



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Linguagem de Categorias e o Teorema de van Kampen

Charles dos Anjos Moreira

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli

2017

514.2 Moreira, Charles dos Anjos
M838L Linguagem de categorias e o Teorema de van Kampen /
Charles dos Anjos Moreira. - Rio Claro, 2017
86 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Elíris Cristina Rizziolli

1. Topologia algébrica. 2. Espaços topológicos. 3. Grupo
fundamental. 4. Teorema de van Kampen. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Charles dos Anjos Moreira

LINGUAGEM DE CATEGORIAS E O TEOREMA DE VAN KAMPEN

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Orientadora

Prof. Dr. Aldício José Miranda
FAMAT Faculdade de Matemática - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. João Peres Vieira
Departamento de Matemática - IGCE/Unesp de Rio Claro

Rio Claro, 30 de Novembro de 2017

*Dedico primeiramente este trabalho a Deus, por ser essencial em minha vida,
meu guia, meu amparo, socorro presente nas horas de angústia.
Em seguida, muito embora não menos importante,
a minha família dos Anjos Moreira, especialmente aos meus pais,
a meu pai Norival, pilar de muitas vidas,
por todo seu apoio incondicional e por toda sua motivação pelos meus sonhos,
e a minha mãe Maria Donizeti tão zelosa e atenciosa,
e por todo seu carinho e dedicação pela família.*

Agradecimentos

Meus agradecimentos a todos que de alguma forma colaboraram em minha formação, seja pessoal, profissional ou acadêmica. Em especial, aos nossos professores, grandes mestres da arte de lecionar, pessoas essenciais na trajetória de qualquer profissional. Sou eternamente grato a todos os docentes do campus da Unesp de Rio Claro, que muito contribuíram para este meu momento de pós Graduação, em especial ao Prof.^o Dr.^o João Peres pelo excelente profissional que se tornou, capaz de irradiar seu bom exemplo a todos nós iniciantes desta jornada e por fim à minha amada e abençoada orientadora Prof.^a Dr.^a Elíris Cristina Rizziolli pela sua imensa paciência, sempre oferecendo sólido apoio, com determinação de me desenvolver em um bom profissional de ensino e pesquisa.

“Na vida,
 não vale tanto o que temos,
 nem tanto importa o que somos.
Vale o que realizamos com aquilo que possuímos e,
 acima de tudo,
 importa o que fazemos de nós!”
Chico Xavier

Resumo

Esse trabalho trata de elementos da Topologia Algébrica, a qual tem como fundamental aplicação abordar questões acerca de Espaços Topológicos sob o ponto de vista algébrico. Uma das questões é tentar responder se dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos. Neste sentido, o grupo fundamental é uma ferramenta algébrica útil por se tratar de um invariante topológico. Além disso, apresentamos o teorema de van Kampen do ponto de vista da Linguagem de Categorias e Funtores.

Palavras-chave: Topologia Algébrica, Espaços Topológicos, Grupo Fundamental, Teorema de van Kampen.

Abstract

This work treats of elements of the Algebraic Topology, which has as fundamental application to approach subjects concerning Topological Spaces under the algebraic point of view. One of the subjects is to try to answer if two topological spaces X and Y are homeomorphics. In this sense, the fundamental group is an useful algebraic tool for treating of an topological invariant. In addition, we presented the van Kampen's Theorem of the point of view of the language of Categories and Functors.

Keywords: Algebraic Topology, Topological Spaces, The Fundamental Group, van Kampen Theorem.

Lista de Figuras

3.1	Laços e Caminhos	29
3.2	Justaposição entre os laços $\alpha, \beta \in \Omega(X; x_0)$	30
3.3	Homotopia entre os caminhos α e β	31
3.4	Esquema para obtenção da homotopia entre os laços $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$ e $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$	38
3.5	Esquema para determinação da homotopia entre os laços $\alpha \bullet c_{x_0}$ e α	40
3.6	Esquema para determinação da homotopia entre os laços $c_{x_0} \bullet \alpha$ e α	41
3.7	A aplicação de p e o conjunto $p^{-1}(U)$, a “pilha de panquecas”.	50
3.8	Exemplo de levantamento de caminho.	52
3.9	Cilindro $C = S^1 \times [a, b]$, em que $[a, b] \subset \mathbb{R}$	59
3.10	Toro $S^1 \times S^1$	59
3.11	$x, f(x) \in D^2$ tal que $x \neq f(x)$	61
3.12	Caminho η iniciando em $b_0 = (1, 0)$ até x_0 em S^1	61
4.1	Decomposição do Espaço X como união de dois círculos.	64

Sumário

1	Introdução	9
2	Linguagem de Topologia Geral	10
2.1	Espaço Topológico	10
2.2	Funções Contínuas	20
2.3	Conexidade e Conexidade por caminhos em Espaço Métrico	23
3	Sobre o Grupo Fundamental	28
3.1	Construção do Grupo Fundamental	29
3.2	Cálculos de $\pi_1(\mathbb{R})$ e $\pi_1(S^1)$ e aplicações	49
3.2.1	Cálculo de $\pi_1(\mathbb{R})$	49
3.2.2	Cálculo de $\pi_1(S^1)$	50
3.2.3	Aplicações	60
4	O Teorema de van Kampen	64
4.1	Produto livre de grupos	65
4.2	O Teorema de van Kampen - Clássico	69
5	Categorias e o Teorema de van Kampen	78
5.1	Categorias e Funtores	78
5.2	Grupoide Fundamental	82
5.3	Limites, Colimites e o Teorema de van Kampen	83
6	Conclusão	86
	Referências	87

1 Introdução

Esse trabalho tem como objetivo abordar alguns elementos da Topologia Algébrica com a missão de fazer um tratamento de questões acerca de espaços topológicos com abordagem algébrica. Inicialmente, será feito um estudo sobre quando dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos e posteriormente apresentaremos a definição de Grupo Fundamental de um espaço topológico. Mostraremos que se X e Y são espaços homeomorfos, então seus respectivos grupos fundamentais são isomorfos. Também faremos aplicações interessantes usando Grupo Fundamental, entre as quais o Teorema Fundamental da Álgebra. Além disso, abordaremos o Teorema de van Kampen sob dois aspectos, a saber: sua versão clássica via Topologia Geral e sua interpretação via Linguagem de Categorias e Funtores. Este projeto foi inspirado a partir da referência principal [1]. Também utilizamos como apoio as referências [2], [3] e [4].

2 Linguagem de Topologia Geral

2.1 Espaço Topológico

Neste capítulo, apresentamos noções básicas sobre topologia geral. Nesta abordagem destacamos o Lema da Colagem e a Conexidade por Caminhos, elementos que serão utilizados de modo muito especial ao longo do nosso trabalho. Detalhes sobre estes assuntos e demais considerações podem ser encontrados em [5, 6].

Definição 2.1. [Espaço Topológico] *Seja X um conjunto e τ uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo:*

- (a) $\emptyset, X \in \tau$;
- (b) *união arbitrária de elementos de τ pertence a τ ;*
- (c) *intersecção finita de elementos de τ pertence a τ ;*

então o par (X, τ) é chamado espaço topológico e τ é uma topologia para X .

Exemplo 2.1. Se X é um conjunto não vazio e $\tau = \{\emptyset, X\}$, então (X, τ) é um espaço topológico, pois τ satisfaz todas as condições da definição acima. Esta topologia é chamada topologia indiscreta ou trivial.

Exemplo 2.2. Seja X um conjunto não vazio e denotemos por $\wp(X)$ o conjunto das partes de X , ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos de X . O par $(X, \wp(X))$ é um espaço topológico onde $\tau = \wp(X)$ é uma topologia para X denominada topologia discreta. Por exemplo, se $X = \{a, b, c\}$, então

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

é a topologia discreta para X .

Definição 2.2. [Conjunto Aberto] *Se (X, τ) é um espaço topológico, dizemos que um subconjunto U de X é um conjunto aberto de X se U pertence a coleção τ .*

Definição 2.3. [Conjunto Fechado] *Se (X, τ) é um espaço topológico, dizemos que um subconjunto F de X é um conjunto fechado de X se o complementar de F , denotado $\complement F$ (ou F^c), é um conjunto aberto de X , ou seja, pertence a topologia τ .*

Observação 2.1. Veja que, devido as leis de De Morgan¹ e as definições de topologia e de conjunto fechado, segue que interseção arbitrária e união finita de conjuntos fechados são conjuntos fechados de X . Também, segue que $\emptyset, X$ são conjuntos fechados de X .

Definição 2.4. [Vizinhança de um ponto] *Sejam (X, τ) um espaço topológico, $x \in X$ e U um subconjunto de X . Dizemos que U é uma vizinhança de x se U é um conjunto aberto de X e $x \in U$.*

Definição 2.5. [Base] *Uma base $\mathcal{B}$ para uma topologia τ de X é uma subcoleção $\mathcal{B}$ de τ , $\mathcal{B} \subset \tau$, onde:*

- (a) *para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;*
- (b) *se $x \in B_1 \cap B_2$, com $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados elementos básicos de X .

Exemplo 2.3. Se X é um conjunto não vazio qualquer, então a coleção de todos os subconjuntos unitários de elementos de X , $\{\{x\}, x \in X\}$, é uma base para a topologia discreta de X .

Lema 2.1. *Se $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ e $\tau_{\mathcal{B}}$ é a coleção constituída pelo conjunto vazio e pelos subconjuntos U de X tais que para cada $x \in U$ existe um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$, então, $\tau_{\mathcal{B}}$ é uma topologia para X , a qual denominamos topologia gerada por $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Mostremos que $\tau_{\mathcal{B}}$ é de fato uma topologia para X .

- (a) $\emptyset$ e X pertencem a $\tau_{\mathcal{B}}$. De fato:

Se $U = \emptyset$, o resultado segue pela definição de $\tau_{\mathcal{B}}$ no enunciado deste lema. Para $U = X$, dado qualquer $x \in X$, temos que existe algum elemento básico $B \in \mathcal{B}$ contendo x e contido em X , uma vez que $X \in \tau$ e $\mathcal{B}$ é uma base para τ .

- (b) Se $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$ é uma família de subconjuntos pertencentes a $\tau_{\mathcal{B}}$, então temos que $U = \bigcup_{\alpha \in J} U_{\alpha} \in \tau_{\mathcal{B}}$. Com efeito, dado $x \in U$ temos que $x \in U_{\alpha}$ para algum $\alpha \in J$. Uma vez que U_{α} pertence a $\tau_{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{B}$ é uma base, segue que existe um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_{\alpha} \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_{\alpha} = U$, isto é, $x \in B$ e $B \subset U$. Logo, $U \in \tau_{\mathcal{B}}$.
- (c) Se $U_1, U_2, \dots, U_n$ são subconjuntos pertencentes à $\tau_{\mathcal{B}}$, então $U = \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_{\mathcal{B}}$. Mostraremos esta implicação apenas para o caso $n = 2$, já que o resultado segue pelo Princípio da Indução Finita.

¹Se $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de conjuntos (de um mesmo conjunto universo), então:

- (1) $\mathcal{C}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}A_i$;
- (2) $\mathcal{C}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}A_i$.

Seja $x \in U = U_1 \cap U_2$ qualquer. Como x pertence a interseção, temos que $x \in U_1$ e $x \in U_2$. Todavia, U_1 e U_2 pertencem a $\tau_{\mathcal{B}}$, consequentemente existem $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_1 \subset U_1$ e $x \in B_2 \subset U_2$, respectivamente. Assim, temos que $x \in B_1 \cap B_2$ e $B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$.

Nestas condições, do item (b) da definição 2.5, temos que existe $B_3 \subset \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 = U$. Portanto, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset U$, ou seja, $U \in \tau_{\mathcal{B}}$.

□

Observação 2.2. É possível mostrar que se (X, τ) é um espaço topológico e $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia τ então, τ é igual a coleção de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$, vide [5, Lema 13.1, p. 80].

Exemplo 2.4. Dado um conjunto simplesmente ordenado² é possível definir, por meio de sua relação de ordem, uma topologia para este. Esta topologia é denominada topologia da ordem, denotada por $\tau_{<}$. A saber, se $(X, <)$ é um conjunto simplesmente ordenado definimos os seguintes subconjuntos de X , chamados de intervalo aberto, intervalo semi-aberto à direita, intervalo semi-aberto à esquerda e intervalo fechado, respectivamente:

$$(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\},$$

$$[a, b) = \{x \in X \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\},$$

$$[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\},$$

onde $a \leq b$ significa que $a < b$ ou $a = b$.

Os seguintes subconjuntos formam uma base para $(X, \tau_{<})$:

- (1) Todos os intervalos abertos (a, b) em X ;
- (2) Todos os intervalos semi-abertos à direita $[a_0, b)$, onde a_0 é o menor elemento de X , se houver;
- (3) Todos os intervalos semi-abertos à esquerda $(a, b_0]$, em que b_0 é o maior elemento de X , se existir.

De fato:

²Um conjunto X qualquer é dito simplesmente ordenado se existe uma relação $<$, denominada relação de ordem, que satisfaz:

- (1) Para quaisquer $x, y \in X$ com $x \neq y$ temos $x < y$ ou $y < x$;
- (2) Para nenhum $x \in X$ a relação $x < x$ é válida;
- (3) Para quaisquer $x, y, z \in X$, se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

- (a) Para todo $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, pois o menor elemento (se houver) pertence a todos os conjuntos do tipo (2), o maior elemento (se houver) pertence a todos os conjuntos do tipo (3); além disso, qualquer elemento pertence a algum conjunto do tipo (1) já que neste caso ($x \neq a_0$ e $x \neq b_0$) sempre existem $a, b \in X$ tais que $a < x < b$ e então $x \in (a, b)$.
- (b) Suponha que $x \in B_1 \cap B_2$, com $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Veja que a interseção entre quaisquer dois subconjuntos dos tipos (1), (2) e (3) ainda é um conjunto de um destes tipos ou o conjunto vazio. Desta maneira basta considerar o elemento básico B_3 como sendo a própria interseção $B_1 \cap B_2$ para obtermos $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Observação 2.3. Observe que se X não tem menor elemento, então não existem subconjuntos do tipo (2) e se X não tem maior elemento, não existem subconjuntos do tipo (3). Em particular, se $X = \mathbb{R}$, então $\mathcal{B} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ é uma base para a topologia da ordem $\tau_{\mathcal{B}}$ para $\mathbb{R}$, conhecida como topologia padrão.

Observação 2.4. A partir de agora denotamos um espaço topológico (X, τ) apenas por X , ou seja, a topologia está subentendida sempre que possível.

Definição 2.6. [Sub-base] Uma sub-base $\mathcal{S}$ para uma topologia $\tau_{\mathcal{S}}$ em um espaço topológico X é uma coleção de subconjuntos de X cuja união é igual a X .

Lema 2.2. A coleção $\tau_{\mathcal{S}}$ de todas as uniões arbitrárias de interseções finitas de elementos de uma sub-base $\mathcal{S}$ para um espaço topológico (X, τ) é uma topologia. Esta topologia é denominada topologia gerada pela sub-base $\mathcal{S}$.

Demonstração. Pela observação 2.2, para mostrar que $\tau_{\mathcal{S}}$ é uma topologia é suficiente mostrar que a coleção $\mathcal{B}$ de todas as interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma base para $\tau_{\mathcal{S}}$. Observe que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$.

Verifiquemos as duas condições para ser base.

- (a) Para todo $x \in X$, como X é a união de elementos de $\mathcal{S}$, segue que x pertence a algum elemento de $\mathcal{S}$. Mas, $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$, assim temos que x pertence a algum elemento de $\mathcal{B}$.
- (b) Suponha que $x \in B_1 \cap B_2$, com $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Mostremos que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

De fato, de $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ segue que $B_1 = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_m$, com $S_i \in \mathcal{S}$ e $i = 1, \dots, m$ e também $B_2 = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r$, com $Q_j \in \mathcal{S}$ e $j = 1, \dots, r$.

Desta forma $B_1 \cap B_2 = S_1 \cap \cdots \cap S_m \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$, ou seja, $B_1 \cap B_2$ é uma interseção finita de elementos de $\mathcal{S}$, logo $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Deste modo, tomando $B_3 = B_1 \cap B_2$, segue o resultado.

□

Definição 2.7. [Topologia Produto] Sejam X, Y espaços topológicos. Definimos a topologia produto em $X \times Y$ como sendo a coleção $\mathcal{B}$ de todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é um subconjunto aberto de X e V um subconjunto aberto de Y .

Definição 2.8. Dados X, Y conjuntos quaisquer, as funções

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 : X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \pi_2 : X \times Y & \longrightarrow & Y \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

são denominadas projeções em X e Y , respectivamente.

Lema 2.3. Sejam X, Y espaços topológicos. A coleção

$$S = \{\pi_1^{-1}(U); U \text{ é aberto em } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V); V \text{ é aberto em } Y\},$$

é uma sub-base para a topologia produto sobre $X \times Y$, em que $\pi_1^{-1}(U)$ e $\pi_2^{-1}(V)$ são as respectivas imagens inversas de U pela aplicação π_1 e de V por π_2 .

Demonstração. Considere τ a topologia produto sobre $X \times Y$ e τ' a topologia gerada por S . Mostremos que $\tau = \tau'$.

(i) $\tau' \subset \tau$. De fato, observe que cada elemento $A \in S$ é tal que $A = \pi_1^{-1}(U)$, com U aberto em X , ou $A = \pi_2^{-1}(V)$, com V aberto em Y . Mas, $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ e $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, ambos abertos em $X \times Y$, ou seja, cada elemento de S pertence a topologia τ . Consequentemente, uniões arbitrárias de interseções finitas de elementos de S também, logo $\tau' \subset \tau$.

(ii) $\tau \subset \tau'$. Com efeito, todo elemento básico $U \times V$ para a topologia τ se escreve como

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V),$$

ou seja, cada elemento $U \times V$ é interseção finita de elementos de S . Consequentemente, $U \times V \in \tau'$. Portanto, $\tau \subset \tau'$.

Por (i) e (ii) segue que $\tau = \tau'$. □

Teorema 2.1. [Subespaço] Se (X, τ) é um espaço topológico e Y um subconjunto de X , então a coleção

$$\tau_Y = \{Y \cap U; U \in \tau\}$$

é uma topologia para Y e (Y, τ_Y) é chamado subespaço de X .

Demonstração. Este teorema será demonstrado a partir da verificação das três condições da definição 2.1 de espaços topológicos.

1. Vamos verificar que os subconjuntos Y e $\emptyset$ pertencem à coleção τ_Y .

(a) Como Y é subconjunto do espaço topológico X , então $Y \in \tau_X$, onde τ_X é a topologia de X . Sabemos também pela teoria de conjuntos que

$$Y = Y \cap Y,$$

donde segue que $Y \in \tau_Y$.

(b) O conjunto $\emptyset$ podemos escrever $\emptyset = Y \cap \emptyset$.

Daí como $\emptyset \in \tau_X$, pois X é espaço topológico, segue que $\emptyset \in \tau_Y$.

2. Seja $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in J}$ uma família qualquer de elementos de τ_Y . Queremos mostrar que

$$\bigcup_{\lambda \in J} Y_\lambda \in \tau_Y.$$

De fato, para qualquer $\lambda \in J$, tem-se que $Y_\lambda = Y \cap U_\lambda$, onde $U_\lambda \in \tau_X$.

Daí,

$$\bigcup_{\lambda \in J} Y_\lambda = \bigcup_{\lambda \in J} (Y \cap U_\lambda) = Y \cap \left(\bigcup_{\lambda \in J} U_\lambda \right)$$

Como $\bigcup_{\lambda} U_\lambda \in \tau_X$, o resultado segue.

3. Sejam $Y_1, \dots, Y_n \in \tau_Y$. Temos que para cada $i = 1, \dots, n$, existe $U_i \in \tau_X$ tal que $Y_i = Y \cap U_i$.

Daí,

$$\begin{aligned} Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n &= (Y \cap U_1) \cap (Y \cap U_2) \cap \dots \cap (Y \cap U_n) \\ &= Y \cap (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n) \end{aligned}$$

Assim, como X é espaço topológico, segue que $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \tau_X$ e assim $Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n \in \tau_Y$.

O resultado do teorema segue pelo que demonstramos em 1, 2 e 3. $\square$

Proposição 2.1. *Dado Y um subespaço de um espaço topológico X , temos que um conjunto A é um conjunto fechado em Y se, e somente se, este é igual a interseção de um conjunto fechado de X com Y .*

Demonstração. De fato, por um lado desta bicondicional:

- ($\Leftarrow$) Suponha que $A = C \cap Y$, onde C é um conjunto fechado em X . Então, $X - C$ é um conjunto aberto em X e, conseqüentemente, $(X - C) \cap Y$ é aberto em Y , pela definição de subespaço. Mas, como $Y \subset X$,

$$(X - C) \cap Y = Y - (C \cap Y) = Y - A.$$

Logo, $Y - A$ é um conjunto aberto em Y e portanto A é um conjunto fechado em Y .

E pelo outro lado:

- ($\Rightarrow$) Suponha que A seja um conjunto fechado em Y , então $Y - A$ é um aberto em Y . Logo, pela definição de abertos no subespaço Y ,

$$Y - A = U \cap Y,$$

para algum subconjunto aberto U de X . Portanto, $A = Y \cap (X - U)$ com $X - U$ um subconjunto fechado em X .

$\square$

Observação 2.5. Observamos que se Y é um subconjunto fechado em X e A é um subconjunto fechado no subespaço Y , então A é fechado em X .

Definição 2.9. [Interior e Fecho] Se A é um subconjunto de um espaço topológico X , então:

- (a) a união de todos os conjuntos abertos contidos em A é denominada interior de A e denotada por $\text{Int } A$;
- (b) a interseção de todos os conjuntos fechados contendo A é chamada fecho de A e denotada por $\bar{A}$.

Observação 2.6. Veja que da definição acima segue que $\text{Int } A \subset A \subset \bar{A}$ e ainda, A é aberto quando $A = \text{Int } A$ e fechado quando $A = \bar{A}$.

Proposição 2.2. Se Y é um subespaço de X e A é um subconjunto de Y , então $\bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y$.

Demonstração. Seja $\bar{A}_Y$ o fecho de A em Y . Mostremos que $\bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y$.

- (i) $\bar{A}_Y \subset \bar{A} \cap Y$. Como $\bar{A}$ é fechado em X , segue pela proposição 2.1 que $\bar{A} \cap Y$ é um subconjunto fechado em Y . Mas $\bar{A} \cap Y$ contém A e temos por definição de fecho de A em Y , $\bar{A}_Y$ é igual a interseção de todos os subconjuntos fechados de Y contendo A . Consequentemente, $\bar{A}_Y \subset \bar{A} \cap Y$.
- (ii) $\bar{A} \cap Y \subset \bar{A}_Y$. Sabemos que $\bar{A}_Y$ é fechado em Y logo, pela proposição 2.1, segue que $\bar{A}_Y = C \cap Y$ para algum conjunto fechado C em X . Então, C é um conjunto fechado de X contendo A . Uma vez que $\bar{A}$ é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X contendo A , segue que $\bar{A} \subset C$. Consequentemente, $\bar{A} \cap Y \subset C \cap Y = \bar{A}_Y$.

O resultado segue por (i) e (ii), ou seja, $\bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y$. □

Proposição 2.3. Se A é um subconjunto de um espaço topológico X , então $x \in \bar{A}$ se, e somente se, toda vizinhança U de x (isto é, U é um conjunto aberto contendo x) intercepta A .

Demonstração. Devemos mostrar que $x \in \bar{A}$ se, e somente se, toda vizinhança U de x intercepta A . Mas, pela contrapositiva desta equivalência, provar isto é o mesmo que mostrar que $x \notin \bar{A}$ se, e somente se, existe uma vizinhança U de x que não intercepta A . De fato,

- ($\implies$) Se $x \notin \bar{A}$, então $x \in U = X - \bar{A}$, que é uma vizinhança de x que não intercepta A .
- ($\impliedby$) Se existe uma vizinhança U de x que não intercepta A , então $X - U$ é um subconjunto fechado contendo A . Pela definição do fecho $\bar{A}$, o conjunto $X - U$ necessariamente contém $\bar{A}$ e portanto $x \notin \bar{A}$. □

Definição 2.10. [Ponto de Acumulação] *Sejam A um subconjunto de um espaço topológico X e $x \in X$. Dizemos que x é um ponto de acumulação de A se toda vizinhança de x intercepta A em algum ponto diferente de x . Denotamos o conjunto formado por todos os pontos de acumulação de A por A' .*

Observação 2.7. Segue da proposição 2.3 que, nas condições da definição acima, x é um ponto de acumulação de A se pertence ao fecho do conjunto $A \setminus \{x\}$.

Proposição 2.4. *Se A é um subconjunto de um espaço topológico X , então $\bar{A} = A \cup A'$.*

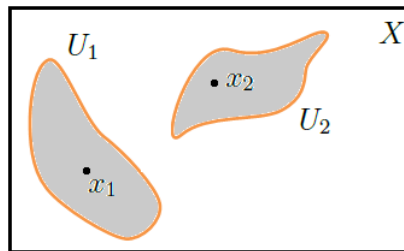
Demonstração. Para demonstrarmos a igualdade $\bar{A} = A \cup A'$, basta que mostremos as inclusões $A \cup A' \subset \bar{A}$ e $\bar{A} \subset A \cup A'$.

- (i) Mostremos que $A \cup A' \subset \bar{A}$. Se $x \in A'$ toda vizinhança de x intercepta A . Portanto, pela proposição 2.3 segue que $x \in \bar{A}$, consequentemente $A' \subset \bar{A}$. Como já sabemos que $A \subset \bar{A}$, então $A \cup A' \subset \bar{A}$.
- (ii) Vamos mostrar que $\bar{A} \subset A \cup A'$.

Seja $x \in \bar{A}$ qualquer. Mostremos que $x \in A \cup A'$. Se $x \in A$ segue que $x \in A \cup A'$. Suponha que $x \notin A$. Por hipótese temos que $x \in \bar{A}$ logo pela proposição 2.3 se U é uma vizinhança arbitrária de x então $U \cap A \neq \emptyset$. Entretanto, $x \notin A$, desta forma segue que U necessariamente intercepta A em um ponto diferente de x , ou seja, $x \in A'$. Portanto, $x \in A \cup A'$.

□

Definição 2.11. [Espaço de Hausdorff] *Dizemos que um espaço topológico X é um espaço de Hausdorff se, para quaisquer pontos distintos x_1 e x_2 de X , existirem vizinhanças disjuntas U_1 e U_2 de x_1 e x_2 , respectivamente.*



Proposição 2.5. *São válidas as seguintes propriedades:*

- (i) *Todo conjunto simplesmente ordenado é um espaço de Hausdorff na topologia da ordem.*
- (ii) *O produto de dois espaços de Hausdorff é um espaço de Hausdorff.*
- (iii) *Todo subespaço de um espaço de Hausdorff é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração. De fato, temos:

- (i) • Seja X um conjunto simplesmente ordenado e finito, digamos

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \text{com } x_1 < \dots < x_n.$$

Dados quaisquer x_i, x_j , supondo $x_i < x_j$, $i, j \notin \{1, n\}$, temos que as vizinhanças $I_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$ e $I_j = (x_{j-1}, x_{j+1})$ de x_i e x_j , respectivamente, são disjuntas.

