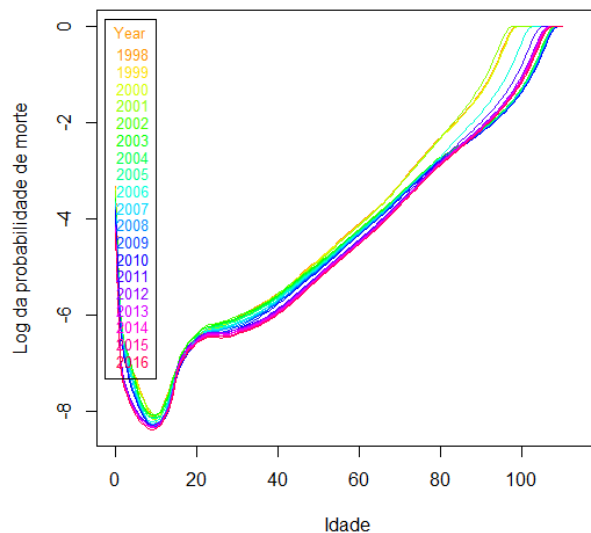


Figura 4.1: Logaritmo da probabilidade de morte ( $\log({}_m q_x)$ ) por idade da tabela de mortalidade IBGE (ambos os sexos), Brasil, 1998-2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IBGE (2016).

O log da probabilidade de morte por idade das referidas tábuas é apresentado na Figura 4.1. Constata-se que a probabilidade de morte por idade estimada se reduz a cada ano, principalmente para as idades mais avançadas, caracterizando o ganho de longevidade.

As mortalidades extrapoladas, conforme Castro (2018), foram utilizadas para previsão os dois métodos previamente discutidos: a escala AA e a extensão do método de Lee-Carter.

Assim, a Tabela A.1 (Apêndice A) apresenta as mortalidades estimadas para os anos de 2017 e 2018, por idade, a partir da Escala AA, por meio da expressão 3.4.

Em seguida, realizou-se o ajuste dos modelos de mortalidade por meio de uma rotina de regressão que comporta seis variantes da classe de estruturas do modelo de Lee-Carter (por meio de método de Newton-Raphson iterativo), viabilizada pelo pacote *ilc* do R (BUTT; HABERMAN; SHANG, 2014).

Estimou-se a Regressão Família Lee-Carter Iterativa, cujo modelo, apresentado na seção 3.1.3, é  $\ln(m_{x,t}) = a(x) + b_1(x) \times k(t)$ , com estrutura de erro Poisson, segundo a modelagem proposta por Renshaw e Haberman (2003). Tal modelo estima  $a_x$  (para cada idade),  $b_x$  (para cada idade) e  $k_t$  (para cada ano).

Obteve-se convergência em 7 iterações. O “deviance” médio basal é igual a 6,739 de um total de 41,987. A Figura 4.2 apresenta os principais resultados da regressão, os efeitos de idade, período e coorte, além dos efeitos de interação de períodos e de coorte, cada um associado a um parâmetro do Modelo de Lee-Carter Generalizado. Neste caso, não há efeito de coorte com o passar da idade e dos anos de nascimento, representando o caso particular Modelo de Lee-Carter Padrão. Além disso, verifica-se que  $k_t$  suaviza a probabilidade de morte.

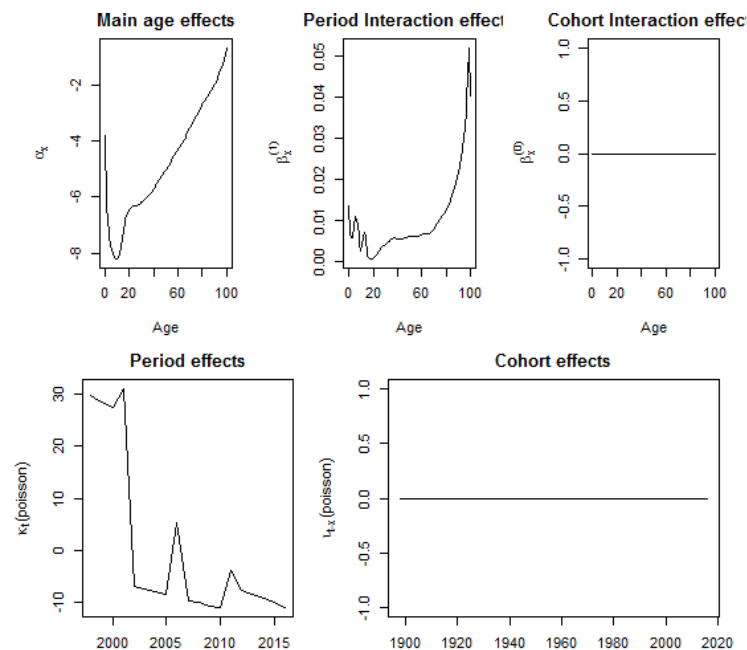


Figura 4.2: Regressão Lee-Carter Período-Idade para a tábua IBGE (ambos os sexos) Brasil, 1998-2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IBGE (2016).

A Figura 4.3 apresenta previsão para o logaritmo das probabilidades de morte, de

2017 até 2026. Assim, é possível constatar uma suavização de taxas, ou seja, ganho de longevidade.

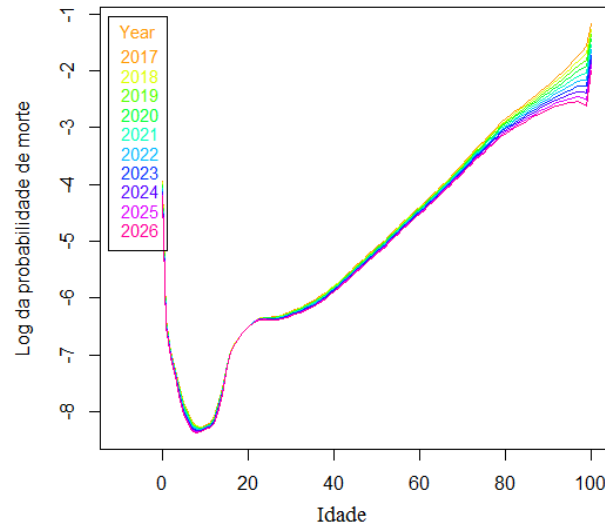


Figura 4.3: Logaritmo da probabilidade de morte prevista pelo modelo de Lee-Carter estendido para a Tábua IBGE (ambos os sexos), Brasil, 2017-2026.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IBGE (2016).

A Tabela A.2 (Apêndice A) apresenta as mortalidades estimadas para 2017 e 2018, por idade, a partir do modelo LC ajustado. O modelo ajustado truncou as estimativas para até 100 anos de idade e subestimou a mortalidade, para as idades mais avançadas, quando comparado à Escala AA. Sua aplicação nos cálculos atuariais seria, portanto, inapropriada, visto que arrecadaria menos que o necessário para garantia de solvência.

A diminuição das mortalidades aumentam a expectativa de sobrevida, fato constatado na Tabela 4.1, que exhibe a projeção do tempo de vida média residual do grupo analisado (idades 0, 60 e 80 anos). Por meio de sua visualização, é possível perceber que o tempo restante de vida aumentará para todas as idades; os maiores aumentos, em termos relativos ocorrerão para os idosos.

Tabela 4.1: Projeções, pelo modelo de Lee-Carter estendido, para o tempo de vida média residual dos brasileiros, 2017-2026.

Ano	0 anos		60 anos		80 anos	
	Absoluto	Relativo	Absoluto	Relativo	Absoluto	Relativo
2017	74,39	-	22,19	-	10,20	-
2018	74,75	0,4784%	22,49	1,3630%	10,52	3,0886%
2019	75,11	0,4907%	22,81	1,4067%	10,85	3,1780%
2020	75,49	0,5046%	23,14	1,4548%	11,21	3,2751%
2021	75,88	0,5204%	23,49	1,5080%	11,59	3,3804%
2022	76,29	0,5380%	23,86	1,5666%	11,99	3,4941%
2023	76,72	0,5579%	24,24	1,6311%	12,43	3,6166%
2024	77,16	0,5802%	24,66	1,7021%	12,89	3,7479%
2025	77,63	0,6053%	25,10	1,7800%	13,39	3,8882%
2026	78,12	0,6333%	25,56	1,8655%	13,93	4,0375%

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IBGE (2016).

A Figura 4.4 ilustra graficamente as informações da Tabela 4.1. Os resultados seguem a tendência apontada por Li, Lee e Gerland (2013), que destacou a existência de rotação, isto é, maior redução de mortalidade entre os mais velhos que entre os mais novos.

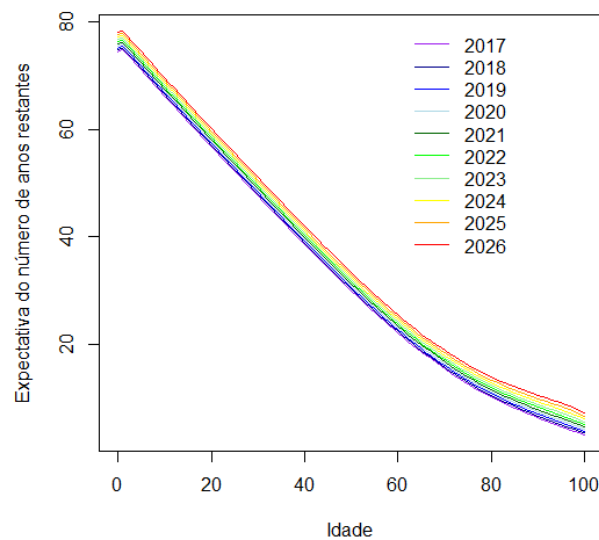


Figura 4.4: Projeções, pelo modelo de Lee-Carter estendido, para o tempo de vida média residual dos brasileiros, 2017-2026.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IBGE (2016).

O Apêndice A complementa esta análise. Encerrada a análise da mortalidade, apresenta-se, na subseção 4.3, a análise do tempo de postergação da aposentadoria.

## 4.3 Análise do Tempo de Postergação da Aposentadoria

Quando o tempo de postergação da aposentadoria constitui o tempo de falha, a ocorrência de falha representa a efetiva aposentadoria do servidor, desde que o tempo seja acompanhado e contabilizado a partir da sua idade presumida de aposentadoria, independentemente da causa. Com o principal propósito de estimar os anos postergados de aposentadoria, ou seja, quanto tempo leva para que o servidor elegível de fato exerça o seu direito à aposentadoria programada, nessa análise foram considerados 238 servidores inativos aposentados por aposentadoria por tempo de contribuição, por idade e compulsória (aposentadorias programadas), excluindo-se, portanto, aqueles aposentados por invalidez (57). Como o participante só posterga aposentadoria voluntária, a ocorrência da aposentadoria compulsória constitui censura, cuja taxa, neste caso, é de 10,52% dos casos; como alguns servidores não postergaram a sua aposentadoria, isto é, aposentaram-se assim que possível, existe truncamento (à esquerda).

Tabela 4.2: Dados gerais acerca das aposentadorias programadas, IPSEMC, 2016.

	Homem	Mulher	TOTAL
Quantidade	30	208	238
Idade de concessão média	63,50	56,44	57,33
Folha salarial mensal (média)	1.963,01	2.159,85	2.135,04
Folha salarial mensal (soma)	58.890,44	449.249,51	508.139,95

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Os dados utilizados na análise da postergação, conforme demonstra a Tabela 4.2, são compostos predominantemente pelo sexo feminino e por pessoas com baixa remuneração. O Apêndice D complementa os resultados da idade estimada de aposentadoria.

### 4.3.1 Análise Exploratória

Consoante o objetivo do estudo, apresentam-se estatísticas descritivas acerca do tempo de postergação de aposentadoria dos segurados do IPSEMC.

Conforme a Figura 4.5, gráfico a), o comportamento da variável se concentra assimetricamente à esquerda, ou seja, grande parte das falhas ocorre nos primeiros anos

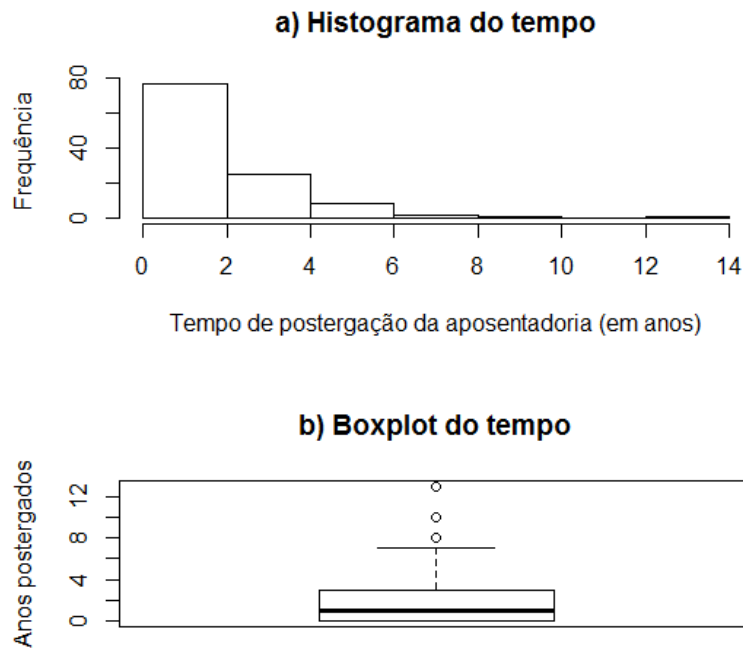


Figura 4.5: Histograma e boxplot do tempo de postergação da aposentadoria, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

de postergação. A Figura 4.5, gráfico b), exhibe graficamente informações (em anos) relativas à tendência central e dispersão do tempo de postergação, tais quais: valor mínimo = 0,000; 1º quartil = 0,000; mediana = 1,000; média = 1,974; 3º quartil = 3,000; valor máximo = 13,000; desvio-padrão = 2,271; coeficiente de variação = 1,151%. Algumas das unidades observacionais são passíveis de análises de pontos influentes, mas não foram investigadas, em conformidade com o recorte deste trabalho. Assim, um adiamento das concessões de aposentadoria foi observado, também relatado por Borges (2009).

Com base na Figura 4.6, aventam-se as hipóteses de: haver diferença entre os dois níveis de Sexo e não haver diferença entre os dois níveis de Carreira, em relação ao tempo de postergação.

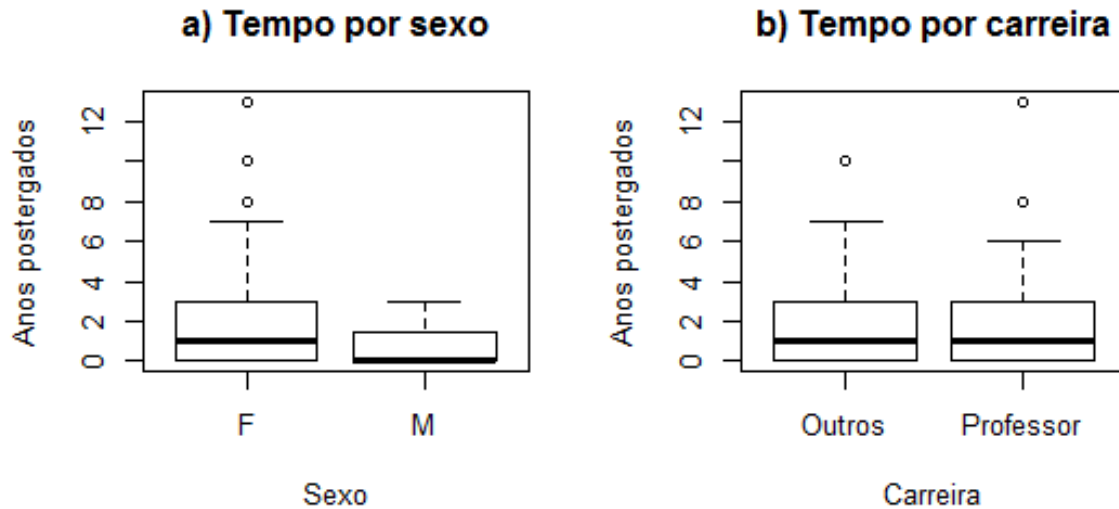


Figura 4.6: Boxplot do tempo de postergação de aposentadoria por sexo e carreira, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Dada esta breve descrição, apresenta-se a análise de sobrevivência acerca do tempo de postergação de aposentadoria do servidor (subseções 4.3.2 e 4.3.3) para posterior obtenção da idade de concessão de aposentadoria, a ser considerada nos cálculos atuariais (subseção 4.5).

### 4.3.2 Análise de Sobrevivência na Ausência de Riscos Competitivos

Inicialmente, é necessário estabelecer a idade de entrada no mercado de trabalho<sup>1</sup> que, somada ao tempo de contribuição exigida para que o servidor se aposente integralmente, comporá a idade presumida de aposentadoria. Esta corresponde ao marco inicial de acompanhamento de cada servidor, encerrado quando ele se aposenta efetivamente (por tempo de contribuição, idade ou compulsoriamente). Assim, cada servidor – diferenciando-se por sexo, carreira e outros pré-requisitos expostos na subseção 3.2.1 –, de acordo com sua data de admissão (regra a que está submetido), precisa cumprir um tempo de contribuição para que se aposente.

Em decorrência da falta de registro referente à idade de entrada no mercado de

<sup>1</sup>Essa informação nem sempre consta no conjunto de dados, cabendo ao atuário a sua definição e averiguação.

trabalho (iemt), foi aqui considerado o mínimo entre a idade de entrada no serviço público (iesp) e uma idade estipulada a partir de simulações com o conjunto completo de dados, conforme segue.

A Tabela 4.3 apresenta estatísticas referentes à idade presumida de aposentadoria para quatro idades estipuladas, aplicadas conforme o critério referido, ou seja, quando inferior à idade de admissão.

Tabela 4.3: Idade presumida de aposentadoria conforme variação da iemt estipulada, IPSEMC, 2016.

Idade estipulada	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	Desvio	CV
18 anos	40	53	48,3966	48	2,4844	0,0513
24 anos	40	59	53,3017	54	3,5187	0,0660
30 anos	40	65	56,9424	60	5,5848	0,0981
36 anos	40	70	59,3763	61	7,5766	0,1276

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Nota-se que, em geral, o aumento da iemt estipulada, para os dados aqui utilizados, aumenta a média das idades presumidas de aposentadoria e, conseqüentemente, reduz a diferença entre a idade de concessão de aposentadoria e a idade presumida de aposentadoria, isto é, o tempo de postergação. Assim, visando subestimar o tempo de postergação e seu efeito sobre o cálculo atuarial, optou-se por aquela iemt que mais postergou a idade de concessão de aposentadoria – 36 anos<sup>2</sup>. – observando-se o limite de idade para a aposentadoria compulsória. Dos 295 casos, em 99 (33,55%), foi adotada a idade estipulada.

Assim, a iemt foi então somada, caso a caso, ao tempo de contribuição (em anos) que cada servidor precisa desembolsar – conforme a regra associada a sua data de admissão (que diferencia sexo e carreira, por exemplo) – para determinar a idade presumida de aposentadoria.

Vale reiterar que a postergação de aposentadoria, conforme definida no capítulo 4.1, corresponde à diferença entre a idade observada de concessão de benefícios e a idade presumida de aposentadoria, variável-resposta discreta, e a ela aplicaram-se os modelos não paramétrico e semiparamétricos, na ausência de riscos competitivos, levando em

<sup>2</sup>No Brasil, é comum a utilização de valores em torno de 24 anos.

conta as covariáveis Carreira e o Sexo.

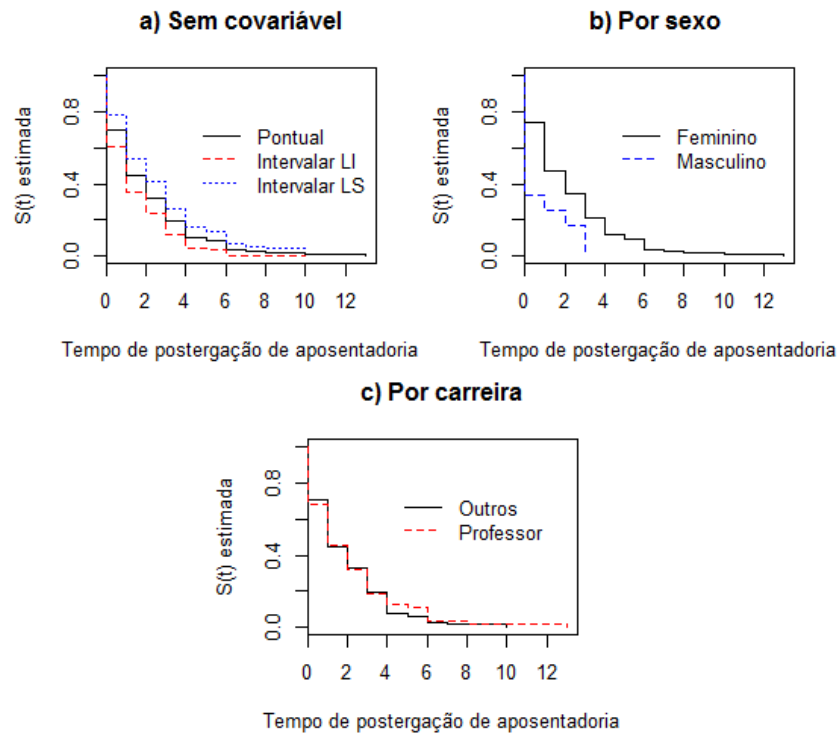


Figura 4.7: Sobrevivência estimada por Kaplan-Meier, por níveis de covariáveis, para o tempo de postergação de aposentadoria, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Em relação à análise não paramétrica, compararam-se as sobrevivências entre os grupos (níveis) que compõem cada covariável, exibidas na Figura 4.7. Sua visualização corrobora as evidências suscitadas pela análise descritiva, de que há diferença do tempo de postergação segundo os níveis de Sexo, o que não ocorre para os níveis de Carreira.

A Tabela 4.4 exhibe os resultados do teste logrank para as duas covariáveis. Considerando o nível de significância  $\alpha = 0,05$ , conclui-se que não há evidências para rejeitar a hipótese de igualdade entre as curvas de sobrevivência estimadas e confrontadas para Carreira (Professor e Outros). Para o Sexo, há evidências para rejeitar tal hipótese. Esse achado, inclusive, poderia justificar o uso da tábua de vida do IBGE para ambos os sexos.

Tabela 4.4: Resultados dos testes logrank utilizados para as comparações dos grupos considerados no tempo postergado de aposentadoria, IPSEMC, 2016.

Covariável	Valor-p
Carreira	0,730
Sexo	0,011

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Em seguida, introduziu-se a ótica paramétrica. Em decorrência da característica discreta da variável-resposta relativa ao tempo (em anos inteiros) postergados de aposentadoria, não foi possível realizar os ajustes exponencial, weibull, log-normal, gama generalizada e log-logística. Assim, somente o modelo gompertz foi ajustado.

O modelo apresentou  $AIC = 380,4207$ , além dos efeitos das covariáveis sobre a resposta expostos na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Resultados do Modelo Gompertz ajustado para o tempo de postergação de aposentadoria, IPSEMC, 2016.

Covariável	$\hat{\beta}$	$e^{\hat{\beta}}$	e. p. ( $\hat{\beta}$ )	z	Valor-p
Sexo Masculino	1,0231	2,7818	0,3238	3,1596	<0,05
Carreira Professor	0,0818	1,0852	0,1987	0,4116	>0,05

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Conforme a Tabela 4.5, a covariável sexo indica que ser homem aumenta o risco de saída do serviço público durante o período de postergação. O efeito de carreira não é significativo.

Na análise semiparamétrica se estimaram três modelos de Cox, pertinentes ao tratamentos de empates, para estimar o tempo de postergação, na presença de duas covariáveis: Breslow, Efron e Exato. Na prática, neste caso, suas estimativas praticamente se sobrepõem.

Assim, apresentam-se na Tabela 4.6 as estimativas de efeitos que as covariáveis exercem sobre o tempo de postergação, conforme o modelo de Cox selecionado. Dentre os efeitos significativos, aquele que aumenta (em  $(e^{\hat{\beta}} - 1)$ ) o risco de postergar a aposentadoria é ser Homem, em relação a Mulheres. A Carreira não exerce efeito significativo.

Tabela 4.6: Resultados do Modelo de Cox ajustado para o tempo de postergação da aposentadoria, IPSEMC, 2016.

