



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***TÉCNICA DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS NO
DOMÍNIO DO TEMPO UTILIZANDO FUNÇÕES
ORTOGONAIS***

Katia Antonia Cardoso dos Santos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo

Ilha Solteira, Junho de 2004.

**“TÉCNICA DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS NO DOMÍNIO DO TEMPO
UTILIZANDO FUNÇÕES ORTOGONAIS”**

Katia Antonia Cardoso dos Santos

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA** na área de concentração **MECÂNICA DOS SÓLIDOS** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo - Coordenador .

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo - Orientador.

Prof. Dr. Cleudmar Amaral de Araújo.

Prof. Dr. Vicente Lopes Jr.

DEDICATÓRIA

A Deus, aos meus pais José do Socorro Cardoso dos Santos e Emília Cardoso de Araújo, e aos meus irmãos Breno Cardoso dos Santos, Rogério Cardoso dos Santos, Kleber Aleixo dos Santos e Antônio Cardoso dos Santos Neto – *in memoriam*.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo, excelente profissional, que me deu todo apoio, incentivo, ensinamentos prestados durante a realização deste trabalho e pela amizade.

Ao Prof. Dr. Amarildo Tabone, pelas idéias construtivas.

A amiga de tantas jornadas, Sandra Aparecida Hipólito; pelo convívio.

Em especial a Tobias Souza Morais, pela ajuda na conclusão deste trabalho.

A Vlademir de Jesus Silva Oliveira, pelo grande apoio e incentivo.

Aos técnicos e secretárias do departamento de engenharia mecânica (DEM/FEIS) e PPGEM em especial Alex Sander Borges, Adelaide Amaral dos Santos Passipieri, Carlos José Santana, Elias Amaral dos Santos, Elaine Nascimento Ferreira, Maria Fátima Sabino e Onilda Naves de Oliveira Akasaki, pelo apoio.

Aos colegas de pós-graduação, que participaram diretamente e indiretamente, a instituição UNESP/FEIS e ao programa de pós-graduação em engenharia mecânica PPGEM.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“Há momentos na vida em que sentimos tanto a falta de alguém que o que mais queremos é tirar esta pessoa de nossos sonhos e abraçá-la.

Sonhe com aquilo que você quiser.

Seja o que você quer ser, porque você possui apenas uma vida e nela só se tem uma chance de fazer aquilo que se quer.

Tenha felicidade bastante para fazê-la doce.

Dificuldades para fazê-la forte.

Tristeza para fazê-la humana.

E esperança suficiente para fazê-la feliz...”

Clarice Lispector

Há momentos na vida...

RESUMO

SANTOS, K. A. C. Técnica de identificação de parâmetros no domínio do tempo utilizando funções ortogonais, Ilha Solteira, 2004 119p. Dissertação (Mestrado em engenharia Mecânica – Mecânica dos Sólidos) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista.

Nas técnicas de identificação de parâmetros, procuram-se determinar os valores desconhecidos pela manipulação dos sinais de entrada e saída do sistema. O tratamento e análise de sinais são relativamente recentes na engenharia, sendo que seu desenvolvimento deu-se juntamente com o dos sensores e condicionadores de sinais e mais recentemente, com os sistemas automáticos de aquisição de dados. Vários métodos têm sido propostos para resolver problemas de identificação, embora nenhum deles possa ser considerado como sendo universalmente adequado a todas as situações. Conhecendo-se os parâmetros dos sistemas, pode-se acompanhar através de monitoramento e técnicas de identificação, a evolução de possíveis falhas devido à variação destes parâmetros. Os processos de identificação, a partir de funções ortogonais, começam com a construção de uma matriz operacional, o que permite, através de integrações a conversão de um conjunto de equações diferenciais em um conjunto de equações algébricas e conseqüentemente a obtenção dos parâmetros desconhecidos. Neste trabalho, apresentam-se as técnicas de Identificação de Parâmetros utilizando as funções ortogonais de Fourier e polinomiais de Legendre e Chebyshev.

Palavras-chave: Polinômios Ortogonais, Identificação de Parâmetros, Domínio do Tempo.

ABSTRACT

SANTOS, K. A. C. Parameter identification technique in the time domain using functions orthogonal, Ilha Solteira, 2004 119p. Master's Thesis (Mestrado em engenharia Mecânica – Mecânica dos Sólidos) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista.

In the parameter identification techniques, it is important to determine the unknown values in the manipulation of input and output signal of the system. The treatment and analysis of signals are relatively recent in the engineering, and its development took place with the sensors and the signal conditioning and recently, with the automatic data acquisition systems. Various methods have been proposed to solve identification problems, although any of them can be regarded universally adequate to all the situations. If the parameters of the systems, is known it can be accompanied, through monitoring and identification techniques, the evolution of possible fault due to the variation of the parameters. The identification process, from these types of functions, start with the construction of an operational matrix for the integration of orthogonal bases vectors, which allow the conversion of a differential equation set to a algebraic equation set, obtaining the unknown parameters. In this work, the parameter identification techniques used, the orthogonal functions of Fourier and polynomial of Legendre and Chebyshev, is presented.

Keywords: Orthogonal polynomials, Parameter identification, Time-Domain.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE FIGURAS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
1 – INTRODUÇÃO	16
1.1 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA ESTUDADA.....	18
2 – FUNDAMENTOS DO MÉTODO	22
2.1 - FUNÇÕES ORTOGONAIS.....	22
2.1.1 - <i>Séries de Fourier</i>	24
2.1.2 - <i>Polinômios de Legendre</i>	28
2.1.3 - <i>Polinômios de Jacobi</i>	31
2.1.4 - <i>Polinômios de Chebyshev</i>	35
2.1.5 - <i>Funções Block-Pulse</i>	38
2.1.6 - <i>Funções Walsh</i>	40
3 – IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS POR MEIO DE FUNÇÕES ORTOGONAIS	44
3.1 - SISTEMA LIVRE – FORMULAÇÃO USANDO O DESLOCAMENTO	45
3.2 - SISTEMA LIVRE – FORMULAÇÃO USANDO A VELOCIDADE	48
3.3 - SISTEMA LIVRE – FORMULAÇÃO USANDO A ACELERAÇÃO	50
3.4 - SISTEMA FORÇADO – FORMULAÇÃO USANDO O DESLOCAMENTO	52
3.5 - SISTEMA FORÇADO – FORMULAÇÃO USANDO A VELOCIDADE.....	54
3.6 - SISTEMA FORÇADO – FORMULAÇÃO USANDO A ACELERAÇÃO.....	56
3.7 - PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	57
4 – SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	60
4.1 - SISTEMA MECÂNICO DE 2 G.D.L (GRAUS DE LIBERDADE).....	60
4.1.1 - <i>Métodos das Séries de Fourier</i>	61
4.1.2 - <i>Método de Legendre</i>	66
4.1.3- <i>Método de Chebyshev</i>	69
4.2 - SISTEMA MECÂNICO DE 3 G.D.L (GRAUS DE LIBERDADE)	71
4.2.1 - <i>Método de Fourier</i>	71
4.2.2 - <i>Método de Legendre</i>	74
4.2.3 - <i>Método de Chebyshev</i>	78

4.3 - SISTEMA MECÂNICO COM ADIÇÃO DE RUÍDO ALEATÓRIO AO SINAL DE ENTRADA.....	79
4.4 - IDENTIFICAÇÃO DE FALHA.....	84
4.5 - IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS APLICADO A UMA VIGA.....	85
5 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	88
5.1 - MATERIAIS UTILIZADOS.....	89
5.1.1 - Equipamentos Utilizados.....	90
5.2 - SISTEMA PARA AQUISIÇÃO DE DADOS.....	90
5.3 - MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA MECÂNICO.....	91
5.4 - DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS FÍSICOS DO SISTEMA MECÂNICO.....	92
5.4.1 - Mesa Inferior.....	92
5.4.2- Mesa Intermediária.....	94
5.4.3- Mesa Superior.....	97
5.5 - ANÁLISE DO SISTEMA COMPLETO COM 3 G.D.L (GRAUS DE LIBERDADE).....	99
6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	103
7 – REFERÊNCIAS	105
ANEXO A.....	109
ANEXO B.....	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema livre ($r = 20$)	62
Tabela 4.2 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema livre ($r = 20$)	64
Tabela 4.3 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema excitado harmonicamente ($r = 20$)	65
Tabela 4.4 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Legendre para um sistema livre ($r = 5$)	68
Tabela 4.5 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Legendre para um sistema livre ($r = 10$)	68
Tabela 4.6 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema livre ($r = 5$)	69
Tabela 4.7 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema livre ($r = 10$)	70
Tabela 4.8 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema livre ($r = 20$)	70
Tabela 4.9 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema livre ($r = 20$)	72
Tabela 4.10 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema excitado harmonicamente ($r = 20$)	74
Tabela 4.11 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Legendre para um sistema excitado harmonicamente ($r = 25$)	76
Tabela 4.12 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Legendre para um sistema excitado harmonicamente ($r = 30$)	77

Tabela 4.13 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema excitado harmonicamente ($r = 25$)	78
Tabela 4.14 – Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema excitado harmonicamente ($r = 35$)	79
Tabela 4.15 – Valores obtidos a partir da resposta sem ruído ($r = 100$)	82
Tabela 4.16 – Valores obtidos a partir da resposta com ruído ($r = 100$)	83
Tabela 4.17 – Resultados da Identificação dos Parâmetros com Falha em K_1 ($r = 100$)	85
Tabela 4.18 – Parâmetros modais identificados para a viga ($r = 100$)	87
Tabela 5.1 – Resultados Experimentais da Identificação dos Parâmetros ($r = 100$)	102

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Polinômios de Legendre	29
Figura 2.2 – Polinômios de Jacobi	32
Figura 2.3 – Polinômios de Chebyshev	36
Figura 2.4 – Conjunto de funções de Block-Pulse	39
Figura 2.5 – Funções de Rademacher	41
Figura 2.6 – Funções de Walsh	42
Figura 3.1 – Fluxograma geral	59
Figura 4.1 – Sistema de 2 graus de liberdade	61
Figura 4.2 – Gráfico de deslocamento em função do tempo para um sistema livre de 2 graus de liberdade	63
Figura 4.3 – Gráfico de deslocamento em função do tempo para um sistema de 2 graus de liberdade excitado harmonicamente	66
Figura 4.4 – Gráfico de deslocamento em função do tempo para um sistema livre de 2 graus de liberdade	67
Figura 4.5– Sistema de 3 graus de liberdade	71
Figura 4.6– Sinal obtido de um sistema de 3 graus de liberdade livre	73
Figura 4.7 – Gráfico de deslocamento em função do tempo para um sistema de 3 graus de liberdade excitado harmonicamente	75
Figura 4.8– Sistema mecânico com 4 graus de liberdade	80
Figura 4.9– Resposta do sinal sem ruído	81

Figura 4.10 – Resposta do sinal com ruído	81
Figura 4.11 – Gráfico do erro relativo encontrado no parâmetro W_{n1} em função do número de termos de expansão	83
Figura 4.12 – Resposta do sistema com e sem falha	84
Figura 4.13 – Elemento de viga	85
Figura 5.1 – Sistema mecânico utilizado para a análise experimental	89
Figura 5.2 – Fluxograma de comandos apresentado na forma de diagramas de blocos no Software utilizado para a obtenção dos parâmetros do sistema	91
Figura 5.3 – Modelo matemático para o sistema mecânico utilizado	91
Figura 5.4 – Mesa vibratória inferior (Mesa m_1)	93
Figura 5.5 – Resultados obtidos pelo Software DASyLab	94
Figura 5.6 – Obtenção de rigidez e amortecimento equivalentes da mesa m_2 , estando a mesa m_1 fixada em uma placa suporte de ferro fundido, presa à bancada	95
Figura 5.7 – Resposta amortecida da mesa m_2 a uma entrada impulsiva qualquer	96
Figura 5.8 – Frequência amortecida da mesa m_2	96
Figura 5.9 – Obtenção de rigidez e amortecimento equivalentes da mesa m_3 , estando a mesa m_1 e a mesa m_2 fixada em uma placa suporte de ferro fundido, presa à bancada	97
Figura 5.10 – Resposta amortecida da mesa m_3 a uma entrada impulsiva qualquer	98
Figura 5.11 – Frequência amortecida da mesa m_3	98
Figura 5.12 – Fluxograma de comandos apresentado na forma de diagramas de blocos, utilizado quatro canais para aquisição dos sinais de deslocamento e força	100
Figura 5.13 – Sinais medidos na estrutura	101

LISTA DE SÍMBOLOS

[A]	Matriz Dinâmica do Sistema
[K]	Matriz de Rigidez
[M]	Matriz de Massa
[P]	Matriz Operacional de Integração
[C]	Matriz de Amortecimento
$\{\tilde{e}\}$	Vetor para simplificação na forma de apresentação da matriz operacional de integração
$\{\tilde{I}\}$	Matriz para simplificação na forma de apresentação da matriz operacional de integração
$\{f(t)\}$	Vetor das forças de excitação
$\{\varphi(t)\}$	Conjunto de funções ortogonais ou a base vetorial de Fourier
$\{\phi(t)\}$	Conjunto de funções ortonormais
$\{L(t)\}$	Base vetorial de Legendre

$\{J(t)\}$	Base vetorial de Jacobi
$\{T(t)\}$	Base vetorial de Chebyshev
$\{\psi(t)\}$	Base vetorial de Block-Pulse
$\{w(t)\}$	Base vetorial de Walsh
ω	Frequência de Excitação
ω_n	Frequência Natural
ω_d	Frequência Amortecida
ξ	Fator de amortecimento
σ	Variável qualquer
$x(t)$	Deslocamento [m]
$\dot{x}(t)$	Velocidade [m/s]
$\ddot{x}(t)$	Aceleração [m/s ²]
a_0, a_n e b_n	Coefficientes da série de Fourier
c_0, c_n e d_n	Coefficientes de integração
ρ	Densidade do material
E	Módulo de elasticidade

I	Momento de inércia
S	Área da secção transversal
L	Comprimento do elemento
N	Número de graus de liberdade
NPT	Número de pontos amostrados
r	Termos de expansão
T	Período de amostragem
$P_i^{(\alpha,\beta)}$	Polinômio de Jacobi de grau i e ordem (α,β)

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um dos fatores de interesse das indústrias no desenvolvimento de novas técnicas de detecção e localização de falhas é a preocupação com a segurança de seus sistemas, havendo a necessidade de supervisão e monitoramento para que as falhas sejam sanadas o mais rápido possível.

O desenvolvimento de novas técnicas de detecção e localização de falhas em sistemas mecânicos submetidos a carregamentos dinâmicos tem evoluído muito nos últimos anos em função da necessidade cada vez maior das indústrias em manter os equipamentos em funcionamento sem paradas abruptas.

A ciência tem dedicado especial atenção nos últimos anos à construção de modelos matemáticos capazes de representar o comportamento dinâmico dos mais variados tipos de sistemas. Paralelamente, constata-se o grande interesse científico que tem despertado a obtenção de dados associados aos fenômenos em observação, que sejam capazes de levar a um maior conhecimento dos próprios fenômenos, permitindo a identificação de características que os representem convenientemente dentro dos modelos estabelecidos (D'azzo e Houpis, 1988). Particularmente, no caso dos sistemas mecânicos vibratórios, tem-se que descrever matematicamente seus comportamentos dinâmicos, partindo de modelos físicos preestabelecidos. Desta forma, escrevem-se as chamadas equações do movimento, com base nas leis básicas que regem os fenômenos envolvidos. As análises dinâmicas, feitas em seguida, dependem da integração de tais equações, o que podem ser feitas tanto por métodos analíticos como numéricos.

Assim, passa-se a conhecer a resposta do sistema a diferentes tipos de excitações, sendo possível, daquilo que se aprendeu na análise, elaborar recomendações de projeto, introduzindo-se dentro da engenharia propriamente dita (Emre E Silverman, 1980) e (Frank, 1990). Entretanto, comumente, nas equações diferenciais representativas dos sistemas dinâmicos, alguns parâmetros são desconhecidos, geralmente pela impossibilidade ou inviabilidade de obtenção de seus valores através de medidas diretas das grandezas físicas que eles representam dentro do modelo (Ding et al., 1994). É dentro do contexto acima que se recorrem a técnicas de identificação de parâmetros (Chow e Willsky, 1984), (Cooper E Desforges, 1996), (Gertler, 1988) e (Melo, 1998), nas quais se procuram determinar os valores desconhecidos, pela manipulação dos sinais de excitação, de resposta e das variáveis de estado do sistema.

Nos últimos anos, têm-se desenvolvido vários métodos para a identificação de parâmetros de sistemas dinâmicos utilizando funções ortogonais (Trendafilova et al., 2000), embora nenhum deles possa ser considerado universalmente adequado a todas as situações (Rico e Heydt, 2000). Os processos de identificação a partir destes tipos de funções começam com a construção de uma matriz operacional para a integração de vetores de bases ortogonais, o que permite a conversão de um conjunto de equações diferenciais em um conjunto de equações algébricas, que é então resolvido para se obter os parâmetros desconhecidos. Desta forma, apresenta-se uma metodologia unificada para aplicação de vários tipos de funções ortogonais na identificação de sistemas mecânicos de vários graus de liberdade. O uso de funções ortogonais reduz o problema da análise de sensibilidade do vetor de estado, à solução de um sistema de equações algébricas lineares. Este procedimento requer a inversão de matrizes que podem ser de ordem elevada ou possuir mal condicionamento numérico. Várias funções são utilizadas para a identificação de parâmetros de sistemas mecânicos assim, serão apresentadas as funções de Walsh, Block-Pulse, Fourier e polinomiais de Chebyshev, Jacobi e Legendre (Chen e Patton, 1996), (Chen e Hsiao, 1975), (Chen et al., 1977) e (Chow e Willsky, 1984). Neste trabalho foram implementadas técnicas de identificação utilizando funções de Fourier, Legendre e Chebyshev.

1.1 - Revisão Bibliográfica Estudada

Será apresentada uma revisão bibliográfica, onde pode-se observar a utilização de funções ortogonais para resolver problemas de dinâmica de sistemas mecânicos, mostrando ser uma ferramenta eficiente muito utilizada.

Ibrahim, S. R. e Mikulcik, E. C., (1973): É apresentada uma técnica usando a resposta livre do sistema para estabelecer um modelo matemático que proporcione a determinação dos parâmetros do sistema. Simulações comprovam que a técnica desenvolvida à partir de sistemas com os parâmetros concentrados ou distribuídos, tanto na presença de frequências naturais próximas quanto com grandes amortecimentos, apresenta bons resultados.

Paraskevopoulos, P. N., Sparis, P. D. e Mouroutsos, S. G., (1985): É apresentada uma expressão geral, a qual é análoga às outras expressões desenvolvidas previamente para outros tipos de funções ortogonais, como as funções de Walsh, Block-pulse, Laguerre, Legendre e Chebyshev. Este trabalho se destina mais especificamente à resolução do problema de integração das séries de Fourier. Os autores desenvolvem uma matriz, denominada Matriz Operacional de Integração, que pode ser utilizada em casos de identificação de forças de excitação bem como na estimação de parâmetros. Devido as propriedades integrais das funções seno e co-seno, a metodologia usada apresenta melhores resultados para as séries de Fourier que para outros tipos de funções ortogonais.

Chang, R.-Y. e Wang, M.-L., (1985): Uma equação linear é resolvida e pode ser chamada de Método dos Polinômios de Legendre. O método é proposto para o problema de estimação dos parâmetros do sistema. A resposta do sistema é particionada em vários intervalos onde cada segmento é representado por uma série de polinômios de Legendre. Um algoritmo é proposto para a resolução do sistema de equações que contém os coeficientes polinomiais de Legendre. Um número pequeno de coeficientes, resultantes da expansão polinomial, é suficiente para alcançar resultados acurados, obtendo assim um ganho computacional.

Fritzen, C.-P., (1986): Um procedimento para o cálculo das matrizes de inércia, amortecimento e rigidez de sistemas mecânicos é apresentado a partir dos dados de entrada e saída do sistema. São estimados, como exemplo, os parâmetros físicos de um sistema vibratório com presença de ruídos. O método apresenta menos sensibilidade a ruídos que alguns outros métodos conhecidos.

Chung, H.-Y., (1987): Neste trabalho é apresentado um método de estimação de parâmetros baseado numa aproximação que resolve a integração das séries de Fourier. O algoritmo de resolução é similar a outros utilizados para o mesmo problema em funções ortogonais. Desde que a maioria dos elementos da Matriz Operacional de Integração sejam nulos, há um ganho computacional considerável. Além disso, o método apresentado é mais simples que outros conhecidos.

Frank, P. M. e Selinger, R., (1991): É apresentada uma aproximação por redundância de modelos baseados na detecção e isolamento de falhas em processos dinâmicos. O trabalho também frisa os defeitos que podem levar a falsos alarmes, como falhas nos atuadores (e/ou em componentes da planta dinâmica e/ou em sensores), erros entre o sistema real e o modelo matemático ou perturbações nas medidas.

Melo, G. P., (1992): Apresenta um método para a identificação de parâmetros em sistemas mecânicos com vários graus de liberdade operando no domínio do tempo. O método baseia-se na expansão das funções de excitação e de resposta do sistema em termos de séries de Fourier e na transformação das equações diferenciais do movimento em equações algébricas por meio de integrações sucessivas, usando a Matriz Operacional de Integração. Cita a possibilidade de identificação de forças de excitação periódicas através do conhecimento dos parâmetros do sistema e da expansão das respostas. Realiza simulações computacionais e um experimento para a comprovação das teorias.

Melo, G. P. e Steffen Jr. V., (1993): Aplicando um método para identificação de sistemas mecânicos com vários graus de liberdade operando no domínio do tempo, baseando-se na expansão das funções de excitação e de resposta do sistema em termos de series de Fourier e na transformação das equações diferenciais do movimento em equações algébricas através de integrações sucessivas e da utilização de uma matriz operacional para integração das funções que formam aquelas séries. O

método pode ser resumido em três etapas fundamentais: a primeira é a expansão da excitação e da resposta em séries de Fourier; a segunda é a integração das equações de movimento e emprego de uma matriz operacional para integração das séries de Fourier; e a terceira é a estimativa dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados.

Wang, D. e Fellow, A. H., (1994): Os autores apresentam um procedimento para a estimação de parâmetros baseado num sistema de elementos finitos no domínio do tempo. Para isto, o método não requer o conhecimento das entradas do sistema, assim, as entradas podem ser de qualquer natureza. Foram considerados três exemplos onde se discute também a presença de ruídos.

Silva, L. A., (2000): Enfoca três métodos para a identificação das forças de excitação em sistemas dinâmicos, o Método das Coordenadas Modais, que utiliza um conjunto de auto-soluções (frequências naturais, massas generalizadas e autovetores); o Método Baseado na Deconvolução no Domínio do Tempo, que é constituído por um conjunto de respostas ao impulso; e o Método Baseado no Modelo Estrutural Inverso, que a partir das equações de estado intercambia vetores de entrada e saída.

Pacheco R.P., (2001): Trata do estudo de métodos do domínio do tempo que utilizam funções ortogonais, aplicados à identificação e análise de sensibilidade de sistemas mecânicos. Desenvolve-se uma metodologia unificada baseada na propriedade de integração que tais funções possuem, a qual permite transformar as equações diferenciais em um sistema de equações algébricas. A solução deste sistema permite identificar parâmetros modais ou estruturais, forças de excitação e condições iniciais de deslocamento e velocidade, dependendo do desejado.

Pacheco R.P. e Steffen Jr. V., (2003): É apresentada uma metodologia para identificar parâmetros físicos de sistemas não lineares por funções ortogonais. Estas funções são facilmente integradas usando uma matriz operacional de integração. Consequentemente isto possibilita a transformação da equação diferencial não linear de movimento em equação algébrica. Depois da manipulação matemática os parâmetros desconhecidos lineares e não lineares são determinados.

Este trabalho teve uma influência do trabalho de (Melo,1992) e (Pacheco, 2001), onde se estudou as funções ortogonais e dando uma especial atenção para as funções de Legendre e Chebyshev na utilização destas funções para identificação de parâmetros de diversos sistemas mecânicos excitado sobre diversas maneiras.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS DO MÉTODO

2.1 - Funções ortogonais

Seja um conjunto de funções reais $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ definidas no intervalo $[a, b] \in \mathfrak{R}$. Tal conjunto é dito ortogonal neste intervalo se (Spiegel, 1976):

$$\int_a^b \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = K \quad (2.1)$$

na qual m , n e k são índices utilizados para diferenciar as funções e K é uma constante igual a zero se $m \neq n$ e diferente de zero se $m = n$.

O conjunto de funções $\phi_k(t)$ é dito ortonormal se for válida a relação (Spiegel, 1976):

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \delta_{mn} \quad (2.2)$$

na qual δ_{mn} , denominado delta de Kronecker, se define como “0” se $m \neq n$ ou “1” se $m = n$ e $\phi_k(t)$ é o conjunto de funções ortonormais.

Se o conjunto $\phi_k(t)$ é ortonormal em relação à função densidade ou função peso $w(t)$ na qual $w(t) \geq 0$, então o conjunto de funções ortonormais é obtido através da equação:

$$\phi_k(t) = \sqrt{w(t)}\varphi_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

e verifica-se a relação:

$$\int_a^b \varphi_m(t)\varphi_n(t)w(t)dt = \delta_{mn} \quad (2.4)$$

Se uma função $f(t)$ é contínua ou seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$, então $f(t)$ pode ser expandida em séries de funções ortonormais, ou seja:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \quad (2.5)$$

Tais séries, chamadas séries ortonormais, constituem generalizações das séries de Fourier. Admitindo que o somatório na Eq. (2.5) convirja para $f(t)$, pode-se multiplicar ambos os membros por $\phi_m(t)$ e integrá-los no intervalo $[a, b]$, obtendo-se:

$$c_m = \int_a^b f(t)\phi_m(t)dt \quad (2.6)$$

na qual c_m são os coeficientes generalizados de Fourier.

Neste trabalho, calculam-se estes coeficientes resolvendo a integral dada pela Eq. (2.6) aplicando a Regra do Trapézio (Hornbeck, 1975).