Para os casos, em que x_i ou x_j são os extremos, basta considerar as seguintes vizinhanças disjuntas:

$$I_i = [x_1, x_2) \quad \text{e} \quad I_j = (x_{j-1}, x_{j+1}), \quad \text{quando } x_i = x_1 \quad \text{e} \quad x_j \neq x_n;$$

$$I_i = (x_{i-1}, x_{i+1}) \quad \text{e} \quad I_j = (x_{n-1}, x_n], \quad \text{quando } x_i \neq x_1 \quad \text{e} \quad x_j = x_n;$$

$$I_i = [x_1, x_2) \quad \text{e} \quad I_j = (x_{n-1}, x_n], \quad \text{quando } x_i = x_1 \quad \text{e} \quad x_j = x_n.$$

- Seja, agora, X um conjunto simplesmente ordenado e infinito (discreto ou não).

Dados $x_i, x_j \in X$, com $x_i < x_j$, se ambos não forem nem o elemento mínimo, nem o elemento máximo de X , basta considerarmos as seguintes vizinhanças disjuntas I_i e I_j de x_i e x_j , respectivamente:

$$I_i = (a_i, c) \quad \text{e} \quad I_j = (c, b_j), \quad \text{com } a_i, c, b_j \in X,$$

onde $a_i < x_i < c < x_j < b_j$.

Veja que a_i, b_j sempre existem já que x_i e x_j não são elementos mínimo ou máximo de X . Agora, pode ocorrer de não existir c , tal que $x_i < c < x_j$, neste caso basta considerar as vizinhanças disjuntas:

$$I_i = (a_i, x_j) \quad \text{e} \quad I_j = (x_i, b_j).$$

de x_i e x_j respectivamente. Se x_i for o elemento mínimo de X e x_j não for elemento máximo de X , então definimos

$$I_i = [x_i, c) \quad \text{e} \quad I_j = (c, b_j), \quad \text{com } b_j, c \in X,$$

onde $x_i < c < x_j < b_j$. Caso não exista c tal que $x_i < c < x_j$ (veja que a existência de b_j é garantida pelo fato de x_j não ser o elemento máximo de X), consideramos:

$$I_i = [x_i, x_j) \quad \text{e} \quad I_j = (x_i, b_j), \quad \text{onde } x_i < x_j < b_j.$$

Se x_j for o elemento máximo e x_i não for o elemento mínimo de X , então definimos:

$$I_i = (a_i, c) \quad \text{e} \quad I_j = (c, x_j], \quad \text{onde } a_i, c \in X,$$

com $a_i < x_i < c < x_j$. Caso não exista c tal que $x_i < c < x_j$ (veja que a existência de a_i é garantida pelo fato de que x_i não é elemento mínimo de X), consideramos:

$$I_i = (a_i, x_j) \text{ e } I_j = (x_i, x_j], \text{ com } a_i < x_i < x_j.$$

Se x_i e x_j são os elementos mínimo e máximo de X , respectivamente, consideramos as vizinhanças:

$$I_i = [x_i, c) \text{ e } I_j = (c, x_j], \text{ onde } c \in X,$$

com $x_i < c < x_j$. Note que se não existisse c em X , este seria um conjunto com apenas dois elementos.

- (ii) O produto de dois espaços de Hausdorff, X e Y , é um espaço de Hausdorff. De fato, sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ elementos distintos de $X \times Y$, ou seja, $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$. Vamos supor que $x_1 \neq x_2$. Neste caso como $x_1, x_2 \in X$ e X é um espaço de Hausdorff, temos que existem vizinhanças disjuntas U_1 e U_2 de x_1 e x_2 , respectivamente. Por outro lado, se $y_1 \neq y_2$ como $y_1, y_2 \in Y$ e Y é um espaço de Hausdorff, temos que existem vizinhanças disjuntas V_1 e V_2 de y_1 e y_2 , respectivamente.

Desta maneira, se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, segue que os conjuntos abertos $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$, de $X \times Y$, são vizinhanças de (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , respectivamente, e ainda

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) = \emptyset.$$

No caso em que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$, segue que os conjuntos abertos $U_1 \times Y$ e $U_2 \times Y$, de $X \times Y$, são vizinhanças de (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , respectivamente, e ainda

$$(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = (U_1 \cap U_2) \times Y = \emptyset.$$

De modo análogo, se $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$, segue que os conjuntos abertos $X \times V_1$ e $X \times V_2$, de $X \times Y$, são vizinhanças de (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , respectivamente, e ainda

$$(X \times V_1) \cap (X \times V_2) = X \times (V_1 \cap V_2) = \emptyset.$$

- (iii) Suponha que Y seja um subespaço de um espaço de Hausdorff X .

Sejam $y_1, y_2 \in Y \subset X$ arbitrários tais que $y_1 \neq y_2$. Como $y_1, y_2 \in X$ e X é um espaço de Hausdorff, segue que existem vizinhanças disjuntas U_1 e U_2 , em X , de y_1 e y_2 , respectivamente.

Desta maneira, as interseções $V_1 = U_1 \cap Y$ e $V_2 = U_2 \cap Y$ são ambos conjuntos abertos de Y contendo y_1 e y_2 , respectivamente; e mais, são vizinhanças disjuntas, uma vez que:

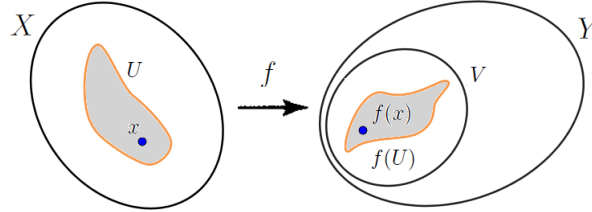
$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y = \emptyset.$$

□

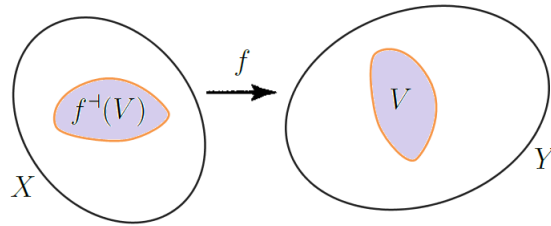
2.2 Funções Contínuas

Definição 2.12. [Função Contínua] Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

- (a) Dizemos que f é contínua em um ponto $x \in X$ quando para cada aberto V de Y contendo $f(x)$ existe aberto U de X contendo x tal que $f(U) \subset V$.



- (b) Dizemos que f é contínua se para todo aberto V de Y a imagem inversa $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X .



- (c) Dizemos que f é aberta se para todo aberto U de X o conjunto $f(U)$ é um subconjunto aberto de Y .

Definição 2.13. [Homeomorfismo] Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção. Dizemos que f é um homeomorfismo quando f e sua inversa f^{-1} são funções contínuas.

Exemplo 2.5. A função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = kx$ onde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, é um homeomorfismo.

De fato, para qualquer $y \in \mathbb{R}$ a função $F^{-1}(y) = k^{-1}y$ é a função inversa de F , pois

$$F \circ F^{-1}(y) = F(F^{-1}(y)) = F(k^{-1}y) = kk^{-1}y = y$$

e ainda

$$F^{-1} \circ F(x) = F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(kx) = k^{-1}kx = x.$$

Como F possui inversa, segue que F é uma bijeção. Observe ainda que F e F^{-1} são contínuas. Logo, como F é uma bijeção contínua cuja inversa F^{-1} também é contínua, segue por definição que F é um homeomorfismo.

A seguir, apresentamos propriedades importantes envolvendo continuidade entre espaços topológicos.

Proposição 2.6. *Sejam X , Y e Z espaços topológicos. São válidas as afirmações:*

(I) *Função inclusão e função constante são funções contínuas, ou seja,*

(i) *Se A é um subespaço de (X, τ) , então a função inclusão,*

$$j : (A, \tau_A) \rightarrow (X, \tau)$$

$$a \mapsto a,$$

é contínua. Em particular, a função identidade $i_d : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$, $i_d(a) = a$, é contínua.

(ii) *Se $f : X \rightarrow Y$ é tal que $f(x) = y_0$, para todo x em X , então a função f é contínua.*

(II) *Composição de funções contínuas é uma função contínua. Ou seja,*

se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são contínuas então $g \circ f$ é contínua.

(III) *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua e A é um subespaço de X , então a restrição $f|_A : A \rightarrow Y$ é uma função contínua.*

Demonstração. De fato, temos:

(I) (i) Seja U um subconjunto aberto de X . Devemos mostrar que $j^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto de A . Observe que, pela definição da função j , $j^{-1}(U) = U \cap A$ e este conjunto, pela topologia do subespaço de A , é um conjunto aberto de A .

(ii) Seja V um subconjunto aberto de Y . Queremos mostrar que $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X . Para isto, observe que se $y_0 \in V$, então $f^{-1}(V) = X$ e, portanto, um conjunto aberto de X ; caso contrário, isto é, se $y_0 \notin V$, então $f^{-1}(V) = \emptyset$ que também é um conjunto aberto de X .

(II) Seja W um subconjunto aberto de Z . Queremos mostrar que $(g \circ f)^{-1}(W)$ é um conjunto aberto de X .

Primeiramente, observe que, como g é uma função contínua e W é um subconjunto aberto de Z , temos que $g^{-1}(W)$ é um subconjunto aberto de Y . Por outro lado, como f também é uma função contínua e $g^{-1}(W)$ é um subconjunto aberto de Y , segue que $f^{-1}(g^{-1}(W))$ é um subconjunto aberto de X . Mas, $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$, consequentemente $(g \circ f)^{-1}(W)$ é um conjunto aberto de X .

(III) Observe que $f|_A = f \circ j$, em que j é a função inclusão de A em X . Portanto, pelo item anterior, segue que a função $f|_A$ é contínua, uma vez que f e j são aplicações contínuas.

O resultado segue pelo que demonstramos em (I), (II) e (III). □

Proposição 2.7. *Seja $X_1 \times X_2$ com a topologia produto. Se*

$$f : A \rightarrow X_1 \times X_2$$

é tal que $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$, sendo que $f_i : A \mapsto X_i$, $i = 1, 2$, então, f é contínua se, e somente se, as funções coordenadas f_1 e f_2 são contínuas.

Demonstração. ($\implies$) Primeiramente, consideramos as seguintes composições:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ a & \mapsto & (f_1(a), f_2(a)) & \mapsto & f_1(a) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ a & \mapsto & (f_1(a), f_2(a)) & \mapsto & f_2(a) \end{array}$$

onde π_1 é a projeção de $X \times Y$ em X e π_2 é a projeção de $X \times Y$ em Y , respectivamente.

Temos, por hipótese, que f é contínua e observe que podemos escrever as funções coordenadas como as seguintes composições:

$$f_1 = \pi_1 \circ f \quad \text{e} \quad f_2 = \pi_2 \circ f.$$

Observe ainda que π_1 e π_2 , projeções em X e Y respectivamente, são funções contínuas. De fato, se U é um subconjunto aberto de X , então $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ é um subconjunto aberto de $X \times Y$. Analogamente, se V é um subconjunto aberto de Y temos $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, subconjunto aberto de $X \times Y$. Portanto, segue do item (II) da proposição 2.6, que f_1 e f_2 são funções contínuas.

($\impliedby$) Considere um elemento básico $U \times V$ em $X \times Y$, com U um subconjunto aberto de X e V um subconjunto aberto de Y . Veja que

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$$

pois

$$a \in f^{-1}(U \times V) \Leftrightarrow f(a) \in U \times V \Leftrightarrow f_1(a) \in U \text{ e } f_2(a) \in V \Leftrightarrow a \in f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

Além disso, mostremos que

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V) \text{ é um subconjunto aberto de } A.$$

Com efeito, como U é um subconjunto aberto de X e f_1 é uma função contínua, segue que $f_1^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto de A e também, como V é um subconjunto aberto de Y e f_2 é uma função contínua, segue que $f_2^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto em A . Logo, $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto em A e, consequentemente, f é uma função contínua. □

Corolário 2.1. *Se*

$$f : A \rightarrow X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

é tal que $f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a))$, onde $f_i : A \rightarrow X_i, i = 1, \dots, n$, então, f é contínua se, e somente se, as funções coordenadas $f_1, f_2, \dots, f_n$ são contínuas.

Lema 2.4. [Lema da Colagem] *Sejam X e Y espaços topológicos com $X = A \cup B$, em que A e B são subconjuntos fechados de X , $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$ então a aplicação $h : X \rightarrow Y$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A, \\ g(x), & \text{se } x \in B, \end{cases}$$

é uma aplicação contínua.

Demonstração. Seja C um subconjunto fechado de Y qualquer. Mostremos que $h^{-1}(C)$ é um subconjunto fechado de X e portanto segue a continuidade de h . Para tanto basta observar que

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

Uma vez que f é contínua segue que $f^{-1}(C)$ é um subconjunto fechado de A , porém A é um subconjunto fechado de X , logo $f^{-1}(C)$ é um subconjunto fechado de X .

Analogamente, sendo g contínua temos que $g^{-1}(C)$ é um subconjunto fechado de B , mas B é um subconjunto fechado de X , logo $g^{-1}(C)$ é um subconjunto fechado de X .

Portanto, a união $f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) = h^{-1}(C)$ é um subconjunto fechado de X . $\square$

2.3 Conexidade e Conexidade por caminhos em Espaço Métrico

Definição 2.14. [Conjunto Conexo]

1. *Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$ como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B de M . As condições $M = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ equivalem a dizer que $A = M - B$ e $B = M - A$. Por conseguinte, numa cisão $M = A \cup B$, os conjuntos A, B são abertos e fechados em M .*
2. *Uma cisão $M = A \cup B$ diz-se trivial quando um dos abertos, A ou B , é vazio (e portanto o outro é igual a M). Assim, a cisão trivial é $M = M \cup \emptyset = \emptyset \cup M$.*
3. *Um espaço métrico M chama-se conexo quando a única cisão possível em M é a trivial.*
4. *Um subconjunto X de um espaço métrico M diz-se um conjunto conexo quando o subespaço $X \subset M$ é conexo. Quando X admite uma cisão não-trivial, dizemos que X é desconexo.*

Exemplo 2.6. 1. Veja que $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é uma cisão do espaço métrico $\mathbb{R} - \{0\}$. Se M é discreto, todo subconjunto $A \subset M$ determina uma cisão $M = A \cup (M - A)$, pois A é aberto e fechado já que M é discreto.

2. Dado um número irracional α , sejam $A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$. Então $A \cup B = \mathbb{Q}$ é uma cisão do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

3. A reta com a métrica usual, $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, é um espaço conexo. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que exista uma cisão não-trivial $\mathbb{R} = A \cup B$. Tomemos $a \in A$ e $b \in B$; digamos que $a < b$. Seja $X = \{x \in A; x < b\}$. Como $a \in X$, vemos que X não é vazio. Além disso, b é uma cota superior de X . Logo existe $c = \sup X$. É claro que $c \leq b$. Pela definição de $\sup$, para todo $\xi > 0$ existe $x \in X$ (e portanto $x \in A$) tal que $c - \xi < x \leq c$. Logo $c \in \overline{A}$. Sendo A fechado, concluímos que $c \in A$. Como $b \in B$, temos que $c \leq b$, donde $c < b$. Sendo A aberto, existe $\xi > 0$ tal que $c + \xi < b$ e $(c - \xi, c + \xi) \subset A$. Então todos os pontos do intervalo $(c, c + \xi)$ pertencem a X , contradizendo que c seja o $\sup$ de X .

Proposição 2.8. *As seguintes afirmações de um espaço métrico M são equivalentes:*

- (1) M é conexo;
- (2) M e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de M ao mesmo tempo abertos e fechados;
- (3) Se $X \subset M$ tem fronteira vazia, então $X = M$ ou $X = \emptyset$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Supondo M conexo, mostremos que os únicos subconjuntos de M ao mesmo tempo abertos e fechados são: M e $\emptyset$.

Seja $A \subset M$ aberto e fechado, qualquer. Logo

$$M = A \cup (M - A)$$

é uma cisão e como M é conexo temos que $A = M$ ou $A = \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Se $X \subset M$ tem fronteira vazia, queremos mostrar $X = M$ ou $X = \emptyset$.

Como $X \subset M$ tem fronteira vazia temos que $\delta X = \emptyset$, logo

$$X = \text{Int } X \cup (\delta X \cap X),$$

donde consequentemente temos $X = \text{Int } X$ e que portanto X é aberto. Como $\delta X \subset X$ temos que $\overline{X} = \text{Int } X \cup \delta X$, donde segue que $\overline{X} = X$, ou seja, X é fechado. Assim X é aberto e fechado, então temos que $X = M$ ou $X = \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Usando o fato de $X \subset M$ ter fronteira vazia mostremos que M é conexo.

Seja $M = A \cup B$ uma cisão. Logo A e B são abertos e fechados. Então, como A é aberto temos $A = \text{Int } A$ e como A é fechado temos que $A = \overline{A}$.

Assim,

$$A = \overline{A} = \text{Int } A \cup \delta A = A \cup \delta A$$

e portanto $\delta A \subset A$ e consequentemente $\delta A \cap A = \delta A$.

Mostremos agora que $\delta A \cap A = \emptyset$.

Sabemos que $A = \text{Int } A$, logo $\delta A \cap A = \delta A \cap \text{Int } A$.

Suponhamos que exista $x \in \delta A \cap A$. Assim, $x \in \text{Int } A$ e $x \in \delta A$.

Como $x \in \text{Int } A$ sabemos que existe $\xi > 0$ tal que $B(x, \xi) \subset A$.

Como $x \in \delta A$ temos que para qualquer $\bar{\xi} > 0$, $B(x, \bar{\xi}) \cap (M - A) \neq \emptyset$.

Assim, em particular ao tomarmos $\xi = \bar{\xi}$, temos um absurdo pois, $B(x, \xi) \subset A$.

Concluímos então que $\delta A \cap A = \emptyset$ e portanto temos $\delta A = \emptyset$. Logo $A = M$ ou $A = \emptyset$.

Assim M é conexo. $\square$

A seguir, vejamos propriedades sobre Espaços Conexos.

Proposição 2.9. *A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.*

Demonstração. Verifiquemos inicialmente um caso particular em que $f : M \rightarrow N$ é contínua, sobrejetora e com M conexo, provaremos que $N = f(M)$ é conexo.

Para isso seja $N = A \cup B$ uma cisão, ou seja A e B são abertos e $A \cap B = \emptyset$. Logo $A \cup B$ é aberto e como f é contínua temos que para qualquer $A' \subset N$ aberto $f^{-1}(A')$ é aberto. Portanto $f^{-1}(A)$ é aberto e $f^{-1}(B)$ é aberto, assim $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ é uma cisão, mas M é conexo e portanto $f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B)$ é $\emptyset$, como f é sobrejetora temos que A ou B é vazio e concluímos então que $N = A \cup B$ é um conjunto conexo.

Para o caso geral, seja $f : M \rightarrow N$ contínua e $X \subset M$ conexo, então $f : X \rightarrow f(X)$ é uma sobrejeção contínua, logo $f(X)$ é conexo. $\square$

Corolário 2.2. *Seja $f : M \rightarrow N$ um homeomorfismo. Então M é conexo se, e somente se, N é conexo.*

Demonstração. Sabe-se que $f : M \rightarrow N$ sendo um homeomorfismo entre os espaços M e N , então f é uma bijeção contínua cuja inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ é contínua.

($\Rightarrow$) Vamos supor que M seja conexo. Como f é contínua, segue pela proposição 2.9 que a imagem $f(M) = N$ é um conexo.

($\Leftarrow$) Por outro lado, supondo que N seja um conexo e tomando a aplicação inversa f^{-1} , que é contínua, tem-se que $f^{-1}(N) = M$ é um conexo.

$\square$

Exemplo 2.7. (i) Todo intervalo aberto da reta é conexo. De fato, sabemos que um intervalo aberto da reta é uma bola aberta de um espaço normado, logo ela é homeomorfa ao espaço e dessa maneira homeomorfa a $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é conexo temos que toda bola aberta é conexa.

(ii) O círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo pois é a imagem da reta pela aplicação contínua sobrejetora $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ onde $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Proposição 2.10. *O fecho de um conjunto conexo é conexo.*

Demonstração. Provemos primeiro um caso particular em que $X \subset M$ é um conjunto conexo tal que $\overline{X} = M$, isto é, X é denso em M . Provemos que M é conexo.

Se $M = A \cup B$ for uma cisão, teremos a cisão $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$, mas por hipótese temos que X é conexo, logo $A \cap X = \emptyset$ ou $B \cap X = \emptyset$. Sendo X denso temos que $A \cap X \neq \emptyset$ ou $B \cap X \neq \emptyset$ para qualquer A, B abertos não-vazios. Mas como $A \cap X = \emptyset$ ou $B \cap X = \emptyset$, temos que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, logo $M = A \cup B$ só assume a cisão trivial e portanto temos que M é conexo e como $M = \overline{X}$ temos que $\overline{X}$ é conexo.

Provemos agora para o caso geral. Temos X conexo e queremos mostrar que $\overline{X}$ é conexo. Como X é denso em $\overline{X}$, temos que esta demonstração recai sobre o caso anterior. $\square$

Corolário 2.3. Se $X \subset Y \subset \overline{X}$ e X é conexo, então Y é conexo.

Demonstração. Note que o fecho de X no subespaço Y é

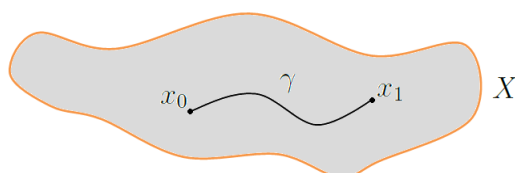
$$\tilde{X} = (\overline{X} \cap Y) = Y,$$

desta forma temos que X é denso em Y e portanto Y é conexo. $\square$

Definição 2.15. [Conexo por Caminhos] Um espaço topológico X é dito conexo por caminhos se para quaisquer dois pontos $x_0, x_1 \in X$, existe um caminho

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

ligando x_0 a x_1 , ou seja, $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

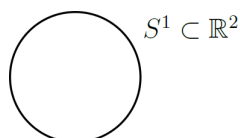


Exemplo 2.8. A seguir listamos alguns exemplos de espaços conexo por caminhos, bem como os que não, admitem esta propriedade.

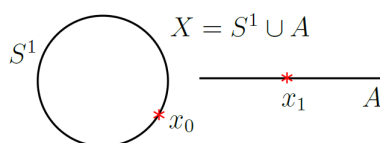
1. Qualquer intervalo da reta real é conexo por caminhos, inclusive a própria reta real $\mathbb{R}$.

$$\cdots \cdots \cdots \underline{A \subset \mathbb{R}} \cdots \cdots \cdots$$

2. O espaço $\mathbb{R}^2$ é conexo por caminhos. Em geral, todo $\mathbb{R}^n$, onde $n \geq 2$, é conexo por caminhos.
3. S^1 é conexo por caminhos. Em geral, toda S^n , onde $n \geq 1$, é conexo por caminhos.



4. O conjunto X definido por $X = S^1 \cup A$ onde A é um segmento de reta qualquer que não admite interseção com S^1 não é conexo por caminhos.



Teorema 2.2. *Se X é um espaço conexo por caminhos então X é conexo.*

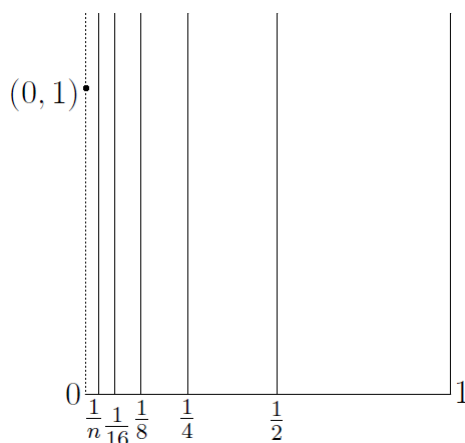
Demonstração. Seja X um espaço conexo por caminhos. Suponhamos que X não seja conexo, logo devem existir dois abertos disjuntos não vazios A e B tais que $X = A \cup B$. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Considere $f : [0, 1] \rightarrow X$ um caminho em X entre a e b . Temos então que $[0, 1] = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ e desta forma $[0, 1]$ não seria conexo, o que é absurdo pelo Exemplo 2.7 e Proposição 2.10. $\square$

Observação 2.8. A recíproca deste teorema não é verdadeira. Para tanto, basta que observemos o espaço $A \subset \mathbb{R}^2$

$$A = \{(0, 1)\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) ; n \in \mathbb{N}, y \geq 0 \right\} \cup \{(x, 0) ; 0 \leq x \leq 1\}.$$

conhecido como *pente*.

Temos que A é conexo, porém não é conexo por caminhos, pois o ponto $p = (0, 1)$ não pode ser ligado por um caminho a nenhum outro ponto de A .



3 Sobre o Grupo Fundamental

Antes de desvendarmos o propósito deste capítulo, abordaremos de modo elementar a estrutura algébrica Grupo. A saber,

Definição 3.1. [Grupo] *Sejam G um conjunto não vazio e $*$ uma operação binária de G , isto é, uma função de $G \times G$ em G tal que $(x, y) \mapsto x * y$. Dizemos que $(G, *)$ é um grupo em relação a esta operação binária ou que $*$ define uma estrutura de grupo sobre o conjunto G se, e somente se, valem as seguintes propriedades:*

1. *Associativa: $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$;*
2. *Existência de um elemento neutro: $\exists e \in G \mid a * e = a = e * a, \forall a \in G$;*
3. *Existência de elemento oposto: $\forall a \in G, \exists \bar{a} \in G \mid a * \bar{a} = e = \bar{a} * a$.*

*Ainda, no caso em que a operação binária $(x, y) \mapsto x * y$ é comutativa, isto é, $x * y = y * x, \forall x, y \in G$, dizemos que o par $(G, *)$ é um grupo abeliano.*

Observação 3.1. Pode-se demonstrar que o elemento neutro enunciado no item 2. da definição 3.1 é único, bem como que para cada $a \in G$, existe um único elemento oposto $\bar{a} \in G$ tal como enunciado no item 3.

Definição 3.2. [Homomorfismo] *Dados dois grupos $(G, *)$ e $(H, \diamond)$ quaisquer, dizemos que uma função $f : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos quando:*

$$f(x * y) = f(x) \diamond f(y), \quad \forall x, y \in G.$$

O cerne deste capítulo é definir um grupo especial, a saber, o Grupo Fundamental de um espaço topológico cuja importância se dá por resolver problemas topológicos via ferramentas da álgebra. Sobretudo a importância deste grupo se dá por se tratar de um invariante topológico, no sentido de que se X e Y são espaços topológicos homeomorfos então os respectivos grupos fundamentais são isomorfos. A seguir damos início a sua construção.

3.1 Construção do Grupo Fundamental

Definição 3.3. [Caminho] *Seja X um espaço topológico com $x_0, x_1 \in X$. Um caminho de x_0 a x_1 em X é uma aplicação contínua*

$$\lambda : I = [0, 1] \rightarrow X$$

tal que $\lambda(0) = x_0$ e $\lambda(1) = x_1$.