Covariável	$\hat{\beta}$	$e^{\hat{\beta}}$	e. p. ( $\hat{\beta}$ )	z	Valor-p
Sexo Masculino	0,67270	1,95953	0,32852	2,048	0,0406
Carreira Professor	0,04631	1,0474	0,1996	0,2320	0,8166

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

De acordo com a Tabela 4.7, tem-se, de modo global e por covariáveis, que não há evidências contra a suposição de taxas de falha proporcionais.

Tabela 4.7: Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo postergado de aposentadoria, IPSEMC, 2016.

Nível	rho	chisq	valor p
Sexo Masculino	-0,0412	0,1850	0,6670
Carreira Professor	-0,0890	0,8890	0,3460
Global	NA	0,9090	0,6350

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Figura 4.8 apresenta as curvas de sobrevivência, relativas ao tempo de postergação, estimadas pelos modelos não paramétrico (kaplan-meier), paramétricos (gompertz) e semiparamétricos (cox com aproximação efron). Os modelos se alternam, dependendo do tempo que se considera, na apresentação das melhores estimativas. Interpretam-se as curvas de sobrevivência estimadas (paramétrica e semiparametricamente) como sendo as probabilidades de o servidor já elegível sobreviver ao evento de saída do serviço, ou seja, as probabilidades de que permaneça no serviço a cada ano postergado. Essas probabilidades consideraram as informações de sexo e carreira (se referem, portanto, a todos os servidores, sejam eles homens ou mulheres, professores ou não) e são, deste modo, valores médios para o grupo.

Em seguida, apresentam-se o tempo médio de postergação calculado, 1,974, além de valores médios residuais de postergação na data de elegibilidade: segundo o estimador de Kaplan-Meier, 1,797; por Gompertz, o valor é de 1,686; o Modelo de Cox apresentou o valor igual a 2,007.

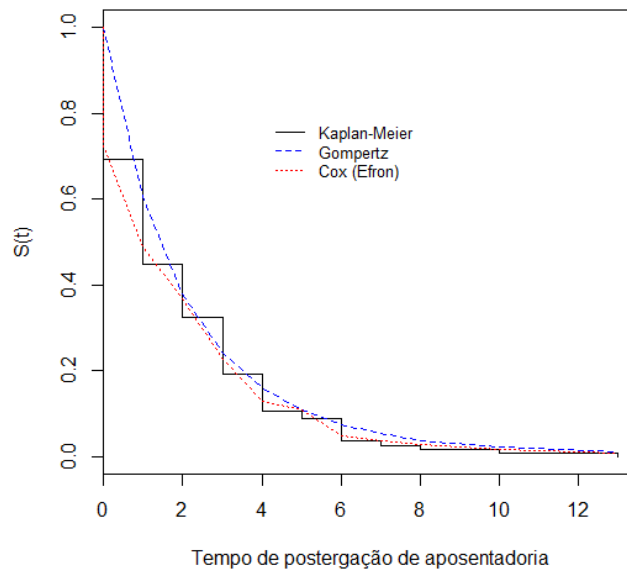


Figura 4.8: Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo de postergação de aposentadoria, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Tabela 4.8 expõe as probabilidades de postergação estimadas por modelo e para cada tempo. Ambos os modelos (gompertz e cox) sempre superestimam a sobrevivência, mas o de Cox parece ajustar melhor.

Tabela 4.8: Probabilidade estimada de postergação da aposentadoria por tempo adicional, IPSEMC, 2016.

tempo	Kaplan-Meier	Cox (Efron)	Gompertz
0	0,69298	0,72530	1,00000
1	0,44737	0,48889	0,60530
2	0,32456	0,36681	0,37744
3	0,19298	0,22743	0,24202
4	0,10526	0,12849	0,15932
5	0,08772	0,10856	0,10751
6	0,03509	0,04786	0,07426
7	0,02632	0,03754	0,05242
8	0,01754	0,02723	0,03778
10	0,00877	0,01675	0,02077
13	0,00000	0,00651	0,00961

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A partir dos valores médios residuais para cada modelo, somados a idade presumida de aposentadoria, estimaram-se as idades de concessão de aposentadoria por segurado. Tais estimativas se encontram no Apêndice D.

A Tabela 4.9 apresenta os resultados do teste KS, em que se comparam as idades de concessão de aposentadoria estimadas pelos modelos de Cox (Efron) e Gompertz (com) ao de Kaplan-Meier. De acordo com o valor p atrelado a cada modelo, não se rejeita a hipótese de que as amostras advêm de mesma distribuição probabilística.

Tabela 4.9: Resultados do teste KS para as idades estimadas de concessão de aposentadoria, IPSEMC, 2016.

Modelo	Estatística	Valor p
Cox (Efron)	0,0964	0,6634
Gompertz(com)	0,0964	0,6634

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Dada a sua aderência, além das estimações apresentadas na Tabela 4.8, opta-se pelo uso do Modelo de Cox, cujo tempo médio de postergação é de 2,007 anos. Assim, o valor aqui considerado para a postergação de aposentadoria, ou seja, 2 anos, parece razoável para a composição dos cálculos atuariais.

### 4.3.3 Análise de Sobrevida na Presença de Riscos Competitivos

Utilizando-se dos dados apresentados nas subseção 4.3.2, realizou-se a análise de sobrevivência na presença de riscos competitivos, ou seja, aquela que investiga o tempo de postergação da aposentadoria considerando suas diferentes causas: a aposentadoria por idade e aposentadoria por tempo de contribuição. Aqui, a aposentadoria compulsória representa censura.

Os resultados expostos neste espaço compõem um mapa de riscos de falha por causa.

#### Risco de Aposentadoria por Tempo de Contribuição

Este tópico trata do tempo de postergação da aposentadoria, ou seja, do tempo até a saída do servidor já elegível, decorrente de sua aposentadoria por tempo de contribuição. Inicialmente, apresenta-se a Tabela 4.10, que contém os resultados do Teste de Razão de Verossimilhança (TRV) e do Critério de Informação de Akaike (AIC).

Tabela 4.10: Critérios objetivos de seleção, por modelo paramétrico ajustado, para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição do servidor, IPSEMC, 2016.

Causa	Distribuição	Valor-p	Decisão TRV	AIC	Decisão AIC
		do TRV			
TC	Exponencial	<0,05	O modelo não é adequado	299,25	<b>Log-logístico</b> parece ser adequado
	Weibull	<0,05	O modelo não é adequado	290,60	
	Log-normal	>0,05	O modelo é adequado	277,36	
	Gompertz	<0,05	O modelo não é adequado	298,67	
	Log-logística	>0,05	O modelo é adequado	272,51	

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Observou-se que, dentre os modelos probabilísticos testados, o modelo log-logístico foi considerado mais adequado para explicar o tempo até a aposentadoria por TC.

A seguir, a Tabela 4.11 apresenta os efeitos estimados das covariáveis (por níveis) – segundo o Modelo Log-logístico (que apresentou menor AIC), de Cox, Específico por Causa e Subdistribuição de Riscos –, sobre o tempo até saída do servidor já elegível decorrente de sua aposentadoria por TC.

Tabela 4.11: Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016.

	Log-logístico	Cox	Específico	Subd.
Covariável	$e^{\hat{\beta}}$	$e^{\hat{\beta}}$	$e^{\hat{\beta}}$	$e^{\hat{\beta}}$
Sexo Masculino	1,28	0,65	0,77	0,94
Carreira Professor	0,91	0,96	1,23	1,66**

Códigos de significância: a) 0,01 → “\*\*\*\*”; b) 0,05 → “\*\*\*”; c) 0,1 → “\*\*”; d) 1 → “ ”.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Visualizando-se a Tabela 4.11, é possível observar que nenhuma covariável exerceu efeito sobre o tempo analisado, com exceção da Carreira no modelo de Subdistribuição de Riscos, em que ser professor aumenta o risco de se aposentar por TC durante o período de postergação.

Tabela 4.12: Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016.

Nível	rho	chisq	valor p
Sexo Masculino	0,0524	0,1997	0,065
Carreira Professor	-0,0071	0,0036	0,952
Global	NA	0,2172	0,897

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

De acordo com a Tabela 4.12, tem-se, de modo global e por nível de todas as

covariáveis, que não há evidências para rejeição da hipótese de proporcionalidade de riscos para a causa TC.

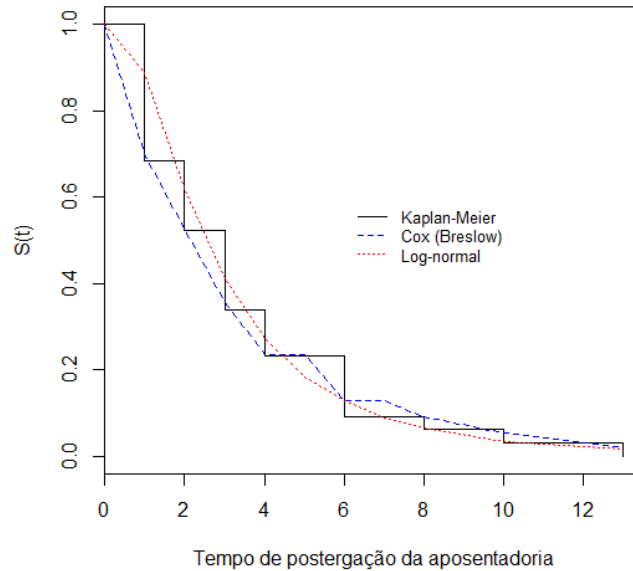


Figura 4.9: Sobrevivências não paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Figura 4.9 apresenta a sobrevivência estimada, para a causa TC, pelo modelo semiparamétrico de Cox selecionado, que apresentou  $AIC=537,61$ .

### Risco de Aposentadoria por Idade

Este tópico trata do tempo de postergação da aposentadoria decorrente de sua aposentadoria por idade. A Tabela 4.13 exhibe os resultados do TRV e do AIC.

Tabela 4.13: Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria por idade do servidor, IPSEMC, 2016.

Causa	Distribuição	Valor-p do TRV	Decisão TRV	AIC	Decisão AIC
Idade	Exponencial	>0,05	O modelo é adequado	58,176	<b>Log-logístico</b> parece ser mais adequado
	Weibull	>0,05	O modelo é adequado	58,667	
	Log-normal	>0,05	O modelo é adequado	57,141	
	Gompertz	>0,05	O modelo é adequado	59,992	
	Log-logística	>0,05	O modelo é adequado	57,057	

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Assim como na análise do risco de aposentadoria por TC, observa-se que o modelo log-logístico foi considerado o mais adequado para explicar o tempo até a aposentadoria por idade.

A seguir, a Tabela 4.14 apresenta os efeitos estimados das covariáveis (por níveis) – segundo o Modelo Log-logístico, Cox, Específico por Causa e Subdistribuição de Riscos –, sobre o tempo até saída do servidor decorrente de aposentadoria por idade.

Tabela 4.14: Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016.

	Log-logístico	Cox	Específico	Subd.
Covariável	$\beta$	$e^{\hat{\beta}}$	$e^{\hat{\beta}}$	$e^{\hat{\beta}}$
Sexo Masculino	282	0,00	0,00	0,00
Carreira Professor	696	0,00	0,00	0,00

Códigos de significância: a) 0,01  $\rightarrow$  “\*\*\*\*”; b) 0,05  $\rightarrow$  “\*\*\*”; c) 0,1  $\rightarrow$  “\*\*”; d) 1  $\rightarrow$  “ ”.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Sobre a Tabela 4.14, observa-se que: ser homem, assim como ser professor, diminui o risco de saída decorrente de aposentadoria por idade (em relação à mulher e a outras carreiras), segundo os quatro modelos; ser admitido entre 1988 e 1998 diminui esse risco de saída, segundo três dos quatro modelos.

Tabela 4.15: Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016.

Nível	rho	chisq	valor p
Sexo Masculino	0,787	0,000	1
Carreira Professor	0,639	0,000	1
Global	NA	0,000	1

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

De acordo com a Tabela 4.15, tem-se, de modo global e por nível de covariáveis, que não há evidências para rejeição da hipótese de proporcionalidade de riscos para a causa idade.

A Figura 4.10 apresenta as sobrevivências estimadas, para a causa idade, pelos modelos paramétrico e semiparamétrico selecionados, evidenciando que ambos superestimam a sobrevivência. Seus AICs são, respectivamente, 57,05 e 47,08. A menor qualidade de ajuste dos modelos para essa causa, em comparação à causa TC, decorre da pequena quantidade de falhas relativas à idade (18,43% dos dados observados) no contexto de aposentadoria postergada. Tal fato deve-se às vantagens financeiras garantidas na aposentadoria por TC conforme legislação vigente.

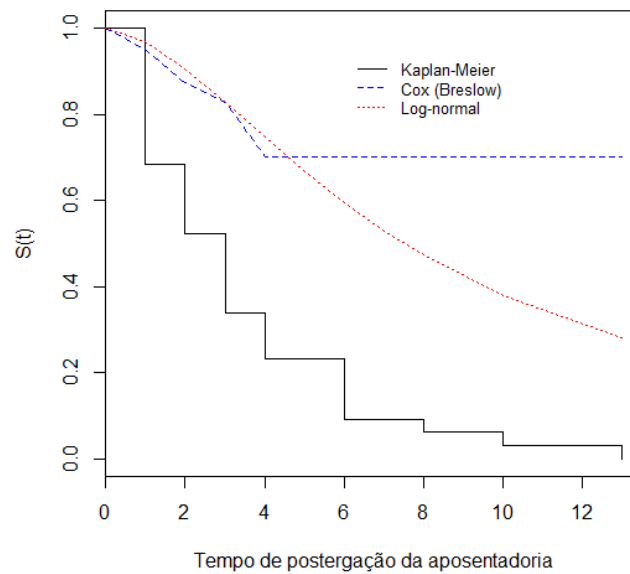


Figura 4.10: Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

## 4.4 Análise do Tempo de Permanência no Serviço Público

Quando o tempo de permanência dos servidores no serviço público constitui o tempo de falha, a ocorrência de falha representa a saída do servidor do serviço público. Com o principal propósito de estimar os efeitos exercidos pelas covariáveis (sexo, carreira e regra de saída) sobre esse tempo, ele foi investigado de duas maneiras: a) independentemente da causa de saída (denominada causa Global); b) considerando-se as diferentes causas de saída, intituladas saídas específicas por causa (Morte, Aposentadoria por Tempo de Contribuição, Aposentadoria por Idade, Aposentadoria Compulsória e Aposentadoria por Invalidez). Nesta análise foram considerados os 2630 servidores (ativos, inativos e falecidos), sendo que os servidores ativos (84,25% do total) em dezembro de 2016 correspondem à censura. Sua pirâmide etária é apresentada na Figura 4.11.

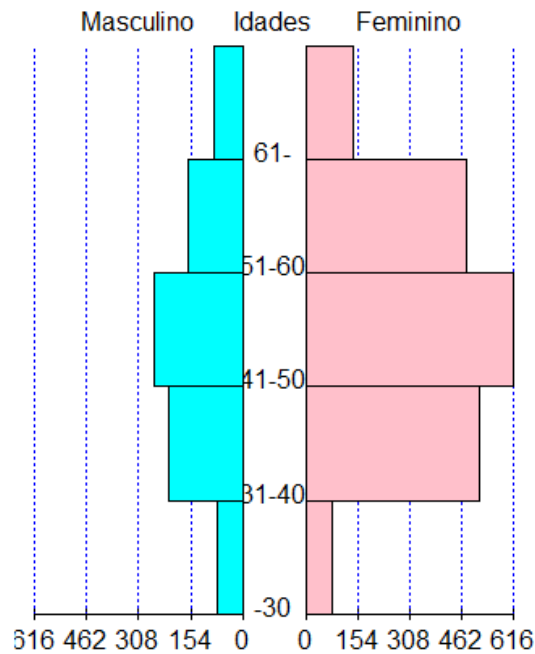


Figura 4.11: Pirâmide etária da população analisada, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Os servidores ativos, conforme demonstra a Tabela 4.16, são predominantemente do sexo feminino e recebem, em média, aproximadamente dois salários mínimos.

Tabela 4.16: Dados gerais acerca dos servidores ativos, IPSEMC, 2016.

	Homem	Mulher	TOTAL
Quantidade	697	1519	2216
Média da folha salarial mensal (R\$)	2.496,81	2.092,04	2.219,18
Soma da folha salarial mensal (R\$)	1.740.276,67	3.184.081,39	4.924.358,06

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Os servidores aposentados, conforme demonstra a Tabela 4.17, são predominantemente do sexo feminino e recebem, em média, aproximadamente dois salários mínimos.

Tabela 4.17: Dados gerais acerca de todas as aposentadorias, IPSEMC, 2016.

	Homem	Mulher	TOTAL
Quantidade	51	244	295
Idade de concessão média	56,75	55,40	55,63
Média da folha salarial mensal (R\$)	1.754,87	2.063,14	2.009,85
Soma da folha salarial mensal (R\$)	89.498,59	503.406,97	592.905,56

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Os pensionistas, conforme demonstra a Tabela 4.18, são, em sua maioria, do sexo feminino e recebem, em média, menos de dois salários mínimos.

Tabela 4.18: Dados gerais acerca das pensões, IPSEMC, 2016.

	Homem	Mulher	TOTAL
Quantidade	21	39	60
Média da folha salarial mensal (R\$)	1.699,74	1.466,59	1.548,19
Soma da folha salarial mensal (R\$)	35.694,55	57.197,05	92.891,60

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

#### 4.4.1 Análise Exploratória

Conforme o objetivo do estudo, apresentam-se estatísticas descritivas acerca do tempo de permanência no serviço público.

A Figura 4.12 (gráfico a) exhibe o comportamento do tempo de permanência no serviço público dos 2630 servidores, que parece se concentrar assimetricamente à esquerda, e dá indícios acerca de distribuições que podem ser adequadas para o seu ajuste. A Figura 4.12 (gráfico b) exhibe graficamente informações (em anos) relativas à tendência central e dispersão do tempo de permanência no serviço público por status (censura e falha, respectivamente): valores mínimos = 0,1423 e 1,0485; mediana = 12,1588 e 23,1718; média = 13,62527 e 22,1680; valores máximos = 50,7816 e 42,9514; desvios-padrões = 9,9285 e 8,5763; coeficientes de variação = 74,91% e 38,68%.

A variável Categoria possui seis níveis: servidor Ativo, Morto, aposentado por Tempo de Contribuição (TC), aposentado por Idade, aposentado Compulsoriamente e aposentado por Invalidez. Deste modo, resume a informação sobre servidores ativos e não ativos. Além disso, dá origem a variável de interesse denominada Causa, que

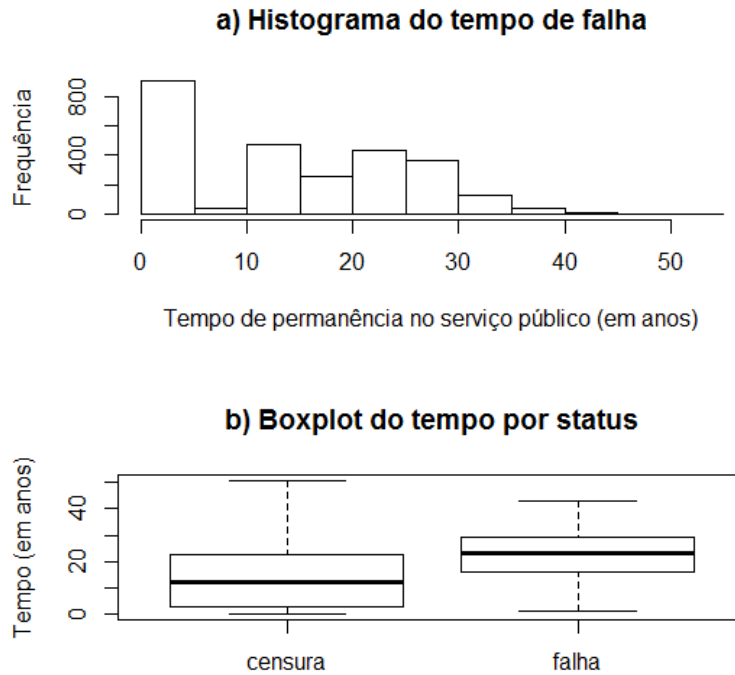


Figura 4.12: Histograma e boxplot do tempo de permanência no serviço público, IP-SEMC, 2017.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

contém cinco níveis de Categoria, excetuando-se “ativo”. Categoria e Causa são importantes para a definição de status (em todos os modelos considerados) e da matriz de transição (modelo de risco competitivo semiparamétrico subdistribuição de riscos, por vir na subseção 4.4.3). Evidencia-se, no entanto, que a Categoria não constitui uma covariável, dado que não explica o comportamento da variável-resposta tempo de permanência do servidor.

Observando-se, na Figura 4.13, os tempos de permanência no serviço público, suspeita-se: haver diferença entre os três níveis de Regras de Saída; não haver diferença entre os dois níveis de Carreira, bem como entre os dois níveis de Sexo. Em relação à Causa de saída do serviço público, o Tempo de Contribuição apresenta maior Tempo de Falha.

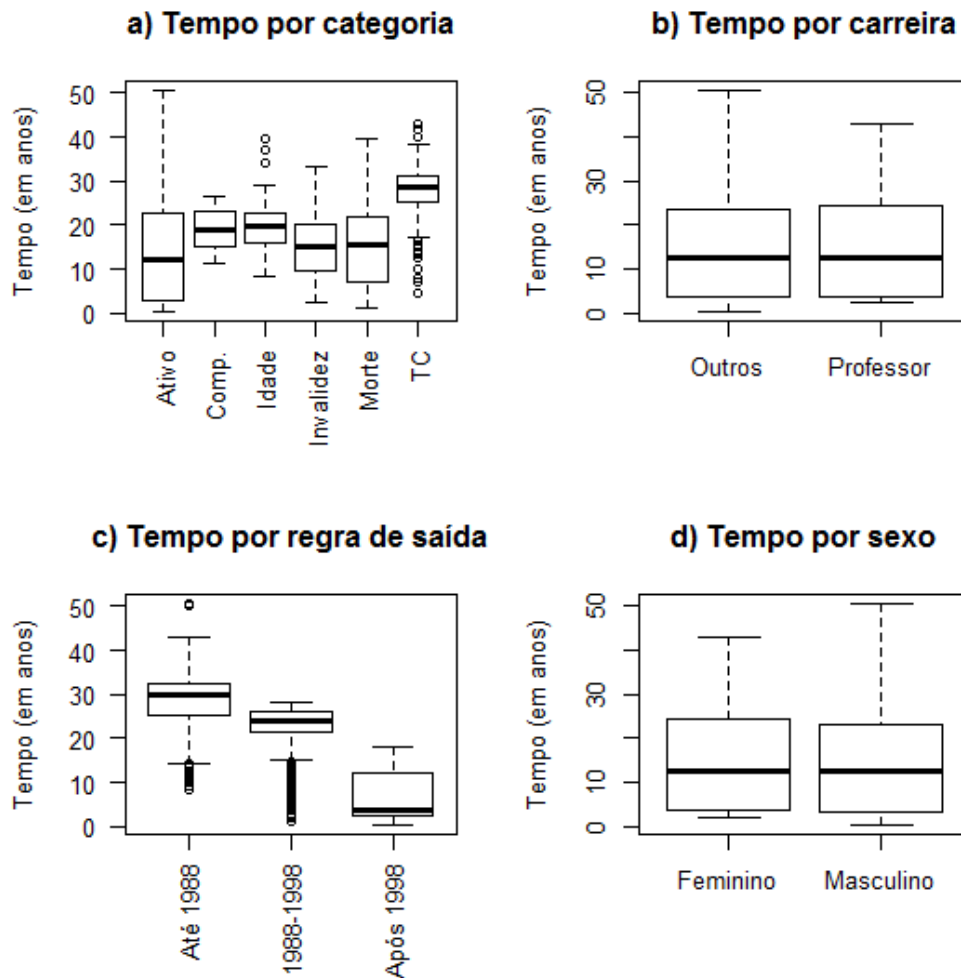


Figura 4.13: Boxplot do tempo de permanência no serviço por categoria, carreira, regra de saída e sexo, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Dada esta breve descrição, apresentam-se as análises de sobrevivência nas subseções 4.4.2 e 4.4.3.

#### 4.4.2 Análise de Sobrevivência na Ausência de Riscos Competitivos

Aqui, desconsidera-se a presença de riscos competitivos, ou seja, analisa-se — por meio de modelos não paramétrico, paramétrico e semiparamétrico — o tempo até a saída do servidor, independente da causa, sendo esta denominada causa global (ou geral).