Um conjunto finito de funções ortonormais possui a seguinte propriedade em relação à sua integração sucessiva no intervalo $[0, t]$:

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \phi(\sigma) d\sigma^n = [P]^n \{\phi(t)\} \quad (2.7)$$

n vezes

na qual: n é o número de vezes que a função foi integrada, $\{\phi_m(t)\} = \{\phi_0(t) \ \phi_1(t) \ \dots \ \phi_r(t)\}^T$ é o conjunto finito da série ortonormal e $[P]$ é uma matriz quadrada de ordem “ r ” com elementos constantes denominada matriz operacional de integração.

Na verdade, se for utilizada a base vetorial completa, ou seja, se a série não for truncada, a relação obtida na Eq. (2.7) é de igualdade. Porém, na prática, isto se torna inviável, devido a ordem elevada da matriz $[P]$.

2.1.1 - Séries de Fourier

A base vetorial $\{\varphi(t)\}$ das séries de Fourier, no intervalo $[0, T]$, é dada por Spiegel, (1976):

$$\{\varphi(t)\} = \underbrace{\{\varphi_0(t) \ \varphi_1(t) \ \dots \ \varphi_s(t)\}}_{\varphi_n(t)} \underbrace{\{\varphi_1^*(t) \ \dots \ \varphi_s^*(t)\}}_{\varphi_n^*(t)} \quad (2.8)$$

na qual:

$$\varphi_n(t) = \cos \frac{2n\pi t}{T} \quad n = 0, 1, \dots, s$$

$$\varphi_n^*(t) = \sin \frac{2n\pi t}{T} \quad n = 1, \dots, s$$

com $T =$ Período.

Utilizando as equações anteriores, pode-se obter as primeiras funções das séries de Fourier:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= 1 \\
\varphi_1(t) &= \cos \frac{2\pi t}{T} & \varphi_1^*(t) &= \text{sen} \frac{2\pi t}{T} \\
\varphi_2(t) &= \cos \frac{4\pi t}{T} & \varphi_2^*(t) &= \text{sen} \frac{4\pi t}{T}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Uma função $f(t)$ pode ser expandida em séries de Fourier da seguinte forma:

$$f(t) = a_0 \varphi_0(t) + \sum_1^{\infty} \{a_n \varphi_n(t) + b_n \varphi_n^*(t)\} \tag{2.10}$$

Na qual os coeficientes de Fourier a_n e b_n são dados por:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt & n &= 1, 2, \dots \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen} \frac{2n\pi t}{T} dt & n &= 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Na prática, a expansão é feita truncando-se a série com “ r ” termos ($r = 2s + 1$); sendo s o número de termos em senos e cossenos.

$$f(t) \cong a_0 \varphi_0(t) + \sum_1^s \{a_n \varphi_n(t) + b_n \varphi_n^*(t)\} \tag{2.12}$$

Para a obtenção da matriz operacional de integração cada função da base vetorial é integrada no intervalo $[0, t]$, Paraskevopoulos e Kekkeris, (1984):

$$\int_0^t \varphi_0(\sigma) d\sigma = \int_0^t d\sigma = t \tag{2.13}$$

$$\int_0^t \varphi_n(\sigma) d\sigma = \int_0^t \cos \frac{2n\pi\sigma}{T} d\sigma = \frac{T}{2n\pi} \int_0^t d\left(\sin \frac{2n\pi\sigma}{T}\right) = \frac{T}{2n\pi} \varphi_n^*(t) \quad (2.14)$$

$$\int_0^t \varphi_n^*(\sigma) d\sigma = \int_0^t \sin \frac{2n\pi\sigma}{T} d\sigma = \frac{-T}{2n\pi} \int_0^t d\left(\cos \frac{2n\pi\sigma}{T}\right) = \frac{T}{2n\pi} \varphi_0(t) - \frac{T}{2n\pi} \varphi_n(t) \quad (2.15)$$

Aproximando-se da Eq. (2.13) por uma série truncada de Fourier, resulta:

$$\int_0^t \varphi_0(\sigma) d\sigma = \int_0^t d\sigma = t \cong c_0 \varphi_0(t) + \sum_{n=1}^S \{c_n \varphi_n(t) + d_n \varphi_n^*(t)\} \quad (2.16)$$

Os coeficientes c_n e d_n são calculados através das Eq. (2.11), obtendo-se:

$$\begin{aligned} c_0 &= T/2 \\ c_n &= 0 & n &= 1, 2, \dots, s \\ d_n &= -T/n\pi & n &= 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (2.17)$$

Considerando as Eqs. (2.14) a (2.17) tem-se:

$$\int_0^t \{\varphi(\tau)\} d\tau \cong [P]\{\varphi(t)\} \quad (2.18)$$

na qual:

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{T}{\pi} & -\frac{T}{2\pi} & \dots & -\frac{T}{s\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{T}{2\pi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{T}{4\pi} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{T}{2s\pi} \\ \frac{T}{2\pi} & -\frac{T}{2\pi} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{T}{4\pi} & 0 & -\frac{T}{4\pi} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{T}{2s\pi} & 0 & 0 & \dots & \frac{T}{2s\pi} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

De uma forma mais compacta:

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} & \{0\}_{1xs} & -\frac{T}{\pi} \{\tilde{e}\}_s^T \\ \{0\}_{sxl} & [0]_{sxs} & \frac{T}{2\pi} [\tilde{I}]_{sxs} \\ \frac{T}{2\pi} \{\tilde{e}\}_s & -\frac{T}{2\pi} [\tilde{I}]_{sxs} & [0]_{sxs} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

na qual:

$$\{\tilde{e}\}_s = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \\ 1/s \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$[\tilde{I}]_{sxs} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & 0 \\ & & 1/3 & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & 1/s \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Encontra-se no Anexo A, a identificação dos parâmetros para o sistema de 1 grau de liberdade utilizando as funções de Fourier, onde foi desenvolvida mais detalhadamente esta metodologia.

2.1.2 - Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $p_n(z)$, $n=0,1,2,\dots$, obtidos a partir da equação diferencial de Legendre, são ortogonais no intervalo $z \in [-1,1]$ e são gerados pela fórmula recursiva (Hwang e Chen, 1985) e (Shih e Kung, 1985):

$$(n+1)p_{n+1}(z) = (2n+1)zp_n(z) - np_{n-1}(z), \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

com: $p_0(z) = 1$ e $p_1(z) = z$ e p é um parâmetro real a ser escolhido. Na Fig. (2.1) encontra-se os primeiros polinômios de Legendre.

Para o uso prático dos polinômios de Legendre no intervalo de tempo de interesse, $t \in [0, t_f]$, é necessário fazer uma mudança no domínio de definição através da seguinte transformação de variáveis (Chang e Wang, 1985):

$$z = \frac{2t}{t_f} - 1 \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (2.24)$$

Os polinômios transformados de Legendre $p\left(\frac{2t}{t_f} - 1\right)$, de agora em diante denominados $L_n(t)$, são obtidos a partir da fórmula recursiva:

$$L_{n+1}(t) = \frac{(2n+1)}{(n+1)} \left(\frac{2t}{t_f} - 1 \right) L_n(t) - \frac{n}{(n+1)} L_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \quad (2.25)$$

com $L_0(t) = 1$ e $L_1(t) = \frac{2t}{t_f} - 1$.

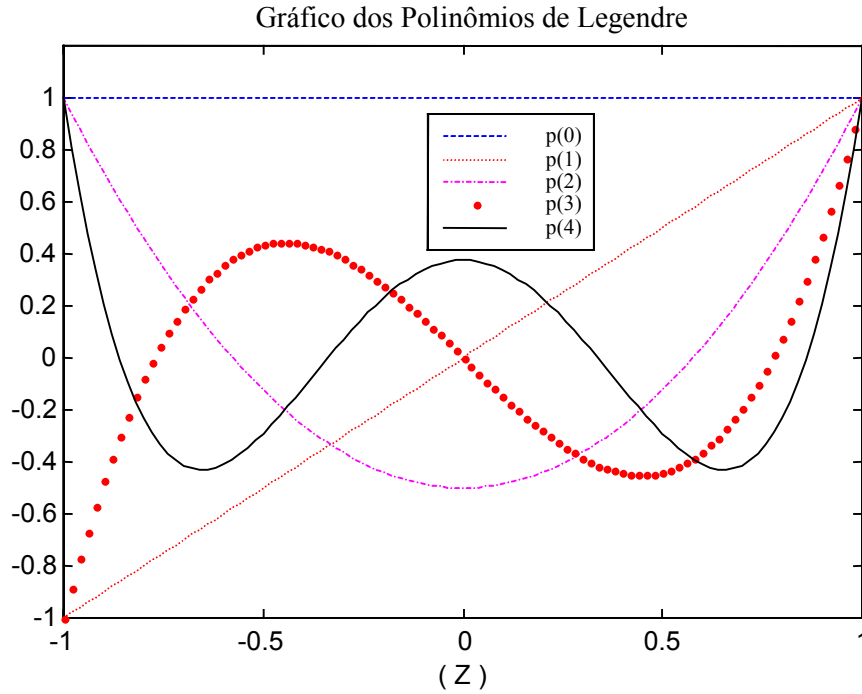


Figura (2.1) – Polinômios de Legendre.

Os polinômios transformados de Legendre satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade no intervalo $[0, t_f]$ (Chang e Wang, 1985):

$$\int_0^{t_f} L_n(t)L_m(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m \\ \frac{t_f}{(2n+1)} & \text{para } m = n \end{cases} \quad (2.26)$$

Uma função $f(t)$ pode ser aproximada por um número finito de termos de polinômios transformados de Legendre:

$$f(t) \cong \sum_{n=0}^{r-1} f_n L_n(t) \quad (2.27)$$

na qual: $f_n = \frac{2n+1}{t_f} \int_0^{t_f} f(t)L_n dt$ são os coeficientes das séries de Legendre.

A fórmula derivativa recursiva dos polinômios transformados de Legendre é dada por:

$$L_n = \frac{t_f}{2(2n+1)} \left(\frac{d}{dt} L_{n+1}(t) - \frac{d}{dt} L_{n-1}(t) \right) \quad (2.28)$$

Considerando-se a base vetorial $\{L(t)\} = \{L_0(t) \ L_1(t) \ \dots \ L_{r-1}(t)\}$ e integrando-se Eq. (2.24) de $[0, t]$, obtém-se a matriz operacional de integração dos polinômios transformados de Legendre:

$$\int_0^t \{L(\tau)\} d\tau = [P]\{L(t)\} \quad (2.29)$$

na qual:

$$[P] = \frac{t_f}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{2r-3} & 0 & \frac{1}{2r-3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2r-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

2.1.3 - Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi podem ser representados em termos de funções hipergeométricas no intervalo $z \in [-1, 1]$ (Chou, 1987):

$$P_i^{(\alpha, \beta)}(z) = (-1)^i \frac{(\beta+1)_i}{i!} {}_2F_1 \left\langle \begin{matrix} -i, i + \alpha + \beta + 1 \\ \beta + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1+z}{2} \right\rangle \quad (2.31)$$

na qual: α e β são parâmetros com $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Na Fig. (2.2) encontra-se os primeiros polinômios de Jacobi.

$$(\beta+1)_i = (\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+i)$$

$$(\beta+1)_0 = 1$$

$$\lambda = \alpha + \beta + 1$$

$$F_1 \left\langle \begin{matrix} -i, i + \alpha + \beta + 1 \\ \beta + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1+z}{2} \right\rangle = \sum_{k=0}^i \frac{(-i)_k (i + \lambda)_k}{(\beta+1)_k k!} \left(\frac{1+z}{2} \right)^k$$

A fórmula de recorrência para a obtenção dos polinômios de Jacobi é dada por Horng e Chou (1986):

$$\begin{aligned} 2i(i + \alpha + \beta)(2i + \alpha + \beta - 2)P_i^{\alpha+\beta}(z) = \\ (2i + \alpha + \beta - 1)[(2i + \alpha + \beta)(2i + \alpha + \beta - 2)z + \alpha^2 - \beta^2]P_{i-1}^{(\alpha+\beta)}(z) \quad , i = 2, 3, \dots \\ - 2(i + \alpha - 1)(i + \beta - 1)(2i + \alpha + \beta)P_{i-2}^{(\alpha+\beta)}(z) \end{aligned} \quad (2.32)$$

na qual:

$$\begin{aligned} P_0^{(\alpha+\beta)}(z) &= 1 \\ P_1^{(\alpha+\beta)}(z) &= \frac{1}{2} [(\lambda + 1)z + \alpha + \beta] \end{aligned} \quad (2.33)$$

A integração dos polinômios de Jacobi resulta:

$$\int_{-1}^z P_i^{(\alpha, \beta)}(w) dw = 2 \left[\frac{i + \lambda}{(2i + \lambda + 1)(2i + \lambda)} P_{i+1}^{(\alpha, \beta)}(z) + \frac{\alpha - \beta}{(2i + \lambda + 1)(2i + \lambda - 1)} P_i^{(\alpha, \beta)}(z) - \frac{(i + \alpha)(i + \beta)}{(2i + \lambda)(2i + \lambda - 1)(i + \lambda - 1)} P_{i-1}^{(\alpha, \beta)}(z) - \frac{(-1)^i \Gamma(i + \beta + 1)}{(i + \lambda - 1)(i + 1) \Gamma(\beta)} P_0^{(\alpha, \beta)}(z) \right] \quad (2.34)$$

na qual $\Gamma(*)$ é a função gama.

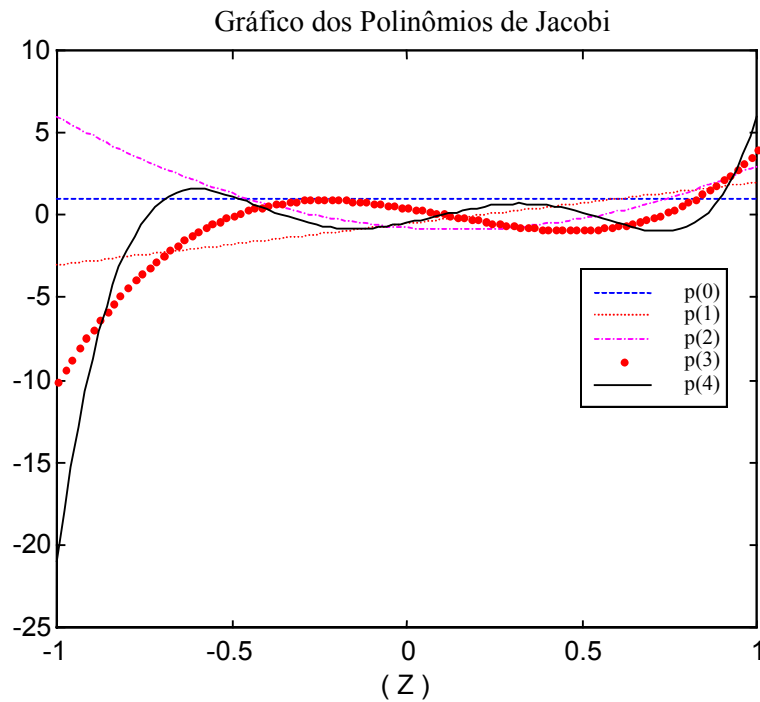


Figura (2.2) – Polinômios de Jacobi.

Para a conveniente aplicação prática dos polinômios de Jacobi, a variável independente “z” é transformada para a variável tempo no domínio $t \in [0, t_f]$, da seguinte forma:

$$z = \frac{2t}{t_f} - 1 \quad (2.35)$$

Os polinômios transformados de Jacobi são definidos por Horng e Chou (1987):

$$J_i = P_i^{(\alpha, \beta)}[2t/t_f - 1] = (-1)^i \frac{(\beta + 1)!}{i!} {}_2F_1 \left\langle \begin{matrix} -i, i + \lambda \\ \beta + 1 \end{matrix} \middle| \frac{t}{t_f} \right\rangle \quad (2.36)$$

E sua fórmula de recorrência é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & 2i(i + \alpha + \beta)(2i + \alpha + \beta - 2)J_i(t) = \\ & = (2i + \alpha + \beta - 1)[(2i + \alpha + \beta)(2i + \alpha + \beta - 2)(2t/t_f - 1) + \alpha^2 - \beta^2]J_{i-1}(t) - \\ & 2(i + \alpha - 1)(i + \beta - 1)(2i + \alpha + \beta)J_{i-2}(t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

com $i = 2, 3, \dots$

na qual:

$$\begin{aligned} j_0(t) &= 1 \\ j_1(t) &= -(\beta + 1) + (\lambda + 1)t/t_f \end{aligned} \quad (2.38)$$

Os polinômios transformados de Jacobi satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int_0^{t_f} t^\beta (t_f - t)^\alpha J_i(t) J_j(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ \frac{\Gamma(i + \alpha + 1)\Gamma(i + \beta + 1)}{(2i + \lambda)! \Gamma(i + \lambda)} t_f^\lambda & \text{para } i = j \end{cases} \quad (2.39)$$

A expansão de uma função arbitrária $f(t)$, em uma série truncada de polinômios transformados de Jacobi é dada por:

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^{r-1} f_i J_i(t) \quad (2.40)$$

na qual

$$f_i = \frac{(2i + \lambda)! \Gamma(i + \lambda)}{\Gamma(i + \alpha + 1)\Gamma(i + \beta + 1)t_f^\lambda} \int_0^{t_f} t^\beta (t_f - t)^\alpha f(t) J_i(t) dt \quad (2.41)$$

são os coeficientes das séries de Jacobi.

Das Eqs. (2.28) e (2.29), a integração dos polinômios transformados de Jacobi se torna:

$$\int_0^{t_f} J_i(w)dw = t_f \left[\frac{i+\lambda-1}{(2i+\lambda-1)(2i+\lambda-2)} J_{i+1}(t) + \frac{\alpha-\beta}{(2i+\lambda+1)(2i+\lambda-1)} J_i(t) - \frac{(i+\alpha+1)}{(2i+\lambda-1)(2i+\lambda-2)} J_{i+1}(t) + \frac{(-1)^i \Gamma(i+\beta+1)}{(i+\lambda-1)(i+1)\Gamma(\beta)} J_0(t) \right] \quad (2.42)$$

A equação acima pode ser representada na forma matricial:

$$\int_0^t \{J(\tau)\}d\tau = [P]\{J(t)\} \quad (2.43)$$

na qual [P] é a matriz operacional de integração dada por:

$$[P] = t_f \begin{bmatrix} b_0 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & d_1 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & e_1 & d_2 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & e_2 & d_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{r-2} & 0 & 0 & 0 & e_{r-3} & d_{r-2} & c_{r-2} \\ b_{r-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{r-2} & d_{r-1} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

na qual:

$$b_0 = \left(\frac{\beta+1}{\lambda+1} \right) \quad (2.45)$$

$$b_1 = \left[\frac{-(\alpha+1)(\beta+1)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)} \right] - \frac{\Gamma(\beta+2)}{2!\lambda\Gamma(\beta)} \quad (2.46)$$

$$b_i = \frac{(i)^i \Gamma(i+\beta+1)}{(i+\lambda-1)!\Gamma(\beta)} \quad (i=2,3,\dots,r-1) \quad (2.47)$$

$$c_i = \frac{(i+\lambda-1)}{(2i+\lambda-1)(2i+\lambda-2)} \quad (i=1,2,\dots,r-1) \quad (2.48)$$

$$d_i = \frac{(\alpha - \beta)}{(2i + \lambda + 1)(2i + \lambda - 1)} \quad (i = 1, 2, \dots, r-1) \quad (2.49)$$

$$e_i = \frac{-(i + \alpha + 1)(i + \beta + 1)}{(2i + \lambda + 1)(i + \lambda)} \quad (i = 1, 2, \dots, r-2) \quad (2.50)$$

2.1.4 - Polinômios de Chebyshev

O polinômio de Chebyshev de primeira ordem, denominado de $P_i(z)$, é a solução da equação de Chebyshev definida da seguinte forma (Mohan e Datta, 1988):

$$(1 - z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} - z \frac{dy}{dz} + i^2 z = 0 \quad (2.51)$$

Os polinômios de Chebyshev são ortogonais no intervalo $z \in [-1, 1]$ e são definidos como:

$$P_i(z) = \cos(i \cos^{-1} z) \quad (2.52)$$

ou:

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} (-1)^j \frac{j!}{(2j)!(i-2j)!} (1 - z^2)^j z^{i-2j} \quad (2.53)$$

na qual a notação $\lfloor i/2 \rfloor$ significa a função mais próxima do inteiro. Utilizando a Eq. (2.53), os primeiros polinômios de Chebyshev são dados por:

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 & P_3(z) &= 4z^3 - 3z \\ P_1(z) &= z & P_4(z) &= 8z^4 - 8z^2 + 1 \\ P_2(z) &= 2z^2 - 1 & P_5(z) &= 16z^5 - 20z^3 + 5z \end{aligned} \quad (2.54)$$

Na Fig. (2.3) encontra-se os primeiros polinômios de Chebyshev.

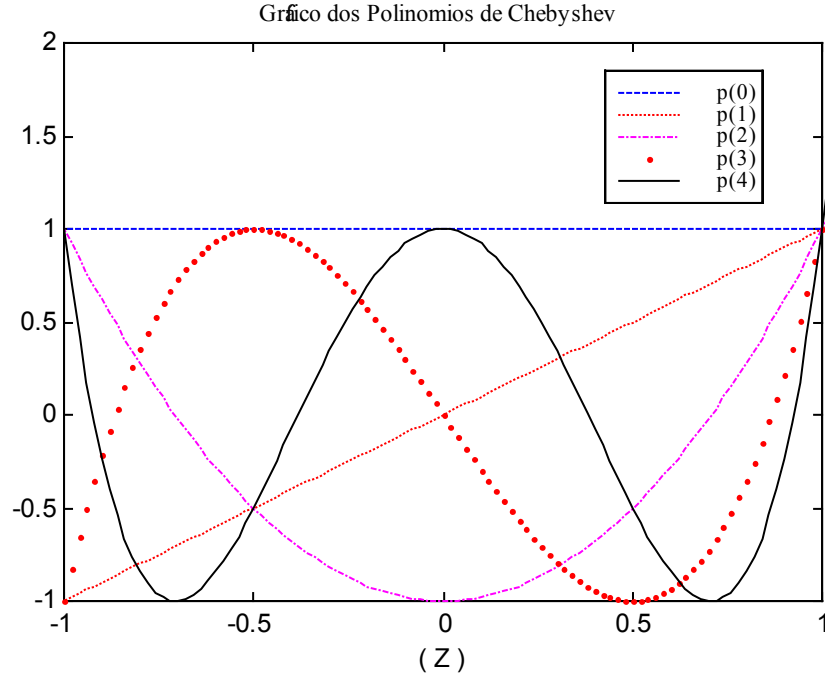


Figura (2.3) – Polinômios de Chebyshev.

A fim de resolver problemas práticos, o domínio deve ser transformado para $t \in [0, t_f]$ através da seguinte transformação de coordenadas (Chou e Horng, 1985):

$$z = \frac{2t}{t_f} - 1 \quad (2.55)$$

Os polinômios transformados de Chebyshev, $P_i(2t/t_f - 1) = T_i(t)$, são obtidos pela fórmula de recorrência:

$$T_{i+1}(t) = 2 \left(\frac{2t}{t_f} - 1 \right) T_i(t) - T_{i-1}(t) \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

com $T_0(t) = 1$ e $T_1(t) = \frac{2t}{t_f} - 1$.

A condição de ortogonalidade dos polinômios transformados de Chebyshev é:

$$\int_0^{t_f} \frac{T_i(t)T_j(t)}{\sqrt{t(t_f-t)}} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \pi/2 & \text{se } i = j \neq 0 \\ \pi & \text{se } i = j = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Uma função do tempo arbitrária $f(t)$ pode ser aproximada por polinômios de Chebyshev, da seguinte forma:

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^{r-1} f_i T_i(t) \quad (2.58)$$

na qual f_i são os coeficientes da expansão em série de polinômios transformados de Chebyshev e são dados por:

$$f_i = k \int_0^{t_f} \frac{f(t)T_i(t)}{\sqrt{t(t_f-t)}} dt \quad (2.59)$$

$$\text{na qual: } k = \begin{cases} 1/\pi & \text{se } i = 0 \\ 2/\pi & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

A fórmula derivativa recursiva dos polinômios transformados de Chebyshev é dada por:

$$2t(t_f - t) \frac{dT_i(t)}{dt} = it_f [T_{i-1}(t) - T_1(t)T_i(t)] \quad (2.60)$$

Utilizando a relação da Eq. (2.56) na Eq. (2.60) e integrando de $[0, t]$, obtém-se a matriz operacional de integração dos polinômios transformados de Chebyshev:

$$\int_0^t \{T(\tau)\} d\tau = [P]\{T(t)\} \quad (2.61)$$

na qual:

$$[P] = \frac{t_f}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/2 & 0 & 1/6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)(r-3)} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{2(r-3)} & 0 & \frac{1}{2(r-1)} \\ \frac{(-1)^r}{r(r-2)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2(r-2)} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Os polinômios de Chebyshev são um caso especial dos polinômios de Jacobi.

2.1.5 - Funções Block-Pulse

Um conjunto de funções Block-Pulse pode ser definido no intervalo $[0, rT]$ como (Palanisamy e Bhattacharya, 1981):

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } (i-1)T \leq t \leq iT, \quad i=1, 2, \dots, r \\ 0 & \text{fora do intervalo} \end{cases} \quad (2.63)$$

A Fig. (2.4) mostra um conjunto com quatro funções Block-Pulse ($r=4$) no intervalo $[0, 1]$ s.

