



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

# Estudos Numéricos para Escoamentos Viscoelásticos com a Viscosidade dependendo da Pressão

Rodrigo Koiti Ishizaka

Orientador: Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Fevereiro de 2018



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Estudos Numéricos para Escoamentos  
Viscoelásticos com a Viscosidade dependendo  
da Pressão**

Rodrigo Koiti Ishizaka

Orientador: Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Fevereiro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação - Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação - UNESP, Campus de Presidente Prudente

I77e Ishizaka, Rodrigo Koiti.  
Estudos numéricos para escoamentos viscoelásticos com a viscosidade dependendo da pressão / Rodrigo Koiti Ishizaka. – 2018  
90 f.

Orientador: Gilcilene Sanchez de Paulo  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2018  
Inclui bibliografia

1. Viscosidade dependendo da Pressão. 2. Modelo Oldroyd-B. 3. Escoamento Poiseuille. 4. Expansão Planar 1:4. I. Paulo, Gilcilene Sanchez de. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

Alessandra Kuba Oshiro Assunção  
CRB-8/9013

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Estudos numéricos para escoamentos viscoelásticos com a viscosidade dependendo da pressão

**AUTOR: RODRIGO KOITI ISHIZAKA**

**ORIENTADORA: GILCILENE SANCHEZ DE PAULO**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



Profa. Dra. GILCILENE SANCHEZ DE PAULO

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Profa. Dra. ANALICE COSTACURTA BRANDI

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Dr. JORGE PEIXINHO

Pesquisador Visitante Instituto de Matemática Pura e Aplicada / Université du Havre

Presidente Prudente, 28 de fevereiro de 2018

*Dedico à minha família,  
Seiji, Inês e Renato.*

---

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por esta conquista. Agradeço por ter me guiado durante toda esta jornada e por permitir que eu chegasse até aqui.

À minha família, em especial aos meus pais, Seiji e Inês, por todo apoio e compreensão. Sem vocês, este sonho não seria possível.

À minha orientadora, Professora Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo, por toda dedicação, experiência, incentivo e principalmente paciência. Admiro sua forma de trabalho e complemento dizendo que sua orientação não poderia ter sido melhor. Orientadora esta na qual tive o prazer de trabalhar.

Aos professores da UNESP, pelo conhecimento e aprendizado compartilhado tanto dentro como fora das salas de aula.

Ao Laboratório de Simulação Numérica da FCT/UNESP, pelo suporte computacional.

Aos amigos do mestrado, em especial à Jéssica, Laison e Letícia, agradeço imensamente cada gesto de carinho, conselho e incentivo. Por me fazer acreditar que eu era capaz quando até eu mesmo duvidava disso.

Aos amigos, que me acompanharam durante todo este processo. Agradeço pela companhia e compreensão.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

E, por fim, a todos que fizeram parte deste trabalho e que contribuíram, de forma direta ou indireta, para que isto fosse possível.

*“A persistência é o caminho do êxito.”*  
***Charles Chaplin***

# Resumo

---

O presente trabalho de mestrado consiste em apresentar uma modelagem para escoamentos isotérmicos viscoelásticos em que a viscosidade varia de acordo com a pressão e estudos numéricos para alguns problemas bidimensionais, como escoamentos entre placas paralelas e expansão planar 1:4. Para este trabalho é utilizado o modelo viscoelástico Oldroyd-B e uma modelagem linear da viscosidade com relação a pressão. O método numérico desenvolvido é baseado no método da projeção para desacoplar velocidade e pressão nas equações de Navier-Stokes e depois calcula os tensores pela equação constitutiva com a informação da viscosidade variando com a pressão. As equações são discretizadas em uma malha deslocada pelo método de diferenças finitas. Os resultados numéricos são obtidos das simulações de escoamentos em um canal e expansão planar 1:4 bidimensional, cujo foco é destacar algumas diferenças entre o modelo Oldroyd-B *Standard* e o modelo Oldroyd-B sob influência da viscosidade que varia linearmente com a pressão. Este trabalho de mestrado também tem por objetivo resolver problemas, com fluidos viscoelásticos, em que haja regiões com variações da pressão e estudar estes resultados numéricos comparando-os com o modelo Oldroyd-B *Standard*.

Palavras-Chave: *Viscosidade dependendo da Pressão, Modelo Oldroyd-B, Escoamento Poiseuille, Expansão Planar 1:4.*



# Abstract

---

The present master's work consists in presenting a model for viscoelastic isothermal flows with pressure-dependent viscosity and numerical studies for some two-dimensional problems, such as channel flow and planar expansion 1:4. In this work will be considered the Oldroyd-B viscoelastic model and a linear modeling viscosity with a linear relationship between viscosity and pressure. The numerical method developed is based on the projection method to decouple velocity and pressure in the Navier-Stokes equations and then calculates the tensor from the constitutive equation taking account the pressure-dependent viscosity. The equations are discretized on a staggered grid by using the finite difference method. The numerical results are obtained for two problems: two-dimensional channel and planar expansion 1:4 flows, whose focus is to highlight some differences between the standard Oldroyd-B model and the Oldroyd-B model under the influence of viscosity that varies linearly with pressure. This master's work aims to solve problems of viscoelastic fluids in which there exist regions where pressure varies and to study these numerical results comparing them with the standard Oldroyd-B model.

Keywords: *Pressure-Dependent Viscosity, Oldroyd-B Model, Poiseuille Flow, Planar Expansion 1:4.*



# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                                                                               |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1  | Representação de uma célula deslocada com as componentes do vetor velocidade $\mathbf{u}$ armazenada na face. . . . .                                                                                         | 32 |
| 3.2  | Classificação das células em um domínio computacional para escoamento confinado. . . . .                                                                                                                      | 32 |
| 3.3  | Representação dos pontos para aproximação por média aritmética dos tensores. . . . .                                                                                                                          | 37 |
| 3.4  | Configurações das células computacionais para a discretização dos tensores. . . . .                                                                                                                           | 38 |
| 3.5  | Representação da célula do <i>inflow</i> . . . . .                                                                                                                                                            | 39 |
| 3.6  | Representação da célula do <i>outflow</i> . . . . .                                                                                                                                                           | 39 |
| 3.7  | Representação da célula <i>full</i> $[\mathbf{F}]$ em contato com o contorno rígido ou <i>inflow</i> . . . . .                                                                                                | 40 |
| 3.8  | Configuração para o contorno rígido paralelo ao eixo x. . . . .                                                                                                                                               | 41 |
| 3.9  | Configuração para o contorno rígido paralelo ao eixo y. . . . .                                                                                                                                               | 42 |
| 4.1  | Esboço da geometria para o escoamento entre duas placas paralelas ao eixo $x$ . . . . .                                                                                                                       | 45 |
| 4.2  | Refinamento de malha para a velocidade $u$ . . . . .                                                                                                                                                          | 46 |
| 4.3  | Refinamento da malha computacional para os tensores. . . . .                                                                                                                                                  | 47 |
| 4.4  | Comparação da viscosidade dependendo da pressão. . . . .                                                                                                                                                      | 48 |
| 4.5  | Gráfico 3D da pressão para o Modelo 1: $z = p(x_i, y_j)$ no tempo $t = 25$ , com $x_i = 0.05 \cdot \delta x$ , $i = 0, 1, \dots, 200$ e $y_j = 0.05 \cdot \delta y$ , $j = 0, 1, \dots, 20$ . . . . .         | 49 |
| 4.6  | Gráfico 3D da pressão para o Modelo 2: $z = p(x_i, y_j)$ no tempo $t = 25$ , com $x_i = 0.05 \cdot \delta x$ , $i = 0, 1, \dots, 200$ e $y_j = 0.05 \cdot \delta y$ , $j = 0, 1, \dots, 20$ . . . . .         | 49 |
| 4.7  | Comparação dos Modelos 1 e 2: $z = p(x_i, y_j)$ no tempo $t = 25$ , com $x_i = 0.05 \cdot \delta x$ , $i = 0, 1, \dots, 200$ ; valores da pressão na linha central, no corte longitudinal $y = 0.5$ . . . . . | 50 |
| 4.8  | Comparação dos modelos para a componente $u$ de velocidade. . . . .                                                                                                                                           | 50 |
| 4.9  | Comparação dos modelos para os tensores: a) componente $\tau_P^{xx}$ do tensor não-Newtoniano, b) componente $\tau_P^{xy}$ do tensor não-Newtoniano. . . . .                                                  | 51 |
| 4.10 | Variação do coeficiente $\gamma$ com $Re = 1.0$ . . . . .                                                                                                                                                     | 52 |
| 4.11 | Variação do coeficiente $\gamma$ com $Re = 5.0$ . . . . .                                                                                                                                                     | 53 |
| 4.12 | Variação do coeficiente $\gamma$ com $Re = 10.0$ . . . . .                                                                                                                                                    | 54 |
| 4.13 | Variação de $Re$ com $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$ . . . . .                                                                                                                                                     | 55 |
| 4.14 | Variação de $Re$ com $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ . . . . .                                                                                                                                                     | 56 |
| 4.15 | Variação de $\beta$ . . . . .                                                                                                                                                                                 | 57 |
| 4.16 | Variação de Weissenberg com $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$ . . . . .                                                                                                                                              | 58 |
| 4.17 | Variação de Weissenberg com $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ . . . . .                                                                                                                                              | 59 |
| 4.18 | Esboço da geometria para expansão 1:4. . . . .                                                                                                                                                                | 60 |
| 4.19 | Localização dos cortes transversais em $x = 30$ e $x = 40$ na expansão planar 1:4. . . . .                                                                                                                    | 61 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.20 | Comparação do perfil $u$ de velocidade. Resultados numéricos do presente trabalho em linha contínua e resultados numéricos de [19] em símbolos para o caso Newtoniano. . . . .                                                                                                                                                                                                 | 61 |
| 4.21 | Esboço da malha computacional para o cálculo do comprimento dos vórtices. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 62 |
| 4.22 | Comparação da bifurcação da assimetria dos vórtices para um fluido Newtoniano. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 63 |
| 4.23 | Variação de $\gamma$ para um corte longitudinal em uma expansão planar em $y = 0$ , para $Re = 40$ , $\beta = 0.1$ , $Wi = 0.1$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. c) Zoom da Pressão. d) Zoom da Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: e) $\tau_P^{xx}$ e f) $\tau_P^{xy}$ . . . . .                                                            | 66 |
| 4.24 | Variação de $\gamma$ para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em $x = 30$ , para $Re = 40$ , $\beta = 0.1$ , $Wi = 0.1$ : a) Perfil da componente $u$ de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d) $\tau_P^{xx}$ e e) $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor $\tau_P^{xy}$ . . . . .                                  | 67 |
| 4.25 | Variação de $\gamma$ para um corte transversal em $x = 45$ , para $Re = 40$ , $\beta = 0.1$ , $Wi = 0.1$ : a) Componente $u$ de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d) $\tau_P^{xx}$ e e) $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor $\tau_P^{xy}$ . . . . .                                                                       | 68 |
| 4.26 | Variação de $\gamma$ para um corte longitudinal em uma expansão planar 1:4 em $y = 0$ , para $Re = 80$ , $\beta = 0.1$ , $Wi = 0.1$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. c) Zoom da Pressão. d) Zoom da Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: e) $\tau_P^{xx}$ e f) $\tau_P^{xy}$ . . . . .                                                        | 70 |
| 4.27 | Variação de $\gamma$ para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em $x = 30$ , para $Re = 80$ , para $Re = 40$ , $\beta = 0.1$ , $Wi = 0.1$ : a) Perfil da componente $u$ de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d) $\tau_P^{xx}$ e e) $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor $\tau_P^{xy}$ . . . . .                 | 71 |
| 4.28 | Variação de $\gamma$ para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em $x = 45$ , para $Re = 80$ , para $Re = 40$ , $\beta = 0.1$ , $Wi = 0.1$ : a) Perfil da componente $u$ de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d) $\tau_P^{xx}$ e e) $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor $\tau_P^{xy}$ . . . . .                 | 72 |
| 4.29 | Variação de $Wi$ para um corte longitudinal em uma expansão planar 1:4 em $y = 0$ , para $Re = 80$ , $\beta = 0.75$ e $\gamma = 0.02$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. c) Zoom da Viscosidade $H_P$ . Componentes do Tensor não-Newtoniano: d) $\tau_P^{xx}$ e e) $\tau_P^{xy}$ . . . . .                                                                              | 74 |
| 4.30 | Variação de $Wi$ para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em $x = 30$ , para $Re = 80$ , $\beta = 0.75$ e $\gamma = 0.02$ : a) Perfil da componente $u$ de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d) $\tau_P^{xx}$ e e) $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor $\tau_P^{xy}$ . . . . .                                | 75 |
| 4.31 | Variação de $Wi$ para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em $x = 45$ , para $Re = 80$ , $\beta = 0.75$ e $\gamma = 0.02$ : a) Perfil da componente $u$ de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. d) Zoom da Viscosidade $H_P$ . Componentes do Tensor não-Newtoniano: e) $\tau_P^{xx}$ e f) $\tau_P^{xy}$ . g) Zoom do Tensor $\tau_P^{xy}$ . . . . . | 76 |
| 4.32 | Variação de $\beta$ para um corte longitudinal em uma expansão planar 1:4 em $y = 0$ , para $Re = 80$ , $Wi = 0.1$ e $\gamma = 0.07$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: c) $\tau_P^{xx}$ e d) $\tau_P^{xy}$ . . . .                                                                                                                | 77 |

- 4.33 Variação de  $\beta$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 30$ , para  $Re = 80$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Perfil da componente u de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xx}$ . . . . . 78
- 4.34 Variação de  $\beta$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 45$ , para  $Re = 80$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Perfil da componente u de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xx}$ . . . . . 79
- 4.35 Variação de  $Re$  para um corte longitudinal em uma expansão planar 1:4 em  $y = 0$ , para  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: c)  $\tau_P^{xx}$  e d)  $\tau_P^{xy}$ . . . . . 80
- 4.36 Variação de  $Re$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 30$ , para  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Componente u de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . . . . . 82
- 4.37 Variação de  $Re$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 45$ , para  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Perfil da componente u de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . . . . . 83



## Lista de Tabelas

---

|      |                                                                                                                                                                                                                               |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1  | Malhas computacionais. . . . .                                                                                                                                                                                                | 46 |
| 4.2  | Erro Relativo para as variáveis $u$ , $\tau_P^{xx}$ e $\tau_P^{xy}$ . . . . .                                                                                                                                                 | 47 |
| 4.3  | Ordem de convergência espacial para as variáveis $u$ , $\tau_P^{xx}$ e $\tau_P^{xy}$ . . . . .                                                                                                                                | 48 |
| 4.4  | Comprimento dos vórtices para um fluido Newtoniano. . . . .                                                                                                                                                                   | 62 |
| 4.5  | Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando $\beta$ para o modelo Oldroyd-B <i>Standard</i> à esquerda e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão à direita, com $Re = 40$ e $Wi = 0.5$ . . . . .  | 64 |
| 4.6  | Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando $Wi$ para o modelo Oldroyd-B <i>Standard</i> à esquerda e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão à direita, com $Re = 80$ e $\beta = 0.75$ . . . . . | 64 |
| 4.7  | Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando $Re$ para o modelo Oldroyd-B <i>Standard</i> à esquerda e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão à direita, com $Wi = 0.1$ e $\beta = 0.1$ . . . . . | 64 |
| 4.8  | Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano para o modelo Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão variando $\gamma$ , com $Re = 40$ , $\beta = 0.1$ e $Wi = 0.1$ . . . . .                                 | 65 |
| 4.9  | Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano para o modelo Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão variando $\gamma$ , com $Re = 80$ , $\beta = 0.1$ e $Wi = 0.1$ . . . . .                                 | 69 |
| 4.10 | Comprimento dos vórtices de um fluido viscoelástico variando $Wi$ , com $Re = 80$ , $\beta = 0.75$ e $\gamma = 0.02$ . . . . .                                                                                                | 73 |
| 4.11 | Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando $\beta$ , com $Re = 80$ , $Wi = 0.1$ e $\gamma = 0.07$ . . . . .                                                                                                | 77 |
| 4.12 | Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando $Re$ , com $Wi = 0.1$ , $\beta = 0.1$ e $\gamma = 0.07$ . . . . .                                                                                               | 80 |



---

## Lista de Siglas

CFL: *Courant-Friedrichs-Lewy*

EE: Euler Explícito

EI: Euler Implícito

FENE-CR: *Finite Extendable Non-linear Elastic - Chilcott and Rallison*

GENSMAC: *Generalized Simplified Marker-and-Cell*

MAC: *Marker-and-Cell*

SMAC: *Simplified Marker-and-Cell*

TDHH: Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge

UCM: *Upper Convective Maxwell*



---

# Sumário

|                                                                                       |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Resumo</b>                                                                         | <b>7</b>  |
| <b>Abstract</b>                                                                       | <b>9</b>  |
| <b>Lista de Figuras</b>                                                               | <b>10</b> |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                                               | <b>13</b> |
| <b>Lista de Siglas</b>                                                                | <b>17</b> |
| <b>Capítulos</b>                                                                      |           |
| <b>1 Introdução</b>                                                                   | <b>21</b> |
| <b>2 Formulação Matemática</b>                                                        | <b>23</b> |
| 2.1 Equações Governantes . . . . .                                                    | 23        |
| 2.2 Modelo Newtoniano . . . . .                                                       | 23        |
| 2.3 Modelo Não-Newtoniano . . . . .                                                   | 24        |
| 2.3.1 Equação da Viscosidade Dependendo da Pressão . . . . .                          | 25        |
| 2.4 Adimensionalização . . . . .                                                      | 25        |
| 2.4.1 Adimensionalização para o Modelo Não-Newtoniano . . . . .                       | 27        |
| 2.5 Condição de Fronteira e Cálculo do Tensor em Contornos Rígidos . . . . .          | 28        |
| <b>3 Metodologia Numérica</b>                                                         | <b>31</b> |
| 3.1 Malha Computacional . . . . .                                                     | 31        |
| 3.2 Classificação das Células . . . . .                                               | 32        |
| 3.3 Método e Solução baseado no Método da Projeção . . . . .                          | 33        |
| 3.4 Integração Temporal da Equação da Quantidade de Movimento . . . . .               | 34        |
| 3.5 Integração Temporal da Equação Constitutiva . . . . .                             | 35        |
| 3.6 Discretização Espacial e Tratamento das Variáveis de Contorno . . . . .           | 36        |
| 3.7 Algoritmo Computacional . . . . .                                                 | 43        |
| <b>4 Resultados Numéricos</b>                                                         | <b>45</b> |
| 4.1 Verificação da Metodologia Numérica . . . . .                                     | 45        |
| 4.2 Simulação Numérica para Escoamento Poiseuille . . . . .                           | 48        |
| 4.2.1 Comparação entre Modelos . . . . .                                              | 48        |
| 4.2.2 Variação do Coeficiente da Viscosidade dependendo da Pressão $\gamma$ . . . . . | 51        |
| 4.2.3 Variação do Número de Reynolds . . . . .                                        | 54        |
| 4.2.4 Variação de $\beta$ . . . . .                                                   | 57        |
| 4.2.5 Variação do Número de Weissenberg . . . . .                                     | 58        |
| 4.3 Simulação Numérica para Expansão 1:4 . . . . .                                    | 60        |

|          |                               |           |
|----------|-------------------------------|-----------|
| 4.3.1    | Caso Newtoniano . . . . .     | 60        |
| 4.3.2    | Caso Não-Newtoniano . . . . . | 63        |
| <b>5</b> | <b>Conclusão</b>              | <b>85</b> |
|          | <b>Referências</b>            | <b>86</b> |

# Introdução

O estudo de um escoamento viscoelástico em que a viscosidade depende da pressão tem sido uma abordagem bastante atual. Por este motivo, livros ou artigos que tratam sobre este conceito são pouco encontrados na literatura.

Stokes [21] foi o primeiro a introduzir a relação entre a viscosidade e pressão. Posteriormente, Barus desenvolveu os trabalhos [2] e [3] onde supôs a viscosidade dependendo da pressão regida por lei linear e exponencial, respectivamente.

Muitos trabalhos desenvolvidos até então que envolvem escoamentos viscoelásticos, têm tratado principalmente a transferência ou variação da temperatura. Trabalhos como [23], [12] e [20] investigam os efeitos causados pela influência da viscosidade que depende da temperatura para placas paralelas, tubos e dutos retangulares 2:1, respectivamente.

Já a viscosidade dependendo da pressão têm sido aplicada em problemas que envolvem lubrificação elastohidrodinâmica, que ocorre quando duas superfícies que estão em contato apresentam um movimento de rolamento. Em 1997, Larsson [13] aplica este conceito em problemas de engrenagem invertida. Mais tarde, em 2005, estudos sobre os efeitos da pressão na viscosidade para materiais poliméricos são feitos para poliestireno atático e sindiotático [18]. Neste, é utilizada a expressão da viscosidade dependendo da pressão exponencial proposta por Barus [3].

Alguns autores têm desenvolvido trabalhos recentes, tais como [11] e [14]. Housiadas [11] por exemplo, estudou o escoamento de um fluido viscoelástico entre duas placas paralelas, cuja viscosidade varia linearmente com a pressão. Este apresentou a solução analítica para as variáveis envolvidas em um escoamento utilizando o modelo *Upper Convective Maxwell* (UCM), isto é, para fluidos totalmente viscoelásticos.

O presente trabalho tem por objetivo analisar o comportamento de um escoamento, cujo fator de influência seja a pressão. Este estudo possibilitou o surgimento do coeficiente  $\gamma$ , responsável por controlar o quanto a pressão influencia na viscosidade, e, consequentemente, no escoamento. Análises referentes a este coeficiente podem ser tratadas a fim de destacar algumas diferenças entre o modelo Oldroyd-B *Standard* e o modelo Oldroyd-B sob influência da viscosidade que varia linearmente com a pressão. Para isto, é apresentado o desenvolvimento de uma metodologia para o escoamento de um fluido viscoelástico sob estas condições para o modelo Oldroyd-B. A metodologia utilizada é baseada no Método da Projeção, onde as equações são discretizadas pelo método de diferenças finitas em uma malha deslocada. Tem como plataforma de simulação o FREEFLOW-2D e conta com o auxílio de outra ferramenta computacional para análise dos resultados, o Matlab. Para estudo, é considerado um escoamento de Poiseuille totalmente desenvolvido entre duas placas paralelas e que também é aplicada em outra geometria, a expansão planar 1:4.

Os conteúdos estudados são divididos em capítulos estruturados da seguinte maneira:

- o capítulo 2 apresenta a formulação matemática do problema. Define as equações que descrevem um escoamento incompressível e isotérmico de um fluido, sendo estas as equações de Navier-Stokes, além de apresentar as equações para o modelo viscoelástico. Discorre ainda sobre um tópico de grande relevância para o desenvolvimento deste trabalho, a adimensionalização das equações;
- o capítulo 3 apresenta a metodologia numérica. Tem por finalidade informar o tipo de malha, métodos numéricos e discretização utilizada para o desenvolvimento deste trabalho. Ainda, é possível encontrar o algoritmo computacional utilizando a formulação explícita para os tensores e semi-implícita para velocidade;
- o capítulo 4 apresenta os resultados numéricos obtidos para duas geometrias: canal reto e expansão planar 1:4 bidimensional. Este, tem por finalidade mostrar a verificação da metodologia e a coleta de resultados para escoamentos viscoelásticos sob a influência da viscosidade que varia linearmente com a pressão;
- e, por último, o capítulo 5 discorre sobre as conclusões geradas a partir do estudo.

# Formulação Matemática

## 2.1 Equações Governantes

As equações de Navier-Stokes tem por objetivo descrever o escoamento de um fluido. Assim, para estudar escoamentos incompressíveis e isotérmicos, as equações que descrevem este tipo de escoamento são a equação da continuidade e a equação da quantidade de movimento, expressas, na forma conservativa sem a ação da gravidade, respectivamente, por

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade,  $t$  é o tempo,  $\rho$  é a densidade do fluido e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor tensão total dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.2)$$

em que  $p$  é a pressão,  $\mathbf{I}$  o operador identidade e  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor simétrico cuja representação bidimensional é dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Neste trabalho, as equações (2.1) são utilizadas em coordenadas cartesianas bidimensionais da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial y} \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{yy}}{\partial y} \end{cases} \quad (2.4)$$

## 2.2 Modelo Newtoniano

Um fluido é classificado como Newtoniano se a taxa de deformação é proporcional a tensão aplicada. A equação constitutiva para este tipo de fluido é dada por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_S \mathbf{D}, \quad (2.5)$$

onde  $\eta_S$  é a viscosidade dinâmica do fluido e  $\mathbf{D}$  é o tensor deformação expresso da seguinte maneira

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (2.6)$$

onde

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad (\nabla \mathbf{u})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Assim,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e as equações (2.4) tornam-se,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_S \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_S \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (2.9)$$

## 2.3 Modelo Não-Newtoniano

Para escoamentos de fluidos viscoelásticos, escreve-se o tensor tensão pela soma de uma parcela viscosa (Newtoniana) e outra elástica (não-Newtoniana), ou seja,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_S \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau}_P. \quad (2.10)$$

Assim, a equação da quantidade de movimento, apresentada no sistema (2.1) torna-se,

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = -\nabla p + \eta_S \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P, \quad (2.11)$$

ou ainda, em coordenadas cartesianas bidimensionais, segue que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_S \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial y} \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_S \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial y} \end{cases} \quad (2.12)$$

A equação constitutiva de um fluido viscoelástico para o modelo Oldroyd-B é dada por

$$\boldsymbol{\tau}_P + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = 2\eta_P \mathbf{D}, \quad (2.13)$$

onde  $\eta_P$  é a viscosidade polimérica do fluido,  $\lambda$  é o tempo de relaxação e  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P$  é a derivada convectiva contravariante definida por

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}\boldsymbol{\tau}) - (\nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (2.14)$$

Definindo cada termo da equação (2.14), têm-se

$$\nabla(\mathbf{u}\boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(u\tau^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau^{xy})}{\partial y} & \frac{\partial(u\tau^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau^{yy})}{\partial y} \\ \frac{\partial(u\tau^{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau^{xx})}{\partial y} & \frac{\partial(u\tau^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau^{xy})}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad (2.15)$$

$$\nabla\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{yx} & \tau^{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau^{yx} \frac{\partial u}{\partial y} & \tau^{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau^{yx} \frac{\partial v}{\partial y} & \tau^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla\mathbf{u})^T = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{yx} & \tau^{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} & \tau^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau^{xy} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau^{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} & \tau^{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

### 2.3.1 Equação da Viscosidade Dependendo da Pressão

O conceito da viscosidade dependendo da pressão tem sido um tópico abordado atualmente e é demonstrado por alguns autores que o aumento da pressão implica no aumento da viscosidade [5]. Existem diferentes equações que aplicam este conceito. Barus [3] propõe uma lei exponencial, onde a viscosidade varia exponencialmente com a pressão. Esta, é expressa por

$$\eta_P(p) = \eta_0 \exp(\gamma p), \quad (2.18)$$

onde  $\eta_P(p)$  é a viscosidade polimérica à uma pressão  $p$  acima da ambiente,  $\eta_0$  é a viscosidade à uma pressão  $p = 0$ ,  $\gamma$  é o coeficiente constante da viscosidade dependendo da pressão em  $\text{Pa}^{-1}$  e  $p$  é a pressão normal em Pa.

Barus [2] ainda propôs uma lei linear cuja viscosidade varia linearmente com a pressão. Trabalhos como [11] apresenta a seguinte relação

$$\eta_P(p) = \eta_0[1 + \gamma(p - p_{ref})], \quad (2.19)$$

onde  $\eta_P(p)$  é a viscosidade polimérica que varia com a pressão,  $\eta_0$  é a viscosidade à uma pressão de referência  $p_{ref}$  e  $p$  é a pressão normal.

Neste trabalho, é utilizada a viscosidade que varia linearmente com a pressão expressa por (2.19).

## 2.4 Adimensionalização

Nesta seção, será tratada cada componente de uma equação dimensional para transformá-la em uma equação adimensional. Isso permite estudar escoamentos de grandes escalas em uma escala reduzida, conhecendo suas grandezas físicas.

As escalas de grandezas utilizadas para o escoamento de um fluido são  $L$ ,  $U$  e  $\rho$ , que representam, respectivamente, o comprimento e a velocidade característicos do escoamento e a densidade do fluido.

Assim, a relação entre a variável dimensional e adimensional, que por sua vez será denotada por  $*$ , são definidas abaixo.

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \boldsymbol{\tau}_P^* = \frac{\boldsymbol{\tau}_P}{\rho U^2}, \quad \gamma^* = \gamma \rho U^2.$$

Através deste processo, ainda é possível realizar o agrupamento de algumas variáveis que fornece os parâmetros ou números adimensionais.

- *Número de Reynolds ( $Re$ )*: Relaciona as forças inerciais e viscosas do escoamento. Este apresenta diferentes formulações dependendo da modelagem adotada

1. Modelo Newtoniano

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_S}, \quad (2.20)$$

onde  $\eta_S$  é a viscosidade dinâmica do fluido.

2. Modelo viscoelástico

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_0}, \quad (2.21)$$

onde  $\eta_0$  é a viscosidade total a uma taxa nula de cisalhamento, expressa por  $\eta_0 = \eta_S + \eta_P$ . Ainda têm-se que  $\eta_S$  é a viscosidade do solvente e  $\eta_P$  é a viscosidade do polímero. Para o modelo viscoelástico em que a viscosidade depende da pressão, tem-se que  $\eta_0$  representa a viscosidade a uma pressão nula, ou seja,  $\eta_0 = \eta_S + \eta_P(0)$ .