A análise não paramétrica objetiva estimar a função de sobrevivência sem o uso de

distribuições de probabilidade. Por meio dela, é possível explorar algumas informações, como, por exemplo, comparar a sobrevivência entre os grupos (níveis) que compõem cada variável categórica (Carreira, Regras de Saída e Sexo).

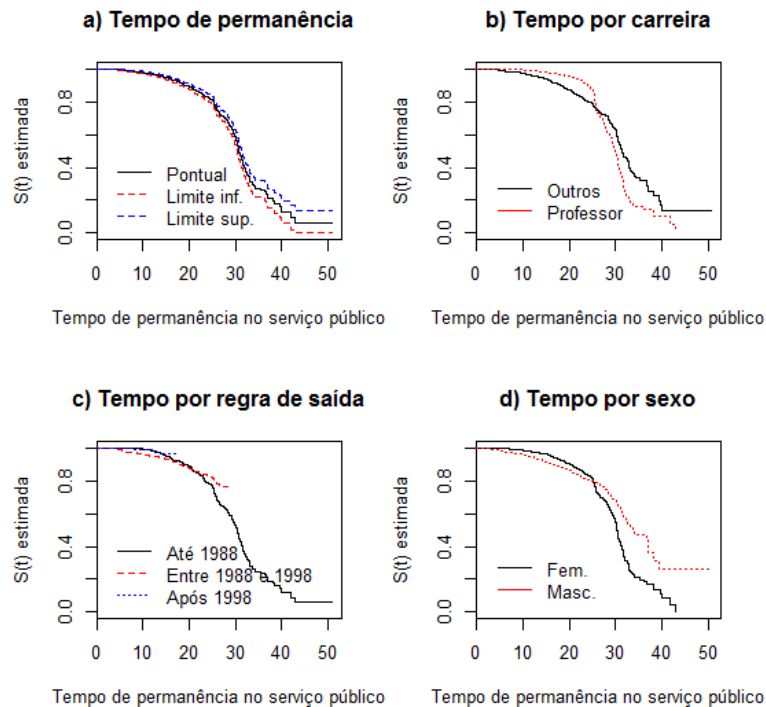


Figura 4.14: Sobrevivência estimada por Kaplan-Meier, por níveis de covariáveis, para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Figura 4.14 exibe, para cada covariável, as curvas de sobrevivência estimada por seus níveis. De acordo com a sua visualização, a diferença entre os três grupos de Regra de saída é perceptível. As curvas estimadas pelos dois níveis de Carreira e os dois níveis de Sexo, contudo, não apresentam resultados óbvios, necessitando da averiguação do teste.

A Tabela 4.19 exibe os resultados do teste logrank, que averigua a igualdade entre as curvas (de sobrevivência estimadas) na Figura 4.14. Considerando o nível de significância  $\alpha = 0,05$ , conclui-se que não há evidências para rejeitar a hipótese de igualdade entre as curvas de sobrevivência estimadas e confrontadas para Carreira (Professor e Outros). Para o restante das covariáveis, há evidências para rejeitar tal hipótese: a variável sexo rejeita a referida igualdade entre homem e mulher; regra de saída rejeita

Tabela 4.19: Resultados dos testes logrank utilizados para as comparações dos grupos, dois a dois, considerados no tempo de permanência no serviço, IPSEMC, 2016.

Regra de saída		Sexo		Carreira	
Nível	Valor p	Nível	Valor p	Nível	Valor p
Global	0,0038	Global	0,0400	Global	0,4230
1-2	0,6550				
1-3	<0,001				
2-3	0,0210				

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

de modo global e entre os níveis 1 *versus* 3 (admitidos antes de 1988 *versus* admitidos após 1998) e 2 *versus* 3 (admitidos entre 1988 e 1998 *versus* admitidos após 1998).

Encerrada a análise não paramétrica na ausência de riscos competitivos, introduz-se a ótica paramétrica, que objetiva estimar a função de sobrevivência se utilizando de modelos probabilísticos.

Aqui, supõe-se que o tempo de permanência no serviço público, considerando-se o efeito de três covariáveis (Carreira, Regra de saída e Sexo), segue distribuição Exponencial, Weibull, Log-normal, Gompertz e Log-logística, sendo necessária a utilização de critérios para seleção dos modelos.

Em relação aos critérios objetivos, faz-se uso do TRV e do AIC, conforme a subseção 3.3.4, apresentados na Tabela 4.20 para comparação dos modelos ajustados.

Tabela 4.20: Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016.

Causa	Distribuição	Valor-p do TRV	Decisão TRV	AIC
Global	Exponencial	<0,05	O modelo não é adequado	4458,658
	Weibull	<0,05	O modelo não é adequado	7547,767
	Log-normal	<0,05	O modelo não é adequado	4146,444
	Gompertz	>0,05	O modelo é adequado	3888,625
	Log-logística	<0,05	O modelo não é adequado	3991,946

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Desta forma, tem-se que o modelo Gompertz, dentre os modelos probabilísticos ajustados, é o mais adequado para explicar o tempo de permanência no serviço público.

Quanto à abordagem semiparamétrica, buscou-se calcular, inicialmente, e conforme a expressão 3.12, a proporção de empates  $pe$  considerando  $n = 2630$  (tamanho amostral),  $d = 414$  (número total de falhas),  $k = 399$  (número de falhas distintas):

$$pe = \frac{414 - 399}{2630} = 0,57\%.$$

Como  $pe = 0,57\% < 20\%$ , deve ser usado o modelo contínuo com aproximações para função de verossimilhança parcial.

Aqui consideraram-se as aproximações de Breslow ( $AIC = 5096,464$ ) e Efron ( $AIC = 5096,342$ ). Na prática, suas estimativas se sobrepõem, porque a proporção de empates é muito baixa.

Assim, apresentam-se na Tabela 4.21 os valores ajustados segundo os modelos paramétrico (Gompertz) e semiparamétrico (Cox) escolhidos.

Tabela 4.21: Resultados dos Modelos Gompertz e de Cox ajustados para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016.

Covariável	Gompertz		Cox	
	$e^{\hat{\beta}}$	Valor-p	$e^{\hat{\beta}}$	Valor-p
Sexo Masculino	0,7020	> 0,05	0,7905	< 0,05
Carreira Professor	1,0123	> 0,05	1,0213	> 0,05
Admitidos entre 1988 e 1998	0,8766	> 0,05	0,9983	> 0,05
Admitidos após 1998	1,4043	< 0,05	1,6166	< 0,05

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Constata-se, portanto, que a regra de saída exerce efeito significativo sobre a saída do serviço público, segundo o Modelo Gompertz; o sexo e a regra de saída exercem efeitos significativos sobre a saída do serviço público, segundo o Modelo de Cox.

Tabela 4.22: Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo de permanência no serviço público.

Nível	rho	chisq	p
Sexo Masculino	-0,263	27,73	<0,05
Carreira Professor	0,170	11,16	<0,05
Admitidos entre 1988 e 1998	-0,149	8,47	<0,05
Admitidos após 1998	0,119	6,49	<0,05
Global	NA	82,56	<0,05

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

De acordo com a Tabela 4.22, tem-se, de modo global e por nível de covariáveis, que há evidências para rejeição da hipótese de proporcionalidade de riscos.

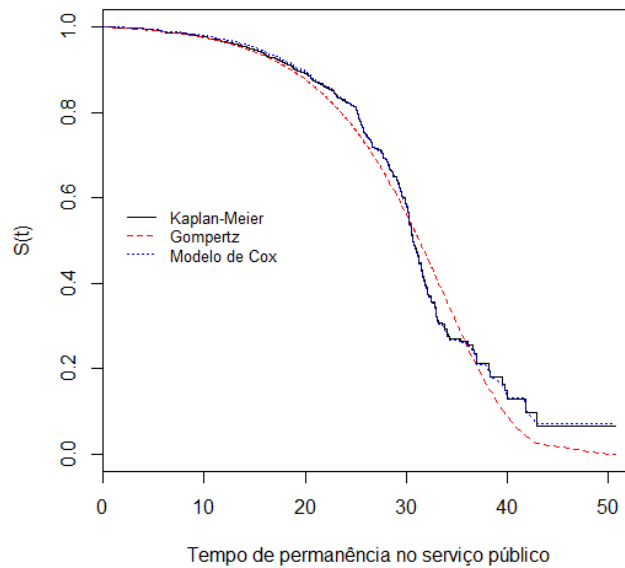


Figura 4.15: Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Finalmente, na Figura 4.15 se confrontam as sobrevivências estimadas pelos modelos gompertz e de cox para o tempo de permanência no serviço público, independentemente da causa, na presença das três covariáveis. Seus valores, estimados por meio da análise de sobrevivência para a população do IPSEMC e por ano de serviço público (Tabelas E.1 e E.2 do Apêndice E), apresentam-se, de um modo geral, mais gradativos que os valores estimados por Corrêa (2018), mediante o uso de modelos de múltiplos decrementos, para a população brasileira e por idade. Isto significa que dadas as diferenças amostrais e de “ $x$ ” (tempo de serviço público ou idade), as probabilidades aqui estimadas para a saída do servidor do serviço público apresentam variações menos bruscas.

O modelo Gompertz apresenta  $AIC=3888,63$ , enquanto o de Cox,  $AIC=5096,464$ . Observa-se, ainda, que a abordagem apresentada nesta seção 4.4.2 poderia apresentar problemas relacionados à estimação da função de distribuição acumulada ( $F(t)$ ), caso se investigassem, uma a uma (separadamente), cada uma das cinco causas que provocam a saída do serviço público. Quando se compara  $F(t)$  global (para todos os eventos competitivos conjuntamente) com o somatório das funções de distribuição acumulada para cada evento ( $F_k(t)$ ),  $k = 1, \dots, J$ , tem-se que  $F_k(t) > F(t)$ . Inclusive,  $\sum_k F_k(t)$  pode

ultrapassar o valor 1, descaracterizando a função de distribuição acumulada (CARVALHO et al., 2011).

Para contornar esse problema, durante o estudo individual dos riscos que competem para retirar o servidor de seu status de ativo, foi proposta a utilização das Funções de Incidência Acumulada (FIA), apresentadas na subseção 4.4.3.

### 4.4.3 Análise de Sobrevida na Presença de Riscos Competitivos

Inspirado na relação “Atuária-Estatística” fornecida por Macdonald (1996a), Macdonald (1996b) e Macdonald (1996c), considera-se, a partir deste momento, a presença de riscos competitivos, ou seja, analisa-se o tempo de permanência no serviço público – por meio de modelos não paramétrico, paramétrico e semiparamétrico – levando-se em conta a existência das cinco riscos (cinco eventos que competem para retirar o servidor do status de ativo), que recebem a seguinte codificação: 1 para morte (morte); 2 para aposentadoria por tempo de contribuição (TC); 3 para aposentadoria por idade (idade); 4 para aposentadoria compulsória (compulsória); 5 para aposentadoria por invalidez (invalidez). Cada evento é modelado separadamente e os demais eventos são considerados censura.

#### Risco Acumulado Específico por Causa e Função de Incidência Acumulada

Aqui se apresentam as principais estimativas não paramétricas num modelo de riscos concorrentes, decorrentes dos seguintes estimadores: de Nelson-Aalen, para os riscos acumulados específicos por causa; de Aalen-Johansen, para as funções de incidência cumulativa; de Kaplan-Meier, para as funções de sobrevivência. Para isso, utilizaram-se funcionalidades do *software* R, por meio dos pacotes *survival* (THERNEAU, 2015), *mvna* (ALLIGNOL; BEYERSMANN; SCHUMACHER, 2008), *etm* (ALLIGNOL; SCHUMACHER; BEYERSMANN, 2011) e *cmprsk* (GRAY, 2014). O Apêndice B complementa esta análise.

Apresentam-se na Figura 4.16 as estimativas pontuais e intervalares (log-transformados) de Nelson-Aalen (NA) para as possíveis transições  $\hat{A}_{01}(t)$  ( $0 - 1$  é a saída do

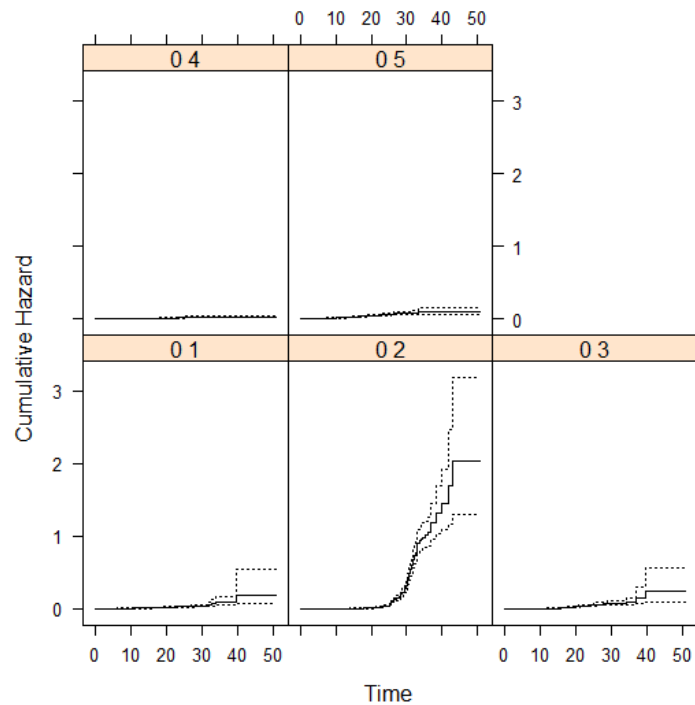


Figura 4.16: Riscos acumulados por causa estimados pelo estimador de Nelson-Aalen para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

serviço público em decorrência de Morte),  $\hat{A}_{02}(t)$  (0 – 2 é a saída do serviço público em decorrência de aposentadoria por TC),  $\hat{A}_{03}(t)$  (0 – 3 é a saída do serviço público em decorrência de aposentadoria por idade),  $\hat{A}_{04}(t)$  (0 – 4 é a saída do serviço público em decorrência de aposentadoria compulsória) e  $\hat{A}_{05}(t)$  (0 – 5 é a saída do serviço público em decorrência de aposentadoria por invalidez). Nota-se que o maior dos riscos acumulados de transição corresponde a abandonar o status de ativo em decorrência da aposentadoria por tempo de contribuição.

A Função de Sobrevivência  $P(T > t)$  do tempo de permanência  $T$  no estado inicial 0 foi estimada pelo estimador de Kaplan-Meier (eq. 3.8) – função determinística do estimador Nelson-Aalen por todas as causas  $A_0(t) = \hat{A}_{01}(t) + \hat{A}_{02}(t) + \hat{A}_{03}(t) + \hat{A}_{04}(t) + \hat{A}_{05}(t)$ .

A Figura 4.17 traça bandas de confiança de pontos com base no estimador de variância de Greenwood.

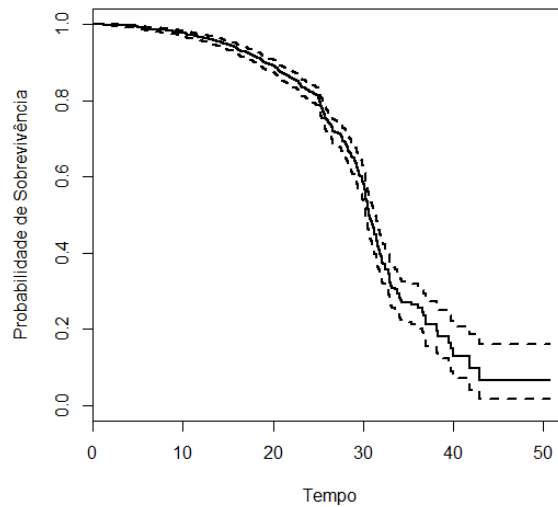


Figura 4.17: Sobrevivência estimada pelo estimados de Kaplan-Meier, com intervalo de confiança, para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Finalmente, considera-se estimar as Funções de Incidência Acumulada (FIA):  $P(T \leq t, X_T = 1)$ ,  $P(T \leq t, X_T = 2)$ ,  $P(T \leq t, X_T = 3)$ ,  $P(T \leq t, X_T = 4)$  e  $P(T \leq t, X_T = 5)$ , utilizando-se o estimador de Aalen-Johansen.

Segundo a Tabela 4.23, para  $t = 10$  anos, tem-se que as probabilidades (acumuladas) de qualquer causa  $j$  ocorrer até o referido momento são muito pequenas, sendo a maior delas a saída por invalidez (1,29%).

Tabela 4.23: FIAs estimadas, por causa e tempo (em anos), para o tempo de permanência no serviço público.

Causas	10	20	30	40	50
Morte	0,0076189	0,02065266	0,03628834	0,070687	0,070687
TC	0,002308	0,0120724	0,22710731	0,6040157	0,668785
Idade	0,0011547	0,02579709	0,06688263	0,1004781	0,1004781
Compulsória	0	0,00879513	0,02065127	0,0206513	0,0206513
Invalidez	0,0129229	0,04126598	0,06617571	0,0746294	0,0746294

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Com o passar do tempo, conforme esperado, todas aumentam, destacando-se a maior probabilidade acumulada também da saída por invalidez (4,12%) até  $t = 20$  anos; para os tempos até  $t = 30, 40$  e  $50$  anos, a maior das probabilidades acumuladas

é relativa ao tempo de contribuição (22,71%, 60,40% e 66,87%, respectivamente).

Na Figura 4.18, a lista com os componentes “1 1”, “1 2”, “1 3”, “1 4” e “1 5” não corresponde a transições, como no caso do pacote *mvna*, mas sim a FIA para cada causa,  $\hat{P}(T \leq t, X_T = j), j = 1, 2, 3, 4, 5$ .

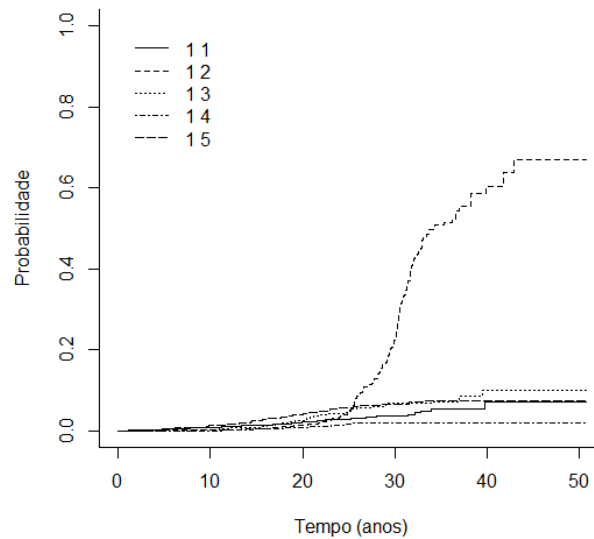


Figura 4.18: FIAs estimadas, por causa, para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A seguir, apresentam-se os ajustes para cada causa isoladamente (Morte, TC, Idade, Compulsória e Invalidez), na presença de covariáveis. O Apêndice C complementa a análise.

### Risco de Morte

Este tópico trata do tempo até a saída do servidor do serviço público decorrente de sua morte. A Tabela 4.24 apresenta resultados do TRV e do AIC. Deste modo, observa-se que dentre os modelos probabilísticos testados, o modelo Gompertz parece ser o mais adequado para explicar o tempo até a morte do servidor.

Tabela 4.24: Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a morte do servidor, IPSEMC, 2016.

Causa	Distribuição	Valor-p do TRV	Decisão TRV	AIC	Decisão AIC
Morte	Exponencial	>0,05	O modelo é adequado	709,27	<b>Gompertz</b> parece ser mais adequado
	Weibull	>0,05	O modelo é adequado	705,98	
	Log-normal	>0,05	O modelo é adequado	707,57	
	Gompertz	>0,05	O modelo é adequado	703,01	
	Log-logística	>0,05	O modelo é adequado	706,18	

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A seguir, a Tabela 4.25 apresenta os efeitos estimados das covariáveis (por níveis) – segundo o Modelo Gompertz, Cox, Específico por Causa e Subdistribuição de Riscos –, sobre o tempo até saída do servidor decorrente de sua morte.

Tabela 4.25: Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a morte do servidor, IPSEMC, 2016.

Covariável	Gompertz $e^{\hat{\beta}}$	Cox $e^{\hat{\beta}}$	Específico $e^{\hat{\beta}}$	Subd. $e^{\hat{\beta}}$
Sexo Masculino	2,79*	2,75***	2,76***	2,92***
Carreira Professor	0,18	0,18**	0,18**	0,18**
Admitidos entre 1988 e 1998	0,96	1,10	1,10	0,97
Admitidos após 1998	0,41	0,41	0,41	0,37

Códigos de significância: a) 0,01 → “\*\*\*”; b) 0,05 → “\*\*”; c) 0,1 → “\*”; d) 1 → “ ”.

Fonte: Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Visualizando-se a Tabela 4.25, é possível observar que: ser homem aumenta o risco de saída por morte (em relação à mulher), segundo os quatro modelos; ser professor reduz o risco de saída por morte (em relação a outras categorias), segundo os três modelos semiparamétricos; a data de admissão parece não influenciar tal saída, segundo os quatro modelos.

Tabela 4.26: Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a morte, IPSEMC, 2016.

Nível	rho	chisq	valor p
Sexo Masculino	-0,140	0,968	0,325
Carreira Professor	0,056	0,155	0,694
Admitidos entre 1988 e 1998	-0,148	0,999	0,318
Admitidos após 1998	-0,061	0,158	0,691
Global	NA	2,414	0,660

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

De acordo com a Tabela 4.26, tem-se, para a causa morte, que não há evidências para rejeição da hipótese de proporcionalidade de riscos.

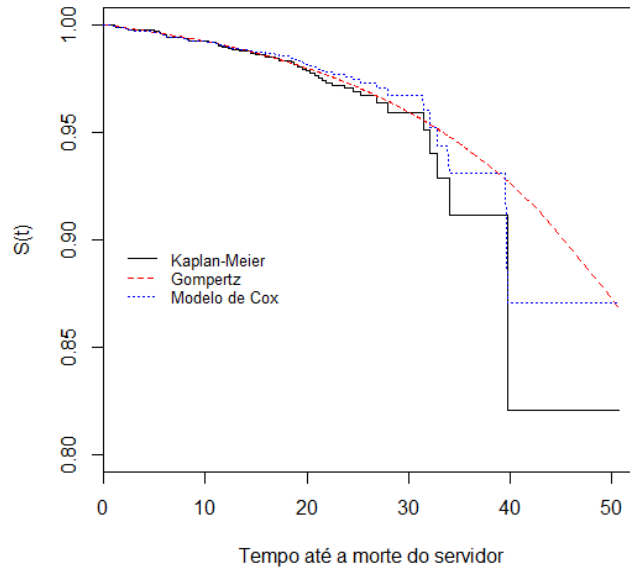


Figura 4.19: Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até morte, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Figura 4.19 apresenta as sobrevivências estimadas, para a causa morte, pelos modelos paramétrico e semiparamétrico selecionados. O Modelo Gompertz apresentou  $AIC=703,01$ , enquanto o de Cox,  $AIC=628,05$ .

### Risco de Aposentadoria por Tempo de Contribuição

Este tópico trata do tempo até a saída do servidor do serviço público decorrente de sua aposentadoria por tempo de contribuição. Inicialmente, apresenta-se a Tabela 4.27, que contém os resultados do TRV e do AIC.

Tabela 4.27: Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição do servidor, IPSEMC, 2016.

Causa	Distribuição	Valor-p	Decisão TRV	AIC	Decisão AIC
			do TRV		
	Exponencial	<0,05	O modelo não é adequado	2107,17	
	Weibull	<0,05	O modelo não é adequado	160259	<b>Nenhum</b>
TC	Log-normal	<0,05	O modelo não é adequado	1757,99	modelo parece
	Gompertz	<0,05	O modelo não é adequado	1757,99	ser adequado
	Log-logística	<0,05	O modelo não é adequado	1654,16	

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Deste modo, observa-se que dentre os modelos probabilísticos testados, nenhum foi considerado adequado para explicar o tempo até a aposentadoria por TC.

A seguir, a Tabela 4.28 apresenta os efeitos estimados das covariáveis (por níveis) – segundo o Modelo Log-logístico (que apresentou menor AIC), de Cox, Específico por Causa e Subdistribuição de Riscos –, sobre o tempo até saída do servidor decorrente de sua aposentadoria por TC.