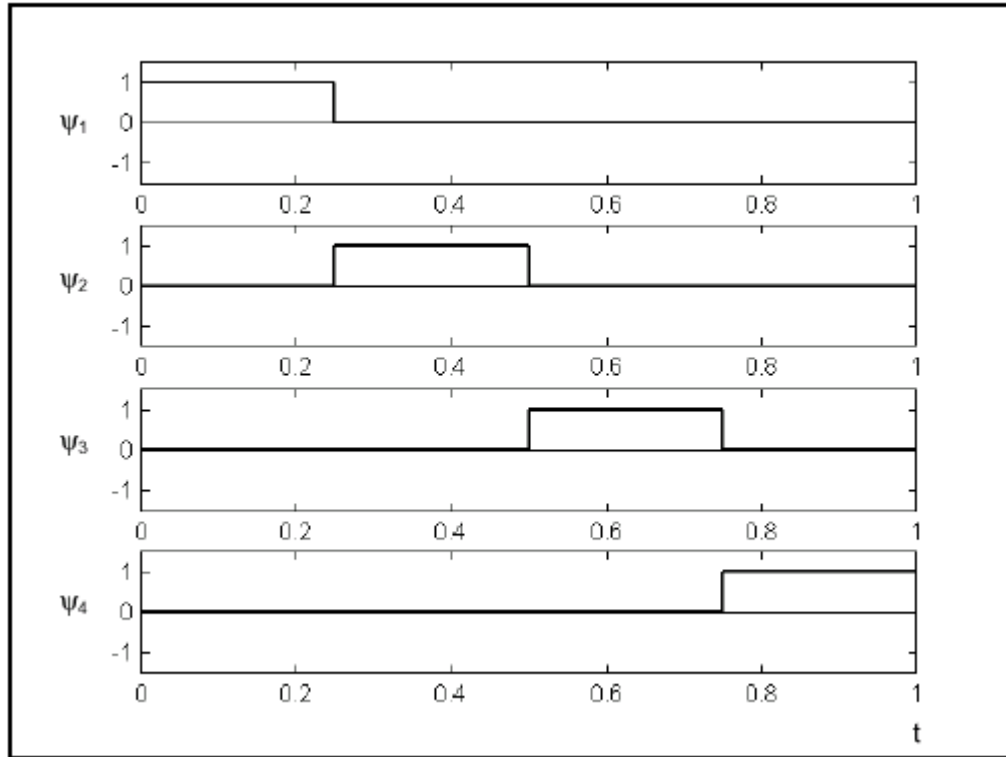


Figura (2.4) – Conjunto de funções Block –Pulse ($r=4$, $T=0.25$ s).

As funções Block-Pulse satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int_0^{rT} \psi_i(t)\psi_j(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ T & \text{para } i = j \end{cases} \quad (2.64)$$

Uma função $f(t)$, absolutamente integrável no intervalo $[0, rT]$, pode ser expandida em séries de funções Block-Pulse (Jiang e Schaufelberger, 1985):

$$f(t) \cong \sum_{i=1}^r f_i \psi_i(t) \quad (2.65)$$

na qual f_i são os coeficientes das funções Block-Pulse dados por:

$$f_i = \frac{1}{T} \int_0^{rT} f(t) \psi_i(t) dt \quad (2.66)$$

A matriz operacional generalizada de integração para as funções Block-Pulse é dada por Wang e Marleau (1987):

$$[P] = T^{h+1} \frac{1}{(h+2)!} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_r \\ 0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{r-1} \\ 0 & 0 & f_1 & \dots & f_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

na qual h é o número de integrações sucessivas.

$$f_1 = 1$$

$$f_i = i^{h+2} - 2(i-1)^{h+2} + (i-2)^{h+2}, \quad i = 2, 3, \dots, r$$

2.1.6 - Funções Walsh

As funções Walsh podem ser obtidas a partir das funções de Rademacher (Chen e Hsiao, 1975), as quais constituem um conjunto de ondas quadradas de altura unitária com períodos iguais a $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots, 2^{(1-j)}$ ($j=1,2,3,\dots$). As quatro primeiras funções Rademacher são mostradas na Fig.(2.5). Nota-se que o conjunto envolve apenas funções ímpares e, portanto, não é completo.

As funções Walsh constituem um conjunto completo de funções ortonormais no intervalo $z \in [0,1]$ e relacionam-se com as funções de Rademacher da seguinte maneira:

$$\phi_n(z) = \{r_q(z)\}^{b_q} \{r_{q-1}(z)\}^{b_{q-1}} \{r_{q-2}(z)\}^{b_{q-2}} \dots \quad n = 0, 1, \dots, r-1 \quad (2.68)$$

na qual: $\phi_n(z)$ é a n-ésima função Walsh
 $r_q(z)$ é a q-ésima função Rademacher
 $q = \lceil \log_2 n \rceil + 1$
 $b_q b_{q-1} \dots b_1$ é a expressão binária de “n”.

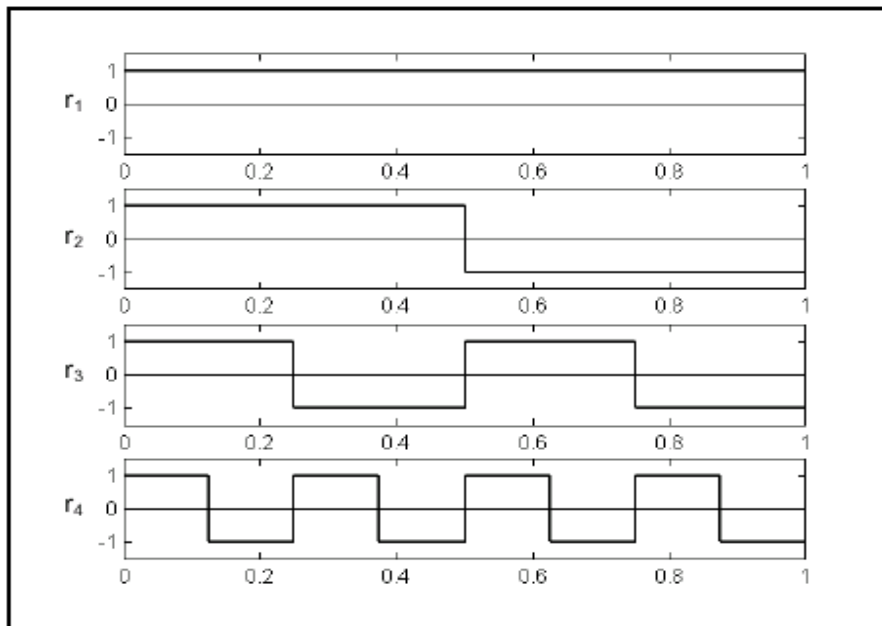


Figura (2.5) - Funções Rademacher.

Para a aplicação das funções de Walsh, faz-se a seguinte transformação de coordenadas:

$$z = \frac{t}{t_f} \quad (2.69)$$

onde $t \in [0, t_f]$ e considera-se, agora, que $\phi(z) = \phi(t/t_f) = w(t)$.

As funções Walsh satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int_0^{t_f} w_i(t)w_j(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ t_f & \text{para } i = j \end{cases} \quad (2.70)$$

A Figura abaixo apresenta um conjunto com oito funções Walsh ($r=8$).

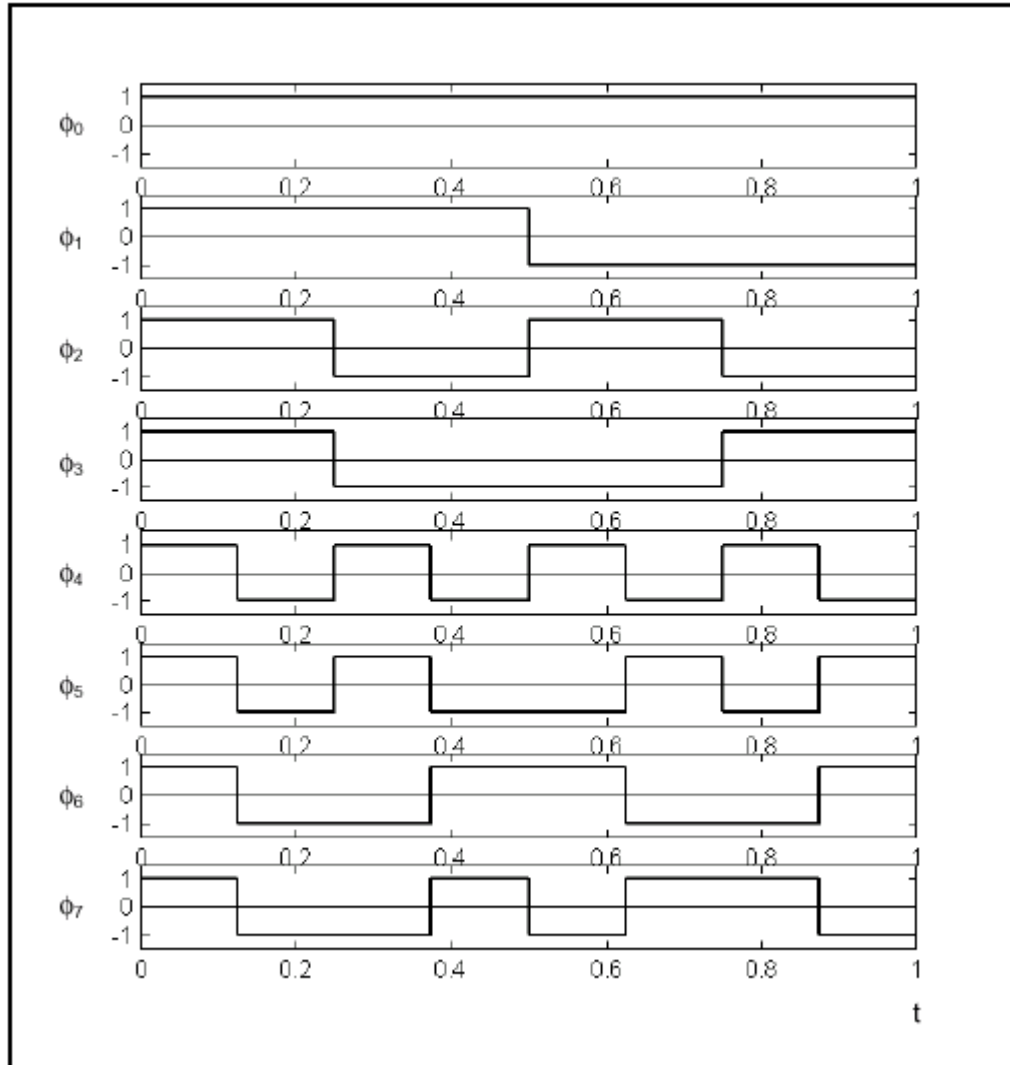


Figura (2.6) – Funções Walsh.

Uma função $f(t)$ absolutamente integrável no intervalo $[0, t_f]$, pode ser expandida em séries de Walsh (Shih e Han, 1978), da seguinte forma:

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^{r-1} f_i w_i(t) \quad (2.71)$$

na qual f_i são os coeficientes da expansão em série de funções Walsh, dados por:

$$f_i = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(t) w_i(t) dt \quad (2.72)$$

Em função da estrutura das funções Walsh, deve-se utilizar um número de termos para a expansão que seja uma potência de dois, ou seja, $r = 2^j$, na qual “ j ” é um número inteiro positivo.

Realizando a integração das funções Walsh, várias ondas triangulares são obtidas (Chen et al., 1977). Avaliando os coeficientes de Walsh para estas funções triangulares, obtém-se a matriz operacional de integração para as funções Walsh.

$$\int_0^{t_f} \{\omega(\tau)\} d\tau = [P] \{w(t)\} \quad (2.73)$$

$$[P] = t_f \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{r} [I]_{\left(\frac{r}{8}\right)} & -\frac{1}{r} [I]_{\left(\frac{r}{4}\right)} & \frac{1}{2r} [I]_{\left(\frac{r}{2}\right)} \\ \frac{2}{r} [I]_{\left(\frac{r}{8}\right)} & [0]_{\left(\frac{r}{8}\right)} & & \\ \frac{1}{r} [I]_{\left(\frac{r}{4}\right)} & & [0]_{\left(\frac{r}{4}\right)} & \\ & \frac{1}{2r} [I]_{\left(\frac{r}{2}\right)} & & [0]_{\left(\frac{r}{2}\right)} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Se a matriz operacional $[P]_{(rxr)}$ é particionada em quatro matrizes de iguais dimensões, a sub-matriz superior esquerda é idêntica à matriz operacional $[P]_{(r/2 \times r/2)}$. Esta regularidade na estrutura da matriz operacional permite aumentá-la até o número de termos que se deseja.

CAPÍTULO 3

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS POR MEIO DE FUNÇÕES ORTOGONAIS

O método proposto neste trabalho opera no domínio do tempo, ou seja, utiliza os sinais temporais do sistema para identificação de parâmetros modais (frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar) e parâmetros estruturais (matrizes de massa, rigidez e amortecimento). Pode-se utilizar as respostas livres do sistema (deslocamento, velocidade ou aceleração) ou as respostas forçadas dependendo do caso a ser analisado.

A principal característica desta técnica de identificação decorre da propriedade do cálculo de integrais das funções ortogonais normalizadas, (Chen e Patton, 1996), (Chen e Hsiao, 1975), (Chen et al., 1977) e (Chow e Willsky, 1984) a qual possibilita a transformação da equação diferencial de movimento do sistema mecânico em uma equação algébrica cuja resolução é muito mais simples e rápida.

Na seqüência serão apresentadas as formulações para os diversos casos possíveis no que se refere ao tipo de excitação do sistema e tipo do sinal de resposta utilizado.

3.1 - Sistema Livre – Formulação Usando o Deslocamento

O desenvolvimento do método parte da equação de movimento livre de um sistema mecânico de N graus de liberdade (Meirovitch, 1986):

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{0\} \quad (3.1)$$

Na qual $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de ordem N de inércia, de amortecimento e de rigidez e $\{x(t)\}$ é o vetor de deslocamento.

Pré-multiplicando-se a Eq. (3.1) por $[M]^{-1}$ e integrando-a duas vezes no intervalo $[0,t]$, obtém-se:

$$\{x(t)\} - \{x(0)\} - \{\dot{x}(0)\}t + [M]^{-1}[C] \left(\int_0^t \{x(\tau)\} d\tau - \{x(0)\}t \right) + [M]^{-1}[K] \int_0^t \int_0^t \{x(\tau)\} d\tau^2 = 0 \quad (3.2)$$

Na qual $\{x(0)\}$ e $\{\dot{x}(0)\}$ são os vetores das condições iniciais de deslocamento e velocidade.

O sinal $\{x(t)\}$ é expandido em séries de funções ortogonais truncadas com “r” termos:

$$\{x(t)\} \cong [X] \{\phi(t)\} \quad (3.3)$$

na qual $[X]$ é a matriz $(N \times r)$ dos coeficientes da expansão de $\{x(t)\}$, $\{\phi(t)\} = \{\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \dots \ \phi_r(t)\}^T$ é o conjunto de funções da série ortogonal truncada.

Substituindo a Eq. (3.3) na Eq. (3.2), tem-se:

$$[X] \{\phi(t)\} - \{x(0)\} - \{\dot{x}(0)\}t + [M]^{-1}[C] \left(\int_0^t [X] \{\phi(\tau)\} d\tau - \{x(0)\}t \right) + [M]^{-1}[K] \int_0^t \int_0^t [X] \{\phi(\tau)\} d\tau^2 = \{0\} \quad (3.4)$$

Para as funções ortogonais descritas no Cap. 2 , observa-se que a primeira função da série ortogonal é igual à unidade para qualquer instante “ t ”, com exceção da função Block-Pulse. Portanto, pode-se escrever o seguinte:

$$\{e\}^T \{\phi(t)\} = 1 \quad (3.5)$$

Na qual $\{e\}$ é um vetor constante de dimensões ($r \times 1$) cuja forma depende da série ortogonal utilizada. Para o caso de funções Block-Pulse $\{e\}^T = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}$; para séries de Fourier, Chebyshev, Legendre, Jacobi e Walsh $\{e\}^T = \{1 \ 0 \ \dots \ 0\}$.

Integrando-se a Eq.(3.5) no intervalo $[0, t]$ e aplicando-se a propriedade de integração da base ortogonal da Eq. (2.7) obtém-se:

$$t = \{e\}^T [P] \{\phi(t)\} \quad (3.6)$$

Na qual $[P]$ é a matriz operacional de integração específica para cada uma destas funções. Encontra-se no Anexo A, a identificação dos parâmetros para o sistema de 1 grau de liberdade, onde foi desenvolvida mais detalhadamente esta metodologia.

Substituindo a Eq. (3.5) e a Eq. (3.6) na Eq. (3.4), aplicando a propriedade de integração da base ortogonal da Eq. (2.7) e igualando os coeficientes de $\{\phi(t)\}$, resulta:

$$\begin{bmatrix} \{x(0)\} & \{\dot{x}(0)\} + [M]^{-1}[C]\{x(0)\} & -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e\}^T \\ \{e\}^T [P] \\ [X][P] \\ [X][P]^2 \end{bmatrix} = [X] \quad (3.7)$$

Fazendo:

$$[H] = \begin{bmatrix} \{x(0)\} & \{\dot{x}(0)\} + [M]^{-1}[C]\{x(0)\} & -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \{e\}^T \\ \{e\}^T [P] \\ [X][P] \\ [X][P]^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[E] = [X] \quad (3.10)$$

na qual: [H] é a matriz que contém os parâmetros e as condições iniciais, [J] e [E] são as matrizes formadas pelos coeficientes de expansão da resposta do sistema. A Eq. (3.7) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[H]_{N, 2N+2} [J]_{2N+2, r} = [E]_{N, r} \quad (3.11)$$

Pode-se fazer uma estimativa da matriz [H] através da solução normal do método dos mínimos quadrados:

$$[H] = [E][J]^T ([J][J]^T)^{-1} \quad (3.12)$$

A estimativa de [H], através da Eq. (3.12), fornece os parâmetros desconhecidos $[M]^{-1}[K]$ e $[M]^{-1}[C]$, e as condições iniciais do sistema $\{x(0)\}$ e $\{\dot{x}(0)\}$.

Escrevendo a Eq. (3.1) do movimento do sistema mecânico no espaço de estado, tem-se:

$$\{\dot{y}(t)\} = \left[\bar{A} \right] \{y(t)\} \quad (3.13)$$

na qual: $\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \dot{} \\ \{x(t)\} \end{Bmatrix}$ é o vetor de estado.

$$\left[\bar{A} \right] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \text{ é a matriz } (2N \times 2N) \text{ de estado do sistema.}$$

Encontra-se no Anexo B, o desenvolvimento mais detalhado desta metodologia.

Uma vez identificada a matriz de estado, determinam-se os parâmetros modais do sistema (frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração), calculando-se os autovalores e autovetores da matriz $\begin{bmatrix} \bar{A} \end{bmatrix}$.

3.2 - Sistema Livre – Formulação Usando a Velocidade

A formulação apresentada a seguir para o caso em que o sinal de saída do sistema mecânico é a velocidade.

Pré-multiplicando-se a Eq. (3.1) por $[M]^{-1}$ e integrando-a no intervalo $[0,t]$, obtém-se:

$$\int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau + [M]^{-1}[C] \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + [M]^{-1}[K] \int_0^t x(\tau) d\tau = 0 \quad (3.14)$$

Sabe-se que:

$$\{x(t)\} - \{x(0)\} = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

$$\{\dot{x}(t)\} - \{\dot{x}(0)\} = \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

Utilizando a Eq. (3.15) e a Eq. (3.16) na Eq. (3.14), resulta:

$$(3.17)$$

$$\{\dot{x}(t)\} - \{\dot{x}(0)\} + [M]^{-1}[C] \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + [M]^{-1}[K] \left(\int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau^2 + \{x(0)\}t \right) = \{0\}$$

O sinal $\{\dot{x}(t)\}$ é expandido em séries de funções ortogonais truncadas com “ r ” termos:

$$\{\dot{x}(t)\} \cong [V]\{\phi(t)\} \quad (3.18)$$

na qual $[V]$ é a matriz (Nxr) dos coeficientes da expansão de $\{\dot{x}(t)\}$.

Substituindo a Eq.(3.18) na Eq. (3.17), tem-se:

$$[V]\{\phi(t)\} - \{\dot{x}(0)\} + [M]^{-1}[C] \int_0^t [V]\{\phi(\tau)\}d\tau + [M]^{-1}[K] \left(\int_0^t [V]\{\phi(\tau)\}d\tau^2 + \{x(0)\}t \right) = \{0\} \quad (3.19)$$

Substituindo a Eq. (3.5) e a Eq. (3.6) na Eq. (3.19), aplicando a propriedade para a integração da base ortogonal da Eq.(2.7) e igualando os coeficientes de $\{\phi(t)\}$, resulta:

$$\left[\begin{array}{c} \{\dot{x}(0)\} \\ -[M]^{-1}[C] \\ -[M]^{-1}[K] \\ -[M]^{-1}[K]\{x(0)\} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \{e\}^T \\ [V][P] \\ [V][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{array} \right] = [V] \quad (3.20)$$

Fazendo-se:

$$[H] = \left[\begin{array}{c} \{\dot{x}(0)\} \\ -[M]^{-1}[C] \\ -[M]^{-1}[K] \\ -[M]^{-1}[K]\{x(0)\} \end{array} \right] \quad (3.21)$$

$$[J] = \left[\begin{array}{c} \{e\}^T \\ [V][P] \\ [V][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{array} \right] \quad (3.22)$$

$$[E] = [V] \quad (3.23)$$

a Eq. (3.20) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[H]_{N, 2N+2} [J]_{2N+2, r} = [E]_{N, r} \quad (3.24)$$

A estimativa de $[H]$, através da Eq. (3.24), fornece os parâmetros desconhecidos e as condições iniciais do sistema.

3.3 - Sistema Livre – Formulação Usando a Aceleração

Finalmente, se o sinal de saída do sistema for a aceleração, multiplica-se a Eq. (3.1) por $[M]^{-1}$ e utilizam-se as relações da Eq. (3.15) e da Eq. (3.16), obtendo-se:

$$\{\ddot{x}(t)\} + [M]^{-1}[C] \left(\int_0^t \{\ddot{x}(\tau)\} d\tau + \{\dot{x}(0)\} \right) + [M]^{-1}[K] \left(\int_0^t \{\ddot{x}(\tau)\} d\tau^2 + \{\dot{x}(0)\}t + \{x(0)\} \right) = \{0\} \quad (3.25)$$

Expandindo o sinal $\{\ddot{x}(t)\}$ em séries de funções ortogonais truncadas com “ r ” termos, escreve-se:

$$\{\ddot{x}(t)\} \cong [A] \{\phi(t)\} \quad (3.26)$$

na qual $[A]$ é a matriz ($N \times r$) dos coeficientes da expansão de $\{\ddot{x}(t)\}$.

Substituindo a Eq. (3.26) na Eq. (3.25), tem-se:

$$\begin{aligned}
& [A]\{\phi(t)\} + [M]^{-1}[C] \left(\int_0^t [A]\{\phi(\tau)\} d\tau + \{\dot{x}(0)\} \right) + \\
& + [M]^{-1}[K] \left(\int_0^t \int_0^t [A]\{\phi(\tau)\} d\tau^2 + \{\dot{x}(0)\}t + \{x(0)\} \right) = \{0\}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Substituindo a Eq. (3.5) e a Eq. (3.6) na Eq. (3.27), aplicando a propriedade para a integração da base ortogonal da Eq. (2.7) e igualando os coeficientes de $\{\phi(t)\}$, resulta:

$$\begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[C]\{\dot{x}(0)\} - [M]^{-1}[K]\{x(0)\} & -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[K]\{\dot{x}(0)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A][P] \\ \{e\}^T \\ [A][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{bmatrix} = [A] \tag{3.28}$$

Fazendo:

$$[H] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[C]\{\dot{x}(0)\} - [M]^{-1}[K]\{x(0)\} & -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[K]\{\dot{x}(0)\} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} [A][P] \\ \{e\}^T \\ [A][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

$$[E] = [A] \tag{3.31}$$

a Eq.(3.20) de identificação pode ser escrita da seguinte forma:

$$[H]_{N, 2N+2} [J]_{2N+2, r} = [E]_{N, r} \tag{3.32}$$

3.4 - Sistema Forçado – Formulação Usando o Deslocamento

Se o sistema mecânico for sujeito a forças de excitação é possível identificar as matrizes dos parâmetros estruturais, permitindo a geração do modelo do sistema.

A equação de movimento de um sistema mecânico de N graus de liberdade sujeito à excitação é dada por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.33)$$

na qual: $\{f(t)\}$ é o vetor das forças de excitação.

Integrando a Eq. (3.33) duas vezes no intervalo $[0,t]$, obtém-se:

$$[M]\left(\{x(t)\} - \{x(0)\} - \{\dot{x}(0)\}t\right) + [C]\left(\int_0^t \{x(\tau)\}d\tau - \{x(0)\}t\right) + [K]\int_0^t \int_0^t \{x(\tau)\}d\tau^2 = \int_0^t \int_0^t \{f(\tau)\}d\tau^2 \quad (3.34)$$

Os sinais $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ são expandidos em séries de funções ortogonais truncadas com “ r ” termos:

$$\{x(t)\} \cong [X]\{\phi(t)\} \quad (3.35)$$

$$\{f(t)\} \cong [F]\{\phi(t)\} \quad (3.36)$$

na qual $[F]$ é a matriz ($N \times r$) dos coeficientes da expansão de $\{f(t)\}$.

Substituindo a Eq. (3.35) e a Eq. (3.36) na Eq. (3.34) obtém-se:

$$\begin{aligned}
[M] \left([X] \{ \phi(t) \} - \{ x(0) \} - \{ \dot{x}(0) \} t \right) + [C] \left(\int_0^t [X] \{ \phi(\tau) \} d\tau - \{ x(0) \} t \right) + \\
+ [K] \int_0^t \int_0^t [X] \{ \phi(\tau) \} d\tau^2 = \int_0^t \int_0^t [F] \{ \phi(\tau) \} d\tau^2
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Substituindo a Eq. (3.5) e a Eq. (3.6) na Eq. (3.37), aplicando a propriedade para a integração da base ortogonal da Eq. (2.7) e igualando os coeficientes de $\{ \phi(t) \}$, resulta:

$$\begin{bmatrix} [M] & -[M] \{ x(0) \} & (-[M] \{ \dot{x}(0) \} - [C] \{ x(0) \}) & [C] & [K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ \{ e \}^T \\ \{ e \}^T [P] \\ [X][P] \\ [X][P]^2 \end{bmatrix} = [F][P]^2 \tag{3.38}$$

Fazendo:

$$[H] = \begin{bmatrix} [M] & -[M] \{ x(0) \} & (-[M] \{ \dot{x}(0) \} - [C] \{ x(0) \}) & [C] & [K] \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} [X] \\ \{ e \}^T \\ \{ e \}^T [P] \\ [X][P] \\ [X][P]^2 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

$$[E] = [F][P]^2 \tag{3.41}$$

a Eq. (3.38) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[H]_{N, 2N+2} [J]_{2N+2, r} = [E]_{N, r} \tag{3.42}$$

Calculando [H] da Eq. (3.42), obtém-se os parâmetros desconhecidos [M], [C] e [K], e as condições iniciais do sistema $\{x(0)\}$ e $\{\dot{x}(0)\}$.