- *Número de Weissenberg ( $Wi$ )*: É um parâmetro que caracteriza um fluido viscoelástico, definido por

$$Wi = \frac{\lambda U}{L}. \quad (2.22)$$

É representado pela razão entre a escala de tempo característico do fluido  $\lambda$  e a escala de tempo característico do escoamento.

- *Parâmetro  $\beta$* : Relaciona a viscosidade do solvente com a viscosidade total do fluido. Isso permite ter o controle sobre a contribuição Newtoniana do fluido que será estudado, dado por

$$\beta = \frac{\eta_S}{\eta_0}. \quad (2.23)$$

Note que, quando  $\beta = 1$  significa que o fluido é Newtoniano.

- *Função  $H_P$* : É a função da viscosidade polimérica que varia com a pressão na forma adimensional. O surgimento desta se dá somente para problemas que envolvem escoamentos viscoelásticos com a viscosidade dependendo da pressão. É a razão entre a viscosidade do polímero e a viscosidade total do fluido, definida por

$$H_P(p) = \frac{\eta_P(p)}{\eta_0}, \quad (2.24)$$

onde  $\eta_0$  é a viscosidade total medida a uma pressão nula, expressa por  $\eta_0 = \eta_S + \eta_P(0)$ . Neste trabalho, os valores para esta função serão determinados pela equação da viscosidade dependendo da pressão, já estudada na seção anterior.

A seguir, as equações de Navier-Stokes serão adimensionalizadas para o modelo não-Newtoniano.

### 2.4.1 Adimensionalização para o Modelo Não-Newtoniano

Da mesma forma, utilizando agora as equações dadas por (2.12) referentes ao modelo não-Newtoniano, obtem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial y} \end{cases} \quad (2.25)$$

Tem-se ainda, que a equação constitutiva para o modelo Oldroyd-B adimensionalizada é dada por

$$\boldsymbol{\tau}_P + Wi \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = \frac{2}{Re} H_P(p) \mathbf{D}. \quad (2.26)$$

Reescrevendo a equação (2.26) em coordenadas cartesianas bidimensionais, segue que

$$\frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial t} = 2 \left( \tau_P^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_P^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial (u \tau_P^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (v \tau_P^{xx})}{\partial y} - \frac{\tau_P^{xx}}{Wi} + 2 \frac{H_P(p)}{Re Wi} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial t} = 2 \left( \tau_P^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_P^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial (u \tau_P^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial (v \tau_P^{yy})}{\partial y} - \frac{\tau_P^{yy}}{Wi} + 2 \frac{H_P(p)}{Re Wi} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial t} = \tau_P^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_P^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (u \tau_P^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v \tau_P^{xy})}{\partial y} - \frac{\tau_P^{xy}}{Wi} + \frac{H_P(p)}{Re Wi} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.29)$$

Por último, a adimensionalização para a equação da viscosidade dependendo da pressão (2.19) é dada por

$$H_P(p) = 1 + \gamma p - \gamma p_{ref}. \quad (2.30)$$

Através das equações (2.24) e (2.30), chega-se na seguinte relação

$$\frac{\eta_P(p)}{\eta_0} = 1 + \gamma p - \gamma p_{ref}. \quad (2.31)$$

Como  $\beta = \frac{\eta_S}{\eta_0}$ , então tem-se que

$$\beta = \frac{\eta_S}{\eta_0} = \frac{\eta_S}{\eta_S + \eta_P(0)}, \quad (2.32)$$

e, somando e subtraindo a viscosidade polimérica  $\eta_P(0)$  no numerador, obtem-se

$$(1 - \beta) = \frac{\eta_P(0)}{\eta_0} = H_P(0). \quad (2.33)$$

Assim, para que  $H_P(p)$  esteja bem definida em  $p = 0$ , considera-se, neste trabalho,

$$p_{ref} = \beta \cdot \frac{1}{\gamma}. \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.30), vem

$$H_P(p) = (1 - \beta) + \gamma p. \quad (2.35)$$

## 2.5 Condição de Fronteira e Cálculo do Tensor em Contornos Rígidos

Nesta seção, serão apresentadas as condições de fronteira referentes ao injetor, ejedor e contorno rígido.

- Fronteira de Injetor: Responsável pela injeção de fluido no domínio, são adotadas as seguintes condições de contorno

$$\mathbf{u}_{\vec{n}} = u_{inflow}, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{u}_{\vec{t}} = 0, \quad (2.37)$$

onde  $\mathbf{u}_{\vec{n}}$  e  $\mathbf{u}_{\vec{t}}$  é a componente normal e tangencial da velocidade, respectivamente. Ainda,  $u_{inflow}$  é a velocidade com que o fluido é injetado no escoamento. Já para o tensor neste tipo de fronteira adota-se

$$\boldsymbol{\tau}_P = 0. \quad (2.38)$$

- Fronteira de Ejedor: Responsável pela saída de fluido do domínio, são adotadas para as componentes do vetor velocidade e também para o tensor a condição de Neumann homogênea. Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\vec{n}}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\vec{t}}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_P}{\partial \vec{n}} = 0. \quad (2.41)$$

- Fronteira de Contorno Rígido: Para este tipo de fronteira existem duas possibilidades quando levado em consideração o posicionamento do contorno rígido.

### 1. Contorno rígido paralelo ao eixo $x$ .

Pela característica de impermeabilidade tem-se que a velocidade normal ao contorno é nula, ou seja

$$u_n = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2.42)$$

Ainda, pela condição *no-slip*, não haverá deslizamento sob esta superfície, isto é, a velocidade tangencial será nula:

$$u_t = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.43)$$

Logo, pela equação da continuidade, tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.44)$$

Simplificando as equações (2.27), (2.28) e (2.29), obtem-se

$$\frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial t} = 2\tau_P^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\tau_P^{xx}}{Wi}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial t} = -\frac{\tau_P^{yy}}{Wi}, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial t} = \tau_P^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\tau_P^{xy}}{Wi} + \frac{H_P(p)}{ReWi} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.47)$$

2. Contorno rígido paralelo ao eixo  $y$ .

Pela característica de impermeabilidade tem-se que a velocidade normal ao contorno é nula, ou seja

$$u_n = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.48)$$

Ainda, pela condição *no-slip*, não haverá deslizamento sob esta superfície, isto é, a velocidade tangencial será nula.

$$u_t = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.49)$$

Logo, pela equação da continuidade, tem-se que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.50)$$

De forma análoga, simplificando as equações, obtem-se

$$\frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial t} = -\frac{\tau_P^{xx}}{Wi}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial t} = 2\tau_P^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\tau_P^{yy}}{Wi}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial t} = \tau_P^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\tau_P^{xy}}{Wi} + \frac{H_P(p)}{ReWi} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.53)$$



## Metodologia Numérica

O método MAC (*Marker-and-Cell*), desenvolvido por Amsden e Harlow, é uma técnica baseada no método de diferenças finitas em uma malha deslocada. As aplicações deste, são encontradas em problemas que dependem do tempo, como o escoamento de fluido incompressível. Trabalho como [10] descreve detalhadamente esta metodologia. Posteriormente, foi desenvolvida uma nova versão, chamada SMAC (*Simplified Marker-and-Cell*) [1], tendo também as equações de Navier-Stokes discretizadas por diferenças finitas. De acordo com [1] e [8], o método SMAC elimina as dificuldades das condições de fronteira para a equação de Poisson e o ciclo computacional é dividido em duas partes, uma para calcular a velocidade e outra a pressão.

Finalmente, a metodologia GENSMAC (*Generalized Simplified Marker-and-Cell*), proposta por Tomé e Mackee [22] em 1994, baseada no método SMAC, tem suas modificações feitas de modo a solucionar problemas para domínios arbitrários e no caso de escoamentos com superfícies livres, diminuir o armazenamento de partículas marcadoras do fluido, guardando apenas as partículas que descrevem a superfície livre. A plataforma de simulação FREEFLOW-2D, que é utilizada neste trabalho, aplica esta metodologia, sendo restringida aos escoamentos confinados bidimensionais.

### 3.1 Malha Computacional

Para a discretização das equações que descrevem o escoamento, a malha computacional adotada é a malha fixa (Euleriana), com espaçamento uniforme, ou seja,  $\delta x = \delta y$ , sendo  $\delta x$  e  $\delta y$  o espaçamento da malha na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente. Ainda, considera-se que a malha fixa é composta por células deslocadas (*staggered grid*), onde as componentes do vetor velocidade  $\mathbf{u} = (u, v)$  são calculadas nas faces da célula, enquanto as outras grandezas, bem como a pressão e os tensores são calculadas no centro da célula [9]. A Figura 3.1, considerando um caso bidimensional, apresenta a estrutura de uma célula deslocada com coordenadas  $(i, j)$ .

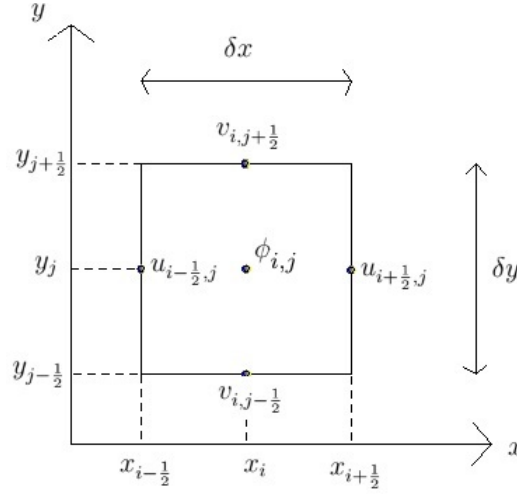


Figura 3.1: Representação de uma célula deslocada com as componentes do vetor velocidade  $\mathbf{u}$  armazenada na face.

Na figura 3.1, tem-se que  $\phi_{i,j}$  é uma variável genérica que denota as grandezas que são calculadas no centro da célula.

## 3.2 Classificação das Células

Para a simulação de um escoamento é considerada uma malha de células, como mostra a Figura 3.1, em todo o seu domínio. Aqui, considera-se escoamentos confinados, isto é, todas as células no interior do domínio contêm fluido.

A classificação das células é feita da seguinte forma:

- Células **[F]** (*full*): células cheias de fluido;
- Células **[B]** (*boundary*): células de contorno rígido;
- Células **[I]** (*inflow*): células de entrada de fluido no domínio;
- Células **[O]** (*outflow*): células de saída de fluido.

A Figura 3.2, apresenta a classificação das células no domínio computacional.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | O |
| I | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | O |
| I | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | O |
| I | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | O |
| B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | O |

Figura 3.2: Classificação das células em um domínio computacional para escoamento confinado.

A interface entre as células **[I]** e **[F]** representa o contorno de entrada de fluido. De maneira análoga, a interface entre as células **[F]** e **[O]** representa o contorno de saída de fluido e a interface entre as células **[B]** e **[F]** representa o contorno rígido.

### 3.3 Método e Solução baseado no Método da Projeção

Como já visto, as equações que descrevem um escoamento de um fluido viscoelástico incompressível, considerando a equação constitutiva do tipo Oldroyd-B que inclui os efeitos da pressão na viscosidade polimérica, são

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P, \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\tau}_P + Wi \frac{\nabla}{Re} \boldsymbol{\tau}_P = \frac{2}{Re} H_P(p) \mathbf{D}, \quad (3.3)$$

$$H_P(p) = (1 - \beta) + \gamma p. \quad (3.4)$$

Tem-se que, pela equação da quantidade de movimento, a velocidade  $\mathbf{u}$  evolui com o tempo, porém o comportamento da pressão  $p$  é desconhecida. Com isso, existe o acoplamento entre pressão e velocidade, pois é necessário especificar o campo escalar de pressão para garantir que a velocidade  $\mathbf{u}$  satisfaça a equação (3.1).

Para se obter uma solução numérica para estes escoamentos será descrita uma metodologia baseada no método da projeção, proposta por Chorin [6] para desacoplar velocidade e pressão. Tal método é fundamentado pelo Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge (TDHH).

**Teorema 1** (*Decomposição de Helmholtz-Hodge*)

Seja  $\Omega$  uma região com fronteira suave  $\partial\Omega$  e  $\tilde{\mathbf{u}}$  um campo vetorial definido em  $\Omega$ . Nestes termos, a decomposição de  $\tilde{\mathbf{u}}$  na forma

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla \psi, \quad (3.5)$$

existe e é única, sendo  $\psi$  um campo escalar também definido em  $\Omega$ . Já o campo vetorial  $\mathbf{u}$  é solenoidal e paralelo a  $\partial\Omega$ , isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.6)$$

e, ao longo de  $\partial\Omega$

$$\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad (3.7)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor normal a  $\partial\Omega$ .

A demonstração deste teorema, pode ser encontrada em [6].

O método da projeção consiste em determinar um campo de velocidade intermediária  $\tilde{\mathbf{u}}$  através da equação (3.2). Adicionando as ideias de Oishi et al. [15] que utiliza uma formulação semi-implícita para  $\tilde{\mathbf{u}}$ , vem

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla \tilde{p} + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_p \quad (3.8)$$

com  $p \neq \tilde{p}$ , sendo  $\tilde{p}$  o campo de pressão tentativo.

Como  $\tilde{\mathbf{u}}$  não necessariamente é solenoidal, aplica-se o divergente no TDHH, expresso pela equação (3.5),

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \psi. \quad (3.9)$$

Da equação da continuidade (3.1), tem-se então que  $\psi$  é determinada pela seguinte Equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.10)$$

com condição de fronteira nos contornos rígidos e no *inflow*

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (3.11)$$

já no *outflow* a condição de fronteira é dada por

$$\psi = 0. \quad (3.12)$$

Calculando  $\psi$ , a velocidade  $u$  pode ser calculada pela seguinte expressão

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \psi. \quad (3.13)$$

Assim, aplicando a equação (3.13) em (3.8) depois de discretizada por diferenças finitas e comparando com a equação (3.2), obtem-se

$$p = \tilde{p} + \frac{\psi}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \psi. \quad (3.14)$$

### 3.4 Integração Temporal da Equação da Quantidade de Movimento

A integração temporal da equação da quantidade de movimento para a velocidade intermediária  $\tilde{\mathbf{u}}$  será feita utilizando o método de Euler Implícito (EI) [15]. Aplicando o método EI na equação (3.8) para a velocidade intermediária, presente na seção anterior, no tempo  $n + 1$ , segue que

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\delta t} + \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u})^n = -\nabla \tilde{p}^{n+1} + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P^n. \quad (3.15)$$

Considera-se que  $\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^n$  e ainda que  $\tilde{p}^{n+1} = p^n$ . Calculando  $\psi^{n+1}$  pela equação de Poisson, expressa por (3.10), obtem-se a nova velocidade através de

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nabla \psi^{n+1}. \quad (3.16)$$

Aplicando esta última equação em (3.15), tem-se

$$\frac{(\mathbf{u}^{n+1} + \nabla \psi^{n+1}) - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\delta t} + \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u})^n = -\nabla \tilde{p}^{n+1} + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 (\mathbf{u}^{n+1} + \nabla \psi^{n+1}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P^n. \quad (3.17)$$

Logo,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u})^n = -\nabla \tilde{p}^{n+1} - \frac{\nabla \psi^{n+1}}{\delta t} + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\beta}{Re} \nabla^3 \psi^{n+1} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P^n. \quad (3.18)$$

Comparando as equações (3.2) e (3.18), obtem-se a pressão corrigida, dada por

$$p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + \frac{\psi^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \psi^{n+1}. \quad (3.19)$$

Sabendo que o método utilizado para resolver a equação da quantidade de movimento é EI, então é necessário respeitar a condição CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*) para  $\delta t$ . Tem-se a seguinte relação

$$\delta t_{CFL} = \min\{\delta t_{CFL_x}, \delta t_{CFL_y}\}, \quad (3.20)$$

onde

$$\delta t_{CFL_x} \leq \frac{\delta x}{|u|_{max}} \quad \text{e} \quad \delta t_{CFL_y} \leq \frac{\delta y}{|v|_{max}}, \quad (3.21)$$

sendo que  $u_{max}$  e  $v_{max}$  representam os valores máximos em módulo que as componentes de velocidade  $u$  e  $v$  atingem nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Através da integração temporal apresentada pela equação (3.15), cada componente da velocidade intermediária  $\tilde{\mathbf{u}}$  resulta em um sistema linear da forma

$$A\tilde{\mathbf{u}} = b, \quad (3.22)$$

onde  $A$  é a matriz dos coeficientes,  $\tilde{\mathbf{u}}$  é o vetor da velocidade intermediária e  $b$  é a matriz dos termos independentes.

Desta forma, obtem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+2s & -s & & & \\ -s & 1+2s & -s & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -s & 1+2s & -s \\ & & & -s & 1+2s \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-2} \\ \tilde{u}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{u}}}^{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -s\tilde{u}_0^{n+1} + \tilde{u}_1^n + \sigma_1^n \\ \tilde{u}_2^n + \sigma_2^n \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-2}^n + \sigma_{n-2}^n \\ -s\tilde{u}_n^{n+1} + \tilde{u}_{n-1}^n + \sigma_{n-1}^n \end{bmatrix}}_b. \quad (3.23)$$

onde  $s = \frac{\delta t \beta}{(\delta x)^2 Re}$  e  $\sigma = \delta t \left( -\nabla(uu)^n - \nabla \tilde{p}^{n+1} + \frac{\beta}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{v}^{n+1}}{\partial y^2} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P^n \right)$ .

Note ainda que a matriz dos coeficientes  $A$  é simétrica e esparsa, sendo este sistema linear resolvido pelo método dos gradientes conjugados [17].

### 3.5 Integração Temporal da Equação Constitutiva

Neste trabalho, a equação constitutiva para o modelo tipo Oldroyd-B é dada pela equação (2.26) juntamente com a equação (2.35). Tal equação determina o tensor  $\boldsymbol{\tau}_P$ , e sua integração temporal é feita utilizando o método de Euler Explícito (EE), podendo ser escrita da forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_P}{\partial t} = G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_P, H_P), \quad (3.24)$$

onde

$$G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_P, H_P) = \frac{H_P(p)}{Re W_i} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] - \frac{\boldsymbol{\tau}_P}{W_i} - (\nabla \cdot (\mathbf{u} \boldsymbol{\tau}_P) - ((\nabla \mathbf{u})^t \cdot \boldsymbol{\tau}_P + \boldsymbol{\tau}_P \cdot \nabla \mathbf{u})). \quad (3.25)$$

Aplicando o método de Euler Explícito, tem-se

$$\frac{\boldsymbol{\tau}_P^{n+1} - \boldsymbol{\tau}_P^n}{\delta t} = G(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\tau}_P^n, H_P^n). \quad (3.26)$$

### 3.6 Discretização Espacial e Tratamento das Variáveis de Contorno

Nesta seção, será apresentada a discretização espacial utilizando o método de diferenças finitas para as equações que modelam o problema em estudo, bem como também para o contorno rígido, injetores e ejetores.

#### Equação da Continuidade

A discretização para a equação da continuidade em uma malha deslocada é feita aplicando o método de diferenças centradas na célula computacional com coordenada  $(i, j)$ . Assim, da equação (3.1), tem-se

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}. \quad (3.27)$$

#### Equação da Quantidade de Movimento

A discretização da equação da quantidade de movimento em uma malha deslocada é feita aplicando o método de diferenças centradas de segunda ordem. Considerando uma célula computacional, com coordenada  $(i, j)$  como representado pela Figura 3.1, tem-se que a discretização é avaliada em posições diferentes dependendo de sua direção.

Enquanto a equação da quantidade de movimento na direção  $x$  tem sua discretização avaliada sob a face em que a componente  $u$  do vetor velocidade está localizada, isto é, na posição  $(i + \frac{1}{2}, j)$ , a equação da quantidade de movimento na direção  $y$  é avaliada sob a face da componente  $v$  do vetor velocidade  $(i, j + \frac{1}{2})$ . Tem-se que o gradiente de pressão e os termos difusivos são discretizados por diferença centrada.

Utilizando a equação (3.2), na direção  $x$ , avaliado em  $(i + \frac{1}{2}, j)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = & -\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \right) + \\ & + \frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\delta t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = & -\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta x} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{(\delta x)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{(\delta y)^2} \right) + \frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Na direção  $y$  avaliados em  $(i, j + \frac{1}{2})$ , de forma análoga, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\delta t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} = & -\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\delta y} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{(\delta x)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{u_{i,j+\frac{3}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}}}{(\delta y)^2} \right) + \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial x} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

A discretização a ser utilizada para os tensores depende da posição da célula em seu domínio computacional. Serão apresentados a seguir alguns casos que deverão ser substituídos nas equações (3.29) e (3.30).

Caso 1: Células centrais no domínio computacional, quando uma célula **[F]** tem somente células vizinhas do tipo **[F]**. Os tensores são discretizados pelo método de diferenças centradas.

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} + \left. \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\tau_{P_{i+1,j}}^{xx} - \tau_{P_{i,j}}^{xx}}{\delta x} + \frac{\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{xy} - \tau_{P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^{xy}}{\delta y} \quad (3.31)$$

e

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial x} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{xy} - \tau_{P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{xy}}{\delta x} + \frac{\tau_{P_{i,j+1}}^{yy} - \tau_{P_{i,j}}^{yy}}{\delta y}. \quad (3.32)$$

Como o tensor  $\tau_P$  não tem valor armazenado nas faces da célula, é feita uma aproximação por média aritmética dos pontos centrais das quatro células vizinhas. Assim,

$$\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{xy} = \frac{1}{4} \left[ \tau_{P_{i+1,j+1}}^{xy} + \tau_{P_{i+1,j}}^{xy} + \tau_{P_{i,j}}^{xy} + \tau_{P_{i,j+1}}^{xy} \right].$$

$$\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^{xy} = \frac{1}{4} \left[ \tau_{P_{i+1,j}}^{xy} + \tau_{P_{i+1,j-1}}^{xy} + \tau_{P_{i,j-1}}^{xy} + \tau_{P_{i,j}}^{xy} \right].$$

$$\tau_{P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{xy} = \frac{1}{4} \left[ \tau_{P_{i,j+1}}^{xy} + \tau_{P_{i,j}}^{xy} + \tau_{P_{i-1,j}}^{xy} + \tau_{P_{i-1,j+1}}^{xy} \right].$$

Um exemplo para esta aproximação por média aritmética pode ser visto na Figura 3.3.

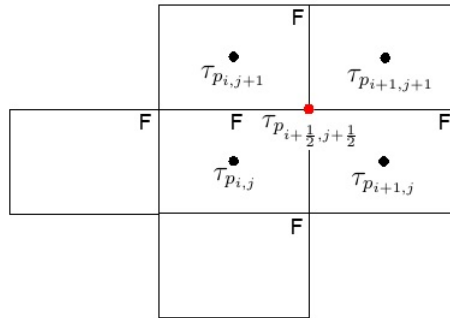


Figura 3.3: Representação dos pontos para aproximação por média aritmética dos tensores.

Caso 2: Quando o lado superior ou à direita da célula **[F]** estiver em contato com a célula do tipo **[B]**, **[I]** ou **[O]**, utiliza-se o método de diferença atrasada para a discretização dos tensores.

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} + \left. \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\tau_{P_{i+1,j}}^{xx} - \tau_{P_{i,j}}^{xx}}{\delta x} + \frac{\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}}^{xy} - \tau_{P_{i+\frac{1}{2},j-1}}^{xy}}{\delta y} \quad (3.33)$$

e

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial x} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\tau_{P_{i,j+\frac{1}{2}}}^{xy} - \tau_{P_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^{xy}}{\delta x} + \frac{\tau_{P_{i,j+1}}^{yy} - \tau_{P_{i,j}}^{yy}}{\delta y}. \quad (3.34)$$

Da mesma maneira, os tensores são aproximados por média aritmética nos pontos centrais de duas células vizinhas.

$$\begin{aligned} \tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}}^{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \tau_{P_{i,j}}^{xy} + \tau_{P_{i+1,j}}^{xy} \right], \\ \tau_{P_{i+\frac{1}{2},j-1}}^{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \tau_{P_{i,j-1}}^{xy} + \tau_{P_{i+1,j-1}}^{xy} \right], \\ \tau_{P_{i,j+\frac{1}{2}}}^{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \tau_{P_{i,j}}^{xy} + \tau_{P_{i,j+1}}^{xy} \right], \\ \tau_{P_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \tau_{P_{i-1,j}}^{xy} + \tau_{P_{i-1,j+1}}^{xy} \right]. \end{aligned}$$

Caso 3: Quando o lado inferior ou à esquerda da célula **[F]** estiver em contato com a célula do tipo **[B]**, **[I]** ou **[O]**, utiliza-se o método de diferença avançada para a discretização dos tensores.

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} + \left. \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\tau_{P_{i+1,j}}^{xx} - \tau_{P_{i,j}}^{xx}}{\delta x} + \frac{\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{xy} - \tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}}^{xy}}{\delta y} \quad (3.35)$$

e

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial x} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\tau_{P_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{xy} - \tau_{P_{i,j+\frac{1}{2}}}^{xy}}{\delta x} + \frac{\tau_{P_{i,j+1}}^{yy} - \tau_{P_{i,j}}^{yy}}{\delta y}. \quad (3.36)$$

Aproximando os tensores por média aritmética dos pontos centrais de duas células vizinhas, tem-se

$$\begin{aligned} \tau_{P_{i+\frac{1}{2},j+1}}^{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \tau_{P_{i,j+1}}^{xy} + \tau_{P_{i+1,j+1}}^{xy} \right], \\ \tau_{P_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \tau_{P_{i+1,j}}^{xy} + \tau_{P_{i+1,j+1}}^{xy} \right]. \end{aligned}$$

A Figura 3.4 ilustra as configurações das células computacionais para cada caso descrito acima.

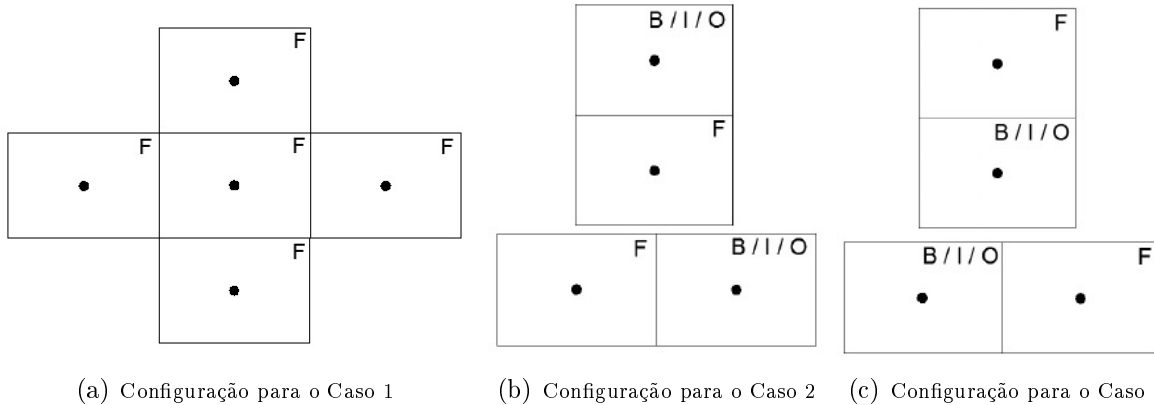


Figura 3.4: Configurações das células computacionais para a discretização dos tensores.

## Equações de Contorno em Injetores e Ejetores

Como já definido na seção 3.2, as células do injetor, responsável pela entrada de fluido denotado por **[I]**, apresenta o contato na face de uma célula que contém fluido no interior do seu domínio. A Figura 3.5 ilustra uma das quatro possíveis configurações para a disposição das células **[I]** e **[F]**.

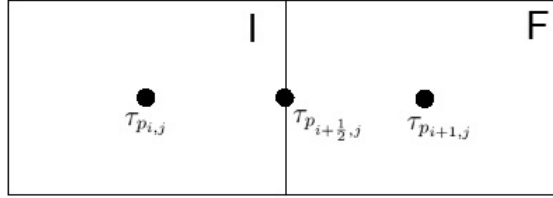


Figura 3.5: Representação da célula do *inflow*.

Na fronteira do injetor, tem-se que  $\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}}$  é determinado pela média aritmética dos pontos centrais das duas células vizinhas. Assim,

$$\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{\tau_{P_{i,j}} + \tau_{P_{i+1,j}}}{2}. \quad (3.37)$$

Portanto,

$$\tau_{P_{i,j}} = 2\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}} - \tau_{P_{i+1,j}}. \quad (3.38)$$

Já as células de ejetor **[O]**, responsável pela saída do fluido de um domínio computacional, como no caso do injetor, também apresenta uma face em contato com uma célula que contém fluido. A Figura (3.6), ilustra uma das configurações para a disposição das células **[F]** e **[O]**.

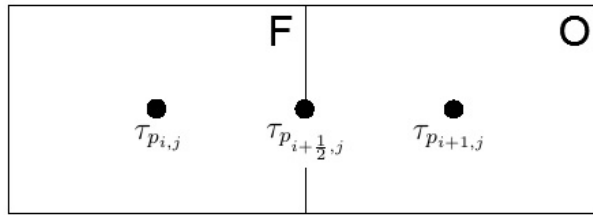


Figura 3.6: Representação da célula do *outflow*.