Tabela 4.28: Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016.

Covariável	Log-logístico $e^{\hat{\beta}}$	Cox $e^{\hat{\beta}}$	Específico $e^{\hat{\beta}}$	Subd. $e^{\hat{\beta}}$
Sexo Masculino	1,17*	0,38***	0,39***	0,41***
Carreira Professor	0,90	1,98***	1,98***	2,43***
Admitidos entre 1988 e 1998	1,15*	0,47***	0,47***	0,34***
Admitidos após 1998	2,74	0,00	0,00	0,00

Códigos de significância: a) 0,01 → “\*\*\*”; b) 0,05 → “\*\*”; c) 0,1 → “\*”; d) 1 → “ ”.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Visualizando-se a Tabela 4.28, é possível observar que, segundo os três modelos adequados: ser homem diminui o risco de saída por aposentadoria TC (em relação à mulher); ser professor aumenta o risco de saída por aposentadoria TC (em relação a outras categorias); a regra de saída indica que admitidos depois de 1988 possuem menor risco de saída por aposentadoria TC.

Tabela 4.29: Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016

Nível	rho	chisq	p
Sexo Masculino	-0,1301	3,2200	0,0726
Carreira Professor	-0,0201	0,0778	0,7803
Admitidos entre 1988 e 1998	-0,1123	2,4500	0,1175
Admitidos após 1998	0,6195	0,0000	0,9983
Global	NA	5,9400	0,2035

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

De acordo com a Tabela 4.29, tem-se, de modo global e por nível de todas as covariáveis, que não há evidências para rejeição da hipótese de proporcionalidade de riscos para a causa TC.

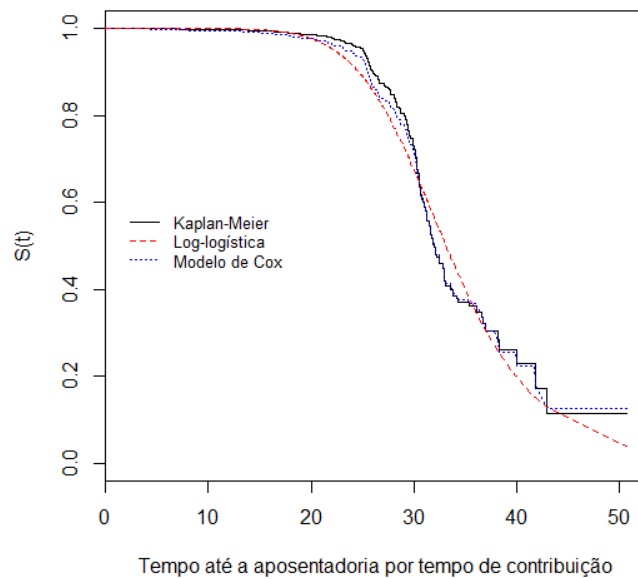


Figura 4.20: Sobrevivências não paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por tempo de contribuição, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Figura 4.20 apresenta a sobrevivência estimada, para a causa TC, pelo modelo semiparamétrico de Cox selecionado, que apresentou  $AIC=2091,36$ .

### Risco de Aposentadoria por Idade

Este tópico trata do tempo até a saída do servidor do serviço público decorrente de sua aposentadoria por idade. A Tabela 4.30 exibe os resultados do TRV e do AIC.

Tabela 4.30: Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria por idade do servidor, IPSEMC, 2016.

Causa	Distribuição	Valor-p do TRV	Decisão TRV	AIC	Decisão AIC
Idade	Exponencial	<0,05	O modelo não é adequado	941,07	<b>Log-normal</b> parece ser mais adequado
	Weibull	>,05	O modelo é adequado	878,85	
	Log-normal	>0,05	O modelo é adequado	876,04	
	Gompertz	<0,05	O modelo não é adequado	894,35	
	Log-logística	>0,05	O modelo é adequado	877,85	

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Observa-se que dentre os modelos probabilísticos testados, o modelo log-normal foi considerado o mais adequado para explicar o tempo até a aposentadoria por idade.

A seguir, a Tabela 4.31 apresenta os efeitos estimados das covariáveis (por níveis) – segundo o Modelo Log-normal, Cox, Específico por Causa e Subdistribuição de Riscos –, sobre o tempo até saída do servidor decorrente de aposentadoria por idade.

Tabela 4.31: Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016.

Covariável	Log-normal $\beta$	Cox $e^{\hat{\beta}}$	Específico $e^{\hat{\beta}}$	Subd. $e^{\hat{\beta}}$
Sexo Masculino	0,38***	0,32***	0,32***	0,32***
Carreira Professor	0,58***	0,17***	0,17***	0,17***
Admitidos entre 1988 e 1998	0,12	0,57 **	0,57**	0,55**
Admitidos após 1998	0,08	0,59	0,59	0,56

Códigos de significância: a) 0,01  $\rightarrow$  “\*\*\*”; b) 0,05  $\rightarrow$  “\*\*”; c) 0,1  $\rightarrow$  “\*”; d) 1  $\rightarrow$  “ ”.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Sobre a Tabela 4.31, observa-se que: ser homem, assim como ser professor, diminui o risco de saída decorrente de aposentadoria por idade (em relação à mulher e a outras carreiras), segundo os quatro modelos; ser admitido entre 1988 e 1998 diminui esse risco de saída, segundo três dos quatro modelos.

De acordo com a Tabela 4.32, tem-se, de modo global e por nível de covariáveis, que não há evidências para rejeição da hipótese de proporcionalidade de riscos para a causa idade.

Tabela 4.32: Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016.

Nível	rho	chisq	p
Sexo Masculino	0,0209	0,0274	0,869
Carreira Professor	-0,0790	0,4086	0,523
Admitidos entre 1988 e 1998	-0,1562	1,5407	0,215
Admitidos apos 1998	-0,0657	0,2493	0,618
Global	NA	1,8793	0,758

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Figura 4.21 apresenta as sobrevivências estimadas, para a causa idade, pelos modelos paramétrico e semiparamétrico selecionados. Ambos os modelos subestimam a sobrevivência, apesar de o Modelo de Cox conseguir captar as variações da função empírica. Seus AICs são, respectivamente, 876,04 e 867,15.

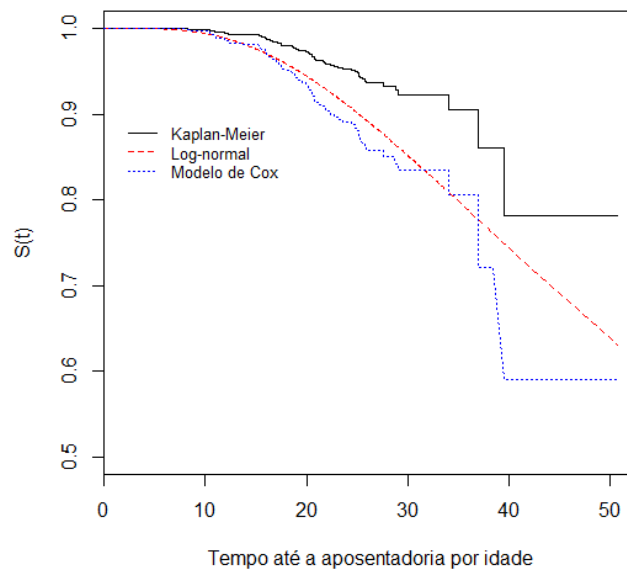


Figura 4.21: Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por idade, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

### Risco de Aposentadoria Compulsória

Este tópico trata do tempo até a saída do servidor do serviço público decorrente de sua aposentadoria compulsória. A Tabela 4.33 apresenta resultados do TRV e do AIC.

Tabela 4.33: Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria compulsória do servidor, IPSEMC, 2016.

Causa	Distribuição	Valor-p do TRV	Decisão TRV	AIC	Decisão AIC
Compulsória	Exponencial	<0,05	O modelo não é adequado	313,41	<b>Log-normal</b> parece ser mais adequado
	Weibull	>0,05	O modelo é adequado	302,74	
	Log-normal	>0,05	O modelo é adequado	298,01	
	Gompertz	<0,05	O modelo não é adequado	894,35	
	Log-logística	<0,05	O modelo não é adequado	432,91	

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Dentre os modelos probabilísticos testados, o modelo log-normal foi considerado o mais adequado para explicar o tempo até a aposentadoria compulsória.

A Tabela 4.34 apresenta os efeitos estimados das covariáveis (por níveis) – segundo o Modelo Log-normal, Cox, Específico por Causa e Subdistribuição de Riscos –, sobre o tempo até saída do servidor decorrente de sua aposentadoria compulsória. É possível observar que: ser homem aumenta o risco de saída decorrente de aposentadoria compulsória (em relação à mulher), segundo três dos quatro modelos; ser professor não

Tabela 4.34: Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria compulsória, IPSEMC, 2016.

Covariável	Log-normal $\beta$	Cox $e^{\hat{\beta}}$	Específico $e^{\hat{\beta}}$	Subd. $e^{\hat{\beta}}$
Sexo Masculino	-0,72***	6,20***	6,20***	6,42***
Carreira Professor	0,51**	0,24	0,24	0,26
Adm. entre 1988 e 1998	0,39***	0,28***	0,28***	0,27***
Adm. após 1998	6834,03***	0,00	0,00	0,00

Códigos de significância: a) 0,01  $\rightarrow$  “\*\*\*”; b) 0,05  $\rightarrow$  “\*\*”; c) 0,1  $\rightarrow$  “\*”; d) 1  $\rightarrow$  “ ”.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

exerce efeito significativo em três dos quatro modelos; ser admitido entre 1988 e 1998 diminui o risco de saída segundo três dos quatro modelos, enquanto que ser admitido depois de 1998 não exerce efeitos significativos em três modelos.

De acordo com a Tabela 4.35, tem-se, de modo global e por nível de covariáveis (com exceção de sexo), que não há evidências para rejeição da hipótese de proporcionalidade de riscos para a causa compulsória.

Tabela 4.35: Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria compulsória, IPSEMC, 2016.

Nível	rho	chisq	p
Sexo Masculino	-0,488	4,34	0,0373
Carreira Professor	-0,247	1,11	0,2918
Admitidos entre 1988 e 1998	-0,263	1,35	0,2459
Admitidos após 1998	0,637	0,00	0,9998
Global	NA	8,34	0,0797

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Figura 4.22 apresenta as sobrevivências estimadas, para a causa compulsória, pelos modelos paramétrico e semiparamétrico selecionados. O modelo Log-normal apresentou AIC=298,01, enquanto o de Cox, AIC=250,36. Ambos bem ajustam os dados, apesar de o desempenho de Gompertz cair após  $t = 30$  anos.

Considerando os resultados para as causas TC, idade e compulsória, tem-se que sexo, carreira e regra de saída exercem efeitos significativos – que variam por causa específica – sobre a saída do serviço público provocada pela aposentadoria programada. Borges (2009), por sua vez, observou a probabilidade de saída oriunda da aposentadoria programada é crescente com a idade, sendo superior para as mulheres.

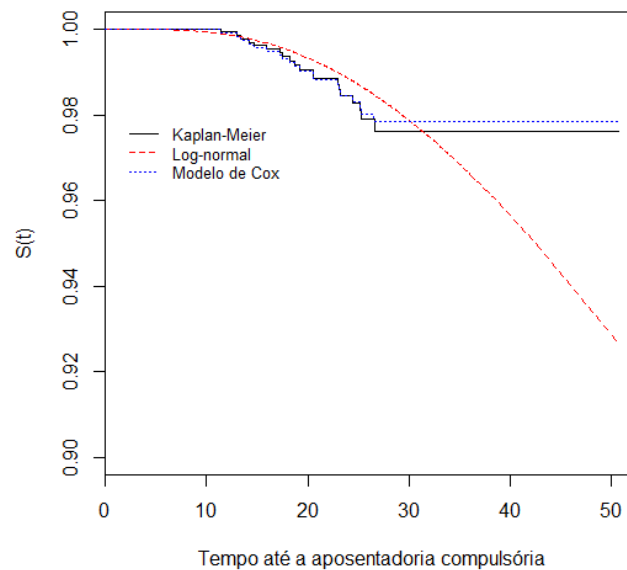


Figura 4.22: Sobrevivências não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por compulsória, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

### Risco de Aposentadoria por Invalidez

Este tópico trata do tempo até a saída do servidor do serviço público decorrente de sua aposentadoria por invalidez. Inicialmente, apresenta-se a Tabela 4.36, com os resultados do TRV e do AIC.

Tabela 4.36: Critérios objetivos de seleção por modelo paramétrico ajustado para o tempo até a aposentadoria por invalidez do servidor, IPSEMC, 2016.

Causa	Distribuição	Valor-p do TRV	Decisão TRV	AIC	Decisão AIC
Invalidez	Exponencial	<0,05	O modelo não é adequado	1133,25	<b>Log-normal</b> parece ser mais adequado
	Weibull	>0,05	O modelo é adequado	1113,62	
	Log-normal	>0,05	O modelo é adequado	1111,79	
	Gompertz	<0,05	O modelo não é adequado	1122,00	
	Log-logística	>0,05	O modelo é adequado	1113,32	

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Observa-se que dentre os modelos probabilísticos testados, o modelo weibull foi considerado o mais adequado para explicar o tempo até a aposentadoria por invalidez.

A seguir, a Tabela 4.37 apresenta os efeitos estimados das covariáveis (por níveis) – segundo o Modelo Weibull, Cox, Específico por Causa e Subdistribuição de Riscos –, sobre o tempo até a saída do servidor decorrente de sua aposentadoria por invalidez.

Tabela 4.37: Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados para o tempo até a aposentadoria por invalidez, IPSEMC, 2016.

Covariável	Log-normal $\beta$	Cox $e^{\hat{\beta}}$	Específico $e^{\hat{\beta}}$	Subd. $e^{\hat{\beta}}$
Sexo Masculino	-0,16	1,22	1,22	1,22
Carreira Professor	0,43**	0,47**	0,47**	0,48**
Admitidos entre 1988 e 1998	-0,22	1,25	1,25	1,22
Admitidos após 1998	0,20	0,60	0,60	0,58

Códigos de significância: a) 0,01  $\rightarrow$  “\*\*\*\*”; b) 0,05  $\rightarrow$  “\*\*\*”; c) 0,1  $\rightarrow$  “\*\*”; d) 1  $\rightarrow$  “ ”.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Visualizando-se a Tabela 4.37, é possível observar que: ser professor diminui o risco de saída decorrente de aposentadoria por invalidez (em relação a outras categorias), segundo os quatro modelos; sexo e regra de saída não exercem efeitos significativos. Diferentemente, Borges (2009) encontrou que as probabilidades de saída por aposentadorias de invalidez para os servidores de nível médio são superiores às observadas para os de nível superior. Além disso, que para um mesmo nível de escolaridade, as mulheres apresentam saídas superiores às dos homens.

Tabela 4.38: Teste de Schoenfeld para proporcionalidade de riscos do Modelo de Cox ajustado para o tempo até a aposentadoria por invalidez, IPSEMC, 2016.

Nível	rho	chisq	p
Sexo Masculino	-0,1046	0,875	0,3500
Carreira Professor	-0,0753	0,472	0,4920
Admitidos entre 1988 e 1998	-0,0499	0,208	0,6480
Admitidos após 1998	-0,0591	0,277	0,5990
Global	NA	1,481	0,8300

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

De acordo com a Tabela 4.38, tem-se, de modo global e por nível de covariáveis, que não há evidências para rejeição da hipótese de proporcionalidade de riscos.

A Figura 4.23 apresenta as sobrevivências estimadas, para a causa invalidez, pelos modelos paramétrico e semiparamétrico selecionados. O Modelo Log-normal apresentou AIC=1111,79, enquanto de Cox, AIC=1114,86. Ambos os modelos parecem ajustar bem os dados.

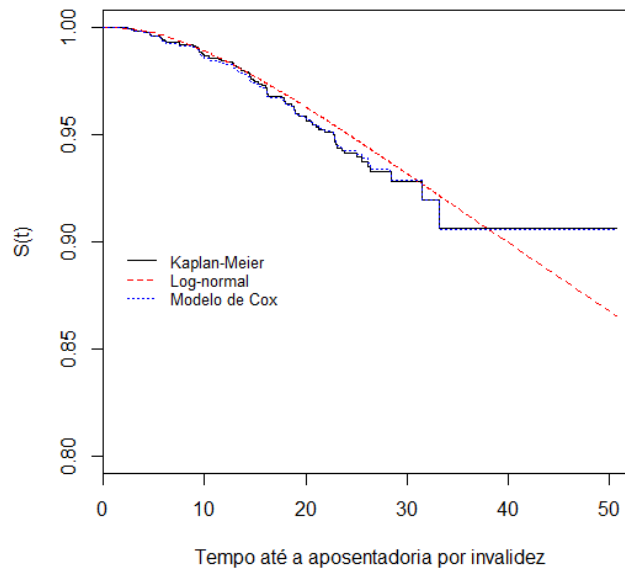


Figura 4.23: Sobrevivência não paramétrica, paramétrica e semiparamétrica estimadas para o tempo até a aposentadoria por invalidez, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Ao ter em vista os resultados apresentados, encerra-se esta subseção com a avaliação do desempenho dos modelos testados e suas covariáveis significativas para o tempo de postergação e o tempo de permanência. Para tanto, foram sintetizadas, nos quadros 4.2 e 4.3, as informações referentes aos modelos paramétricos melhor ajustados para cada causa estudada. Como os modelos semiparamétricos apresentaram comportamento similar, elencou-se o modelo de Cox, como representativo dos demais, por ser mais conhecido e de mais fácil aplicação em R.

Conforme o quadro 4.2, tem-se que, para o tempo de postergação, os modelos são, de modo geral, bem ajustados, com exceção do paramétrico para a causa idade. Constatou-se que os modelos semiparamétricos, que pressupõem proporcionalidade de riscos, atenderam a esse quesito. A variável presente nos dois modelos ajustados para a causa global exerceu o mesmo tipo de efeito sobre a resposta, isto é, ser homem (em relação à mulher) aumenta o risco do elegível se aposentar. Essa interpretação faz sentido, já que o tempo de contribuição do homem é maior. Para a causa TC, observa-se que ser professor (em relação a outras categorias) aumenta o risco do elegível se aposentar, provavelmente porque sua renda é superior, em conformidade com Matsuyama (1998).

Causa	Modelo paramétrico	Covariáveis significativas	Avaliação	Modelo semipar.	Covariáveis significativas	Avaliação
Global	Gompertz	Sexo	Bom ajuste	Cox	Sexo	Bom ajuste, Proporcional
TC	Log-logístico	-	Bom ajuste	Sub	Carreira	Bom ajuste, Proporcional
Idade	Log-logístico	-	-	Cox	-	Proporcional

Fonte: Elaboração própria a partir dos resultados aqui obtidos.

Quadro 4.2: Resumo dos modelos ajustados e covariáveis significativas por causa analisada para o tempo de postergação.

Para o tempo de permanência, conforme o Quadro 4.3, tem-se que os modelos são, de modo geral, bem ajustados, com exceção dos paramétricos para TC e idade e semiparamétrico para idade. Os modelos semiparamétricos atenderam, de modo geral, ao quesito de proporcionalidade de riscos (com exceção da causa global). Para a causa TC – principal motivo de saída dos servidores observados –, ser homem (quando comparado à mulher), assim como ser admitido depois de 1988 (depois dessa data, estabeleceram-se os critérios de elegibilidade), diminui o risco de saída do serviço, enquanto que ser professor aumenta esse risco. (BORGES, 2009), por outro lado, encontrou que a exoneração e a aposentadoria programada são os principais motivos de saída da atividade no funcionalismo público para as idades mais jovens e para as idades mais elevadas, respectivamente.

Causa	Modelo paramétrico	Covariáveis significativas	Avaliação	Modelo semipar.	Covariáveis significativas	Avaliação
Global	Gompertz	Regra	Bom ajuste	Cox	Sexo, Regra	Bom ajuste, não proporcional
Morte	Gompertz	Sexo	Bom ajuste até $t = 30$ anos	Cox	Sexo, Carreira	Bom ajuste até $t = 30$ anos, proporcional
TC	Log-logístico	Sexo, Regra	Bom ajuste	Cox	Sexo, Carreira, Regra	Bom ajuste, proporcional
Idade	Log-normal	Sexo, Carreira	-	Cox	Sexo, Carreira, Regra	Proporcional
Comp.	Log-normal	Sexo, Carreira	Bom ajuste até $t = 25$ anos	Cox	Sexo, Regra	Bom ajuste, proporcional
Inv.	Log-normal	Carreira	Bom ajuste até $t = 40$ anos	Cox	Carreira	Bom ajuste, proporcional

Fonte: Elaboração própria a partir dos resultados aqui obtidos.

Quadro 4.3: Resumo dos modelos ajustados e covariáveis significativas por causa analisada para o tempo de permanência.

Depois da realização de diversos ajustes, conforme variáveis recortadas e modelos candidatos, para ambos os tempos analisados, observa-se que a maioria dos modelos testados confirma a influência da variável sexo sobre os riscos (aqui, a significância das

variáveis testadas podem sofrer influência da legislação, mas isso não é uma obrigatoriedade), conforme indicado por Borges (2009). Não se pode, todavia, afirmar que exista um modelo unanimemente adequado, devendo-se testar o maior número possível de modelos até a decisão sobre qual aplicar, em concordância com Martins (2007). No entanto, o modelo semiparamétrico de Cox, comparado aos paramétricos, proporciona um ajuste mais simples, tanto do ponto de vista operacional da modelagem, quanto em termos de interpretação, devido à sua função de ligação, apresentando melhor desempenho geral. Vale ainda salientar sua maior sensibilidade para incluir covariáveis no modelo. Esses resultados apontam, portanto, para a aplicabilidade dos modelos estudados na estimação das variáveis relacionadas às premissas atuariais idade e tempo de contribuição.

## 4.5 Cálculos Atuariais

Conforme Board (2014), a idade de aposentadoria e a mortalidade são premissas estimadas pelo atuário para realização de cálculos atuariais e representam, na presente pesquisa, objetos de estudo. Nesta subseção se apresentam os resultados referentes a tais cálculos e decorrentes das premissas aqui estimadas.

No cálculo de reserva matemática e custo normal, exclusivamente para aposentadorias programadas com reversão ao dependente (apenas para os cônjuges), considerou-se o regime financeiro de Capitalização, o que exige a escolha do método de custeio. A seguir se definem, com mais detalhes, reserva matemática, custo normal e método de custeio.

As Provisões Técnicas são valores, constituídos por instituições cujo produto é o risco, que correspondem aos diversos compromissos financeiros futuros dessas instituições para com seus clientes/participantes, considerada a probabilidade de ocorrência de cada pagamento futuro (CORRÊA, 2018). Aqui, são sinônimas das expressões Reserva Matemática e Passivo Atuarial, termos mais usados no meio atuarial, conforme Corrêa (2018) e Winklevoss (1993).

Em termos gerais, a reserva matemática  $(AL)_x$ , sob um método de custeio qualquer,

é igual ao valor presente dos benefícios alocados numa data, conforme Winklevoss (1993):

$$(AL)_x = B_x \times {}_{r-x}p_x^{(T)} \times v^{(r-x)} \times \ddot{a}_r$$

em que  $x$  é a idade atual do participante avaliado;  $r$  é a idade de aposentadoria do participante;  $B_x$  representa o benefício alocado sob um método de custeio atuarial dado e é definido como  $B_x = \sum_{t=y}^{x-1} b_t$ , sendo  $b_t$  o direito de benefício acumulado até a idade atual  $x$ ;  ${}_{r-x}p_x^{(T)}$  é a probabilidade que um participante de idade  $x$  tem de sobreviver até a idade  $r$ , enquanto o sobrescrito  $(T)$  representa um ambiente multidecremental;  $v^{(r-x)}$  é o fator de desconto financeiro;  $\ddot{a}_r$  é a anuidade antecipada vitalícia paga a partir da idade  $r$ . Diversos métodos atuariais de custeio são usados em planos de previdência e cada um deles tem uma reserva associada.