3.5 - Sistema Forçado – Formulação Usando a Velocidade

Integrando a Eq.(3.33) uma vez no intervalo $[0,t]$, obtém-se:

$$[M] \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau + [C] \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + [K] \int_0^t x(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (3.43)$$

Utilizando a Eq (3.15) e a Eq (3.16) na Eq (3.43), resulta:

$$[M] \{\dot{x}(t)\} - [M] \{\dot{x}(0)\} + [C] \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + [K] \left(\int_0^t \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau^2 + \{x(0)\}t \right) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (3.44)$$

O sinal $\{\dot{x}(t)\}$ e $\{f(t)\}$ são expandidos em séries de funções ortogonais truncadas com “ r ” termos. Substituindo a Eq. (3.18) e a Eq. (3.36) na Eq. (3.44), tem-se:

$$[M][V] \{\phi(t)\} - [M] \{\dot{x}(0)\} + [C] \int_0^t [V] \{\phi(\tau)\} d\tau + [K] \left(\int_0^t \int_0^t [V] \{\phi(\tau)\} d\tau^2 + \{x(0)\}t \right) = \int_0^t [F] \{\phi(\tau)\} d\tau \quad (3.45)$$

Substituindo a Eq. (3.5) e a Eq. (3.6) na Eq. (3.45), aplicando a propriedade para a integração da base ortogonal da Eq. (2.7) e igualando os coeficientes de $\{\phi(t)\}$, resulta:

$$\begin{bmatrix} [M] & -[M]\{\dot{x}(0)\} & [C] & [K] & [K]\{x(0)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ \{e\}^T \\ [V][P] \\ [V][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{bmatrix} = [F][P] \quad (3.46)$$

Fazendo:

$$[H] = \begin{bmatrix} [M] & -[M]\{\dot{x}(0)\} & [C] & [K] & [K]\{x(0)\} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} [V] \\ \{e\}^T \\ [V][P] \\ [V][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$[E] = [F][P] \quad (3.49)$$

a Eq.(3.46) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[H]_{N,2N+2} [J]_{2N+2,r} = [E]_{N,r} \quad (3.50)$$

Os parâmetros desconhecidos e as condições iniciais do sistema são obtidos através da resolução da Eq.(3.50).

3.6 - Sistema Forçado – Formulação Usando a Aceleração

Substituindo a Eq. (3.15) e a Eq. (3.16) na Eq. (3.33), obtém-se:

$$[M]\{x(t)\} + [C] \left(\int_0^t \{x(\tau)\} d\tau + \{x(0)\} \right) + [K] \left(\int_0^t \int_0^t \{x(\tau)\} d\tau^2 + \{x(0)\}t + \{x(0)\} \right) = \{f(t)\} \quad (3.51)$$

Expandindo o sinal $\{\ddot{x}(t)\}$ e $\{f(t)\}$ em séries de funções ortogonais truncadas com “ r ” termos e substituindo a Eq. (3.26) e a Eq. (3.36) na Eq. (3.51), resulta:

$$[M][A]\{\phi(t)\} + [C] \left(\int_0^t [A]\{\phi(\tau)\} d\tau + \{x(0)\} \right) + [K] \left(\int_0^t \int_0^t [A]\{\phi(\tau)\} d\tau^2 + \{x(0)\}t + \{x(0)\} \right) = [F]\{\phi(t)\} \quad (3.52)$$

Substituindo a Eq.(3.5) e a Eq.(3.6) na Eq.(3.52), aplicando a propriedade para a integração da base ortogonal da Eq. (2.7) e igualando os coeficientes de $\{\phi(t)\}$, resulta:

$$\begin{bmatrix} [M] & [C] & ([C]\{\dot{x}(0)\} + [K]\{x(0)\}) & [K] & [K]\{\dot{x}(0)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ [A][P] \\ \{e\}^T \\ [A][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{bmatrix} = [F] \quad (3.53)$$

Fazendo:

$$[H] = \begin{bmatrix} [M] & [C] & [C]\{\dot{x}(0)\} + [K]\{x(0)\} & [K] & [K]\{\dot{x}(0)\} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} [M] \\ [A][P] \\ \{e\}^T \\ [A][P]^2 \\ \{e\}^T [P] \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$[E] = [F] \quad (3.56)$$

a Eq. (3.53) de identificação pode ser escrita da seguinte forma:

$$[H]_{N,2N+2} [J]_{2N+2,r} = [E]_{N,r} \quad (3.57)$$

De forma semelhante aos casos anteriores, estimando a matriz $[H]$, através da Eq.(3.57), obtém-se os parâmetros desconhecidos e as condições iniciais do sistema.

3.7 – Programa Computacional

Estudamos três métodos numéricos diferentes para a análise dinâmica de sistemas mecânicos, no domínio do tempo, utilizando o método de funções ortogonais. A forma como se efetua o refinamento é que diferencia os métodos. Estes métodos consistem em uma seqüência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos. Efetuando determinados testes, verificamos se foi atingido um resultado próximo o suficiente do resultado esperado.

Colocamos abaixo um diagrama de fluxo que nos permite ter uma idéia de como foi realizado os cálculos dos métodos.

Apresentamos na Fig. (3.1) o fluxograma geral do programa utilizado para a determinação dos parâmetros utilizando as funções ortogonais das Séries de Fourier, polinômios de Legendre e Chebyshev. A seguir tem-se as etapas principais para o desenvolvimento dos programas.

- (1) Entrada de dados, número de graus de liberdade, período da amostragem, número de termos da expansão da série, número de pontos de amostragem, sinal de resposta e das forças de excitação.
- (2, 3 e 4) Define-se o tipo de função ortogonal a ser utilizada, Fourier, Legendre ou Chebyshev. Gera-se a base vetorial, truncando a em R termos e a matriz operacional de integração [P].
- (5) Determina-se o coeficiente de expansão do deslocamento e o coeficiente de expansão da força utilizando a base vetorial.
- (6) Obtém-se [H] que é a matriz que contém os parâmetros estruturais do sistema e as condições iniciais.
- (7) Verifico se o sistema é excitado ou não é excitado.
- (8) Se o sistema não é excitado, obtém-se as condições iniciais e $[M]^{-1}[K]$ e $[M]^{-1}[C]$.
- (9) Se o sistema é excitado, obtém-se os meus parâmetros estruturais (M, C e K) e as condições iniciais.
- (10) Obtém-se a matriz dinâmica e calculando-se seus autovalores e autovetores determina-se as frequências naturais fatores de amortecimento e os modos de vibrar do sistema.

Fluxograma Geral do Programa

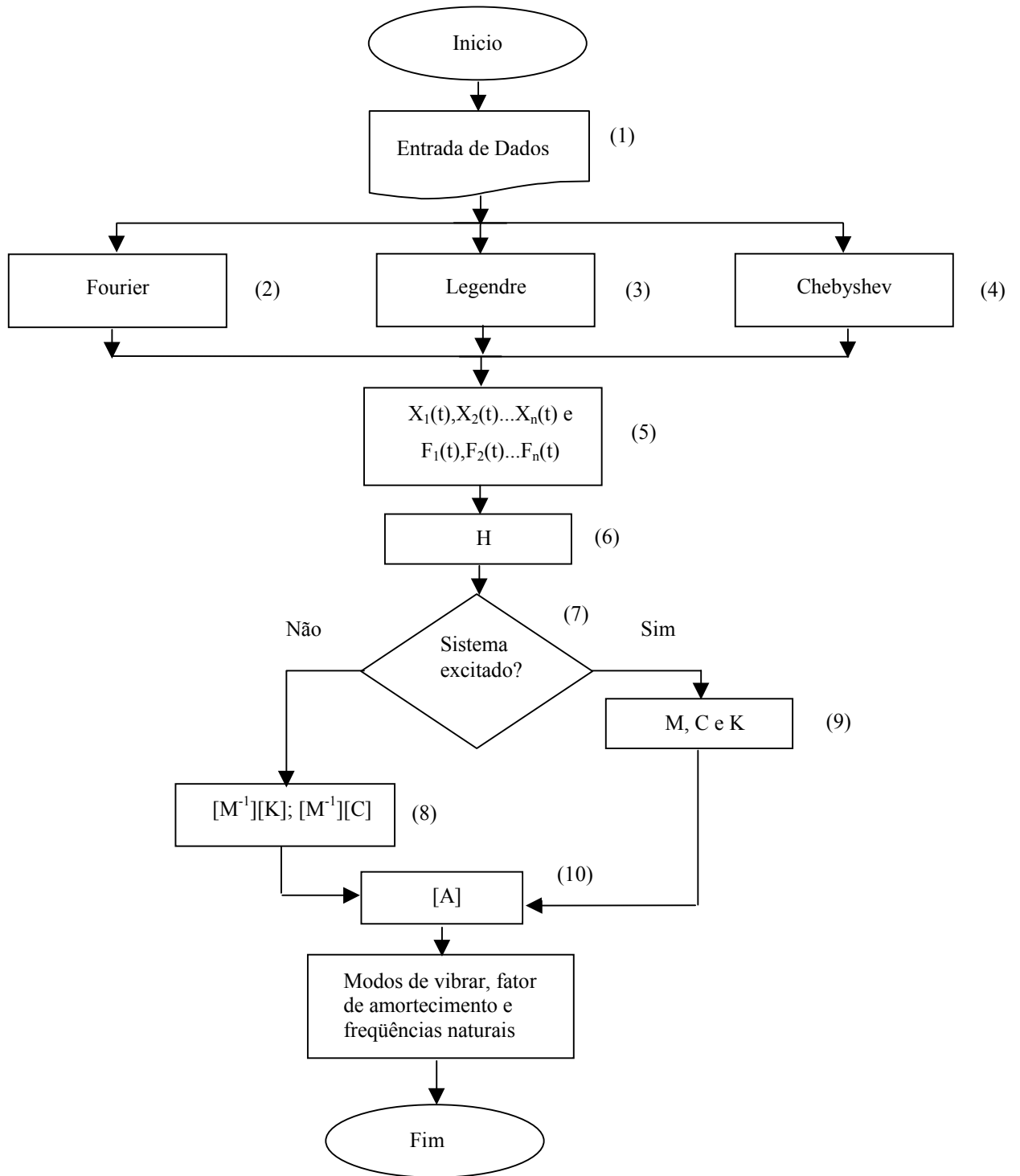


Figura (3.1) Fluxograma Geral.

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

A fim de verificar a eficiência dos métodos de identificação foram realizadas simulações computacionais dos métodos das séries de Fourier, Legendre e Chebyshev através da formulação usando os deslocamentos como respostas dos sistemas (seção 3.1).

Para a simulação computacional, as respostas dos sistemas foram geradas através do método de Runge-Kutta (Hostetter e Medich, 1973). Para análise dos métodos das Séries de Fourier, Legendre e Chebyshev foram realizadas simulações para diferentes valores dos parâmetros do sistema. Resumindo o processo de simulação tem-se:

- Geração dos sinais utilizando o método de Runge-Kutta de Quarta ordem.
- Identificação dos parâmetros do sistema, a partir do sinal gerado anteriormente, através dos métodos de Fourier, Legendre e Chebyshev.

4.1 - Sistema mecânico de 2 g.d.l (graus de liberdade)

O sistema simulado constitui-se de uma estrutura de parâmetros concentrados cujo modelo físico é apresentado na Fig. (4.1).

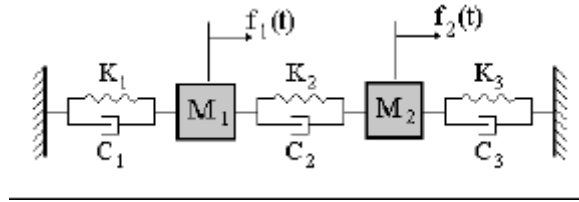


Figura (4.1) Sistema de 2 graus de liberdade.

Para a identificação de parâmetros foram gerados 1024 pontos das respostas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema dentro do intervalo de tempo considerado e calculados os termos de Fourier, Legendre e Chebyshev, truncando-se as séries para um dado número de termos (r), através de rotinas computacionais.

Para cada situação é calculada a diferença relativa entre os valores identificados e os valores teóricos. Esses resultados são mostrados nas tabelas referentes a cada exemplo.

4.1.1 - Métodos das Séries de Fourier

Exemplo 1: Sistema livre.

Foi simulado o sistema da Fig. (4.1) constituído dos seguintes valores de parâmetros e condições iniciais, truncando a série para $r=20$ termos de Fourier: (Em Melo, 1992 que se desenvolveu a metodologia de Fourier, foi concluído que 20 termos é um truncamento ideal para o processo).

$$M_1 = M_2 = 5 \text{ kg,}$$

$$C_1 = 20 \text{ Ns/m, } C_2 = 30 \text{ Ns/m, } C_3 = 40 \text{ Ns/m,}$$

$$K_1 = 600 \text{ N/m, } K_2 = 500 \text{ N/m, } K_3 = 400 \text{ N/m,}$$

$$x_1(0) = 0,025 \text{ m, } x_2(0) = -0,075 \text{ m,}$$

$$\dot{x}_1(0) = 2 \text{ m/s, } \dot{x}_2(0) = -2 \text{ m/s,}$$

$$t_i = 0 \text{ s, } t_f = 1 \text{ s, (intervalo de amostragem)}$$

$$f_1(t) = 0 \text{ N, } f_2(t) = 0 \text{ N.}$$

Já na tabela (4.1) observam-se as diferenças relativas entre os parâmetros teóricos e os identificados através da utilização das séries de Fourier e no gráfico da Fig. (4.2) verificam-se os sinais dos deslocamentos das duas massas em função do tempo. Nas tabelas são apresentados dois algarismos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algarismos significativos.

Tabela (4.1) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema livre ($r = 20$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	10,24	10,17	0,68
	ω_a (rad/s)	9,63	9,62	0,02
	ξ	0,32	0,32	0,06
	$Y_2/Y_1(**)$	(1,06-0,35i)	(1,06-0,35i)	0,18(*)
2	ω_n (rad/s)	16,78	16,94	0,95
	ω_a (rad/s)	14,50	14,51	0,12
	ξ	0,52	0,52	0,06
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,96-0,51i)	(-0,96-0,51i)	0,04(*)
	C_1 [Ns/m]	20,00	20,07	0,35
	C_2 [Ns/m]	30,00	29,98	0,07
	C_3 [Ns/m]	40,00	40,00	0,00
	K_1 [N/m]	600,00	600,03	0,00
	K_2 [N/m]	500,00	501,11	0,22
	K_3 [N/m]	400,00	400,03	0,01

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Na qual temos que:

ω_n = Frequência natural;

ω_a = Frequência natural amortecida;

ξ = Fator de amortecimento;

sendo que:

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

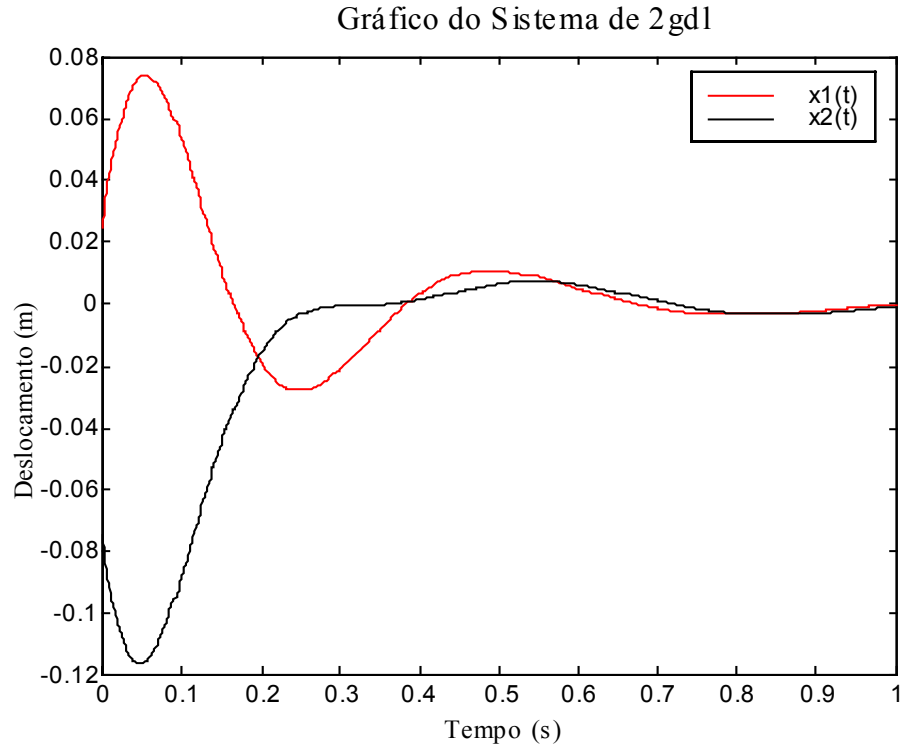


Figura (4.2) Gráfico de deslocamento em função do tempo para um sistema livre de 2 graus de liberdade.

Exemplo 2: Sistema livre.

Agora utilizando o mesmo sistema da Fig. (4.1), adotando-se os seguintes valores de parâmetros e condições iniciais:

$$M_1 = M_2 = 5 \text{ kg,}$$

$$C_1 = 30 \text{ Ns/m, } C_2 = 40 \text{ Ns/m, } C_3 = 50 \text{ Ns/m,}$$

$$K_1 = 600 \text{ N/m, } K_2 = 500 \text{ N/m, } K_3 = 400 \text{ N/m,}$$

$$x_1(0) = 0,025 \text{ m, } x_2(0) = -0,075 \text{ m,}$$

$$\dot{x}_1(0) = 2 \text{ m/s, } \dot{x}_2(0) = -2 \text{ m/s,}$$

$$t_i = 0 \text{ s, } t_f = 1 \text{ s, (intervalo de amostragem)}$$

$$f_1(t) = 0 \text{ N, } f_2(t) = 0 \text{ N.}$$

Observam-se na tabela (4.2) as diferenças relativas entre os parâmetros teóricos e os identificados através da utilização das séries de Fourier. Nas tabelas são apresentados dois algarismos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algarismos significativos.

Tabela (4.2) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema livre ($r=20$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	10,24	10,25	0,09
	ω_a (rad/s)	9,35	9,37	0,01
	ξ	0,41	0,42	0,48
	$Y_2/Y_1(**)$	(0,99-0,35i)	(0,99-0,36i)	0,32(*)
2	ω_n (rad/s)	16,78	16,81	0,18
	ω_a (rad/s)	12,03	12,05	0,16
	ξ	0,69	0,71	0,69
	$Y_2/Y_1(**)$	(-1,13-0,57i)	(-1,14-0,57i)	0,70(*)
	C_1 [Ns/m]	30,00	30,03	0,11
	C_2 [Ns/m]	40,00	40,08	0,21
	C_3 [Ns/m]	55,00	49,97	0,06
	K_1 [N/m]	600,00	599,98	0,003
	K_2 [N/m]	500,00	501,42	0,22
K_3 [N/m]	400,00	400,05	0,01	

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Exemplo 3: Sistema excitado harmonicamente.

Novamente para o sistema da Fig. (4.1), constituído dos seguintes valores, temos:

$$M_1 = M_2 = 5 \text{ kg,}$$

$$C_1 = 30 \text{ Ns/m, } C_2 = 20 \text{ Ns/m, } C_3 = 15 \text{ Ns/m,}$$

$$K_1 = 700 \text{ N/m, } K_2 = 500 \text{ N/m, } K_3 = 450 \text{ N/m,}$$

$$x_1(0) = 0 \text{ m, } x_2(0) = 0 \text{ m,}$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \text{ m/s, } \dot{x}_2(0) = 0 \text{ m/s,}$$

$$t_i = 0 \text{ s, } t_f = 1 \text{ s, (intervalo de amostragem)}$$

$$f_1(t) = 200 \text{ sen}(30t) \text{ N, } f_2(t) = 150 \text{ sen}(20t) \text{ N.}$$

Na tabela (4.3) observam-se as diferenças relativas entre os parâmetros teóricos e os identificados através da utilização das séries de Fourier e no gráfico da Fig. (4.3) verificam - se os deslocamentos das duas massas em função do tempo. Nas tabelas são apresentados dois algoritmos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algoritmos significativos.

Tabela (4.3) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema excitado harmonicamente ($r = 20$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	10,59	10,58	0,02
	ω_a (rad/s)	10,37	10,37	0,03
	ξ	0,20	0,20	0,19
	$Y_2/Y_1(**)$	(1,29-0,06i)	(1,29-0,07i)	0,02(*)
2	ω_n (rad/s)	17,82	17,84	0,06
	ω_a (rad/s)	16,65	16,66	0,07
	ξ	0,36	0,36	0,03
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,75-0,06i)	(-0,75-0,06i)	0,46(*)
	C_1 [Ns/m]	30,00	30,07	0,23
	C_2 [Ns/m]	20,00	19,97	0,15
	C_3 [Ns/m]	15,00	15,03	0,20
	K_1 [N/m]	700,00	700,29	0,04
	K_2 [N/m]	500,00	502,23	0,45
	K_3 [N/m]	450,00	446,97	0,67

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

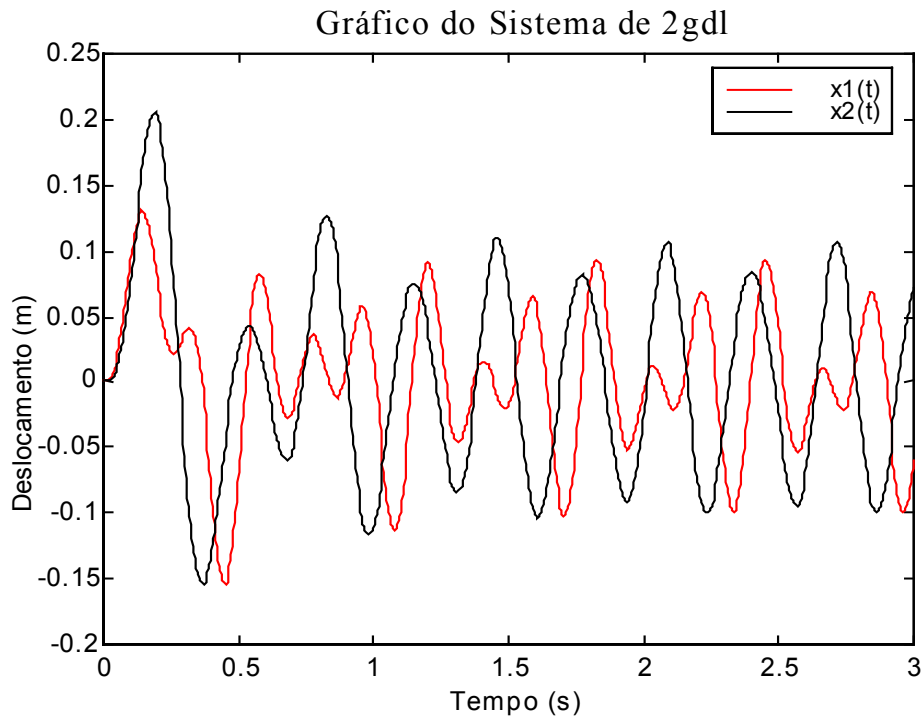


Figura (4.3) Gráfico do deslocamento em função do tempo para um sistema de 2 graus de liberdade excitado harmonicamente.

Com várias simulações computacionais, verificam-se que as diferenças relativas entre os valores dos parâmetros, ω_n , ω_a e ξ , teóricos e simulados tendem a zero à medida que o número de termos das Séries de Fourier aumenta, até o momento em que começam ocorrer acúmulos de erros computacionais, portanto teremos uma boa aproximação se truncarmos as Séries de Fourier em 20 termos.

4.1.2 - Método de Legendre

Exemplo 4: Sistema livre.

Agora utilizando o mesmo sistema da Fig. (4.1), adotando-se os seguintes valores de parâmetros e condições iniciais:

$$M_1 = M_2 = 5 \text{ kg,}$$

$$C_1 = 30 \text{ Ns/m, } C_2 = 40 \text{ Ns/m, } C_3 = 50 \text{ Ns/m,}$$

$$K_1=600 \text{ N/m}, K_2=500 \text{ N/m}, K_3=400 \text{ N/m},$$

$$x_1(0) = 0,025 \text{ m}, x_2(0) = -0,075 \text{ m},$$

$$\dot{x}_1(0) = 2 \text{ m/s}, \dot{x}_2(0) = -2 \text{ m/s},$$

$$t_i = 0 \text{ s}, t_f = 1 \text{ s}, \text{ (intervalo de amostragem)}$$

$$f_1(t) = 0 \text{ N}, f_2(t) = 0 \text{ N}.$$

Foram realizadas simulações truncando as funções de Legendre em vários valores. A resposta do sistema é apresentada na Fig. (4.4). Nas tabelas são apresentados dois algoritmos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algoritmos significativos.

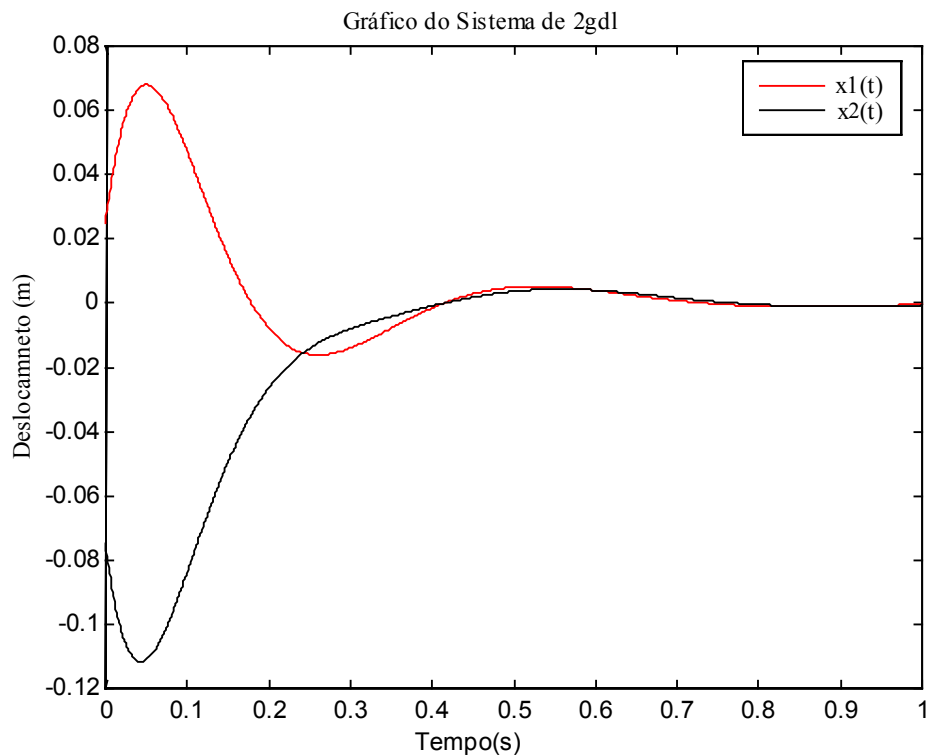


Figura (4.4) Gráfico de deslocamento em função do tempo para um sistema livre de 2 graus de liberdade.