Considerando a condição de contorno do tipo Neumann

$$\frac{\partial \tau_P}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (3.39)$$

onde  $\vec{n}$  é a direção normal, tem-se que  $\tau_{P_{i,j}}$  pode ser determinado aplicando o método de diferença centrada,

$$\frac{\tau_{P_{i,j}} - \tau_{P_{i+1,j}}}{\delta x} = 0. \quad (3.40)$$

Logo,

$$\tau_{P_{i,j}} = \tau_{P_{i+1,j}}. \quad (3.41)$$

## Equação de Poisson

A discretização para a equação de Poisson que determina  $\psi$  é feita pelo método de diferenças centradas de segunda ordem. Considerando as células que contém fluido **[F]**, tem-se pela Equação (3.10) a seguinte aproximação

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\delta y)^2} = \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}. \quad (3.42)$$

Para as células próximas às condições de contorno, como ilustra a Figura (3.7), tem-se que pela condição de contorno do tipo Neumann  $\psi$  será discretizada por diferenças centradas na face das células *full* **[F]** que estão em contato com as células **[B]** ou **[I]**.



Figura 3.7: Representação da célula *full* **[F]** em contato com o contorno rígido ou *inflow*.

Assim, tem-se

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\delta x} = 0. \quad (3.43)$$

Logo,

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i+1,j}^{n+1}. \quad (3.44)$$

Já no *outflow*, é aplicado a condição de fronteira (3.12). Sendo assim,

$$\psi_{i,j}^{n+1} = 0. \quad (3.45)$$

Através das condições descritas acima, a discretização da equação de Poisson resulta em um sistema linear da forma (3.22). Assim, obtem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 1 & & & \alpha^2 & & & \\ 1 & A_2 & 1 & & & \alpha^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & A_2 & 0 & & & \alpha^2 \\ \alpha^2 & & & 0 & A_3 & 1 & & \alpha^2 \\ & \alpha^2 & & 1 & A_4 & 1 & & \alpha^2 \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha^2 & & 1 & A_4 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha^2 \\ & & & & & \alpha^2 & 0 & A_1 & 1 \\ & & & & & & \alpha^2 & 1 & A_2 & 1 \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & \alpha^2 & 1 & A_2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{1,1} \\ \psi_{2,1} \\ \vdots \\ \psi_{n-1,1} \\ \psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} \\ \vdots \\ \psi_{n-1,2} \\ \vdots \\ \psi_{1,m} \\ \psi_{2,m} \\ \vdots \\ \psi_{n-1,m} \end{bmatrix}}_\psi = \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla \cdot \tilde{u} \\ \nabla \cdot \tilde{u} \\ \vdots \\ \nabla \cdot \tilde{u} - \psi_{n,1} \\ \nabla \cdot \tilde{u} \\ \nabla \cdot \tilde{u} \\ \vdots \\ \nabla \cdot \tilde{u} - \psi_{n,2} \\ \vdots \\ \nabla \cdot \tilde{u} \\ \nabla \cdot \tilde{u} \\ \vdots \\ \nabla \cdot \tilde{u} - \psi_{n,m} \end{bmatrix}}_b, \quad (3.46)$$

onde  $\alpha = \frac{\delta x}{\delta y}$ ,  $A_1 = \xi + \alpha^2 + 1$ ,  $A_2 = \xi + \alpha^2$ ,  $A_3 = 1 + \xi$  e  $A_4 = \xi$ , sendo  $\xi = -2(1 + \alpha^2)$ .

Desta forma, têm-se que a matriz dos coeficientes  $A$  é simétrica e esparsa, sendo este sistema linear também resolvido pelo método dos gradientes conjugados [17].

## Velocidade Solenoidal

A velocidade solenoidal descrita pelo método da projeção, expressa pela Equação (3.16), tem sua discretização feita por diferenças centradas. Assim, obtém-se

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\delta x}, \quad (3.47)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\delta y}. \quad (3.48)$$

## Campo de Pressão

A discretização utilizada para o campo de pressão é o método de diferenças centradas. Assim, da Equação (3.19), obtém-se

$$p_{i,j}^{n+1} = \tilde{p}_{i,j}^{n+1} + \frac{\psi_{i,j}^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \left[ \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{(\delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{(\delta y)^2} \right]. \quad (3.49)$$

## Condição de Contorno

Considerando o modelo Oldroyd-B, tem-se que definir o tensor tensão  $\tau_p$  nos contornos rígidos, ou seja, células *boundary* [B] que estão em contato com as células *full* [F] do domínio computacional. Desta forma, dois casos podem ser estudados: contorno rígido paralelo ao eixo  $x$  e contorno rígido paralelo ao eixo  $y$ .

### 1. Contorno rígido paralelo ao eixo $x$

Para o contorno rígido paralelo ao eixo  $x$ , no caso bidimensional, tem-se que  $\tau_p$  será avaliado na coordenada  $(i, j + \frac{1}{2})$ . A Figura (3.8), ilustra uma configuração para este caso.

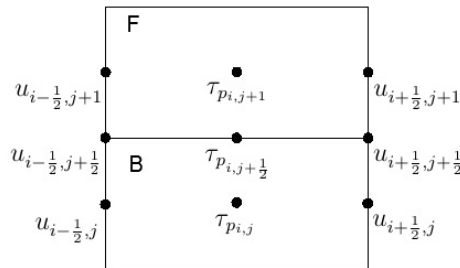


Figura 3.8: Configuração para o contorno rígido paralelo ao eixo  $x$ .

Considerando-se a equação constitutiva para o modelo Oldroyd-B adimensionalizada, expressa pela Equação (2.26). Após aplicar as hipóteses para a condição de contorno com o objetivo de simplificar as equações, como já estudado na seção 2.5,

são obtidas as equações (2.45)-(2.47). Desta forma, avaliando no ponto  $(i, j + \frac{1}{2})$ , obtem-se

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial t} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} = 2\tau_{P,i,j+\frac{1}{2}}^{xy} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau_{P,i,j+\frac{1}{2}}^{xx}}{Wi} \quad (3.50)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial t} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{\tau_{P,i,j+\frac{1}{2}}^{yy}}{Wi} \quad (3.51)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial t} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} = \tau_{P,i,j+\frac{1}{2}}^{yy} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau_{P,i,j+\frac{1}{2}}^{xy}}{Wi} + \frac{H_P(p)}{ReWi} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (3.52)$$

Discretizando a derivada espacial das equações acima por diferenças centradas, tem-se

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta y}, \quad (3.53)$$

onde

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1}}{2} \quad \text{e} \quad u_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{2} \quad (3.54)$$

Substituindo estas equações em (3.53), segue que

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\delta y}. \quad (3.55)$$

A velocidade na interface de contato entre as células pode ser aproximada por média aritmética de dois pontos vizinhos. Tem-se ainda, pela condição *no-slip*, que as velocidades no contorno rígido são nulas. Logo,

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i+\frac{1}{2},j}}{2} = 0 \Rightarrow u_{i+\frac{1}{2},j+1} = -u_{i+\frac{1}{2},j} \quad (3.56)$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{2} = 0 \Rightarrow u_{i-\frac{1}{2},j+1} = -u_{i-\frac{1}{2},j} \quad (3.57)$$

Aplicando as equações acima em (3.55), vem

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1}}{\delta y}. \quad (3.58)$$

## 2. Contorno rígido paralelo ao eixo y

De forma análoga, o contorno rígido paralelo ao eixo  $y$ , no caso bidimensional tem-se que  $\tau_p$  será avaliado na coordenada  $(i + \frac{1}{2}, j)$ . A Figura (3.9) ilustra uma configuração para este caso.

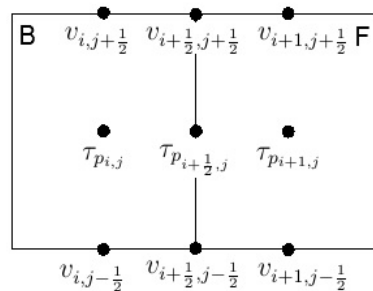


Figura 3.9: Configuração para o contorno rígido paralelo ao eixo y.

Considerando as equações (2.51)-(2.53) para o modelo Oldroyd-B, avaliando no ponto  $(i + \frac{1}{2}, j)$ , obtem-se

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xx}}{\partial t} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}}^{xx}}{Wi} \quad (3.59)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{yy}}{\partial t} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = 2\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}}^{xy} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}}^{yy}}{Wi} \quad (3.60)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_P^{xy}}{\partial t} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}}^{xx} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\tau_{P_{i+\frac{1}{2},j}}^{xy}}{Wi} + \frac{H_P(p)}{ReWi} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} \quad (3.61)$$

A discretização para a derivada espacial é feita por diferenças centradas

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\delta x}, \quad (3.62)$$

onde

$$v_{i+1,j} = \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{e} \quad v_{i,j} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2}$$

Aplicando as equações acima em (3.62), obtem-se

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\delta x}, \quad (3.63)$$

Pela condição *no-slip*, tem-se ainda que a velocidade no contorno rígido é nula, então

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}}{2} = 0 \Rightarrow v_{i+1,j+\frac{1}{2}} = -v_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (3.64)$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2} = 0 \Rightarrow v_{i+1,j-\frac{1}{2}} = -v_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (3.65)$$

Substituindo as equações acima em (3.63), segue que

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{\delta x}. \quad (3.66)$$

### 3.7 Algoritmo Computacional

O algoritmo computacional tem como objetivo apresentar uma sequência de procedimentos de uma metodologia a ser implementada. Para isso, suponha que  $\mathbf{u}^n$ ,  $p^n$ ,  $\boldsymbol{\tau}_P^n$  e  $H_P^n$  são conhecidos no tempo  $t_n$  para obter as variáveis atualizadas  $\mathbf{u}^{n+1}$ ,  $p^{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_P^{n+1}$  e  $H_P^{n+1}$  em  $t_{n+1} = t_n + \delta t$ . A seguir é apresentado o algoritmo para a formulação explícita para os tensores e semi-implícita para velocidade.

**Passo 1:** Calcula-se  $\boldsymbol{\tau}_P^{n+1}$  por

$$\frac{\boldsymbol{\tau}_P^{n+1} - \boldsymbol{\tau}_P^n}{\delta t} = \frac{H_P(p)^n}{ReWi} [\nabla \mathbf{u}^n + (\nabla \mathbf{u}^n)^t] - \frac{\boldsymbol{\tau}_P^n}{Wi} - (\nabla \cdot (\mathbf{u}^n \boldsymbol{\tau}_P^n) - ((\nabla \mathbf{u}^n)^t \cdot \boldsymbol{\tau}_P^n + \boldsymbol{\tau}_P^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n));$$

**Passo 2:** Calcula-se  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  por (3.15), levando em consideração que  $\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^n$  e  $\tilde{p}^{n+1} = p^n$

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\delta t} + \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u})^n = -\nabla\tilde{p}^{n+1} + \frac{\beta}{Re}\nabla^2\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_p^{n+1}.$$

**Passo 3:** Calcula-se  $\psi^{n+1}$  pela Equação de Poisson (3.10)

$$\nabla^2\psi^{n+1} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}.$$

**Passo 4:** Atualiza-se a velocidade  $\mathbf{u}^{n+1}$  utilizando a equação (3.16)

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nabla\psi^{n+1}.$$

**Passo 5:** Atualiza-se o campo de pressão  $p^{n+1}$  pela equação (3.19)

$$p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + \frac{\psi^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re}\nabla^2\psi^{n+1};$$

**Passo 6:** Calcula-se a viscosidade dependendo da pressão  $H_P^{n+1}$

$$H_P(p)^{n+1} = (1 - \beta) + \gamma p^{n+1};$$

**Passo 7:** Atualiza-se as condições de contorno no injetor, ejetor e contorno rígido para a velocidade e tensor.

## Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos tanto para a verificação da metodologia numérica como também para análise do comportamento de um escoamento Poiseuille e expansão planar 1:4 de um fluido viscoelástico em que a viscosidade sofre influência da pressão. Como já visto, o FREEFLOW-2D foi a plataforma de simulação que possibilitou a coleta de dados, e, conseqüentemente, algumas comparações com o modelo viscoelástico Oldroyd-B *Standard* para o estudo do problema. O pós processamento foi realizado com o auxílio de outra ferramenta computacional, o MatLab.

### 4.1 Verificação da Metodologia Numérica

A verificação da metodologia numérica foi feita considerando o escoamento de Poiseuille, ou seja, escoamento totalmente desenvolvido entre duas placas paralelas como apresentado na Figura 4.1.

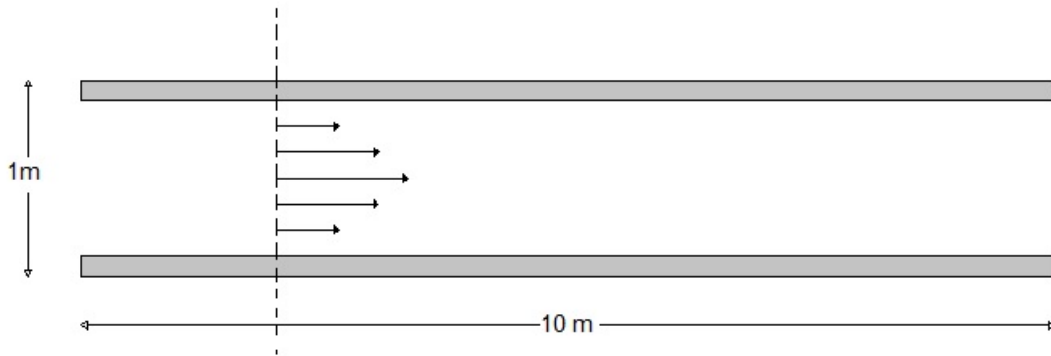


Figura 4.1: Esboço da geometria para o escoamento entre duas placas paralelas ao eixo  $x$ .

Para a simulação numérica, os dados adotados são

- Distância entre as placas:  $L = 1m$ ;
- Comprimento das placas:  $10L$ ;
- Viscosidade Cinemática:  $\mu = 1m^2s^{-1}$ ;

- Densidade do fluido:  $\rho = 1.0 \text{kgm}^{-3}$ ;
- Velocidade média do escoamento:  $U = 1.0 \text{ms}^{-1}$ ;
- Número de Reynolds:  $Re = 1.0$ ;
- Escala de tempo característica do fluido:  $\lambda = 0.3 \text{s}$ ;
- Número de Weissenberg:  $Wi = 0.3$ ;
- Parâmetro  $\beta$ :  $\beta = 0.1$ ;
- Coeficiente da viscosidade dependendo da pressão:  $\gamma = 0.0002 \text{Pa}^{-1}$ .

Além de especificar as propriedades que dizem respeito à geometria do escoamento e atribuir os valores para os parâmetros que caracterizam o fluido em questão, as condições de contorno também devem ser definidas. Tais condições são descritas na seção 2.5.

Até onde foi pesquisado, não foi possível encontrar a solução analítica para os escoamentos viscoelásticos de Poiseuille modelados pela equação constitutiva Oldroyd-B adaptada para capturar as variações da viscosidade de acordo com a pressão, portanto, adota-se como solução de referência os resultados para uma malha mais refinada. Tal malha será chamada de  $M_5$ .

A análise da convergência da solução numérica para a solução numérica de  $M_5$  é realizada considerando quatro tipos de malha. A Tabela 4.1, apresenta as informações sobre cada uma delas.

Tabela 4.1: Malhas computacionais.

|       | Células           | Espaçamento                     |
|-------|-------------------|---------------------------------|
| $M_1$ | $100 \times 10$   | $\delta x = \delta y = 0.1$     |
| $M_2$ | $200 \times 20$   | $\delta x = \delta y = 0.05$    |
| $M_3$ | $400 \times 40$   | $\delta x = \delta y = 0.025$   |
| $M_4$ | $800 \times 80$   | $\delta x = \delta y = 0.0125$  |
| $M_5$ | $1600 \times 160$ | $\delta x = \delta y = 0.00625$ |

Assim, uma comparação entre a solução de referência e as soluções numéricas para cada uma das malhas são apresentadas nas Figuras 4.2 e 4.3.

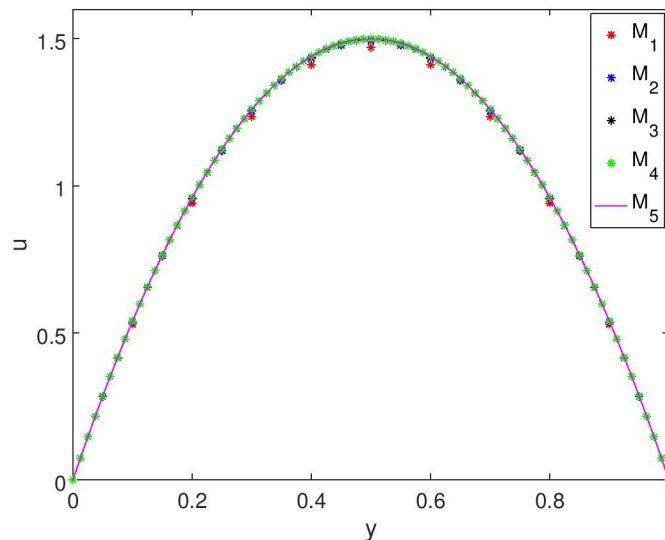


Figura 4.2: Refinamento de malha para a velocidade  $u$ .

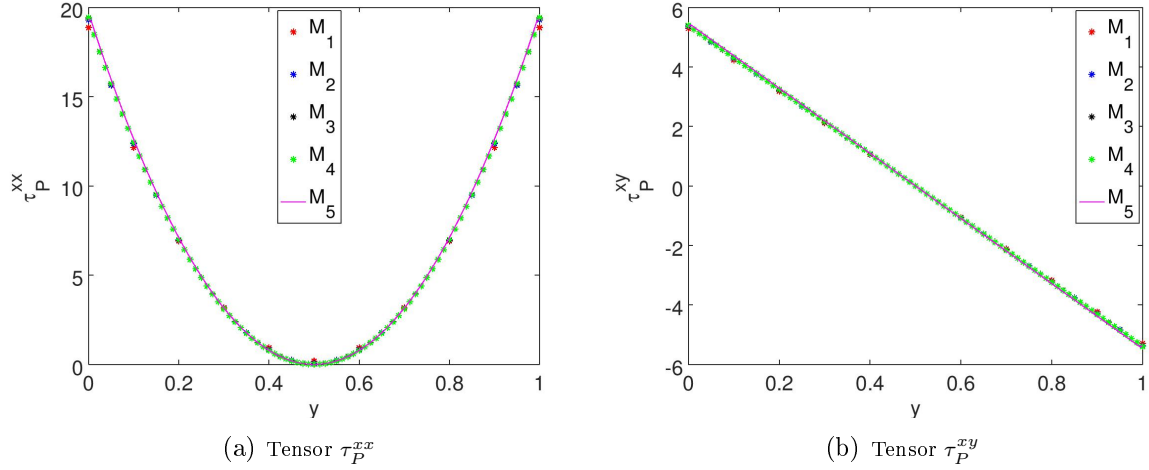


Figura 4.3: Refinamento da malha computacional para os tensores.

Considerando a norma Euclidiana, tem-se que o erro relativo é dado por

$$\|E_h(\epsilon)\|_2 = \frac{\|\epsilon_{ref} - \epsilon_{M_i}\|_2}{\|\epsilon_{ref}\|_2}, \quad (4.1)$$

sendo  $\epsilon$  uma variável generalizada, tem-se que  $\epsilon_{ref}$  diz respeito a solução numérica para a malha  $M_5$  e  $\epsilon_{M_i}$  a solução numérica para as respectivas malhas  $M_i$ , com  $i = 1, 2, 3, 4$ .

A Tabela 4.2 apresenta os erros relativos para algumas variáveis, como a velocidade  $u$  e os tensores  $\tau_P^{xx}$  e  $\tau_P^{xy}$ .

Tabela 4.2: Erro Relativo para as variáveis  $u$ ,  $\tau_P^{xx}$  e  $\tau_P^{xy}$ .

|       | $E(u)$                 | $E(\tau_P^{xx})$       | $E(\tau_P^{xy})$       |
|-------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $M_1$ | $1.9518 \cdot 10^{-2}$ | $2.8254 \cdot 10^{-2}$ | $1.9750 \cdot 10^{-2}$ |
| $M_2$ | $4.8955 \cdot 10^{-3}$ | $7.1395 \cdot 10^{-3}$ | $4.9489 \cdot 10^{-3}$ |
| $M_3$ | $1.1702 \cdot 10^{-3}$ | $1.7110 \cdot 10^{-3}$ | $1.1792 \cdot 10^{-3}$ |
| $M_4$ | $2.3419 \cdot 10^{-4}$ | $3.4283 \cdot 10^{-4}$ | $2.3483 \cdot 10^{-4}$ |

Por definição, tem-se que o erro para uma norma  $N$  é dado por

$$\|E_h\|_N \cong Ch^p, \quad (4.2)$$

onde  $C$  é uma constante e  $p$  uma estimativa para a ordem de convergência.

Desta forma, para um refinamento de malha dobrando o número de pontos tem-se que

$$p \approx \frac{\log\left(\frac{E_{h_1}}{E_{h_2}}\right)}{\log 2}. \quad (4.3)$$

Tabela 4.3: Ordem de convergência espacial para as variáveis  $u$ ,  $\tau_P^{xx}$  e  $\tau_P^{xy}$ .

|                                                               | $u$    | $\tau_P^{xx}$ | $\tau_P^{xy}$ |
|---------------------------------------------------------------|--------|---------------|---------------|
| $p = \frac{\log\left(\frac{E_{M_1}}{E_{M_2}}\right)}{\log 2}$ | 1.9953 | 1.9846        | 1.9967        |
| $p = \frac{\log\left(\frac{E_{M_2}}{E_{M_3}}\right)}{\log 2}$ | 2.0648 | 2.0610        | 2.0693        |
| $p = \frac{\log\left(\frac{E_{M_3}}{E_{M_4}}\right)}{\log 2}$ | 2.3210 | 2.3193        | 2.3282        |

Este resultado era esperado pois como apresentado na Seção 3.6, a discretização espacial adotada é majoritariamente de ordem 2.

Outro resultado que também pode ser obtido com a finalidade de verificar a metodologia numérica é através da comparação entre a solução analítica proposta por [11] e a solução numérica para a viscosidade dependendo da pressão. É utilizado para esta simulação numérica a malha computacional  $M_2$ , considerando os valores já definidos anteriormente para os parâmetros adimensionais.

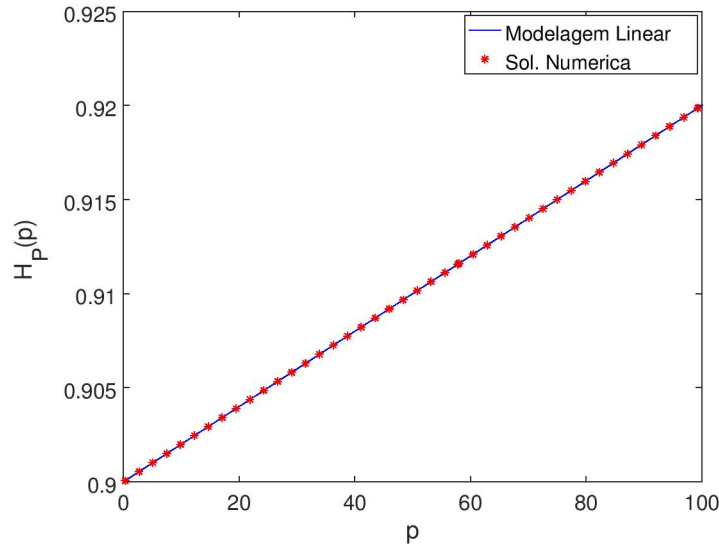


Figura 4.4: Comparação da viscosidade dependendo da pressão.

## 4.2 Simulação Numérica para Escoamento Poiseuille

### 4.2.1 Comparação entre Modelos

Para estudar a influência que a viscosidade dependendo da pressão exerce em um escoamento de um fluido viscoelástico, serão analisadas algumas variáveis para os dois modelos. A saber, modelo Oldroyd-B *Standard* e modelo Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão, que por sua vez, serão chamados de Modelo 1 e Modelo 2, respectivamente.

Para a simulação com estes modelos, é considerado as características para a geometria e também os valores para os parâmetros adimensionais já definidos na seção anterior. Ainda,  $M_2$  será a malha computacional utilizada para a coleta destes resultados por ser capaz de fornecer de maneira clara, os perfis das variáveis.

As Figuras 4.5 e 4.6 ilustram a pressão para os Modelos 1 e 2, respectivamente. Note que, a pressão na entrada do escoamento, ou seja, no *inflow*, é maior do que a pressão em

qualquer outro ponto interior, considerando seu domínio computacional. Ainda, tem-se que na saída do fluido, isto é, no *outflow*, a pressão é nula.

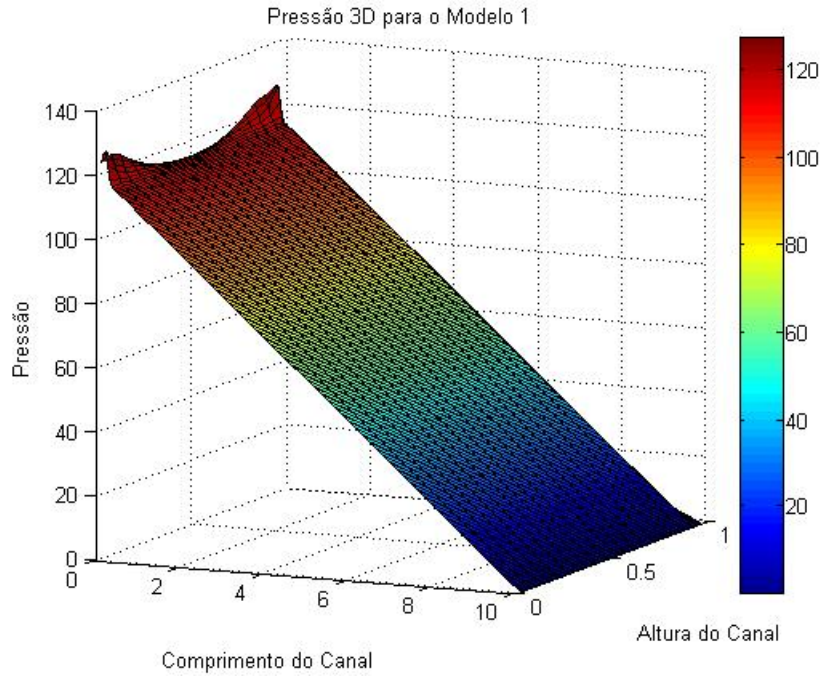


Figura 4.5: Gráfico 3D da pressão para o Modelo 1:  $z = p(x_i, y_j)$  no tempo  $t = 25$ , com  $x_i = 0.05 \cdot \delta x$ ,  $i = 0, 1, \dots, 200$  e  $y_j = 0.05 \cdot \delta y$ ,  $j = 0, 1, \dots, 20$ .

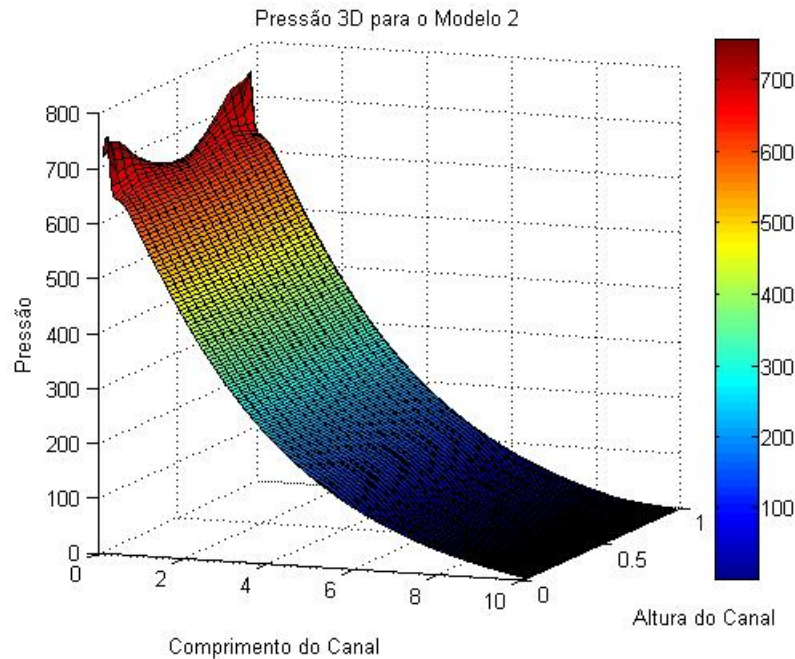


Figura 4.6: Gráfico 3D da pressão para o Modelo 2:  $z = p(x_i, y_j)$  no tempo  $t = 25$ , com  $x_i = 0.05 \cdot \delta x$ ,  $i = 0, 1, \dots, 200$  e  $y_j = 0.05 \cdot \delta y$ ,  $j = 0, 1, \dots, 20$ .

Das Figuras 4.5 e 4.6, é possível observar o comportamento da pressão em relação a altura e o comprimento do canal. Observa-se que a pressão é constante em relação a altura para o Modelo 1 e apresenta um perfil parabólico para o Modelo 2. Além disso,

apresenta um decrescimento ao longo do canal, sendo linear ou uma curva, dependendo do modelo. Desta forma, são analisados os valores da pressão em um corte longitudinal no meio do canal, isto é, para  $y = 0.5$ .