A reserva matemática também pode ser vista como uma parte do Valor Presente de Benefício Futuro (VPBF) – representa o somatório dos benefícios futuros prometidos aos servidores e seus dependentes – do participante alocado sob o método de custeio. Assim, a função  $VPBF_x$  é igual ao valor presente do benefício (de aposentadoria) projetado total do participante, conforme notação de Winklevoss (1993):

$$(VPBF)_x = B_r \times {}_{r-x}p_x^{(T)} \times v^{(r-x)} \times \ddot{a}_r.$$

$(VPBF)_x$  é o mesmo que  $(AL)_x$  avaliada com  $B_r$  ao invés de  $B_x$ ;  $B_r$  é o direito de benefício acumulado até a idade de aposentadoria  $r$ ; em relação às premissas aqui estimadas,  ${}_{r-x}p_x^{(T)}$  é a parte da expressão que considera a probabilidade de saída por todas as causas, enquanto que  $\ddot{a}_r$  é a parte da expressão que considera a mortalidade. Desde que a reserva matemática represente a proporção de  $(VPBF)_x$  alocado no método de custeio atuarial usado, outra definição de reserva matemática generalizada pode ser expressa:

$$(AL)_x = k \times (VPBF)_x,$$

em que  $k$  é uma fração dependente de cada método de custeio, definida na expressão

4.1. Assim, em termos gerais, a reserva matemática de um método de custeio é igual ao valor presente dos benefícios alocados numa data.

Os custos previdenciários podem ser categorizados dentro de dois tipos fundamentais: custos normais e custos suplementares. Designa-se custo normal o valor da contribuição atuarialmente calculada, segundo um método de custeio, para fazer face às responsabilidades dos fundos e permitir a constituição e manutenção do fundo em nível adequado (GARCIA; SIMOES, 2010). Teoricamente, a acumulação atuarial dos custos normais da idade de entrada até a idade de aposentadoria será igual a reserva para os benefícios previdenciários dos empregados na data de aposentadoria. Os custos suplementares são designados para resolver a diferença, decorrentes do uso de premissas inadequadas, entre as acumulações de custo normal teórica e corrente, novamente de acordo com um método específico (WINKLEVOSS, 1993).

O custo normal pode ser determinado individualmente, isto é, participante por participante (em que o custo geral é a soma dos custos individuais), ou pode ser determinado de forma agregada, o que sugere outro tipo de classificação dos métodos de custeio. Quando o termo “agregado” não for utilizado, subentende-se tratar-se do método individual, de acordo com Corrêa (2018) e Winklevoss (1993).

O custo normal se difere entre os métodos de custeio pelo benefício considerado para acumular a idade atingida. Em termos gerais, o custo normal  $(CN)_x$  de um método de custeio, associado aos benefícios de aposentadoria programada, é igual ao valor presente dos benefícios alocados numa data, conforme notação de Winklevoss (1993):

$$(CN)_x = b_x \times {}_{r-x}p_x^{(T)} \times v^{(r-x)} \times \ddot{a}_r, (y \leq x \leq \dot{a}_r),$$

e qualquer custo normal pode ser especificado pela definição apropriada de  $b_x$ .

No geral, os custos normais são designados para amortizar  $(VPBF)_y$  ao longo da vida ativa do trabalhador e o padrão dos pagamentos de amortização é governado pelo método de custeio atuarial particular. Noutros termos, o custo normal representa o crescimento da reserva matemática de um ano para o outro, refletindo um benefício acumulado maior junto com ajustes de juros e de sobrevivência (WINKLEVOSS, 1993).

Os métodos de custeio, necessários em caso de planos capitalizados de Benefício De-

finido, têm como objetivo criar as provisões necessárias para que o fundo possa cumprir o plano estabelecido, ou seja, para que possa, em tempo oportuno e sem necessidade de custo suplementar, pagar os benefícios devidos aos beneficiários (GARCIA; SIMOES, 2010).

Resumidamente, os métodos de custeio podem ser do tipo Benefício Acumulado (BA) ou do tipo Custo Acumulado (CA): em BA, define-se, a priori,  $b_x$  (variável independente), para em seguida estimar  $(CN)_x$  e  $(AL)_x$  (variáveis dependentes); em CA, o processo é inverso, ou seja, primeiro se define  $(CN)_x$  e depois se estima  $b_x$  (CORRÊA, 2018).

Utiliza-se neste trabalho o método de custeio de Custo Acumulado percentual do salário constante, também conhecido como Idade de Entrada Normal (IEN), em que  $(CN)_x$  é uma constante proporcional ao salário.

Segundo McGill (1962), o método da Idade de Entrada Normal serve como a base de financiamento para a maioria dos planos fiduciários e de administração de depósitos e, portanto, pode ser considerado como o método padrão de planos de financiamento que cobrem um grande número de empregados. A justificativa do método é que os benefícios previdentes de aposentadoria de um funcionário devem ser financiados com uma porcentagem uniforme de remuneração ou em incrementos anuais uniformes durante toda a sua vida útil. Assim, o custo normal dos benefícios para qualquer funcionário específico é concebido como sendo o percentual uniforme de remuneração que teria que ser pago desde a primeira data do serviço creditado até a idade de aposentadoria para acumular o capital necessário para fornecer os benefícios esperados. O conceito é transferido para os planos estabelecidos a partir da data mais próxima do serviço creditado, e o custo normal para um indivíduo com serviço anterior creditado é calculado a partir dos dados em que ele teria entrado no plano se o plano estivesse em vigor naquele momento (MCGILL, 1962).

Sob IEN, de acordo com Winklevoss (1993), a fração dependente de cada método de custeio, definida na expressão  $k = \frac{(AL)_x}{(VPBF)_x}$ , pode ser escrita como:

$$k = \frac{s\ddot{a}_{y:x-y}^{(T)}}{s\ddot{a}_{y:r-y}^{(T)}}, \quad (4.1)$$

sendo  $y$  a idade de entrada (de início de contribuição),  $x$  a idade observada no momento da análise e  $r$  a idade de aposentadoria presumida. Em  $s\ddot{a}^{(T)}$ ,  $\ddot{a}$  a representa uma anuidade antecipada, ou seja, os pagamentos são efetuados no início de cada período; o sobrescrito  $s$  indica que a anuidade é baseada no salário; o sobrescrito  $(T)$  representa um ambiente multidecremental; os subscritos  $\overline{x-y}$  e  $\overline{r-y}$  indicam temporariedade, isto é, que o pagamento cessa no fim de  $x-y$  e  $r-y$  anos, respectivamente, ou mais cedo, caso o status  $x$  falhe. Consequentemente, sob IEN, de acordo com Winklevoss (1993),  $(AL)_x$  pode ser escrito como:

$$(AL)_x = \frac{s\ddot{a}_{y:x-y}^{(T)}}{s\ddot{a}_{y:r-y}^{(T)}} \times B_r \times {}_{r-x}p_x^{(T)} \times v^{(r-x)} \times \ddot{a}_r.$$

Assim, o benefício projetado é rateado por uma razão de anuidades temporárias baseadas no salário. Em relação à idade atual  $x$ , tem-se:

$$s\ddot{a}_{y:x-y}^{(T)} = \sum_{t=y}^{x-1} \times \frac{s_t}{s_y} \times {}_{t-y}p_y^{(T)} \times v^{(t-y)}.$$

E em relação à idade de aposentadoria  $r$ , tem-se que:

$$s\ddot{a}_{y:r-y}^{(T)} = \sum_{t=y}^{r-1} \times \frac{s_t}{s_y} \times {}_{t-y}p_y^{(T)} \times v^{(t-y)}, \quad (4.2)$$

em que  $s_t$  é o salário a idade  $t$ ;  $s_y$  é o salário do participante a idade  $y$ , ou seja, o salário inicial. A expressão 4.2 representa o valor atual do salário futuro de um empregado, da idade  $x$  a idade  $r$ , por unidade de salário na idade  $x$ .

Sob IEN, conforme Winklevoss (1993), o custo normal pode ser escrita como:

$$(CN)_x = \frac{s_x}{s_y} \times \frac{(VPBF)_y}{s\ddot{a}_{y:r-y}^{(T)}},$$

$s_x$  é o salário a idade atual  $x$ .

Explicadas as formulações aqui utilizadas, faz-se uso do conjunto de dados dos

2630 servidores e ex servidores do IPSEMC e das seguintes premissas atuariais para efetivação dos cálculos atuariais:

- Idade máxima de entrada no mercado de trabalho: 36 anos.
- Taxa real de juros anual: 6%.
- Crescimento salarial anual: 1%.
- Crescimento de benefícios: 0.
- Probabilidade de ser casado: 85%.
- Idade de aposentadoria compulsória: 70 anos.
- Tábua de entrada em invalidez: Álvaro Vindas.
- Tábua de mortalidade de inválidos: AT 49 (para ambos os sexos).

A postergação máxima da idade de aposentadoria escolhida, de 2 anos, foi definida conforme os resultados da subseção 4.3.2; nela, a idade média de aposentadoria é de 62,58 anos e a idade média de entrada no mercado de trabalho é de 30,59 anos; em relação às tábuas, comparam-se a AT-2000F (disponível no site do Instituto Brasileiro de Atuária) e as estimadas AA 2017 e LC 2017; a data base é 31 de dezembro de 2016.

Para fins comparativos, apresentam-se os valores de custo normal e reserva matemática para nove cenários, conforme as combinações de premissas expostas no Quadro 4.4.

O cenário I é a referência, ou seja, todos os outros cenários são comparados a ele, por se tratar do cenário mais conservador. Em relação ao cenário I, o cenário V varia a tábua de vida utilizada, os cenários II, III e IV variam os tempos de postergação de aposentadoria, enquanto os cenários VI, VII e VIII variam as duas premissas.

Cenário	Mortalidade	Postergação da idade de aposentadoria	Idade média de aposentadoria
I	AT 2000F	0 anos	60,22 anos
II	AT 2000F	1 anos	61,02 anos
III	AT 2000F	2 anos	61,81 anos
IV	AA 2017 ambos os sexos	0 anos	60,22 anos
V	AA 2017 ambos os sexos	1 anos	61,02 anos
VI	AA 2017 ambos os sexos	2 anos	61,81 anos
VII	LC 2017 ambos os sexos	0 anos	60,22 anos
VIII	LC 2017 ambos os sexos	1 anos	61,02 anos
IX	LC 2017 ambos os sexos	2 anos	61,81 anos

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Quadro 4.4: Descrição dos cenários, conforme as possíveis combinações de premissas.

O CN é a soma dos custos gerados pelos pagamentos de benefícios (aposentadorias programadas e aposentadoria por invalidez, ambas com reversão ao dependente, além de pensão de participantes em atividade) e a taxa de administração do plano. Aqui, no entanto, apresenta-se somente a parcela do CN correspondente à aposentadoria programada, cuja data-base é 31/12/2016, conforme a Tabela 4.39.

Tabela 4.39: Composição do Custo Normal por cenário, IPSEMC, 2016.

Cenário	Alíquota para Aposentadorias Programadas	Varição
I	20,13%	0,00%
II	18,81%	-6,56%
III	17,58%	-12,67%
IV	16,33%	-12,88%
V	15,10%	-24,99%
VI	13,95%	-30,70%
VII	15,63%	-22,35%
VIII	14,42%	-28,37%
IX	13,30%	-33,93%

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Observando-se a Tabela 4.39, é possível concluir que o CN referente à aposentadoria programada se mostrou bastante sensível às variações da tábua de mortalidade e da postergação da aposentadoria, sendo que todas elas reduziram o CN, conforme o esperado (dado que o cenário I é o mais conservador).

A Reserva Matemática Total (ou somente Reserva Matemática) é a soma da Re-

serva Matemática de Benefícios Concedidos (RMBC) e a Conceder (RMBaC), sendo necessário o cálculo prévio de RMBC e RMBaC para sua obtenção. Aqui, no entanto, foram consideradas somente as reservas associadas às aposentadorias programadas.

A RMBC apura os compromissos de participantes já em gozo de benefícios. Seu valor é determinado pela soma entre os Valores Atuais de Benefícios Futuros (VABF) e os Valores Atuais de Contribuições Futuras (VACF) de aposentados e pensionistas, e desde que se registre VABF de forma negativa. Como não faz sentido investigar o efeito da postergação da aposentadoria sobre a RM referente ao grupo de pessoas já aposentadas, seus valores não são apresentados.

A RMBaC apura o compromisso do plano com participantes ainda ativos que se aposentarão. É definida pela soma entre os VABF e VACF dos ativos, desde que se registre VABF de forma negativa. Aqui, contudo, consideraram-se apenas os riscos e benefícios relativos à aposentadoria programada. Assim, os valores de RMBaC são exibidos, para os cenários desenhados e com data-base em 31/12/2016, na Tabela 4.40.

Tabela 4.40: Composição da Reserva Matemática de Benefícios a Conceder por cenário, IPSEMC, 2016.

Cenário	VABF	VACF
I	(475.841.141,43)	110.012.466,12
II	(449.649.015,21)	107.467.701,80
III	(423.908.972,28)	104.741.172,30
IV	(419.093.897,97)	87.149.733,25
V	(392.589.960,58)	84.177.182,06
VI	(366.592.214,98)	81.080.722,47
VII	(409.545.130,73)	82.891.444,60
VIII	(383.024.209,89)	79.893.066,71
IX	(357.021.548,28)	76.783.559,39

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Tabela 4.40 indica que VABF e VACF de benefícios a concedidos variam em função da tábua de vida (da mortalidade) e da postergação da idade de aposentadoria.

Como já definido, a Reserva Matemática Total (RM) é a soma entre RMBC e RMBaC. Desconsiderando-se os benefícios de risco, seus valores são exibidos por cenário, com data-base em 31/12/2016, na Tabela 4.41.

Tabela 4.41: Composição da Reserva Matemática Total por cenário, IPSEMC, 2016.

Cenário	RM	Variação
I	(466.637.359,40)	0,00%
II	(442.989.997,50)	-5,07%
III	(419.976.484,08)	-10,00%
IV	(426.789.960,93)	-8,54, %
V	(403.258.574,72)	-13,58%
VI	(380.357.288,72)	-18,49%
VII	(421.384.462,70)	-9,70%
VIII	(397.861.919,74)	-14,74%
IX	(374.968.765,46)	-19,64%

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

A Tabela 4.41 aponta que a RM sofre influência de ambas as premissas. As variações de RM, neste caso, são grandes em decorrência do conservadorismo montado no cenário I, objeto de comparação. Ele superestima os custos, pois quando se opta pelo uso de uma tábua com baixa mortalidade – bem como quando se opta pela não postergação da aposentadoria –, as pessoas contribuem por menos tempo e recebem o benefício por mais tempo. Outros trabalhos também realizaram análise de sensibilidade de premissas, tais quais os de Leite-Sobrinho (2015) e Monteiro e Leao (2012), que focaram na variação de taxas de juros e de tábua de vida.

Esta subseção, assim, demonstrou que é possível utilizar as premissas estimadas – pelos métodos de sobrevivência aqui expostos – nos cálculos atuariais. Trata-se de um resultado importante, que necessita de réplicas noutros RPPSs, para avaliação. De acordo com o recorte escolhido, não foi verificada a solvência do RPPS em questão, dado que não foram utilizadas informações sobre seus ativos.

## Capítulo 5

### Considerações Finais

A importância da análise de premissas na formação dos cálculos atuariais vem à tona quando deparamo-nos com notícias acerca de déficits em praticamente todos os Regimes Previdenciários do Brasil. Alguns dos principais fundos de pensão, tais quais Petros (Petrobrás), Funcef (Caixa) e Postalis (Correios), amargam, conjuntamente, um déficit superior a 42 bilhões de reais (em 2017), sendo obrigados a sobretaxar seus beneficiários e patrocinadores para equacionamento do déficit atuarial; o Governo, por sua vez, desembolsou (em janeiro de 2017) 230,7 bilhões de reais para financiamento do RPPS federal (78,5 bilhões de reais) e do RGPS (152,2 bilhões de reais).

Diante desses números e ciente do impacto das premissas sobre o (des)equilíbrio atuarial dos Planos de Benefícios, objetivou-se nessa pesquisa, a partir de dados dos servidores vinculados ao IPSEMC (RPPS do município de Cabedelo/PB), analisar algumas das premissas consideradas no cálculo atuarial. Utilizando-se do tempo de postergação da aposentadoria, foi possível estimar a idade de concessão de aposentadoria e, em conjunto com a mortalidade (oriunda da tábua aqui estimada), foi realizada uma análise de sensibilidade para verificar o efeito de premissas mais “realistas” no cálculo e fornecer, assim, um melhor equacionamento de receitas e despesas. Encontrou-se que a reserva é bastante sensível à variação dos anos postergados de aposentadoria.

Adicionalmente, contribuiu-se com a estimação de diversas funções, por causa (morte, aposentadoria por tempo de contribuição, aposentadoria por idade, aposentadoria compulsória e aposentadoria por invalidez), acerca do tempo de permanência do servidor no município estudado: riscos acumulados, incidências cumulativas e os efeitos das co-

---

variáveis (Carreira, Idade de entrada, Regra de saída e Sexo) sobre o tempo e o risco de falha, qual seja, saída do servidor do serviço público.

Ainda em relação a essa variável-resposta, as modelagens com e sem riscos competitivos diferiram em relação ao efeito das covariáveis pelas causas aposentadoria por tempo de contribuição e por invalidez, tanto em termo de significância quanto em termos de direção do efeito. Para o restante das causas, os modelos estimados são muito parecidos. Assim, o conjunto de resultados deste trabalho gera um mapeamento de probabilidades e riscos, capazes de munir o atuário e os tomadores de decisão vinculados à questão previdenciária. Ressalta-se que estes argumentos são importantes nos processos de revisão de marcos regulatórios, mas devem ser sempre observados dentro do contexto político e socioeconômico no qual estão inseridos.

Dentre as limitações desse trabalho e sugestões para trabalhos futuros, destacam-se:

- Apesar de servir como referência para a aplicação de métodos pouco usuais na estimativa de premissas, o presente trabalho limita-se a analisar apenas um RPPS (isso ocorreu em função da não disponibilidade dos dados, apesar de solicitados). Assim, seria interessante a replicação do método noutros Institutos que possuam base de dados confiável (o que na prática representa outro entrave).
- A pequena quantidade de servidores, a pequena frequência para alguns eventos e a falta de algumas informações (estado civil, idade de entrada no mercado de trabalho, dentre outros) dificultaram o processo de ajuste dos diversos modelos.
- Decorrência dos itens anteriores, seria importante a criação, disseminação e utilização de sistemas que bem armazenem as informações dos servidores. A escassez de biometrias mais segmentadas e localizadas é também explicada por isso.
- Por não ser prioritário para o trabalho, abriu-se mão da realização de testes de aderência para a mortalidade, bem como dos testes de independência dos riscos.
- Já que na prática atuarial é comum a separação entre os anos postergados por carreira, sugere-se a construção dessas estimativas.

- Sugere-se, ainda, a utilização da análise de sobrevivência para a estimativa de diversas variáveis de interesse atuarial: a) tempo até a morte (cuja falha é a morte); b) tempo de serviço anterior (cuja falha é a entrada no mercado de trabalho); c) tempo de postergação, sob riscos competitivos, que considere a saída do elegível por duas causas agregadas – aposentadoria programada e benefícios de risco; d) bem como o tempo de atividade (cuja falha é a saída da atividade). Evidencia-se que o tempo de atividade se diferencia do tempo de permanência no serviço público porque este está contido naquele: o tempo de acompanhamento não se inicia na data de admissão do servidor no serviço público, mas sim na data de ingresso no mercado de trabalho.
- Para o tempo até a aposentadoria, importante variável para o cálculo da compensação previdenciária<sup>1</sup> e do Valor Presente de Benefícios Futuros, é necessário considerar duas possibilidades: o servidor não se aposentou porque ainda não pode (ainda não atende aos critérios de elegibilidade); o servidor não se aposentou porque não quis (pode se aposentar, mas deseja continuar na atividade). Como só é possível sair a partir da elegibilidade, saber se o servidor saiu nos indica a partir de quando ele completa sua elegibilidade. Por exemplo, se o servidor possui 20 anos de contribuição desde a entrada no serviço público e já se aposentou por tempo de contribuição, isso indica que ele tem pelo menos 10 anos de contribuição anterior para o RGPS, se mulher, e 15, se homem. Isso implica em uma compensação previdenciária de 1/3 do valor do benefício, aproximadamente.

Estimados, testados e selecionados os modelos, constatados os efeitos das covariáveis sobre a sobrevivência e o risco e verificado o impacto das premissas sobre RM e CN, conclui-se que é necessária a criação de insumos e geração de informações que melhor fundamentem as decisões, desde a adesão a um Plano, por parte do segurado, quanto o valor a ser cobrado na forma de contribuição. A simples adoção das premissas mínimas estabelecidas por Lei não garante aderência, liquidez e solvência do Instituto.

---

<sup>1</sup>Segundo o artigo 201, Â§ 9Â° da CF, estabelece a contagem recíproca de tempo de contribuição entre os regimes previdenciários e a compensação financeira entre eles, assegurando a contagem recíproca de tempo de contribuição na administração pública e na atividade privada, rural e urbana, hipótese em que os diversos regimes de previdência social se compensarão financeiramente

# Referências Bibliográficas

- ALBA, U. N. *Introducción a la Estadística: Econometría y Biometría Actuarial*. Madrid: [s.n.], 1965.
- ALLIGNOL, A.; BEYERSMANN, J.; SCHUMACHER, M. mvna: an r package for the nelson-aalen estimator in multistate models r news. n. 8, p. 48 – 50, 2008.
- ALLIGNOL, A.; SCHUMACHER, M.; BEYERSMANN, J. Empirical transition matrix of multi-state models: the etm package. *Journal of Statistical Software*, n. 38, p. 1 – 5, 2011.
- ANDERSEN, P. K. et al. Counting process models for life history data: a review [with discussion and reply]. *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 12, n. 2, p. 97 – 140, 1985.
- ANFIP. *Previdência Social: Contribuição ao Debate*. Brasília: Fundação ANFIP, 2016.
- AUCEJO, A. D. *Graduación de tablas de mortalidad: aplicaciones actuariales*. 260 p. Tese (Tese de Doutorado em Estadística y Investigación Operativa) — Universitat de València, Valencia, 2003.
- AUCEJO, A. D.; SUAY, F. M.; GARRIDO, R. S. A comparison of parametric models for mortality graduation: application to mortality data for the valencia region (spain). *SORT*, v. 29, n. 2, p. 269 – 288, 2005.
- AUCEJO, A. D.; SUAY, F. M.; GARRIDO, R. S. Tablas de mortalidad dinámicas. una aplicación a la hipoteca inversa en españa. *Fundación ICO - Publicaciones de la Universitat de València*, p. 1 – 50, 2009.
- BAER, H. J. et al. Risk factors for mortality in the nurses' health study: a competing risks analysis. *American Journal of Epidemiology*, v. 173, n. 3, p. 319 – 329, 2010.
- BAETA-FILHO, L. P. *Previdência no setor público: análise do custeio e déficit e suas variáveis condicionantes*. 98 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-graduação em Administração da Faculdade Novos Horizontes, Belo Horizonte, 2011.
- BEEHR, T. A. The process of retirement. *Personnel Psychology*, v. 39, p. 31–55, 1986.
- BEEHR, T. A. et al. Work and nonwork predictors of employees' retirement ages. *Journal of Vocational Behavior*, v. 57, p. 206–225, 2000.

BELTRAO, K. I.; PINHEIRO, S. *Estimativa de mortalidade para a população coberta pelos seguros privados*. Rio de Janeiro: Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada, 2002. 61 p.

BELTRAO, K. I.; SUGAHARA, S. *Tábua de mortalidade para os funcionários públicos civis federais do poder executivo por sexo e escolaridade: comparação com tábuas do mercado*. Rio de Janeiro: ENCE/IBGE, 2002. 44 p.

BERNOULLI, D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. *Histoire de L'académie Royale des Sciences*, p. 1–45, 1766.

BEYERSMANN, J.; ALLIGNOL, A.; SCHUMACHER, M. *Competing Risks and Multistate Models with R*. New York: Springer, 2012. 245 p.

BOARD, A. S. Selection of demographic and other noneconomic assumptions for measuring pension obligations. *Actuarial Standard of Practice*, n. 35, p. 1 – 20, 2014.

BORGES, G. M. *Funcionalismo público federal: construção e aplicação de tábuas biométricas*. 145 p. Dissertação (Mestrado) — Escola Nacional de Ciências Estatísticas, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro, 2009.

BOWERS, N. L. et al. *Actuarial Mathematics*. Illinois: Society of Actuaries, 1997. 753 p.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. San Francisco: HoldenDay, 1976.