Nas tabelas que seguem podem-se observar as diferenças relativas entre os parâmetros teóricos e os identificados para vários valores de termos de expansão (r) pretendendo-se obter uma faixa de aplicação ideal para truncamento da base vetorial e consequentemente da matriz operacional de integração (P).

Para $r=5$ tem-se:

Tabela (4.4) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Legendre para um sistema livre ($r = 5$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	10,24	10,46	2,09
	ω_a (rad/s)	9,30	8,97	3,56
	ξ	0,41	0,51	22,67
	$Y_2/Y_1(**)$	(0,99-0,35i)	(0,43-0,60i)	29,07(*)
2	ω_n (rad/s)	16,78	13,04	22,32
	ω_a (rad/s)	12,03	10,16	15,57
	ξ	0,69	0,62	10,09
	$Y_2/Y_1(**)$	(-1,13-0,57i)	(-0,55-0,67i)	31,53(*)
	C_1 [Ns/m]	30,00	21,35	28,81
	C_2 [Ns/m]	40,00	35,02	11,74
	C_3 [Ns/m]	50,00	44,13	12,45
	K_1 [N/m]	600,00	459,9	23,35
	K_2 [N/m]	500,00	373,48	25,30
	K_3 [N/m]	400,00	272,82	31,80

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Para $r=10$ tem-se:

Tabela (4.5) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Legendre para um sistema livre ($r = 10$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	10,24	10,24	0,00
	ω_a (rad/s)	9,30	9,30	0,00
	ξ	0,41	0,41	0,02
	$Y_2/Y_1(**)$	(0,99-0,35i)	(0,99-0,35i)	0,00(*)
2	ω_n (rad/s)	16,78	16,78	0,02
	ω_a (rad/s)	12,03	12,03	0,01
	ξ	0,69	0,69	0,01
	$Y_2/Y_1(**)$	(-1,13-0,57i)	(-1,13-0,57i)	0,02(*)
	C_1 [Ns/m]	30,00	29,99	0,03
	C_2 [Ns/m]	40,00	39,99	0,02
	C_3 [Ns/m]	50,00	50,00	0,00
	K_1 [N/m]	600,00	600,00	0,00
	K_2 [N/m]	500,00	499,84	0,03
	K_3 [N/m]	400,00	399,90	0,03

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Nos sistemas de 2 graus de liberdade observa-se uma convergência muito boa a partir de 10 termos, pois não foram considerados ruídos aleatório e/ou sistemáticos geralmente presentes nos sistemas.

A diferença relativa de erro permanece muito pequena até por volta de $r=150$ quando começa a aumentar devido ao acúmulo de erros computacionais.

4.1.3- Método de Chebyshev

Exemplo 5: Sistema livre.

Para o mesmo sistema do exemplo anterior (exemplo 4) temos:

Para $r=5$ tem-se:

Tabela (4.6) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema livre ($r = 5$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	10,24	9,99	2,51
	ω_a (rad/s)	9,30	8,72	6,20
	ξ	0,41	0,48	16,11
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,99-0,35i)	(0,77-0,07i)	25,89(*)
2	ω_n (rad/s)	16,78	14,40	14,17
	ω_a (rad/s)	12,03	9,79	18,62
	ξ	0,69	0,73	5,21
	$Y_2/Y_1(**)$	(-1,13-0,57i)	(-0,78-0,57i)	23,83(*)
	C_1 [Ns/m]	30,00	38,54	28,47
	C_2 [Ns/m]	40,00	35,52	11,20
	C_3 [Ns/m]	50,00	44,72	10,56
	K_1 [N/m]	600,00	412,68	31,22
	K_2 [N/m]	500,00	441,40	11,72
	K_3 [N/m]	400,00	253,14	36,72

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Para $r=10$ tem-se:

Tabela (4.7) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema livre ($r = 10$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	10,24	10,24	0,02
	ω_a (rad/s)	9,30	9,30	0,01
	ξ	0,41	0,41	0,14
	$Y_2/Y_1(**)$	(0,99-0,35i)	(0,99-0,35i)	0,02(*)
2	ω_n (rad/s)	16,78	16,81	0,17
	ω_a (rad/s)	12,03	12,04	0,04
	ξ	0,69	0,69	0,13
	$Y_2/Y_1(**)$	(-1,13-0,57i)	(-1,14-0,57i)	0,14(*)
	C_1 [Ns/m]	30,00	30,11	0,37
	C_2 [Ns/m]	40,00	40,07	0,18
	C_3 [Ns/m]	50,00	50,03	0,06
	K_1 [N/m]	600,00	599,50	0,08
	K_2 [N/m]	500,00	501,80	0,36
	K_3 [N/m]	400,00	400,70	0,17

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Para $r=20$ tem-se:

Tabela (4.8) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema livre ($r = 20$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	10,24	10,24	0,00
	ω_a (rad/s)	9,30	9,30	0,00
	ξ	0,41	0,41	0,00
	$Y_2/Y_1(**)$	(0,99-0,35i)	(0,99-0,35i)	0,00(*)
2	ω_n (rad/s)	16,78	16,78	0,00
	ω_a (rad/s)	12,03	12,03	0,00
	ξ	0,69	0,69	0,00
	$Y_2/Y_1(**)$	(-1,13-0,57i)	(-1,13-0,57i)	0,00(*)
	C_1 [Ns/m]	30,00	30,00	0,00
	C_2 [Ns/m]	40,00	40,00	0,00
	C_3 [Ns/m]	50,00	50,00	0,00
	K_1 [N/m]	600,00	600,00	0,00
	K_2 [N/m]	500,00	500,00	0,00
	K_3 [N/m]	400,00	400,00	0,00

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

4.2 - Sistema mecânico de 3 g.d.l (graus de liberdade)

O sistema simulado constitui-se de uma estrutura de parâmetros concentrados, cujo modelo físico é apresentado na Fig. (4.5) com a diferença de que este apresenta três graus de liberdade, que será apresentado nos exemplos que seguem:

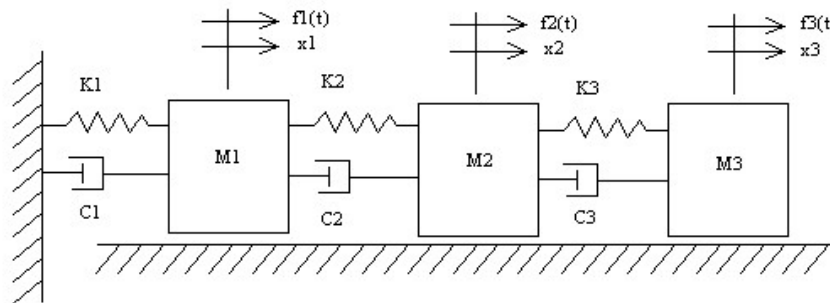


Figura (4.5) Sistema de 3 graus de liberdade.

4.2.1 - Método de Fourier

Exemplo 6: Sistema livre.

Para um sistema mecânico de 3 gdl tem-se:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 5 \text{ kg,}$$

$$C_1 = 20 \text{ Ns/m, } C_2 = 30 \text{ Ns/m, } C_3 = 40 \text{ Ns/m, } C_4 = 50 \text{ Ns/m,}$$

$$K_1 = 600 \text{ N/m, } K_2 = 500 \text{ N/m, } K_3 = 400 \text{ N/m, } K_4 = 400 \text{ N/m,}$$

$$x_1(0) = 0,025 \text{ m, } x_2(0) = -0,075 \text{ m, } x_3(0) = 0 \text{ m,}$$

$$\dot{x}_1(0) = 2 \text{ m/s, } \dot{x}_2(0) = -2 \text{ m/s, } \dot{x}_3(0) = 0 \text{ m/s}$$

$$t_i = 0 \text{ s, } t_f = 1 \text{ s,}$$

$$f_1(t) = 0 \text{ N, } f_2(t) = 0 \text{ N, } f_3(t) = 0 \text{ N.}$$

Observam-se na tabela (4.9) as diferenças relativas entre os valores teóricos e os identificados através da utilização das séries de Fourier, com 20 termos e no gráfico da Fig. (4.6)

verificam-se os deslocamentos em função do tempo das três massas. Nas tabelas são apresentados dois algarismos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algarismos significativos.

Tabela (4.9) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema livre ($r = 20$)

Modos	Parâmetros	Valores Teóricos	Valores Identificados	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	7,72	7,72	0,01
	ω_a (rad/s)	7,39	7,39	0,01
	ξ	0,29	0,29	0,04
	$Y_2/Y_1(**)$	(1,55-0,32i)	(1,55-0,32i)	0,06(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(1,02-0,43i)	(1,02-0,43i)	0,04(*)
2	ω_n (rad/s)	15,45	15,495	0,28
	ω_a (rad/s)	10,195	10,205	0,09
	ξ	0,75	0,75	0,14
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,89-2,65i)	(-0,96-2,60i)	0,78(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,65+4,045i)	(-0,52+3,97i)	2.30(*)
3	ω_n (rad/s)	15,29	15,27	0,13
	ω_a (rad/s)	13,51	13,49	0,11
	ξ	0,47	0,47	0,07
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,38-0,48i)	(-0,38-0,48i)	0,34(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,56+0,25i)	(-0,56+0,25i)	0,20(*)
	C_1 [Ns/m]	20,00	19,73	1,35
	C_2 [Ns/m]	30,00	30,27	0,90
	C_3 [Ns/m]	40,00	40,59	1,48
	C_4 [Ns/m]	50,00	49,42	1,16
	K_1 [N/m]	600,00	597,34	0,44
	K_2 [N/m]	500,00	503,75	0,75
	K_3 [N/m]	400,00	404,72	1,18
	K_4 [N/m]	400,00	395,28	1,18

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

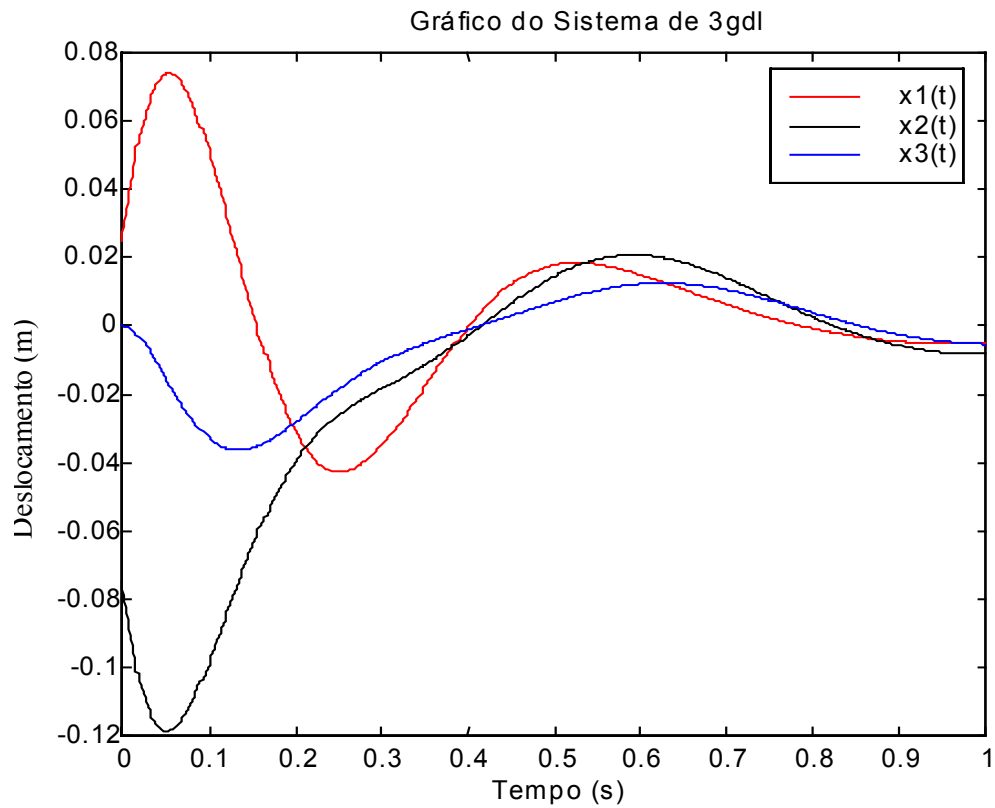


Figura (4.6) Sinal obtido de um sistema de 3 graus de liberdade livre.

Exemplo 7: Sistema excitado harmonicamente.

Para um sistema mecânico de 3 gdl tem-se:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 5 \text{ kg},$$

$$C_1 = 20 \text{ Ns/m}, C_2 = 30 \text{ Ns/m}, C_3 = 40 \text{ Ns/m}, C_4 = 50 \text{ Ns/m},$$

$$K_1 = 600 \text{ N/m}, K_2 = 500 \text{ N/m}, K_3 = 400 \text{ N/m}, K_4 = 400 \text{ N/m},$$

$$x_1(0) = 0 \text{ m}, x_2(0) = 0 \text{ m}, x_3(0) = 0 \text{ m},$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \text{ m/s}, \dot{x}_2(0) = -0 \text{ m/s}, \dot{x}_3(0) = 0 \text{ m/s}$$

$$t_i = 0 \text{ s}, t_f = 1 \text{ s},$$

$$f_1(t) = 100\text{sen}(20t) \text{ N}, f_2(t) = 150\text{sen}(30t) \text{ N}, f_3(t) = 200\text{sen}(50t) \text{ N}.$$

Tabela (4.10) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Fourier para um sistema excitado harmonicamente ($r = 20$)

Modos	Parâmetros	Valores Teóricos	Valores Identificados	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	7.72	7.72	0.02
	ω_a (rad/s)	7.39	7.39	0.02
	ξ	0.28	0.28	0.01
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0.21-0.46i)	(-0.22 -0.46i)	0.86(*)
2	ω_n (rad/s)	15.44	15.47	0.18
	ω_a (rad/s)	10.19	10.19	0.00
	ξ	0.75	0.75	0.14
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0.88 -2.64i)	(-0.96 -2.69i)	2.59(*)
3	ω_n (rad/s)	15.29	15.30	0.07
	ω_a (rad/s)	13.50	13.53	0.18
	ξ	0.46	0.46	0.86
	$Y_2/Y_1(**)$	(1.54 +0.31i)	(1.54 -0.31i)	0.05(*)
	C_1 [Ns/m]	20,00	19.97	0.15
	C_2 [Ns/m]	30,00	30.04	0.13
	C_3 [Ns/m]	40,00	39.88	0.30
	C_4 [Ns/m]	50,00	50.20	0.40
	K_1 [N/m]	600,00	603.75	0.63
	K_2 [N/m]	500,00	497.12	0.58
K_3 [N/m]	400,00	392.99	1.75	
K_4 [N/m]	400,00	412.16	3.04	

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Observam-se na tabela (4.10) as diferenças relativas entre os valores teóricos e os identificados através da utilização das séries de Fourier, com 20 termos.

4.2.2 - Método de Legendre

Exemplo 8: Sistema excitado harmonicamente.

Para um sistema mecânico de 3 gdl tem-se:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 5 \text{ kg,}$$

$$C_1 = 20 \text{ Ns/m, } C_0 = 30 \text{ Ns/m, } C_3 = 40 \text{ Ns/m, } C_4 = 50 \text{ Ns/m,}$$

$$K_1=600 \text{ N/m}, K_2=500 \text{ N/m}, K_3=400 \text{ N/m}, K_4=400 \text{ N/m},$$

$$x_1(0)=0 \text{ m}, x_2(0)=0 \text{ m}, x_3(0)=0 \text{ m},$$

$$\dot{x}_1(0)=0 \text{ m/s}, \dot{x}_2(0)=0 \text{ m/s}, \dot{x}_3(0)=0 \text{ m/s}$$

$$t_i = 0 \text{ s}, t_f = 1 \text{ s},$$

$$f_1(t) = 100\text{sen}(20t) \text{ N}, f_2(t) = 150\text{sen}(30t) \text{ N}, f_3(t) = 200\text{sen}(50t) \text{ N}.$$

Podem-se observar nas tabelas (4.11) e (4.12) as diferenças relativas entre os valores teóricos e os identificados através da utilização do método de Legendre para 25 e 30 termos de truncamento (r) da base vetorial. No gráfico da Fig. (4.7) podem-se verificar os sinais dos deslocamentos em função do tempo para um sistema de três massas. Nas tabelas são apresentados dois algarismos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algarismos significativos.

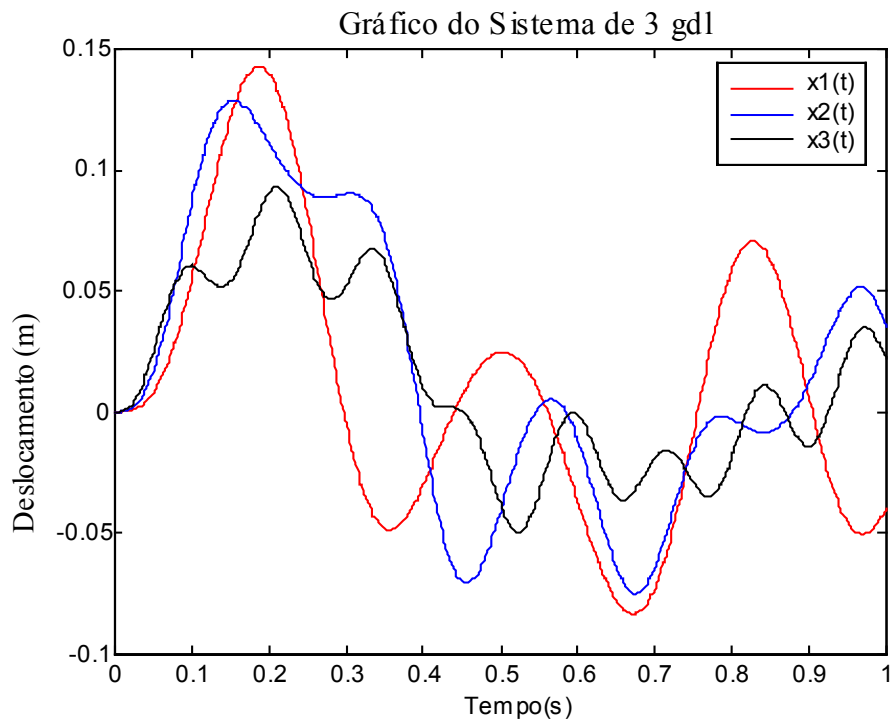


Figura (4.7) Gráfico de deslocamento em função do tempo para um sistema de 3 graus de liberdade excitado harmonicamente.

Para $r=25$ temos:

Tabela (4.11) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Legendre para um sistema excitado harmonicamente ($r = 25$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	7,72	7,70	0,24
	ω_a (rad/s)	7,39	7,37	0,25
	ξ	0,28	0,28	0,13
	$Y_2/Y_1(**)$	(1,54-0,31i)	(1,54-0,31i)	0,21(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(1,01-0,43i)	(1,03-0,43i)	1,29(*)
2	ω_n (rad/s)	15,44	15,87	2,79
	ω_a (rad/s)	10,19	13,51	5,29
	ξ	0,75	0,47	1,91
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,88-2,64i)	(-1,11-2,45i)	3,50(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,65+4,04i)	(-0,16+3,71i)	9,47(*)
3	ω_n (rad/s)	15,29	15,22	0,42
	ω_a (rad/s)	13,50	13,52	0,12
	ξ	0,46	0,45	1,95
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,38-0,48i)	(-0,34-0,44i)	8,10(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,55+0,24i)	(-0,58+0,19i)	0,97(*)
	C_1 [Ns/m]	20,00	19,98	0,06
	C_2 [Ns/m]	30,00	30,01	0,03
	C_3 [Ns/m]	40,00	38,94	2,65
	C_4 [Ns/m]	50,00	50,63	1,27
	K_1 [N/m]	600,00	600,76	0,13
	K_2 [N/m]	500,00	499,67	0,07
	K_3 [N/m]	400,00	425,33	6,33
	K_4 [N/m]	400,00	408,16	2,04

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Para $r=30$ temos:

Tabela (4.12) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Legendre para um sistema excitado harmonicamente ($r = 30$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	7,72	7,72	0,00
	ω_a (rad/s)	7,39	7,39	0,00
	ξ	0,28	0,28	0,00
	$Y_2/Y_1(**)$	(1,54-0,31i)	(1,54-0,31i)	0,00(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(1,01-0,43i)	(1,01-0,43i)	0,00(*)
2	ω_n (rad/s)	15,44	15,44	0,00
	ω_a (rad/s)	10,19	10,19	0,00
	ξ	0,75	0,75	0,00
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,88-2,64i)	(-0,88-2,64i)	0,01(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,65+4,04i)	(-0,65+4,04i)	0,01(*)
3	ω_n (rad/s)	15,29	15,29	0,00
	ω_a (rad/s)	13,50	13,50	0,00
	ξ	0,46	0,46	0,00
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,38-0,48i)	(-0,38-0,48i)	0,01(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,55+0,24i)	(-0,55-0,24i)	0,01(*)
	C_1 [Ns/m]	20,00	19,99	0,01
	C_2 [Ns/m]	30,00	30,00	0,00
	C_3 [Ns/m]	40,00	40,00	0,00
	C_4 [Ns/m]	50,00	49,99	0,01
	K_1 [N/m]	600,00	600,00	0,00
	K_2 [N/m]	500,00	500,00	0,00
	K_3 [N/m]	400,00	400,07	0,02
	K_4 [N/m]	400,00	399,83	0,04

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Verificam-se que a diferença relativa permanece constante e muito próxima de zero para valores de r até aproximadamente 180.

4.2.3 - Método de Chebyshev

Exemplo 9: O mesmo sistema simulado anteriormente foi analisado utilizando o método de Chebyshev como constam nas tabelas abaixo. Nas tabelas são apresentados dois algoritmos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algarismos significativos.

Para $r=25$ tem-se:

Tabela (4.13) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema excitado harmonicamente ($r = 25$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa (%)
1	ω_n (rad/s)	7,72	7,70	0,27
	ω_a (rad/s)	7,39	7,37	0,31
	ξ	0,28	0,28	0,45
	$Y_2/Y_1(**)$	(1,54-0,31)	(1,55-0,31i)	0,30(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(1,01-0,43i)	(1,02-0,44i)	0,81(*)
2	ω_n (rad/s)	15,44	14,58	5,57
	ω_a (rad/s)	10,19	9,55	6,28
	ξ	0,75	0,75	0,58
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,88-2,64i)	(-0,42-2,66i)	3,40(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,65-4,04i)	(-1,81+3,62i)	1,14(*)
3	ω_n (rad/s)	15,29	15,26	0,21
	ω_a (rad/s)	13,50	13,34	1,19
	ξ	0,46	0,48	3,43
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,38-0,48i)	(-0,40-0,56i)	12,66(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,55-0,24i)	(-0,51+0,29i)	2,64(*)
	C_1 [Ns/m]	20,00	20,00	0,01
	C_2 [Ns/m]	30,00	30,00	0,01
	C_3 [Ns/m]	40,00	40,04	0,10
	C_4 [Ns/m]	50,00	46,35	7,28
	K_1 [N/m]	600,00	598,30	0,28
	K_2 [N/m]	500,00	500,90	0,18
	K_3 [N/m]	400,00	396,00	1,00
	K_4 [N/m]	400,00	306,20	23,45

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Para R=35 temos:

Tabela (4.14) Resultados da Identificação dos Parâmetros utilizando Chebyshev para um sistema excitado harmonicamente ($r = 35$)

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valor Identificado	Diferença Relativa(%)
1	ω_n (rad/s)	7,72	7,72	0,00
	ω_a (rad/s)	7,39	7,39	0,00
	ξ	0,28	0,28	0,00
	$Y_2/Y_1(**)$	(1,54-0,31i)	(1,54-0,31i)	0,03(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(1,01-0,43i)	(1,01-0,43i)	0,06(*)
2	ω_n (rad/s)	15,44	15,44	0,00
	ω_a (rad/s)	10,19	10,19	0,00
	ξ	0,75	0,75	0,00
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,88-2,64i)	(-0,88-2,64i)	0,10(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,65-4,04i)	(-0,66+4,04i)	0,09(*)
3	ω_n (rad/s)	15,29	15,29	0,00
	ω_a (rad/s)	13,50	13,50	0,00
	ξ	0,46	0,46	0,01
	$Y_2/Y_1(**)$	(-0,38-0,48i)	(-0,38-0,48i)	0,18(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	(-0,55-0,24i)	(-0,55+0,24i)	0,11(*)
	C_1 [Ns/m]	20,00	20,00	0,00
	C_2 [Ns/m]	30,00	30,00	0,00
	C_3 [Ns/m]	40,00	40,00	0,00
	C_4 [Ns/m]	50,00	50,00	0,00
	K_1 [N/m]	600,00	600,00	0,00
	K_2 [N/m]	500,00	500,00	0,00
	K_3 [N/m]	400,00	400,00	0,00
	K_4 [N/m]	400,00	400,00	0,00

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

4.3 - Sistema Mecânico com Adição de Ruído Aleatório ao Sinal de Entrada

Realizou-se um estudo da consistência ou sensibilidade dos métodos de identificação de parâmetros a partir de sinais de resposta do sistema com a presença de ruído, para isso, foi gerado um sinal aleatório (randômico) com média zero e desvio padrão um, esse sinal foi multiplicado por

uma determinada porcentagem do desvio padrão do sinal de resposta $x(t)$ do sistema e adicionado a ele, ficando desta forma, com uma resposta com ruído. O sistema simulado é apresentado na Fig.(4.8) com as seguintes características:

Para um sistema mecânico de 4 gdl tem-se:

$$M_1=6 \text{ kg}, M_2=4 \text{ kg}, M_3=3 \text{ kg}, M_4=1 \text{ kg},$$

$$C_1=60 \text{ Ns/m}, C_2=80 \text{ Ns/m}, C_3=100 \text{ Ns/m}, C_4=130 \text{ Ns/m}, C_5=140 \text{ Ns/m},$$

$$K_1=200000 \text{ N/m}, K_2=100000 \text{ N/m}, K_3=150000 \text{ N/m}, K_4=80000 \text{ N/m}, K_5=120000 \text{ N/m},$$

$$x_1(0)=0 \text{ m}, x_2(0)=0 \text{ m}, x_3(0)=0 \text{ m}, x_4(0)=0 \text{ m}$$

$$\dot{x}_1(0)=0 \text{ m/s}, \dot{x}_2(0)=0 \text{ m/s}, \dot{x}_3(0)=0 \text{ m/s}, \dot{x}_4(0)=0 \text{ m}$$

$$t_i = 0 \text{ s}, t_f = 1 \text{ s},$$

$$f_1(t) = 20\text{sen}(25t) \text{ N}, f_2(t) = 10\text{sen}(47t) \text{ N}, f_3(t) = 6\text{sen}(30t) \text{ N}, f_4(t) = 5\text{sen}(18t) \text{ N}$$

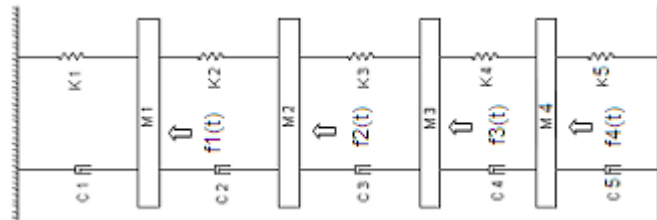


Figura (4.8): Sistema Mecânico com 4 graus de liberdade.