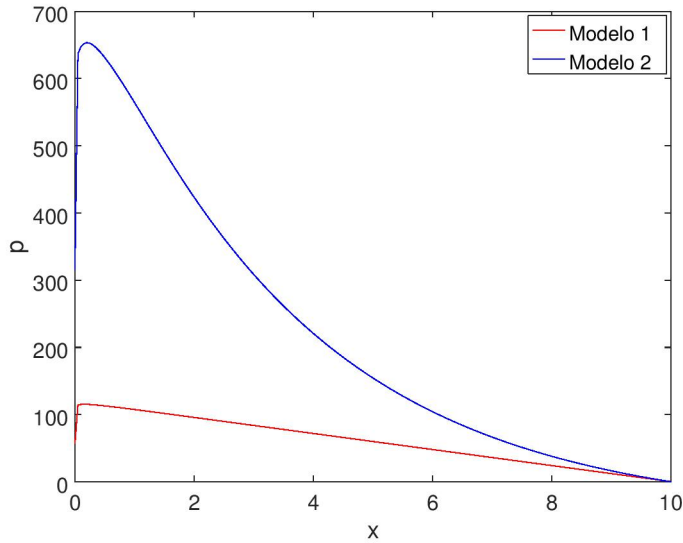


Figura 4.7: Comparação dos Modelos 1 e 2:  $z = p(x_i, y_j)$  no tempo  $t = 25$ , com  $x_i = 0.05 \cdot \delta x$ ,  $i = 0, 1, \dots, 200$ ; valores da pressão na linha central, no corte longitudinal  $y = 0.5$ .

Uma análise importante que não pode deixar de ser feita, é que tais resultados são reflexo do coeficiente  $\gamma$ . Este, controla o quanto a pressão influencia na viscosidade, e, consequentemente, em todo o escoamento.

A comparação para as demais variáveis pode ser vista nas Figuras 4.8 e 4.9.

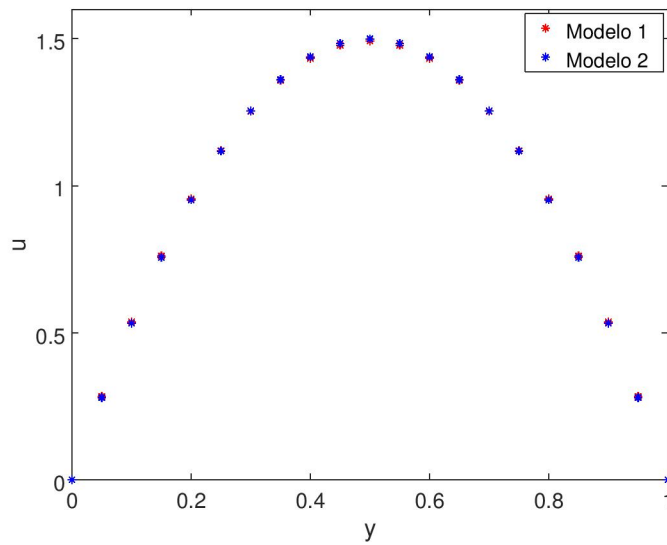


Figura 4.8: Comparação dos modelos para a componente  $u$  de velocidade.

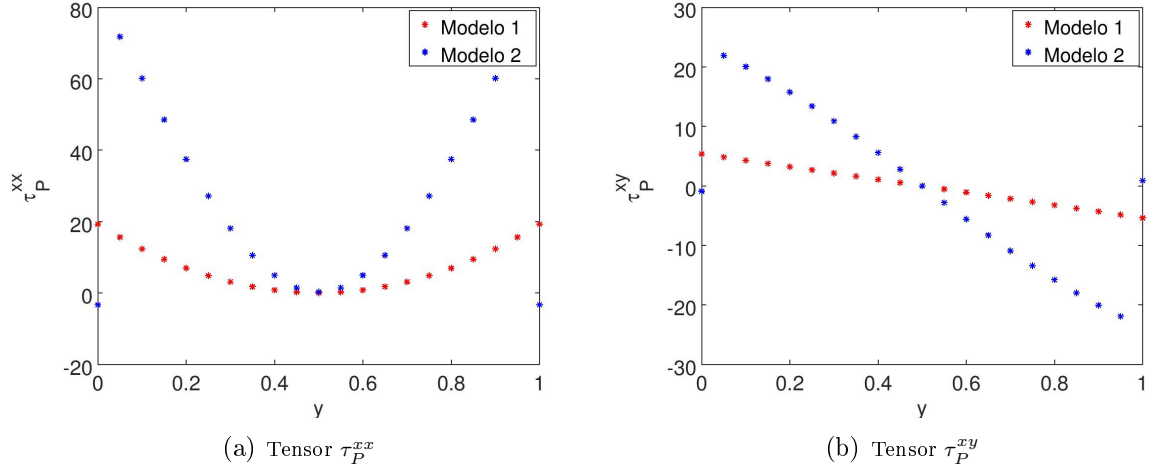


Figura 4.9: Comparação dos modelos para os tensores: a) componente  $\tau_P^{xx}$  do tensor não-Newtoniano, b) componente  $\tau_P^{xy}$  do tensor não-Newtoniano.

Na seção a seguir será analisada mais detalhadamente a influência do valor  $\gamma$  no escoamento.

#### 4.2.2 Variação do Coeficiente da Viscosidade dependendo da Pressão $\gamma$

Como já visto, o coeficiente  $\gamma$  apresenta um papel fundamental para o modelo Oldroyd-B em que a viscosidade depende da pressão. O estudo deste será proveniente de sua variação, cujo objetivo será analisar os efeitos causados em um escoamento para cada valor de  $\gamma$  adotado.

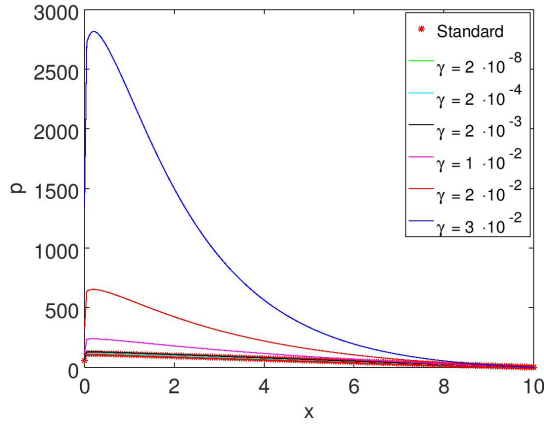
Considerando os parâmetros adimensionais fixos, como  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.3$ , os gráficos a seguir apresentam os resultados referentes a variação de  $\gamma$  para um dado número de Reynolds. Será tratada esta variação para  $Re = 1.0$ ,  $5.0$  e  $10.0$ .

Pode-se notar pelas Figuras 4.10-4.12, que o aumento de  $\gamma$  implica em um aumento das forças envolvidas no escoamento.

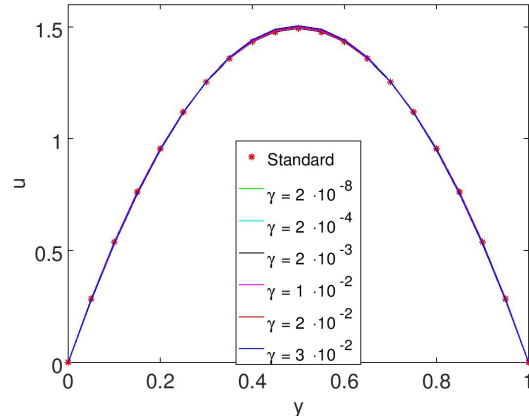
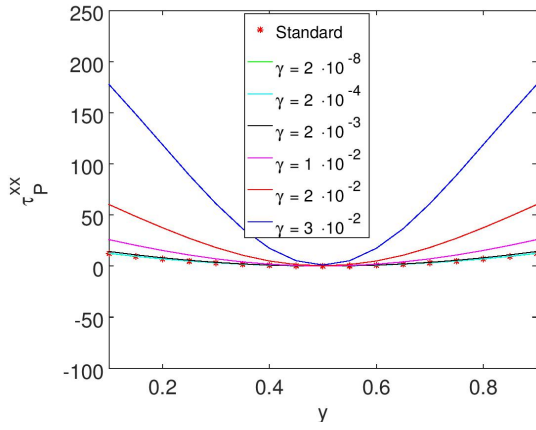
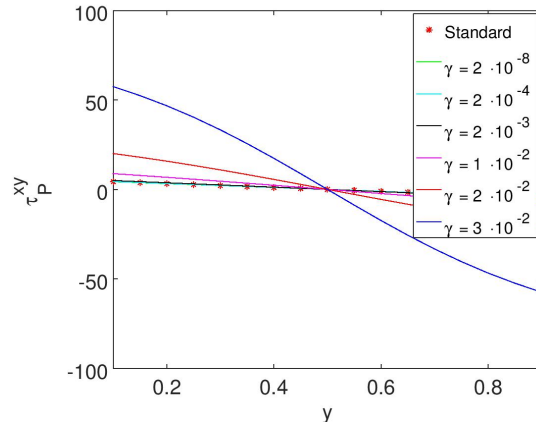
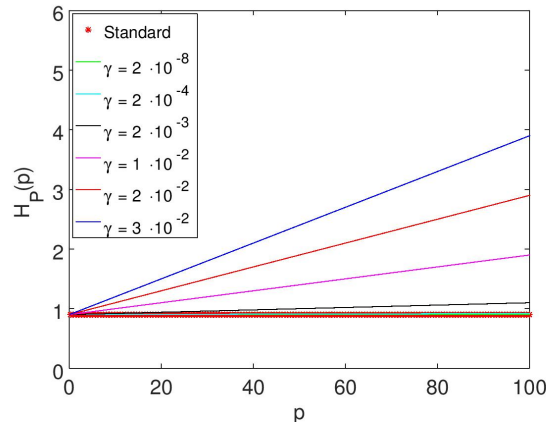
Tais resultados estão coerentes, pois é possível ver nas Figuras 4.10-4.12 e) que os valores da viscosidade polimérica crescem mais rápido quando se aumenta os valores de  $\gamma$ . De fato, pode-se ver a Eq. (2.35) como a equação geral da reta  $y = ax + b$ , sendo  $y = H_P$ ,  $a = \gamma$ ,  $x = p$  e  $b = (1 - \beta)$ , em que  $\gamma$  representa a inclinação desta reta. Desta forma, tendo o fluido uma viscosidade maior, terá uma maior resistência para escoar e então, para manter a mesma velocidade durante o escoamento, tal fato pode ser observado nas Figuras 4.10-4.12 b). Ainda, os valores da pressão deverá aumentar. Esse aumento da pressão e, conseqüentemente, das tensões, pode ser visto nas Figuras 4.10-4.12 a), c) e d).

Outro fator que também demonstra coerência nos resultados apresentados nas Figuras 4.10-4.12 é que quando  $\gamma \rightarrow 0$ , os resultados tendem aos valores do modelo Oldroyd-B *Standard*. O que era esperado pois quando  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $H_P(p) \rightarrow (1 - \beta)$ , sendo que  $(1 - \beta)$  corresponde ao valor adimensional que aparece na equação constitutiva Oldroyd-B *Standard*.

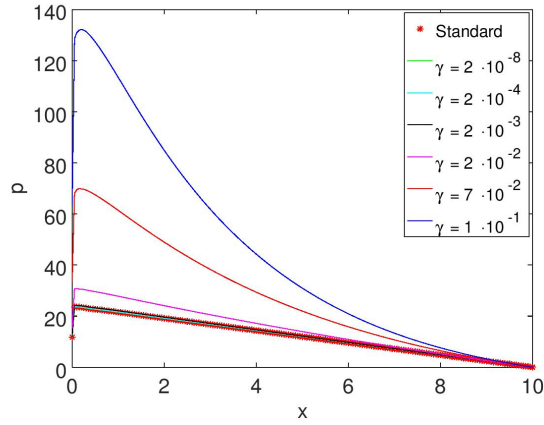
- Para  $Re = 1.0$ , considera-se os seguintes valores de  $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$ ,  $2 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-3}$ ,  $1 \cdot 10^{-2}$ ,  $2 \cdot 10^{-2}$  e  $3 \cdot 10^{-2}$ .



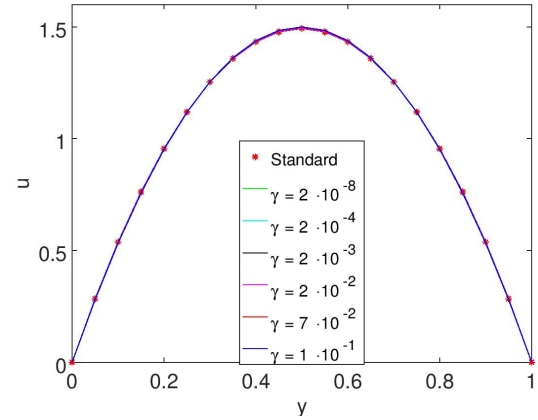
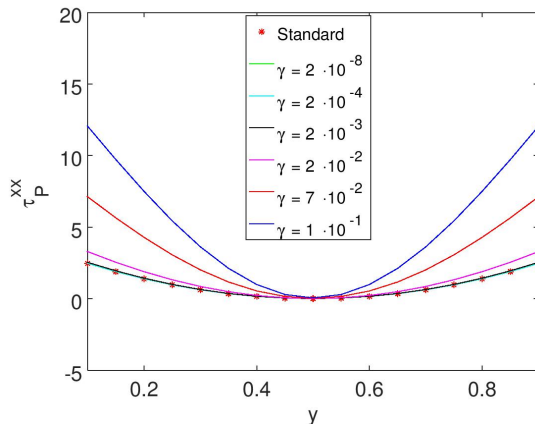
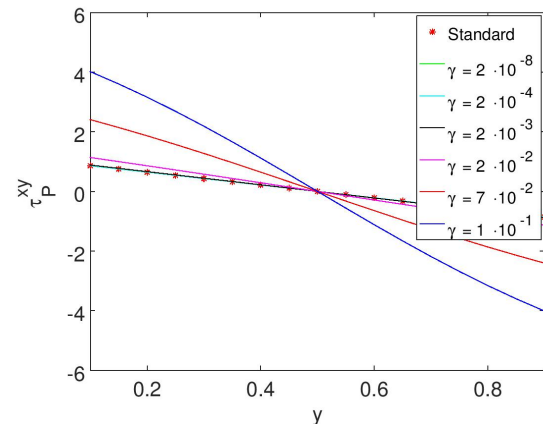
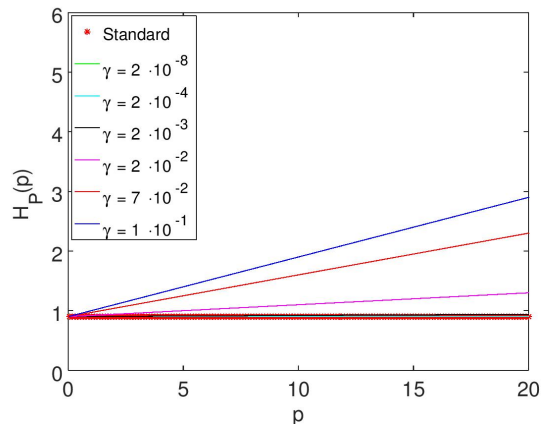
(a) Pressão

(b) Velocidade  $u$ (c) Tensor  $\tau_P^{xx}$ (d) Tensor  $\tau_P^{xy}$ (e) Viscosidade  $H_P(p)$ Figura 4.10: Variação do coeficiente  $\gamma$  com  $Re = 1.0$ .

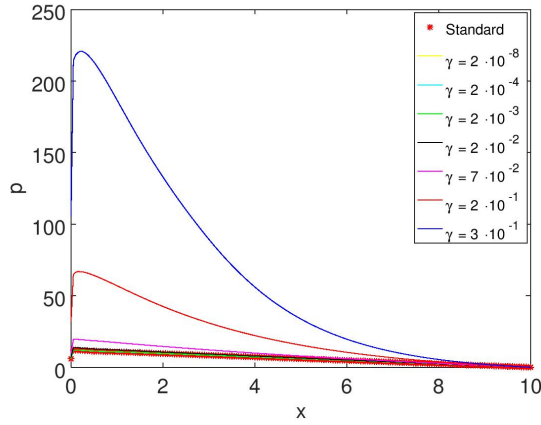
- Para  $Re = 5.0$ , considera-se os seguintes valores de  $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$ ,  $2 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-3}$ ,  $2 \cdot 10^{-2}$ ,  $7 \cdot 10^{-2}$  e  $1 \cdot 10^{-1}$ .



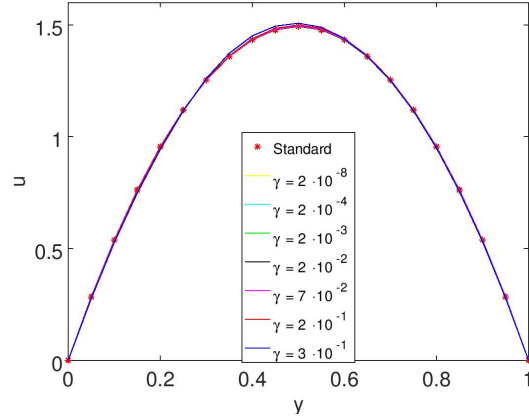
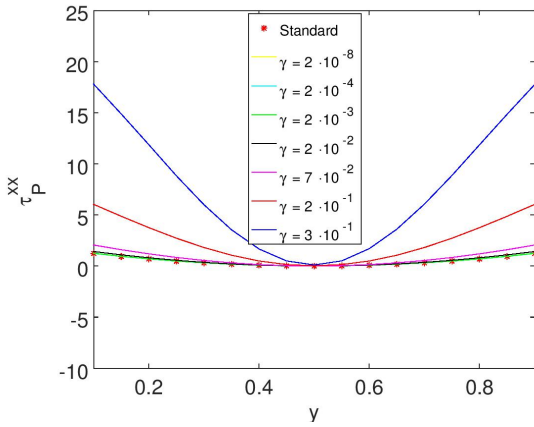
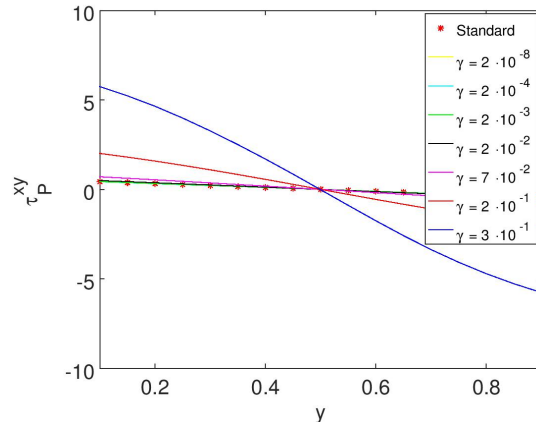
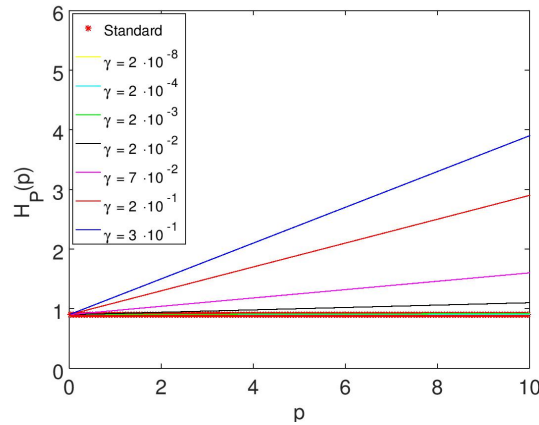
(a) Pressão

(b) Velocidade  $u$ (c) Tensor  $\tau_P^{xx}$ (d) Tensor  $\tau_P^{xy}$ (e) Viscosidade  $H_P(p)$ Figura 4.11: Variação do coeficiente  $\gamma$  com  $Re = 5.0$ .

- Para  $Re = 10.0$ , considera-se os seguintes valores de  $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$ ,  $2 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-3}$ ,  $2 \cdot 10^{-2}$ ,  $7 \cdot 10^{-2}$ ,  $2 \cdot 10^{-1}$  e  $3 \cdot 10^{-1}$ .



(a) Pressão

(b) Velocidade  $u$ (c) Tensor  $\tau_P^{xx}$ (d) Tensor  $\tau_P^{xy}$ (e) Viscosidade  $H_P(p)$ Figura 4.12: Variação do coeficiente  $\gamma$  com  $Re = 10.0$ .

### 4.2.3 Variação do Número de Reynolds

Aqui, é apresentado os resultados referentes à variação do número de Reynolds para as diversas variáveis presentes no escoamento. Para esta verificação, considera-se fixos os parâmetros  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.3$ .

As Figuras 4.13 e 4.14 ilustram o comportamento do escoamento para a variação de Reynolds com  $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$  e  $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ , respectivamente. Pode-se notar em ambos os casos, que quanto menor o número de Reynolds, maiores serão as forças presentes no escoamento.

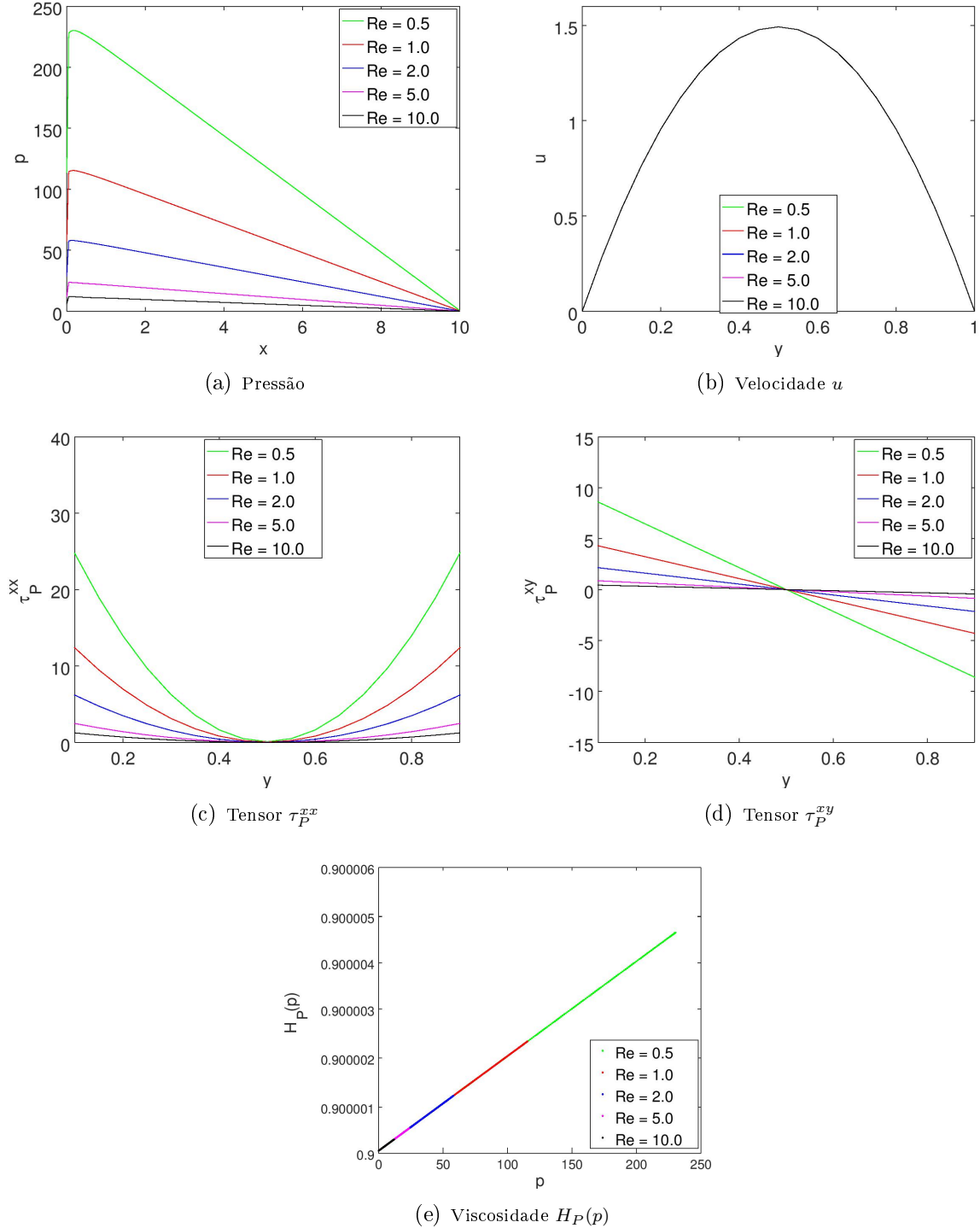


Figura 4.13: Variação de  $Re$  com  $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$ .

A Figura 4.13, onde o coeficiente  $\gamma$  é relativamente baixo, apresenta um perfil linear para a pressão e também para a componente  $\tau_P^{xy}$  do tensor para qualquer valor de  $Re$  adotado. Ainda, o perfil de velocidade não sofre nenhuma alteração com a variação do número de Reynolds. A saber, os valores de Reynolds utilizados são  $Re = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$  e  $10.0$ . Já a Figura 4.14, o coeficiente  $\gamma$  passa a exercer efeitos sobre o comportamento

do escoamento, diferentemente do caso anterior, quase modelo *standard*. Para este caso, as simulações numéricas são feitas para  $Re = 1.0, 2.0, 5.0$  e  $10.0$ .

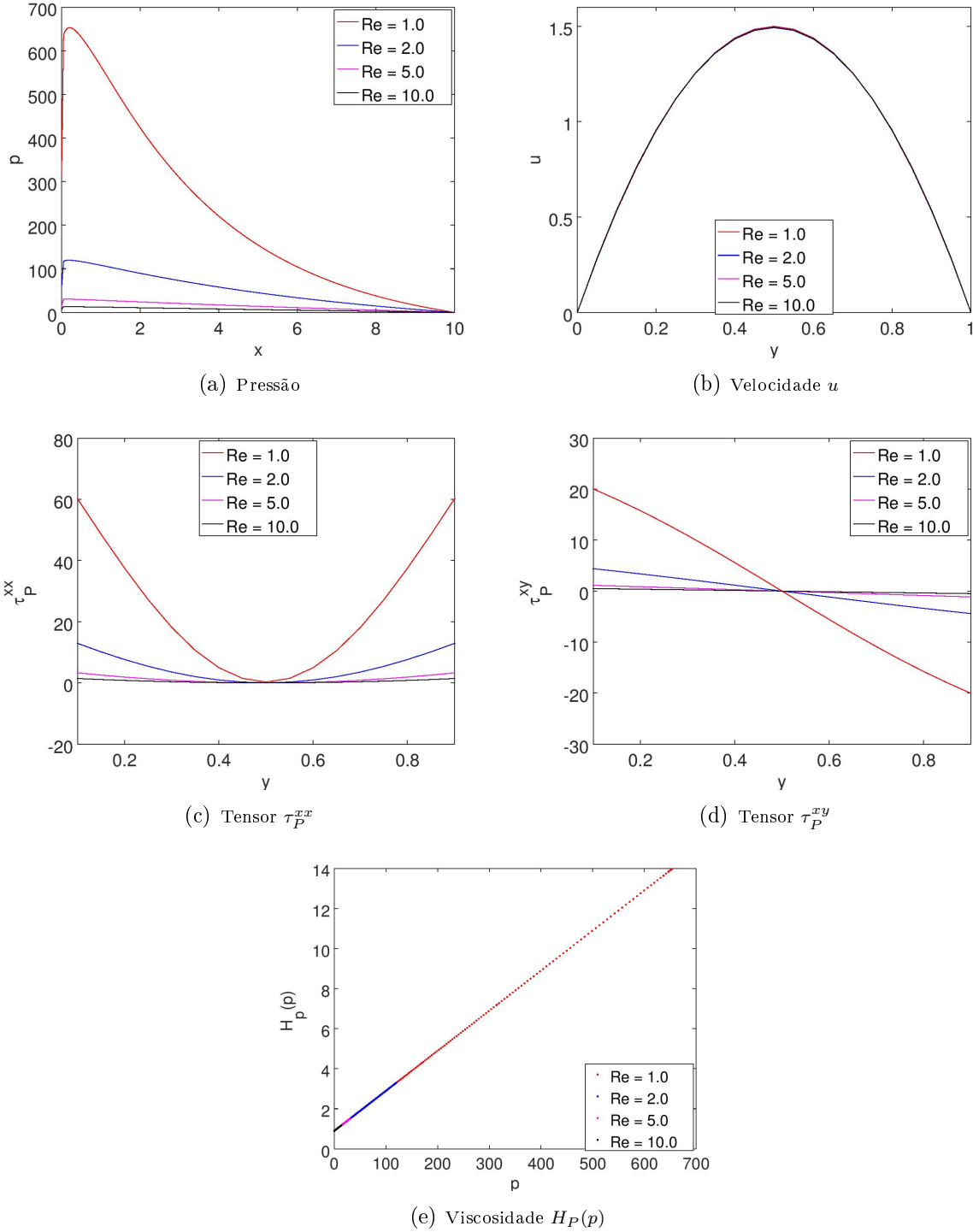


Figura 4.14: Variação de  $Re$  com  $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ .

Na variação do número de Reynolds é mantido o numerador ( $\rho UL$ ) e altera-se apenas o denominador, ou seja, altera-se a viscosidade total do escoamento. Desta forma, quando se diminui o número de Reynolds, aumenta-se a viscosidade do escoamento, e então, utiliza-se um raciocínio análogo ao da seção 4.2.2 para afirmar que há coerência nos resultados das Figuras 4.13 e 4.14 em que mostram que, para a componente  $u$  praticamente inalterada, uma diminuição do número de Reynolds geram um aumento nas forças envolvidas no escoamento.