BRASIL. Decreto nº 66.408, de 3 de abril de 1970. dispõe sobre a regulamentação do exercício da profissão de atuário, de acordo com o decreto-lei nº 806, de 4 de setembro de 1969. Brasília, 1970.

BRASIL. Constituição da república federativa do brasil. *Lex*, Senado Federal, Brasília, 1988.

BRASIL. Portaria nº 403, de 10 de dezembro de 2008. dispõe sobre as normas aplicáveis às avaliações e reavaliações atuariais dos regimes próprios de previdência social - rpps da união, dos estados, do distrito federal e dos municípios, define parâmetros para a segregação da massa e dá outras providências. *Lex*, Brasília, 2008.

BRASIL. *Regime próprio de previdência: perguntas e respostas*. [s.n.], 2016. Disponível em: <[www.previdencia.gov.br/perguntas-frequentes/regime-proprio-de-previdencia-perguntas-e-respostas/](http://www.previdencia.gov.br/perguntas-frequentes/regime-proprio-de-previdencia-perguntas-e-respostas/)>. Acesso em: 04 dez. 2016.

BRASIL. Mtps. secretaria de políticas de previdência social. estatísticas e informações dos rpps. disponível em: <<http://www.previdencia.gov.br/perguntas-frequentes/previdencia-social/estatisticas-e-informacoes-dos-rpps/>>. Brasília, 2018.

- BRAVO, J. M. V. *Tábuas de mortalidade contemporâneas e prospectivas: modelos estocásticos, aplicações actuariais e cobertura do risco de longevidade*. 566 p. Tese (Tese de Doutorado em Economia) — Universidade de Évora, Évora, 2007.
- BREYER, F.; KIFMANN, M. Incentives to retire later - a solution to the social security crisis? *Journal Of Pensions Economics & Finance*, v. 1, p. 111–130, 2002.
- BUTLER, J. S.; ANDERSON, K. H.; BURKHAUSER, R. V. Work and health after retirement: A competing risks model with semiparametric unobserved heterogeneity. *The Review of Economics and Statistics*, v. 71, n. 1, p. 46 – 53, 1989.
- BUTT, Z.; HABERMAN, S. Application of frailty-based mortality models using generalized linear models. *Astin Bulletin*, v. 34, n. 1, p. 175 – 197, 2004.
- BUTT, Z.; HABERMAN, S.; SHANG, H. L. *The ilc Package in R: Generalised Lee-Carter models using iterative fitting algorithms*. Tese — University of London, 2014.
- CAETANO, M. A. R. *Fundamentos acerca dos riscos associados à previdência social*. Brasília: Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada, 2006. 53 p.
- CARVALHO, M. S. et al. *Análise de sobrevivência: teoria e aplicações em saúde*. Rio de Janeiro: Fiocruz, 2011. 432 p.
- CASTRO, L. G. Nota técnica sobre a metodologia adotada pelo ministério da previdência social na extrapolação das tábuas de mortalidade ibge para as idades acima de 80 anos. *IBGE*, p. 1 – 47, 2018.
- CHALITA, L. V. A. S.; COLOSIMO, E. A.; DEMÉTRIO, C. B. G. Likelihood approximations and discrete models for tied survival data. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, n. 31, p. 1215 – 1229, 2002.
- CHIANG, C. L. On the probability of death from specific causes in the presence of competing risks. *Fourth Berkeley Symp.*, p. 169–180, 1961.
- CHIANG, C. L. *Introduction to Stochastic Process in Biostatistics*. New York: Wiley, 99 edition, 1968. 313 p.
- COELHO, E. O método de lee-carter para previsão da mortalidade. *Revista de Estudos Demográficos*, n. 37, p. 25 – 34, 2001.
- COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. *Análise de Sobrevivência Aplicada*. São Paulo: Edgard Blucher, 2006. 367 p.
- CORRÊA, C. S. *Tamanho populacional e aleatoriedade de eventos demográficos na solvência de RPPS municipais capitalizados*. 274 p. Tese (Tese de Doutorado em Demografia) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.
- CORRÊA, C. S. *Premissas Atuariais em Planos Previdenciários: uma Visão Atuarial-Demográfica*. Curitiba: Appris, 2018. 191 p.

- 
- CORTESE, G.; ANDERSEN, P. K. Competing risks and time-dependent covariates. *Biometrical Journal*, p. 138 – 158, 2009.
- COX, D. R. Regression models and life-tables (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 34, p. 187 – 220, 1972.
- CROWDER, M. *Multivariate Survival Analysis and Competing Risks*. Boca Raton: Crc Press, 2012. 393 p.
- DANIEL, J. W. *Multi-state transition models with actuarial applications*. Schaumburg: Society of Actuaries, 2004. 23 p.
- DATAPREV. *Anuário Estatístico da Previdência Social 2017*. Brasília: Ministério da Fazenda, 2018. 892 p.
- DAVID, H. A. On chiang's proportionality assumption in the theory of competing risks. *Biometrics*, v. 26, n. 2, p. 336–339, 1970.
- DEMASI, R. A. Statistical methods for multivariate failure time data and competing risks. *Handbook Of Statistics*, p. 749 – 781, 2000.
- DOLTON, P.; KLAUM, W. van der. The turnover of teachers: A competing risks explanation. *The Review of Economics and Statistics*, v. 81, n. 3, p. 543 – 552, 1999.
- FAGNANI, E. Previdência social e desenvolvimento econômico. *Texto para Discussão IE/Unicamp*, n. 140, p. 1–27, 2008.
- FELDMAN, D. C. The decision to retire early: A review and conceptualization. *Academy of Management Review*, v. 19, p. 285–311, 1994.
- FERNANDEZ, A. M. A. *Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento bootstrap*. Madrid: Editorial MAPFRE, 2008. 231 p.
- FINE, J. P.; GRAY, R. J. A proportional hazards model for the subdistribution of a competing risk. *Journal of the American Statistical Association*, v. 94, n. 446, p. 496 – 509, 1999.
- FRIAS, L. A. M.; RODRIGUEZ, P. Brazil: model life tables and stable population. *Brazilian journal of population studies*, v. 12, n. 1, p. 41–57, 02 1997.
- GALASSO, V. Postponing retirement: the political effect of aging. *Journal of Public Economics*, v. 92, p. 2157–2169, 2008.
- GANDRUD, C. Competing risks and deposit insurance governance convergence. *International Political Science Review: SAGE Publications*, v. 35, n. 2, p. 195 – 215, 2013.
- GARCIA, E. P. *Modelización y cobertura de operaciones actuariales en colectivos con múltiples estados*. 502 p. Tese (Tesis doctoral en Ciencias Económicas y Empresariales) — Universidad de Barcelona, Barcelona, 2000.

- 
- GARCIA, J. A.; SIMOES, O. A. *Matemática Actuarial: Vida e Pensões*. Coimbra: Almedina, 2010. 544 p.
- GRAY, B. cmprsk: Subdistribution analysis of competing risks. r package version 2.2-7. n. 38, p. 1 – 13, 2014.
- GREEN, A. R. et al. Attitudes of older adults with serious competing health risks toward their implantable cardioverter-defibrillators: a pilot study. *Springer Nature – BMC Geriatrics*, v. 15, n. 1, p. 1 – 9, 2015.
- GRUNKEMEIER, G. L. et al. Actual and actuarial probabilities of competing risks: apples and lemons. *The Annals of Thoracic Surgery*, v. 83, n. 5, p. 1586 – 1592, 2007.
- GUSHIKEN, L. et al. *O Regime próprio de previdência dos servidores: como implementar? Uma visão prática e teórica*. Brasília: MPS, 2002. 357 p.
- HABERMAN, S.; RUSSOLILLO, M. *Lee Carter mortality forecasting: application to the Italian population*. London: Actuarial Research Paper, 2005. 36 p.
- HELIGMAN, L.; POLLARD, J. H. The age pattern of mortality. *Readings in Population Journal of the Institute of Actuaries*, v. 107, p. 49 – 80, 1980.
- HUSTEAD, E. C. Ending the mortality table. *Society of Actuaries*, p. 1 – 14, 2005.
- IPSEMC. *Institucional*. 2017. Disponível em: <<http://www.ipsemc.pb.gov.br>>. Acesso em: 22 ago. 2017.
- IYER, S. *Matemática atuarial de sistemas de previdência social*. Brasília: Ministério da Previdência e Assistência Social, 2002. 182 p.
- JACKSON, C. flexsurv: A platform for parametric survival modeling in R. *Journal of Statistical Software*, v. 70, n. 8, p. 1–33, 2016.
- KANNISTO, V. Development of oldest-old mortality, 1950-1990: evidence from 28 developed countries. *Population Studies*, Population Investigation Committee, v. 50, 03 1996.
- KAPLAN, E. L.; MEIER, P. Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American Statistical Association*, v. 53, p. 457 – 481, 1958.
- KLEIN, P. J. et al. *Handbook of Survival Analysis*. Boca Raton: Crc Press, 2014. 632 p.
- LAWSON, K. What happened to normal retirement age? *Employee Benefit Plan Review*, v. 46, p. 12–15, 1991.
- LEE, R. D.; CARTER, L. Modeling and forecasting the time series of us mortality. *Journal of the American Statistical Association*, v. 87, n. 419, p. 659 – 671, 1992.

LEITE-SOBRINHO, B. *Formulação com taxa de juros e tábuas de mortalidade variáveis ao longo do tempo como parâmetro para aferição da razoabilidade dos valores das provisões matemáticas*. 73 p. Tese (Monografia (Especialização)) — Curso de Ciências Atuariais e Demografia, Departamento de Demografia e Ciências Atuariais, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasília, 2015.

LI, N.; LEE, R.; GERLAND, P. Extending the lee-carter method to model the rotation of age patterns of mortality decline for long-term projections. *Demography*, v. 50, n. 12, p. 1 – 15, 2013.

MACDONALD, A. S. An actuarial survey of statistical models for decrement and transition data i: multiple state, poisson and binomial models. *British Actuarial Journal*, Cambridge, p. 129 – 155, 1996.

MACDONALD, A. S. An actuarial survey of statistical models for decrement and transition data ii: competing risks, non-parametric and regression models. *British Actuarial Journal*, Cambridge, p. 429 – 448, 1996.

MACDONALD, A. S. An actuarial survey of statistical models for decrement and transition data iii: counting process models. *British Actuarial Journal*, Cambridge, p. 703 – 726, 1996.

MAKEHAM, W. M. On the law of mortality and the construction of annuity tables. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 8, p. 301 – 310, 1867.

MARTINS, F. G. L. *Metodologias de construção de tábuas biométricas seletas e finais a partir de modelos paramétricos e não-paramétricos*. 144 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ciências Atuariais, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

MASCARENHAS, R. A. C.; OLIVEIRA, A. M. R.; CAETANO, M. A. *Análise atuarial da reforma da previdência do funcionalismo público da União*. Brasília: MPS, 2004. 83 p.

MATSUYAMA, K. Economic development with endogenous retirement. *Discussion Papers from Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science (Northwestern University)*, n. 1237, 1998.

MCGILL, D. M. *Fulfilling Pension Expectations*. Pennsylvania: Pension Research Council, 1962. 314 p.

MEALLI, F.; PUDNEY, S. Occupational pensions and job mobility in competing risks model britain: Estimation of a random-effects. *Journal of Applied Econometrics – Series C (Applied Statistics)*, v. 11, p. 293 – 320, 1996.

MINISTÉRIO DA FAZENDA. *Dados abertos - estatísticas e informações dos RPPS*. 2018. Disponível em: <<http://www.previdencia.gov.br/dados-abertos>>. Acesso em: 14 out. 2018.

MONTEIRO, J. R.; LEAO, L. C. S. *Risco Atuarial no contexto da Supervisão Baseada em Riscos para Fundos de Pensão: um estudo sobre Tábuas de Mortalidade e Taxas de Juros*. 59 p. Tese (TCC (Graduação)) — Curso de Ciências Atuariais, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

NARENDRANATHAN, W.; STEWART, M. B. Modelling the probability of leaving unemployment: competing risks models with flexible base-line hazards. *Journal of Applied Econometrics – Series C (Applied Statistics)*, v. 42, n. 1, p. 63 – 83, 1993.

NEVES, C. R.; MIGON, H. S. Graduação bayesiana de taxas de mortalidade: uma aplicação na cobertura de sobrevivência e na avaliação da provisão matemática. *Revista Brasileira de Risco e Seguro*, v. 1, n. 0, p. 90–111, 12 2004.

NOGUEIRA, N. G. *O equilíbrio financeiro e atuarial dos RPPS: de princípio constitucional a política pública de Estado*. Brasília: MPS, 2012.

NOGUEIRA, N. G. *Panorama dos Regimes Próprios de Previdência Social – RPPS*. 2016. Disponível em: <<http://epge.fgv.br/conferencias/seminario-reforma-da-previdencia-2016/artigos.html>>. Acesso em: 03 set. 2017.

NUNES, F. da C.; CARVALHO, J. M. B. L. M. Tábuas geracionais: uma aplicação em planos de benefícios de entidades fechadas de previdência complementar. *In: CONGRESSO BRASILEIRO DOS FUNDOS DE PENSÃO*, 29, p. 1 – 30, 2008.

OLIVEIRA, M. et al. *Tábuas Biométricas de Mortalidade e Sobrevivência: Experiência do Mercado Segurador Brasileiro – 2010*. Rio de Janeiro: Fundação Escola Nacional de Seguros – Funenseg, 2012. 112 p.

ORTEGA, A. *Tablas de Mortalidad*. San José: Centro Latinoamericano de Demografia, 1987. 309 p.

PAES, N. A. Mortalidade em recife: aplicação de um modelo de riscos competitivos. *Revista de Saúde Pública*, São Paulo, v. 19, p. 251 – 262, 1985.

PAES, N. A. Geração de um modelo de tábuas de vida representativo da mortalidade do estado de são paulo. *Revista Brasileira de Estudos Populacionais*, v. 12, n. 1, p. 113–132, 1995.

PALACIOS, R.; WHITEHOUSE, E. Civil-service pension schemes around the world. *Munich Personal RePEc Archive*, 2006. Disponível em: <[https://mpra.ub.uni-muenchen.de/14796/1/primer\\_0602.pdf](https://mpra.ub.uni-muenchen.de/14796/1/primer_0602.pdf)>.

PITACCO, E. Multistate models for long-term care insurance and related indexing problems. *Appl. Stochastic Models Bus. Ind.*, v. 15, p. 429–441, 1999.

PRENTICE, R. L. et al. The analysis of failure times in the presence of competing risks. *Biometrics*, v. 34, n. 4, p. 541 – 554, 1978.

- PROFETA, P. Aging and retirement: Evidence across countries. *International Tax and Public Finance*, v. 9, p. 651–672, 2002.
- QUEIROZ, B. L. The determinants of male retirement in urban brazil. *Nova Economia*, v. 17, n. 1, p. 11 – 36, 2007.
- RAMOS, S. G. Construção de tábuas biométricas brasileiras: uma necessidade urgente. *Serviços Técnicos e Atuariais*, Rio de Janeiro, p. 1 – 7, 2015.
- RENSHAW, A. Actuarial graduation practice and generalized linear and non-linear models. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 118, n. 2, p. 295–312, 1991.
- RENSHAW, A. E.; HABERMAN, S. Lee-carter mortality forecasting with age-specific enhancement. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 33, n. 2, p. 255 – 272, 2003.
- REZENDE, F. A imprevidência da previdência. *Revista de Economia Política*, v. 4, n. 2, p. 51–68, 1984.
- RIBEIRO, A. J. F. *Um estudo sobre mortalidade dos aposentados por invalidez do Regime Geral de Previdência Social (RGPS)*. 191 p. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais – Cedeplar, Belo horizonte, 2006.
- RIBEIRO, A. J. F.; REIS, E. A.; BARBOSA, J. B. Construção de tábuas de mortalidade de inválidos por meio de modelos estatísticos bayesianos. *Revista Brasileira de Estudos Populacionais*, v. 27, n. 2, p. 317 – 331, 2010.
- ROBINSON, P. K.; COBERLY, S.; PAUL, C. E. Work and retirement. In: R H BINSTOCK AND E SHANAS. *Handbook of aging and the social sciences*. New York: Van Nostrand-Reinhold, 1985. p. 503–527.
- RODRIGUES, J. A. *Gestão de Risco Atuarial*. São Paulo: Saraiva, 2008. 442 p.
- ROSEN, B.; JERDEE, T. H. Postponing retirement: Can government and organizations make it attractive? *Business Horizons*, p. 72–78, November-December 1985.
- SANTOS-JUNIOR, L. C.; AZEVEDO, F. I. X. de; ANDRADE, L. de M. B. Resultado atuarial e seus determinantes. In: BRASIL Ministério da Fazenda. *Regimes Previdenciários e Situação Atuarial*. Brasília: Secretaria da Previdência, 2018. v. 36, cap. 12, p. 294–316. Disponível em: <<http://sa.previdencia.gov.br/site/2018/06/colprev36.pdf>>. Acesso em: 8 ago. 2018.
- SANTOS, M. M. *Heterogeneidade na Transição para a Vida Adulta no Brasil*. 106 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018.
- SANTOS, R. R. *Técnicas de Modelagem do Improvement para Construção de Tábuas Geracionais*. 78 p. Dissertação (Mestrado) — Pós-Graduação em Ciências Atuariais, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

- SCHOENFELD, D. Partial residuals for the proportional hazards regression mode. *Biometrika*, v. 69, n. 1, p. 239 – 241, 1982.
- SEAL, H. L. Studies in the history of probability and statistics. xxxv: Multiple decrements or competing risks. *Biometrika*, v. 64, n. 3, p. 429–439, 1977.
- SILVA, L. G. C. *Estudo da mortalidade dos servidores públicos civis do Estado de São Paulo: tábua de mortalidade destinada aos regimes próprios de previdência social*. 239 p. Dissertação (Mestrado) — Escola Nacional de Ciências Estatísticas, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro, 2008.
- SILVA, R. P. *Modelos flexíveis De sobrevivência com fração de cura: implementação computacional*. 152 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.
- SILVEIRA, T.; GOMES, I. I. *Aposentadoria programada em RPPS: abordagem dos efeitos da ponderação da real entrada em benefício no custo previdenciário*. 2017. Disponível em: <<https://drive.google.com/drive/folders/0B8RpLcmfd2ffVmFWMHpzNVpIZE0>>. Acesso em: 09 ago. 2017.
- SOUZA, M. C. M. *Um estudo sobre a mortalidade dos aposentados idosos do regime geral de previdência social do Brasil no período de 1998 a 2002*. 43 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais – Cedeplar, Belo Horizonte, 2009.
- SPREV. *Indicador de Situação Previdenciária (ISP) 2017*. Brasília: Ministério da Fazenda, 2018.
- TALAGA, J. A.; BEEHR, T. A. Retirement: A psychological perspective. In: C L COOPER AND I ROBERTSON. *International review of industrial and organizational psychology*. Chichester: Wiley, 1989. p. 185–211.
- TAYLOR, M. A.; SHORE, L. M. Predictors of planned retirement: An application of beehr's model. *Psychology and Aging*, v. 10, p. 76–83, 1995.
- THATCHER, A. R.; KANNISTO, V.; VAUPEL, J. W. The force of mortality at ages 80 to 120. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, John Wiley and Sons, v. 50, 2001.
- THERNEAU, T. A package for survival analysis in s. n. 38, p. 1 – 5, 2015.
- VARADHAN, R. et al. Evaluating health outcomes in the presence of competing risks: a review of statistical methods and clinical applications. *Medical Care*, v. 48, p. 96 – 105, 2010.
- VIEIRA, J. M. Transição para a vida adulta no brasil: análise comparada entre 1970 e 2000. *Revista Brasileira de Estudos Populacionais*, v. 25, n. 1, p. 27 – 48, 2008.

WATERS, H. R. An approach to the study of multiple state models. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 111, n. 2, p. 363–374, 1984.

WINKLEVOSS, H. E. *Pension mathematics with numerical illustrations*. 2. ed. Philadelphia: Pension Research Council, 1993. 309 p.

WONG-FUPUY, C.; HABERMAN, S. Projecting mortality trends: Recent developments in the united kingdom and the united states. *North American Actuarial Journal*, v. 8, n. 2, p. 56 – 83, 2004.

WREEDE, L. C.; FIOCCO, M.; PUTTER, H. mstate: An r package for the analysis of competing risks and multi-state models. *Journal of Statistical Software*, p. 1 – 30, 2011.

ZAPPALA, S. et al. Postponing job retirement? *Career Development International*, v. 13, n. 2, p. 150–167, 2008.

# Apêndice A

## Complemento da Mortalidade

Tabela A.1: Projeção da mortalidade brasileira para 2017 e 2018 pelo método AA.

Id	AA 2017	AA 2018	Id	AA 2017	AA 2018	Id	AA 2017	AA 2018
0	0,013031	0,012770	40	0,002510	0,002479	80	0,055765	0,055319
1	0,000860	0,000843	41	0,002669	0,002636	81	0,060095	0,059644
2	0,000558	0,000546	42	0,002852	0,002815	82	0,064631	0,064147
3	0,000426	0,000418	43	0,003061	0,003020	83	0,069470	0,068984
4	0,000351	0,000344	44	0,003294	0,003246	84	0,074620	0,074135
5	0,000302	0,000296	45	0,003548	0,003493	85	0,080127	0,079646
6	0,000269	0,000263	46	0,003822	0,003759	86	0,086089	0,085658
7	0,000246	0,000241	47	0,004119	0,004049	87	0,092488	0,092072
8	0,000232	0,000228	48	0,004435	0,004357	88	0,099492	0,099144
9	0,000226	0,000222	49	0,004776	0,004692	89	0,107048	0,106673
10	0,000230	0,000226	50	0,005143	0,005053	90	0,115420	0,115074
11	0,000247	0,000242	51	0,005541	0,005447	91	0,124643	0,124269
12	0,000279	0,000274	52	0,005968	0,005872	92	0,135018	0,134680
13	0,000336	0,000329	53	0,006421	0,006325	93	0,146718	0,146424
14	0,000428	0,000421	54	0,006907	0,006814	94	0,159962	0,159642
15	0,000712	0,000700	55	0,007438	0,007348	95	0,175206	0,174856
16	0,000885	0,000871	56	0,008006	0,007918	96	0,193161	0,192968
17	0,001041	0,001023	57	0,008600	0,008509	97	0,214165	0,213951
18	0,001163	0,001143	58	0,009219	0,009122	98	0,239368	0,239128
19	0,001260	0,001238	59	0,009878	0,009774	99	0,270418	0,270418
20	0,001356	0,001332	60	0,010596	0,010490	100	0,308805	0,308805
21	0,001452	0,001427	61	0,011383	0,011269	101	0,357699	0,357699
22	0,001519	0,001496	62	0,012268	0,012152	102	0,421419	0,421419
23	0,001550	0,001528	63	0,013259	0,013133	103	0,506105	0,506105
24	0,001554	0,001535	64	0,014362	0,014226	104	0,619012	0,619012
25	0,001547	0,001533	65	0,015563	0,015423	105	0,761888	0,761888
26	0,001542	0,001529	66	0,016861	0,016709	106	0,907527	0,907527
27	0,001547	0,001534	67	0,018308	0,018134	107	0,987855	0,987855
28	0,001574	0,001560	68	0,019950	0,019760	108	0,999833	0,999833
29	0,001619	0,001607	69	0,021763	0,021546	109	1,000000	1,000000
30	0,001671	0,001660	70	0,023716	0,023467	110		
31	0,001721	0,001710	71	0,025830	0,025559	111		
32	0,001773	0,001761	72	0,028141	0,027831	112		
33	0,001827	0,001813	73	0,030709	0,030372	113		
34	0,001886	0,001871	74	0,033525	0,033156	114		
35	0,001954	0,001938	75	0,036551	0,036149	115		
36	0,002037	0,002018	76	0,039842	0,039443	116		
37	0,002130	0,002109	77	0,043419	0,043006	117		
38	0,002240	0,002215	78	0,047347	0,046921	118		
39	0,002369	0,002343	79	0,051644	0,051205	119		

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IBGE (2016).

Tabela A.2: Projeção da mortalidade brasileira para 2017 e 2018 pelo método LC.