Através do método de Runge-Kutta obteve-se a resposta do sistema dada pela figura Fig. (4.09), e na Fig. (4.10) onde é apresentada a resposta do sistema com adição de 5% de ruído aleatório.

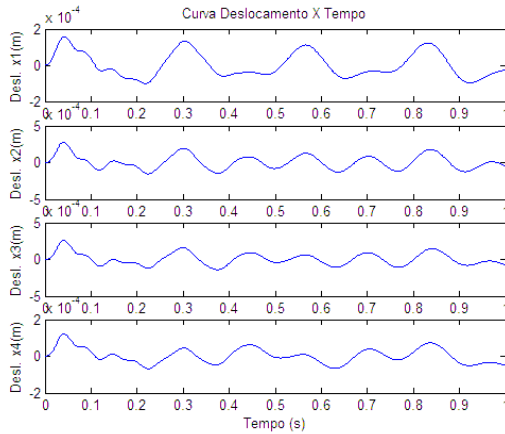


Figura (4.9): Resposta do sistema sem ruído.

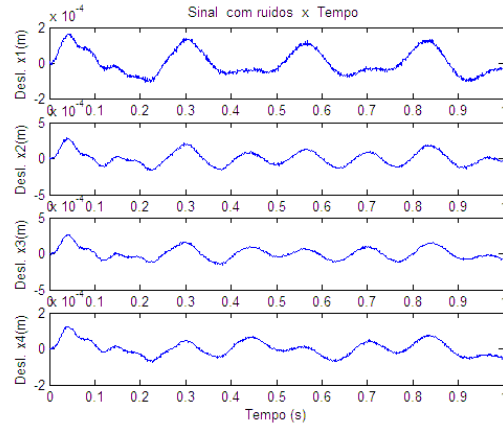


Figura (4.10): Resposta do sistema com ruído.

sistema com ruído.

Nas tabelas (4.15) e (4.16) são apresentados os resultados obtidos para a identificação de parâmetros para o sistema apresentado acima, respectivamente, sem e com ruído adicionado ao sinal de resposta do sistema. São apresentados os valores teóricos (parâmetros utilizados para a simulação) e os valores identificados utilizando os métodos de Fourier, Legendre e Chebyshev com 100 termos, valor considerado adequado consistente para este sistema. Nas tabelas são apresentados três algarismos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algarismos significativos.

Tabela (4.15) Valores obtido a partir da resposta sem ruído.

Modo	Parâmetros	Valores teóricos	Valores obtidos: Fourier	Valores obtidos: Legendre	Valores obtidos: Chebyshev	Dif. % Fourier r=100 termos	Dif. % Legendre r=100 termos	Dif. % Chebyshev r=100 termos
1	ω_n (rad/s)	465,210	465,216	465,217	465,217	0,001	0,002	0,002
	ω_a (rad/s)	441,153	441,157	441,150	441,159	0,001	0,001	0,001
	ξ	0,317	0,317	0,317	0,317	0,006	0,000	0,000
2	ω_n (rad/s)	325,685	325,676	325,660	325,705	0,003	0,008	0,006
	ω_a (rad/s)	323,356	323,352	323,352	323,375	0,001	0,001	0,006
	ξ	0,119	0,119	0,119	0,119	0,126	0,000	0,000
3	ω_n (rad/s)	228,567	228,573	228,570	228,570	0,002	0,001	0,001
	ω_a (rad/s)	228,082	228,089	228,080	228,084	0,003	0,001	0,009
	ξ	0,0651	0,0650	0,0651	0,0651	0,138	0,000	0,000
4	ω_n (rad/s)	119,060	119,038	119,049	119,068	0,018	0,009	0,007
	ω_a (rad/s)	118,905	118,886	118,897	118,913	0,016	0,006	0,007
	ξ	0,0509	0,0505	0,0508	0,0510	0,786	0,138	0,196
	C_1 [Ns/m]	60,000	60,173	59,974	59,989	0,288	0,043	0,018
	C_2 [Ns/m]	80,000	79,717	79,903	79,863	0,354	0,121	0,171
	C_3 [Ns/m]	100,000	100,168	100,060	100,060	0,168	0,060	0,060
	C_4 [Ns/m]	130,000	130,090	130,015	130,010	0,069	0,012	0,008
	C_5 [Ns/m]	140,000	139,895	140,021	139,990	0,075	0,015	0,007
	K_1 [N/m]	200.000,00	200.026,66	200.000,45	200.000,01	0,013	0,000	0,000
	K_2 [N/m]	100.000,00	99.975,44	100.003,13	99.995,00	0,025	0,003	0,005
	K_3 [N/m]	150.000,00	150.018,30	149.989,48	150.020,00	0,012	0,007	0,013
	K_4 [N/m]	80.000,00	80.003,67	79.94,90	80.003,00	0,005	0,006	0,004
	K_5 [N/m]	120.000,00	119.999,21	120.000,00	120.000,00	0,001	0,000	0,000

Tabela (4.16) Valores obtido a partir da resposta com ruído.

Modo	Parâmetros	Valores teóricos	Valores obtidos: Fourier	Valores obtidos: Legendre	Valores obtidos: Chebyshev	Dif. % Fourier r=100 termos	Dif. % Legendre r=100 termos	Dif. % Chebyshev r=100 termos
1	ω_n (rad/s)	465,209	465,052	465,518	464,907	0,034	0,066	0,065
	ω_a (rad/s)	441,152	441,870	441,019	440,935	0,163	0,030	0,049
	ξ	0,317	0,311	0,317	0,317	1,768	0,104	0,136
2	ω_n (rad/s)	325,685	326,253	327,127	327,050	0,174	0,443	0,419
	ω_a (rad/s)	323,356	322,973	321,309	324,626	0,118	0,633	0,393
	ξ	0,119	0,117	0,120	0,121	1,633	1,269	1,770
3	ω_n (rad/s)	228,567	228,617	228,504	228,560	0,022	0,028	0,003
	ω_a (rad/s)	228,082	228,124	228,045	228,045	0,019	0,016	0,016
	ξ	0,0651	0,0656	0,0672	0,0671	0,798	3,227	3,073
4	ω_n (rad/s)	119,060	119,067	119,093	119,083	0,006	0,028	0,020
	ω_a (rad/s)	118,905	118,928	118,989	118,923	0,020	0,072	0,016
	ξ	0,0509	0,0498	0,0517	0,0517	2,145	1,533	1,533
	C_1 [Ns/m]	60,000	59,097	62,131	62,326	1,505	3,552	3,877
	C_2 [Ns/m]	80,000	81,053	82,921	83,029	1,316	3,651	3,786
	C_3 [Ns/m]	100,000	9,053	9,125	101,036	0,947	0,875	1,036
	C_4 [Ns/m]	130,000	128,064	126,478	126,082	1,489	2,709	3,014
	C_5 [Ns/m]	140,000	142,633	144,965	145,051	1,881	3,546	3,608
	K_1 [N/m]	200.000,00	199.738,15	199.759,31	199.682,14	0,131	0,120	0,159
	K_2 [N/m]	100.000,00	100.336,71	100.189,84	100.275,10	0,337	0,190	0,275
	K_3 [N/m]	150.000,00	151.092,84	151.987,46	152.029,27	0,729	1,325	1,353
	K_4 [N/m]	80.000,00	79.735,99	80.031,51	80.029,74	0,330	0,039	0,037
	K_5 [N/m]	120.000,00	119.869,78	119.654,55	119.551,30	0,109	0,288	0,374

Analisou-se o comportamento do erro relativo para o parâmetro W_{n1} em função do número de termos de expansão (r) para as três funções ortogonais apresentadas. Na Fig. (4.11) apresenta-se uma faixa ideal para a aplicação dos números de termos de expansão para o sistema apresentado.

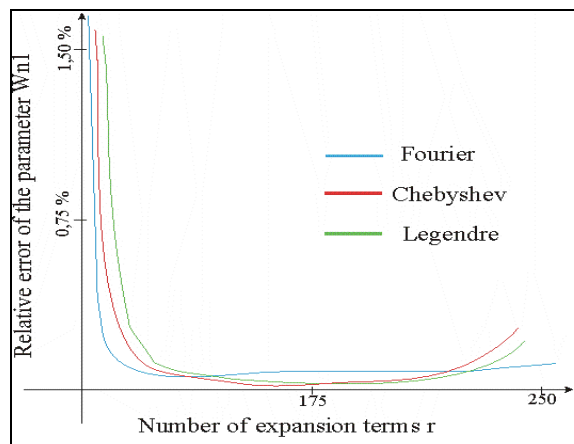


Figura (4.11): Gráfico do erro relativo encontrado no parâmetro W_{n1} em função do número de termos de expansão.

4.4 – Identificação de Falha

Nesta etapa do estudo, foram utilizadas as simulações computacionais para a diagnose de falhas. Para tal, comparou-se o sistema inicial (sem falhas) com o “mesmo” sistema modificado, porém agora apresentando uma simples falha como, por exemplo, a redução de um parâmetro.

Deste modo, a metodologia adotada se baseou na comparação de um parâmetro do sistema intacto (sem falhas) com um parâmetro do sistema que apresenta falha.

Para a identificação de falhas analisou-se o sistema mecânico da seção (4.3) conhecido e foi provocada uma variação em um dos parâmetros estruturais, o que poderia caracterizar uma falha. Assim fez-se o processo de identificação após a variação dos parâmetros. Provocou-se uma redução na rigidez K_1 de 15% e manteve-se os outros parâmetros constantes.

Na Fig.(4.11) podemos verificar o gráfico da resposta do sistema antes e depois de provocada a redução na rigidez de K_1 e na Tab. (4.17) serão apresentados os resultados obtidos. Nas tabelas são apresentados três algarismos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algarismos significativos.

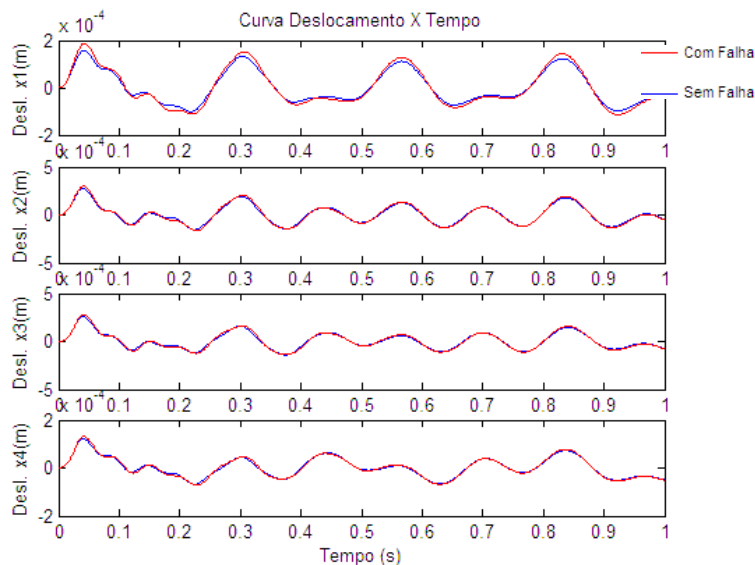


Figura (4.12): Resposta do sistema com e sem falha

Tabela (4.17) Resultados da Identificação dos Parâmetros com Falha em K_1 .

Parâmetro	Valores teóricos sem falha	Valores obtidos: Fourier	Valores obtidos: Legendre	Valores obtidos: Chebyshev	Diferença % Fourier com falha r=100 termos	Diferença % Legendre com falha r=100 termos	Diferença % Chebyshev com falha r=100 termos
C1[Ns/m]	60,000	60,166	60,002	60,022	0,277	0,004	0,037
C2[Ns/m]	80,000	79,695	79,997	79,977	0,381	0,004	0,029
C3[Ns/m]	100,000	100,152	100,027	100,050	0,152	0,026	0,050
C4[Ns/m]	130,000	130,093	130,009	130,000	0,071	0,007	0,000
C5[Ns/m]	140,000	139,894	140,000	140,010	0,076	0,000	0,007
K1[N/m]	200.000,00	170.024,84	170.002,69	170.004,97	14,988	14,999	14,998
K2[N/m]	100.000,00	99.972,89	100.010,62	100.007,08	0,027	0,011	0,007
K3[N/m]	150.000,00	150.017,45	150.020,04	150.023,17	0,012	0,013	0,015
K4[N/m]	80.000,00	80.003,83	80.004,30	80.002,76	0,005	0,005	0,003
K5[N/m]	120.000,00	119.999,02	120.000,88	120.002,73	0,001	0,001	0,002

4.5 – Identificação de Parâmetros Aplicada a uma Viga

Para poder validar a metodologia de identificação de parâmetros, utilizou-se um sistema contínuo, apresentado como uma viga engastada em uma de suas extremidades sujeita a aplicação de uma força harmônica. Utilizou-se a técnica de elementos finitos para discretização da viga em dois elementos. Não se dividiu a viga em mais elementos pois acarretaria em uma quantidade excessiva de resultados, fugindo do escopo deste trabalho.

O elemento de viga, como mostrado na Fig.(4.12), foi apresentado com dois graus de liberdade por nó, sendo o deslocamento e a rotação. Como a viga analisada contém três nós, possui assim, seis gdl, porém, como condição de contorno, ela está engastada, não apresentando desta forma deslocamento nem rotação na posição de engaste. Nas tabelas são apresentados três algarismos significativos mas para os cálculos foram utilizados oito algarismos significativos.

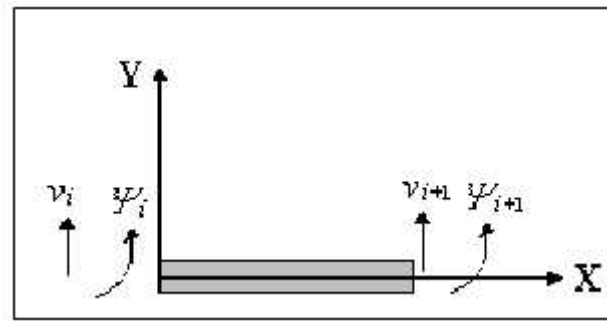


Figura (4.13) Elemento de viga.

Cada elemento da viga possui as matrizes de massa apresentada na Eq. (4.1) e rigidez apresentada na Eq. (4.2).

$$m = \frac{\rho SL}{2} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A viga considerada neste caso é de aço com as seguintes características e propriedades: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 200\text{GPa}$, comprimento total igual a 1 m, altura $h = 2 \text{ cm}$, espessura $b = 5 \text{ cm}$, sendo $S = (b * h)$ e $I = (b*h^3)/12$. Desprezou-se o amortecimento estrutural devido ao seu baixo valor. A resposta do sistema foi obtida através do método de Runge-Kutta, sendo o sistema excitado com uma força aplicada na extremidade da viga com valor RMS de 70,71 N, e frequência de 15,92 Hz e a partir dessa resposta iniciou-se o processo de identificação de parâmetros como pode ser observado na tabela (4.18). Foram utilizados 100 termos nos truncamento das séries.

Tabela (4.18) Parâmetros modais identificados para a viga

Modo	Parâmetros	Valor Teórico	Valores obtido: Fourier	Valores obtido: Legendre	Valores obtido: Chebyshev	Dif. % Fourier r=100 termos	Dif. % Legendre r=100 termos	Dif. % Chebyshev r=100 termos
1	ω_n (rad/s)	102,513	103,6300	102,515	102,516	1,090	0,002	0,003
	$Y_2/Y_1(**)$	3,42+0,00i	3,42+0,00i	3,42+0,00i	3,42+0,00i	0,000	0,000	0,000(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	2,94+0,00i	2,94+0,00i	2,94+0,00i	2,94+0,00i	0,000	0,000	0,000(*)
	$Y_4/Y_1(**)$	4,05+0,00i	4,05+0,00i	4,05+0,00i	4,05+0,00i	0,000	0,000	0,000(*)
2	ω_n (rad/s)	647,578	647,5100	647,180	647,375	0,011	0,061	0,031
	$Y_2/Y_1(**)$	-0,60+0,00i	-0,58+0,00i	-0,60+0,00i	-0,60+0,00i	3,333	0,000	0,000(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	-1,38+0,00i	-1,33+0,00i	-1,38+0,00i	-1,38+0,00i	3,623	0,000	0,000(*)
	$Y_4/Y_1(**)$	-6,67+0,00i	-6,44+0,00i	-6,67+0,00i	-6,67+0,00i	3,448	0,000	0,000(*)
3	ω_n (rad/s)	2.190,229	2.190,2700	2.190,224	2.190,253	0,002	0,000	0,001
	$Y_2/Y_1(**)$	-75,17+0,00i	-76,81+0,00i	-75,16+0,00i	-75,20+0,00i	2,181	0,000	0,000(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	9,83+0,00i	9,97+0,00i	9,82+0,00i	9,83+0,00i	1,424	0,001	0,000(*)
	$Y_4/Y_1(**)$	94,81+0,00i	96,67+0,00i	94,74+0,00i	94,82+0,00i	1,961	0,001	0,000(*)
4	ω_n (rad/s)	6.356,981	6.357,3400	6.357,047	6.357,382	0,006	0,001	0,001
	$Y_2/Y_1(**)$	20,55+0,00i	20,15+0,00i	20,56+0,00i	20,56+0,00i	1,946	0,000	0,000(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	3,95+0,00i	3,93+0,00i	3,95+0,00i	3,95+0,00i	0,005	0,000	0,000(*)
	$Y_4/Y_1(**)$	76,34+0,00i	74,63+0,00i	76,39+0,00i	76,38+0,00i	2,240	0,001	0,001(*)

(*) diferença relativa dos valores em módulo. (**) modos de vibrar normalizados.

Pode-se verificar que no caso de sistemas contínuos, os resultados são bastante razoáveis, apresentando menores desvios os métodos de Legendre e Chebyshev.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Este capítulo tem como objetivo validar experimentalmente as rotinas computacionais desenvolvidas para a identificação dos parâmetros dos sistemas mecânicos, quando os dados são obtidos de situações concretas. Desta forma utilizou-se um conjunto de mesas vibratórias do Laboratório de Vibrações da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.

Montou-se um sistema dinâmico de mesas vibratórias, confeccionado com chapas de alumínio de diferentes massas, lâminas metálicas de aço inoxidável para fornecer rigidez ao sistema, borrachas de diferentes espessuras para proporcionar o amortecimento viscoso. Inicialmente os modelos matemáticos são desenvolvidos. Em seguida, através de técnicas de análise modal experimental, os parâmetros são identificados. Finalmente, faz-se a aquisição dos sinais de excitação e de resposta no domínio do tempo.

Na figura (5.1) podemos verificar o sistema montado para a realização da análise experimental.



Figura (5.1): Sistema mecânico utilizado para a análise experimental.

5.1 - Materiais Utilizados

Para a confecção do sistema acima foram utilizados os seguintes materiais:

- Mesa inercial de sustentação da bancada de testes;
- 3 placas de liga de alumínio de dimensões: (m_1) 35 cm x 35 cm x 1 cm; (m_2) 25 cm x 25 cm x 1 cm; (m_3) 16 cm x 16 cm x 1 cm;
- 20 lâminas de aço inoxidável de dimensões: 14 cm x 2,5 cm x 1 cm;
- 8 tiras de borrachas de dimensões: 14 cm x 2,5 cm x 2,4 cm na mesa m_2 e 14 cm x 2,5 cm x 1,5 cm na mesa m_3 ;
- Juntas com parafusos para a acoplagem das mesas, lâminas e borrachas;
- Placa de ferro fundido para auxiliar na extração dos parâmetros.

5.1.1 - Equipamentos Utilizados

Para a aquisição de sinais do sistema mostrado na Fig. (5.1), foram utilizados os seguintes equipamentos:

- Sistema de aquisição de dados *A/D Iotech DaqBook/112* utilizando o software de aquisição e análise de dados *DasyLab 4.0*;
- Condicionador/Amplificador de sinais *Nexus Conditioning Amplifier Z6 0400* da Bruel & Kjaer ;
- Acelerômetro *PCB Piezotronics* tipo *353B03 SN 75858* ($10 [1,02] \text{ mV/g [mV/(m/s}^2\text{)]}$);
- Acelerômetro Brüel & Kjær ($0,1 \text{ mV/g}$);
- Martelo de impacto confeccionada em madeira com pontas de borracha;
- Transdutor de força da Bruel & Kjaer tipo *8200* (3.93 pC/N);
- Gerador de frequência *Politerm PT-9300 All-in-one instrument*;
- Amplificador de sinal *MMF-LV103* ($100\text{VA } 3\Omega \text{ 3HZ} \dots \dots \dots 20\text{kHz}$).

5.2 - Sistema para Aquisição de Dados

O sistema de aquisição utilizado para a análise da estrutura acima foi *DaqBook/DaqBoard* (16 canais) com o *software DasyLab*. Através da aplicação de uma força impulsiva no sistema composto de mesas vibratórias, colocando-se um acelerômetro em uma das mesas, inferior, intermediária ou superior, obtém-se as frequências naturais. Foram utilizados os seguintes módulos, conforme mostrado na Fig.(5.2).

- Conversor Analógico/Digital
- Visualização gráfica do sinal adquirido
- Transformada Rápida de Fourier (FFT)
- Visualização gráfica da FFT
- Critério de parada
- Armazenamento em disco dos sinais adquiridos

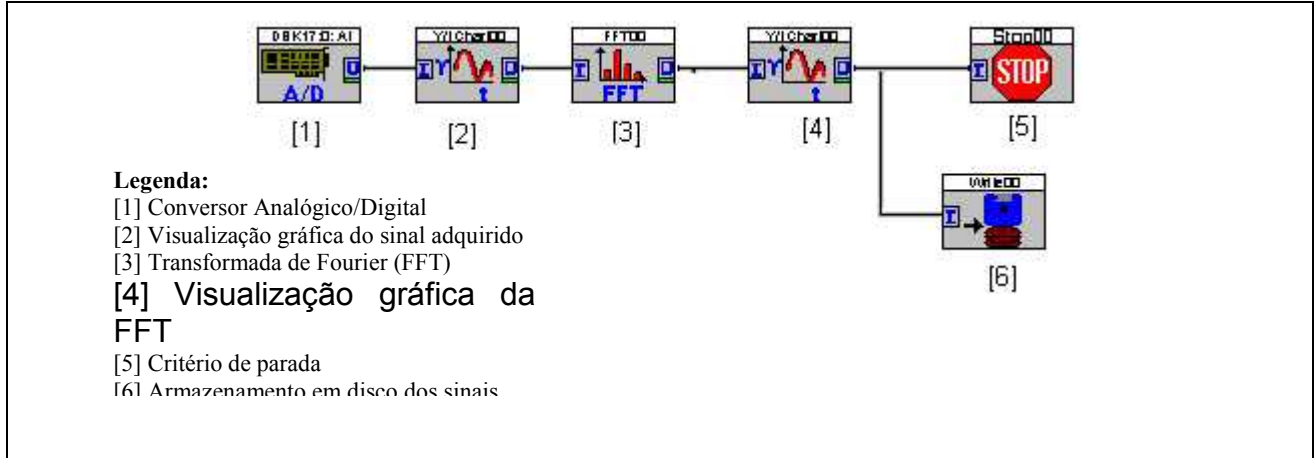


Figura (5.2): Fluxograma de comandos apresentado na forma de diagramas de blocos no Software utilizado para a obtenção dos parâmetros do sistema.

5.3 - Modelo Matemático do Sistema Mecânico

Pode-se representar o sistema mecânico de 3 graus de liberdade, dado pela Fig. (5.1), por um modelo matemático Fig.(5.3), onde o primeiro bloco com a massa m_1 representa a mesa vibratória inferior, o segundo bloco com a massa m_2 representa a mesa intermediária e o terceiro bloco com a massa m_3 a mesa superior, no qual a partir deste, a metodologia pode ser aplicada para a realização de análises experimentais.

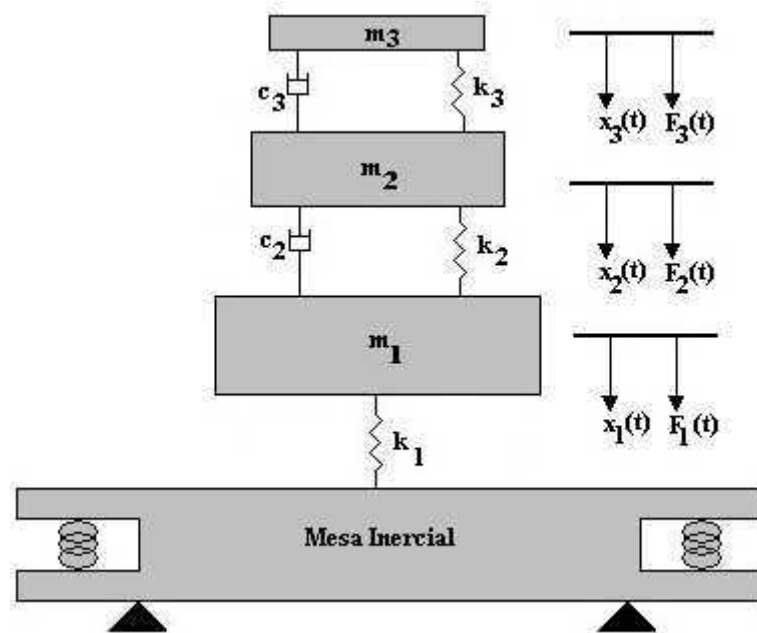


Figura (5.3): Modelo matemático para o sistema mecânico utilizado.