#### 4.2.4 Variação de $\beta$

Para a variação do parâmetro  $\beta$ , considera-se os seguintes valores:  $\beta = 0.1, 0.5$  e  $0.9$ . Tal parâmetro, como já descrito na seção 2.4, tem a função de controlar a quantidade de solvente em um fluido, ou seja, quanto mais próximo de 1, mais Newtoniano este será. Em outras palavras, menor será sua contribuição elástica, tendo como reflexo disto o que pode-se observar na Figura 4.15. Note que os perfis para velocidade  $u$  não apresenta modificações com a variação de  $\beta$ , diferentemente das componentes do tensor. Quanto mais baixo o valor de  $\beta$ , maiores serão os tensores. Estes resultados são apresentados a partir de simulações numéricas para  $\gamma = 0.02$ ,  $Re = 1.0$  e  $Wi = 0.3$  fixos.

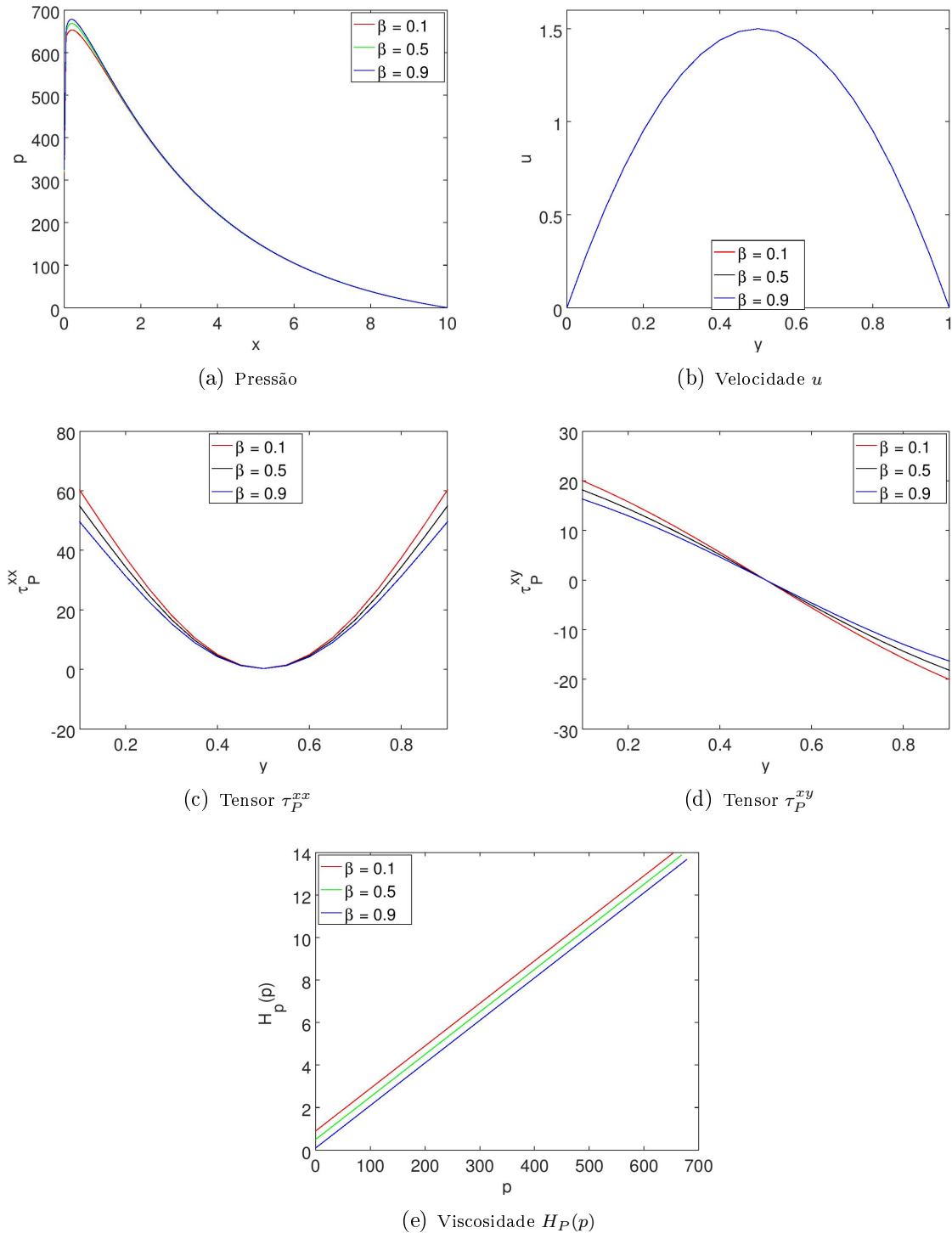


Figura 4.15: Variação de  $\beta$ .

### 4.2.5 Variação do Número de Weissenberg

Por fim, para a variação do número de Weissenberg, considera-se fixos os parâmetros  $\beta = 0.1$  e  $Re = 1.0$ . As Figuras 4.16 e 4.17 ilustram o comportamento da variação de  $Wi$  para  $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$  e  $2 \cdot 10^{-2}$ , respectivamente.

Os resultados numéricos expressos pelas Figuras 4.16 e 4.17 foram obtidos a partir de simulações numéricas para  $Wi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  e  $0.5$ .

Note que, na Figura 4.16 onde  $\gamma$  é pequeno, os perfis para as variáveis presentes em um escoamento não apresentam mudança com a variação de  $Wi$ , exceto para a componente do tensor  $\tau_P^{xx}$ . Já na Figura 4.17 para  $\gamma$  mais alto, estas mudanças podem ser observadas para todas as variáveis, com exceção da velocidade e viscosidade dependendo da pressão que se mantém. É possível notar que, quanto maior o número de Weissenberg, maior será a pressão e as tensões no escoamento.

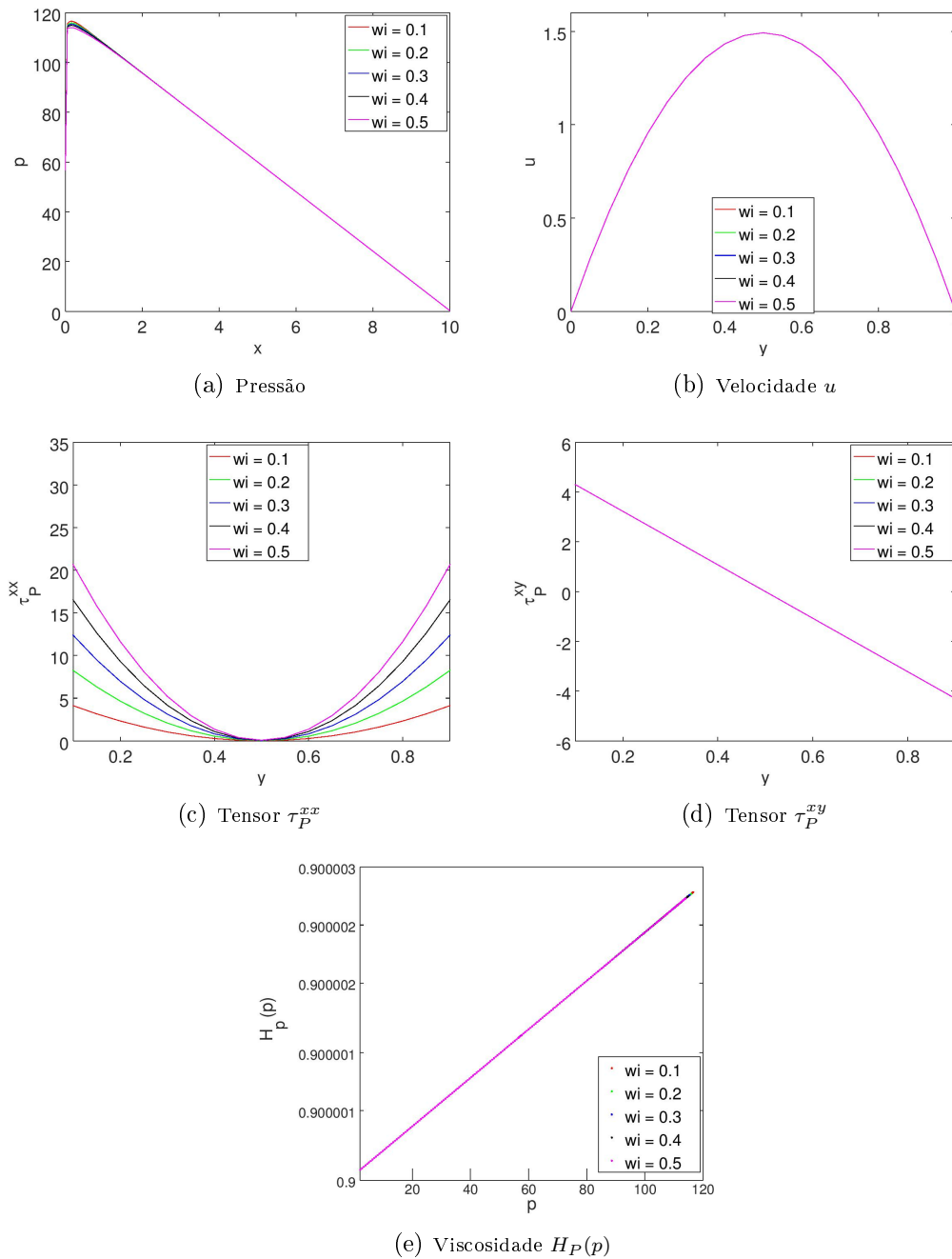


Figura 4.16: Variação de Weissenberg com  $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$ .

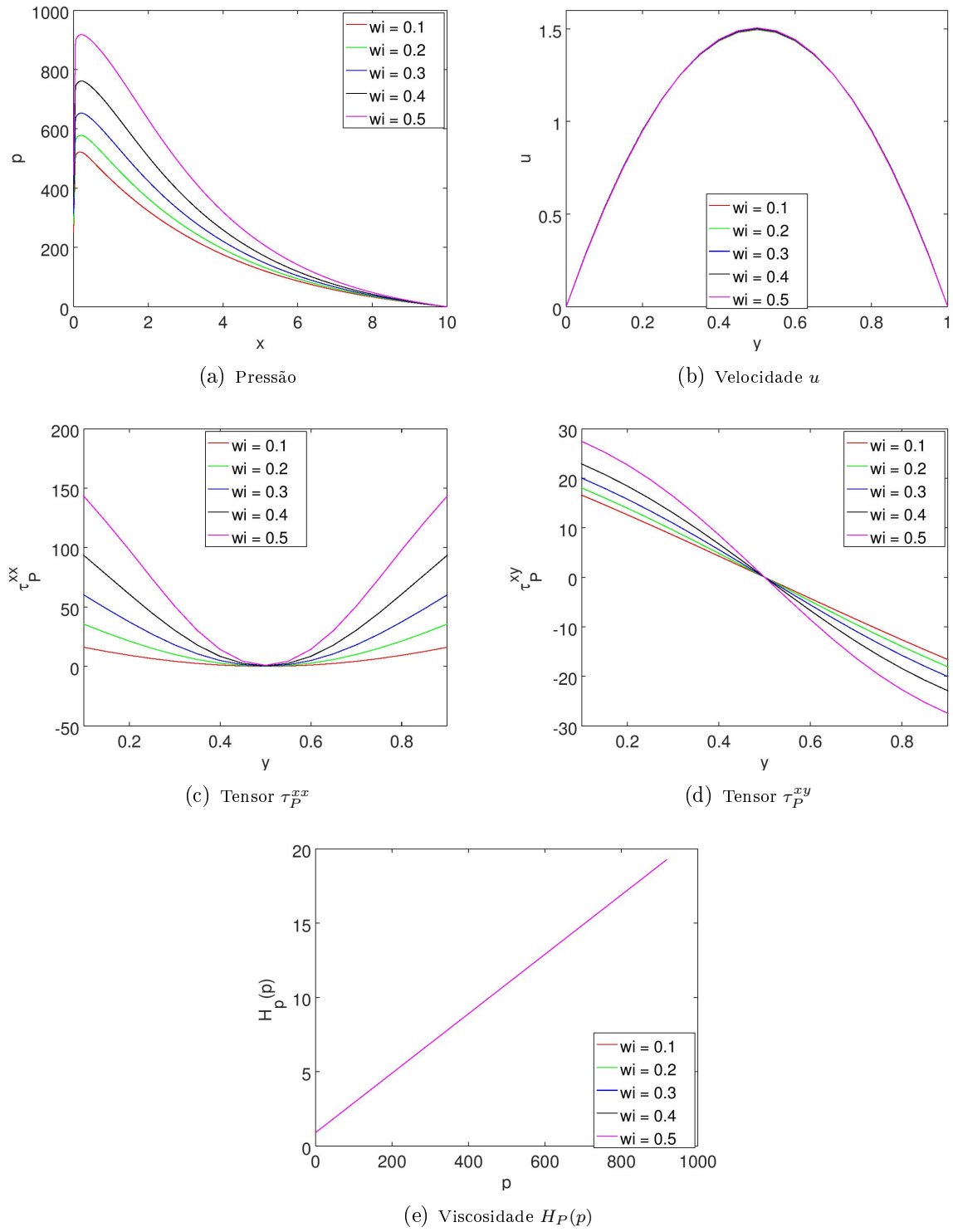


Figura 4.17: Variação de Weissenberg com  $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ .

### 4.3 Simulação Numérica para Expansão 1:4

O objetivo desta seção é analisar o comportamento de um escoamento viscoelástico em que a viscosidade varia linearmente com a pressão utilizando o modelo Oldroyd-B para uma nova geometria, a expansão planar 1:4, cujo esboço pode ser visto na Figura 4.18. Em geral, este tipo de problema em que ocorre a mudança da seção transversal de um duto ou canal, levando em consideração um caso bidimensional, são encontrados em aplicações da engenharia.

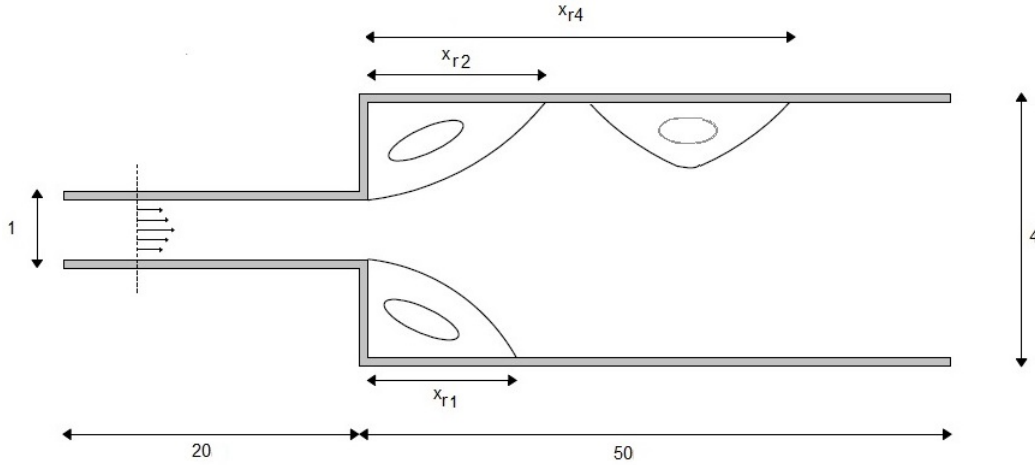


Figura 4.18: Esboço da geometria para expansão 1:4.

Trabalhos como [16] e [19], estudam o comportamento dos vórtices para o caso Newtoniano e não-Newtoniano. Ambos utilizam como geometria a expansão, porém com diferentes proporções para a altura. Enquanto [16] aplica em uma expansão planar 1:3, [19] aplica em uma expansão planar 1:4. Ainda, utilizam como modelo para um fluido viscoelástico o FENE-CR (*Finite Extendable Non-linear Elastic - Chilcott and Rallison*) modificado.

Os resultados para esta nova geometria serão discutidos a seguir para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos. Para a simulação numérica deste tipo de escoamento adota-se uma malha uniforme com espaçamento  $\delta x = \delta y = 0.1$ , possuindo o canal de entrada  $200 \times 10$  células e o canal maior de saída  $500 \times 40$  células.

#### 4.3.1 Caso Newtoniano

Antes de avaliar os efeitos que a viscosidade dependendo da pressão causam em um escoamento viscoelástico, serão apresentados alguns resultados numéricos da expansão 1:4 fazendo comparações com outros resultados da literatura. Estas comparações foram realizadas baseando-se no trabalho de Rocha [19], pois apresenta a mesma proporção de altura 1:4. Rocha não só traz resultados para o comprimento e intensidade dos vórtices, mas também apresenta resultados para a componente  $u$  do vetor velocidade fazendo cortes transversais ao longo do canal maior. Para este trabalho foram escolhidos os cortes em duas diferentes posições:  $x = 30$  e  $40$ , como mostra a Figura 4.19.

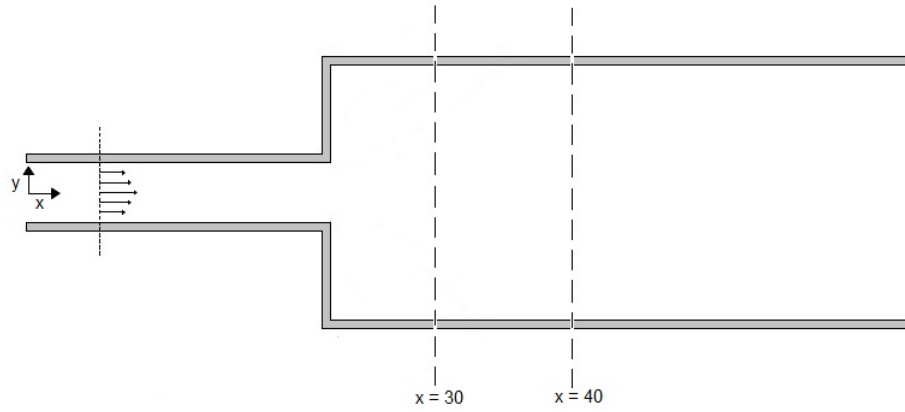


Figura 4.19: Localização dos cortes transversais em  $x = 30$  e  $x = 40$  na expansão planar 1:4.

A Figura 4.20 apresenta a comparação do perfil de velocidade  $u$  para o caso Newtoniano entre os resultados numéricos obtidos e os resultados numéricos de [19], sendo representados nos gráficos pelas linhas contínuas e pontos, respectivamente. Além disso, considerou-se diferentes números de Reynolds, tais como  $Re = 60, 65, 80$  e  $100$ .

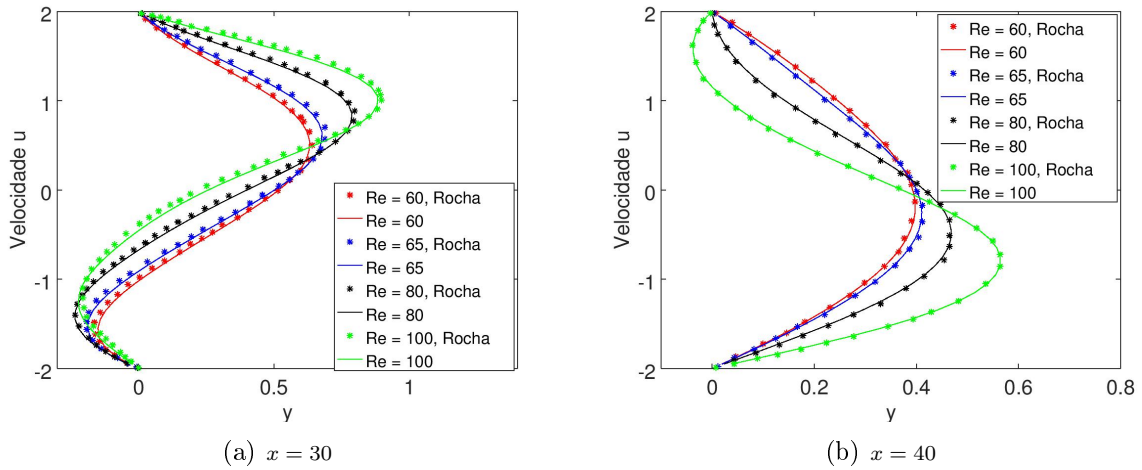


Figura 4.20: Comparação do perfil  $u$  de velocidade. Resultados numéricos do presente trabalho em linha contínua e resultados numéricos de [19] em símbolos para o caso Newtoniano.

Ressalta-se que a velocidade máxima deste perfil parabólico na saída da expansão é de  $0.375m/s$ , pois impõem-se uma velocidade máxima de  $1,5m/s$  no canal menor, ou seja, na entrada do fluido.

Como pode-se observar pelas Figuras 4.20 a) e b), os resultados numéricos obtidos estão coerentes com os resultados de Rocha [19]. Além disso, Rocha também verificou o comprimento dos vórtices inferior e superior, sendo representado por  $x_{R1}$  e  $x_{R2}$ , respectivamente. O estudo possibilitou a análise da simetria destes, obtendo assim um número de Reynolds crítico  $Re_c$ , ou seja, número de Reynolds para a perda de simetria dos vórtices.

Neste trabalho, para a coleta dos resultados numéricos, é analisada a quantidade de células  $n$  em que a componente  $u$  do vetor velocidade é negativa, como mostra a Figura 4.21, e esta é multiplicada pelo espaçamento  $\delta x$ .

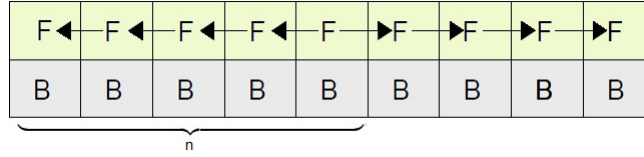


Figura 4.21: Esboço da malha computacional para o cálculo do comprimento dos vórtices.

Tabela 4.4: Comprimento dos vórtices para um fluido Newtoniano.

|      | Rocha [19] |          |          | Resultados obtidos |          |          |
|------|------------|----------|----------|--------------------|----------|----------|
| $Re$ | $x_{R1}$   | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ | $x_{R1}$           | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ |
| 5    | 1.291      | 1.291    | -        | 1.3                | 1.3      | -        |
| 35   | 6.262      | 6.262    | -        | 6.3                | 6.3      | -        |
| 36   | 6.449      | 6.428    | -        | 6.5                | 6.4      | -        |
| 37   | 7.645      | 5.389    | -        | 6.6                | 6.6      | -        |
| 39   | 8.595      | 4.812    | -        | 7.2                | 6.8      | -        |
| 40   | 8.929      | 4.681    | -        | 7.6                | 6.6      | -        |
| 45   | 10.18      | 4.423    | -        | 10.1               | 4.5      | -        |
| 50   | 11.13      | 4.386    | -        | 11.1               | 4.4      | -        |
| 55   | 11.90      | 4.417    | -        | 11.9               | 4.4      | -        |
| 60   | 12.56      | 4.474    | -        | 12.6               | 4.5      | -        |
| 65   | 13.13      | 4.544    | 14.87    | 13.1               | 4.5      | 14.5     |
| 80   | 14.41      | 4.774    | 19.81    | 14.4               | 4.8      | 19.7     |
| 100  | 15.69      | 5.075    | 24.56    | 15.3               | 5.0      | 24.4     |

A Tabela 4.4 mostra que os resultados obtidos aproximam-se dos resultados fornecidos por Rocha, podendo-se notar ainda um número de Reynolds crítico de  $Re_c = 36$  em ambos os casos.

Outros trabalhos que estudam o comprimento dos vórtices para uma expansão planar 1:4 levando em consideração um fluido Newtoniano, como de Drikakis [7] e Battaglia et al. [4], encontram um  $Re_c = 35.3$  e  $Re_c = 35.8$ , respectivamente.

Pode-se observar, uma boa concordância entre os comprimentos dos vórtices encontrados por ambas metodologias numéricas (do presente trabalho e de Rocha [19]), entretanto, em uma vizinhança do  $Re_c$  a diferença torna-se bem mais significativa. Desta forma, foi utilizado o trabalho de Drikakis [7] para mais uma comparação que pode ser vista na Figura 4.22, sendo  $Dx$  a diferença entre o comprimento do vórtice inferior e superior.

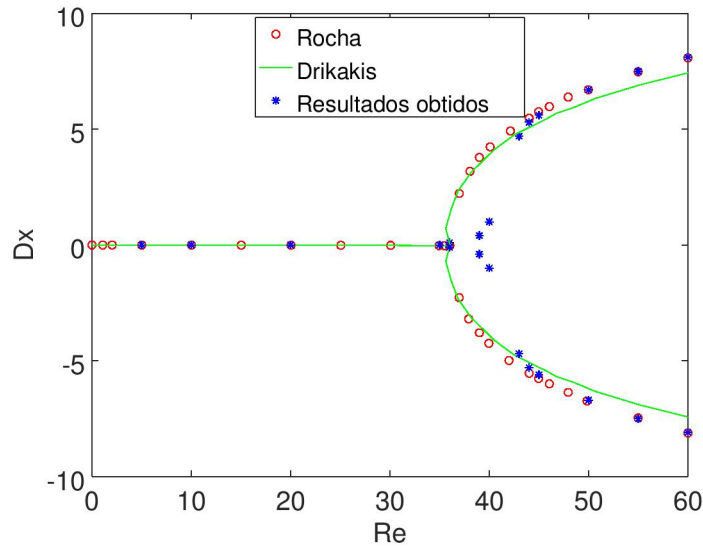


Figura 4.22: Comparação da bifurcação da assimetria dos vórtices para um fluido Newtoniano.

Esta nova comparação indica que de fato há uma necessidade de refinamento de malha, pelo menos, para os casos de  $Re$  próximos ao  $Re_c$ , no intervalo de  $Re = 35 - 40$ ; pois a forma de medir o vórtice depende diretamente da malha (ver Fig. 4.21) e além disso, o intervalo é de grande instabilidade para o escoamento, onde ele passa de simétrico para assimétrico.

Portanto, a atenção neste trabalho não será em buscar exatamente um conjunto de parâmetros críticos para o escoamento, mas sim destacar na presente metodologia os efeitos em considerar a viscosidade dependendo da pressão em comparação com o modelo viscoelástico *Standard*. Como as comparações estão em boa concordância fora da zona crítica, utiliza-se a presente malha para o objetivo de estudo.

### 4.3.2 Caso Não-Newtoniano

Para estudar o escoamento de um fluido viscoelástico considera-se o modelo Oldroyd-B *Standard* e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão. Assim como no caso Newtoniano, será realizada a análise do comprimento dos vórtices para ambos os modelos variando alguns parâmetros adimensionais. O intuito deste estudo é verificar se os modelos apresentam o mesmo comportamento para cada variação.

Os resultados obtidos, expressos nas Tabelas 4.5-4.7 são referentes à variação de  $\beta$ ,  $Wi$  e  $Re$ , respectivamente. As Tabelas 4.5-4.7 à esquerda são referentes ao modelo Oldroyd-B *Standard* e as Tabelas 4.5-4.7 à direita são referentes ao modelo Oldroyd-B com a viscosidade variando linearmente com a pressão.

Para a variação de  $\beta$  considera-se fixo  $Re = 40$ ,  $Wi = 0.5$  e  $\gamma = 0.2$ . Os valores adotados para  $\beta$  são de 0.1, 0.25, 0.5, 0.75 e 0.9. Para a variação de  $Wi$  cujos resultados estão expressos na Tabela 4.6 considera-se fixo  $\beta = 0.75$ ,  $Re = 80$  e  $\gamma = 0.02$ . Já para variação de  $Re$  considera-se fixo  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ , sendo o coeficiente  $\gamma$  apenas presente no modelo Oldroyd-B cuja viscosidade depende da pressão.