Definição 3.4. [Laço] *Seja X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Toda aplicação contínua $\lambda : I = [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\lambda(0) = x_0 = \lambda(1)$ é chamada de laço com ponto base em x_0 .*

Podemos dizer que laço é um caso particular de caminho em que os pontos inicial e final são coincidentes.



Figura 3.1: Laços e Caminhos

Proposição 3.1. *Dado que $\lambda : [0, 1] \rightarrow X$ é um caminho tal que $\lambda(0) = x_0$ e $\lambda(1) = x_1$ então*

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} : [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \bar{\lambda}(t) \end{aligned}$$

tal que $\bar{\lambda}(t) = \lambda(1 - t)$ é um caminho de x_1 a x_0 .

Demonstração. Primeiramente tem-se que $\bar{\lambda}(t)$ tal como definida é então uma composição das aplicações contínuas λ e $\phi(t) = 1 - t$ em que $t \in [0, 1]$. Logo $\bar{\lambda}(t)$ é uma aplicação contínua.

Também temos as seguintes identidades:

$$\bar{\lambda}(0) = \lambda(1 - 0) = \lambda(1) = x_1 \quad \text{e} \quad \bar{\lambda}(1) = \lambda(1 - 1) = \lambda(0) = x_0.$$

Nestas condições, podemos concluir que $\bar{\lambda}(t)$ é um caminho de x_1 a x_0 . □

Observação 3.2. O caminho $\bar{\lambda}$ é chamado de caminho inverso de λ .

Como veremos, a estrutura que pretendemos exibir está intimamente relacionada a laços. Denota-se por $\Omega(X; x_0)$ o conjunto de todos os laços em X com ponto base em x_0 .

$$\Omega(X; x_0) = \{\lambda : I \rightarrow X; \lambda \text{ é laço em } x_0\}.$$

Definição 3.5. [Laço Justaposto] *Sejam $\alpha, \beta \in \Omega(X; x_0)$. O laço justaposto, o qual denotamos $\alpha \bullet \beta$, é definido como sendo a aplicação*

$$\alpha \bullet \beta : I = [0, 1] \rightarrow X$$

em que, dado $t \in I$, então

$$(\alpha \bullet \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

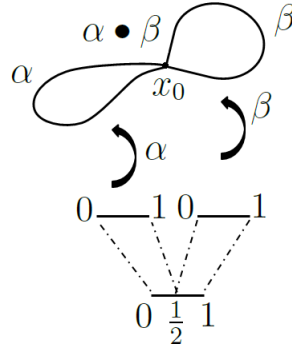


Figura 3.2: Justaposição entre os laços $\alpha, \beta \in \Omega(X; x_0)$.

A justaposição nada mais é que uma operação definida entre laços que possuem o mesmo ponto base. No entanto, ao olharmos o conjunto $\Omega(X; x_0)$ munido desta operação de justaposição “ $\bullet$ ” temos que o mesmo não admite estrutura de grupo.

Basta observarmos que a propriedade associativa, uma das condições da definição 3.1, não é válida no conjunto $\Omega(X; x_0)$ com relação a operação de justaposição, já que ao considerarmos os laços α, β e γ de $\Omega(X; x_0)$, por um lado temos:

$$\begin{aligned} ((\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma)(t) &= \begin{cases} (\alpha \bullet \beta)(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2(2t)), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta(2(2t) - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(4t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta(4t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Mas por outro lado temos,

$$\begin{aligned} (\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma))(t) &= \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (\beta \bullet \gamma)(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2(2t - 1)), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \gamma(2(2t - 1) - 1), & \text{se } t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(4t - 2), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \gamma(4t - 3), & \text{se } t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, é de se concluir que a igualdade $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$, que define a propriedade associativa, não se verifica em $\Omega(X; x_0)$ e portanto este não possui a estrutura algébrica de grupos ao considerarmos a operação justaposição. Assim, como a operação justaposição não satisfaz as propriedades para que $(\Omega(X; x_0); \bullet)$ seja um grupo, vamos nos aprofundar em outras definições para se conseguir um grupo neste contexto.

Definição 3.6. [Homotopia] *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas de X em Y . Uma homotopia entre as aplicações f e g é uma função contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ onde $I = [0, 1]$ tal que*

$$\begin{cases} H(t, 0) = f(t) \\ H(t, 1) = g(t) \end{cases} \quad \forall t \in X.$$

Notação: $f \stackrel{H}{\sim} g$

Definição 3.7. [Caminhos Equivalentes] *Sejam X um espaço topológico e $x, y \in X$. Dois caminhos $\lambda_1, \lambda_2 : I \rightarrow X$ de x para y são equivalentes se eles são homotópicos através de caminhos de x para y , ou seja, se existe homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ tal que*

$$\begin{cases} H(t, 0) = \lambda_1(t) \\ H(t, 1) = \lambda_2(t) \end{cases} \quad \forall t \in I \quad e \quad \begin{cases} H(0, s) = x \\ H(1, s) = y \end{cases} \quad \forall s \in I.$$

Como laço é um caso particular de caminho, segue a próxima definição.

Definição 3.8. [Laços Equivalentes] *Sejam X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Os laços α e β de $\Omega(X; x_0)$ são ditos equivalentes caso sejam homotópicos, ou seja, se existe homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ tal que*

$$\begin{cases} H(t, 0) = \alpha(t) \\ H(t, 1) = \beta(t) \end{cases} \quad \forall t \in I \quad e \quad \begin{cases} H(0, s) = x_0 \\ H(1, s) = x_0 \end{cases} \quad \forall s \in I.$$

Notação: $\alpha \stackrel{H}{\sim} \beta$

Observação 3.3. Geometricamente, dois laços (ou caminhos) são homotópicos se um deles pode ser deformado continuamente no outro. Na figura a seguir, α, β e γ são caminhos de x_0 a $x_1 \in X$. Então α e β são homotópicos, porém α e γ não o são.

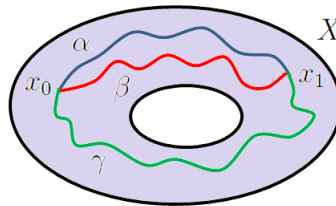


Figura 3.3: Homotopia entre os caminhos α e β .

Lema 3.1. *A relação de laços equivalentes é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Vamos aqui verificar que a relação de homotopia satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

1. **[Reflexiva]** Dado um laço qualquer $\alpha \in \Omega(X; x_0)$, vamos demonstrar que $\alpha \stackrel{H}{\sim} \alpha$, para alguma H homotopia.

Convém aqui notarmos que, como α é um laço, então $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$. O próximo passo é exibirmos uma aplicação contínua de tal maneira que fique estabelecida a relação homotópica do laço α em si próprio.

Para tanto, consideremos a função $H : I \times I \rightarrow X$ onde

$$H(t, s) = \alpha(t), \quad \forall (t, s) \in I \times I.$$

Note que esta função H acima definida satisfaz a definição 3.6 da página 31, pois:

- Como α é laço de $\Omega(X; x_0)$ e portanto admite a continuidade, segue que H , como acima definida, é uma função contínua.
- Também tem-se que

$$\begin{cases} H(t, 0) = \alpha(t) \\ H(t, 1) = \alpha(t) \end{cases} \quad \forall t \in I$$

$$\text{e } H(0, s) = \alpha(0) = x_0 = \alpha(1) = H(1, s) \quad \forall s \in I.$$

Segue assim que $\alpha \stackrel{H}{\sim} \alpha$, onde α é um laço de $\Omega(X; x_0)$ tomado arbitrariamente. Portanto a relação de homotopia admite a propriedade reflexiva.

2. **[Simétrica]** Sejam α, β laços quaisquer de $\Omega(X; x_0)$ tais que $\alpha \stackrel{F}{\sim} \beta$ para alguma homotopia F . Vamos demonstrar que existe G homotopia, de tal modo que tem-se $\beta \stackrel{G}{\sim} \alpha$.

Como por hipótese $\alpha \stackrel{F}{\sim} \beta$, então sabe-se que $F : I \times I \rightarrow X$ é homotopia e portanto é uma aplicação contínua que admite as seguintes relações:

$$\begin{cases} F(t, 0) = \alpha(t) \\ F(t, 1) = \beta(t) \end{cases} \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad F(0, s) = x_0 = F(1, s) \quad \forall s \in I.$$

Passemos então a considerar a aplicação $G : I \times I \rightarrow X$ da seguinte maneira:

$$G(t, s) = F(t, 1 - s), \quad \forall (t, s) \in I \times I.$$

Verifiquemos que a função G acima definida cumpre a definição 3.6.

- (a) G é função contínua pois trata-se de uma composição de funções contínuas.
- (b) São válidas as igualdades

$$\begin{cases} G(t, 0) = F(t, 1) = \beta(t) \\ G(t, 1) = F(t, 0) = \alpha(t) \end{cases} \quad \forall t \in I \quad \implies \quad \begin{cases} G(t, 0) = \beta(t) \\ G(t, 1) = \alpha(t) \end{cases} \quad \forall t \in I$$

(c) Também temos,

$$\begin{cases} G(0, s) = F(0, 1 - s) = x_0 \\ G(1, s) = F(1, 1 - s) = x_0 \end{cases} \quad \forall s \in I.$$

Consequentemente,

$$G(0, s) = x_0 = G(1, s), \quad \forall s \in I.$$

Segue assim que $\beta \stackrel{G}{\sim} \alpha$, ficando assim demonstrado que a relação de homotopia admite a propriedade simétrica.

3. **[Transitiva]** Consideremos os laços $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X; x_0)$ e suponhamos que $\alpha \stackrel{H_1}{\sim} \beta$ e $\beta \stackrel{H_2}{\sim} \gamma$ respectivamente através das homotopias H_1 e H_2 . Vamos demonstrar que existe uma homotopia H de tal forma que $\alpha \stackrel{H}{\sim} \gamma$.

Primeiramente, observemos o seguinte:

- Como $\alpha \sim \beta$ via homotopia H_1 , temos que

$$\begin{cases} H_1(t, 0) = \alpha(t) \\ H_1(t, 1) = \beta(t) \end{cases} \quad \forall t \in I \quad e \quad \begin{cases} H_1(0, s) = x_0 \\ H_1(1, s) = x_0 \end{cases} \quad \forall s \in I.$$

- E como $\beta \sim \gamma$ através da homotopia H_2 , seguem

$$\begin{cases} H_2(t, 0) = \beta(t) \\ H_2(t, 1) = \gamma(t) \end{cases} \quad \forall t \in I \quad e \quad \begin{cases} H_2(0, s) = x_0 \\ H_2(1, s) = x_0 \end{cases} \quad \forall s \in I.$$

Tendo como inspiração as informações anteriores, definimos a seguinte aplicação

$$H : I \times I \rightarrow X$$

tal que

$$H(t, s) = \begin{cases} H_1(t, 2s); & t \in [0, 1] \quad e \quad s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(t, 2s - 1); & t \in [0, 1] \quad e \quad s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(a) A aplicação H é contínua.

Note que as aplicações H_1 e H_2 tal como tomadas na definição da aplicação H , tratam-se de restrições respectivamente aos intervalos fechados

$$I_1 = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \quad e \quad I_2 = [0, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$$

onde

$$I_1 \cup I_2 = [0, 1] \times [0, 1] = I \times I \quad e \quad I_1 \cap I_2 = [0, 1] \times \{\frac{1}{2}\},$$

e que para o caso de um elemento $(t, s) \in I_1 \cap I_2$, tem-se que:

$$H(t, s) = H(t, \frac{1}{2}) = \begin{cases} H_1(t, 2 \cdot \frac{1}{2}); \\ H_2(t, 2 \cdot \frac{1}{2} - 1); \end{cases} = \begin{cases} H_1(t, 1); \\ H_2(t, 0); \end{cases} = \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Donde segue a continuidade da função H via Lema 2.4 da Colagem .

(b) Vale também observarmos que $\forall t \in I$:

$$\begin{cases} H(t, 0) = H_1(t, 2 \cdot 0) = H_1(t, 0) = \alpha(t); \\ H(t, 1) = H_2(t, 2 \cdot 1 - 1) = H_2(t, 1) = \gamma(t). \end{cases}$$

E também, $\forall s \in I$:

$$H(0, s) = \begin{cases} H_1(0, 2s) \\ H_2(0, 2s - 1) \end{cases} = x_0 \quad e \quad H(1, s) = \begin{cases} H_1(1, 2s) \\ H_2(1, 2s - 1) \end{cases} = x_0$$

Em resumo, está demonstrado que H é uma aplicação contínua tal que, $\forall t \in I$ e $\forall s \in I$ tem-se

$$\begin{cases} H(t, 0) = \alpha(t) \\ H(t, 1) = \gamma(t) \end{cases} \quad e \quad H(0, s) = x_0 = H(1, s).$$

Nestas condições, $\alpha \stackrel{H}{\sim} \gamma$ e portanto é válida a propriedade transitiva.

Diante de todo o exposto está provado que a relação de homotopia entre laços de $\Omega(X; x_0)$ é uma relação de equivalência. $\square$

Observação 3.4. A título de informação, o Lema 3.1 acima demonstrado é uma consequência direta de a relação Caminhos Equivalentes ser uma relação de equivalência, pelo fato de um laço ser, em particular, um caminho.

Do fato de a relação “ $\sim$ ” vista acima ser uma relação de equivalência, podemos considerar o Conjunto Quociente

$$\frac{\Omega(X; x_0)}{\sim}$$

cujos elementos são classes de equivalência, denotados por $[\alpha]$, onde α é um laço de $\Omega(X; x_0)$. No que segue, passaremos a denotar este Quociente da seguinte maneira

$$\frac{\Omega(X; x_0)}{\sim} = \pi_1(X; x_0).$$

Nosso próximo passo será o de estabelecer uma operação binária suficientemente adequada sobre $\pi_1(X; x_0)$, de modo que o torne um grupo.

Para fazer isto, relembremos que em $\Omega(X; x_0)$ está definida a operação de justaposição entre laços α e β , denotada por $\alpha \bullet \beta$, definida da seguinte maneira:

$$(\alpha \bullet \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t); & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1); & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

A operação que vamos atribuir a $\pi_1(X; x_0)$, que denotaremos por “ $\cdot$ ”, é essencialmente relacionada a justaposição entre laços, e definida a seguir:

$$\begin{aligned} \cdot : \pi_1(X; x_0) \times \pi_1(X; x_0) &\longrightarrow \pi_1(X; x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) &\longmapsto [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \bullet \beta] \end{aligned}$$

Convém inicialmente observarmos que trata-se de uma operação bem definida em $\pi_1(X; x_0)$. Ou seja, a aplicação independe da escolha dos representantes a serem tomados. Assim, verificada tal importância com relação a esta operação, vamos demonstrar este resultado através de um lema, tal como a seguir:

Lema 3.2. *Seja X um espaço topológico, e $\pi_1(X; x_0)$ o conjunto das classes de equivalência $[\alpha]$ onde α é um laço de $\Omega(X; x_0)$ e $x_0 \in X$. A operação denotada por “ $\cdot$ ” em $\pi_1(X; x_0)$ definida tal como a seguir*

$$\begin{aligned} \cdot : \pi_1(X; x_0) \times \pi_1(X; x_0) &\longrightarrow \pi_1(X; x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) &\longmapsto [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \bullet \beta] \end{aligned}$$

está bem definida, ou seja, dados $[\alpha], [\beta], [\alpha'], [\beta'] \in \pi_1(X; x_0)$ tais que $[\alpha] = [\alpha']$ e $[\beta] = [\beta']$ então devemos ter $[\alpha \bullet \beta] = [\alpha' \bullet \beta']$.

Demonstração. De fato. Vamos supor que $([\alpha], [\beta]) = ([\alpha'], [\beta'])$. Nestas condições, concluiremos que $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha'] \cdot [\beta']$. Ocorre que esta igualdade equivale a

$$[\alpha \bullet \beta] = [\alpha' \bullet \beta'],$$

esta que por sua vez, por se tratar de uma igualdade entre classes laterais, obrigatoriamente, tem-se que

$$\alpha \bullet \beta \stackrel{F}{\sim} \alpha' \bullet \beta'$$

para alguma homotopia F . Portanto, isto é o que devemos demonstrar, para enfim concluirmos que a operação está bem definida em $\pi_1(X; x_0)$.

Vejamos que da igualdade $([\alpha], [\beta]) = ([\alpha'], [\beta'])$, por tratar-se de uma igualdade entre pares ordenados temos:

$$([\alpha], [\beta]) = ([\alpha'], [\beta']) \iff [\alpha] = [\alpha'] \text{ e } [\beta] = [\beta'] \iff \alpha \stackrel{H}{\sim} \alpha' \text{ e } \beta \stackrel{G}{\sim} \beta'$$

onde H e G são as respectivas homotopias entre α e α' e entre β e β' .

Estas homotopias estabelecem as seguintes igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(t, 0) = \alpha(t) \\ H(t, 1) = \alpha'(t) \\ H(0, s) = x_0 \\ H(1, s) = x_0 \end{array} \right. \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} G(t, 0) = \beta(t) \\ G(t, 1) = \beta'(t) \\ G(0, s) = x_0 \\ G(1, s) = x_0 \end{array} \right. \quad \forall t \in I \quad \text{e} \quad \forall s \in I.$$

Passamos agora a definir a seguinte função

$$F : I \times I \longrightarrow X,$$

onde $I = [0, 1]$ da seguinte maneira:

$$F(t, s) = \begin{cases} H(2t, s); & t \in [0, \frac{1}{2}], \quad s \in I \\ G(2t - 1, s); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \quad s \in I \end{cases}$$

Vamos verificar a continuidade desta função F .

Notemos que a função F é definida pelas composições das homotopias H e G , respectivamente com as aplicações $\phi(x, y) = (2x, y)$ e $\psi(x, y) = (2x - 1, y)$. Podemos escrever esquematicamente as composições:

$$\begin{aligned} [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] &\xrightarrow{\phi} [0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{H} X \\ (t, s) &\longmapsto (2t, s) \longmapsto (H \circ \phi)(t, s) = H(\phi(t, s)) = H(2t, s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{ccc} [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{\psi} & [0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{G} X \\ (t, s) & \mapsto & (2t - 1, s) \mapsto (G \circ \psi)(t, s) = G(\psi(t, s)) = G(2t - 1, s). \end{array}$$

Assim, como H, G, ϕ e ψ são contínuas segue que as respectivas compostas também o são. Temos também que tais compostas estão definidas respectivamente nos intervalos fechados J_H, J_G , onde

$$J_H = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \quad \text{e} \quad J_G = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1],$$

$J_H \cup J_G = I \times I = \text{Dom } F$ e os pontos da interseção $J_H \cap J_G$ são do tipo $(t, s) = (\frac{1}{2}, s)$ com $s \in [0, 1]$.

Daí, dado $(t, s) \in J_H \cap J_G$, tem-se:

$$F(\frac{1}{2}, s) = H(2 \cdot \frac{1}{2}, s) = H(1, s) = x_0$$

e

$$F(\frac{1}{2}, s) = G(2 \cdot \frac{1}{2} - 1, s) = G(0, s) = x_0.$$

Portanto, $H(t, s) = G(t, s)$ para todo ponto $(t, s) = (\frac{1}{2}, s) \in J_H \cap J_G$.

Segue, por estes fatos apresentados e aplicando o Lema 2.4 da Colagem, o resultado de que F é uma função contínua.

Além disso, vejamos que:

$$F(t, 0) = \begin{cases} H(2t, 0); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2t - 1, 0); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = (\alpha \bullet \beta)(t).$$

Temos também,

$$F(t, 1) = \begin{cases} H(2t, 1); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2t - 1, 1); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = \begin{cases} \alpha'(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta'(2t - 1); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = (\alpha' \bullet \beta')(t).$$

E,

$$\begin{cases} F(0, s) = H(2 \cdot 0, s) = H(0, s) = x_0 \\ F(1, s) = G(2 \cdot 1 - 1, s) = G(1, s) = x_0 \end{cases}$$

Então, resumidamente conclui-se que F é uma aplicação contínua, tal que

$$\begin{cases} F(t, 0) = (\alpha \bullet \beta)(t) \\ F(t, 1) = (\alpha' \bullet \beta')(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad F(0, s) = x_0 = F(1, s).$$

Ou seja, F é uma homotopia, tal que $\alpha \bullet \beta \stackrel{F}{\sim} \alpha' \bullet \beta'$, que é justamente o que nos propomos a demonstrar. Segue portanto, que podemos afirmar a igualdade entre classes $[\alpha \bullet \beta] = [\alpha' \bullet \beta']$.

Assim,

$$([\alpha], [\beta]) = ([\alpha'], [\beta']) \implies [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha'] \cdot [\beta'].$$

□

Fazendo uso desta operação binária sobre $\pi_1(X; x_0)$, vamos agora apresentar um resultado importante deste capítulo.

Teorema 3.1. [O Grupo Fundamental] *Seja X um espaço topológico e $x_0 \in X$. O par $(\pi_1(X; x_0), \cdot)$ é um grupo, o qual é chamado de O Grupo Fundamental de X em x_0 .*

Demonstração. Para que $\pi_1(X; x_0)$ munido da operação binária “ $\cdot$ ” seja um grupo, devemos demonstrar que são satisfeitas as propriedades de grupo: **i)** associativa, **ii)** existência do elemento neutro e **iii)** todo elemento de $\pi_1(X; x_0)$ é invertível. Façamos isto:

i) Associativa: Sejam $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \pi_1(X; x_0)$. Vamos mostrar que:

$$([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]).$$

Mas para demonstrarmos esta igualdade, temos:

$$\begin{aligned} ([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]) &\iff [\alpha \bullet \beta] \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot [\beta \bullet \gamma] \\ &\iff [(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma] = [\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)] \\ &\iff (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma \stackrel{H}{\sim} \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) \end{aligned}$$

para alguma homotopia H . Busquemos portanto esta homotopia H .

De cálculos já realizados anteriormente, sabemos que

$$((\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t); & t \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta(4t - 1); & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2t - 1); & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

e

$$(\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(4t - 2); & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \gamma(4t - 3); & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

O laço justaposto $((\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma)(t)$ é descrito da seguinte maneira: para valores de t , tais que $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$, aplica-se o laço α composto com a função linear

$$\phi_\alpha : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad \phi_\alpha(t) = 4t.$$

Enquanto que, para valores de t , tais que $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$ deve-se aplicar o laço β composto com a função linear

$$\phi_\beta : [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad \phi_\beta(t) = 4t - 1.$$

Finalmente, para valores de t , tais que $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ a aplicação será do laço γ composto com a função linear

$$\phi_\gamma : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad \phi_\gamma(t) = 2t - 1.$$

Pretendemos obter uma homotopia entre os laços $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$ e $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$. Para tanto, vamos considerar o diagrama a seguir, para obtermos as descrições algébricas destes caminhos.

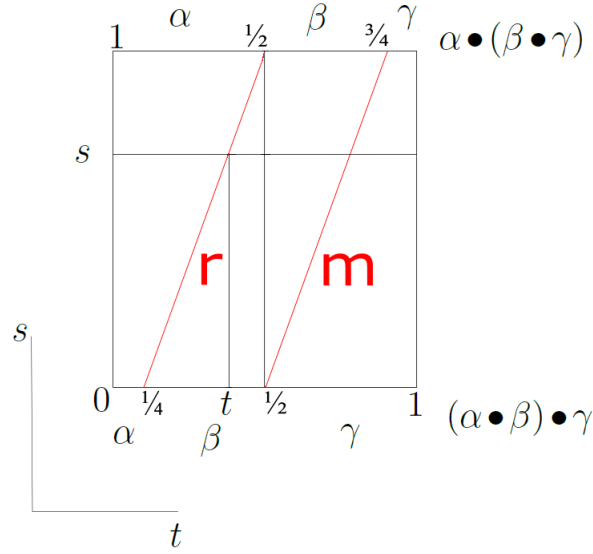


Figura 3.4: Esquema para obtenção da homotopia entre os laços $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$ e $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$.

Inicialmente, vamos explicitar as retas r e m . Para isto, fixemos um valor s qualquer em $[0, 1]$. Daí, temos via semelhança entre triângulos:

$$\frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{t - \frac{1}{4}} \Rightarrow t - \frac{1}{4} = s \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{s+1}{4}$$

Portanto a reta r é dada explicitamente por $r : t = \frac{s+1}{4}$. Analogamente obtém-se a expressão da reta m , a saber, $m : t = \frac{s+2}{4}$.

Então, para um dado valor s , aplica-se α , β e γ respectivamente nos intervalos $[0, \frac{s+1}{4}]$, $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$ e $[\frac{s+2}{4}, 1]$.

A homotopia que procuramos é obtida da seguinte maneira:

1. Fixado um valor s , os valores de t em α percorrem de 0 até a reta $r : r(s)$, ou seja, $0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}$. Então:

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} &\Rightarrow 0 \leq t \cdot \frac{4}{s+1} \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{4t}{s+1} \leq 1. \end{aligned}$$

Conclusão, para $t \in [0, \frac{s+1}{4}]$ temos $\alpha(\frac{4t}{s+1})$.

2. Os valores de t em β percorrem entre as retas $r : r(s)$ e $m : m(s)$, ou seja, $\frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}$. Analogamente ao caso anterior, temos:

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} &\Rightarrow 0 \leq t - \frac{s+1}{4} \leq \frac{s+2}{4} - \frac{s+1}{4} \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{4t - s - 1}{4} \leq \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 0 \leq 4t - s - 1 \leq 1. \end{aligned}$$

Assim, para $t \in [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$ temos $\beta(4t - s - 1)$.

3. Analisando os valores de t em γ , os mesmos percorrem entre a reta $m : m(s)$ e o eixo $t = 1$. Assim temos:

$$\begin{aligned} \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq t - \frac{s+2}{4} \leq 1 - \frac{s+2}{4} \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{4t-s-2}{4} \leq \frac{2-s}{4} \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{4t-s-2}{2-s} \leq 1. \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que para $t \in [\frac{s+2}{4}, 1]$, tomamos $\gamma(\frac{4t-s-2}{2-s})$.

Finalmente, a homotopia H que procuramos é a seguinte:

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{s+1}); & \text{se } t \in [0, \frac{s+1}{4}], \quad s \in I \\ \beta(4t-s-1); & \text{se } t \in [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}], \quad s \in I \\ \gamma(\frac{4t-s-2}{2-s}); & \text{se } t \in [\frac{s+2}{4}, 1], \quad s \in I \end{cases}$$

É importante observarmos que H acima definida, de fato é uma homotopia, pois:

1. A aplicação H é contínua pelo Lema 2.4 da Colagem. Basta ver que os laços α, β e γ são por hipótese contínuas, e cada um destes, quando na definição de H é uma composição entre funções contínuas e portanto cada composição é uma aplicação contínua. Também verifica-se que cada uma destas compostas são definidas em intervalos fechados que satisfazem as hipóteses enunciadas pelo Lema da Colagem.
2. Calculando $H(t, 0)$ e $H(t, 1)$ temos:

$$H(t, 0) = \begin{cases} \alpha(4t); & t \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta(4t-1); & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2t-1); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = ((\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma)(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

e

$$H(t, 1) = \begin{cases} \alpha(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(4t-2); & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \gamma(4t-3); & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases} = (\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma))(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

3. Também ao calcularmos $H(0, s)$ e $H(1, s)$, temos:

$$H(0, s) = \alpha\left(\frac{4 \cdot 0}{s+1}\right) = \alpha(0) = x_0.$$

e

$$H(1, s) = \gamma\left(\frac{4 \cdot 1 - s - 2}{2-s}\right) = \gamma\left(\frac{2-s}{2-s}\right) = \gamma(1) = x_0.$$

Logo, $H(0, s) = x_0 = H(1, s)$.