A partir deste sistema toda a metodologia apresentada pode ser aplicada, o objetivo aqui é utilizar os métodos estudados para a identificação de forças e localização de falhas em uma situação real.

O sistema de equações diferenciais na forma matricial que descreve o movimento deste sistema mecânico é dado pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

5.4-Determinação dos Parâmetros Físicos do Sistema Mecânico

5.4.1 - Mesa Inferior

Inicialmente considera-se o sistema somente com a mesa m_1 (mesa inferior), conforme mostrado na Fig. (5.4). Assim, modela-se o sistema como um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade. Excitando o sistema com uma entrada impulsiva qualquer, este inicia movimento vibratório com uma frequência que é exatamente a frequência natural deste grau de liberdade. Então é possível calcular a partir da resposta deste sistema sua rigidez, uma vez que a mesa m_1 não está submetida a amortecimento.

O sistema da Fig.(5.4) é composto de 8 lâminas metálicas, uma placa de alumínio de 6,575 Kg, sendo fixado em cada extremidade 2 lâminas de aço inoxidável. Excitando o sistema com uma força impulsiva, obteve-se uma frequência natural levemente amortecida pelas próprias características estruturais do sistema. Considera-se o sistema sem amortecimento, portanto é ignorado este efeito amortecedor e a frequência de vibração é considerada a frequência natural da mesa.

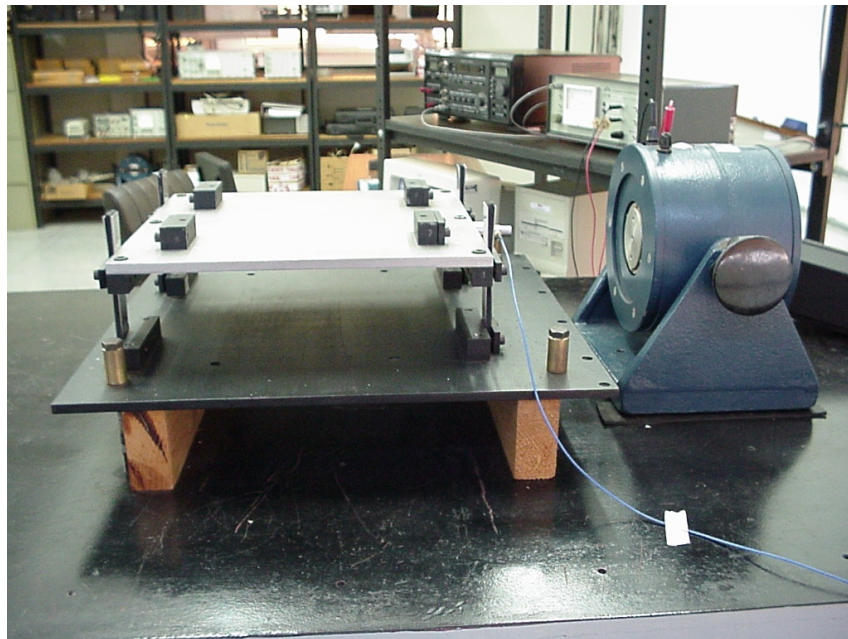


Figura (5.4) - Mesa Vibratória Inferior (Mesa m_1).

A partir destes dados obteve-se os seguintes resultados:

- Frequência Natural do sistema: $f_n = 22,46 \rightarrow \omega_n = 141,12 \text{ rad/s}$

- Rigidez equivalente: $k_{eq} = 130.940,80 \text{ N/m}$

A Figura (5.5) mostra os resultados obtidos.

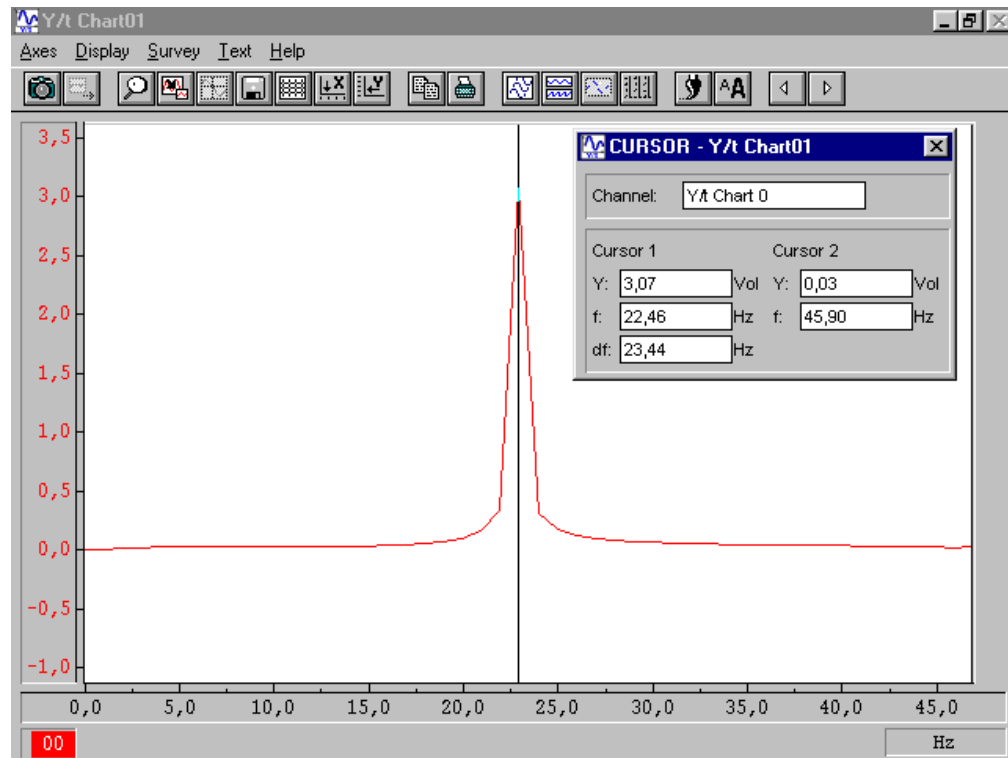


Figura (5.5): Resultados obtidos pelo Software DASyLab.

5.4.2 - Mesa Intermediária

Considera-se o sistema somente com a mesa m_2 livre, sendo a massa m_1 presa conforme mostrado na Fig. (5.6). Sendo assim, modela-se o sistema como um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade. O sistema é composto de 8 lâminas metálicas, 4 borrachas e uma massa (placa de alumínio) de 4.550 Kg, sendo fixado em cada extremidade 2 lâminas de aço e uma borracha de 2,4 mm de espessura.

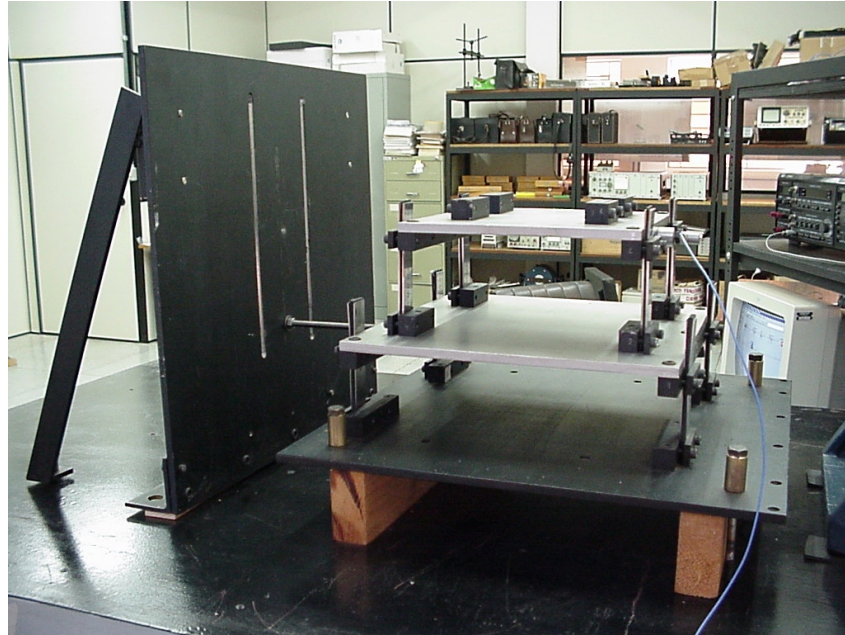


Figura (5.6): Obtenção de rigidez e amortecimento equivalentes da mesa m_2 , estando a mesa m_1 fixada em uma placa suporte de ferro fundido, presa à bancada.

Excitando o sistema com uma força impulsiva, apresenta-se uma resposta amortecida pelas borrachas como pode ser verificado na Fig. (5.7). A frequência natural amortecida do sistema é mostrada na Fig. (5.8). Assim, usando as formulações para o amortecimento viscoso com um grau de liberdade (decremento logarítmico), obteve-se os seguintes resultados:

- Frequência natural amortecida: $f_a = 41,02 \text{ Hz} \rightarrow \omega_a = 257,74 \text{ rad/s}$
- Frequência natural: $f_n = 41,04 \text{ Hz} \rightarrow \omega_n = 257,89 \text{ rad/s}$
- Rigidez equivalente: $k_{eq} = 302.604,34 \text{ N/m}$
- Amortecimento equivalente: $c_{eq} = 85,650 \text{ N.s/m}$
- Decremento logarítmico: $\xi = 0,037$

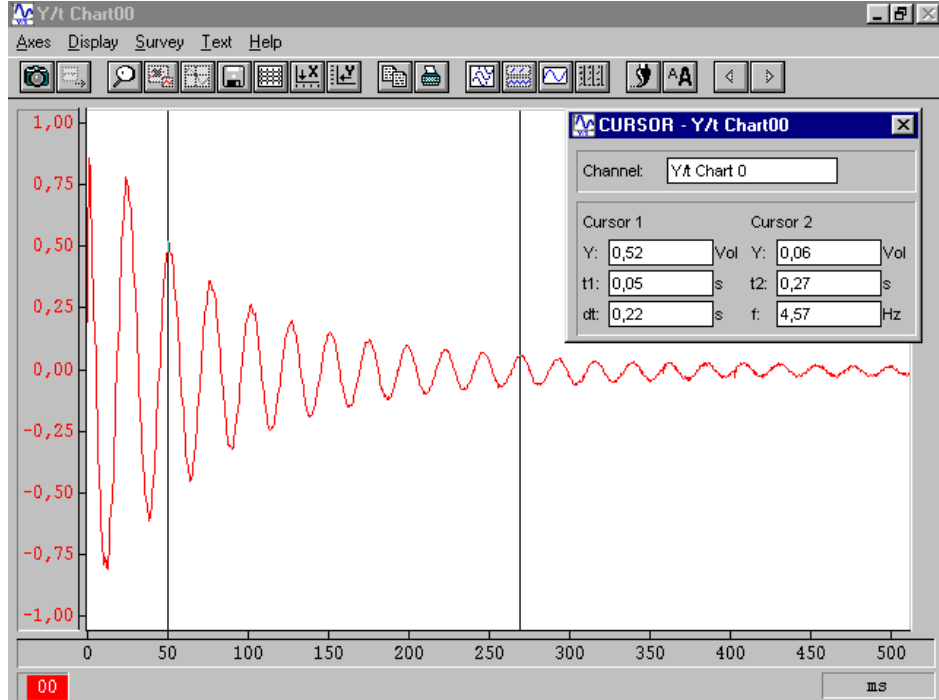


Figura (5.7): Resposta amortecida da mesa m_2 a uma entrada impulsiva qualquer.

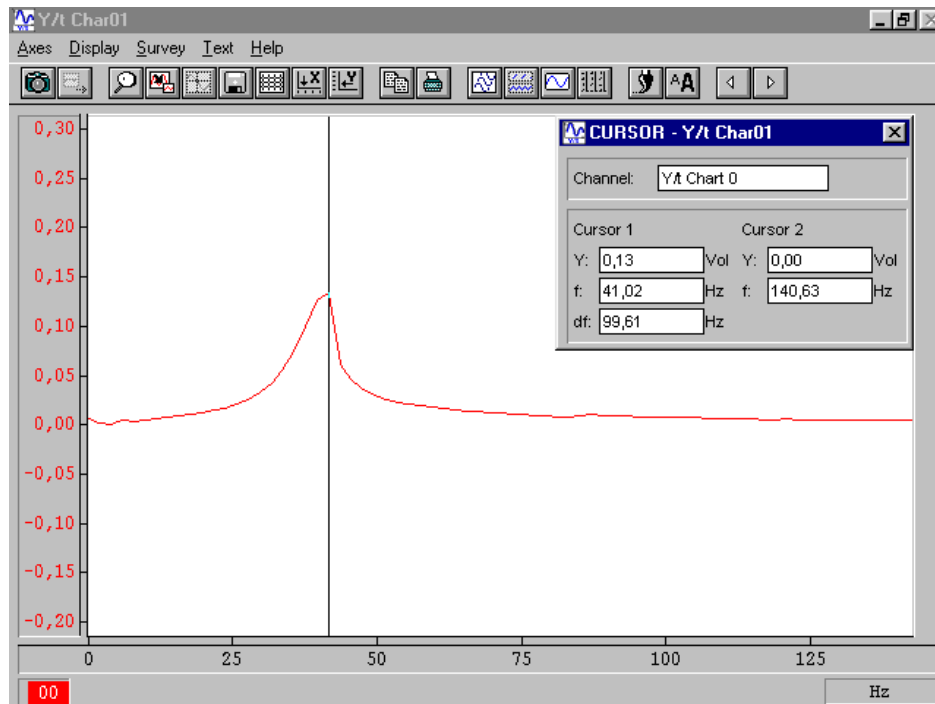


Figura (5.8): Frequência amortecida da mesa m_2 .

5.4.3 - Mesa Superior

Analisando o sistema somente com a mesa m_3 , sendo as massas m_1 e m_2 presas conforme mostrado na Fig. (5.9), modela-se o sistema como um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade e assim pode-se obter os parâmetros físicos desta mesa.



Figura (5.9): Obtenção de rigidez e amortecimento equivalentes da mesa m_3 , estando a mesa m_1 e a mesa m_2 fixadas em uma placa suporte de ferro fundido, presa à bancada.

O sistema da Fig. (5.9) é composto de 8 lâminas metálicas, 4 borrachas e uma massa de alumínio de 1.825 Kg. Cada extremidade possui, presas por uma junta, 4 lâminas de aço inoxidável e uma borracha de 1,5 mm de espessura.

Excitando o sistema com uma força impulsiva qualquer, obteve-se a frequência natural amortecida do sistema, conforme mostra a resposta do sistema Fig. (5.10) e de onde se obtêm os parâmetros físicos desta mesa a partir da frequência amortecida do sistema, vista na Figura (5.11).

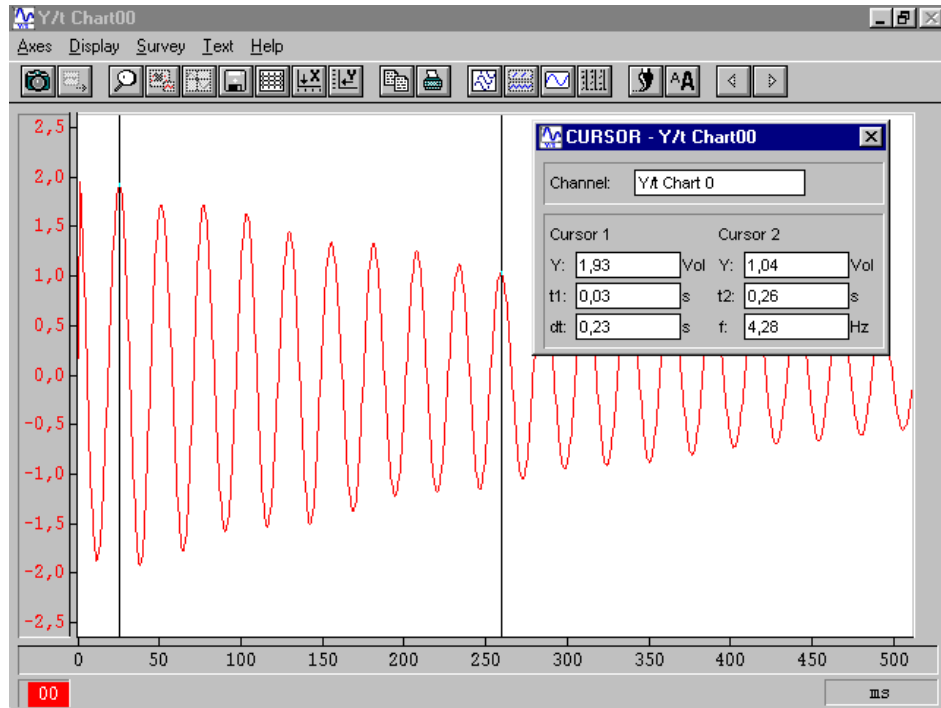


Figura (5.10): Resposta amortecida da mesa m_3 a uma entrada impulsiva qualquer.

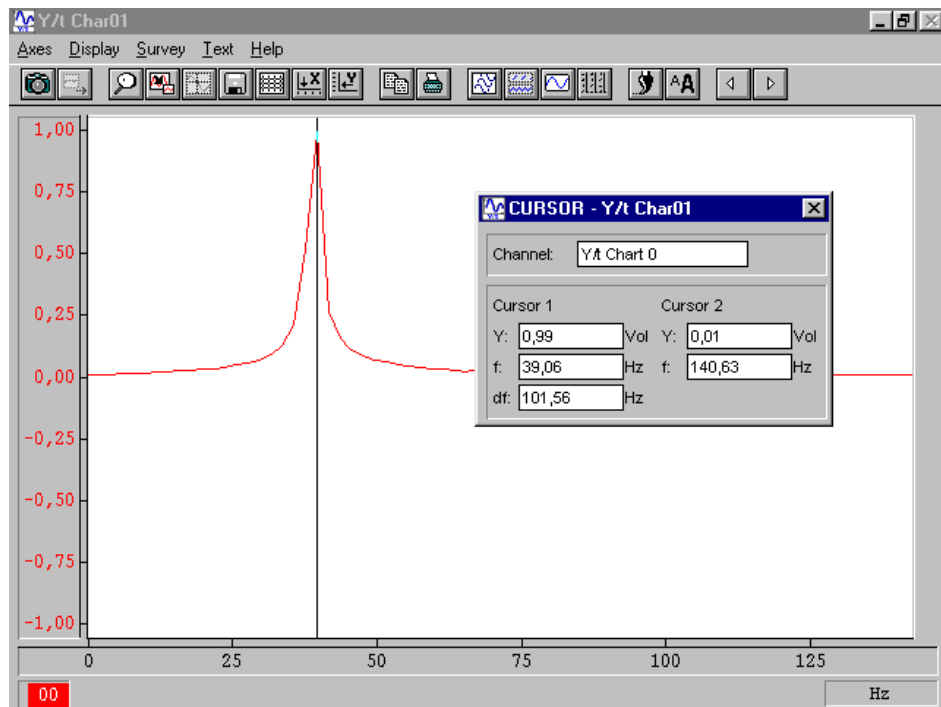


Figura (5.11): Freqüência amortecida da mesa m_3 .

Desta forma, usando as formulações para o amortecimento viscoso, obteve-se os seguintes resultados:

- Frequência natural amortecida: $f_a = 39,06 \text{ Hz} \rightarrow \omega_a = 245,42 \text{ rad/s}$
- Frequência natural: $f_n = 40,50 \text{ Hz} \rightarrow \omega_n = 245,44 \text{ rad/s}$
- Rigidez equivalente: $k_{eq} = 109.935,76 \text{ N/m}$
- Amortecimento equivalente: $c_{eq} = 9,79 \text{ N.s/m}$
- Decremento Logaritmo: $\xi = 0,0109$

5.5 – Análise do Sistema Completo com 3 g.d.l. (graus de liberdade)

Sendo liberado as três mesas, fez-se a aquisição dos sinais utilizando o diagrama de blocos apresentado na Fig. (5.12), onde os três primeiros canais foram utilizados para aquisição do sinal de deslocamento e o último canal para determinação da força. Foram utilizados os seguintes módulos, conforme mostrado na Fig. (5.12).

- Conversor Analógico/Digital
- Ajuste de escala
- Visualização gráfica do sinal adquirido
- Transformada Rápida de Fourier (FFT)
- Critério de parada
- Armazenamento em disco dos sinais adquiridos

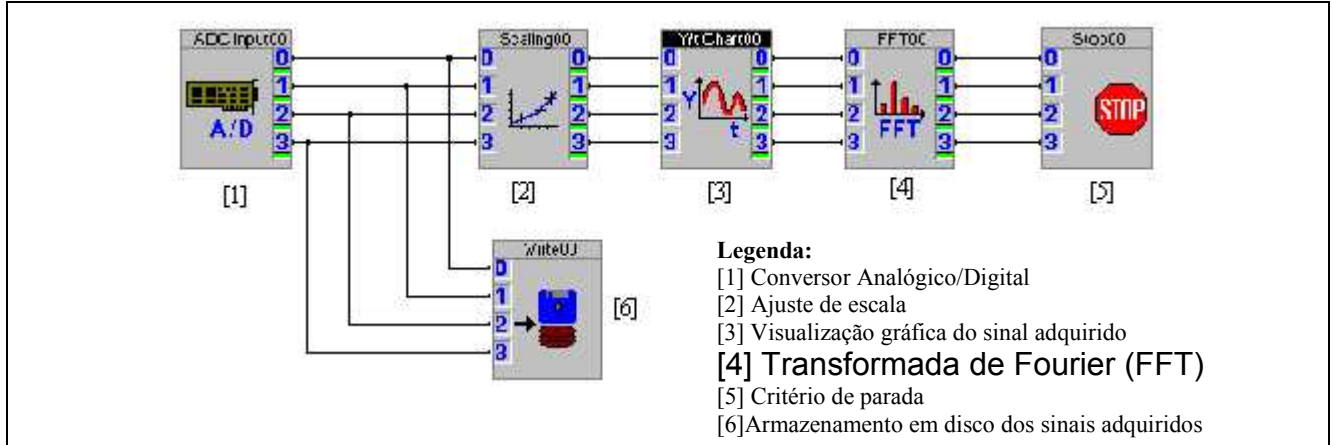


Figura (5.12): Fluxograma de comandos apresentado na forma de diagramas de blocos, utilizando quatro canais para aquisição dos sinais de deslocamento e força.

O sistema foi excitado com uma força aplicada na mesa inferior com valor RMS de $F_1=7,29$ N, e frequência de 25,1 Hz. Obteve-se a resposta do sistema apresentada na Fig. (5.13). Como o sinal utilizado foi de deslocamento, as respostas medidas pelos acelerômetros foram integradas duas vezes, utilizando, para isto, o Condicionador/Amplificador de sinais *Nexus da BRUELL* que possui essa função. A partir do método de identificação proposto e com a resposta do sistema pode - se assim obter os parâmetros apresentados na tabela (5.1). Utilizou-se $R = 100$ termos de expansão para Fourier, Legendre e Chebyshev.

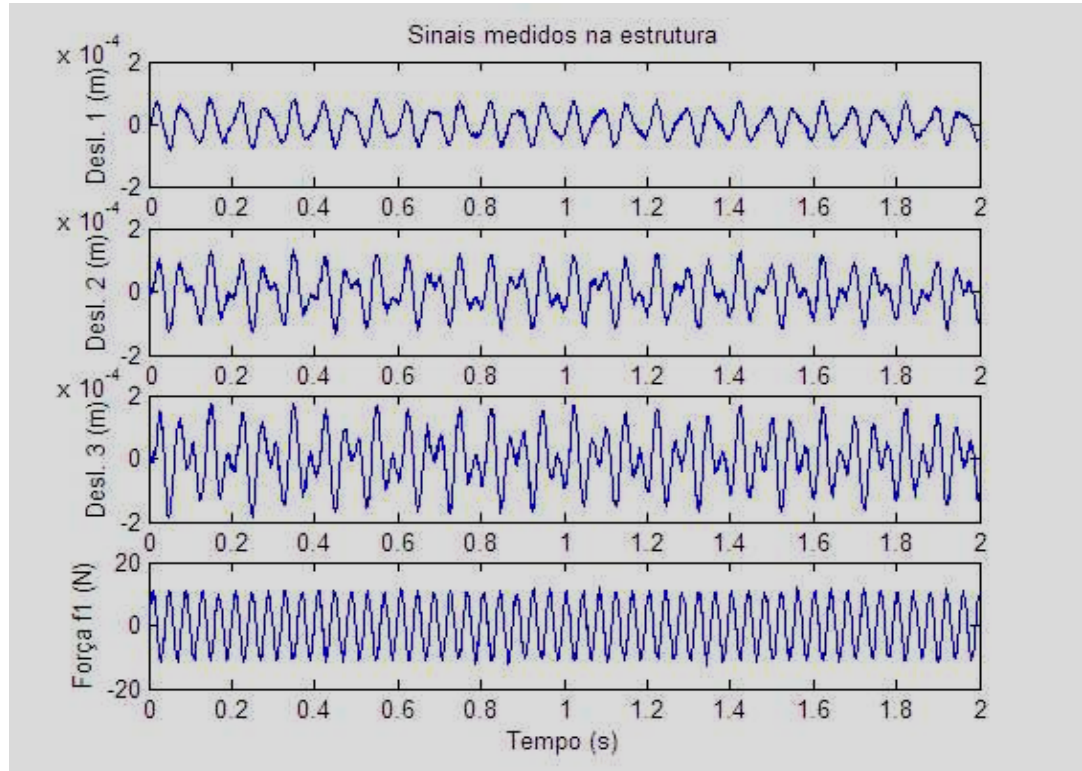


Figura (5.13) Sinais medidos na estrutura.