Tabela 4.5: Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando  $\beta$  para o modelo Oldroyd-B *Standard* à esquerda e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão à direita, com  $Re = 40$  e  $Wi = 0.5$ .

| $\beta$ | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ | $\beta$ | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ |
|---------|----------|----------|---------|----------|----------|
| 0.1     | 6.2      | 6.1      | 0.1     | 6.0      | 6.0      |
| 0.25    | 6.4      | 6.3      | 0.25    | 6.2      | 6.2      |
| 0.5     | 6.7      | 6.5      | 0.5     | 6.5      | 6.4      |
| 0.75    | 7.2      | 6.4      | 0.75    | 6.9      | 6.5      |
| 0.9     | 7.3      | 6.6      | 0.9     | 7.0      | 6.7      |

Tabela 4.6: Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando  $Wi$  para o modelo Oldroyd-B *Standard* à esquerda e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão à direita, com  $Re = 80$  e  $\beta = 0.75$ .

| $Wi$ | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ | $Wi$ | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ |
|------|----------|----------|----------|------|----------|----------|----------|
| 0.1  | 14.3     | 4.7      | 19.6     | 0.1  | 14.3     | 4.7      | 19.6     |
| 0.3  | 14.3     | 4.7      | 19.5     | 0.3  | 14.3     | 4.7      | 19.5     |
| 0.5  | 14.2     | 4.7      | 19.3     | 0.5  | 14.2     | 4.7      | 19.3     |
| 0.7  | 14.2     | 4.7      | 19.1     | 0.7  | 14.2     | 4.7      | 19.1     |
| 0.9  | 14.2     | 4.8      | 18.9     | 0.9  | 14.2     | 4.8      | 18.9     |

Tabela 4.7: Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando  $Re$  para o modelo Oldroyd-B *Standard* à esquerda e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão à direita, com  $Wi = 0.1$  e  $\beta = 0.1$ .

| $Re$ | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ | $Re$ | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ |
|------|----------|----------|----------|------|----------|----------|----------|
| 5    | 1.1      | 1.1      | -        | 5    | 1.1      | 1.1      | -        |
| 10   | 1.8      | 1.8      | -        | 10   | 1.7      | 1.7      | -        |
| 20   | 3.4      | 3.4      | -        | 20   | 3.3      | 3.3      | -        |
| 30   | 5.2      | 5.2      | -        | 30   | 5.2      | 5.2      | -        |
| 36   | 6.3      | 6.3      | -        | 35   | 6.1      | 6.1      | -        |
| 37   | 6.5      | 6.4      | -        | 36   | 6.3      | 6.2      | -        |
| 40   | 8.7      | 4.8      | -        | 40   | 8.6      | 4.8      | -        |
| 50   | 11.0     | 4.4      | -        | 50   | 11.0     | 4.4      | -        |
| 60   | 12.5     | 4.4      | -        | 60   | 12.4     | 4.4      | -        |
| 70   | 13.5     | 4.6      | 16.8     | 70   | 13.5     | 4.6      | 17.0     |
| 80   | 14.3     | 4.7      | 19.7     | 80   | 14.3     | 4.7      | 19.8     |
| 90   | 14.9     | 4.8      | 22.2     | 90   | 15.0     | 4.9      | 22.3     |
| 100  | 15.5     | 5.0      | 24.5     | 100  | 15.6     | 5.0      | 24.5     |

A Tabela 4.5 ilustra o comprimento dos vórtices de um fluido viscoelástico considerando alguns valores de  $\beta$  para o modelo Oldroyd-B *Standard* e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão. É possível observar que ambos os modelos apresentam um mesmo comportamento. Note que, quanto mais viscoelástico é o fluido, isto é, quanto menor o valor de  $\beta$ , mais simétricos são os vórtices.

Da mesma forma, observa-se para a variação de  $Wi$  através da Tabela 4.6 um mesmo comportamento para as duas modelagens. Note que, quanto maior o número de Weissenberg, mais os vórtices tendem a ficar simétricos.

Já para a variação de  $Re$  para o modelo Oldroyd-B *Standard* e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão, os resultados numéricos podem ser vistos na Tabela 4.7. Pode-se observar que o comprimento dos vórtices são maiores com o aumento de  $Re$ , surgindo um terceiro vórtice para  $Re > 70$ . Note ainda que a diferença entre as duas modelagens é muito pequena.

Diante destas pequenas diferenças, será estudado com um pouco mais de detalhe o comportamento das variáveis velocidade, pressão, viscosidade e tensão ao longo de cortes transversais e longitudinal na expansão 1:4 variando os parâmetros dos modelos,  $Re$ ,  $Wi$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ ; lembrando que  $\gamma = 0.0$  reduz-se ao caso *Standard*. Os cortes transversais serão em  $x = 30$  e  $x = 45$ , e o corte longitudinal em  $y = 0$ , na linha central da geometria.

## Variação do Coeficiente da Viscosidade dependendo da Pressão

Como já visto na Subseção 4.2.2, o coeficiente  $\gamma$  controla o quanto a viscosidade é influenciada pela pressão. O estudo da variação de  $\gamma$  para um fluido viscoelástico será feita para dois casos:  $Re = 40$  e  $Re = 80$ , com  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.1$ .

- Para  $Re = 40$ .

Considerando-se fixo  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.1$ , os valores de  $\gamma$  adotados são de 0, 0.02, 0.07 e 0.1. A Tabela 4.8 ilustra os resultados numéricos para o comprimento dos vórtices com a variação de  $\gamma$ , para  $Re = 40$ .

Tabela 4.8: Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano para o modelo Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão variando  $\gamma$ , com  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.1$ .

| $\gamma$        | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ |
|-----------------|----------|----------|
| <i>Standard</i> | 8.7      | 4.8      |
| 0.0             | 8.7      | 4.8      |
| 0.02            | 8.7      | 4.8      |
| 0.07            | 8.6      | 4.8      |
| 0.1             | 8.6      | 4.8      |

Como pode-se notar, o comprimento dos vórtices sofrem uma pequena alteração com a variação de  $\gamma$  apresentando uma tendência a um comportamento mais simétrico para  $\gamma$  mais alto. De acordo com as Figuras 4.24 e 4.25, quanto maior o coeficiente  $\gamma$ , maior será a viscosidade, e portanto, isto pode explicar a diminuição no comprimento  $x_{R1}$  da Tabela 4.8.

A Figura 4.23 apresenta os resultados obtidos a partir da variação do coeficiente  $\gamma$  considerando  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.1$  em um corte longitudinal em  $y = 0$ . As Figuras 4.23 a) e b) ilustram o decrescimento da pressão e viscosidade ao longo do canal, respectivamente, sendo realizado um zoom para cada uma destas variáveis com o objetivo de obter uma melhor visualização do comportamento na região de transição do canal, como mostra as Figuras 4.23 c) e d). Já as Figuras 4.23 e) e f) mostram que as componentes do tensor são nulas em  $y = 0$ , apresentando uma variação dos tensores na região de transição do canal menor para o maior, isto é, em  $x = 20$ , sendo este comportamento coerente com o apresentado por [19]. Ainda, é possível notar que quando  $\gamma \rightarrow 0$  o modelo Oldroyd-B em que a viscosidade varia linearmente com a pressão está tendendo ao modelo Oldroyd-B *Standard*.

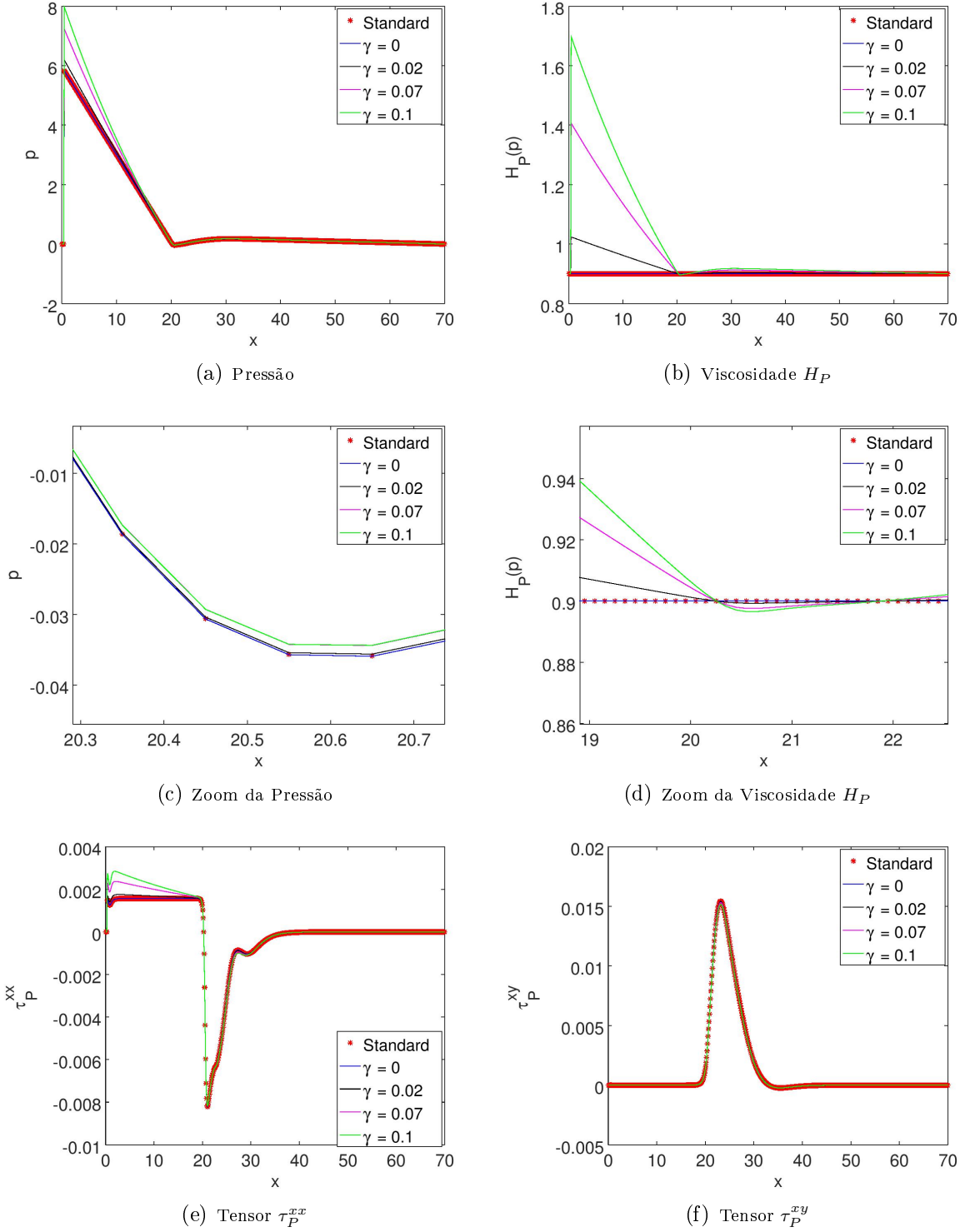


Figura 4.23: Variação de  $\gamma$  para um corte longitudinal em uma expansão planar em  $y = 0$ , para  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. c) Zoom da Pressão. d) Zoom da Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: e)  $\tau_P^{xx}$  e f)  $\tau_P^{xy}$ .

As Figuras 4.24 e 4.25 apresentam os resultados para a velocidade, pressão, viscosidade e componentes do tensor, considerando  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.1$  em um corte transversal na posição de  $x = 30$  e  $x = 45$ , respectivamente.

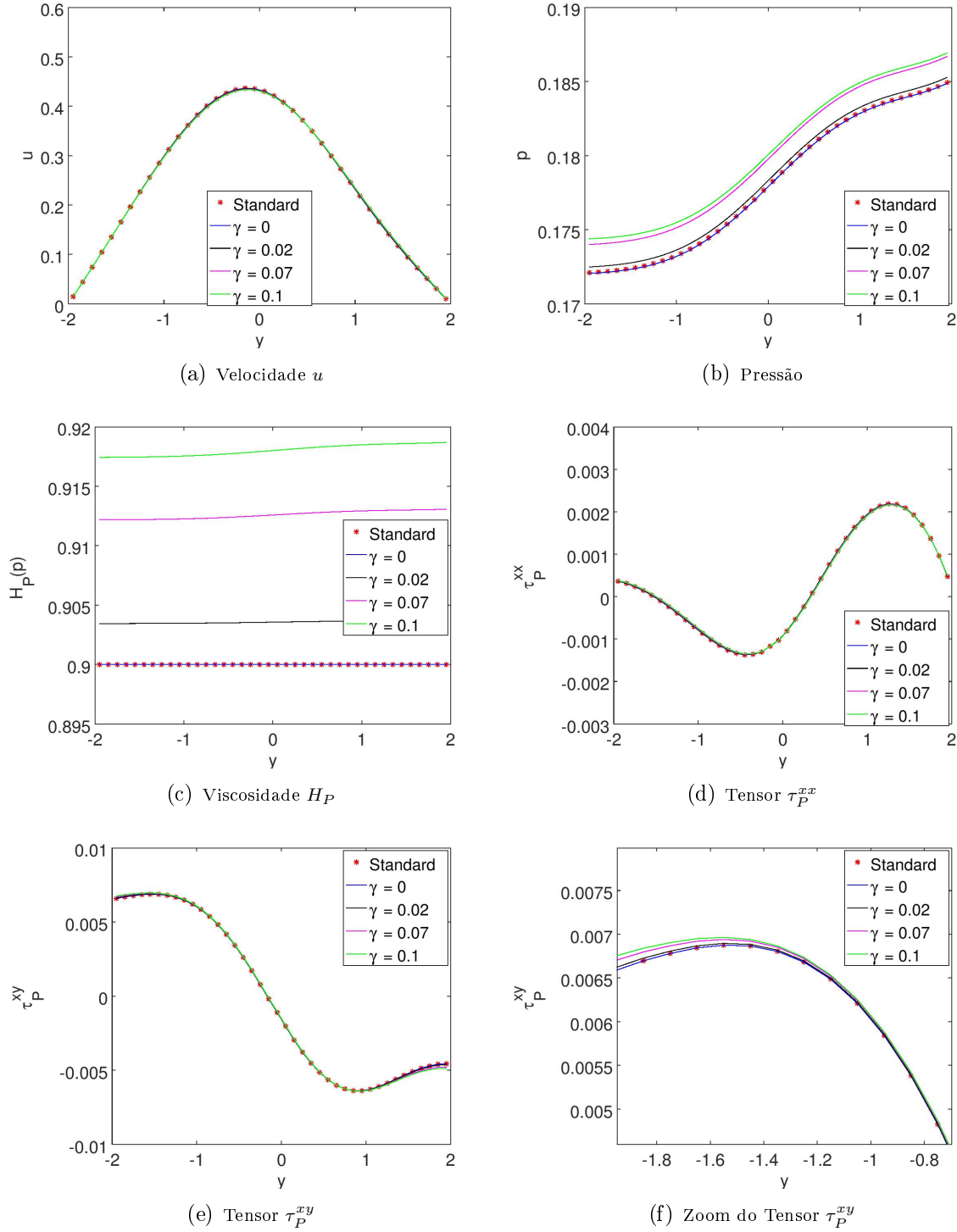


Figura 4.24: Variação de  $\gamma$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 30$ , para  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$ : a) Perfil da componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xy}$ .

É possível notar que os resultados obtidos para  $x = 30$  ilustram o comportamento de um escoamento próximo às regiões que contém vórtices, diferente do corte em  $x = 45$ . Como pode ser visto na Tabela 4.8, o comprimento dos vórtices para  $Re = 40$  são relativamente pequenos, e, por conta disso, os resultados numéricos obtidos para um corte na posição de  $x = 45$ , como mostra a Figura 4.25, não sofrem a influência das recirculações, apresentando um comportamento de regime permanente de cisalhamento. Sendo assim,

considerando-se o corte transversal em  $x = 30$  cuja posição encontra-se próxima às regiões dos vórtices, tem-se que a velocidade se mantém para todos os casos. Já as outras variáveis, bem como a pressão, viscosidade e componentes do tensor são menores na parte inferior do canal devido ao vórtice inferior ser maior que o vórtice superior.

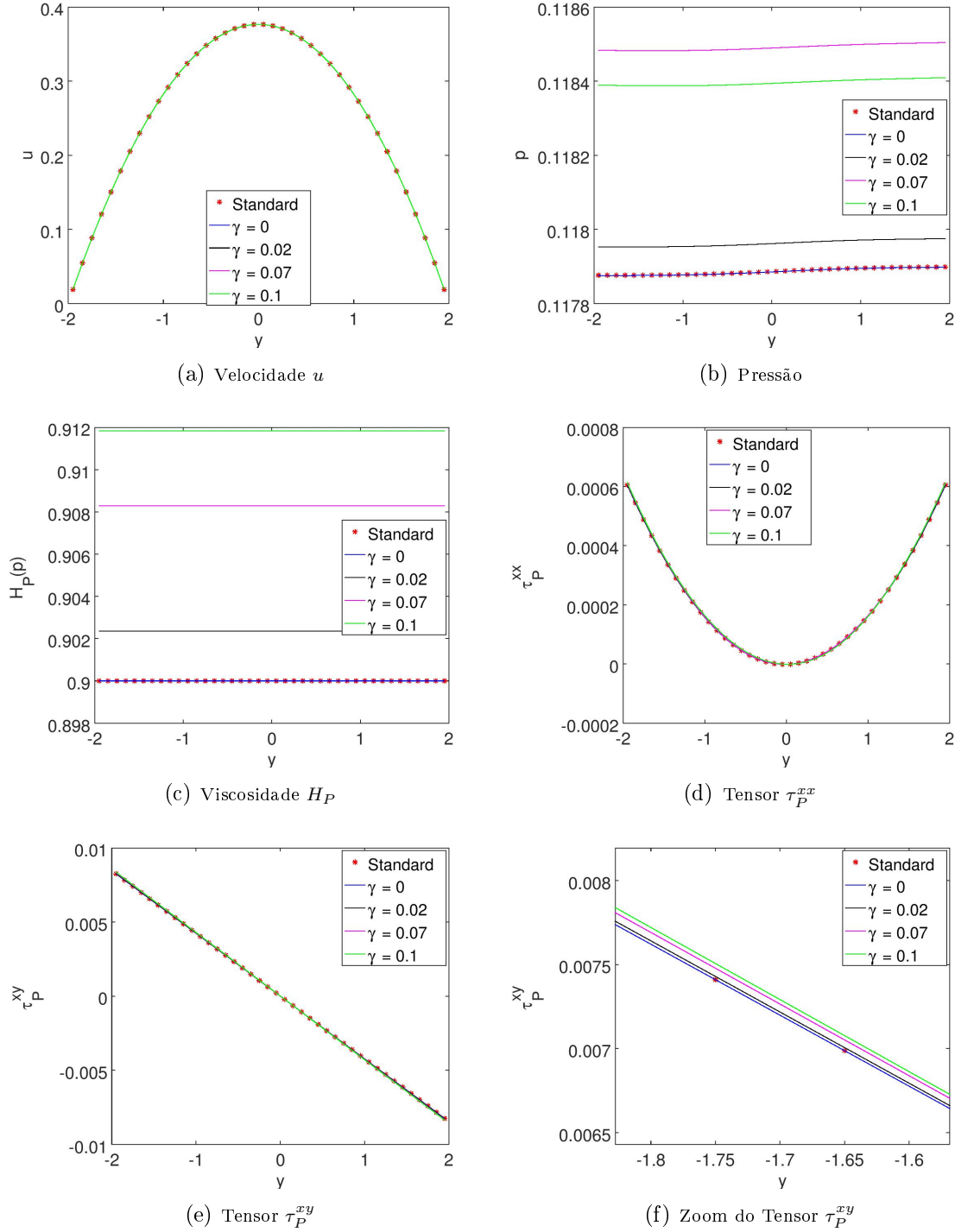


Figura 4.25: Variação de  $\gamma$  para um corte transversal em  $x = 45$ , para  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$ : a) Componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xy}$ .

- Para  $Re = 80$ .

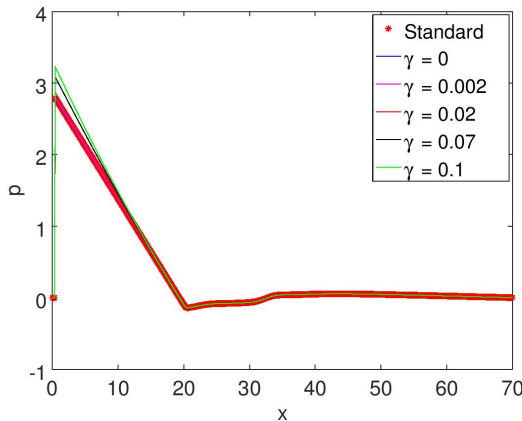
Considerando-se fixo  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.1$ , os valores de  $\gamma$  adotados são  $\gamma = 0, 0.002, 0.02, 0.07$  e  $0.1$ . A Tabela 4.9 ilustra os resultados numéricos para o comprimento dos vórtices com a variação de  $\gamma$ , para  $Re = 80$ .

Tabela 4.9: Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano para o modelo Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão variando  $\gamma$ , com  $Re = 80$ ,  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.1$ .

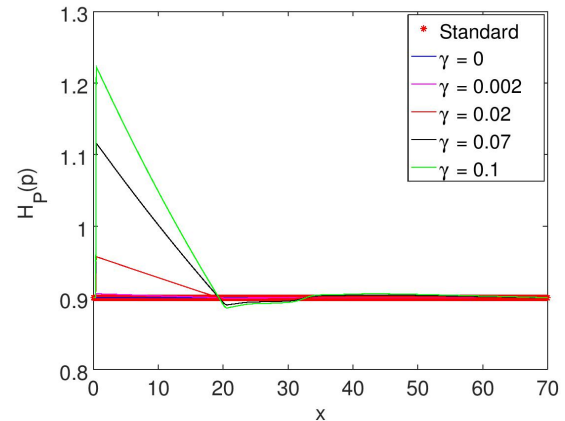
| $\gamma$        | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ |
|-----------------|----------|----------|----------|
| <i>Standard</i> | 14.3     | 4.7      | 19.7     |
| 0.0             | 14.3     | 4.7      | 19.7     |
| 0.002           | 14.3     | 4.7      | 19.7     |
| 0.02            | 14.3     | 4.7      | 19.8     |
| 0.07            | 14.3     | 4.7      | 19.8     |
| 0.1             | 14.3     | 4.7      | 19.8     |

De forma análoga, a Tabela 4.9 apresenta pequena alteração para o comprimento do vórtice  $x_{R4}$  com a variação de  $\gamma$ , porém agora exibe um aumento no comprimento de  $x_{R4}$  para  $\gamma$  mais alto, ao contrário do caso anterior para  $Re = 40$ . Isto acontece devido ao escoamento sofrer maior influência das regiões que contém vórtices para números de Reynolds maiores. Note ainda que, para  $Re = 80$  tem-se o surgimento do terceiro vórtice.

A Figura 4.26 apresenta os resultados obtidos para a variação do coeficiente da viscosidade dependendo da pressão  $\gamma$ , considerando  $Re = 80$ ,  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.1$  em um corte longitudinal em  $y = 0$ . O comportamento das variáveis envolvidas em um escoamento para  $Re = 80$  não difere dos obtidos anteriormente para  $Re = 40$  (ver Figura 4.23). Porém, a pressão passa a ser menor quando o número de Reynolds é mais alto, e, conseqüentemente, a viscosidade também. Tem-se ainda que os tensores são nulos, apresentando uma variação na transição do canal menor para o canal maior, expressos pelas Figuras 4.26 e) e f).



(a) Pressão



(b) Viscosidade  $H_P$

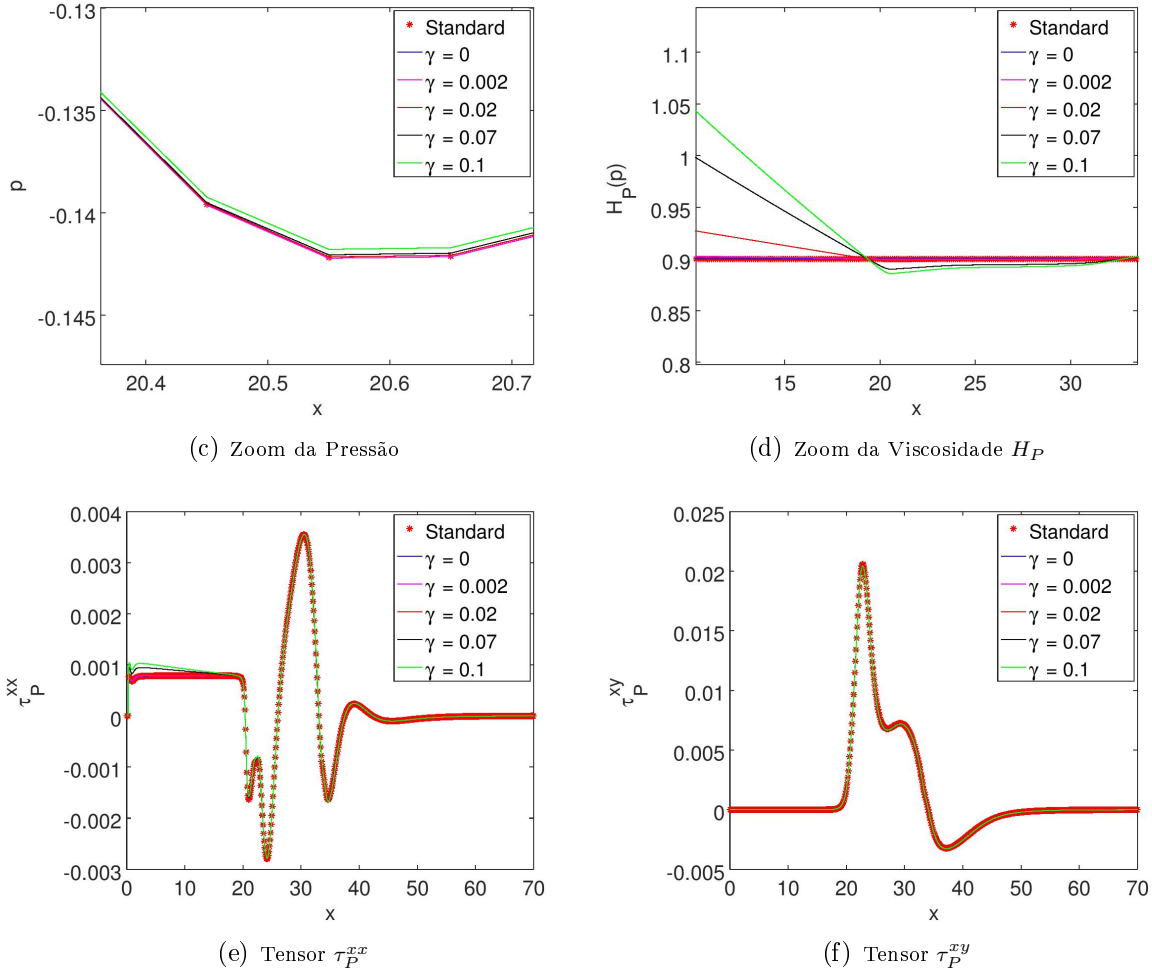


Figura 4.26: Variação de  $\gamma$  para um corte longitudinal em uma expansão planar 1:4 em  $y = 0$ , para  $Re = 80$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. c) Zoom da Pressão. d) Zoom da Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: e)  $\tau_P^{xx}$  e f)  $\tau_P^{xy}$ .

Já as Figuras 4.27 e 4.28 apresentam os resultados para as variáveis, considerando  $Re = 80$ ,  $\beta = 0.1$  e  $Wi = 0.1$  em um corte transversal na posição de  $x = 30$  e  $x = 45$ , respectivamente. É possível notar que os resultados obtidos para  $x = 45$  ilustram o comportamento de um escoamento que encontra-se próximo às regiões que contêm vórtices, diferente do corte em  $x = 30$ , pois como mostra a Figura 4.27 a) o perfil de velocidade  $u$  apresenta velocidade negativa apontando a existência do vórtice inferior nesta posição. A existência do vórtice em  $x = 30$  pode ser verificada também através da Tabela 4.9. Em ambas as Figuras, nota-se que a velocidade se mantém e a viscosidade apresenta o mesmo comportamento que a pressão. Entretanto, para números de Reynolds maiores, onde as recirculações afetam ainda mais o escoamento, faz com que a pressão seja negativa, e então a viscosidade tende a ser menor com o aumento de  $\gamma$  (ver Figuras 4.27 b) e c)). Este efeito torna os vórtices mais assimétricos, como visto na Tabela 4.9. Já os tensores sofrem uma pequena variação, e estes podem ser melhor visualizados nas Figuras 4.27-4.28 f).

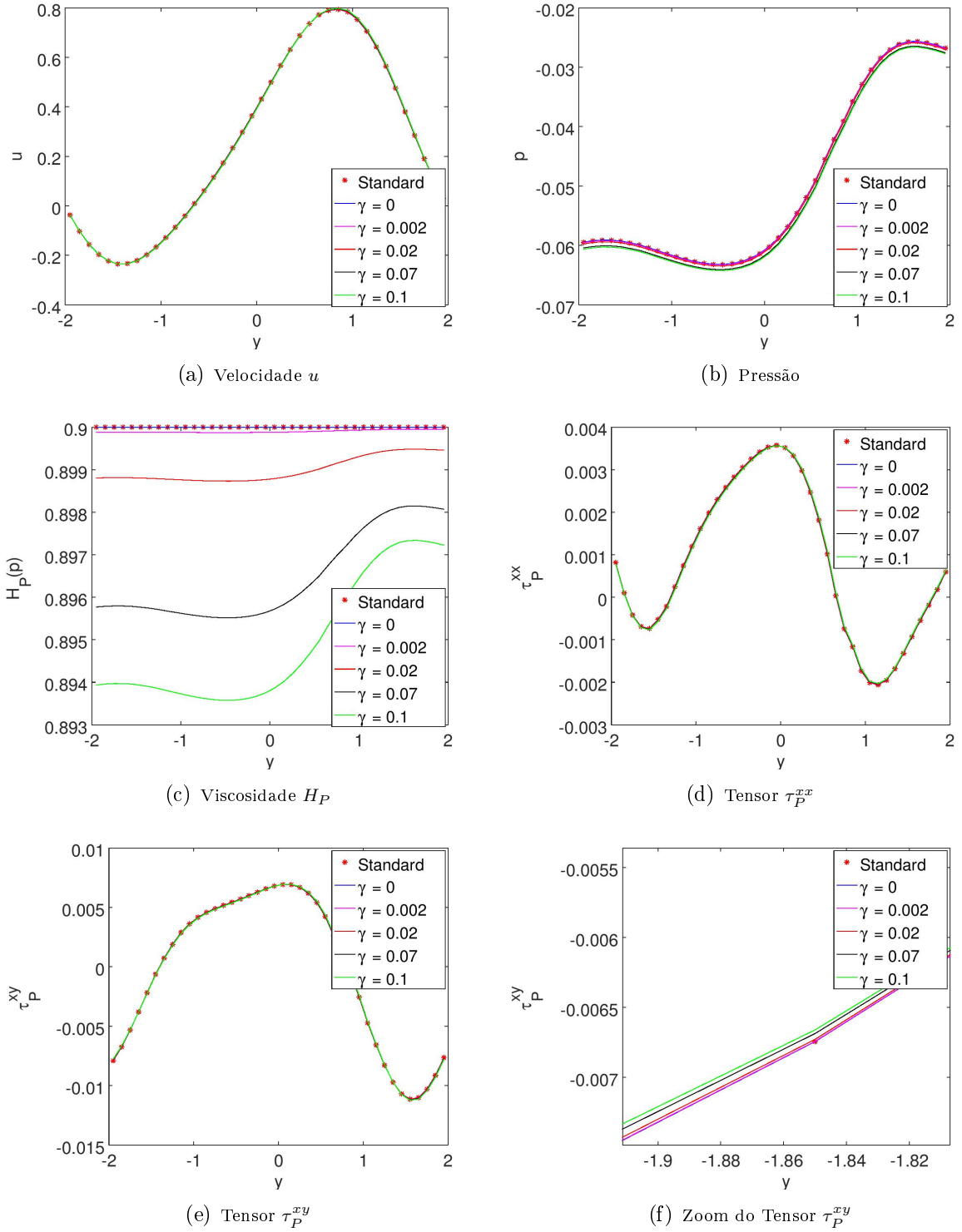


Figura 4.27: Variação de  $\gamma$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 30$ , para  $Re = 80$ , para  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$ : a) Perfil da componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xy}$ .