Portanto,

$$(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma \stackrel{H}{\sim} \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma).$$

ii) **Existência de Elemento Neutro:** Seja $c_{x_0} : I = [0, 1] \rightarrow X$ definida por $c_{x_0}(t) = x_0$, para todo $t \in [0, 1]$, ou seja, a aplicação constante. Então $e_{x_0} = [c_{x_0}]$ é o elemento neutro de $\pi_1(X; x_0)$, ou seja, dado qualquer $[\alpha] \in \pi_1(X; x_0)$, tem-se que

$$[\alpha] \cdot [c_{x_0}] = [\alpha] = [c_{x_0}] \cdot [\alpha].$$

De fato, temos:

1. Ao aplicarmos a definição no primeiro membro da igualdade $[\alpha] \cdot [c_{x_0}] = [\alpha]$ temos que $[\alpha \bullet c_{x_0}] = [\alpha]$. Então, para demonstrarmos esta igualdade, basta que mostremos que existe homotopia F tal que $\alpha \bullet c_{x_0} \stackrel{F}{\sim} \alpha$.

Vejamos antes o seguinte:

$$(\alpha \bullet c_{x_0})(t) = \begin{cases} \alpha(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ c_{x_0}(2t - 1); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_0; & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Como feito anteriormente na demonstração da propriedade associativa, utilizaremos a figura contendo o esquema prático para explicitar a reta r , donde temos o seguinte:

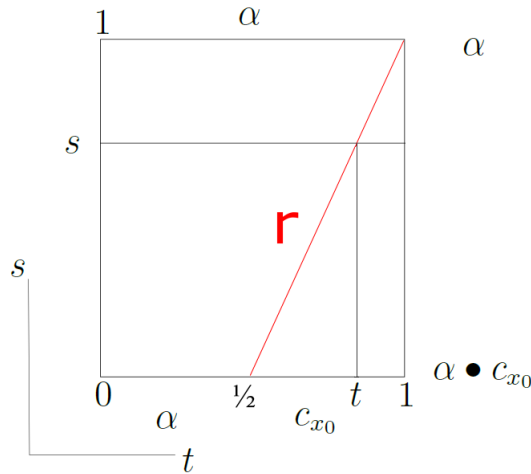


Figura 3.5: Esquema para determinação da homotopia entre os laços $\alpha \bullet c_{x_0}$ e α .

$$\frac{1}{s} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}} \Rightarrow s = \frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{s}{2} = t - \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{s+1}{2}.$$

Fixado um valor de s , sabemos que os valores de t em α percorrem de 0 até a reta $r : r(s)$, ou seja, $0 \leq t \leq \frac{s+1}{2}$. Daí temos:

$$0 \leq t \leq \frac{s+1}{2} \Rightarrow 0 \leq t \cdot \frac{2}{s+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{2t}{s+1} \leq 1.$$

Passemos então a considerar a seguinte aplicação contínua:

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{s+1}); & t \in [0, \frac{s+1}{2}], \\ x_0; & t \in [\frac{s+1}{2}, 1]. \end{cases}$$

E assim,

$$F(t, 0) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{0+1}); & t \in [0, \frac{0+1}{2}], \\ x_0; & t \in [\frac{0+1}{2}, 1], \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_0; & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = (\alpha \bullet c_{x_0})(t);$$

$$F(t, 1) = \alpha\left(\frac{2t}{1+1}\right) = \alpha(t);$$

$$F(0, s) = \alpha\left(\frac{2 \cdot 0}{s+1}\right) = \alpha(0) = x_0;$$

e

$$F(1, s) = x_0.$$

Segue portanto o resultado que $\alpha \bullet c_{x_0} \stackrel{F}{\sim} \alpha$.

2. Vamos também verificar que $[c_{x_0}] \cdot [\alpha] = [\alpha]$, ou seja, $[c_{x_0} \bullet \alpha] = [\alpha]$. Portanto, devemos mostrar $c_{x_0} \bullet \alpha \stackrel{G}{\sim} \alpha$, para alguma G homotopia contínua.

Primeiramente, temos que considerar,

$$(c_{x_0} \bullet \alpha)(t) = \begin{cases} c_{x_0}(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha(2t-1); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} = \begin{cases} x_0; & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha(2t-1); & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Seguindo o mesmo tratamento feito anteriormente, temos:

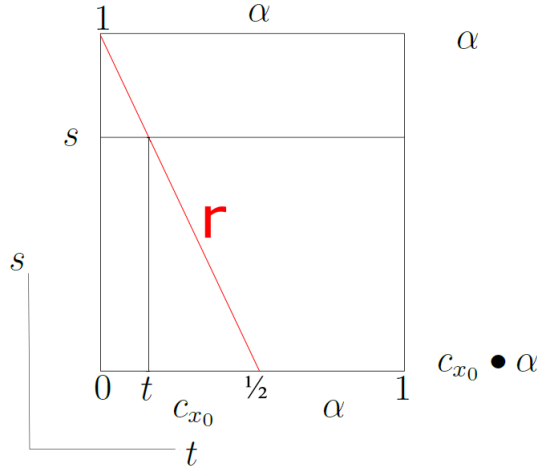


Figura 3.6: Esquema para determinação da homotopia entre os laços $c_{x_0} \bullet \alpha$ e α .

$$\frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} \Rightarrow \frac{1}{2} - t = \frac{s}{2} \Rightarrow t = -\frac{s}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{-s+1}{2}.$$

Fixado o valor de s , temos que os valores de t em α percorrem entre a reta $r : r(s)$ e o eixo 1, ou seja, $\frac{-s+1}{2} \leq t \leq 1$.

Nestas condições,

$$\begin{aligned} \frac{-s+1}{2} \leq t \leq 1 &\Rightarrow -s+1 \leq 2t \leq 2 \\ &\Rightarrow 0 \leq 2t+s-1 \leq 2+s-1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 2t+s-1 \leq s+1 \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{2t+s-1}{s+1} \leq 1. \end{aligned}$$

Logo, a homotopia G que procuramos é definida como a seguir:

$$G(t, s) = \begin{cases} x_0; & t \in [0, \frac{1-s}{2}], \\ \alpha(\frac{2t+s-1}{s+1}); & t \in [\frac{1-s}{2}, 1]. \end{cases}$$

De fato, G é homotopia pois:

- G é contínua, via Lema 2.4 da Colagem.
- $G(t, 0) = \begin{cases} x_0; & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2t-1); & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (c_{x_0} \bullet \alpha)(t);$
e
 $G(t, 1) = \alpha(\frac{2t}{2}) = \alpha(t)$
- $G(0, s) = x_0$
e
 $G(1, s) = \alpha(\frac{2 \cdot 1 + s - 1}{s+1}) = \alpha(\frac{2+s-1}{s+1}) = \alpha(1) = x_0.$
Portanto, $G(0, s) = x_0 = G(1, s).$

Segue portanto, $c_{x_0} \bullet \alpha \sim \alpha$ e portanto $[c_{x_0} \bullet \alpha] = [\alpha]$, ou seja, equivalentemente $[c_{x_0}] \cdot [\alpha] = [\alpha]$.

Segue assim, dos resultados anteriores demonstrados em 1. e 2.:

$$[\alpha] \cdot [c_{x_0}] = [\alpha] = [c_{x_0}] \cdot [\alpha], \quad \forall [\alpha] \in \pi_1(X; x_0).$$

iii) Elemento Inverso: Dado $\alpha \in \Omega(X; x_0)$, seja $\bar{\alpha} : I = [0, 1] \rightarrow X$ o laço inverso de α , definido por $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$. Então verifica-se o seguinte:

$$[\alpha] \cdot [\bar{\alpha}] = [c_{x_0}] = [\bar{\alpha}] \cdot [\alpha]$$

Para tanto, basta considerarmos as seguintes homotopias:

$$K(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t); & \text{se } t \in [0, \frac{s}{2}], \\ \alpha(s); & \text{se } t \in [\frac{s}{2}, \frac{2-s}{2}], \\ \bar{\alpha}(2t-1); & \text{se } t \in [\frac{2-s}{2}, 1]. \end{cases}$$

e

$$L(t, s) = \begin{cases} \bar{\alpha}(2t); & \text{se } t \in [0, \frac{s}{2}], \\ \bar{\alpha}(s); & \text{se } t \in [\frac{s}{2}, \frac{2-s}{2}], \\ \alpha(2t-1); & \text{se } t \in [\frac{2-s}{2}, 1]. \end{cases}$$

Portanto, diante das demonstrações feitas em **i)**, **ii)** e **iii)**, segue que a operação “.” que definimos em $\pi_1(X, x_0)$ é associativa, admite elemento neutro e todo elemento é invertível. Logo $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ é um grupo. $\square$

A próxima abordagem que faremos com relação ao Grupo Fundamental do Espaço Topológico X é um questionamento natural que se faz com relação a escolha do ponto base $x_0 \in X$, no seguinte sentido: se optarmos por um outro ponto base $x_1 \in X$ distinto de x_0 , qual será a relação existente entre os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$?

Esse questionamento é muito importante, pois mais adiante veremos que para o espaço $X = S^1 \cup A$ onde S^1 é o círculo de raio r e A é um segmento de reta disjunto de S^1 , mostraremos que para um ponto $x_0 \in S^1$, o seu respectivo grupo fundamental será $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}$, mas por outro lado se tomarmos um outro ponto $x_1 \in A$ tem-se que $\pi_1(X, x_1) = \{0\}$.

A resposta desta relação entre os grupos fundamentais considerados com diferentes pontos base está fortemente relacionada através do conceito de conexidade por caminhos, vista em 2.3.

Proposição 3.2. *Sejam X um espaço topológico conexo por caminhos e x_0 e x_1 pontos quaisquer distintos de X . Então os respectivos grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.*

Demonstração. Sendo X um espaço conexo por caminhos, existe um caminho

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

ligando x_0 a x_1 .

Em seguida, definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : \pi_1(X; x_0) &\longrightarrow \pi_1(X; x_1) \\ [\alpha] &\longmapsto [\bar{\gamma} \bullet \alpha \bullet \gamma] \end{aligned}$$

onde $\bar{\gamma}$ é o caminho inverso de γ .

- A aplicação $\hat{\gamma}$ está bem definida. Para isto, devemos mostrar que se as classes, $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X; x_0)$ são tais que $[\alpha] = [\beta]$ então $\hat{\gamma}([\alpha]) = \hat{\gamma}([\beta])$.

De fato. Pelo Lema 3.2 temos o resultado de que se $[\alpha_1], [\alpha_2], [\beta_1], [\beta_2] \in \pi_1(X; x_0)$ são tais que $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ e $[\beta_1] = [\beta_2]$ então $[\alpha_1 \bullet \beta_1] = [\alpha_2 \bullet \beta_2]$. Ou seja, se $\alpha_1 \sim \alpha_2$ e $\beta_1 \sim \beta_2$ então existe alguma homotopia tal que $\alpha_1 \bullet \beta_1 \sim \alpha_2 \bullet \beta_2$.

Também é fato que dado o caminho γ , existem homotopias de tal modo que $\gamma \sim \gamma$ e $\bar{\gamma} \sim \bar{\gamma}$, visto que a relação de caminhos equivalentes também é uma relação de equivalência e portanto vale a propriedade reflexiva.

Nestas condições, temos:

$$\alpha \sim \beta \text{ e } \gamma \sim \gamma \Rightarrow \alpha \bullet \gamma \sim \beta \bullet \gamma.$$

E assim,

$$\bar{\gamma} \sim \bar{\gamma} \text{ e } \alpha \bullet \gamma \sim \beta \bullet \gamma \Rightarrow \bar{\gamma} \bullet \alpha \bullet \gamma \sim \bar{\gamma} \bullet \beta \bullet \gamma.$$

Portanto, segue que:

$$[\bar{\gamma} \bullet \alpha \bullet \gamma] = [\bar{\gamma} \bullet \beta \bullet \gamma] \Rightarrow \hat{\gamma}(\alpha) = \hat{\gamma}(\beta).$$

- A aplicação $\hat{\gamma}$ é um homomorfismo de grupos.

De fato, sejam as classes $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X; x_0)$. Temos que:

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}([\alpha] \cdot [\beta]) &= \hat{\gamma}([\alpha \bullet \beta]) \\
 &= [\bar{\gamma} \bullet (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma] \\
 &= [\bar{\gamma} \bullet (\alpha \bullet c_{x_0} \bullet \beta) \bullet \gamma] \\
 &= [\bar{\gamma} \bullet (\alpha \bullet \gamma \bullet \bar{\gamma} \bullet \beta) \bullet \gamma] \\
 &= [(\bar{\gamma} \bullet \alpha \bullet \gamma) \bullet (\bar{\gamma} \bullet \beta \bullet \gamma)] \\
 &= [\bar{\gamma} \bullet \alpha \bullet \gamma] \cdot [\bar{\gamma} \bullet \beta \bullet \gamma] \\
 &= \hat{\gamma}([\alpha]) \cdot \hat{\gamma}([\beta])
 \end{aligned}$$

- A aplicação $\hat{\gamma}$ é um isomorfismo de grupos.

Vamos mostrar que

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}^{-1} : \pi_1(X; x_1) &\longrightarrow \pi_1(X; x_0) \\
 [\alpha] &\longmapsto [\gamma \bullet \alpha \bullet \bar{\gamma}]
 \end{aligned}$$

é a aplicação inversa de $\hat{\gamma}$.

De fato, seja $[\alpha] \in \pi_1(X; x_1)$ qualquer,

$$\begin{aligned}
 (\hat{\gamma} \circ \hat{\gamma}^{-1})([\alpha]) &= \hat{\gamma}(\hat{\gamma}^{-1}([\alpha])) = \hat{\gamma}([\gamma \bullet \alpha \bullet \bar{\gamma}]) \\
 &= [\bar{\gamma} \bullet (\gamma \bullet \alpha \bullet \bar{\gamma}) \bullet \gamma] \\
 &= [(\bar{\gamma} \bullet \gamma) \bullet \alpha \bullet (\bar{\gamma} \bullet \gamma)] \\
 &= [c_{x_1} \bullet \alpha \bullet c_{x_1}] \\
 &= [\alpha] \\
 &= Id_{\pi_1(X; x_1)}([\alpha])
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\hat{\gamma} \circ \hat{\gamma}^{-1}) = Id_{\pi_1(X; x_1)}.$$

Por outro lado, seja $[\beta] \in \pi_1(X; x_0)$. Daí temos que:

$$\begin{aligned}
 (\hat{\gamma}^{-1} \circ \hat{\gamma})([\beta]) &= \hat{\gamma}^{-1}(\hat{\gamma}([\beta])) = \hat{\gamma}^{-1}([\bar{\gamma} \bullet \beta \bullet \gamma]) \\
 &= [\gamma \bullet (\bar{\gamma} \bullet \beta \bullet \gamma) \bullet \bar{\gamma}] \\
 &= [(\gamma \bullet \bar{\gamma}) \bullet \beta \bullet (\gamma \bullet \bar{\gamma})] \\
 &= [c_{x_0} \bullet \beta \bullet c_{x_0}] \\
 &= [\beta] \\
 &= Id_{\pi_1(X; x_0)}([\beta])
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\hat{\gamma}^{-1} \circ \hat{\gamma}) = Id_{\pi_1(X; x_0)}.$$

Nestas condições, $\hat{\gamma}$ é um isomorfismo entre os grupos $\pi_1(X; x_0)$ e $\pi_1(X; x_1)$. $\square$

A proposição anteriormente demonstrada nos permite concluir que dado um espaço topológico X conexo por caminhos tem-se que seu grupo fundamental independe da escolha do ponto base. Nestas condições, podemos omitir o ponto x_0 e simplesmente denotar $\pi_1(X; x_0)$ por $\pi_1(X)$, quando X é conexo por caminhos.

Nosso próximo objetivo é o de estabelecer uma importante e especial aplicação entre grupos fundamentais $\pi_1(X; x_0)$ e $\pi_1(Y; f(x_0))$ onde $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua entre os espaços topológicos X e Y . Para tanto temos que inicialmente verificar as próximas proposições 3.3 e 3.4 que configuram e garantem que tal aplicação é bem definida.

Proposição 3.3. *Sejam X e Y espaços topológicos quaisquer, $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e α um laço em $x_0 \in X$. Então, $f \circ \alpha$ é um laço em $f(x_0)$.*

Demonstração. De fato. Vejamos que

$$\begin{aligned} f \circ \alpha : [0, 1] &\longrightarrow Y \\ t &\longmapsto (f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

tal como definida é uma composição entre funções contínuas e portanto é também contínua, bem como admite as seguintes igualdades:

$$(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0) = f(\alpha(1)) = (f \circ \alpha)(1).$$

Logo, como $(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) = (f \circ \alpha)(1)$, segue que $f \circ \alpha$ é um laço de ponto base $f(x_0)$. $\square$

Proposição 3.4. *Sejam X e Y espaços topológicos quaisquer, $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e α, β laços de ponto base x_0 tais que $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta$ por alguma homotopia G . Então $f \circ \alpha \stackrel{H}{\sim} f \circ \beta$ via a homotopia $H : I \times I \rightarrow Y$ dada por $H(t, s) = (f \circ G)(t, s)$.*

Demonstração. Veja que,

- H é contínua, pois é uma composição das funções contínuas f e G .
- As seguintes igualdades são satisfeitas:

$$\begin{cases} H(t, 0) = (f \circ G)(t, 0) = f(G(t, 0)) = f(\alpha(t)) = (f \circ \alpha)(t) \\ H(t, 1) = (f \circ G)(t, 1) = f(G(t, 1)) = f(\beta(t)) = (f \circ \beta)(t) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} H(0, s) = (f \circ G)(0, s) = f(G(0, s)) = f(x_0) \\ H(1, s) = (f \circ G)(1, s) = f(G(1, s)) = f(x_0) \end{cases}$$

Segue portanto que H é uma homotopia tal que $f \circ \alpha \stackrel{H}{\sim} f \circ \beta$. $\square$

Definição 3.9. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua entre os espaços topológicos X e Y , $x_0 \in X$ e α um laço de ponto base em x_0 . Definimos $f_{\#}$ como sendo a induzida de f tal como a seguir:*

$$\begin{aligned} f_{\#} : \pi_1(X; x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y; f(x_0)) \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Proposição 3.5. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funções contínuas, onde X, Y e Z são espaços topológicos com $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$ e $z_0 = g(y_0) \in Z$. Então:*

1. *A função $f_{\#} : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(Y; y_0)$ é um homomorfismo de grupos.*
2. *A função $(g \circ f)_{\#} : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(Z; z_0)$ é tal que $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$.*
3. *Se $f : X \rightarrow X$ é a aplicação identidade, então a induzida*

$$f_{\#} : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(X; x_0)$$

é o homomorfismo identidade.

Demonstração. 1. Sejam $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X; x_0)$. Temos:

$$f_{\#}([\alpha] \cdot [\beta]) = f_{\#}([\alpha \bullet \beta]) = [f \circ (\alpha \bullet \beta)]$$

e

$$f_{\#}([\alpha]) \cdot f_{\#}([\beta]) = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = [(f \circ \alpha) \bullet (f \circ \beta)].$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} f \circ (\alpha \bullet \beta)(t) &= f((\alpha \bullet \beta)(t)) = \begin{cases} f(\alpha(2t)); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ f(\beta(2t - 1)); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= \begin{cases} (f \circ \alpha)(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (f \circ \beta)(2t - 1); & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ &= ((f \circ \alpha) \bullet (f \circ \beta))(t). \end{aligned}$$

Assim sendo, temos:

$$f_{\#}([\alpha] \cdot [\beta]) = [f \circ (\alpha \bullet \beta)] = [(f \circ \alpha) \bullet (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = f_{\#}([\alpha]) \cdot f_{\#}([\beta])$$

e portanto, a aplicação $f_{\#}$ é um homomorfismo.

2. Considerando as funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, logo podemos tomar suas respectivas induzidas $f_{\#}$ e $g_{\#}$,

$$\begin{aligned} f_{\#} : \pi_1(X; x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y; y_0 = f(x_0)) \\ [\alpha] &\longmapsto f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_{\#} : \pi_1(Y; y_0) &\longrightarrow \pi_1(Z; z_0) \\ [\beta] &\longmapsto g_{\#}([\beta]) = [g \circ \beta]. \end{aligned}$$

Nestas condições, temos

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{\#} : \pi_1(X; x_0) &\longrightarrow \pi_1(Z; z_0) \\ [\alpha] &\longmapsto (g \circ f)_{\#}([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha]. \end{aligned}$$

E daí tem-se que:

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{\#}([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] \\ &= [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &= g_{\#}([f \circ \alpha]) \\ &= g_{\#}(f_{\#}([\alpha])) \\ &= (g_{\#} \circ f_{\#})([\alpha]) \end{aligned}$$

3. Como f é aplicação identidade, logo é uma função contínua e passemos a denotá-la por $f = Id_X$. Então $f_{\#}$ é um homomorfismo. Basta agora provarmos que $f_{\#}$ é uma função identidade em $\pi_1(X; x_0)$. De fato, temos que dado $[\alpha] \in \pi_1(X; x_0)$, então:

$$f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [Id_X \circ \alpha] = [\alpha] = Id_{\pi_1(X; x_0)}([\alpha]).$$

Portanto,

$$f_{\#} = Id_{\pi_1(X; x_0)}.$$

□

Finalmente, para finalizarmos esta seção, será apresentado o principal resultado que caracteriza a importância da Topologia Algébrica, por se tratar de uma técnica que soluciona a uma das grandes questões da Topologia Geral que é a de respondermos se dois espaços topológicos são homeomorfos.

Teorema 3.2. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Então*

$$f_{\#} : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(Y; f(x_0))$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Observe que como f é um homeomorfismo, valem as seguintes relações

$$f \circ f^{-1} = Id_Y$$

e

$$f^{-1} \circ f = Id_X$$

onde f^{-1} é a inversa de f .

Também já sabemos que:

$$(f \circ f^{-1})_{\#} = f_{\#} \circ (f^{-1})_{\#} = Id_{\pi_1(Y; f(x_0))}$$

e

$$(f^{-1} \circ f)_{\#} = (f^{-1})_{\#} \circ f_{\#} = Id_{\pi_1(X; x_0)}.$$

Portanto $(f^{-1})_{\#}$ é a inversa de $f_{\#}$, ou seja, $(f_{\#})^{-1} = (f^{-1})_{\#}$.

Segue assim, $f_{\#}$ é um isomorfismo. □

Basicamente este último teorema nos fornece que se dois espaços são homeomorfos, então necessariamente seus respectivos grupos fundamentais de pontos base x_0 e $f(x_0)$ são isomorfos. Ou seja, este teorema nos garante que o grupo fundamental é de fato um invariante topológico. Por outro lado, pela contra-positiva, se soubermos que os grupos fundamentais não são isomorfos podemos afirmar que os espaços topológicos não são homeomorfos.

Para encerrar este capítulo apresentamos um resultado bastante útil sobre o grupo fundamental de produto cartesiano de espaços topológicos.

Teorema 3.3. *Sejam X e Y espaços conexos por caminhos. Então $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração. Sejam $p : X \times Y \rightarrow X$ e $q : X \times Y \rightarrow Y$ as respectivas projeções de X e Y . Se usarmos os pontos bases indicados no teorema, podemos considerar os homomorfismos induzidos

$$p_{\#} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad \text{e} \quad q_{\#} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

Em seguida, podemos definir o homomorfismo

$$\Psi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

por

$$\Psi([\alpha]) := (p_{\#}([\alpha]), q_{\#}([\alpha])) = ([p \circ \alpha], [q \circ \alpha]), \quad \forall [\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$

Vamos caracterizar a aplicação Ψ .

1. Ψ é sobrejetiva. De fato, seja $\lambda : I \rightarrow X$ e $\gamma : I \rightarrow Y$ laços de ponto base x_0 e y_0 respectivamente. Queremos mostrar que o elemento $([\lambda], [\gamma])$ está na imagem de Ψ .

Defina $\alpha : I \rightarrow X \times Y$ pela equação $\alpha(t) = (\lambda(t), \gamma(t))$.

Então α é um laço em $X \times Y$ de ponto base (x_0, y_0) e $\Psi([\alpha]) = ([p \circ \alpha], [q \circ \alpha])$.

Por outro lado,

$$p \circ \alpha(t) = p(\lambda(t), \gamma(t)) = \lambda(t) \quad \text{e} \quad q \circ \alpha(t) = q(\lambda(t), \gamma(t)) = \gamma(t), \quad \forall t \in I.$$

Logo,

$$[p \circ \alpha] = [\lambda] \quad \text{e} \quad [q \circ \alpha] = [\gamma].$$

Portanto, $\Psi([\alpha]) = ([\lambda], [\gamma])$, como esperávamos.

2. Ψ é injetiva.

De fato, suponha que dadas as classes $[\alpha]$ e $[\beta] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ tem-se que $\Psi([\alpha]) = \Psi([\beta])$.

Isto significa que

$$(p_{\#}([\alpha]), q_{\#}([\alpha])) = (p_{\#}([\beta]), q_{\#}([\beta])).$$

Ou seja,

$$([p \circ \alpha], [q \circ \alpha]) = ([p \circ \beta], [q \circ \beta])$$

Noutras palavras

$$\begin{cases} p \circ \alpha \stackrel{F_1}{\sim} p \circ \beta \\ \text{e} \\ q \circ \alpha \stackrel{F_2}{\sim} q \circ \beta \end{cases}$$

Assim, se considerarmos as homotopias $F_1 : I \times I \rightarrow X$ e $F_2 : I \times I \rightarrow Y$ que garantem as equivalências acima, então $F : I \times I \rightarrow X \times Y$ dada por

$$F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$$

nos mostra que $\alpha \sim \beta$ e que portanto $[\alpha] = [\beta]$.

□

3.2 Cálculos de $\pi_1(\mathbb{R})$ e $\pi_1(S^1)$ e aplicações

A determinação dos respectivos Grupos Fundamentais dos espaços topológicos $\mathbb{R}$ e S^1 é de extrema importância para o deslinde de nosso estudo.

3.2.1 Cálculo de $\pi_1(\mathbb{R})$

Nosso primeiro cálculo é bastante simples e por isso, neste sentido, tal grupo fundamental é também chamado de trivial. Vamos considerar a origem $x_0 = 0$ como um conveniente ponto base para a reta real $\mathbb{R}$, que é conexa por caminhos e que portanto, pela proposição 3.2, o grupo fundamental que vamos calcular, independe da escolha do ponto base.

Teorema 3.4. $\pi_1(\mathbb{R}) \simeq \{0\}$.

Demonstração. Defina $k : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$k(t, s) = (1 - s) \cdot t.$$

Então k é uma homotopia entre a identidade $Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i(t) = t$ e a aplicação constante $q(t) = 0$.