Id	LC 2017	LC 2018	Id	LC 2017	LC 2018	Id	LC 2017	LC 2018
0	0,019053	0,018491	40	0,003074	0,003037	80	0,056104	0,054589
1	0,001721	0,001694	41	0,003276	0,003237	81	0,059435	0,057754
2	0,000973	0,000960	42	0,003500	0,003459	82	0,063015	0,061144
3	0,000706	0,000697	43	0,003747	0,003702	83	0,066792	0,064710
4	0,000536	0,000526	44	0,004018	0,003969	84	0,070786	0,068471
5	0,000398	0,000389	45	0,004313	0,004259	85	0,075024	0,072447
6	0,000330	0,000323	46	0,004630	0,004572	86	0,079532	0,076659
7	0,000286	0,000280	47	0,004961	0,004898	87	0,084345	0,081133
8	0,000264	0,000260	48	0,005302	0,005233	88	0,089497	0,085895
9	0,000256	0,000254	49	0,005662	0,005588	89	0,095033	0,090976
10	0,000260	0,000258	50	0,006044	0,005963	90	0,101000	0,096408
11	0,000272	0,000269	51	0,006461	0,006374	91	0,107455	0,102227
12	0,000306	0,000302	52	0,006926	0,006832	92	0,114465	0,108474
13	0,000381	0,000375	53	0,007447	0,007345	93	0,122113	0,115201
14	0,000507	0,000500	54	0,008021	0,007911	94	0,130514	0,122488
15	0,000767	0,000765	55	0,008644	0,008525	95	0,139845	0,130477
16	0,000957	0,000955	56	0,009305	0,009177	96	0,150364	0,139402
17	0,001126	0,001125	57	0,009998	0,009860	97	0,162237	0,149333
18	0,001267	0,001266	58	0,010718	0,010569	98	0,174875	0,159259
19	0,001381	0,001379	59	0,011476	0,011314	99	0,188774	0,169613
20	0,001495	0,001493	60	0,012290	0,012114	100	1,000000	1,000000
21	0,001614	0,001611	61	0,013177	0,012986			
22	0,001698	0,001694	62	0,014149	0,013940			
23	0,001743	0,001737	63	0,015216	0,014991			
24	0,001761	0,001754	64	0,016386	0,016142			
25	0,001769	0,001759	65	0,017635	0,017372			
26	0,001779	0,001768	66	0,018986	0,018700			
27	0,001801	0,001788	67	0,020497	0,020179			
28	0,001840	0,001824	68	0,022199	0,021839			
29	0,001895	0,001879	69	0,024083	0,023671			
30	0,001955	0,001937	70	0,026110	0,025640			
31	0,002020	0,002000	71	0,028267	0,027737			
32	0,002089	0,002067	72	0,030600	0,030000			
33	0,002164	0,002140	73	0,033122	0,032443			
34	0,002245	0,002220	74	0,035842	0,035075			
35	0,002340	0,002312	75	0,038743	0,037877			
36	0,002447	0,002417	76	0,041843	0,040869			
37	0,002574	0,002542	77	0,045197	0,044107			
38	0,002721	0,002686	78	0,048842	0,047629			
39	0,002889	0,002853	79	0,052787	0,051443			

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IBGE (2016).

# Apêndice B

## Complemento da Análise Não Paramétrica de Risco Competitivo

Para cálculo do **Risco Acumulado Específico por Causa**, conforme (3.14), define-se uma matriz de valores lógicos que indica os possíveis tipos de transição capturados pelo modelo, cujo *output* consta na Tabela B.1.

Tabela B.1: Matriz de transição modelada para os servidores, denominada “*matriz*”, IPSEMC, 2016.

	0	1	2	3	4	5
0	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE
1	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
3	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
4	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
5	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Desta forma, o objeto matriz significa que um indivíduo pode se mover do estado 0 para qualquer outro estado absorvente, seja 1, 2, 3, 4 ou 5 – mas não considera, isto é, só modela a transição de ativo (0) para inativo (1, 2, 3, 4 ou 5), por qualquer das cinco causas (morte e aposentadorias por tempo de contribuição, idade, compulsória ou invalidez). Os indivíduos que não fazem uma transição (para um dos cinco estados competitivos) no instante  $t$  permanecem no estado inicial 0 em  $t$ .

Em seguida, agregam-se as causas e os tempos observados, além da variável *id* (indivíduo) e os eventos de censura (*cens*) num quadro de dados denominado quadro.

Este contém uma linha para cada transição observada (falha) ou censura, de modo que quadro possui tantas linhas quanto indivíduos.

As seis primeiras linhas do novo quadro de dados são exibidas na Tabela B.2.

Tabela B.2: *Dataframe* criado, denominado “quadro”.

Linha	id	from	to	time (anos)
1	1	0	cens	16,8706
2	2	0	cens	16,8706
3	3	0	cens	16,8706
4	4	0	cens	16,8679
5	5	0	cens	34,9897
6	6	0	cens	16,8679
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Em que o indivíduo 1 censura no tempo 16,87 anos, (...) o indivíduo 5 censura no momento 34,98 anos, e assim por diante.

Criada a matriz e o quadro, é possível estimar os riscos cumulativos específicos por causa, através da função *mvna()* do pacote *mvna*. Essa função exige informações sobre ao menos quatro argumentos: um quadro de dados (Tabela B.2), os nomes de estados concorrentes, a matriz que define as transições possíveis (Tabela ??) e as observações censuradas de marcação de nome.

O valor retornado pela função *mvna()* é uma lista com os componentes nomeados após as possíveis transições, no nosso caso “0 1” (saída do serviço em decorrência de morte), “0 2” (saída do serviço em decorrência de aposentadoria por TC), “0 3” (saída do serviço em decorrência de aposentadoria por idade), “0 4” (saída do serviço em decorrência de aposentadoria compulsória) e “0 5” (saída do serviço em decorrência de aposentadoria por invalidez). Por meio dela, é possível obter as estimativas (de Nelson-Aalen) do risco acumulado  $\hat{A}_{01}(t)$ , o tempo  $t$  e as estimativas da variância de  $\hat{A}_{01}(t)$ . Esses componentes são apresentados na Tabela B.3.

Tabela B.3: Argumentos do risco acumulado “0 1” (saída do serviço decorrente de morte).

time	na	var.aalen
0,000000	0,000000	0,000
0,142368	0,000000	0,000
1,048597	0,000380	0,145
1,117043	0,000761	0,289
1,207392	0,001142	0,434
1,670089	0,001142	0,434
⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Para estimar a **função de sobrevivência** a partir de uma **perspectiva multies-tado**, é necessário explicitar a computação do estimador de Kaplan-Meier quando se utiliza a função `etm()`. Aqui, agregam-se todos os estados concorrentes (1, 2, 3, 4 e 5) num único estado de absorção, também chamado de estado 1.

Cria-se então uma nova matriz de valores lógicos com apenas um possível tipo de transição, cujo *output* consta na Tabela B.4.

Tabela B.4: Matriz de transição modelada para os servidores, denominada “*matriz.mm*”, IPSEMC, 2016.

	0	1
0	FALSE	TRUE
1	FALSE	FALSE

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Em seguida, gera-se novo quadro de dados com apenas um estado de absorção, que apresenta as mesmas seis primeiras linhas que a Tabela B.2. A diferença é que agora o que não é censura recebe o valor 1; antes cada tipo de falha possuía uma codificação diferente (de 1 a 5). Estabelecidos os novos argumentos *matriz.mm* e *quadro.mm*, calcula-se o estimador de Kaplan-Meier.

Para estimar as FIA sob a perspectiva multiestado, é necessária a construção de uma matriz de valores lógicos indicando os possíveis tipos de transição dentro do modelo multiestado (tal como acontece com a análise dos riscos cumulativos específicos por causa e do estimador de Kaplan-Meier. A Tabela B.5 ilustra a FIA para  $t = 50$  anos.

Tabela B.5: FIAs estimadas para  $t = 50$  anos, IPSEMC, 2016.

$\hat{P}(T \leq t_i, X_T = 1)$	$\hat{P}(T \leq t_i, X_T = 2)$	$\hat{P}(T \leq t_i, X_T = 3)$	$\hat{P}(T \leq t_i, X_T = 4)$	$\hat{P}(T \leq t_i, X_T = 5)$
0,07068695	0,668785	0,1004781	0,02065127	0,0746294
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Tais informações podem ser constatadas na Figura B.1.

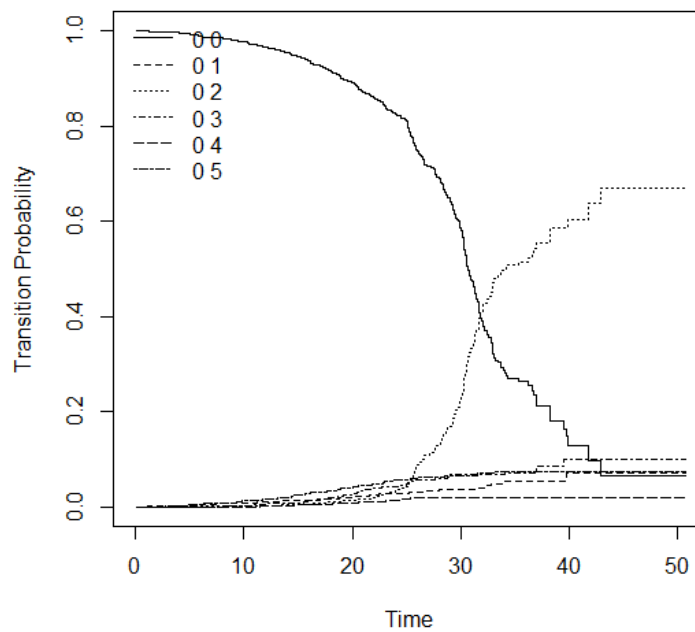


Figura B.1: Sobrevivência e FIAs estimadas, IPSEMC, 2016.

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Na Figura B.1, a curva decrescente representa a curva de sobrevivência, as crescentes, as FIAs.

# Apêndice C

## Complemento da Análise Semiparamétrica de Risco Competitivo

### SUBDISTRIBUIÇÃO DE RISCOS

Para estimar os efeitos das covariáveis sobre o tempo de permanência no serviço público por meio do modelo de Subdistribuição de Riscos, foi necessário criar um novo banco de dados, a partir do original coletado. A Tabela C.1 exibe as seis primeiras linhas desse banco. A partir de 2630 linhas (participantes), gerou-se a nova matriz, que agora possui 49042 linhas. Para observar a variação do peso de um participante qualquer, por exemplo, com  $id = 2500$ .

Tabela C.1: Matriz gerada pela construção dos pesos  $w_l(t_j)$ .

id	Tstart	Tstop	status	weight.cens	sex	car	con	cau	count	failcode
1	0	16,8706	0	1	F	Professor	N	Ativo	1	1
2	0	16,8706	0	1	F	Professor	N	Ativo	1	1
3	0	16,8706	0	1	F	Professor	N	Ativo	1	1
4	0	16,8679	0	1	F	Professor	N	Ativo	1	1
5	0	34,9897	0	1	M	Outros	N	Ativo	1	1
6	0	16,8679	0	1	F	Professor	N	Ativo	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Observa-se que no novo conjunto de dados peso, o indivíduo com  $id = 2500$  se repete em 5 blocos diferentes, que correspondem aos 5 desfechos (variável *failcode*).

Tabela C.2: Indivíduo 2500 na matriz gerada pela construção dos pesos  $w_l(t_j)$ .

Tstart	Tstop	status	weight.cens	Sexo	Carreira	Entrada	Saída	cau	count	failcode
0,00000	18,78439	5	1,00000000	F	Professor	Meia idade	2	Invalidez	1	1
18,7844	19,0856	5	0,9868	F	Professor	Meia idade	2	Invalidez	2	1
19,0856	19,8795	5	0,9837	F	Professor	Meia idade	2	Invalidez	3	1
19,8795	20,3258	5	0,9786	F	Professor	Meia idade	2	Invalidez	4	1
20,3258	20,7584	5	0,9765	F	Professor	Meia idade	2	Invalidez	5	1
20,7584	21,1964	5	0,9557	F	Professor	Meia idade	2	Invalidez	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

O indivíduo 2500 se invalidou no tempo 18,78 anos e permaneceu no banco de dados até o final do estudo. À medida que o tempo avança, depois que ele experimentou o seu desfecho, o peso  $w_l(t_j)$ , registrado na variável *weight.cens*, diminui. Após sua invalidez, ocorreram eventos em outros indivíduos, que acabaram por originar tempos distintos por desfecho. Esses tempos estão ordenados pela variável *count*, em cada bloco.

Em seguida, calculam-se as funções acumuladas relativas por causa (FIA).

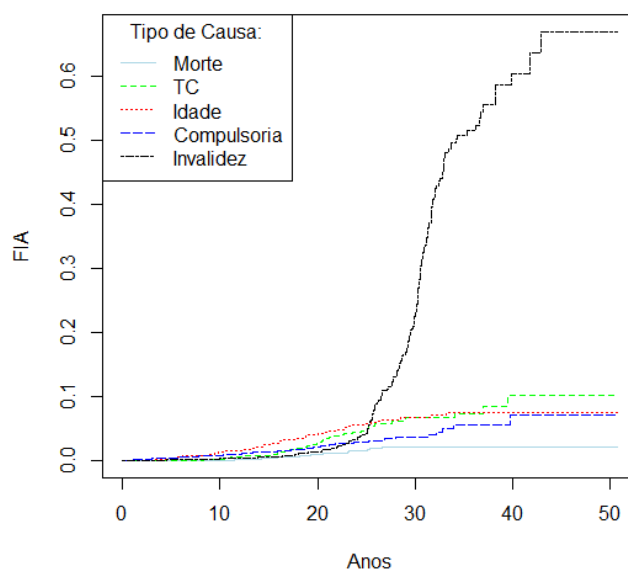


Figura C.1: FIA estimada, por causa, para o tempo de permanência no serviço público, IPSEMC, 2016.

Visualizando-se a Figura C.1, observa-se que a maior das FIAs é a da invalidez, a menor, a da morte. Como existem muitos níveis associados a Idade de Entrada e Regras de Saída, optou-se pela não exibição dos gráficos de FIA por estas covariáveis.

## Apêndice D

### Idades Estimadas de Aposentadoria

Tabela D.1: Idade de concessão de aposentadoria presumida *versus* estimadas.

Idade Presumida	Idade Observada	Idade Estim. KM	Idade Estim. Cox	Idade Estim. Gomp.
70	70	70	70	70
48	49	50	50	50
54	57	56	56	56
64	67	66	66	66
56	58	58	58	58
47	55	49	49	49
52	58	54	54	54
53	55	55	55	55
66	70	68	68	68
54	55	56	56	56
66	67	68	68	68
58	59	60	60	60
47	50	49	49	49
50	51	52	52	52
56	57	58	58	58
50	56	52	52	52
56	58	58	58	58
66	70	68	68	68
61	61	63	63	63
66	70	68	68	68
61	62	63	63	63
66	68	68	68	68
60	60	62	62	62
60	60	62	62	62
54	55	56	56	56
59	62	61	61	61
49	50	51	51	51
45	46	47	47	47
66	67	68	68	68
61	61	63	63	63
66	73	68	68	68
60	60	62	62	62
58	59	60	60	60
60	61	62	62	62
53	53	55	55	55
66	70	68	68	68
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
70	70	70	70	70
70	73	70	70	70

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

# Apêndice E

## Probabilidades de Permanecer no Serviço Público

As Tabelas deste Apêndice apresentam as estimativas da sobrevivência “global”, segundo os ajustes não paramétrico, paramétrico e semiparamétrico.

Tabela E.1: Sobrevivências estimadas pelos Modelos de Kaplan-Meier, Gompertz e Cox ajustados para o tempo de permanência do servidor no serviço público - Parte 1.

Tempo de permanência no serviço público (em anos)	Kaplan-Meier	Gompertz	Cox
0	1,000000	0,999836	1,000000
1	0,999620	0,998712	0,999703
2	0,998859	0,997364	0,999109
3	0,996669	0,995720	0,997346
4	0,995610	0,993864	0,996453
5	0,992733	0,991810	0,993971
6	0,988704	0,989207	0,990496
7	0,986396	0,985850	0,988504
8	0,984087	0,982794	0,986512
9	0,980621	0,979121	0,983520
10	0,975995	0,975189	0,979526
11	0,970765	0,969921	0,975003
12	0,966649	0,964214	0,971427
13	0,961104	0,957732	0,966296
14	0,953460	0,949545	0,958903
15	0,944972	0,941624	0,950657

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

Para ilustrar, tem-se que as probabilidades do servidor de Cabedelo/PB permanecer no serviço público, dadas todas as causas, quando possui 10, 20, 30 e 40 anos de

serviço são, respectivamente, 97,59%, 89,14%, 47,35% e 12,95%. Esses valores refletem a estabilidade e conseqüente pouca rotatividade no serviço público, além da postergação de grande parte desses servidores.

Tabela E.2: Sobrevivências estimadas pelos Modelos de Kaplan-Meier, Gompertz e Cox ajustados para o tempo de permanência do servidor no serviço público - Parte 2.

Tempo de permanência no serviço público (em anos)	Kaplan-Meier	Gompertz	Cox
16	0,936327	0,932045	0,942194
17	0,926795	0,920167	0,932802
18	0,901232	0,915193	0,907698
19	0,899769	0,893401	0,904997
20	0,891417	0,876932	0,896282
21	0,870786	0,858353	0,874710
22	0,858156	0,836920	0,861493
23	0,842213	0,814012	0,844917
24	0,825826	0,787471	0,827972
25	0,809357	0,758227	0,810959
26	0,747797	0,725566	0,747367
27	0,716848	0,690011	0,715601
28	0,690495	0,650843	0,688886
29	0,647970	0,608393	0,646117
30	0,582895	0,562956	0,580597
31	0,473576	0,512020	0,470536
32	0,391016	0,464066	0,387934
33	0,321720	0,412043	0,318400
34	0,287173	0,358954	0,283771
35	0,270918	0,306268	0,267539
36	0,263971	0,255016	0,260683
37	0,211100	0,207472	0,208388
38	0,196021	0,152179	0,193670
39	0,164493	0,102360	0,163445
40	0,129539	0,069003	0,130535

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPSEMC (2016).

# Apêndice F

## Script da Análise em Linguagem R

VIABILIZANDO LEITURA DOS DADOS

```
rm(list=ls(all=TRUE))
```

```
Dataset=read.table("idadeapos.txt",h=T)
```

```
head(Dataset)
```

```
dim(Dataset)
```

```
attach(Dataset)
```

```
names(Dataset)
```

```
summary(Dataset)
```

```
sex=sexo
```

```
sal=salario
```

```
car=carreira
```

```
cau=causa
```

```
dados=data.frame(iae,iao,status,sex,sal,car,cau,tempo)
```

```
summary(dados)
```

VARIÁVEL-RESPOSTA: POSTERGAÇÃO DA APOSENTADORIA

ANÁLISE EXPLORATÓRIA

```
par(mfrow=c(2,1))
```

```
hist(tempo,main="a) Histograma do tempo",xlab="Tempo de postergação da apo-  
sentadoria (em anos)",ylab="Frequência")
```

```
boxplot(tempo,main="b) Boxplot do tempo",ylab="Anos postergados") summary(tempo)
```

```
par(mfrow=c(2,2))
```

```
plot(sex,tempo,main="a) Tempo por sexo",xlab="Sexo",ylab="Anos postergados")
plot(car,tempo,main="b) Tempo por carreira",xlab="Carreira",ylab="Anos postergados")
```

## ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA - AUSÊNCIA DE RISCOS COMPETITIVOS

```
require(survival)
```

```
require(flexsurv)
```

### NÃO PARAMÉTRICO

a) Kaplan-Meier

Geral

```
ekm=survfit(Surv(tempo,status)~1,conf.type="plain")
```

```
summary(ekm)
```

```
X11()
```

```
plot(ekm,main=,col=c("black","red","blue"),xlab="Tempo de postergação de aposentadoria (em anos)",ylab="S(t) estimada",lty=c(1,2,3))
```

```
legend(8,0.8,col=c("black","red","blue"),c("Pontual", "Intervalar LI", "Intervalar LS"),lwd=1, bty="n",lty=c(1,2,3))
```

Por sexo

```
ekm1=survfit(Surv(tempo,status)~sex,conf.type="plain")
```

```
summary(ekm1)
```

```
X11()
```

```
plot(ekm1,main=,col=c("red","blue"),xlab="Tempo de postergação de aposentadoria (em anos)",ylab="S(t) estimada",lty=1:2)
```

```
legend(8,0.8,col=c("red","blue"),c("Feminino", "Masculino"),lwd=1,bty="n",lty=1:2)
```

Por carreira

```
ekm3=survfit(Surv(tempo,status)~car,conf.type="log-log")
```

```
summary(ekm3)
```

```
X11()
```

```
plot(ekm3,main=,col=c("blue","red"),xlab="Tempo de postergação de aposentadoria (em anos)",lty=1:2,ylab="S(t) estimada",)
```

```
legend(4,0.8,col=c("blue","red"),c("Outros", "Professor (até ensino médio)"), lwd=1,
```

```

bty="n", lty=1:2)
  Por categoria (causa)
  ekm4=survfit(Surv(tempo,status)~cau,conf.type="log-log")
  summary(ekm4)
  X11()
  plot(ekm4,main=,col=c("black","red","blue"),xlab="Tempo de postergação de apo-
sentadoria (em anos)",ylab="S(t) estimada",lty=1:3)
  legend(8,0.8,col=c("black","red","blue"),c("Compulsória","Idade","TC"),lwd=1,bty="n",lty=1:3)
  X11()
  par(mfrow=c(2,2))
  plot(ekm,main="a) Sem covariável",col=c("black","red","blue"),xlab="Tempo de pos-
tergação de aposentadoria",ylab="S(t) estimada",lty=c(1,2,3))
  legend(4,0.8,col=c("black","red","blue"),c("Pontual", "Intervalar LI","Intervalar LS"),
lwd=1, bty="n", lty=c(1,2,3))
  plot(ekm1,main="b) Por sexo ",col=c("black","blue"),xlab="Tempo de postergação
de aposentadoria",ylab="S(t) estimada",lty=1:2)
  legend(4,0.8,col=c("black","blue"),c("Feminino", "Masculino"),lwd=1,bty="n",lty=1:2)
  plot(ekm3,main="c) Por carreira",col=c("black","red"),xlab="Tempo de posterga-
ção de aposentadoria",lty=1:2,ylab="S(t) estimada",)
  legend(4,0.8,col=c("black","red"),c("Outros","Professor"),lwd=1,bty="n",lty=1:2)
Logrank -> Quando se rejeita H0, há diferença entre os grupos
survdif(Surv(tempo,status)~sex,rho=0)
survdif(Surv(tempo,status)~car,rho=0)
SEMPARAMÉTRICO
fit3=coxph(Surv(tempo,status)~sex+car,data=dados,x=T,method="breslow")
summary(fit3)
EMPATES
Aproximação Efron
fit33=coxph(Surv(tempo,status)~sex+car,data=dados,x=T,method="efron")
summary(fit33)

```

```

resid(fit33,type="scaledsch")
cox.zph(fit33, transform="identity")
par(mfrow=c(2,1))
plot(cox.zph(fit33))
Ht33=basehaz(fit33,centered=F)
tempos33=Ht33$time
H033=Ht33$hazard
S033=exp(-H033)
round(cbind(tempos33,S033,H033),digits=5)
Aproximação Exata
fit333=coxph(Surv(tempo,status)~sex+car,data=dados,x=T,method="exact")
summary(fit333)
cbind(AIC(fit3),AIC(fit33),AIC(fit333))
round(cbind(tempos33,ekm$surv,S0,S033,S0333),digits=5)
Ajustes das funções de sobrevivência (não paramétrica e paramétricas)
ekm<-survfit(Surv(tempo,status)~1)
time<-ekm$time
ajuste.km<-ekm$surv

```

Curvas de sobrevivências estimadas (breslow, efron e exato) x curva de sobrevivência de kaplan meier

```

X11()
plot(ekm, conf.int=F, xlab="Tempo de postergação da aposentadoria", ylab="S(t)",
col="black")
lines(c(0,time),c(1,S0), lty=2,col="blue")
lines(c(0,time),c(1,S033), lty=3,col="red")
lines(c(0,time),c(1,S0333), lty=4,col="green")
legend(6,0.6,c("Kaplan-Meier", "Breslow", "Efron", "Exata"), bty="n", cex=0.8, lty=1:4,
col=c("black", "blue", "red", "green"))