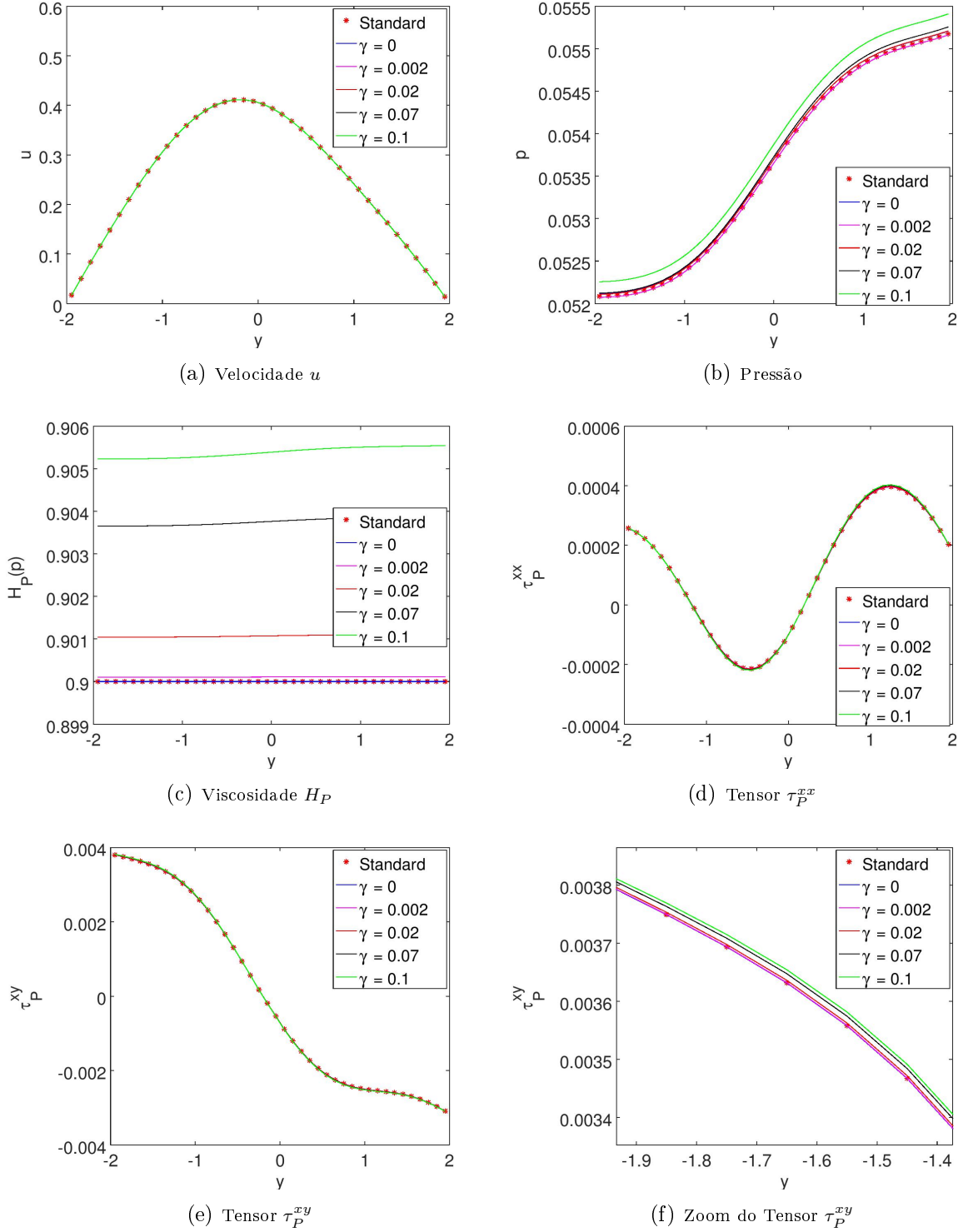


Figura 4.28: Variação de  $\gamma$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 45$ , para  $Re = 80$ , para  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$ : a) Perfil da componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xy}$ .

### Variação do Número de Weissenberg

Considerando-se fixo  $Re = 80$ ,  $\beta = 0.75$  e  $\gamma = 0.02$ , os valores de  $Wi$  adotados são  $Wi = 0.1, 0.3, 0.5$  e  $0.7$ . A Tabela 4.10 apresenta o comprimento dos vórtices para cada um destes casos que será estudado a seguir. É possível notar a existência do terceiro

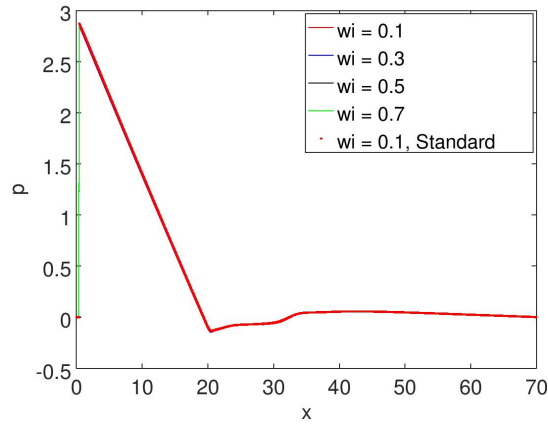
vórtice e ainda observa-se que quanto maior o número de Weissenberg, menores serão os vórtices.

Tabela 4.10: Comprimento dos vórtices de um fluido viscoelástico variando  $Wi$ , com  $Re = 80$ ,  $\beta = 0.75$  e  $\gamma = 0.02$ .

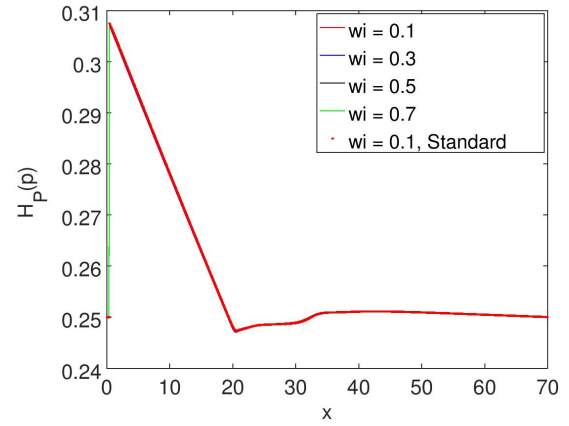
| $Wi$ | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ |
|------|----------|----------|----------|
| 0.1  | 14.3     | 4.7      | 19.6     |
| 0.3  | 14.3     | 4.7      | 19.5     |
| 0.5  | 14.2     | 4.7      | 19.3     |
| 0.7  | 14.2     | 4.7      | 19.1     |

Nos gráficos a seguir, será incluído para efeito de comparação um resultado do modelo Oldroyd-B *Standard*.

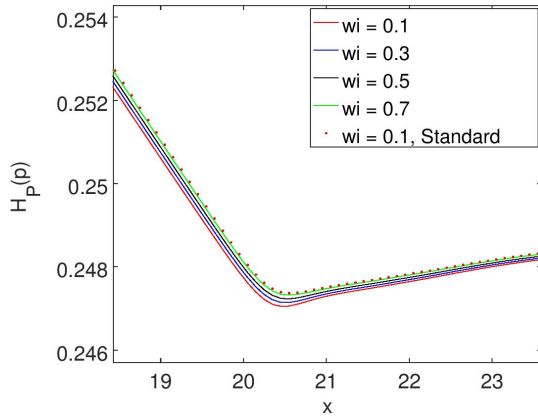
A Figura 4.29 apresenta os resultados obtidos a partir da variação de  $Wi$  em um corte longitudinal em  $y = 0$ . De forma análoga à variação de  $\gamma$ , as variáveis apresentam um mesmo comportamento, sendo o decrescimento da pressão e da viscosidade ao longo do canal e os tensores nulos em  $y = 0$ , cujo comportamento está coerente com [19].



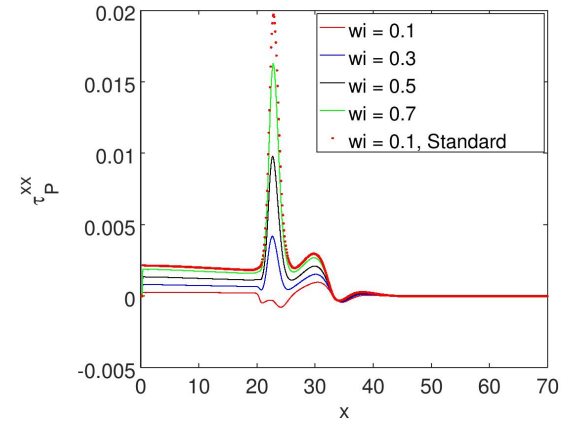
(a) Pressão



(b) Viscosidade  $H_P$



(c) Zoom para Viscosidade  $H_P$



(d) Tensor  $\tau_P^{xx}$

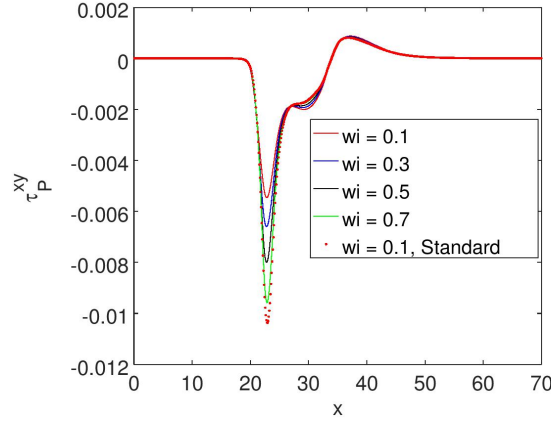
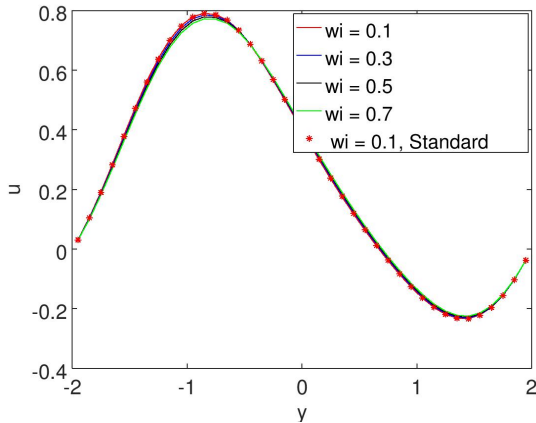
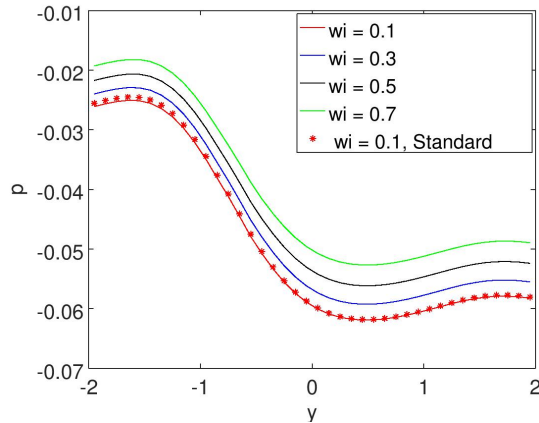
(e) Tensor  $\tau_P^{xy}$ 

Figura 4.29: Variação de  $Wi$  para um corte longitudinal em uma expansão planar 1:4 em  $y = 0$ , para  $Re = 80$ ,  $\beta = 0.75$  e  $\gamma = 0.02$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. c) Zoom da Viscosidade  $H_P$ . Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ .

Já as Figuras 4.30 e 4.31 apresentam os resultados da variação de  $Wi$  para as variáveis envolvidas em um escoamento em um corte transversal na posição de  $x = 30$  e  $x = 45$ , respectivamente. Como estes resultados numéricos são para um  $Re = 80$ , a Figura 4.30 ilustra o comportamento de um escoamento em uma região que possui vórtices, diferente da Figura 4.31, que por sua vez, ilustra o comportamento de uma região situada próxima aos vórtices que ainda sofre influência destes. Estas situações podem ser constatadas na Tabela 4.10.

Note que a diferença entre o modelo Oldroyd-B *Standard* e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão por pequenas que sejam, ainda existem. Estas diferenças para a pressão, viscosidade e tensor podem ser vistas nas Figuras 4.30 e 4.31.

(a) Velocidade  $u$ 

(b) Pressão

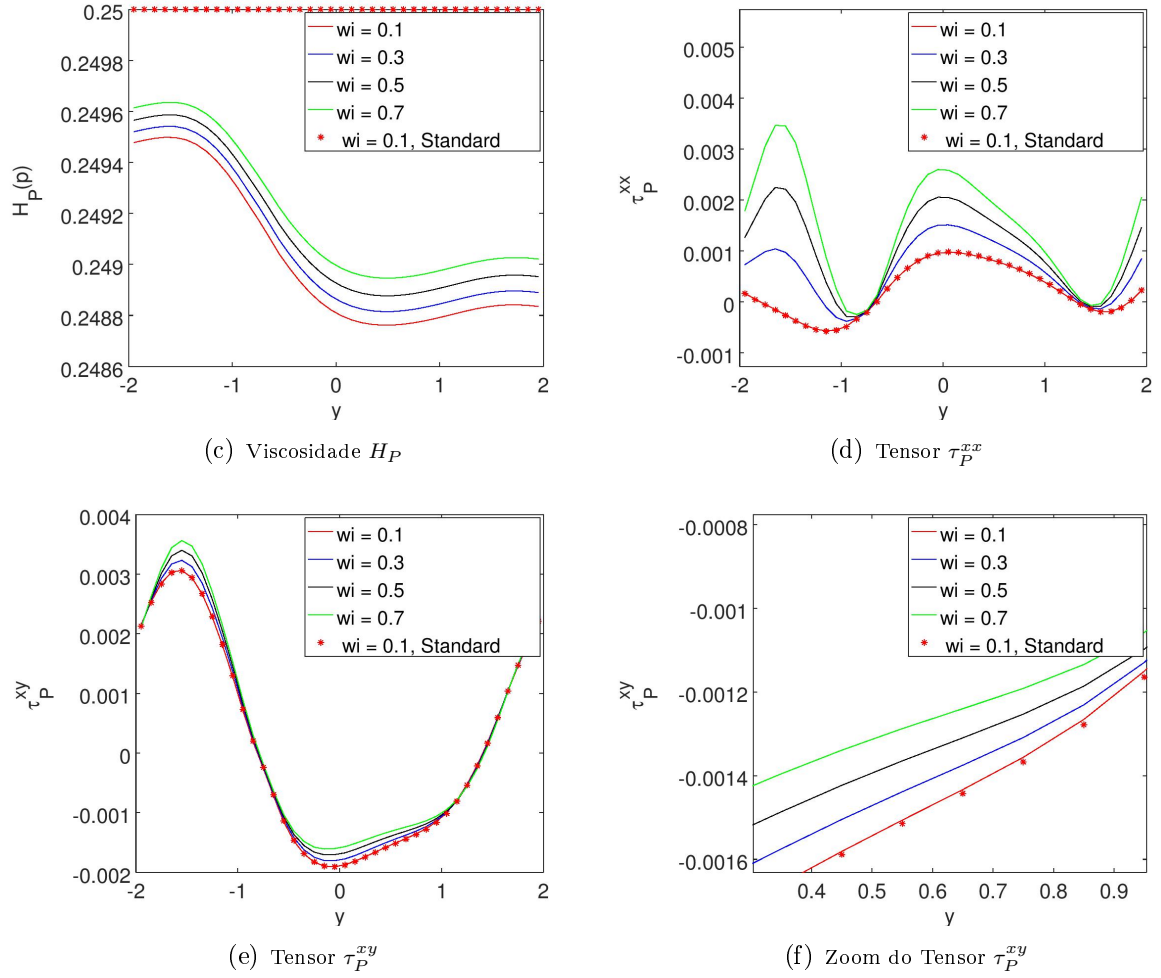
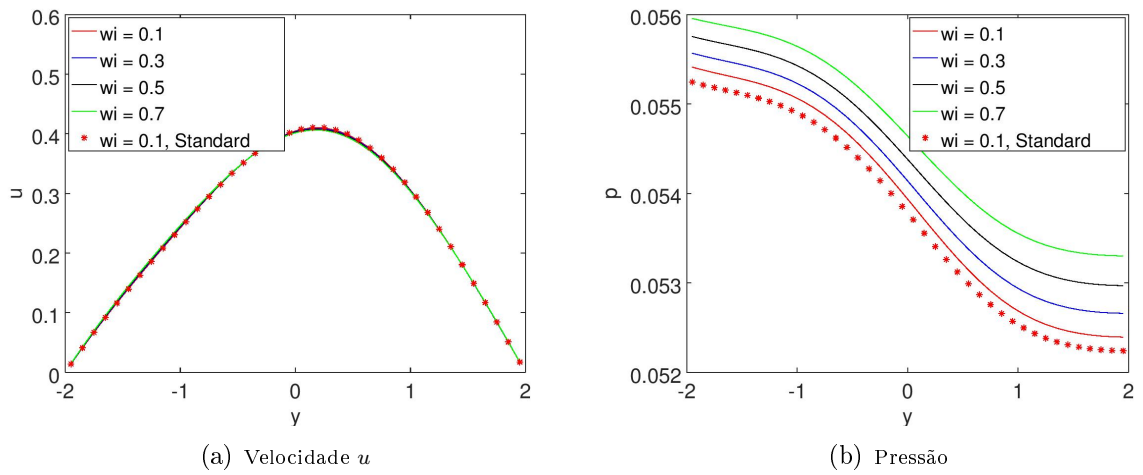


Figura 4.30: Variação de  $Wi$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 30$ , para  $Re = 80$ ,  $\beta = 0.75$  e  $\gamma = 0.02$ : a) Perfil da componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xy}$ .



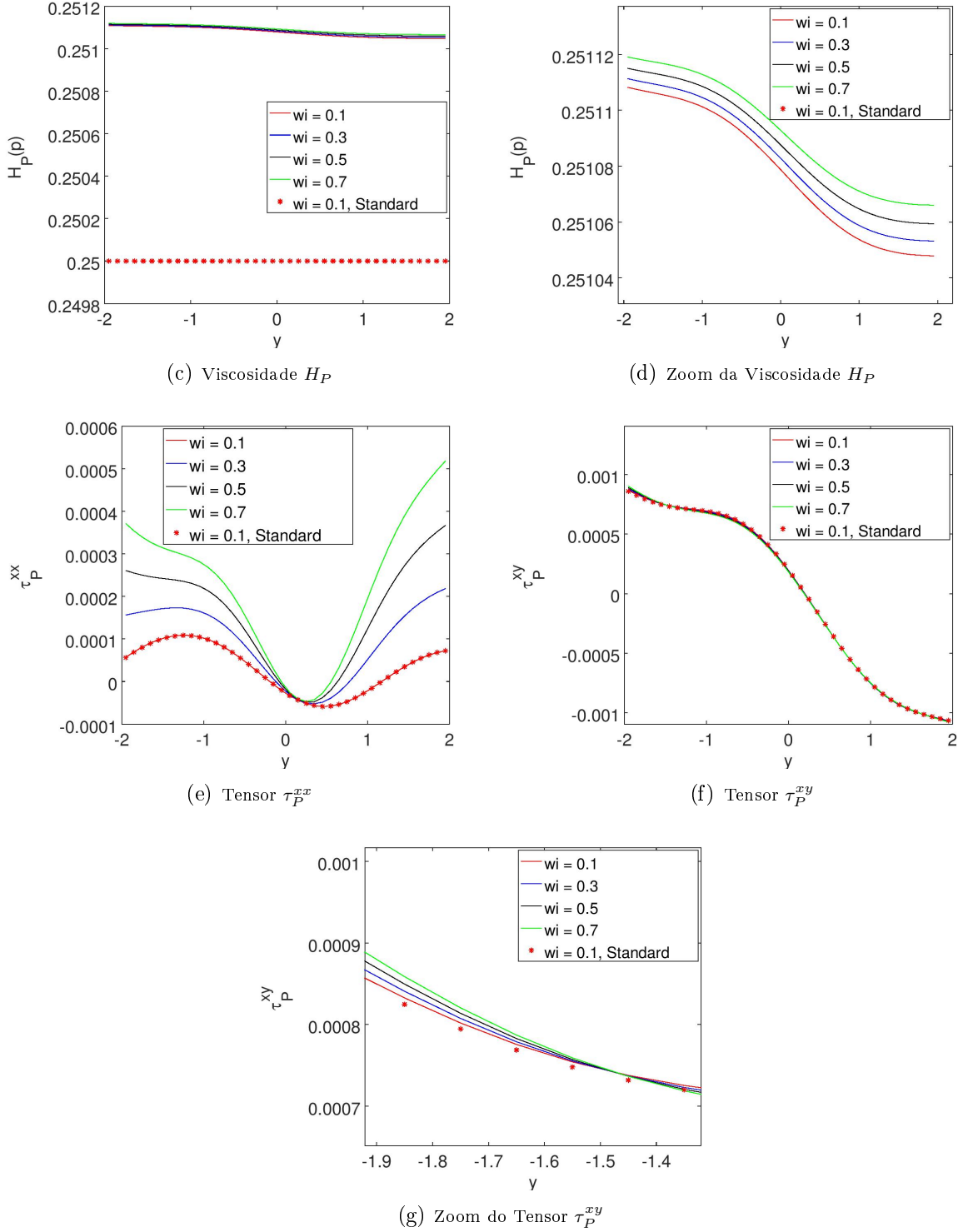


Figura 4.31: Variação de  $Wi$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 45$ , para  $Re = 80$ ,  $\beta = 0.75$  e  $\gamma = 0.02$ : a) Perfil da componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. d) Zoom da Viscosidade  $H_P$ . Componentes do Tensor não-Newtoniano: e)  $\tau_P^{xx}$  e f)  $\tau_P^{xy}$ . g) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xy}$

### Variação de $\beta$

Considerando-se fixo  $Re = 80$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ , os valores de  $\beta$  adotados são  $\beta = 0.25$ ,  $0.5$  e  $0.75$ . A Tabela 4.11 apresenta o comprimento dos vórtices para cada um destes casos que será estudado nos gráficos a seguir.

Tabela 4.11: Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando  $\beta$ , com  $Re = 80$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ .

| $\beta$ | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ |
|---------|----------|----------|----------|
| 0.25    | 14.3     | 4.7      | 19.7     |
| 0.5     | 14.3     | 4.7      | 19.7     |
| 0.75    | 14.3     | 4.7      | 19.7     |

A Figura 4.32 apresenta os resultados obtidos a partir da variação de  $\beta$  em um corte longitudinal em  $y = 0$ . De forma análoga à variação de  $\gamma$ , as variáveis apresentam um mesmo comportamento, sendo o decrescimento da pressão e viscosidade ao longo do canal e os tensores nulos em  $y = 0$ .

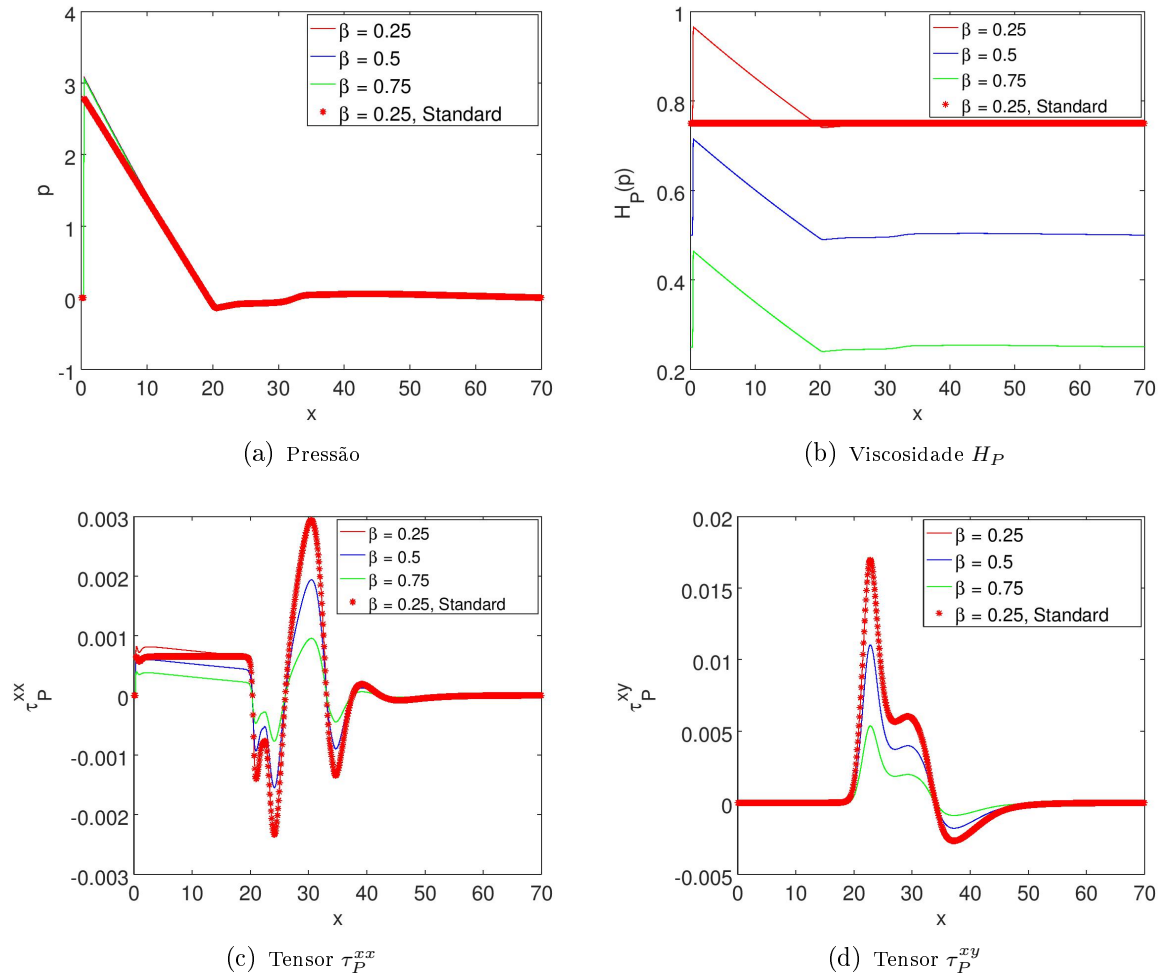


Figura 4.32: Variação de  $\beta$  para um corte longitudinal em uma expansão planar 1:4 em  $y = 0$ , para  $Re = 80$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: c)  $\tau_P^{xx}$  e d)  $\tau_P^{xy}$ .

As Figuras 4.33 e 4.34 apresentam os resultados da variação de  $\beta$  para as variáveis envolvidas em um escoamento em um corte transversal na posição de  $x = 30$  e  $x = 45$ , respectivamente. Como estes resultados numéricos são para  $Re = 80$ , a Figura 4.33 ilustra o comportamento do escoamento em uma região que possui vórtices, diferente da Figura 4.34, que por sua vez, ilustra o comportamento de uma região situada próxima aos vórtices que ainda sofre influência destes. Tais comportamentos podem ser verificados pela Tabela 4.11.