De fato, k é contínua, e

$$\begin{cases} k(t, 0) = (1 - 0) \cdot t = t = i(t) \\ k(t, 1) = (1 - 1) \cdot t = 0 = q(t) \end{cases}$$

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ um laço de ponto base $x_0 = 0$. Definimos

$$h(t, s) = k(\alpha(t), s) = (1 - s) \cdot \alpha(t).$$

Temos que h é uma homotopia tal que α é equivalente a $c_{x_0} = c_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ em que para todo $t \in I$, $c_{x_0}(t) = c_0(t) = 0$.

De fato, h é contínua pois é composição de aplicações contínuas e além disso, tem-se

$$\begin{cases} h(t, 0) = k(\alpha(t), 0) = (1 - 0) \cdot \alpha(t) = \alpha(t) \\ h(t, 1) = k(\alpha(t), 1) = 0 = c_{x_0}(t) \end{cases}$$

E também,

$$\begin{cases} h(0, s) = k(\alpha(0), s) = k(x_0, s) = (1 - s) \cdot x_0 = (1 - s) \cdot 0 = 0 = x_0 \\ h(1, s) = k(\alpha(1), s) = k(x_0, s) = (1 - s) \cdot x_0 = 0 = x_0 \end{cases}$$

Assim, pela aplicação h , temos que $\alpha \sim c_{x_0}$, e portanto $[\alpha] = [c_{x_0}] = [0]$.

Portanto segue o resultado, $\pi_1(\mathbb{R}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}, x_0) = \{[0]\}$. □

Observação 3.5. Denotamos $\pi_1(\mathbb{R}) \simeq \{0\}$ em que neste contexto, o símbolo “0” denota a classe nula $[0]$.

3.2.2 Cálculo de $\pi_1(S^1)$

Nosso objetivo nessa seção é de apresentar um Grupo Fundamental não-trivial, a saber o grupo $\pi_1(S^1)$. Contudo, primeiramente é necessário tratar de noções elementares sobre Espaços de Recobrimento, ferramenta esta muito útil para o cálculo de grupos fundamentais.

Definição 3.10. *Sejam E, B espaços topológicos e $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetiva. Dizemos que um subconjunto aberto U de B é uniformemente coberto por p se a imagem inversa $p^{-1}(U)$ pode ser escrita como reunião de subconjuntos abertos disjuntos V_α em E tal que para cada α , a restrição de p a V_α ,*

$$p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$$

é um homeomorfismo de V_α em U . A coleção $\{V_\alpha\}$ é chamada de partição de $p^{-1}(U)$ em fatias.

Se U é um conjunto aberto que é uniformemente coberto por p , podemos imaginar o conjunto $p^{-1}(U)$ como uma “pilha de panquecas”, cada uma com mesmo tamanho e forma de U , flutuando acima de U ; a aplicação p as “esmaga” todos para baixo em U .

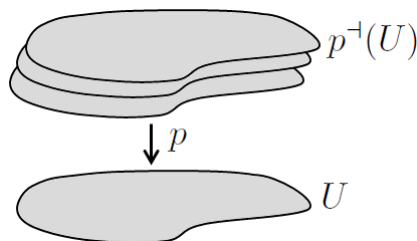


Figura 3.7: A aplicação de p e o conjunto $p^{-1}(U)$, a “pilha de panquecas”.

Definição 3.11. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se cada ponto $b \in B$ admite uma vizinhança U uniformemente coberta por p , então p é chamada aplicação de recobrimento e E é chamado Espaço de Recobrimento de B .*

Notemos que se $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação recobrimento, então para cada $b \in B$, o subconjunto $p^{-1}(b)$ de E necessariamente possui a topologia discreta. Cada fatia V_α é aberto em E e intercepta o conjunto $p^{-1}(b)$ em um único ponto; portanto este ponto é aberto no subespaço topológico $p^{-1}(b)$.

Exemplo 3.1. *Seja X um espaço qualquer. Então a aplicação identidade $i : X \rightarrow X$ é uma aplicação recobrimento. Mais geralmente, tomando $E = X \times \{1, \dots, n\}$ consistindo de n cópias disjuntas de X , a aplicação $p : E \rightarrow X$ dada por $p(x, j) = x$, para todo j , é também uma aplicação recobrimento. Neste caso, podemos imaginar todo o espaço E como uma “pilha de panquecas” sobre X .*

Para eliminar recobrimentos triviais de variedade “pilha de panquecas”, muitas vezes requer que o espaço E seja conexo. Um exemplo útil de um recobrimento deste tipo é dado no seguinte teorema:

Teorema 3.5. A aplicação $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada pela equação

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

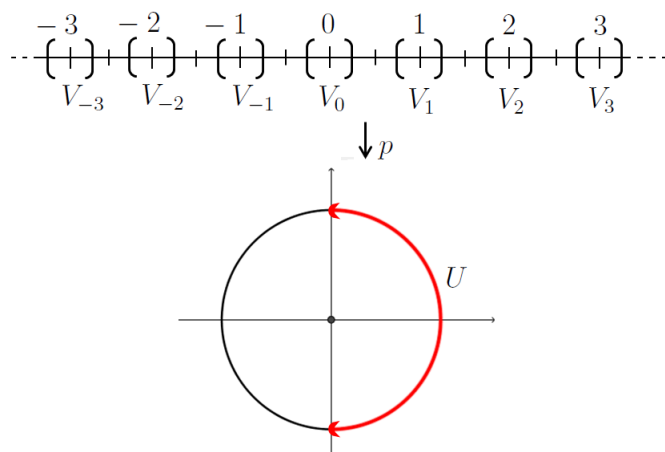
é uma aplicação recobrimento.

Podemos imaginar a aplicação p como sendo uma função que “enrola” a reta real $\mathbb{R}$ em torno do círculo S^1 , e que no processo de aplicação cada intervalo $[n, n+1]$ é enviado para S^1 .

Demonstração. O fato de que p é uma aplicação recobrimento vem de propriedades elementares das funções seno e cosseno. Considere, inicialmente, o subconjunto U de S^1 formado de pontos que possuem a primeira coordenada positiva. O subconjunto $p^{-1}(U)$ consiste de pontos de x no qual $\cos(2\pi x)$ seja positivo, isto é, a reunião de intervalos

$$V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$$

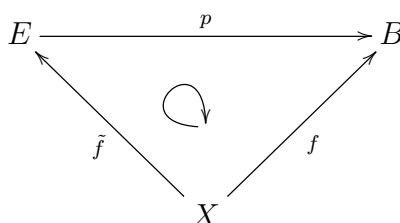
para todo $n \in \mathbb{Z}$.



Agora, restringindo a qualquer intervalo fechado $\overline{V_n}$, a aplicação p é injetiva, pois $\sin(2\pi x)$ é estritamente monótona neste intervalo. Além disso, p carrega $\overline{V_n}$ sobrejetivamente para $\overline{U}$ e V_n para U pelo Teorema do Valor Intermediário. Uma vez que $\overline{V_n}$ é compacto, a restrição $p|_{\overline{V_n}}$ é um homeomorfismo de $\overline{V_n}$ com $\overline{U}$. Em particular, $p|_{V_n}$ é um homeomorfismo de V_n com U .

Argumentos similares podem ser aplicados às intersecções de S^1 com os semi-planos inferior e superior, e com o semi-plano esquerdo. Estes conjuntos abertos recobrem S^1 e cada um deles é uniformemente coberto por p . Consequentemente, $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é uma aplicação recobrimento. $\square$

Definição 3.12. Seja $p : E \rightarrow B$ uma função entre os espaços topológicos E e B . Se $f : X \rightarrow B$ é uma função contínua, um levantamento de f é uma aplicação $\tilde{f} : X \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.



A existência de levantamentos quando p é uma aplicação recobrimento é uma ferramenta importante nos estudos de espaços de recobrimento e do grupo fundamental. Vamos mostrar que para um espaço de recobrimento, caminhos possuem levantamentos. E assim, podemos mostrar que caminhos homotópicos também podem ser levantados.

Exemplo 3.2. Considere a aplicação $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada pela equação

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

- O caminho $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ iniciando em $b_0 = (1, 0)$ dado por

$$f(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$$

é levantado pelo caminho $\tilde{f}(t) = \frac{t}{2}$ iniciando em 0 e terminando em $\frac{1}{2}$.

- O caminho

$$g(t) = (\cos(\pi t), -\sin(\pi t))$$

é levantado pelo caminho $\tilde{g}(s) = -\frac{s}{2}$ iniciando em 0 e terminando em $-\frac{1}{2}$.

- O caminho

$$h(t) = (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t))$$

é levantado pelo caminho $\tilde{h}(t) = 2t$ iniciando em 0 e terminando em 2. Intuitivamente, h “enrola” o intervalo $[0, 1]$ em torno do círculo 2 vezes.

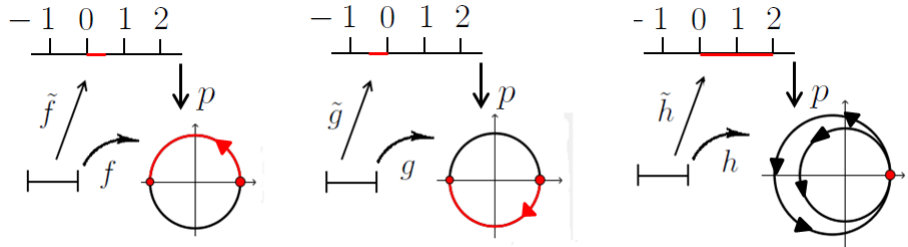


Figura 3.8: Exemplo de levantamento de caminho.

Lema 3.3. Seja $p : E \rightarrow B$ uma função recobrimento, com $p(e_0) = b_0$. Qualquer caminho $f : [0, 1] \rightarrow B$ iniciando em b_0 possui um único levantamento $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow E$ iniciando em e_0 .

Demonstração. Vamos demonstrar por etapas. Primeiro vamos verificar a existência do levantamento $\tilde{f}$ e no segundo passo veremos a unicidade do mesmo.

- Existência: Cobrimos B por conjuntos abertos U , cada qual uniformemente coberto por p . Tomemos uma subdivisão de $[0, 1]$, digamos $t_0, t_1, \dots, t_n$ tais que para cada i , o conjunto $f([t_i, t_{i+1}])$ encontra-se em tal aberto U , o que é possível pelo Lema do Número de Lebesgue. Definiremos o levantamento $\tilde{f}$ passo a passo.

Primeiramente, defina $\tilde{f}(0) = e_0$. E então, supondo $\tilde{f}(t)$ definido para $0 \leq t \leq t_i$, definimos $\tilde{f}$ em $[t_i, t_{i+1}]$ de modo que, o conjunto $f([t_i, t_{i+1}])$ encontra-se em algum aberto U que é uniformemente coberto por p .

Tomemos $\{V_\alpha\}$ como sendo a partição de $p^{-1}(U)$ em fatias; cada conjunto V_α é aplicado homeomorficamente em U por p . Agora, $\tilde{f}(t_i)$ encontra-se em um desses conjuntos, digamos que seja em V_0 . Defina $f(t)$ para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ pela equação

$$\tilde{f}(t) = (p|_{V_0})^{-1}(f(t)).$$

Pelo fato de $p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ ser um homeomorfismo, $\tilde{f}$ será contínua em $[t_i, t_{i+1}]$.

Prosseguindo assim, definimos $\tilde{f}$ para todo ponto de $[0, 1]$. Também temos que a continuidade de $\tilde{f}$ segue do Lema da Colagem 2.4, e o fato de que $p \circ \tilde{f} = f$ é imediato da definição de $\tilde{f}$.

- **Unicidade:** A unicidade de $\tilde{f}$ é também provada passo a passo. Seja $\hat{f}$ um outro levantamento de f iniciando em e_0 . Então

$$\hat{f}(0) = e_0 = \tilde{f}(0).$$

Suponha que $\hat{f}(t) = \tilde{f}(t)$, para todo t tal que $0 \leq t \leq t_i$. Considere V_0 tal como na demonstração acima sobre a existência do levantamento. Então para $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\tilde{f}(t)$ está definido como $(p|_{V_0})^{-1}(f(t))$.

Uma vez que $\hat{f}$ é um levantamento de f , então $\hat{f}$ deve aplicar o intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ no conjunto $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$.

As fatias V_α são abertas e disjuntas; pelo fato do conjunto $\hat{f}([t_i, t_{i+1}])$ ser conexo, este deve estar inteiramente em um dos conjuntos V_α . Pelo fato de $\hat{f}(t_i) = \tilde{f}(t_i)$, o qual está em V_0 , $\hat{f}$ deve aplicar todo o intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ no conjunto V_0 . Assim, para t em $[t_i, t_{i+1}]$, $\hat{f}(t)$ deve ser igual a algum ponto y de V_0 situado em $p^{-1}(f(t))$. Mas só há um único ponto y , nomeado $(p|_{V_0})^{-1}(f(t))$. Consequentemente,

$$\hat{f}(t) = \tilde{f}(t)$$

para $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

□

Lema 3.4. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma função recobrimento, com $p(e_0) = b_0$. Considere a aplicação $F : I \times I \rightarrow B$ contínua com $F(0, 0) = b_0$. Nestas condições, existe um levantamento de F para uma aplicação contínua*

$$\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$$

tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Ainda mais, se F é uma homotopia, então $\tilde{F}$ é uma homotopia e o levantamento $\tilde{F}$ de F é único.

Demonstração. A demonstração segue o mesmo procedimento tomado no Lema anterior, onde verificaremos a existência e a unicidade do levantamento $\tilde{F}$.

- Existência de $\tilde{F}$: Dada a aplicação F , primeiramente definimos $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Em seguida, usamos o procedimento do lema anterior para estender $\tilde{F}$ à borda esquerda $0 \times I$ e a borda inferior $I \times 0$ de $I \times I$. Então estendemos $\tilde{F}$ a todos os pontos de $I \times I$, como segue:

Escolhemos subdivisões

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

$$s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m$$

de I suficientemente fino para que cada retângulo

$$I_i \times J_j = [t_{j-1}, t_j] \times [s_{i-1}, s_i]$$

seja aplicado por F em um conjunto aberto de B que seja uniformemente coberto por p , o que é possível usando o Lema do Número de Lebesgue. Vamos definir o levantamento $\tilde{F}$ passo a passo, começando com o retângulo $I_1 \times J_1$, continuando com outros retângulos $I_i \times J_1$ na linha inferior, depois com os retângulos $I_i \times J_2$ na linha seguinte, e assim por diante.

Em geral, dado i_0 e j_0 , assume que $\tilde{F}$ é definido no conjunto A o qual é a união de $0 \times I$ e $I \times 0$ e todos retângulos anteriores a $I_{i_0} \times J_{j_0}$ (aqueles retângulos $I_i \times J_j$ tal que $j < j_0$ e aquele que $j = j_0$ e $i < i_0$). Suponha também que $\tilde{F}$ é um levantamento de $F|_A$. Defina $\tilde{F}$ em $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Escolha um aberto U de B que é uniformemente coberto por p e contem o conjunto $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$.

Seja $\{V_\alpha\}$ uma partição de $p^{-1}(U)$ em fatias; cada conjunto V_α é aplicado homeomorficamente em U por p . Agora, $\tilde{F}$ já está definido no conjunto

$$C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0}).$$

Este conjunto é a união das bordas esquerda e inferior do retângulo $I_{i_0} \times J_{j_0}$, que deste modo é então um conexo. Portanto $\tilde{F}(C)$ é conexo e deve estar inteiramente contido em um dos conjuntos V_α . Suponha que isto ocorra em V_0 .

Seja $p_0 : V_0 \rightarrow U$ a restrição de p a V_0 . Uma vez que $\tilde{F}$ é um levantamento de $F|_A$, sabemos que para $x \in C$,

$$p_0(\tilde{F}(x)) = p(\tilde{F}(x)) = F(x)$$

de modo que tenhamos $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$. Assim, estendemos F definindo como sendo

$$\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x)),$$

para $x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$. A aplicação estendida será contínua pelo Lema da Colagem e dando continuidade ao procedimento, fica definido $\tilde{F}$ em todo $I^2 = I \times I$.

- A unicidade de $\tilde{F}$: Para checar a unicidade, note que a cada passo da construção de $\tilde{F}$, como estendemos $\tilde{F}$ primeiramente para as bordas esquerda e inferior de I^2 e depois para os retângulos $I_i \times J_j$, um por um, há apenas uma maneira de estender $\tilde{F}$ continuamente. Assim, uma vez que o valor de $\tilde{F}$ em $(0,0)$ está especificado, $\tilde{F}$ está completamente determinado.

- $\tilde{F}$ é homotopia quando F também o for: Suponha que F seja uma homotopia. Queremos mostrar que $\tilde{F}$ é uma homotopia.

A aplicação F carrega toda a margem esquerda $0 \times I$ de I^2 em um único ponto b_0 de B . Como $\tilde{F}$ é um levantamento de F , este carrega essa borda para o conjunto $p^{-1}(b_0)$. Mas este conjunto tem a topologia discreta, considerado como subespaço de E . Uma vez que $0 \times I$ é conexo e $\tilde{F}$ é contínuo, então $\tilde{F}(0 \times I)$ é conexo e deve ser igual a um conjunto de um único ponto. Similarmente, $\tilde{F}(I \times I)$ deve ser um conjunto unitário. Assim, $\tilde{F}$ é uma homotopia.

□

O próximo resultado estabelece a relação existente entre os espaços de recobrimento e o grupo fundamental.

Teorema 3.6. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma função recobrimento com $p(e_0) = b_0$. Considere f e g como sendo ambos caminhos em B de b_0 até b_1 ; em seguida, consideremos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ os respectivos levantamentos de caminhos em E os quais iniciam em e_0 . Então, se f e g são caminhos homotópicos, então $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ terminam em um mesmo ponto de E e são caminhos homotópicos.*

Demonstração. Seja $F : I \times I \rightarrow B$ a homotopia entre f e g que sabemos por hipótese que são caminhos homotópicos. Então $F(0, 0) = b_0$.

Seja $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$ como sendo o respectivo levantamento de F em E tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Sabe-se pelo Lema anterior que $\tilde{F}$ é uma homotopia de modo que $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ e $\tilde{F}(1 \times I)$ é um conjunto unitário $\{e_1\}$.

Temos que a restrição $\tilde{F}|_{I \times 0}$ de $\tilde{F}$ para a borda inferior de $I \times I$ é um caminho em E iniciando em e_0 que é levantamento de $F|_{I \times 0}$. Pela unicidade de levantamento de caminhos, temos que

$$\tilde{F}(t, 0) = \tilde{f}(t).$$

Similarmente, $\tilde{F}|_{I \times 1}$ é um caminho em E que é um levantamento de $F|_{I \times 1}$ e inicia em e_0 pois $F(0 \times I) = \{e_0\}$. Daí, pela unicidade de levantamento de caminhos,

$$\tilde{F}(t, 1) = \tilde{g}(t).$$

Nestas condições, ambos levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ terminam em e_1 e $\tilde{F}$ é uma homotopia entre estes. □

Vamos agora justamente aplicar este teorema para o caso do círculo unitário S^1 .

Teorema 3.7. *O grupo fundamental do círculo S^1 é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Noutras palavras, $\pi_1(S^1)$ é um grupo cíclico infinito.*

Demonstração. O objetivo é construir um isomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi : \pi_1(S^1; b_0) &\longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ [\alpha] &\longmapsto \Phi([\alpha]) \end{aligned}$$

em que $b_0 = (1, 0) \in S^1$.

Vejamos como construir $\Phi([\alpha])$, onde α é um laço de ponto base em b_0 .

Primeiramente, considere a aplicação de recobrimento para S^1 , $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada pela equação

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

Temos que se α é um laço em S^1 de ponto base b_0 , então $\tilde{\alpha}$ é o respectivo levantamento de α para um caminho sobre $\mathbb{R}$ iniciando em $e_0 = 0$. Note que isto é possível pelo Lema 3.3. Assim, temos então as aplicações:

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1, \quad \tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

em que α é um laço, $\tilde{\alpha}$ é o levantamento de α e p é aplicação recobrimento, e também,

$$p \circ \tilde{\alpha} = \alpha.$$

Note que,

$$p(e_0) = p(0) = (\cos(0), \sin(0)) = (1, 0) = b_0 \quad \text{e} \quad p(1) = (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) = b_0.$$

O ponto $\tilde{\alpha}(1)$ deve ser um ponto do conjunto $p^{-1}(b_0)$, ou seja, $\tilde{\alpha}(1)$ deve ser um inteiro n , pois:

$$\begin{aligned} p^{-1}(b_0) &= \{x \in \mathbb{R}; \quad p(x) = b_0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; \quad \cos(2\pi x) = 1 \quad \text{e} \quad \sin(2\pi x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Nestas condições, como $\tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$, denotemos $\tilde{\alpha}(1) = n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Convém observarmos que se $[\alpha] = [\beta]$, isto é, $\alpha \sim \beta$, então pelo Teorema 3.6 tem-se que $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$, ou seja, $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{\beta}]$ e assim $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

Portanto, se definirmos

$$\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1),$$

então Φ é uma aplicação bem definida, tendo em vista que ao considerarmos as classes $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1; b_0)$ tais que $[\alpha] = [\beta]$, então pelo Teorema 3.6 segue que

$$\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \Phi([\beta]).$$

Afirmção: A aplicação Φ é um isomorfismo de grupos.

- Φ é sobrejetiva.

Seja $n \in \mathbb{Z}$ qualquer. Como $\mathbb{Z} = p^{-1}(b_0)$, então $n \in p^{-1}(b_0)$, isto é, $p(n) = b_0$.

Sabemos que $\mathbb{R}$ é conexo por caminhos, logo podemos escolher um caminho

$$\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

entre 0 e n tal que $\tilde{\alpha}(0) = 0$ e $\tilde{\alpha}(1) = n$.

Defina

$$\alpha = p \circ \tilde{\alpha}.$$

Então α é um laço em S^1 de ponto base b_0 , e consequentemente, pela unicidade de levantamento garantida pelo Lema 3.3, segue que $\tilde{\alpha}$ é o levantamento de α .

Portanto, por definição,

$$\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = n.$$

- Φ é Injetiva.

Suponha que as classes $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1; b_0)$ são tais que $\Phi([\alpha]) = \Phi([\beta]) = n$. Devemos mostrar que $[\alpha] = [\beta]$.

Sejam $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ os respectivos levantamentos de α e β tais que

$$\tilde{\alpha}(1) = \Phi([\alpha]) = \Phi([\beta]) = \tilde{\beta}(1).$$

Denotemos, $\tilde{\alpha}(1) = n = \tilde{\beta}(1)$.

Como $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são caminhos no conjunto convexo $\mathbb{R}$ ambos começando em 0 e terminando em n , segue que

$$\begin{aligned} \tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, s) &\longmapsto \tilde{H}(t, s) = \tilde{\alpha}(t) \cdot (1 - s) + \tilde{\beta}(t) \cdot s \end{aligned}$$

é uma homotopia entre $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, tendo em vista que

$$\begin{cases} \tilde{H}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t) \cdot (1 - 0) + \tilde{\beta}(t) \cdot 0 = \tilde{\alpha}(t) \\ \tilde{H}(t, 1) = \tilde{\alpha}(t) \cdot (1 - 1) + \tilde{\beta}(t) \cdot 1 = \tilde{\beta}(t) \end{cases}$$

e $\tilde{H}$ é contínua pela conexidade de $\mathbb{R}$.

Consequentemente, a aplicação

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ (t, s) &\longmapsto (p \circ \tilde{H})(t, s) \end{aligned}$$

é uma homotopia entre α e β .

De fato, temos que H é contínua pois p e $\tilde{H}$ são contínuas e

$$\begin{cases} \tilde{H}(t, 0) = (p \circ \tilde{H})(t, 0) = p(\tilde{H}(t, 0)) = p(\tilde{\alpha}(t)) = (p \circ \tilde{\alpha})(t) = \alpha(t) \\ \tilde{H}(t, 1) = (p \circ \tilde{H})(t, 1) = p(\tilde{H}(t, 1)) = p(\tilde{\beta}(t)) = (p \circ \tilde{\beta})(t) = \beta(t) \\ \tilde{H}(0, s) = (p \circ \tilde{H})(0, s) = p(\tilde{\alpha}(0) \cdot (1 - s) + \tilde{\beta}(0) \cdot s) = p(0) = b_0 \\ \tilde{H}(1, s) = (p \circ \tilde{H})(1, s) = p(\tilde{\alpha}(1) \cdot (1 - s) + \tilde{\beta}(1) \cdot s) \\ \quad \quad \quad = p(n \cdot (1 - s) + n \cdot s) = p(n) = b_0 \end{cases}$$

Fica assim demonstrado que α e β são tais que $\alpha \stackrel{H}{\sim} \beta$ e portanto $[\alpha] = [\beta]$.

- Φ é um Homomorfismo de Grupos.

Vamos demonstrar que dadas quaisquer classes $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, b_0)$, tem-se que

$$\Phi([\alpha] \cdot [\beta]) = \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta]).$$

Sejam $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ os levantamentos de α e β caminhos em $\mathbb{R}$ iniciando em 0.

Consideremos que $\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = n$ e $\Phi([\beta]) = \tilde{\beta}(1) = m$.

Passemos a definir o caminho h em $\mathbb{R}$ pelas equações

$$h(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t); & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ n + \tilde{\beta}(2t - 1); & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Então h é um caminho em $\mathbb{R}$ iniciando em 0.

Vejam também que h é um levantamento para $\alpha \bullet \beta$. Com efeito, recordemos que

$$(\alpha \bullet \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t); & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1); & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Vamos então demonstrar que $p \circ h = \alpha \bullet \beta$.

Para isto, observemos que como as funções $\cos(2\pi x)$ e $\sin(2\pi x)$ são funções periódicas de período 2π , segue que $p(n + x) = p(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} p(n + x) &= (\cos(2\pi(n + x)), \sin(2\pi(n + x))) \\ &= (\cos(2\pi n + 2\pi x), \sin(2\pi n + 2\pi x)) \\ &= (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \\ &= p(x) \end{aligned}$$

Nestas condições, temos:

$$\begin{aligned} p \circ h(t) = p(h(t)) &= \begin{cases} p(\tilde{\alpha}(2t)); & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ p(n + \tilde{\beta}(2t - 1)); & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \\ &= \begin{cases} p(\tilde{\alpha}(2t)); & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ p(\tilde{\beta}(2t - 1)); & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t); & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1); & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \\ &= (\alpha \bullet \beta)(t) \end{aligned}$$

Portanto segue que

$$(p \circ h)(t) = (\alpha \bullet \beta)(t), \forall t \in [0, 1].$$

Também temos que $h(0) = \tilde{\alpha}(0) = 0$. Logo pela unicidade de levantamento, tal como no Lema 3.3, h é o levantamento de $\alpha \bullet \beta$ que inicia em 0. Consequentemente,

$$h(1) = \Phi([\alpha \bullet \beta]) = \Phi([\alpha] \cdot [\beta]).$$

Por outro lado, pela definição de h , temos que $h(1) = n + \tilde{\beta}(1)$. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} h(1) = \Phi([\alpha] \cdot [\beta]) &\implies \Phi([\alpha] \cdot [\beta]) = n + \tilde{\beta}(1) \\ &\implies \Phi([\alpha] \cdot [\beta]) = n + m \\ &\implies \Phi([\alpha] \cdot [\beta]) = \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta]) \end{aligned}$$

Ficando assim demonstrado de que a aplicação Φ é um homomorfismo de grupos.