```

## PARAMÉTRICOS

a) Distribuição gompertz

```

ajust5=flexsurvreg(Surv(tempo,status)~sex+car,dist="gompertz")
summary(ajust5)
ajust5
shape.gomp5=ajust5$coefficients[1]
rate.gomp5=exp(ajust5$coefficients[2])
cbind(shape.gomp5,rate.gomp5)
Valor t
tg1=ajust5$res[3,1]/ajust5$res[3,4]
tg2=ajust5$res[4,1]/ajust5$res[4,4]
P-valor
1-pt(tg1,5)
1-pt(tg2,5)
Ajustes das funções de sobrevivência (não paramétrica e paramétricas)
ekm<-survfit(Surv(tempo,status) 1)
time<-ekm$time
ajuste.km<-ekm$surv
ajuste.gomp5<- exp((-rate.gomp5/shape.gomp5))*(exp(shape.gomp5*time)-1))
cbind(time,ajuste.km,S033,ajuste.gomp5)
Curvas de sobrevivências estimadas (exponencial, weibull e log-normal) x curva de
sobrevivência de kaplan meier
X11()
plot(ekm, conf.int=F, xlab="Tempo de postergação de aposentadoria", ylab="S(t)")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.gomp5), lty=2,col="blue")
lines(c(0,time),c(1,S033), lty=3,col="red")
legend(4,0.8,lty=1:3,c("Kaplan-Meier","Gompertz","Cox (Efron)"), bty="n", cex=0.8,
col=c("black","blue","red"))
AIC(fit33,ajust5,ajust55)
OUTROS
Tempo médio
t<- tempo[status==1]

```

---

```

tj<-c(0,as.numeric(levels(as.factor(t))))
surv<-c(1,as.numeric(levels(as.factor(ekm$urv))))
surv<-sort(surv, decreasing=T)
k<-length(tj)-1
prod<-matrix(0,k,1)
for(j in 1:k)
prod[j]<-(tj[j+1]-tj[j])*surv[j]
tm<-sum(prod)
tm
Valor médio residual (vmr)
vmrkm0=(sum(ekm$urv[2:11]))/(ekm$urv[1]) #vmr(0)
vmrkm1=(sum(ekm$urv[3:11]))/(ekm$urv[2]) #vmr(1)
vmrkm2=(sum(ekm$urv[4:11]))/(ekm$urv[3]) #vmr(2)
vmrkm3=(sum(ekm$urv[5:11]))/(ekm$urv[4]) #vmr(3)
vmrkm4=(sum(ekm$urv[6:11]))/(ekm$urv[5]) #vmr(4)
vmrkm5=(sum(ekm$urv[7:11]))/(ekm$urv[6]) #vmr(5)
vmrkm6=(sum(ekm$urv[8:11]))/(ekm$urv[7]) #vmr(6)
vmrkm7=(sum(ekm$urv[9:11]))/(ekm$urv[8]) #vmr(7)
vmrkm8=(sum(ekm$urv[10:11]))/(ekm$urv[9]) #vmr(8)
vmrkm10=(sum(ekm$urv[11:11]))/(ekm$urv[10]) #vmr(10)
vmrkm13=(sum(ekm$urv[11:11]))/(ekm$urv[11]) #vmr(13)
cbind(vmrkm0, vmrkm1, vmrkm2, vmrkm3, vmrkm4, vmrkm5, vmrkm6, vmrkm7,
vmrkm8, vmrkm10, vmrkm13)
vmrcox0=(sum(S033[2:11]))/(S033[1]) #vmr(0)
vmrcox1=(sum(S033[3:11]))/(S033[2]) #vmr(1)
vmrcox2=(sum(S033[4:11]))/(S033[3]) #vmr(2)
vmrcox3=(sum(S033[5:11]))/(S033[4]) #vmr(3)
vmrcox4=(sum(S033[6:11]))/(S033[5]) #vmr(4)
vmrcox5=(sum(S033[7:11]))/(S033[6]) #vmr(5)
vmrcox6=(sum(S033[8:11]))/(S033[7]) #vmr(6)

```

---

```

vmrcox7=(sum(S033[9:11]))/(S033[8]) #vmr(7)
vmrcox8=(sum(S033[10:11]))/(S033[9]) #vmr(8)
vmrcox10=(sum(S033[11:11]))/(S033[10]) #vmr(10)
vmrcox13=(sum(S033[11:11]))/(S033[11]) #vmr(13)
cbind(vmrcox0, vmrcox1, vmrcox2, vmrcox3, vmrcox4, vmrcox5, vmrcox6, vmr-
cox7, vmrcox8, vmrcox10, vmrcox13)
vmrgompc0=(sum(ajuste.gomp5[2:11]))/(ajuste.gomp5[1]) #vmr(0)
vmrgompc1=(sum(ajuste.gomp5[3:11]))/(ajuste.gomp5[2]) #vmr(1)
vmrgompc2=(sum(ajuste.gomp5[4:11]))/(ajuste.gomp5[3]) #vmr(2)
vmrgompc3=(sum(ajuste.gomp5[5:11]))/(ajuste.gomp5[4]) #vmr(3)
vmrgompc4=(sum(ajuste.gomp5[6:11]))/(ajuste.gomp5[5]) #vmr(4)
vmrgompc5=(sum(ajuste.gomp5[7:11]))/(ajuste.gomp5[6]) #vmr(5)
vmrgompc6=(sum(ajuste.gomp5[8:11]))/(ajuste.gomp5[7]) #vmr(6)
vmrgompc7=(sum(ajuste.gomp5[9:11]))/(ajuste.gomp5[8]) #vmr(7)
vmrgompc8=(sum(ajuste.gomp5[10:11]))/(ajuste.gomp5[9]) #vmr(8)
vmrgompc10=(sum(ajuste.gomp5[11:11]))/(ajuste.gomp5[10]) #vmr(10)
vmrgompc13=(sum(ajuste.gomp5[11:11]))/(ajuste.gomp5[11]) #vmr(13)
cbind(vmrgompc0, vmrgompc1, vmrgompc2, vmrgompc3, vmrgompc4, vmrgompc5,
vmrgompc6, vmrgompc7, vmrgompc8, vmrgompc10, vmrgompc13)
p0km=(sum(ekm$surv[2:11]))/(ekm$surv[1]) #vmr(0)
p0g1=(sum(ajuste.gomp[2:11]))/(ajuste.gomp[1]) #vmr(0)
p0g2=(sum(ajuste.gomp5[2:11]))/(ajuste.gomp5[1]) #vmr(0)
p0c=(sum(S033[2:11]))/(S033[1]) #vmr(0)
cbind(p0km,p0g1,p0g2,p0c)
ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA - PRESENÇA DE RISCOS COMPETITIVOS
VIABILIZANDO LEITURA DOS DADOS
rm(list=ls(all=TRUE))
require(survival)
require(flexsurv)
Dataset=read.table("idadeaposrc.txt",h=T)

```

```
head(Dataset)
dim(Dataset)
attach(Dataset)
names(Dataset)
summary(Dataset)
sex=sexo
sal=salario
car=carreira
cau=causa
dados=data.frame(iae,iao,status,sex,sal,car,cau,tempo)
summary(dados)
NÃO PARAMÉTRICO
Risco Específico por Causa Acumulado
Definição de matriz de valores lógicos que indica os possíveis tipos de transição
matriz=matrix(FALSE,ncol=3,nrow=3)
dimnames(matriz)=list(c("0", "1", "2"), c("0", "1", "2"))
matriz[1,2:3]=TRUE
matriz
table(sub)
id=seq_along(sub)
from=rep(0,length(sub))
to=as.factor(ifelse(sub==0,"cens",sub))
quadro=data.frame(id,from,to,time=tempo)
library(mvna)
r.acum=mvna(quadro,c("0", "1", "2"),matriz,"cens")
head(r.acum)
head(r.acum[["0 1"]], c( "time", "na", "var.aalen"))
Plot
if(require(lattice))
xyplot(r.acum,ylab="Risco acumulado",xlab="Tempo")
```

Função de sobrevivência

```
f.sobr=survfit(Surv(time,to!="cens")~1,data=quadro,conf.type="log-log")
plot(f.sobr,xlab="Tempo",ylab="Probabilidade de Sobrevivência",mark.time=FALSE,lwd=2)
```

Estimando a função de sobrevivência a partir de uma perspectiva multiestado

```
matriz.mm=matrix(FALSE,ncol=2,nrow=2)
dimnames(matriz.mm)=list(c("0","1"), c("0","1"))
matriz.mm[1,2]=TRUE
matriz.mm
```

Em seguida, geramos um quadro de dados correspondente de my.data com apenas um estado de absorção:

```
quadro.mm=quadro
quadro.mm$to=ifelse(quadro.mm$to == "cens", "cens", 1)
head(quadro.mm)
```

Calculamos o estimador Kaplan-Meier usando o pacote etm

```
library(etm)
f.sobr.mm=etm(quadro.mm,c("0","1"),matriz.mm,"cens",s=0)
```

Probabilidades de transição

```
plot(f.sobr.mm)
lines(x=f.sobr.mm$time,y=f.sobr.mm$est[1,1,],type="s",col="red")
```

Funções de incidência cumulativa

```
require(cmprsk)
fia=cuminc(quadro$time,quadro$to, cencode = "cens")
fia
```

```
plot(fia,ylab="Probabilidade",xlab="Tempo (anos)")
```

Estimando as funções de incidência cumulativa de uma perspectiva multiestado

```
fia.mm=etm(quadro,c("0","1","2","3","4","5"),matriz,"cens",s=0)
fia.mm
plot(fia.mm)
```

PARAMÉTRICOS (CAUSA POR CAUSA)

CAUSA 1: APOSENTADORIA POR TEMPO DE CONTRIBUIÇÃO

a) Supondo distribuição exponencial

```
ajust1=survreg(Surv(tempo,etc)~sex+car,dist="exponential")
```

```
summary(ajust1)
```

```
ajust1$loglik
```

```
alpha.exp=exp(ajust1$coefficients[1])
```

```
alpha.exp
```

```
gama.exp=1/ajust1$scale
```

```
cbind(gama.exp, alpha.exp)
```

b) Supondo distribuição weibull

```
ajust2=survreg(Surv(tempo,etc)~sex+car,dist="weibull")
```

```
summary(ajust2)
```

```
ajust2$loglik
```

```
alpha.wei=exp(ajust2$coefficients[1])
```

```
gama.wei=1/ajust2$scale
```

```
cbind(gama.wei, alpha.wei)
```

c) Supondo distribuição log-normal

```
ajust3=survreg(Surv(tempo,etc)~sex+car,dist="lognorm")
```

```
summary(ajust3)
```

```
ajust3$loglik
```

```
mi=ajust3$coefficients[1]
```

```
sigma=ajust3$scale
```

```
cbind(mi,sigma)
```

d) Supondo distribuição gamma generalizada original

```
ajust4=flexsurvreg(Surv(tempo,etc)~sex+car,dist="gengamma.orig")
```

```
ajust4
```

e) Supondo distribuição gompertz

```
ajust5=flexsurvreg(Surv(tempo,etc)~sex+car,dist="gompertz")
```

```
ajust5
```

```
ajust5$coefficients
```

```
shape.gomp=ajust5$coefficients[1]
```

```
rate.gomp=exp(ajust5$coefficients[2])
```

```
cbind(shape.gomp,rate.gomp)
```

Valor t

```
tg11=ajust5$res[3,1]/ajust5$res[3,4]
```

```
tg22=ajust5$res[4,1]/ajust5$res[4,4]
```

P-valor

```
1-pt(tg11,5)
```

```
1-pt(tg22,5)
```

f) Supondo distribuição log-logística ajust6= flexsurvreg(Surv(tempo,etc) ~ sex + car, dist="llogis")

```
summary(ajust6)
```

```
ajust6$coefficients
```

```
shape.llog=exp(ajust6$coefficients[1])
```

```
scale.llog=exp(ajust6$coefficients[2])
```

```
cbind(shape.llog,scale.llog)
```

Valor t

```
tl11=ajust6$res[3,1]/ajust6$res[3,4]
```

```
tl22=ajust6$res[4,1]/ajust6$res[4,4]
```

P-valor

```
1-pt(tg11,5)
```

```
1-pt(tg22,5)
```

Ajustes das funções de sobrevivência (não paramétrica e paramétricas)

```
ekm<-survfit(Surv(tempo,etc)~1)
```

```
time<-ekm$time
```

```
ajuste.km<-ekm$surv
```

```
ajuste.exp<- exp(-time/alpha.exp)
```

```
ajuste.weib<- exp(-(time/alpha.wei)^gamma.wei)
```

```
ajuste.ln<- pnorm((-log(time)+ mi)/sigma)
```

```
ajuste.gomp<- exp(-(rate.gomp/shape.gomp))*(exp(shape.gomp*time)-1))
```

```
ajuste.llog<- 1/(1+(time/scale.llog)^shape.llog)
```

```

cbind(time,ajuste.km,ajuste.exp,ajuste.weib,ajuste.ln,ajuste.gomp,ajuste.llog)
Curvas de sobrevivências estimadas x curva de sobrevivência de kaplan meier
X11()
plot(ekm, conf.int=F, xlab="Tempo de permanência no serviço público", ylab="S(t)")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.exp), lty=2,col="red")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.weib), lty=3,col="blue")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.ln), lty=4,col="green")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.gomp), lty=5,col="purple")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.llog), lty=6,col="pink")
legend(1,0.9,lty=c(1,2,3,4,5,6),c("Kaplan-Meier", "Exponencial", "Weibull", "Log-normal",
"Gompertz", "Log-Logístico"), bty="n", cex=0.8, col=c("black", "red", "blue", "green",
"purple", "pink"))

```

Teste da razão de verossimilhança

H0 para cada caso é: a distribuição representa um bom modelo (ajusta bem os dados).

Gama Generalizada

ll.gg=ajust4\$loglik

Exponencial

ll.e=ajust1\$loglik[2]

a=2\*(ll.gg-ll.e)

Weibull

ll.w=ajust2\$loglik[2]

b=2\*(ll.gg-ll.w)

Log-normal

ll.ln=ajust3\$loglik[2]

c=2\*(ll.gg-ll.ln)

Gompertz

ll.go=ajust5\$loglik

d=2\*(ll.gg-ll.go)

Log-logística

---

```

ll.llog=ajust6$loglik
e=2*(ll.gg-ll.llog)
cbind(a,b,c,d,e)
P-valor
1-pchisq(a,2)
1-pchisq(b,1)
1-pchisq(c,1)
1-pchisq(d,1)
1-pchisq(e,1)
cbind(AIC(ajust1),AIC(ajust2),AIC(ajust3),AIC(ajust4),AIC(ajust5),AIC(ajust6))
SEMIPARAMÉTRICO
fit3=coxph(Surv(tempo,status)~sex+car,data=dados,x=T,method="breslow")
summary(fit3)
resid(fit3,type="scaledsch")
cox.zph(fit3, transform="identity")
par(mfrow=c(2,1))
plot(cox.zph(fit3))
Ht=basehaz(fit3,centered=F)
tempos=Ht$time
H0=Ht$hazard
S0=exp(-H0)
round(cbind(tempos,S0,H0),digits=5)
Curvas de sobrevivências estimadas x curva de sobrevivência de kaplan meier
X11()
plot(ekm, conf.int=F, xlab="Tempo de postergação da aposentadoria", ylab="S(t)",
col="black")
lines(c(0,time),c(1,S0), lty=2,col="blue")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.llog), lty=3,col="red")
legend(6,0.6,c("Kaplan-Meier", "Cox (Breslow)", "Log-logística"), bty="n", cex=0.8,
lty=1:3, col=c("black", "blue", "red"))

```

## CAUSA 2: APOSENTADORIA POR IDADE

a) Supondo distribuição exponencial

```
ajust1=survreg(Surv(tempo,sid)~sex+car,dist="exponential")
```

```
summary(ajust1)
```

```
alpha.exp=exp(ajust1$coefficients[1])
```

```
alpha.exp
```

```
gama.exp=1/ajust1$scale
```

```
cbind(gama.exp, alpha.exp)
```

b) Supondo distribuição weibull

```
ajust2=survreg(Surv(tempo,sid)~sex+car,dist="weibull")
```

```
summary(ajust2)
```

```
alpha.wei=exp(ajust2$coefficients[1])
```

```
gama.wei=1/ajust2$scale
```

```
cbind(gama.wei, alpha.wei)
```

c) Supondo distribuição log-normal

```
ajust3=survreg(Surv(tempo,sid)~sex+car,dist="lognorm")
```

```
summary(ajust3)
```

```
mi=ajust3$coefficients[1]
```

```
sigma=ajust3$scale
```

```
cbind(mi,sigma)
```

d) Supondo distribuição gamma generalizada original

```
ajust4=flexsurvreg(Surv(tempo,sid)~sex+car,dist="gengamma.orig")
```

e) Supondo distribuição gompertz

```
ajust5=flexsurvreg(Surv(tempo,sid)~sex+car,dist="gompertz")
```

```
ajust5
```

```
shape.gomp=ajust5$coefficients[1]
```

```
rate.gomp=exp(ajust5$coefficients[2])
```

```
cbind(shape.gomp,rate.gomp)
```

Valor t

```
tg11=ajust5$res[3,1]/ajust5$res[3,4]
```

```
tg22=ajust5$res[4,1]/ajust5$res[4,4]
```

P-valor

```
1-pt(tg11,5)
```

```
1-pt(tg22,5)
```

f) Supondo distribuição log-logística

```
ajust6=flexsurvreg(Surv(tempo,sid)~sex+car,dist="llogis")
```

```
ajust6
```

```
shape.llog=exp(ajust6$coefficients[1])
```

```
scale.llog=exp(ajust6$coefficients[2])
```

```
cbind(shape.llog,scale.llog)
```

Valor t

```
tl11=ajust6$res[3,1]/ajust6$res[3,4]
```

```
tl22=ajust6$res[4,1]/ajust6$res[4,4]
```

P-valor

```
1-pt(tg11,5)
```

```
1-pt(tg22,5)
```

Ajustes das funções de sobrevivência (não paramétrica e paramétricas)

```
ekm<-survfit(Surv(tempo,stc)~1)
```

```
time<-ekm$time
```

```
ajuste.km<-ekm$surv
```

```
ajuste.exp<- exp(-time/alpha.exp)
```

```
ajuste.weib<- exp(-(time/alpha.wei)^gama.wei)
```

```
ajuste.ln<- pnorm((-log(time)+ mi)/sigma)
```

```
ajuste.gomp<- exp(-(rate.gomp/shape.gomp))*(exp(shape.gomp*time)-1)
```

```
ajuste.llog<- 1/(1+(time/scale.llog)^shape.llog)
```

```
cbind(time,ajuste.km,ajuste.exp,ajuste.weib,ajuste.ln,ajuste.gomp,ajuste.llog)
```

Curvas de sobrevivências estimadas x curva de sobrevivência de kaplan meier

```
X11()
```

```
plot(ekm, conf.int=F, xlab="Tempo de permanência no serviço público", ylab="S(t)")
```

```
lines(c(0,time),c(1,ajuste.exp), lty=2,col="red")
```

---

```

lines(c(0,time),c(1,ajuste.weib), lty=3,col="blue")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.ln), lty=4,col="green")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.gomp), lty=5,col="purple")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.llog), lty=6,col="pink")
legend(1,0.9,lty=c(1,2,3,4,5,6), c("Kaplan-Meier", "Exponencial", "Weibull", "Log-
normal", "Gompertz", "Log-Logístico"), bty="n", cex=0.8, col=c("black", "red", "blue",
"green", "purple", "pink"))

```

d) Teste da razão de verossimilhança

Gama Generalizada

$ll.gg = ajust4\$loglik$

Exponencial

$ll.e = ajust1\$loglik[2]$

$a = 2 * (ll.gg - ll.e)$

Weibull

$ll.w = ajust2\$loglik[2]$

$b = 2 * (ll.gg - ll.w)$

Log-normal

$ll.ln = ajust3\$loglik[2]$

$c = 2 * (ll.gg - ll.ln)$

Gompertz

$ll.go = ajust5\$loglik$

$d = 2 * (ll.gg - ll.go)$

Log-logística

$ll.llog = ajust6\$loglik$

$e = 2 * (ll.gg - ll.llog)$

$cbind(a,b,c,d,e)$

P-valor

$1-pchisq(a,2)$

$1-pchisq(b,1)$

$1-pchisq(c,1)$

---

```

1-pchisq(d,1)
1-pchisq(e,1)
cbind(AIC(ajust1),AIC(ajust2),AIC(ajust3),AIC(ajust4),AIC(ajust5),AIC(ajust6))
SEMIPARAMÉTRICO
fit3=coxph(Surv(tempo,sid)~sex+car,data=dados,x=T,method="breslow")
summary(fit3)
resid(fit3,type="scaledsch")
cox.zph(fit3, transform="identity")
par(mfrow=c(2,1))
plot(cox.zph(fit3))
Ht=basehaz(fit3,centered=F)
tempos=Ht$time
H0=Ht$hazard
S0=exp(-H0)
round(cbind(tempos,S0,H0),digits=5)
Curvas de sobrevivências estimadas x curva de sobrevivência de kaplan meier
X11()
plot(ekm, conf.int=F, xlab="Tempo de postergação da aposentadoria", ylab="S(t)",
col="black")
lines(c(0,time),c(1,S0), lty=2,col="blue")
lines(c(0,time),c(1,ajuste.llog), lty=3,col="red")
legend(6,0.6,c("Kaplan-Meier", "Cox (Breslow)", "Log-logística"), bty="n", cex=0.8,
lty=1:3, col=c("black","blue","red"))

```

RISCOS COMPETITIVOS DUAS CAUSAS DE SAÍDA: TEMPO DE CONTRIBUIÇÃO E IDADE)

- a) Risco Específico por Causa - eventos independentes  
 stc Status = 1 se Causa=TC Status = 0 caso contrário  
 sid Status = 1 se Causa=Idade Status = 0 caso contrário  
 Surv(tempo,stc) Surv(tempo,sid)  
 Efeito das covariáveis sobre as causas

TC

```
saida.espec2=coxph(Surv(tempo,cau=="tc")~sex+car,data=dados)
```

```
saida.espec2
```

```
cox.zph(saida.espec2)
```

```
par(mfrow=c(3,3))
```

```
plot(cox.zph(saida.espec2))
```

Idade

```
saida.espec4=coxph(Surv(tempo,cau=="idade")~sex+car,data=dados)
```

```
saida.espec4
```

```
cox.zph(saida.espec4)
```

```
par(mfrow=c(3,3))
```

```
plot(cox.zph(saida.espec4))
```

b) Subdistribuições dos Riscos - eventos dependentes

Status = 0 se motivo=compulsoria (censura) Status = 1 se motivo=tc Status = 2

se motivo=Idade

```
Surv(tempo,sub)
```

```
table(sub,cau)
```

```
require(cmprsk)
```

Sem efeito de covariável

```
fia=survfit(Surv(tempo,event=sub>0)~1,etype=cau,data=dados)
```

```
X11()
```

```
plot(fia,ylab="FIA",xlab="Anos",fun="event",lty=c(1,2),col=c("black","blue"))
```

```
legend("topleft",c("Idade","TC"),title="Tipo de Causa:",lty=c(1,2),col=c("black","blue"))
```

```
testeGray1=cuminc(ftime=tempo,fstatus=sub,group=sex,cencode="0")
```

```
testeGray2=cuminc(ftime=tempo,fstatus=sub,group=car,cencode="0")
```

Cálculo do peso wij

```
require(mstate)
```

```
compete.peso=crprep(Tstop="tempo", status="sub", cens=0, trans=1:2, keep=c("sex",
"car", "cau"), data=dados)
```

```
head(compete.peso)
```

```
dim(compet.e.peso)
```

Analisando o modelo com as 2 covariáveis para a causa TC

```
saida2=coxph(Surv(Tstart,Tstop,cau=="tc")~sex+car, data=compet.e.peso, sub-  
set=failcode==1, weights=weight.cens)
```

```
saida2
```

Analisando o modelo com as 2 covariáveis para a causa Idade

```
saida3=coxph(Surv(Tstart,Tstop,cau=="idade")~sex+car, data=compet.e.peso, sub-  
set=failcode==2, weights=weight.cens)
```

```
saida3
```

```
AIC(saida2)
```

```
AIC(saida3)
```

A mesma análise para modelo baseado em subdistribuição de risco:

```
par(mfrow=c(1,2))
```

```
plot(cox.zph(saida2))
```

```
plot(cox.zph(saida3))
```