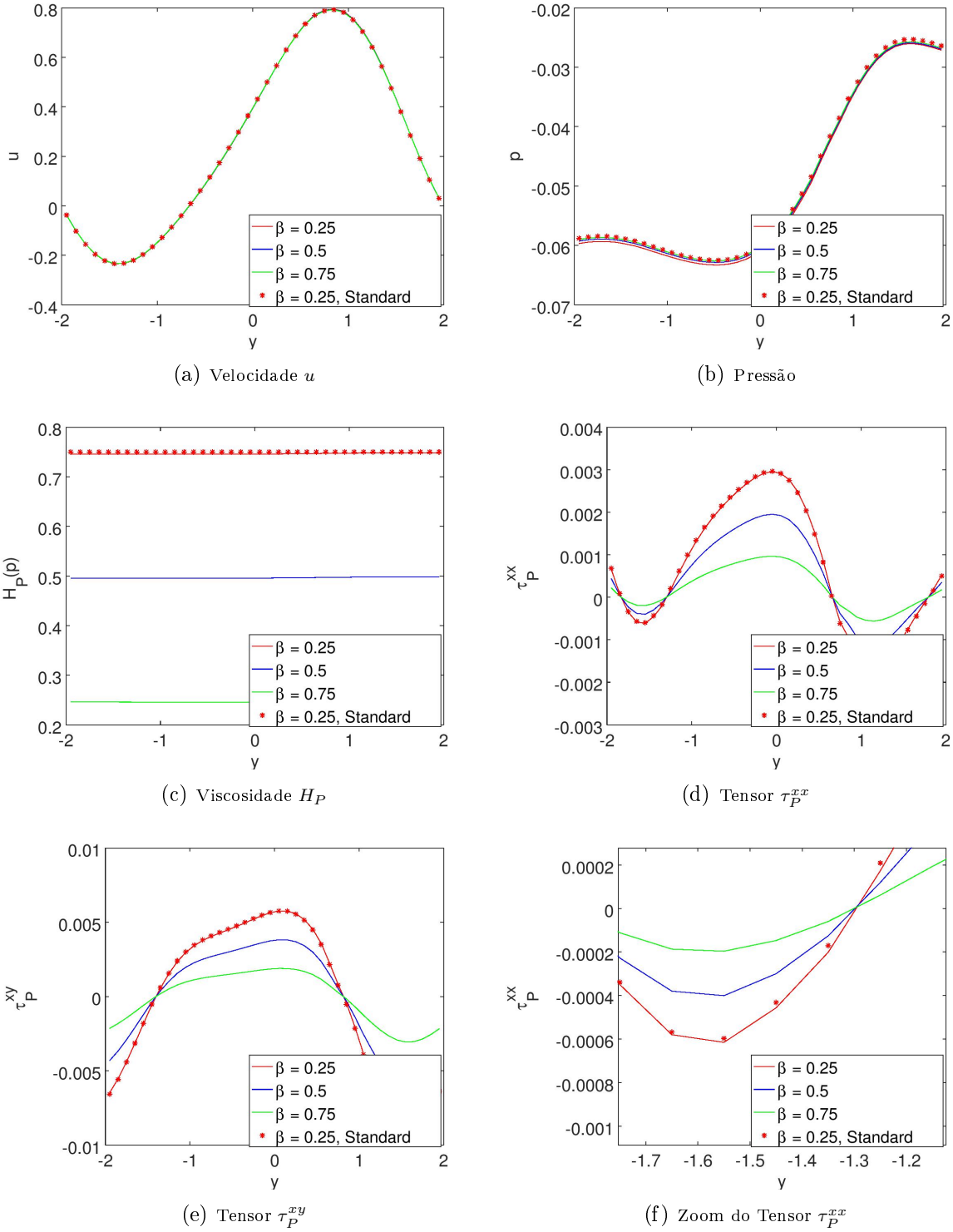


Figura 4.33: Variação de  $\beta$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 30$ , para  $Re = 80$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Perfil da componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xx}$ .

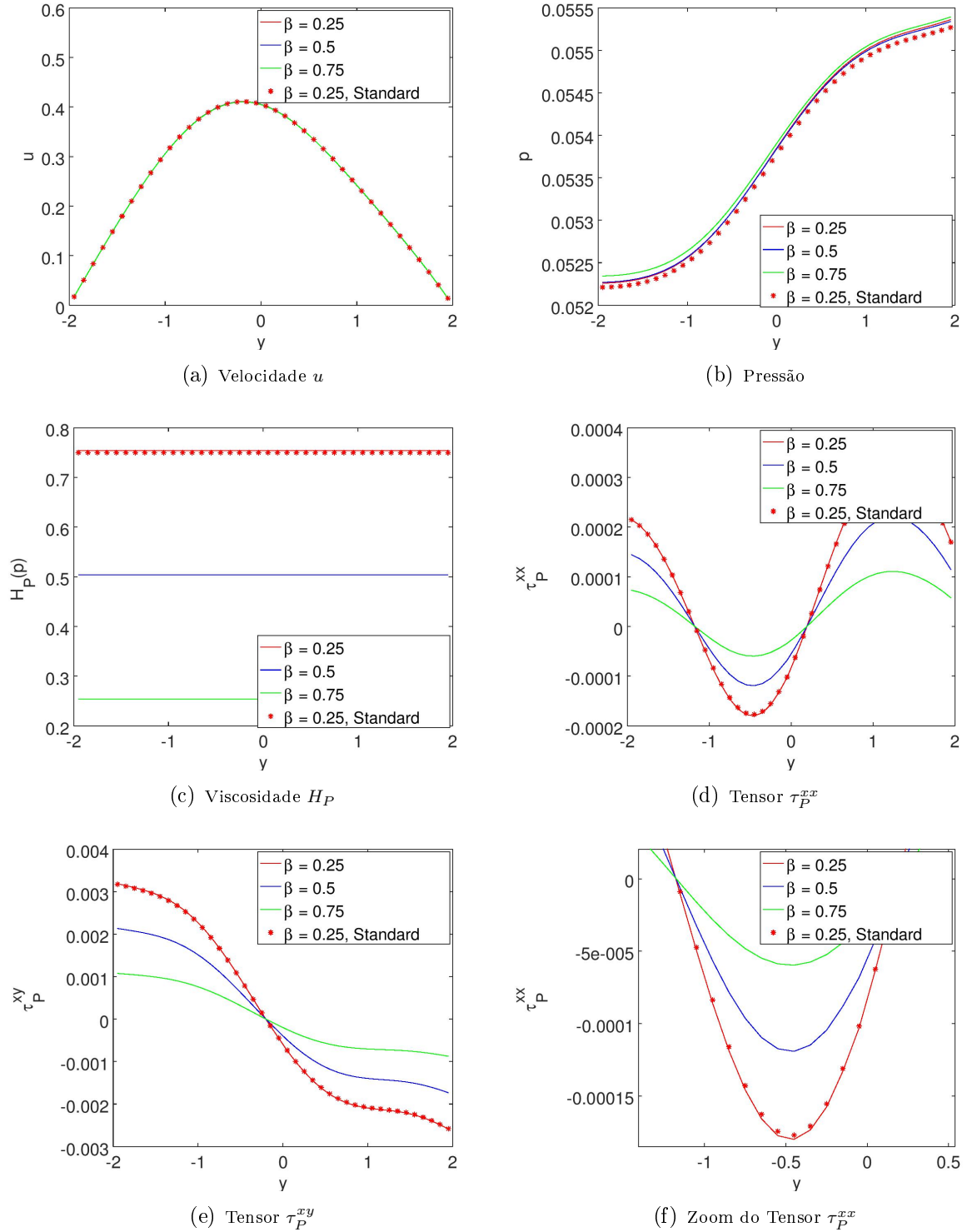


Figura 4.34: Variação de  $\beta$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 45$ , para  $Re = 80$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Perfil da componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ . f) Zoom do Tensor  $\tau_P^{xx}$ .

## Variação do Número de Reynolds

Considerando-se fixo  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ , os valores de  $Re$  adotados são  $Re = 5, 20, 40, 60, 70, 80$  e  $100$ . A Tabela 4.12 apresenta o comprimento dos vórtices para cada um destes casos que será estudado a seguir.

Tabela 4.12: Comprimento dos vórtices de um fluido não-Newtoniano variando  $Re$ , com  $Wi = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ .

| $Re$ | $x_{R1}$ | $x_{R2}$ | $x_{R4}$ |
|------|----------|----------|----------|
| 5    | 1.1      | 1.1      | -        |
| 20   | 3.3      | 3.3      | -        |
| 40   | 8.6      | 4.8      | -        |
| 60   | 12.5     | 4.5      | -        |
| 70   | 13.5     | 4.6      | 16.8     |
| 80   | 14.3     | 4.7      | 19.8     |
| 100  | 15.6     | 5.0      | 24.5     |

Além de analisar o comportamento das variáveis envolvidas em um escoamento para a variação de  $Re$  considerando o modelo Oldroyd-B cuja viscosidade varia linearmente com a pressão, será estudado também dois casos para o modelo Oldroyd-B *Standard* a fim de destacar a diferença entre estes dois modelos. Os resultados apresentados para o modelo Oldroyd-B *Standard* são para  $Re = 5.0$  e  $100$ .

A Figura 4.35 apresenta os resultados obtidos a partir da variação de  $Re$  em um corte longitudinal em  $y = 0$ . De forma análoga à variação dos parâmetros adimensionais anteriores, as variáveis apresentam um mesmo comportamento, sendo o decrescimento da pressão e da viscosidade ao longo do canal e os tensores nulos em  $y = 0$ .

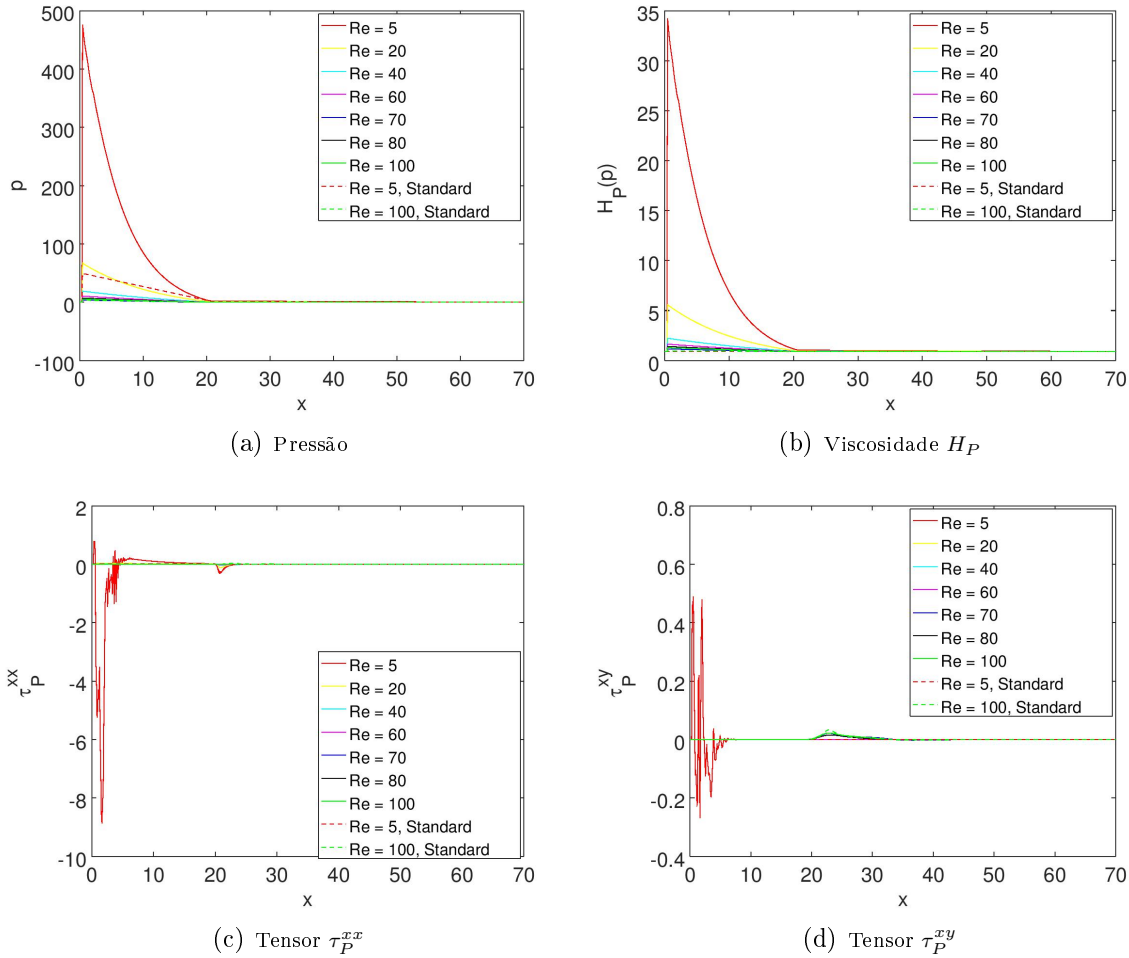


Figura 4.35: Variação de  $Re$  para um corte longitudinal em uma expansão planar 1:4 em  $y = 0$ , para  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Pressão. b) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: c)  $\tau_P^{xx}$  e d)  $\tau_P^{xy}$ .

As Figuras 4.36 e 4.37 apresentam os resultados da variação de  $Re$  para as variáveis envolvidas em um escoamento em um corte transversal na posição de  $x = 30$  e  $x = 45$ , respectivamente. É possível notar que quanto menor o número de Reynolds, maiores são as forças envolvidas em um escoamento.

Sabendo que o comprimento dos vórtices dependem do número de Reynolds, expressos na Tabela 4.12, a Figura 4.36 apresenta resultados numéricos de regiões que contém vórtices para  $Re > 60$ . Tem-se ainda que as regiões de recirculações encontram-se próximas para  $Re = 40$ , e, já para os casos de  $Re < 40$ , apresentam um comportamento de regime permanente de cisalhamento.

É importante ressaltar os resultados obtidos com a variação do número de Reynolds para a pressão e viscosidade, dados pela Figura 4.36 b) e c), respectivamente. Observa-se que a pressão é negativa nas regiões que contém vórtices, fazendo com que a viscosidade seja menor na presente modelagem do que a viscosidade obtida no modelo *Standard* para  $Re > 70$ , quando comparado os dois modelos considerando os mesmos parâmetros. Estes efeitos podem ser observados na Tabela 4.7, onde para  $Re > 70$  a viscosidade será maior para o modelo Oldroyd-B *Standard*, o que justifica o comprimento dos vórtices serem menores do que o modelo Oldroyd-B cuja viscosidade varia linearmente com a pressão. O comportamento inverso também pode ser observado para  $Re < 70$ , já que a viscosidade é maior na nova modelagem.

Já a Figura 4.37 apresenta um comportamento de regime permanente de cisalhamento para as diversas variáveis, com exceção dos casos de  $Re = 70, 80$  e  $100$ , pois estes sofrem a influência das recirculações.

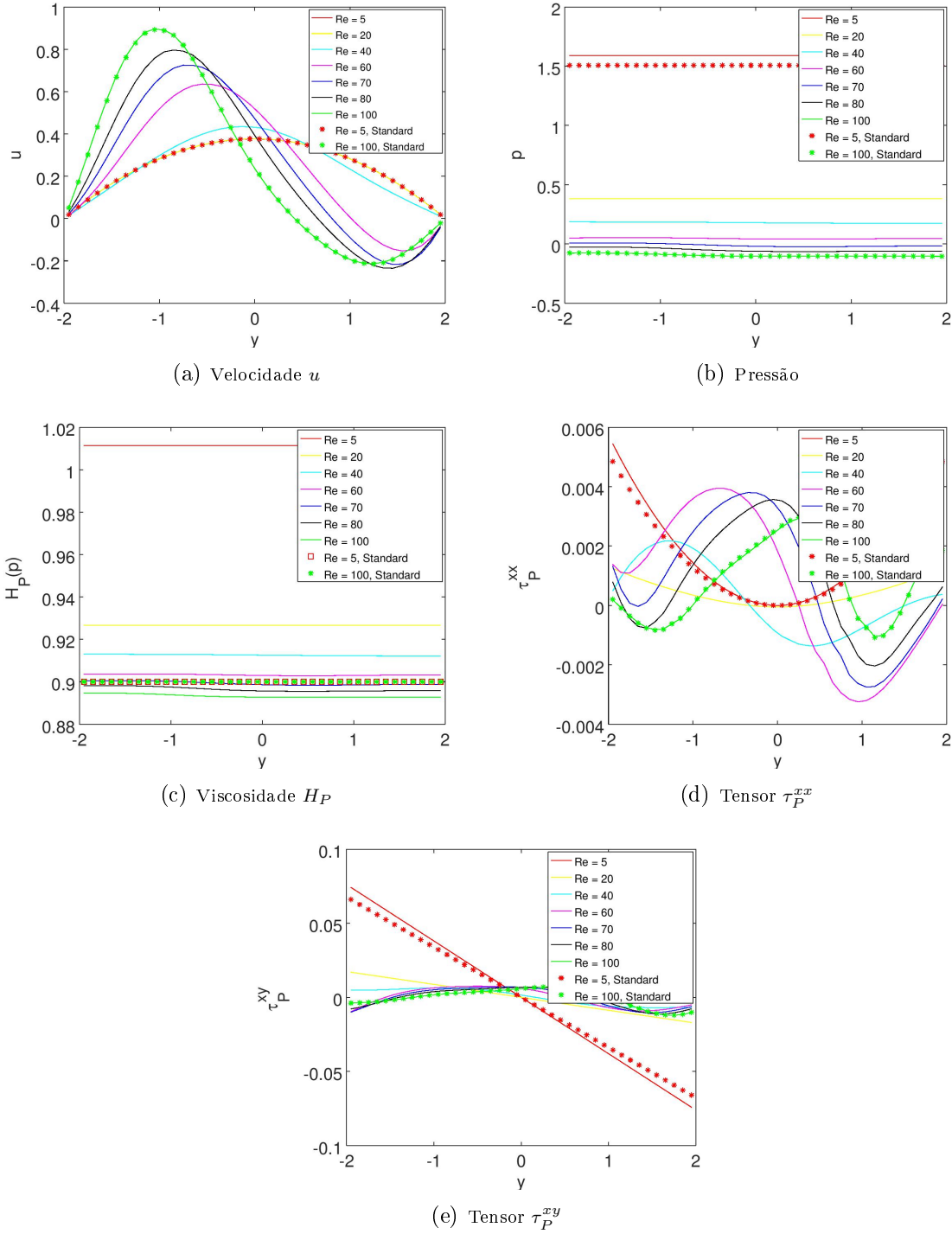


Figura 4.36: Variação de  $Re$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 30$ , para  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ .

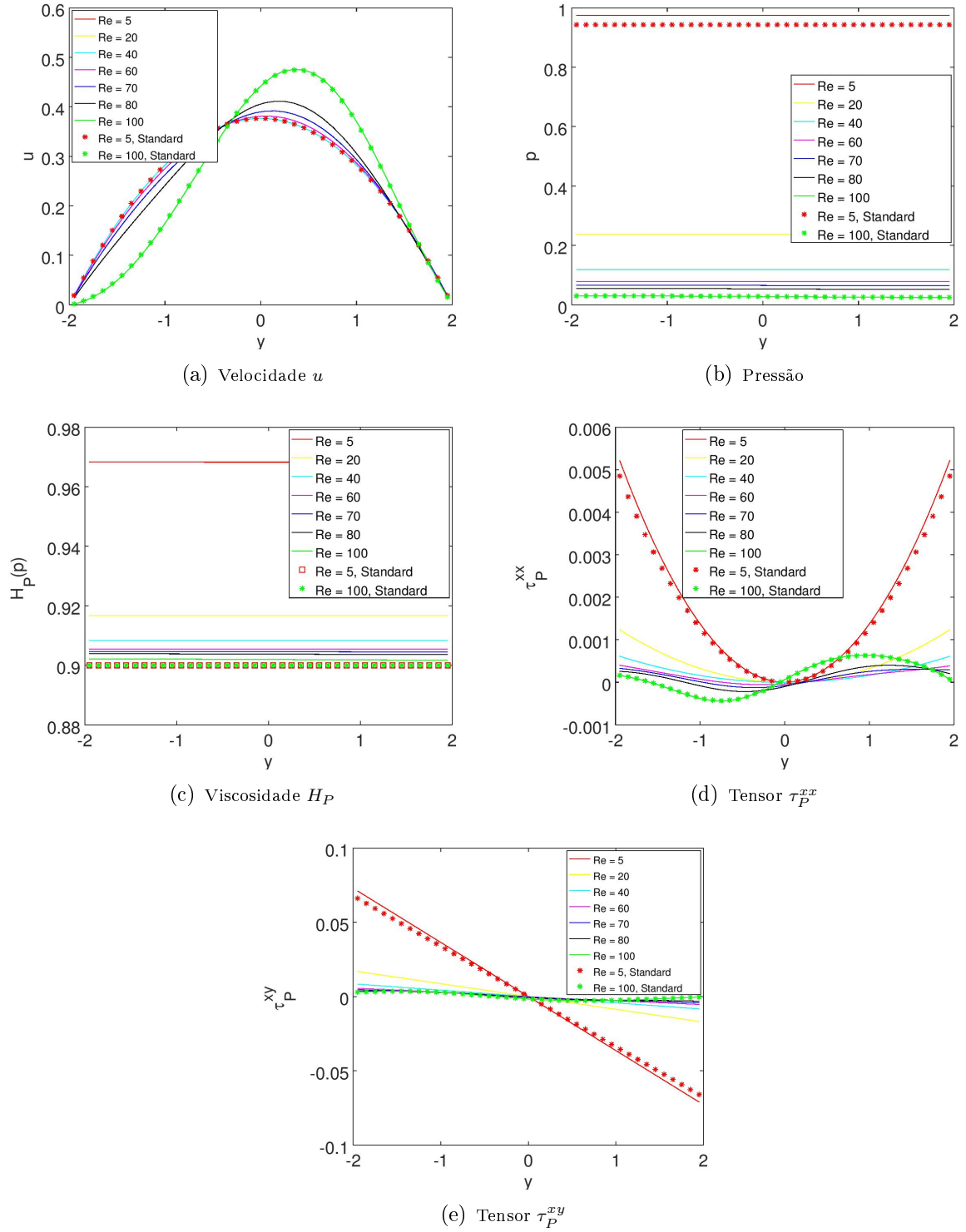


Figura 4.37: Variação de  $Re$  para um corte transversal em uma expansão planar 1:4 em  $x = 45$ , para  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.1$  e  $\gamma = 0.07$ : a) Perfil da componente  $u$  de Velocidade. b) Pressão. c) Viscosidade Polimérica. Componentes do Tensor não-Newtoniano: d)  $\tau_P^{xx}$  e e)  $\tau_P^{xy}$ .



## Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma modelagem matemática para escoamentos viscoelásticos em que a viscosidade polimérica sofre influência das variações da pressão. A aplicação desta modelagem em um escoamento de Poiseuille foi baseada no trabalho de Housiadas [11], que por sua vez, utilizou a equação constitutiva UCM (*Upper Convected Maxwell*), um modelo puramente viscoelástico. Foi utilizada uma modelagem linear para a função viscosidade, a qual envolve uma nova variável  $\gamma$  com dimensão inversa a dimensão da pressão, ou seja,  $\gamma = ms^2/Kg = Pa^{-1}$ , de tal forma que quando  $\gamma$  tende a zero, a viscosidade tende a não sofrer com a influência da variação da pressão, ou seja, quando  $\gamma$  tende a zero, a nova modelagem tende a modelagem Oldroyd-B clássica, que foi chamada de Oldroyd-B *Standard* durante todo o texto deste trabalho. Ainda, a aplicação desta nova modelagem foi aplicada em outra geometria, a expansão planar 1:4. Este estudo foi baseado no trabalho de Rocha [19].

Uma metodologia numérica bidimensional, baseada no método MAC, foi desenvolvida e implementada de maneira a estender as funcionalidades da plataforma FREEFLOW-2D. A discretização das equações é feita em uma malha deslocada pela técnica de diferenças finitas. A velocidade é discretizada de maneira semi-implícita, pois os termos convectivos são ainda considerados no tempo anterior para remover a não-linearidade da equação da quantidade de movimento. A discretização da equação constitutiva foi pelo método explícito. Basicamente, as derivadas espaciais são discretizadas por diferenças centrais, com exceção de alguns casos próximos aos contornos.

Com base nas informações gerais da modelagem descritas acima foi possível verificar a implementação desta nova metodologia numérica de diversas formas, considerando um escoamento totalmente desenvolvido em um canal bidimensional: (i) refinamento de malha medindo o decaimento do erro em comparação a uma malha mais refinada de referência e calculando a ordem de convergência espacial, que por coerência à nossa discretização esperávamos ordem 2; (ii) redução dos valores de  $\gamma$  para comparação quantitativa com o modelo Oldroyd-B *Standard*. Já a verificação para uma expansão planar 1:4 bidimensional foi feita considerando um fluido Newtoniano da seguinte forma: (i) comparação quantitativa do comprimento dos vórtices com o trabalho de Rocha [19]; (ii) comparação quantitativa para o perfil da componente  $u$  do vetor velocidade para cortes transversais em  $x = 30$  e  $x = 45$  para diferentes números de Reynolds com o trabalho de Rocha [19]; (iii) comparação quantitativa para assimetria do escoamento utilizando o trabalho de Drikakis [7]. A partir deste estudo, foi possível analisar o comportamento dos vórtices e também das variáveis envolvidas em um escoamento de um fluido viscoelástico, além de destacar algumas diferenças entre o modelo Oldroyd-B *Standard* e Oldroyd-B com a viscosidade dependendo da pressão.

Todas essas formas de verificações nos forneceram resultados satisfatórios, portanto, concluímos que a metodologia numérica desenvolvida neste trabalho é capaz de simular escoamentos viscoelásticos sob a influência da variação da viscosidade com a pressão utilizando como base o modelo Oldroyd-B e a modelagem linear para a viscosidade.

Considerando escoamentos totalmente desenvolvidos em um canal bidimensional e também em uma expansão planar 1:4, estudamos o comportamento das variáveis com relação à diversos valores de  $Re$ ,  $Wi$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . No canal bidimensional, nota-se que o parâmetro que mais influencia nos valores da pressão e tensão é o número de Reynolds. O número de Weissenberg também exerce alterações no caso em que  $\gamma$  é suficientemente grande, enquanto o parâmetro  $\beta$  afeta muito pouco estas variáveis, pressão e tensão. O perfil de velocidade mantém-se o mesmo em todos os casos. Para o escoamento na expansão planar 1:4, os parâmetros que mais modificam os valores da pressão e tensão são o número de Weissenberg e o parâmetro  $\beta$ . O número de Reynolds, nesse tipo de processo, não alterou significativamente as variáveis em questão. Para conclusões mais ricas e detalhadas sobre estas simulações pretende-se, em um trabalho futuro, refinar suficientemente a malha para que seja possível extrair informações ainda mais relevantes para a Reologia.

---

## Referências

- [1] A.A. Amsden; F.H. Harlow. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations. *Journal of Computational Physics*, 6(2):322 – 325, 1970.
- [2] C. Barus. Note on the dependence of viscosity on pressure and temperature. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 27:13 – 18, 1891.
- [3] C. Barus. Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity. *American Journal of Science*, 45:87 – 96, 1893.
- [4] F. Battaglia; S.J. Tavener; A.K. Kulkarni; C.L. Merkle. Bifurcation of low reynolds number flows in symmetric channels. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 35:99 – 105, 1997.
- [5] P.W. Bridgman. Viscosities to  $30,000\text{kg}/\text{cm}^2$ . *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 22:1471 – 1475, 1948.
- [6] A.R. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes. *Mathematics of Computation* 2, pages 745–762, 1968.
- [7] D. Drikakis. Bifurcation phenomena in incompressible sudden expansion flows. *Physical Fluids*, 9:76 – 86, 1997.
- [8] C.R. Easton. Homogeneous boundary conditions for pressure in the MAC method. *Journal of Computational Physics*, 9(2):375 – 379, 1972.
- [9] A.O. Fortuna. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. Editora da Universidade de São Paulo, 2 ed. edition, 2012.
- [10] F.H. Harlow; J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8(12):2182–2189, 1965.
- [11] K.D. Housiadas. An exact analytical solution for viscoelastic fluids with pressure-dependent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 223:147 – 156, 2015.
- [12] S.D. Joshi; A.E. Bergles. Experimental study of laminar heat transfer to in-tube flow of non-newtonian fluids. *Journal of Heat Transfer*, 102:397 – 401, 1980.
- [13] R. Larsson. Transient non-newtonian elastohydrodynamic lubrication analysis of an involute spur gear. *Wear*, 207:67 – 73, 1997.
- [14] F.J. Martinez-Boza, M.J. Martin-Afonso, C. Callegos, M. Fernández. High-pressure behavior of intermediate fuel oils. *Energy Fuels*, 25:5138 – 5144, 2011.

- [15] C.M. Oishi; F.P. Martins; M.F. Tomé; J.A. Cuminato; S. McKee. Numerical solution of the extended pom-pom model for viscoelastic free surface flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166:165 – 179, 2011.
- [16] P.J. Oliveira. Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 114:33 – 63, 2003.
- [17] F.M. Pacanelli. Desenvolvimento de um método numérico implícito para a simulação de escoamentos viscoelásticos com superfícies livres. Master's thesis, ICMC-USP, São Carlos, 2009.
- [18] R. Pantani; A. Sorrentino. Pressure effect on viscosity for atactic and syndiotactic polystyrene. *Polymer Bulletin*, 54:365 – 376, 2005.
- [19] G.N. Rocha; R.J. Poole; P.J. Oliveira. Bifurcation phenomena in viscoelastic flows through a symmetric 1:4 expansion. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 141:1 – 17, 2007.
- [20] S. Shin, Y.I. Cho, W. K. Gringrich, W. Shyy. Numerical study of laminar heat transfer with temperature dependent fluid viscosity in a 2:1 rectangular duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36:4365 – 4373, 1993.
- [21] G.G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:287 – 305, 1845.
- [22] M.F. Tome; S. McKee. GENSMAC: A computational marker and cell method for free surface flows in general domains. *Journal of Computational Physics*, 110(1):171 – 186, 1994.
- [23] R.M. Turian. Viscous heating in the cone-and-plate viscometer - III: Non-newtonian fluids with temperature-dependent viscosity and thermal conductivity. *Chemical Engineering Science*, 20:771 – 781, 1965.