Assim, pelo que demonstramos em cada um dos itens anteriores, a aplicação Φ é um isomorfismo. Logo o grupo fundamental de S^1 que denotamos por $\pi_1(S^1, b_0)$ é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros $\mathbb{Z}$, denotamos $\pi_1(S^1, b_0) \simeq \mathbb{Z}$. $\square$

Corolário 3.1. *O grupo $\pi_1(S^1)$ é um grupo abeliano.*

Demonstração. Uma vez que $\pi_1(S^1)$ é um grupo cíclico infinito, segue pelo Teorema 6.10, página 63 da referência [7], que este é um grupo abeliano. $\square$

Corolário 3.2. *Considere o cilindro fechado $C = S^1 \times [a, b]$. Então,*

$$\pi_1(C) \simeq \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Basta que consideremos $C = S^1 \times [a, b]$, onde $[a, b]$ é um intervalo da reta, e aplicar o teorema 3.3.

Daí,

$$\pi_1(C) = \pi_1(S^1 \times [a, b]) \simeq \pi_1(S^1) \times \pi_1([a, b])$$

onde $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ e $\pi_1([a, b]) \simeq \{0\}$. Portanto $\pi_1(C) \simeq \mathbb{Z} \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}$. $\square$

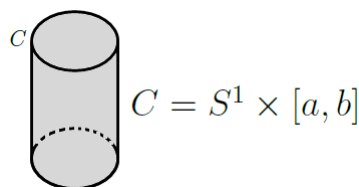


Figura 3.9: Cilindro $C = S^1 \times [a, b]$, em que $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Corolário 3.3. *O Toro T^2 , o qual pode ser identificado como $S^1 \times S^1$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Basta ver que ao consideramos $X = S^1 \times S^1$ como sendo o toro então, pelo teorema 3.3,

$$\pi_1(X) = \pi_1(S^1 \times S^1) \simeq \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$$

onde $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Portanto $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. $\square$

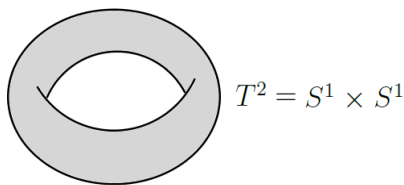


Figura 3.10: Toro $S^1 \times S^1$.

3.2.3 Aplicações

Nesta subseção apresentamos duas aplicações do grupo fundamental, a saber, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema Fundamental da Álgebra.

Seja D^2 o disco unitário, ou seja, $D^2 = \{y + iz; y^2 + z^2 \leq 1\}$. A fronteira de D^2 é o espaço S^1 . Vamos assim, considerar a inclusão

$$i : S^1 \rightarrow D^2.$$

Exatamente como em $\mathbb{R}$, tem-se que

$$\pi_1(D^2) = 0$$

para qualquer escolha do ponto base $x_0 \in D^2$ que se faça, pois D^2 é conexo por caminhos.

Proposição 3.6. *Não existe aplicação contínua*

$$r : D^2 \rightarrow S^1$$

tal que $r \circ i = Id_{S^1}$.

Demonstração. Se houvesse uma aplicação $r : D^2 \rightarrow S^1$ com a propriedade de que $r \circ i = Id$, então a composição

$$\pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_1(D^2) \longrightarrow \pi_1(S^1)$$

também seria a identidade, tendo em vista que

$$r \circ i = Id \implies (r \circ i)_\# = Id_\# \implies r_\# \circ i_\# = Id_\#.$$

Por outro lado, já temos que $\pi_1(D^2) = 0$ e $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ pelo isomorfismo Φ . Nestas condições, temos o diagrama comutativo a seguir:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(S^1) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(D^2) & \xrightarrow{r_\#} & \pi_1(S^1) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

que certamente é um absurdo, pois a partir deste diagrama, deveríamos ter que a imagem do homomorfismo identidade em $\mathbb{Z}$ deveria aplicar o grupo trivial $\{0\}$ sobrejetivamente em $\mathbb{Z}$, o que não é possível. $\square$

Teorema 3.8. [Teorema do Ponto Fixo de Brouwer] *Qualquer função contínua*

$$f : D^2 \rightarrow D^2$$

admite um ponto fixo.

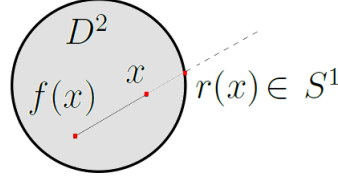


Figura 3.11: $x, f(x) \in D^2$ tal que $x \neq f(x)$

Demonstração. Suponha que $f(x) \neq x$, para qualquer $x \in D^2$.

Para cada $x \in D^2$, $x \neq f(x)$, defina $r(x) \in S^1$ como sendo o ponto diferente de $f(x)$, da intersecção de S^1 com a semireta que começa em $f(x)$ passando por x , tal como na figura 3.11.

Assim, r é uma aplicação de D^2 em S^1 tal que $r(x) = x$, para todo $x \in S^1$.

Logo,

$$(r \circ i)(x) = r(x) = x = Id_{S^1}(x)$$

em que $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ é a aplicação inclusão.

Ainda, pela continuidade de f , segue que r é uma aplicação contínua. Ou seja, r é uma aplicação contínua tal que $r \circ i = Id_{S^1}$, contradizendo a proposição 3.6.

Portanto, necessariamente $f(x) = x$, para algum $x \in D^2$. $\square$

Nosso próximo objetivo é o de também trazer o resultado do Teorema Fundamental da Álgebra como uma das aplicações de Grupo Fundamental. Anteriormente a isto, faremos uma exploração em torno do conceito de *grau* de uma aplicação $h : S^1 \rightarrow S^1$, que é uma ferramenta muito importante para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Considere a aplicação contínua $h : S^1 \rightarrow S^1$ e b_0 como sendo o ponto $(1, 0)$ de S^1 . Escolhamos um gerador $[\eta]$ do grupo cíclico infinito $\pi_1(S^1, b_0)$, ou seja, $\pi_1(S^1, b_0) = \langle [\eta] \rangle$. Observemos que existem apenas dois geradores e que estes diferem-se no sinal.

Se x_0 é um ponto qualquer de S^1 , escolha um caminho η em S^1 cujos pontos inicial e final são b_0 e x_0 , respectivamente.

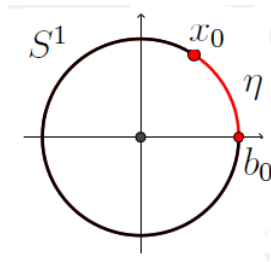


Figura 3.12: Caminho η iniciando em $b_0 = (1, 0)$ até x_0 em S^1 .

Denote $[\eta](x_0) := \hat{\gamma}([\eta])$, onde $\hat{\gamma}$ é a aplicação tal como definida na Proposição 3.2, que em particular neste caso,

$$\hat{\gamma} : \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \pi_1(S^1, x_0)$$

em que $\hat{\gamma}([\eta]) = [\bar{\gamma} \bullet \eta \bullet \gamma]$. Então $[\eta](x_0)$ gera o grupo fundamental $\pi_1(S^1, x_0)$.

Temos que a classe $[\eta](x_0)$ independe da escolha do caminho γ , uma vez que o grupo fundamental de S^1 é abeliano.

Dada a aplicação contínua $h : S^1 \rightarrow S^1$, para $x_0 \in S^1$ denote $x_1 := h(x_0) \in S^1$, consideremos o homomorfismo induzido

$$h_{\#} : \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1, x_1).$$

Uma vez que $\pi_1(S^1, x_0) = \langle [\eta](x_0) \rangle$, $\pi_1(S^1, x_1) = \langle [\eta](x_1) \rangle$ e ambos isomorfos a $\mathbb{Z}$, temos

$$h_{\#}([\eta](x_0)) = d \cdot [\eta](x_1)$$

para algum d inteiro.

Definição 3.13. O inteiro d , acima definido, é chamado de grau da aplicação $h : S^1 \rightarrow S^1$ e é denotado por $d = \deg(h)$.

Observação 3.6. O grau de h é independente da escolha do gerador $[\eta]$, pois escolhendo outro gerador simplesmente mudaríamos o sinal de ambos os membros da equação.

Propriedade 3.1. Seja a aplicação $h : S^1 \rightarrow S^1$ e $d = \deg(h)$ o seu respectivo grau. Então:

1. O grau d é independente da escolha do ponto x_0 , do caminho η e do gerador de $\pi_1(S^1, b_0)$, uma vez que este grupo é abeliano.
2. As aplicações $h, k : S^1 \rightarrow S^1$ são homotópicas se, e somente se, ambas admitem o mesmo grau, ou seja, $\deg(h) = \deg(k)$.
3. Se $h : S^1 \rightarrow S^1$ é a aplicação constante, então $\deg(h) = 0$.
4. Se $h_n : S^1 \rightarrow S^1$ é dada por $h_n(x) := x^n$ para $n > 0$, então $\deg(h_n) = n$.
5. O grau da composição $h \circ k$ é tal que $\deg(h \circ k) = \deg(h) \cdot \deg(k)$.

Para mais detalhes sobre o grau, veja a referência [8], Seção 6.2, página 67.

Teorema 3.9. [Teorema Fundamental da Álgebra] Se

$$f(x) = x^n + c_1 \cdot x^{n-1} + c_2 \cdot x^{n-2} + \cdots + c_{n-2} \cdot x^2 + c_{n-1} \cdot x + c_n$$

é um polinômio com coeficientes complexos, ou seja, todo coeficiente $c_i \in \mathbb{C}$ e $n > 0$, então existe um número $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(c) = 0$. Além disso, existem n números complexos, contando com a multiplicidade, com esta propriedade.

Demonstração. Observe que se provarmos que existe $c_1 \in \mathbb{C}$ tal que $f(c_1) = 0$, então podemos demonstrar a segunda parte via indução, considerando o processo iterado a seguir.

Decompondo, pelo Algoritmo de Euclides, temos que existe $g_1(x) \in \mathbb{C}[X]$ tal que

$$f(x) = (x - c_1) \cdot g_1(x).$$

Agora, aplicando o resultado para $g_1(x) \in \mathbb{C}[X]$, temos que existe $c_2 \in \mathbb{C}$ tal que $g(c_2) = 0$. Daí $g_1(x) = (x - c_2) \cdot g_2(x)$ e assim, de modo iterado até que obtenhamos $g_n(x) = k$, onde k é uma constante.

Consequentemente,

$$f(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot g_2(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdots (x - c_n) \cdot k.$$

Donde segue portanto, que $f(x)$ admite n valores c_i tais que $f(c_i) = 0$.

Resta-nos então provar que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(c) = 0$. Para isso, provemos que se para todo $x \in \mathbb{C}$ tem-se que $f(x) \neq 0$ teremos um absurdo.

Assim, supondo que $f(x) \neq 0, \forall x \in S^1$, podemos definir a seguinte função

$$\widehat{f} : S^1 \rightarrow S^1$$

dada por $\widehat{f}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$. Devemos observar o seguinte:

1. Suponha que $f(x) \neq 0, \forall x; |x| \leq 1$.

Neste contexto podemos definir $h : S^1 \times I \rightarrow S^1$ por $h(x, t) = \frac{f(tx)}{|f(tx)|}$. Verifica-se que h é uma homotopia entre a aplicação constante f_0 em $\frac{f(0)}{|f(0)|}$ e $\widehat{f}$.

Logo, assim sendo, temos:

$$\deg(\widehat{f}) = \deg(f_0) = 0 \Rightarrow \deg(\widehat{f}) = 0.$$

2. Suponha que $f(x) \neq 0, \forall x; |x| \geq 1$.

Deste fato, segue que podemos definir a aplicação $j : S^1 \times I \rightarrow S^1$ dada por $j(x, t) = \frac{k(x, t)}{|k(x, t)|}$ em que

$$k(x, t) = t^n \cdot f\left(\frac{x}{t}\right) = x^n + t(c_1 x^{n-1} + t c_2 x^{n-2} + \cdots + t^{n-1} c_n).$$

Logo, j é uma homotopia entre f_n e $\widehat{f}$ e assim segue que

$$\deg(\widehat{f}) = \deg(f_n) = n \Rightarrow \deg(\widehat{f}) = n.$$

Simultaneamente temos que (1) e (2) não podem ocorrer, pois assim teríamos o absurdo

$$0 = \deg(\widehat{f}) = n,$$

pois sabe-se que $n > 0$. □

4 O Teorema de van Kampen

O Teorema de van Kampen é um resultado especial que nos fornece um método de cálculo do grupo fundamental de um espaço que pode ser decomposto em espaços mais simples cujos respectivos grupos fundamentais já são previamente conhecidos. O uso sistematizado deste teorema pode nos fornecer o conhecimento de um número maior de grupos fundamentais de espaços topológicos. Para termos uma ideia de como podemos calcular grupo fundamental por decomposição de espaços, vamos observar um exemplo. Consideremos um espaço X formado por dois círculos A e B que interceptam-se em um único ponto x_0 o qual tomaremos como sendo o ponto base.

$$X = A \cup B \quad x_0 \in A \cap B$$

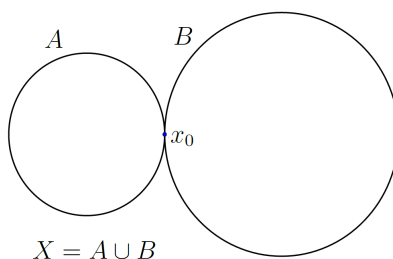


Figura 4.1: Decomposição do Espaço X como união de dois círculos.

Em nossos cálculos anteriores, sabemos que $\pi_1(A)$ é cíclico infinito, gerado por um laço α que gira em torno de A uma vez. Similarmente $\pi_1(B)$ é uma cópia de $\mathbb{Z}$ gerado por um laço β que também gira uma vez em torno de B . Cada produto de potências de α e β nos dá um elemento de $\pi_1(X)$; estes produtos chamamos de palavras.

Por exemplo, o produto

$$\alpha^5 \beta^2 \alpha^{-3} \beta \alpha^2$$

é um laço que gira 5 vezes em torno de A , em seguida 2 voltas em B , 3 voltas em sentido contrário em A , logo depois é dada uma volta em B e finaliza com 2 voltas em A . O conjunto de todas as palavras como esta consistindo de potências de α alternando com potências de β forma um grupo o qual normalmente será denotado por $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

A multiplicação neste grupo é definida tal como segue no exemplo:

$$(\beta^4 \alpha^5 \beta^2 \alpha^{-3})(\alpha^4 \beta^{-1} \alpha \beta^3) = \beta^4 \alpha^5 \beta^2 \alpha \beta^{-1} \alpha \beta^3.$$

O elemento identidade é a palavra vazia, denotado por “()”, e os elementos inversos são como no exemplo a seguir:

$$(\alpha \beta^2 \alpha^{-3} \beta^{-4})^{-1} = \beta^4 \alpha^3 \beta^{-2} \alpha^{-1}$$

pois

$$(\alpha\beta^2\alpha^{-3}\beta^{-4})(\alpha\beta^2\alpha^{-3}\beta^{-4})^{-1} = (\alpha\beta^2\alpha^{-3}\beta^{-4})(\beta^4\alpha^3\beta^{-2}\alpha^{-1}) = ()$$

O grupo $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ é um exemplo de uma construção geral chamada de **produto livre** de grupos. O teorema de van Kampen será demonstrado em termos deste conceito. Então antes de resolvermos o teorema, faremos uma revisão algébrica para descrevermos o conceito de produto livre.

4.1 Produto livre de grupos

Suponha que dada uma coleção de grupos G_k , deseja-se construir um único grupo que contem todos estes como seus subgrupos. Uma maneira de se fazermos isto é tomarmos o grupo produto

$$\prod_k G_k$$

cujos elementos podem ser considerados como sendo as funções $k \mapsto g_k \in G_k$.

Ou pode-se restringir a funções que assumem valores distintos da identidade, em geral, finitamente, formando a soma direta

$$\bigoplus_k G_k.$$

Ambas construções produzem grupos que contem todos os subconjuntos G_k como subgrupos, contudo com a propriedade de que elementos de diferentes subgrupos G_k comutam com cada elemento dos outros subgrupos. No caso dos grupos não-abelianos, essa comutatividade não é algo natural, e assim desejar-se-ia uma versão não abeliana de $\prod_k G_k$ ou de $\bigoplus_k G_k$. Uma vez que a soma direta $\bigoplus_k G_k$ é menor e provavelmente mais simples do que $\prod_k G_k$, deve então ser mais fácil construir uma versão não-abeliana de $\bigoplus_k G_k$, e isto é o que o produto livre

$$*_k G_k$$

realiza.

Definição 4.1 (Produto Livre). *O produto livre*

$$*_k G_k$$

consiste de todas as palavras $g_1g_2\cdots g_m$ de comprimento arbitrário finito $m \geq 0$, onde cada letra g_i pertence a um grupo G_{k_i} , distinto do elemento identidade de G_{k_i} , em que letras adjacentes g_i e g_{i+1} pertencem a grupos G_k distintos, isto é, $k_i \neq k_{i+1}$.

As palavras que satisfazem essas condições são chamadas reduzidas. A ideia é que palavras não reduzidas possam sempre ser simplificadas em palavras reduzidas escrevendo letras adjacentes de um mesmo grupo G_k em uma única letra, bem como cancelando letras triviais.

Definição 4.2 (Justaposição de Palavras). *Consideremos o produto livre $*_k G_k$ e as palavras, respectivamente de comprimento m e n , $(g_1 g_2 \cdots g_m), (h_1 h_2 \cdots h_n) \in *_k G_k$. A operação definida por*

$$(g_1 g_2 \cdots g_m)(h_1 h_2 \cdots h_n) = g_1 \cdots g_m h_1 \cdots h_n,$$

*a qual denominamos justaposição é uma operação em $*_k G_k$.*

Temos que a operação descrita na Definição 4.2 tem como produto resultante uma palavra em $*_k G_k$ que em geral pode ser não reduzida, porém faremos a seguinte observação.

Observação 4.1 (Redução de Palavras). Dada a palavra $g_1 \cdots g_m h_1 \cdots h_n$ obtida por justaposição das palavras $g_1 \cdots g_m$ e $h_1 \cdots h_n$, se as letras g_m e h_1 pertencem ao mesmo grupo G_k , então estas devem ser combinadas em uma única letra $(g_m h_1)$ de acordo com o produto de G_k , e se esta nova letra $(g_m h_1)$ vir a ser o elemento identidade de G_k , então esta será cancelada da justaposição. Este procedimento nos permite combinarmos g_{m-1} com h_2 e que possivelmente também poderá ser cancelada. A repetição deste processo eventualmente produzirá uma palavra reduzida. Por exemplo, no produto

$$(g_1 \cdots g_m)(g_m^{-1} \cdots g_1^{-1})$$

todos os pares $(g_i g_i^{-1})$ com $i = 1, \dots, m$, faz com que a palavra resultante da justaposição torne-se o elemento identidade de $*_k G_k$, ou seja, a palavra vazia.

Observação 4.2. O produto livre $*_k G_k$ munido da operação de justaposição de palavras é um grupo.

1. O elemento neutro de $*_k G_k$ é a palavra vazia que denotamos por “()”.
2. Toda palavra $g_1 \cdots g_m \in *_k G_k$ admite a palavra inversa, a qual é dada por

$$(g_1 \cdots g_m)^{-1} = g_m^{-1} \cdots g_1^{-1}.$$

3. A próxima verificação que faremos é a de que a justaposição de palavras em $*_k G_k$ é uma operação associativa. Para que essa conferência não seja tediosa, existe uma abordagem indireta que evita grande parte do trabalho.

• Seja W o conjunto das palavras reduzidas $g_1 \cdots g_m$ inclusive a palavra vazia. Para cada letra $g \in G_k$, associaremos a função

$$L_g : W \rightarrow W$$

dada pela multiplicação à esquerda,

$$L_g(g_1 \cdots g_m) = g g_1 \cdots g_m$$

onde combinamos g com g_1 caso $g_1 \in G_k$ para tornarmos $(g g_1) \cdots g_m$ uma palavra reduzida.

A propriedade chave da associatividade é a fórmula

$$L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$$

para $g, g' \in G_k$, a qual é

$$g(g'(g_1 \cdots g_m)) = (gg')(g_1 \cdots g_m).$$

De fato, dada a palavra reduzida $g_1 \cdots g_r \in W$, temos:

$$\begin{aligned} L_g \circ L_{g'}(g_1 \cdots g_r) &= L_g(L_{g'}(g_1 \cdots g_r)) \\ &= L_g(g'g_1 \cdots g_r) \\ &= gg'g_1 \cdots g_r \\ &= (gg')g_1 \cdots g_r \\ &= L_{gg'}(g_1 \cdots g_r) \end{aligned}$$

Este caso de associatividade segue trivialmente pela associatividade em G_k .

- A função $L_g : W \rightarrow W$ é invertível cuja inversa é $L_{g^{-1}}$.

De fato, verificaremos usando a fórmula $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$ e a propriedade de que L_g é invertível se, e somente se, existe função L_h onde $h \in G_k$ tal que

$$\begin{cases} L_g \circ L_h = \text{Id}_W \\ \text{e} \\ L_h \circ L_g = \text{Id}_W \end{cases}$$

Para tanto, basta tomarmos $L_h = L_{g^{-1}}$, pois

$$\begin{aligned} L_g \circ L_h(g_1 \cdots g_r) &= L_g \circ L_{g^{-1}}(g_1 \cdots g_r) \\ &= (gg^{-1})g_1 \cdots g_r \\ &= g_1 \cdots g_r \\ &= \text{Id}_W(g_1 \cdots g_r) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L_h \circ L_g(g_1 \cdots g_s) &= L_{g^{-1}} \circ L_g(g_1 \cdots g_s) \\ &= (g^{-1}g)g_1 \cdots g_s \\ &= g_1 \cdots g_s \\ &= \text{Id}_W(g_1 \cdots g_s). \end{aligned}$$

- Dado $g \in G_k$, a associação $g \mapsto L_g$ onde $L_g(g_1 \cdots g_m) = gg_1 \cdots g_m$, define um homomorfismo de G_k para o grupo $P(W)$ de todas as permutações de W , ou seja, $P(W) = \{f : W \rightarrow W \mid f \text{ é bijetora}\}$. Mais geralmente, definimos a função, para cada palavra reduzida $g_1 \cdots g_m$,

$$L : W \rightarrow P(W)$$

por

$$L(g_1 \cdots g_m) = L_{g_1} \circ \cdots \circ L_{g_m}$$

Esta função L é injetiva desde que a permutação $L(g_1 \cdots g_m)$ envie a palavra vazia para $g_1 \cdots g_m$.

De fato. Temos:

$$\begin{aligned} L : W &\longrightarrow P(W) \\ w &\longmapsto L(w) : W \longrightarrow W \\ h &\longmapsto L(w)(h) \end{aligned}$$

onde w e h são palavras em W tais que $w = w_1 \cdots w_m$ e $h = h_1 \cdots h_n$, e ainda mais

$$L(w) = L(w_1 \cdots w_m) = L_{w_1} \circ \cdots \circ L_{w_m}.$$

Nestas condições, temos

$$\begin{aligned} L(w)(h) = L(w)(h_1 \cdots h_n) &= (L_{w_1} \circ \cdots \circ L_{w_m})(h_1 \cdots h_n) \\ &= (L_{w_1} \circ \cdots \circ L_{w_{m-2}} \circ L_{w_{m-1}} \circ L_{w_m})(h_1 \cdots h_n) \\ &= (L_{w_1} \circ \cdots \circ L_{w_{m-2}} \circ L_{w_{m-1}})(L_{w_m}(h_1 \cdots h_n)) \\ &= (L_{w_1} \circ \cdots \circ L_{w_{m-2}} \circ L_{w_{m-1}})(w_m h_1 \cdots h_n) \\ &= (L_{w_1} \circ \cdots \circ L_{w_{m-2}})(L_{w_{m-1}}(w_m h_1 \cdots h_n)) \\ &= (L_{w_1} \circ \cdots \circ L_{w_{m-2}})(w_{m-1} w_m h_1 \cdots h_n) \\ &\vdots \\ &= w_1 \cdots w_m h_1 \cdots h_n \end{aligned}$$

Assim, para analisarmos a injetividade de L , temos que verificar se é válida a condição

$$L(w) = L(w') \implies w = w'$$

para quaisquer w, w' palavras em W .

Porém, $L(w) = L(w')$ se, e somente se, para todo $h \in W$,

$$L(w)(h) = L(w')(h),$$

ou seja, se, e somente se, $wh = w'h$.

E então, $wh = w'h$ implicará que $w = w'$ se, e somente se, h for a palavra vazia, ou seja, $h = ()$ e portanto teremos

$$\begin{cases} L(w)(h) = L(w)(()) = w \\ \text{e} \\ L(w')(h) = L(w')() = w' \end{cases}$$

Assim, para garantir que L é injetiva, basta mostrarmos que a aplicação $L(w)$ envia a palavra vazia $()$ para a palavra w , qualquer que seja $w \in W$.

De fato, sejam w e $h \in W$, tais que $w = w_1 \cdots w_m$ e h a palavra vazia $h = ()$.

Então,

$$\begin{aligned} L(w)(h) &= L(w)(()) \\ &= w_1 \cdots w_m(()) \\ &= w_1 \cdots w_m \\ &= w \end{aligned}$$

- A operação produto em W corresponde em L à composição em $P(W)$ devido à relação $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$. Uma vez que a composição em $P(W)$ é associativa, concluímos que o produto em W é associativa.

Já descrevemos anteriormente o produto livre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. O mesmo é um exemplo de grupo livre, o produto livre de quaisquer número de cópias de $\mathbb{Z}$ finito ou infinito. Os elementos de um grupo livre são unicamente representados por palavras reduzidas em potências de geradores das cópias de $\mathbb{Z}$, com um gerador para cada cópia de $\mathbb{Z}$. Estes geradores são chamados base para o grupo livre, e o número de elementos básicos é o posto do grupo livre.

A comutatividade de um grupo livre é um grupo livre abeliano com base no mesmo conjunto de geradores. Assim, o posto de um grupo livre abeliano é bem definido, independente da escolha da base; o mesmo é verdade para o posto de um grupo livre.

Em geral, para um produto livre $*_k G_k$, cada grupo G_k é naturalmente identificado com um subgrupo de $*_k G_k$, o subgrupo consistindo da palavra vazia e das palavras de uma letra distinta da identidade. Deste ponto de vista, a palavra vazia é o elemento identidade comum de todos os subgrupos G_k , os quais são, caso contrário, disjuntos. Uma consequência da associatividade é que qualquer produto $g_1 \cdots g_m$ de elementos g_i dos grupos G_k tem uma única forma reduzida, o elemento de $*_k G_k$ obtido multiplicando em qualquer ordem. Qualquer sequência de operação de redução num produto $g_1 \cdots g_m$ combinando letras adjacentes g_i e g_{i+1} que estão no mesmo G_k ou cancelando algum g_i que seja a identidade, pode ser visto como uma forma de inserir parênteses em $g_1 \cdots g_m$ e executando a sequência resultante de multiplicações. Portanto, a associatividade implica que qualquer duas sequências de operações de redução realizadas numa mesma palavra não reduzida sempre produzem a mesma palavra reduzida.

Uma propriedade básica do produto livre $*_k G_k$ é que qualquer coleção de homomorfismos de grupos

$$\varphi_k : G_k \rightarrow H$$

estende-se unicamente ao homomorfismo $\varphi : *_k G_k \rightarrow H$. A saber, o valor de φ em uma palavra $g_1 \cdots g_m$ com $g_i \in G_{k_i}$, devemos ter

$$\varphi_{k_1}(g_1) \cdots \varphi_{k_n}(g_n)$$

e usando esta fórmula para definir φ tem-se o homomorfismo bem definido uma vez que o processo de redução de um produto não reduzido em $*_k G_k$ não altera sua imagem sobre φ . Por exemplo, para um produto livre $G * H$, as inclusões $G \hookrightarrow G \times H$ e $H \hookrightarrow G \times H$ induzem a um homomorfismo sobrejetor

$$G * H \rightarrow G \times H.$$

4.2 O Teorema de van Kampen - Clássico

Suponha que o espaço topológico X possa ser decomposto como união de uma coleção de subconjuntos abertos A_k , todos estes conexos por caminhos e cada um contendo o ponto base $x_0 \in X$.

Os homomorfismos

$$j_k : \pi_1(A_k) \rightarrow \pi_1(X)$$

induzidos pelas inclusões $A_k \hookrightarrow X$, estendem-se ao homomorfismo

$$\Phi : *_k \pi_1(A_k) \rightarrow \pi_1(X).$$

O teorema de van Kampen nos dirá que Φ é sobrejetor, com kernel não trivial, ou seja, o núcleo da aplicação é não-nulo.

Se

$$i_{kl} : \pi_1(A_k \cap A_l) \rightarrow \pi_1(A_k) \quad \text{e} \quad i_{lk} : \pi_1(A_k \cap A_l) \rightarrow \pi_1(A_l)$$

são, respectivamente, os homomorfismos induzidos pelas inclusões $A_k \cap A_l \hookrightarrow A_k$ e $A_k \cap A_l \hookrightarrow A_l$, então

$$j_k \circ i_{kl} = j_l \circ i_{lk},$$

sendo ambas composições induzidas pela inclusão $A_k \cap A_l \hookrightarrow X$, então o Kernel de Φ contém todos os elementos da forma $i_{kl}([\eta])i_{lk}([\eta])^{-1}$ para $[\eta] \in \pi_1(A_k \cap A_l)$.

Teorema 4.1. *Se X é a união de conjuntos A_k abertos conexos por caminhos, cada um contendo o ponto base $x_0 \in X$ e se cada interseção $A_k \cap A_l$ é conexo por caminhos, então o homomorfismo*

$$\Phi : *_k \pi_1(A_k) \rightarrow \pi_1(X)$$

é sobrejetivo.

Além disso, se cada interseção $A_k \cap A_l \cap A_r$ é conexo por caminhos, então o kernel de Φ é o subgrupo normal N gerado por todos os elementos da forma $i_{kl}([\eta])i_{lk}([\eta])^{-1}$, em que $[\eta] \in \pi_1(A_k \cap A_l)$, ou seja, Φ induz o isomorfismo

$$\pi_1(X) \simeq \frac{*_k \pi_1(A_k)}{N}.$$

Demonstração. Para mostrar que Φ é sobrejetiva, precisamos garantir que para qualquer $[\eta] \in \pi_1(X)$, existe $\mu \in *_k \pi_1(A_k)$ tal que $\Phi(\mu) = [\eta]$. Veremos a seguir que tal elemento μ trata-se da fatorização de $[\eta]$ em $*_k \pi_1(A_k)$. Por uma *fatorização* de um elemento $[\eta] \in \pi_1(X)$, entendemos como sendo o produto formal

$$[v_1] \cdots [v_m],$$

onde:

- (I) Cada v_i é um laço de ponto base x_0 em algum A_{k_i} e $[v_i] \in \pi_1(A_{k_i})$ é a classe de equivalência homotópica a v_i .
- (II) O laço η é homotópico a $v_1 \bullet \cdots \bullet v_m$ em X .

Vejam como construir tal fatorização. Para isso seja $\eta : I \rightarrow X$ um laço de ponto base x_0 .

Afirmção: Existe uma partição $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m = 1$ de I tal que cada subintervalo $[s_{q-1}, s_q]$ é aplicado por η em um único A_k , isto é $\eta([s_{q-1}, s_q]) \subset A_k$.

De fato, como η é aplicação contínua, para cada $s \in I$, existe uma vizinhança aberta V_s em I aplicada por η em algum A_k . Mais ainda, podemos considerar V_s como sendo um intervalo cujo fecho é aplicado a um único A_k .

Consequentemente, $\{V_s\}_s$ é uma cobertura aberta para I . Agora, pela compacidade de $I = [0, 1]$, existe um número finito, digamos m tal que

$$I = \bigcup_{q=1}^m V_{s_q}$$

com $V_{s_q} = [s_{q-1}, s_q]$. Com isso obtemos a partição $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ desejada.

Denotamos o conjunto A_k referente ao intervalo $[s_{q-1}, s_q]$ por A_q e no que segue, $\eta|_{[s_{q-1}, s_q]} = \eta_q$. Desta maneira, temos que η é a justaposição de caminhos

$$\eta_1 \bullet \eta_2 \bullet \dots \bullet \eta_m$$

em que cada η_q é um caminho em A_q .

Uma vez que $A_q \cap A_{q+1}$ é conexo por caminhos, segue que podemos escolher um caminho μ_q em $A_q \cap A_{q+1}$ de x_0 ao ponto $\eta(s_q) \in A_q \cap A_{q+1}$.

Considere o seguinte laço homotópico a η :

$$(\eta_1 \bullet \bar{\mu}_1) \bullet (\mu_1 \bullet \eta_2 \bullet \bar{\mu}_2) \bullet (\mu_2 \bullet \eta_3 \bullet \bar{\mu}_3) \bullet \dots \bullet (\mu_{m-1} \bullet \eta_m).$$

Veja que as justaposições de caminhos dentro de cada parênteses são laços pertencentes a um único A_q . Ou seja, η é a justaposição de laços em $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Consequentemente,

$$[\eta] = [(\eta_1 \bullet \bar{\mu}_1) \bullet (\mu_1 \bullet \eta_2 \bullet \bar{\mu}_2) \bullet (\mu_2 \bullet \eta_3 \bullet \bar{\mu}_3) \bullet \dots \bullet (\mu_{m-1} \bullet \eta_m)]$$

em que,

$$[v_1] := [\eta_1 \bullet \bar{\mu}_1] \in \pi_1(A_1),$$

$$[v_2] := [\mu_1 \bullet \eta_2 \bullet \bar{\mu}_2] \in \pi_1(A_2),$$

$$[v_3] := [\mu_2 \bullet \eta_3 \bullet \bar{\mu}_3] \in \pi_1(A_3),$$

$$\vdots$$

$$[v_m] := [\mu_{m-1} \bullet \eta_m] \in \pi_1(A_m),$$

Tomando,

$$\mu = [v_1][v_2] \cdots [v_m] = [\eta_1 \bullet \bar{\mu}_1][\mu_1 \bullet \eta_2 \bullet \bar{\mu}_2] \cdots [\mu_{m-1} \bullet \eta_m]$$

temos,

$$\begin{aligned} \Phi(\mu) &= \Phi([v_1][v_2] \cdots [v_m]) \\ &= j_1([v_1]) \cdot j_2([v_2]) \cdots j_m([v_m]) \\ &= j_1([\eta_1 \bullet \bar{\mu}_1]) \cdot j_2([\mu_1 \bullet \eta_2 \bullet \bar{\mu}_2]) \cdots j_m([\mu_{m-1} \bullet \eta_m]) \\ &= [\eta_1 \bullet \bar{\mu}_1] \cdot [\mu_1 \bullet \eta_2 \bullet \bar{\mu}_2] \cdots [\mu_{m-1} \bullet \eta_m] \\ &= [(\eta_1 \bullet \bar{\mu}_1) \bullet (\mu_1 \bullet \eta_2 \bullet \bar{\mu}_2) \bullet (\mu_2 \bullet \eta_3 \bullet \bar{\mu}_3) \bullet \dots \bullet (\mu_{m-1} \bullet \eta_m)] \\ &= [\eta] \end{aligned}$$

lembrando que $j_k : \pi_1(A_k) \hookrightarrow \pi_1(X)$ é a inclusão.

O próximo passo é mostrar que $\ker \Phi = N$ em que N é subgrupo normal à $*_k \pi_1(A_k)$ e é gerado pelos elementos da forma $i_{kl}([\eta])(i_{lk}([\eta]))^{-1} \in *_k \pi_1(A_k)$, com $[\eta] \in \pi_1(A_k \cap A_l)$ em que

$$i_{kl} : \pi_1(A_k \cap A_l) \hookrightarrow \pi_1(A_k)$$

e

$$i_{lk} : \pi_1(A_k \cap A_l) \hookrightarrow \pi_1(A_l)$$

são homomorfismos induzidos pelas inclusões $A_k \cap A_l \hookrightarrow A_k$ e $A_k \cap A_l \hookrightarrow A_l$.

Primeiramente, veja que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \Phi : *_k \pi_1(A_k) & \rightarrow & \pi_1(X) \\ \mu & \mapsto & \Phi(\mu) \end{array}$$

induz um homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \psi : \frac{*_k \pi_1(A_k)}{N} & \rightarrow & \pi_1(X) \\ \mu \cdot N & \mapsto & \psi(\mu \cdot N) \end{array}$$

dado por $\psi(\mu \cdot N) := \Phi(\mu)$ desde que $N \subset \ker \Phi$, pois se isto ocorrer, ψ está bem definida.

De fato:

$$\begin{aligned} \mu \cdot N = \nu \cdot N &\Rightarrow \mu \nu^{-1} \in N \subset \ker \Phi \\ &\Rightarrow \Phi(\mu \cdot \nu^{-1}) = e_{x_0} \\ &\Rightarrow \Phi(\mu) \cdot (\Phi(\nu))^{-1} = e_{x_0} \\ &\Rightarrow \Phi(\mu) = \Phi(\nu) \\ &\Rightarrow \psi(\mu \cdot N) = \psi(\nu \cdot N) \end{aligned}$$

Consequentemente, se ψ é injetiva, então segue que $\ker \Phi \subset N$, pois supondo a injetividade de ψ , então temos $\ker \psi = \{0_{\frac{*_k \pi_1(A_k)}{N}}\} = \{N\}$ e daí

$$\begin{aligned} \ker \psi &= \{\mu \cdot N; \psi(\mu \cdot N) = e_{x_0}\} \\ &= \{\mu \cdot N; \Phi(\mu) = e_{x_0}\} \\ &= \{\mu \cdot N; \mu \in \ker \Phi\}. \end{aligned}$$

Assim, temos que se $\mu \in \ker \Phi$ então seguem as implicações:

$$\begin{aligned} \mu \in \ker \Phi &\Rightarrow \mu \cdot N \in \ker \psi \\ &\Rightarrow \mu \cdot N = N \\ &\Rightarrow \mu \in N \end{aligned}$$

donde portanto segue que $\ker \Phi \subset N$. Mais ainda, segue que $\ker \Phi = N$.

Desta forma, para concluirmos a demonstração que $\ker \Phi = N$ resta-nos mostrar:

(a) $N \subset \ker \Phi$,

(b) ψ é injetora.

Para provar o item **(a)**, note que

$$N = \langle i_{kl}([\eta])i_{lk}([\eta])^{-1}; [\eta] \in \pi_1(A_k \cap A_l) \rangle$$

Assim, se cada gerador pertencer ao $\ker \Phi$, segue o resultado. Para isso, analisemos o elemento $\Phi(i_{kl}([\eta])i_{lk}([\eta])^{-1})$.

Temos que

$$\begin{aligned} \Phi(i_{kl}([\eta])i_{lk}([\eta])^{-1}) &= j_k(i_{kl}([\eta])) \cdot j_l(i_{lk}([\eta])^{-1}) \\ &= j_k(i_{kl}([\eta])) \cdot (j_l(i_{lk}([\eta])))^{-1} \\ &= j_k([\eta]) \cdot (j_l([\eta]))^{-1} \\ &= [\eta] \cdot [\eta]^{-1} \\ &= e_{x_0} \end{aligned}$$

Logo temos que $i_{kl}([\eta])i_{lk}([\eta])^{-1} \in \ker \Phi$ e portanto $N \subset \ker \Phi$.

Agora, vamos demonstrar o item **(b)**, ou seja, vamos mostrar que ψ é injetiva. Para tanto primeiramente precisamos estabelecer quando duas fatorizações $a, b \in *_k\pi_1(A_k)$ de um mesmo elemento $[\eta] \in \pi_1(X)$ são equivalentes, o qual denotamos $a \sim b$. Antes vamos aqui introduzir algumas terminologias.

Já sabemos que uma fatorização de $[\eta]$ é uma palavra em $*_k\pi_1(A_k)$, possivelmente não reduzida, que é aplicada para $[\eta]$ por Φ . A prova da sobrejetividade de Φ , nos mostrou que toda classe $[\eta] \in \pi_1(X)$ possui uma fatorização.

Dizemos que duas fatorizações a e b são equivalentes, $a \sim b$, se estas são relacionadas por uma sequência dos seguintes dois tipos de movimentos ou seus inversos:

- (i) Combinar termos adjacentes $[\eta_i][\eta_{i+1}]$ em um único termo $[\eta_i \bullet \eta_{i+1}]$ se $[\eta_i]$ e $[\eta_{i+1}]$ pertencem a um mesmo grupo $\pi_1(A_k)$.
- (ii) Considerar o termo $[\eta_i] \in \pi_1(A_k)$ como pertencente ao grupo $\pi_1(A_l)$ ao invés de $\pi_1(A_k)$ se η_i for um laço em $A_k \cap A_l$.

Observação 4.3. Primeiramente, observamos que esta relação “ $\sim$ ” é transitiva. O item **(i)** nos diz que tal movimento não altera o elemento de $*_k\pi_1(A_k)$ definido pela fatorização. Já o item **(ii)** diz que com o segundo movimento, e da definição de N , a imagem do elemento no grupo quociente $Q = \frac{*_k\pi_1(A_k)}{N}$ não se altera, ou seja, se $a \sim b$ então $ab^{-1} \in N$, e consequentemente, $a \cdot N = b \cdot N$. Portanto, fatorizações equivalentes dão o mesmo elemento de Q .

Neste contexto, para garantir a injetividade de ψ é suficiente mostrar que sendo $\psi(a \cdot N) = [\eta] = \psi(b \cdot N)$ então $a \cdot N = b \cdot N$. Mas pelo argumento anterior, $a \cdot N = b \cdot N$ se, e somente se, $a \sim b$. Observe que a e b são fatorizações de um mesmo elemento de $\pi_1(X)$, as quais existem pela sobrejetividade de Φ .

Façamos isso.

Sejam $a = [\eta_1] \cdots [\eta_m]$ e $b = [\mu_1] \cdots [\mu_n]$ duas fatorizações de $[\eta]$. Como a e b são fatorizações de um mesmo laço, a saber,

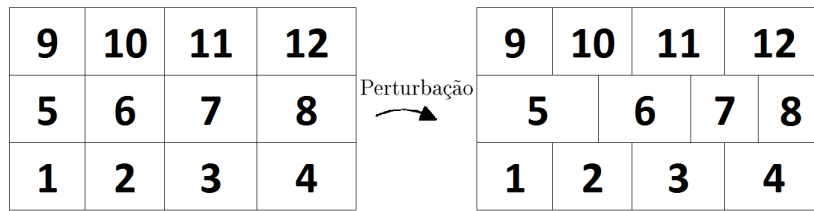
$$\Phi(a) = [\eta] = \Phi(b) \Rightarrow [\eta_1 \bullet \cdots \bullet \eta_m] = [\mu_1 \bullet \cdots \bullet \mu_n]$$

e podemos afirmar que os caminhos justapostos $\eta_1 \bullet \cdots \bullet \eta_m$ e $\mu_1 \bullet \cdots \bullet \mu_n$ são homotópicos. Seja $F : I \times I \rightarrow X$ a homotopia entre os caminhos $\eta_1 \bullet \cdots \bullet \eta_m$ e $\mu_1 \bullet \cdots \bullet \mu_n$. Consequentemente, para todo $(t, s) \in I \times I$, temos F contínua em que

$$\begin{cases} F(t, 0) = \eta_1 \bullet \cdots \bullet \eta_m(t) \\ F(t, 1) = \mu_1 \bullet \cdots \bullet \mu_n(t) \\ F(0, s) = x_0 = F(1, s) \end{cases}$$

Pela definição de fatorização, existem partições $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ e $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ tais que cada retângulo $R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ é aplicado por F em um único A_k , o qual denotaremos A_{ij} .

Pela compacidade de I e consequentemente $I \times I$, existe um número finito de retângulos $[a, b] \times [c, d]$ que cobrem $I \times I$, com cada retângulo sendo aplicado em um único A_k . Desta forma, $I \times I$ pode ser escrito como a união de todas as retas horizontais e verticais que contêm vértices desses retângulos. Podemos assumir que as s -partições subdividem as partições que dão os produtos $\eta_1 \bullet \cdots \bullet \eta_m$ e $\mu_1 \bullet \cdots \bullet \mu_n$. Uma vez que F aplica uma vizinhança de R_{ij} em A_{ij} , podemos perturbar os lados verticais de cada retângulo R_{ij} de modo que cada vértice de $I \times I$ esteja no máximo em três retângulos R_{ij} . Podemos assumir que existem no mínimo 3 faixas de retângulos, logo podemos realizar a tal perturbação na faixa intermediária, deixando as faixas da base e do topo inalteradas. Após tal perturbação, renomeamos os nossos retângulos por $R_1, R_2, \dots, R_{mn}$. Por exemplo, para $m = 4$ e $n = 3$ temos a seguinte configuração para $I \times I$.



Se γ é um caminho de $I \times I$ do lado esquerdo para o lado direito deste retângulo, então a restrição $F|_\gamma$ é um laço de ponto base x_0 , já que F aplica ambos lados direito e esquerdo de $I \times I$ ao ponto x_0 , ou seja,

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow I \times I \\ u &\longmapsto (p(u), q(u)) \end{aligned}$$

é contínua tal que

$$\begin{cases} \gamma(0) = (0, q(0)) = (0, s_0) \\ \gamma(1) = (1, q(1)) = (1, s_1) \end{cases}$$

Assim, a restrição $F|_\gamma$, é tal que

$$\begin{aligned} F|_\gamma : I &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto (F|_\gamma)(u) \end{aligned}$$

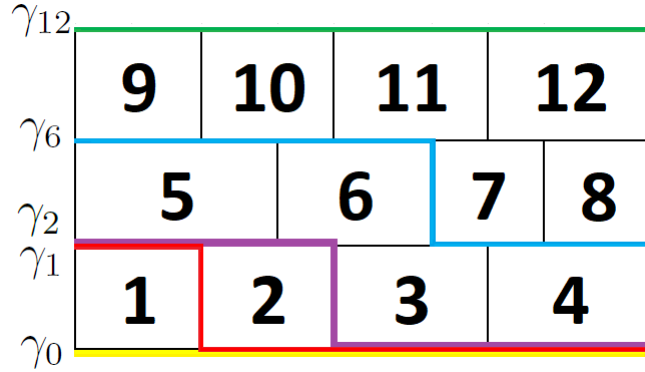
onde

$$(F|_\gamma)(u) = F(\gamma(u)) = F(p(u), q(u))$$

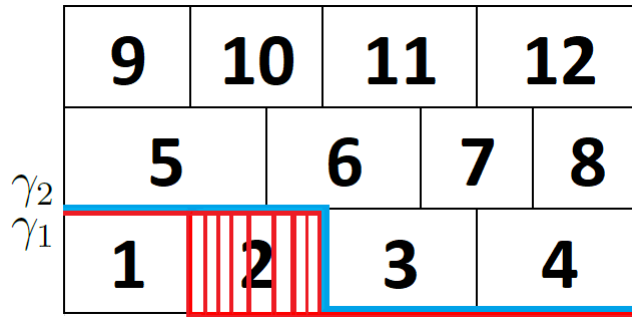
e

$$\begin{cases} (F|_\gamma)(0) = F(0, s_0) = x_0 \\ (F|_\gamma)(1) = F(1, s_1) = x_0 \end{cases}$$

Considere agora γ_r o caminho em $I \times I$ separando os r primeiros retângulos $R_1, \dots, R_r$ dos demais. Por exemplo, considerando $m = 4$ e $n = 3$, $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_6$ e γ_{12} possuem as seguintes configurações.

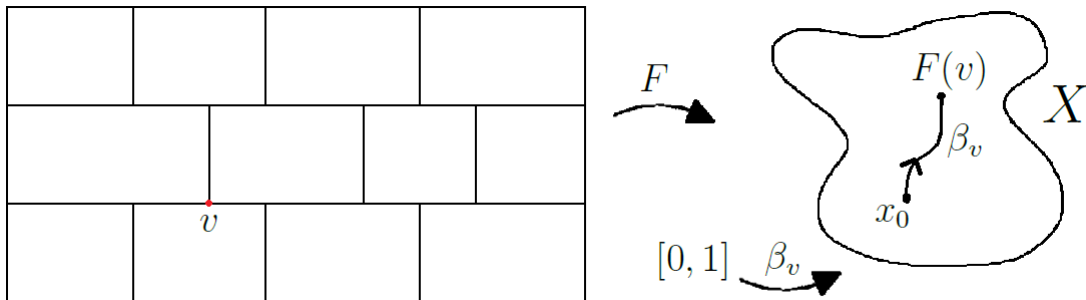


Observe que γ_0 e γ_{mn} são respectivamente a base e o topo do retângulo $I \times I$. Ainda mais, passamos homotopicamente de γ_r para γ_{r+1} através do retângulo R_{r+1} . Ilustramos tal situação na figura a seguir considerando os valores $m = 4$, $n = 3$ e $r = 1$.

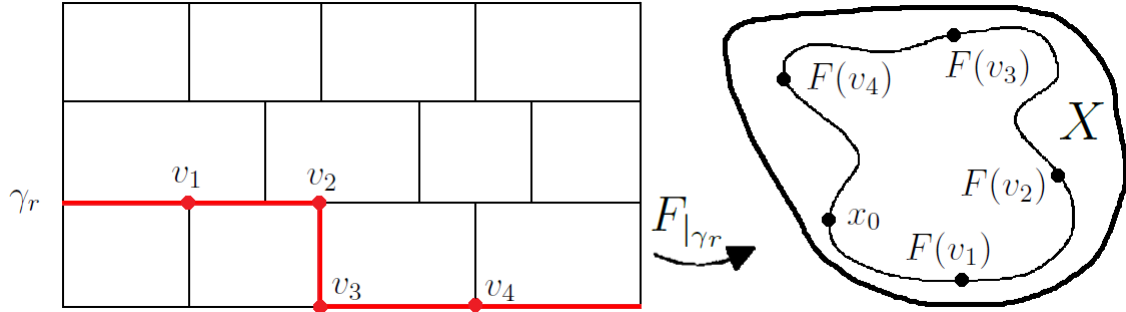


Observe que com esta construção de γ_r , temos que γ_r é equivalente a γ_{r+1} e consequentemente, como $\gamma_0 \sim \gamma_1 \sim \dots \sim \gamma_{mn}$ temos que $\gamma_0 \sim \gamma_{mn}$.

Denominamos de quinas os vértices de R_r . Para cada vértice v com $F(v) \neq x_0$, (ou seja, vértices que não pertencem aos lados $\{0\} \times I$ e $\{1\} \times I$ do retângulo $I \times I$) consideramos β_v como sendo o caminho de x_0 a $F(v)$, onde $\beta_v(0) = x_0$ e $\beta_v(1) = F(v)$, o qual existe pois podemos escolher β_v pertencente na interseção de 2 ou 3 A_{ij} 's correspondentes ao R_r 's contendo v uma vez que assumimos que a interseção de 2 ou 3 A_{ij} 's é conexo por caminhos.



Se inserimos em $F|_{\gamma_r}$ os caminhos apropriados $\overline{\beta_v}\beta_v$ em vértices sucessivos, como na demonstração da sobrejetividade de Φ , então nós obtemos a fatorização de $[F|_{\gamma_r}]$ em relação ao laço correspondente ao segmento horizontal ou vertical entre vértices adjacentes que se encontram em A_{ij} para qualquer um dos R_s 's contendo o segmento.



Observe que diferentes escolhas destes A_{ij} que contém a imagem do R_s 's muda a fatorização da classe $[F|_{\gamma_r}]$ em uma fatorização equivalente. Além disso, as fatorizações associadas aos caminhos sucessivos γ_r e γ_{r+1} são equivalentes uma vez que “empurramos” γ_r através de R_{r+1} para γ_{r+1} movimenta $F|_{\gamma_r}$ a $F|_{\gamma_{r+1}}$ por uma homotopia no A_{ij} correspondente ao R_{r+1} e podemos escolher este A_{ij} de todos os segmentos de γ_r e γ_{r+1} em R_{r+1} .

Finalmente, podemos adequar a fatorização associada a γ_0 de forma que esta seja equivalente a fatorização $a = [\eta_1] \cdots [\eta_m]$ escolhendo os caminhos β_v para cada vértice v ao longo da base de $I \times I$ de modo que não pertença a cada dois A_{ij} correspondente ao R_s 's contendo v , mas também que pertença ao A_α para o η_i contendo v em seu domínio. No caso em que v é o ponto final comum de dois consecutivos η_i 's, temos que $F(v) = x_0$, logo não há necessidade de escolher um β_v .

Desta forma, temos $\gamma_0 \sim a$. De modo análogo, podemos assumir que a fatorização associada a γ_{mn} é equivalente a $\mu = [\mu_1] \cdots [\mu_m]$, isto é, $\gamma_{mn} \sim b$. Consequentemente $a \sim \gamma_0 \sim \gamma_{mn} \sim b$ e portanto $a \sim b$.

Portanto, concluímos que

$$\Phi : *_k \pi_1(A_k) \rightarrow \pi_1(X)$$

é sobrejetor, ou seja, $\text{Im } \Phi = \pi_1(X)$ cujo $\ker \Phi = N$. Desta maneira, segue pelo primeiro teorema do Isomorfismo que

$$\frac{*_k \pi_1(A_k)}{N} \simeq \text{Im } \Phi = \pi_1(X).$$

□

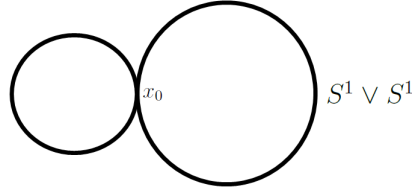
Corolário 4.1. *Seja X um espaço topológico tal que $X = U \cup V$, em que U e V são subconjuntos abertos de X e $U \cap V \neq \emptyset$. Suponhamos que X, U, V e $U \cap V$ são conexos por caminho. Nestas condições,*

$$\pi_1(X) \simeq \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{\pi_1(U \cap V)},$$

onde $\pi_1(U \cap V)$ denota o subgrupo normal gerado por todos os elementos da forma $i_{VU}(w)i_{UV}(w)^{-1}$, em que $w \in \pi_1(U \cap V)$, com i_{UV} e i_{VU} são as respectivas inclusões.

Definição 4.3. [Soma Wedge] *Sejam X e Y espaços topológicos e os pontos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Então a Soma Wedge $X \vee Y$ é o conjunto quociente da união disjunta $X \sqcup Y$ obtido pela identificação de x_0 e y_0 em um único ponto.*

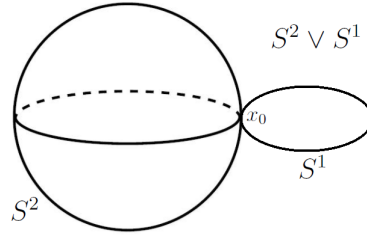
Exemplo 4.1. O espaço $S^1 \vee S^1$ é homeomorfo à figura do número 8.



De fato, toma como sendo X a figura do número “8”, a qual pode ser pensada como sendo dois círculos S^1 por um ponto x_0 em comum. Assim, $X = S^1 \vee S^1$ e daí temos

$$\pi_1(X) = \pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \frac{\pi_1(S^1) * \pi_1(S^1)}{\pi_1(S^1 \cap S^1)} = \frac{\pi_1(S^1) * \pi_1(S^1)}{\pi_1(\{x_0\})} = \frac{\mathbb{Z} * \mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Exemplo 4.2. Sejam S^1 o círculo e S^2 a esfera. Então o espaço $S^2 \vee S^1$ é homeomorfo à $\mathbb{Z}$. De fato, seja $X = S^2 \vee S^1$ e x_0 o ponto em comum. Logo tem-se



$$\pi_1(X) = \pi_1(S^2 \vee S^1) \simeq \frac{\pi_1(S^2) * \pi_1(S^1)}{\pi_1(S^2 \cap S^1)} = \frac{\pi_1(S^2) * \pi_1(S^1)}{\pi_1(\{x_0\})} = \frac{\{0\} * \mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}.$$

Observação 4.4. Para mais detalhes, o resultado $\pi_1(S^2) = \{0\}$ utilizado no exemplo acima, está detalhado na referência [9], na Proposição 1.14, página 35, em que é afirmado que para todo $n \geq 2$ tem-se que $\pi_1(S^n) = \{0\}$.

5 Categorias e o Teorema de van Kampen

5.1 Categorias e Funtores

Nesta seção introduzimos noções básicas sobre Categorias e Funtores no intuito de preparar a notação para desenvolver a seção sobre o Teorema de van Kampen neste cenário.

Definição 5.1. *Uma Categoria $\mathcal{C}$ consiste de um par $(\text{Obj}(\mathcal{C}), \text{Morf}(\mathcal{C}))$ em que $\text{Obj}(\mathcal{C})$ é uma coleção de objetos e $\text{Morf}(\mathcal{C})$ é uma coleção de morfismos (aplicações) entre objetos de $\mathcal{C}$ satisfazendo as condições descritas a seguir.*

Para descrevê-las estabelecemos que para cada par de objetos $(A, B) \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C})$ será denotado por $\mathcal{C}(A, B)$ a classe de morfismos entre os objetos A e B .

Dados objetos arbitrários $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ definimos uma lei de composição

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) &\rightarrow \mathcal{C}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

tal que

1. *Para quaisquer $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existem morfismos $1_B \in \mathcal{C}(B, B)$ e $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ tais que*

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A,$$

$\forall f \in \mathcal{C}(A, B)$. Tais morfismos são chamados de morfismo identidade.

2. *Para quaisquer $f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(B, C)$ e $h \in \mathcal{C}(C, D)$,*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

A seguir definimos aplicações entre Categorias as quais estão em consonância com os elementos das Categorias envolvidas.

Definição 5.2. *Um morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ é chamado de isomorfismo em $\mathcal{C}$ quando existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$.*

Exemplo 5.1. A seguir listamos algumas categorias clássicas:

1. Denotamos por $\mathcal{S}$ a categoria em que os objetos são *conjuntos*, os morfismos são *funções entre conjuntos* e a lei de composição é a usual entre estas funções.
2. A categoria $\mathcal{U}$ é tal que os objetos são *espaços topológicos*, os morfismos são *funções contínuas entre espaços topológicos* e a lei de composição é a usual entre estas funções.
3. Usamos $\mathcal{G}$ para denotar a categoria cujos objetos são *grupos*, os morfismos são *homomorfismos entre grupos* e a lei de composição é a usual entre homomorfismos de grupos. Além disso denotados por $\mathcal{A}b$ quando o grupo for aditivo abeliano.
4. Seja R um anel comutativo com unidade. Denotamos por $\mathcal{M}_R$ a categoria em que os objetos são *R -módulos*, os morfismos são *R -homomorfismos* e a lei de composição é a usual entre R -homomorfismos.

Definição 5.3. Dizemos que uma categoria é pequena se $\text{Obj}(\mathcal{C})$ é um conjunto em que é possível definir uma relação de pertinência e não é apenas uma classe ou coleção.

Observação 5.1. Observe que a categoria de Conjuntos $\mathcal{S}$ não é pequena, pois se fosse teríamos o paradoxo de que existe um conjunto contendo todos os conjuntos e não só a si mesmo.

Definição 5.4. Dada uma categoria $\mathcal{C}$ denotamos por $\mathcal{C}^{op}$ a categoria com os mesmos objetos de $\mathcal{C}$ porém

$$\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A).$$

A categoria $\mathcal{C}^{op}$ é chamada de categoria oposta (ou dual) de $\mathcal{C}$.

Definição 5.5. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias quaisquer. A categoria produto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é aquela em que os objetos são pares (C, D) em que $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, respectivamente. Um morfismo $(C, D) \rightarrow (C', D')$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um par (f, f') , em que $f : C \rightarrow C'$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ e $f' : D \rightarrow D'$ é um morfismo em $\mathcal{D}$. A lei de composição é dada por $(f', g') \circ (f, g) := (f' \circ f, g' \circ g)$.

Definição 5.6. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias quaisquer. Um funtor covariante F entre as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é uma aplicação $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que

1. Se $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ então $F(A) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$;
2. Se $f : A \rightarrow B$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ então $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ é um morfismo na categoria $\mathcal{D}$.
3. Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ são morfismos em $\mathcal{C}$ então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ em $\mathcal{D}$.
4. Para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$: $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Além disso, se $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ é outro funtor, definimos o funtor composição de G e F como sendo $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $(G \circ F)(C) = G(F(C))$ e $(G \circ F)(f) = G(F(f))$.

Veja que um funtor F induz uma aplicação entre $\mathcal{C}(A, B)$ e $\mathcal{D}(F(A), F(B))$.

Definição 5.7. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias quaisquer. Um funtor covariante F entre as categorias $\mathcal{C}^{\text{op}}$ e $\mathcal{D}$ é chamado de funtor contravariante. Ou seja, um funtor contravariante é uma aplicação $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que*

1. *Se $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ então $F(A) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$;*
2. *Se $f : A \rightarrow B$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ então $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$ é um morfismo na categoria $\mathcal{D}$.*
3. *Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ são morfismos em $\mathcal{C}$ então $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ em $\mathcal{D}$.*
4. *Para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$: $F(1_A) = 1_{F(A)}$.*

Funtores podem ser definidos em várias variáveis considerando categorias produto apropriada. Neste contexto, um funtor pode ser covariante em algumas variáveis e contravariante em outras. Vejamos um exemplo na definição a seguir em que trata de um funtor de duas variáveis.

Definição 5.8. *Se $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ são categorias, um funtor T de duas variáveis de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ em $\mathcal{E}$, contravariante na primeira variável e covariante na segunda, é uma aplicação tal que associa cada objeto $(C, D) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ em um objeto $T(C, D) \in \mathcal{E}$ e associa cada par de morfismos (f, g) em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, com $f \in \mathcal{C}(C, C')$ e $g \in \mathcal{D}(D, D')$, um morfismo $T(f, g)$ em $\mathcal{E}$, $T(f, g) : T(C', D) \rightarrow T(C, D')$ que satisfaça as seguintes condições,*

1. $T(1_C, 1_D) = 1_{T(C, D)}$, $\forall (C, D) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$;
2. $T(f' \circ f, g' \circ g) = T(f, g') \circ T(f', g)$, em que as composições $f' \circ f$, $g' \circ g$ estão definidas em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente.

Veja que a condição 2 implica que para cada objeto fixado C de $\mathcal{C}$ a aplicação entre objetos $T(C, -)$ e aplicação entre morfismos $T(1_C, -)$ constituem um funtor covariante de $\mathcal{D}$ para $\mathcal{E}$. Enquanto que para cada objeto fixado D de $\mathcal{D}$, $T(-, D)$ e $T(-, 1_D)$ constituem um funtor contravariante de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{E}$.

Exemplo 5.2. Apresentamos a seguir exemplos de funtores.

1. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, o funtor identidade

$$Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

é o funtor tal que $Id_{\mathcal{C}}(A) = A$ e $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$, $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $\forall f \in \mathcal{C}(A, B)$.

2. A aplicação F entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Ab}$ definida por: para todo $S \in \mathcal{S}$,

$$F(S) = \langle S \rangle,$$

e para cada $f : S_1 \rightarrow S_2 \in \mathcal{S}(S_1, S_2)$,

$$F(f) : \langle S_1 \rangle \rightarrow \langle S_2 \rangle$$

dado por $F(\sum_i s_i) := \sum_i f(s_i)$, é um funtor covariante.

3. A aplicação $U : \mathcal{Ab} \rightarrow \mathcal{S}$ que aplica cada grupo abeliano $(G, +)$ no conjunto G é um funtor denominado *Esquecido*.
4. Um exemplo interessante de um funtor de duas variáveis (contravariante na primeira variável e covariante na segunda) é o funtor $\text{Hom}_R(-, -)$ do produto de categorias $\mathcal{M}_R \times \mathcal{M}_R$ para a categoria $\mathcal{Ab}$.

Definição 5.9. *Sejam F e G funtores entre as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Uma transformação natural $\alpha : F \rightarrow G$ é uma correspondência entre funtores tal que para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ associa um morfismo $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$ em $\mathcal{D}$, de forma que para cada morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \downarrow \alpha_A & & \downarrow \alpha_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B). \end{array}$$

ou seja, $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$. Além disso, se cada α_A é um isomorfismo dizemos que α é um isomorfismo natural entre F e G e denotamos este fato por $\alpha : F \cong G$.

Definição 5.10. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias quaisquer. Um par de funtores $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ e $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ são chamados de adjuntos se para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ e $B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ existe uma bijeção*

$$\tau = \tau_{A,B} : \mathcal{B}(L(A), B) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(A, R(B)).$$

que é uma transformação natural em A no seguinte sentido: para quaisquer $f : A \rightarrow A'$ em $\mathcal{A}$ e $g : B \rightarrow B'$ em $\mathcal{B}$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}(L(A'), B) & \xrightarrow{Lf^*} & \mathcal{B}(L(A), B) & \xrightarrow{g_*} & \mathcal{B}(L(A), B') \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \mathcal{A}(A', R(B)) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{A}(A, R(B)) & \xrightarrow{Rg_*} & \mathcal{A}(A, R(B')). \end{array}$$

em que $Lf^*(\varphi) := \varphi \circ L(f)$, $g_*(\varphi) := g \circ \varphi$, $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$ e $Rg_*(\varphi) := R(g) \circ \varphi$.

Ou seja, τ é um isomorfismo natural entre os funtores $\mathcal{B}(L, -)$ e $\mathcal{A}(-, R)$ da categoria $\mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{B}$ para a categoria $\mathcal{S}$. Dizemos que L é o adjunto à esquerda de R e que R é o adjunto à direita de L e ainda que (L, R) é um par adjunto.

Exemplo 5.3. Os funtores F e U presentes no exemplo 5.2 determinam uma inclusão $S \hookrightarrow (U \circ F)(S)$. Estes funtores são, um do outro, adjuntos à esquerda e à direita já que existe o isomorfismo natural :

$$\mathcal{Ab}(F(S), A) \cong \mathcal{S}(S, U(A))$$

para todo conjunto S e um grupo abeliano A arbitrário. Observe que, deste isomorfismo natural, segue que qualquer aplicação de conjuntos $S \rightarrow U(A)$ se estende a um único homomorfismo de grupos $F(S) \rightarrow A$. Esta propriedade de extensão é o que chamamos de *Propriedade Universal*.

Definição 5.11. Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes quando existem funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $F \circ G \rightarrow Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \rightarrow Id_{\mathcal{C}}$, em que $Id_{\mathcal{C}}$ e $Id_{\mathcal{D}}$ denotam os respectivos funtores identidades. Além disso, dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ se existir um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que: $Id_{\mathcal{C}} \cong G \circ F$ e $Id_{\mathcal{D}} \cong F \circ G$.

Definição 5.12. Uma subcategoria $\mathcal{B}$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é uma coleção de determinados objetos e morfismos de $\mathcal{C}$ tais que os morfismos de $\mathcal{B}$ são fechados sob a composição e contém como morfismo a identidade i_B para todo objeto B em $\mathcal{B}$. Além disso, uma subcategoria $\mathcal{B}$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é chamada subcategoria completa quando: $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B')$ para quaisquer $B, B' \in \mathcal{B}$. Ainda, dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é completo quando as aplicações $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C'))$ são todas sobrejetoras, ou seja, todo $g : F(C) \rightarrow F(C')$ em $\mathcal{D}$ é da forma $g = F(f)$ para algum $f : C \rightarrow C'$.

Definição 5.13. Por uma subcategoria esquelética (ou esqueleto de uma categoria $\mathcal{C}$, $\text{sk}\mathcal{C}$, entendemos como sendo uma subcategoria completa tal que todo objeto de $\mathcal{C}$ é isomorfo a exatamente um objeto de $\text{sk}\mathcal{C}$.

5.2 Grupoide Fundamental

Seja $\mathcal{T}$ a categoria cujos objetos são espaços topológicos X com ponto base $x \in X$ escolhido e os morfismos são aplicações contínuas $X \rightarrow Y$ que leva o ponto base de X ao ponto base de Y . O grupo fundamental age como um funtor entre as categorias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{G}$, em que $\mathcal{G}$ é a categoria de grupos e homomorfismos de grupos (Exemplo 5.1).

Quando temos uma relação adequada de homotopia em uma categoria $\mathcal{C}$ definimos a categoria de homotopia $h\mathcal{C}$ como sendo a categoria com os mesmos objetos de $\mathcal{C}$ porém com os morfismos sendo classes de homotopia de aplicações. Nesse sentido temos, por exemplo, a categoria de homotopia $h\mathcal{U}$ de espaços sem ponto base e a categoria de homotopia $h\mathcal{T}$ de espaços com ponto base. Veja que o grupo fundamental é um funtor invariante por homotopia sobre $\mathcal{T}$, no sentido de que este produz um funtor entre $h\mathcal{T}$ e $\mathcal{G}$.

Ao tratarmos de grupo fundamental faz-se necessário escolher primeiramente um determinado ponto base. Agora estamos interessados em abordar ‘Grupos Fundamentais’ que não exijam tal escolha. Para isso, definimos o *Grupoide Fundamental*.

Definição 5.14. Denominamos de *Grupoide Fundamental* $\Pi(X)$ de um espaço X como sendo a categoria cujos objetos são os pontos de X e os morfismos $x \rightarrow y$ são classes de equivalência de caminhos de x para y . Desta maneira, o conjunto dos endomorfismos do objeto x é exatamente o grupo fundamental $\pi_1(X)$.

O termo grupoide é usado para uma categoria de todos os morfismos dos quais são isomorfismos. A ideia é que um grupo possa ser visto como sendo um grupoide com um único objeto. Tomando morfismos como sendo funtores, obtemos a categoria $\mathcal{GP}$ de grupoides. Desta forma podemos ver Π como sendo um funtor $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{GP}$, em que $\mathcal{U}$ é a categoria de espaços topológicos tal como no Exemplo 5.1.

Relembramos que um esqueleto $\text{sk}\mathcal{C}$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é uma subcategoria tal que os morfismos entre dois objetos de $\text{sk}\mathcal{C}$ são todos os morfismos entre estes objetos em $\mathcal{C}$ e com um objeto de cada classe de isomorfismo de objetos de $\mathcal{C}$. Veja que o *functor inclusão* $J : \text{sk}\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}$ é uma *equivalência de categorias*, com functor inverso $\mathcal{C} \rightarrow \text{sk}\mathcal{C}$ obtido aplicando $F(A)$ em um único objeto em $\text{sk}\mathcal{C}$ que é isomorfo a A , escolhendo um isomorfismo $\alpha_A : A \rightarrow F(A)$ e definindo $F(f) = \alpha_B \circ f \circ \alpha_A^{-1} : F(A) \rightarrow F(B)$ para um morfismo $f : A \rightarrow B$ em $\mathcal{C}$. Escolhemos α como sendo o morfismo identidade se A pertence a $\text{sk}\mathcal{C}$ e então $F \circ J = \text{Id}$; ou seja, α_A gera um isomorfismo natural $\alpha : \text{Id} \rightarrow J \circ F$.

Uma categoria $\mathcal{C}$ é conexa se quaisquer dois objetos podem ser conectados por uma sequência de morfismos. Por exemplo, uma sequência $A \longleftarrow B \longrightarrow C$ conecta A a C embora não haja morfismo entre $A \longrightarrow C$. Entretanto, um grupoide $\mathcal{C}$ é conexo se, e somente se, quaisquer dois de seus objetos são isomorfos. O grupo de endomorfismos de qualquer objeto C é então um esqueleto de $\mathcal{C}$. Com isso obtemos uma relação entre o grupo fundamental e o grupoide fundamental de um espaço conexo por caminhos X . A saber,

Teorema 5.1. *Seja X um espaço conexo por caminhos. Para cada ponto $x \in X$, a inclusão $\pi_1(X) \hookrightarrow \Pi(X)$ é uma equivalência de categorias.*

Demonstração. Basta olharmos $\pi_1(X)$ como sendo uma categoria com um único objeto x e este é um esqueleto de $\Pi(X)$. $\square$

5.3 Limites, Colimites e o Teorema de van Kampen

No intuito de apresentar a versão do Teorema de van Kampen na linguagem de categoria e funtores, primeiramente, precisamos introduzir os conceitos de Limites e Colimites. A saber,

Definição 5.15. *Sejam $\mathcal{D}$ uma categoria pequena e $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer. Um diagrama $\mathcal{D}$ -perfilado em $\mathcal{C}$ é um functor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Ainda, um morfismo $F \rightarrow F'$ de diagramas $\mathcal{D}$ -perfilados é uma transformação natural e temos a categoria $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ de diagramas $\mathcal{D}$ -perfilados em $\mathcal{C}$. Qualquer objeto C de $\mathcal{C}$ determina o diagrama constante $\underline{C}$ que envia cada objeto de $\mathcal{D}$ para C e aplica cada morfismo de $\mathcal{D}$ para o morfismo identidade de C .*

Definição 5.16. *No contexto anterior, o colimite, $\text{colim } F$, de um diagrama $\mathcal{D}$ -perfilado F é um objeto de $\mathcal{C}$ junto com um morfismo de diagramas $i : F \rightarrow \underline{\text{colim } F}$ o qual é o ‘primeiro’ entre todos tais morfismos, no seguinte sentido, se $\eta : F \rightarrow \underline{A}$ é um morfismo de diagramas, então existe uma única aplicação $\tilde{\eta} : \text{colim } F \rightarrow A$ em $\mathcal{C}$ tal que $\tilde{\eta} \circ i = \eta$. Esquematicamente, esta propriedade é expressa pela afirmação: para cada aplicação $d : D \rightarrow D'$ em $\mathcal{D}$, temos um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 F(D) & \xrightarrow{F(d)} & F(D') \\
 & \searrow i \quad \swarrow i & \\
 & \text{colim } F & \\
 & \downarrow \tilde{\eta} & \\
 & A &
 \end{array}$$

Definição 5.17. O limite de F , $\lim F$ é um objeto de $\mathcal{C}$ junto com um morfismo de diagramas $\pi : \underline{\lim F} \rightarrow F$ que é o ‘último’ morfismo entre todos os morfismos, no seguinte sentido, se $\varepsilon : \underline{A} \rightarrow F$ é um morfismo de diagramas então existe uma única aplicação $\tilde{\varepsilon} : A \rightarrow \lim F$ em $\mathcal{C}$ tal que $\pi \circ \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Esquematicamente, essa propriedade é expressa pela afirmação: para cada aplicação $d : D \rightarrow D'$ em $\mathcal{D}$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(D) & \xrightarrow{F(d)} & F(D') \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi \\ & \lim F & \\ \varepsilon \swarrow & \uparrow \tilde{\varepsilon} & \searrow \varepsilon \\ & A & \end{array}$$

Teorema 5.2. Seja $\mathcal{O} = \{U_\alpha\}$ uma cobertura do espaço X de subconjuntos abertos e conexos por caminhos tal que a interseção finita de subconjuntos de $\mathcal{O}$ também pertencem a $\mathcal{O}$. Considerando $\mathcal{O}$ como uma categoria cujos morfismos são as inclusões de subconjuntos e considerando o funtor Π , restrito aos espaços e aplicações em $\mathcal{O}$, obtém-se o diagrama de grupoides.

$$\Pi|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{GP}$$

Nessas condições, o grupoide $\Pi(X)$ é o colimite deste diagrama $\Pi|_{\mathcal{O}}$ -perfilado.

Em símbolos,

$$\Pi(X) \simeq_{\text{colim}_{U_\alpha \in \mathcal{O}}} \Pi(U_\alpha)$$

Demonstração. Devemos mostrar que $\Pi(X)$ é o colimite de $\Pi|_{\mathcal{O}}$ em que $\Pi|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{GP}$ é um diagrama $\mathcal{O}$ -perfilado. Para tanto precisamos mostrar que para um grupoide $\mathcal{C}$ e uma aplicação $\eta : \Pi|_{\mathcal{O}} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$ de um diagrama $\mathcal{O}$ -perfilado de grupoides existe uma aplicação $\tilde{\eta} : \Pi(X) \rightarrow \mathcal{C}$ de grupoide tal que $\tilde{\eta} \circ i = \eta$, ou seja, $\tilde{\eta}$ coincide com η_U em $\Pi(U)$, para cada $U \in \mathcal{O}$. Sobre objetos, isto é, sobre os pontos de X , devemos definir $\tilde{\eta}(x) = \eta_U(x)$, $x \in U$. Veja que isto independe da escolha de U já que $\mathcal{O}$ é fechado sob interseções finitas. Se um caminho $f : x \rightarrow y$ pertence inteiramente a algum U então devemos definir $\tilde{\eta}([f]) = \eta([f])$. Novamente segue pelo fato de que $\mathcal{O}$ é fechado sob interseções finitas que esta especificação é independente da escolha de U se f pertence inteiramente em mais que um U . Qualquer caminho f é a composição de um número finito de caminhos f_i , cada um dos quais pertence a um único U , e devemos definir $\tilde{\eta}[f]$ como sendo a composição dos $\tilde{\eta}[f_i]$. Veja que este resultará a uma única aplicação $\tilde{\eta}$ exigida, já que $\tilde{\eta}$ está bem definida, ou seja se $[f] = [g]$ então $\tilde{\eta}([f]) = \tilde{\eta}([g])$. De fato, suponha que f seja equivalente a g , isto é, $[f] = [g]$. A equivalência é dada via uma homotopia $h : I \times I \rightarrow X$ através de caminhos $x \rightarrow y$. Podemos subdividir o quadrado $I \times I$ em subquadrados, cada um dos quais é aplicado em um único U . Podemos escolher a subdivisão tal que a subdivisão de $\{0\} \times I$ refina a subdivisão usada para decompor f como a composição de caminhos f_i , e analogamente para g e a subdivisão de $\{1\} \times I$. Vemos que a relação $[f] = [g]$ em $\Pi(X)$ é uma consequência de um número finito de relações, cada uma das quais valem em um dos $\Pi(U)$. Portanto, $\tilde{\eta}([f]) = \tilde{\eta}([g])$. $\square$

A versão clássica do Teorema de van Kampen via Grupo Fundamental segue formalmente. Ou seja, é uma consequência essencialmente categórica da versão demonstrada.

Corolário 5.1. *Seja X um espaço conexo por caminhos e escolha um ponto base $x_0 \in X$. Seja $\mathcal{O}$ uma cobertura de X por abertos conexos por caminhos tal que a interseção finita de subconjuntos de $\mathcal{O}$ também está em $\mathcal{O}$ e que cada $U \in \mathcal{O}$ contém x_0 . Considerando $\mathcal{O}$ como uma categoria cujos morfismos são as inclusões de subconjuntos e tomando o funtor $\pi_1(-, x_0)$ restrito aos espaços e aplicações em $\mathcal{O}$, tem-se o diagrama de grupos:*

$$\pi_{1|_{\mathcal{O}}} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{G}$$

onde o grupo $\pi_1(X, x_0)$ é o colimite deste diagrama. Em símbolos,

$$\pi_1(X, x_0) \simeq_{\text{colim}_{U \in \mathcal{O}}} \pi_1(U, x_0).$$

Demonstração. Segue pelos Teoremas 5.1 e 5.2. □

Observação 5.2. O Corolário 5.1 acima é equivalente à versão Clássica do Teorema de van Kampen explorado Capítulo 4 (Teorema 4.1).

6 Conclusão

Foi apresentado num primeiro momento um panorama sobre o Grupo Fundamental e suas primeiras aplicações, a saber, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema Fundamental da Álgebra. Posteriormente, apresentamos o Teorema de van Kampen sob duas abordagens, com efeito:

- (a) A versão Clássica,
- (b) A versão via Linguagem de Categorias e Funtores,

o que faz deste trabalho uma referência interessante para um futuro professor universitário que atuará na área de Geometria e Topologia.

Referências

- [1] MAY, J. P. *A Concise Course in Algebraic Topology*. 1. ed. Chicago: University of Chicago Press, 1999.
- [2] LIBARDI, A. K. M.; MELO, T.; VIEIRA, J. P. *Invariantes Topológicos*. 1. ed. São Paulo: São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.
- [3] ANDRADE, M. G. C.; FANTI, E. L. C. *Notas de Seminários; Grupo Fundamental - Uma Visão Geométrica*. 1. ed. SJRP: Departamento Matemática Unesp/Ibilce.
- [4] MASSEY, W. S. *A basic course in algebraic topology*. 1. ed. London: Springer-Verlag, 1991.
- [5] MUNKRES, J. R. *Topology: a first course*. 2. ed. New York: Springer, 1969.
- [6] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1989.
- [7] FRALEIGH, J. B. *A first course in abstract algebra*. 7. ed. Boston: Addison-Wesley, 1994.
- [8] ARAÚJO, J. P. *Introdução à Teoria de Homotopia*. Rio Claro: Dissertação de Mestrado - Unesp IGCE Rio Claro - Orientador João Peres Vieira, 2011.
- [9] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.