Tabela (5.1) Resultados Experimentais da Identificação dos Parâmetros

Modo	Parâmetros	Valores experimentais	Valores obtidos: Fourier	Valores obtidos: Legendre	Valores obtidos: Chebyshev	Dif. % Fourier r=100 termos	Dif. % Legendre r=100 termos	Dif. % Chebyshev r=100 termos
1	ω_n (rad/s)	93,820	93,791	93,821	93,821	0,030	0,002	0,001
	ω_a (rad/s)	93,820	93,791	93,821	93,820	0,031	0,002	0,001
	ξ	0,0016	0,0015	0,0016	0,0016	5,089	0,382	0,000
	$Y_2/Y_1(**)$	1,241-0,006i	1.24 -0.006i	1.24 - 0.007i	1.24 -0,006i	0,000	0,000	0,081(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	1,454-0,009i	1.454 - 0.009i	1.454 - 0.009i	1.454 - 0.009i	0,000	0,000	0,000(*)
2	ω_n (rad/s)	249,287	249,290	249,293	249,290	0,001	0,002	0,001
	ω_a (rad/s)	249,261	249,264	249,266	249,264	0,001	0,002	0,001
	ξ	0,0145	0,0146	0,0146	0,0145	0,118	0,695	0,041
	$Y_2/Y_1(**)$	0,083+0,022	0.08 + 0.020i	0.084+ 0.022i	0.084 + 0.021i	0,433	1,215	0,923(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	-2,657-0,087i	-2.66 - 0.092i	-2.657 - 0.08i	-2.66 - 0.087i	0,119	0,001	0,114(*)
3	ω_n (rad/s)	381,914	381,915	381,938	381,985	0,000	0,006	0,019
	ω_a (rad/s)	381,620	381,623	381,654	381,653	0,001	0,009	0,009
	ξ	0,0392	0,0391	0,0386	0,0417	0,381	1,521	6,316
	$Y_2/Y_1(**)$	-1,73+0,029i	-1.73 + 0.013i	-1.73 + 0.03i	-1.73 + 0.02i	0,104	0,001	0,287(*)
	$Y_3/Y_1(**)$	1,21-0,113i	1.21- 0.115i	1.21- 0.115i	1.21 - 0.113i	0,101	0,015	0,000(*)
	C_1 [Ns/m]	0,000	-	-	-	-	-	-
	C_2 [Ns/m]	85,650	83,795	82,983	89,553	2,165	3,114	5,059
	C_3 [Ns/m]	9,790	9,206	9,189	10,236	5,964	6,143	4,556
	K_1 [N/m]	130.940,80	130.842,40	130.948,36	130.954,43	0,075	0,006	0,010
	K_2 [N/m]	302.604,34	302.622,28	302.662,03	302.743,25	0,006	0,019	0,046
K_3 [N/m]	109.935,76	109.932,18	109.944,87	109.969,79	0,003	0,008	0,031	

(*) diferença relativa dos valores em módulo.

(**) modos de vibrar normalizados.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentou-se uma metodologia para identificação de parâmetros, aplicando a técnica de funções ortogonais das séries de Fourier , Legendre e Chebyshev.

A simulação computacional, para sistemas com vários graus de liberdade, permitiu observar claramente o funcionamento do sistema mecânico, quando submetido a diferentes condições iniciais e/ou forças de excitação. Realizaram-se simulações com acréscimo de ruídos na resposta onde se pode verificar a baixa sensibilidade dos métodos na presença de ruídos, ou seja, mesmo com a presença de ruído, foi possível a identificação dos parâmetros. Foi realizada uma aplicação dos métodos de identificação para sistemas contínuos, onde uma viga foi discretizada através do método de elementos finitos e a partir da resposta utilizando o método Runge-Kutta pode-se determinar, como apresentado no seção (4.4), a identificação dos parâmetros modais do sistema. Foi observado através dos resultados, que os métodos mostraram-se bastante satisfatórios, apresentando baixa diferença relativa entre os resultados teóricos e os simulados, como mostrado no Cap. 4. Foram realizadas simulações variando o número de termos de expansão (r), observando-se que existe uma faixa ideal para aplicação. Essa faixa tem grande influência do tipo de entrada, principalmente com relação às frequências das forças que excitam o sistema. Para identificação dos parâmetros utilizando as funções de Fourier, Legendre e Chebyshev, foi utilizado o software Matlab, o tempo computacional gasto nos sistemas apresentados foi relativamente pequeno, mas sabe-se que para sistemas mais complexos esse tempo tende a aumentar. Verificou-se que entre 40 e 200 termos, as identificações apresentaram erros relativos bastante pequenos. A partir de 300 termos verificou-se

que começaram a aparecer acúmulos de erros computacionais, comprometendo as Identificações. Pode-se portanto, adotar um número de 100 termos de expansão para todos os métodos.

Para comprovação do método foi realizada a determinação dos parâmetros experimentalmente através de um sistema de três graus de liberdade, como verificado no Cap. 5, na qual a bancada de teste foi modelada matematicamente e identificada usando técnicas de análise modal experimental através de métodos convencionais no domínio da frequência, para só então se fazer a análise modal aplicando os métodos de Fourier, Legendre e Chebyshev, onde os métodos mostraram-se bastante satisfatórios para a identificação dos parâmetros. Verifica-se que o erro encontrado foi relativamente baixo dado pela simplicidade e linearidade do sistema utilizado para identificação, na prática, onde as condições não são tão favoráveis certamente os erros encontrados seriam maiores.

A deficiência que esses métodos apresentam é o fato de que o número de graus de liberdade do sistema deve ser igual ao número de sensores utilizados, essa deficiência pode ser suprida com a utilização de métodos podem reconstruir os estados não medidos como o método dos Observadores de Estado.

Para trabalhos futuros propõe-se:

- Desenvolvimento da metodologia para as funções de Walsh, Block-Pulse e polinomiais de Jacobi, Laguerre e Hermite.
- Utilização do método dos Observadores de Estado para reconstrução de Estados não medidos ou de pontos de difícil acesso.
- Aplicação das metodologias em sistemas reais, existentes nas Indústrias, para Detecção e Localização de Falhas.

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS

- CHANG, R. Y.; WANG, M. L. The application of shifted Legendre polynomials to time-delay systems and parameter identification. **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control**, New York, v. 107, p. 79-85, 1985.
- CHEN, J. ; PATTON, R. J. Optimal filtering and robust fault diagnosis of stochastic systems with unknown disturbances. **International Journal of Control**, London, v.143, n.1, p.31-36, 1996.
- CHEN, C-F.; HSIAO, C-H. Time domain synthesis via Walsh functions. **Proceedings IEE**, London, v.122, n. 5, p. 565-570, 1975.
- CHEN, C. F.; TSAY, Y. T.; WU, T. T. Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed systems. **Journal of the Franklin Institute** , Elmsford v.303, n.3, p. 267-284, 1977.
- CHOU, J. H. Application of Legendre series to the optimal control of integer differential equations. **International Journal of Control**, London, v.45, n.1, p.269-277, 1987.
- CHOW, E. Y. ; WILLSKY, A. S. Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.29, n.7, p. 603-614, 1984.
- CHOU, J.H., HORNG, I.R. Shifted Chebyshev series analysis of linear optimal control systems incorporating observers. **International Journal of Control**, London, v.41, n.1, p.129-134, 1985.
- CHUNG, H.-Y. System identification via Fourier series, discrete time nonlinear systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.18, n.6, p.1191-1194, 1987.
- COOPER, J. E. ; DESFORGES, M. J. Physical parameter identification using an unknown random input, *ISMA19 - Tools for Noise and Vibration Analysis*, p.1123-1128, 1996.

- CORLESS, M. ; TU, J. A simple state/uncertainty estimator for a class of uncertain systems. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, Rio de Janeiro, v.19, n.2, p.176-191, 1997.
- D'AZZO, J. J. ; HOUPIS, C. H. **Linear control system analysis and design**, São Paulo: McGraw-Hill, 1988. 660p.
- DING, X.; GUO, L. ; FRANK P. M. Parameterization of linear observers and its application to observer design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.39, n.8, p.1648-1652, 1994.
- EMRE, E. ; SILVERMAN, L. M. K. Observers for linear systems with unknown inputs. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.AC-25, n.4, p.779-783, 1980.
- FRANK, P. M. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy **A Survey and Some New Results, Automatic**, v. 26, n.3, p.459-474, 1990.
- FRANK, P. M.; SELIGER, R. Fault detection and isolation in automatic processes. **Control and Dynamic Systems**, New York, v. 49, p.241-287, 1991.
- FRITZEN, C. P. Identification of mass, damping and stiffness matrices of mechanical systems. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, New York, v.108, p.9-14, 1986.
- GERTLER, J. J. Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants. **IEEE Control Systems Magazine**, New York, v.8, p.3-11, 1988.
- HOSTETTER, G. ; MEDICH, J. S. Observing systems with unmeasurable inputs. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.AC-18, p 307-308, 1973.
- HOWELL, J. Model-based fault detection in information poor plants. **Automatica**, Elmsford, v.30, n.6 p 929-943, 1994.
- HORNBECK, R. W. **Numerical methods**. New York: Prentice-Hall, 1975.
- HORNG, I.R.; CHOU, J-H. Analysis and parameter identification of time-lay systems via whifted jacobi polynomials. **International Journal of Control**, London, v.44, p. 935-942, 1986.
- HORNG, I-R.; CHOU, J-H. Analysis and identification of non-linear systems via shifted Jacobi series. **International Journal of Control**, London, v.45, n..1, p.279-290, 1987.
- HWANG, C.; CHEN, M. Y. Suboptimal control of linear time-varying multi-delay systems via shifted Legendre polynomials. **International Journal of Systems Science**, Hants, v.16, n.12, p.1517-1537, 1985.

IBRAHIM, S. R.; MIKULCIK, E. C. A time domain modal vibration test technique. **Shock and Vibration Bulletin**, Washington, n.23, pt.4, p.21-37, 1973.

JIANG, Z. H.; SCHAUFELBERGER, W. A new algorithm for single-input single-output system identification via bock-pulse functions. **International Journal of Systems Science**, Hants, v.16, n.12, p.1559-1571, 1985.

KINNAERT, M. ; HANUS, R. Fault detection and isolation for unstable linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.40, n.4, p. 740-747, 1995.

KUDVA, P.; VISWANADHAM, N. ; RAMAKRISHNA, A. Observers for linear systems with unknown inputs. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.AC-25, n.1, p.113-115, 1980.

MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis**. 2.ed. New York: McGraw Hill, 1986.

MELO, G.P. **Detecção e localização de falhas via observadores de estado de ordem reduzida**, Campinas, 1998. 125p Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

MELO, G. P. **Identificação de sistemas mecânicos através do método das séries de Fourier: um método no domínio do tempo**. Uberlândia, 1992. p.11. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia.

MELO, G. P. ; STEFFEN JR., V. Mechanical systems identification through Fourier series time-domain technique. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, Rio de Janeiro, v.14, n.2, p.124-135, 1993.

MOHAN, B. M.; DATTA, K. B. Analysis of time-delay systems via shifted Chebyshev polynomials of the first and second kinds. **International Journal Of Systems Science**, Hants, v.19, n.9, p.1843-1851, 1988.

PACHECO, R. P.; STEFFEN JR., V. D. Identificação de parâmetros e reconstrução de forças através do método das funções ortogonais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 15, 1999, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: Cobem, 1999.

PACHECO, R. P. **Identificação de sistemas mecânicos através de métodos no domínio do tempo**. Uberlândia, 2001. 127p. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.

PACHECO, R. P.; STEFFEN JR., V. D. On the identification of non-linear mechanical systems using orthogonal functions. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elmsford, v. 39, p.1147-1159, 2004.

PALANISAMY, K. R.; BHATTACHARYA, D. K. System identification via Block-Pulse functions. **International Journal of Systems Science**, Hants, v.12, n.5, p.643-647, 1981.

PARASKEVOPOULOS, P. N.; KEKKERIS, G. T. Output sensitivity analysis using orthogonal functions. **International Journal of Control**, London, v.40, n. 4, p.763-772. 1984.

PARASKEVOPOULOS, P. N.; SPARIS, P. D.; MOUROUTSOS, S. G. The Fourier series operational matrix of integration. **International Journal of Systems Science**, Hants, v.16, n.2, p.171-176, 1984.

RICO, J.; HEYDT, G. T. Parameter estimation using an orthogonal series expansion. **Electric Machines & Power Systems**, Washington, v.28, n.8, p.761 – 777, 2000.

SILVA, L. A. **Time Domain Techniques for Force Identification**, (In Portuguese), Professor Thesis, Federal University of Uberlândia (UFU), Uberlândia, Minas Gerais, Brazil, 223p, 2000.

SPIEGEL, M. R. **Análise de Fourier**. São Paulo: McGraw-Hill, 1976. (Coleção Schaum)

SHIH, D-H., KUNG, F.C. The shifted Legendre approach to non-linear system analysis and identification. **International Journal of Control**, London, v.42, n.6, p.1399-1410, 1985.

SHIH, Y.P.; HAN, J.Y. Double Walsh series solution of first-order partial differential equations. **International Journal of Systems Science**, Hants, v.9, n.5, p.569-578, 1978.

TRENDAFILOVA, I.; LENAERTS, V.; KERSCHEN, G.; GOLINVAL, J.C.; BRUSSEL, H.V.; HEYLEN, W. Detection, localization and identification of nonlinearities in structural dynamics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE & VIBRATION ENGINEERING, 2000, Leuven. **Conference...** Leuven: Katholieke Universiteit Leuven, 2000. p.431-438.

WANG, D.; FELLOW, A. H. Element-level system identification with unknown input. **Journal of Engineering Mechanics**, New York, v.120, n.1, p.159-176, 1994.

WANG, C.H.; MARLEAU, R. S. Recursive computational algorithm for the generalized Block-Pulse operational matrix. **International Journal of Control**, London, v. 45, n.1, 195-201 p., 1987.

ANEXO A

Apresentaremos o método das séries de Fourier para a identificação de parâmetros de sistemas mecânicos. Utilizando, neste caso, um sistema de 1 grau de liberdade para exemplificar o procedimento da identificação de parâmetros utilizando funções ortogonais.

Esta metodologia pode ser extrapolada, da mesma forma, para sistemas de N graus de liberdades, bem como quando utiliza-se outras funções ortogonais (Legendre e Chebyshev).

O método de identificação apresentado aqui tem como :

- Expansão da excitação e da resposta em séries de Fourier.
- Integração das equações do movimento e emprego de uma matriz operacional para integração das séries de Fourier.
- Estimativa dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados.

Método das Séries de Fourier

Matriz Operacional de Integração

Seja $\{\phi(t)\}$, formada por funções linearmente independentes e ortogonais em um intervalo $[0, T]$:

$$\{\phi(t)\} = [\{\phi_0(t)\}, \{\phi_1(t)\}, \dots, \{\phi_s(t)\}, \{\phi_1^*(t)\}, \dots, \{\phi_s^*(t)\}] \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\{\phi_n(t)\} = \cos(2n\pi t/T), \quad n=0,1,2,3,\dots,s \quad (\text{A.2})$$

e

$$\{\phi_n^*(t)\} = \text{sen}(2n\pi t/T), n=1,2,3,\dots, s \quad (\text{A.3})$$

na qual s é o número de termos em senos e co-senos retidos na Série de Fourier.

A função $f(t)$ pode ser expandida como segue:

$$f(t) \cong a_0 \phi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \phi_n(t) + b_n \phi_n^*(t)\} \quad (\text{A.4})$$

onde os coeficientes de Fourier a_0 , a_n e b_n são dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos((2n\pi)t/T) dt, n = 1,2,3,\dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}((2n\pi)t/T) dt, n = 1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Se a equação (A.4) é truncada, retendo-se assim apenas $r = (2s+1)$ termos, tem-se:

$$\{f(t)\} \cong a_0 \{\phi_0(t)\} + \sum_{n=1}^s \{a_n \phi_n(t) + b_n \phi_n^*(t)\} = \{\psi\}^T \{\phi(t)\} \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\{\psi\}_{1 \times r}^T = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_s\} \quad (\text{A.7})$$

Consideram-se as seguintes integrais:

$$\int_0^t \phi_0(\sigma) d\sigma = \int_0^t d\sigma = t \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_n(\sigma) d\sigma &= \int_0^t \cos((2n\pi)\sigma / T) d\sigma = \frac{T}{2n\pi} \int_0^t d(\sin((2n\pi)\sigma / T)) = \\ &= \frac{T}{2n\pi} \sin((2n\pi)t / T) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_n^*(\sigma) d\sigma &= \int_0^t \sin((2n\pi)\sigma / T) d\sigma = -\frac{T}{2n\pi} \int_0^t d(\cos((2n\pi)\sigma / T)) = \\ &= \frac{T}{2n\pi} - \frac{T}{2n\pi} \cos((2n\pi)t / T) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Das equações (A.9) e (A.10):

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_n(\sigma) d\sigma &= \frac{T}{2n\pi} \phi_n^*(t) & n \geq 1 \\ \int_0^t \phi_n^*(\sigma) d\sigma &= \frac{T}{2n\pi} \phi_0(t) - \frac{T}{2n\pi} \phi_n(t) & n \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Da equação (A.8), tem-se a série truncada:

$$\int_0^t \phi_0(\sigma) d\sigma = t \cong c_0 \phi_0(t) + \sum_{n=1}^s \{c_n \phi_n(t) + d_n \phi_n^*(t)\} \quad (\text{A.12})$$

onde os coeficientes c_n e d_n são calculados a partir das expressões da equação (A.5) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{T}{2}; \\ c_n &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, s \\ d_n &= -\frac{T}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, s \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Desenvolvendo os resultados acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_0(\sigma) d\sigma &= \left[\frac{T}{2}, 0, \dots, 0, -\frac{T}{\pi}, \dots, -\frac{T}{s\pi} \right] \{\phi(t)\} \\ \int_0^t \phi_n(\sigma) d\sigma &= \left[0, \dots, 0, \dots, \frac{T}{2n\pi}, 0, \dots, 0 \right] \{\phi(t)\} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde o termo $\frac{T}{2n\pi}$ ocupa a $(s + n + 1)$ – ésima posição

$$\int_0^t \phi_n^*(\sigma) d\sigma = \left[\frac{T}{2n\pi}, 0, \dots, 0, -\frac{T}{2n\pi}, 0, \dots, 0 \right] \{\phi(t)\}$$

onde o termo $-\frac{T}{2n\pi}$ ocupa a $(n + 1)$ – ésima posição

Das equações de (A.14) pode-se concluir, portanto, que:

$$\int_0^t \phi(\sigma) d\sigma \cong [P] \{\phi(t)\}$$

E pela propriedade de integração das séries ortogonais, onde $[P]$ é uma matriz operacional de integração:

$$\int_0^t \dots \int_0^t \phi(\sigma) d\sigma^n = [P]^n \{\phi(t)\} \quad (\text{A.15})$$

n vezes

A matriz operacional de integração $[P]$ é dada por:

$$[P]_{rxr} = \begin{array}{c|cc|cc}
 \frac{T}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{T}{\pi} & -\frac{T}{2\pi} & \dots & \frac{T}{(s-1)\pi} & -\frac{T}{s\pi} \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{T}{2\pi} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{T}{2(s-1)\pi} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{T}{2s\pi} \\
 \hline
 \frac{T}{2\pi} & -\frac{T}{2\pi} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \frac{T}{4\pi} & 0 & -\frac{T}{4\pi} & \dots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \frac{T}{2s\pi} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{T}{2s\pi} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
 \end{array} \tag{A.16}$$

Melhorando a forma de apresentação desta matriz temos:

$$[P] = \begin{array}{c|cc}
 \frac{T}{2} & \{0\}_{1xs} & -\frac{T}{\pi} \{\tilde{\mathbf{e}}\}_{1xs}^T \\
 \{0\}_{sx1} & [0]_{sxs} & \frac{T}{2\pi} [\tilde{\mathbf{I}}]_{sxs} \\
 \frac{T}{2\pi} \{\tilde{\mathbf{e}}\}_{sx1} & -\frac{T}{2\pi} [\tilde{\mathbf{I}}]_{sxs} & [0]_{sxs}
 \end{array}_{rxr} \tag{A.17}$$

onde

$$\{\tilde{\mathbf{e}}\}_{sx1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \\ 1/s \end{Bmatrix} \tag{A.18}$$

$$[\tilde{\mathbf{I}}]_{sxs} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & 0 \\ & & 1/3 & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & 1/s \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

Sistemas com Um Grau de Liberdade (IGDL)

Dependendo da situação a ser considerada, pode-se desejar trabalhar com o sinal de saída do sistema associado tanto ao deslocamento, como a velocidade ou à aceleração. Assim, será demonstrado a seguir que é possível escrever as equações que levam a identificação do sistema.

Formulação em Termos de Deslocamento

O movimento de um sistema mecânico linear e invariante no tempo, com um grau de liberdade e amortecimento viscoso é representado pela equação diferencial, para $t_0 \leq t \leq (t_0 + T)$, assim:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (\text{A.20})$$

onde M, C e K são respectivamente as matrizes de inércia, amortecimento e a rigidez.

Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 f(t) \quad (\text{A.21})$$

onde

$$a_1 = 2\xi\omega_n; \quad a_0 = \omega_n^2; \quad b_0 = \frac{1}{m}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$$

Fazendo $t_0=0$ e integrando (A.21) duas vezes, tem-se:

$$x(t) + a_1 \int_0^t x(\tau) d\tau + a_0 \int_0^t \int_0^t x(\tau) d\tau^2 = b_0 \int_0^t \int_0^t f(\tau) d\tau^2 + d_1 t + d_0 \quad (\text{A.22})$$

onde

$$\begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Fazendo-se a expansão de $x(t)$ e $f(t)$ em $[0;T]$ pelas séries de Fourier, temos:

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^s (x_n \cos(\frac{2\pi nt}{T}) + x_n^* \operatorname{sen}(\frac{2\pi nt}{T})) = \{X\}^T \{\phi(t)\} \quad (\text{A.24})$$

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^s (f_n \cos(\frac{2\pi nt}{T}) + f_n^* \operatorname{sen}(\frac{2\pi nt}{T})) = \{F\}^T \{\phi(t)\} \quad (\text{A.25})$$

$$\{X\}^T = [x_0, x_1, \dots, x_s, x_1^*, \dots, x_s^*] \quad (\text{A.26})$$

$$\{F\}^T = [f_0, f_1, \dots, f_s, f_1^*, \dots, f_s^*] \quad (\text{A.27})$$

Seja agora a propriedade integral de $\{\phi(t)\}$ (A.14) e (A.15):

$$\int_0^t \dots \int_0^t \phi(\sigma) d\sigma^n = [P]^n \{\phi(t)\} \quad (\text{A.28})$$

n vezes

onde $[P]^n$ é a matriz operacional de integração descrita no item anterior.

Substituindo (A.24), (A.25) e (A.28) em (A.22) temos:

$$\begin{aligned} \{X\}_{rx1} = & -a_1 [P]_{rxr}^T \{X\}_{rx1} - a_0 [P]_{rxr}^{2T} \{X\}_{rx1} + b_0 [P]_{rxr}^{2T} \{F\}_{rx1} \\ & + d_1 [P]_{rxr}^T \{e\}_{rx1} + d_0 \{e\}_{rx1} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

onde $\{e\}^T = [1,0,0,\dots,0]$ e as notações $[P]^T$ e $[P]^{2T}$ são, respectivamente, a transposta de $[P]$ e a transposta do produto de $[P].[P]$. E a notação r é o mesmo que $2s+1$ termos da Série de Fourier, sendo $s+1$ termos em co-senos e r termos em senos.

Esta equação pode ser utilizada para resolver problemas de identificação dos coeficientes a_0, a_1, b_0, d_0 e d_1 , que representam os valores dos parâmetros físicos e das condições iniciais.

Identificação dos Parâmetros Físicos e das Condições Iniciais

Para identificar os parâmetros físicos e as condições iniciais, a Eq.(A.29) é escrita como:

$$\{X\} = [Q]\{\theta\} \quad (\text{A.30})$$

onde

$$[Q] = \begin{bmatrix} -[P]^T \{X\} & -([P]^2)^T \{X\} & ([P]^2)^T \{F\} & [P]^T \{e\} & \{e\} \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

e

$$\{\theta\}_s^T = [a_1 \quad a_0 \quad b_0 \quad d_1 \quad d_0] \quad (\text{A.32})$$

A Eq. (A.29) representa um sistema de $(2s+1)$ equações algébricas lineares com cinco incógnitas, englobando tanto os parâmetros físicos como as condições iniciais.

Para $s \geq 2$, uma estimativa pelo método dos mínimos quadrados para o vetor $\{\theta\}$ será:

Multiplicando a Eq. (A.30) por Q^T e por $(Q^T Q)^{-1}$ temos que:

$$\begin{aligned} [Q]^T \{X\} &= [Q]^T [Q]\{\theta\} \\ (Q^T Q)^{-1} [Q]^T \{X\} &= (Q^T Q)^{-1} (Q^T Q)\{\theta\} \\ \{\theta\} &= ([Q]^T [Q])^{-1} [Q]^T \{X\} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

ANEXO B

Determinação da Matriz Dinâmica

Dado um sistema mecânico, pode-se representá-lo por um modelo matemático de um sistema vibratório de 2 graus de liberdade, como mostra a Fig. (B.1), da seguinte forma:

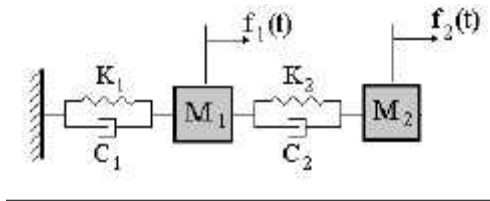


Figura (B.1) Sistema de 2 graus de liberdade.

O sistema de equações diferenciais que descreve o movimento deste sistema dinâmico é dado pela seguinte equação:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{x}_1(t) - c_2 \dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - c_2 \dot{x}_1(t) + c_2 \dot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) = 0 \quad (\text{B.2})$$

A solução da equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes tem a forma exponencial, adotando como resposta do sistema:

$$x_1(t) = C_1 e^{st} \quad (\text{B.3})$$

$$x_2(t) = C_2 e^{st} \quad (\text{B.4})$$

onde C é uma constante que depende das condições iniciais.

Portanto, na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Ou ainda:

$$[M] \cdot [\ddot{X}(t)] + [C] \cdot [\dot{X}(t)] + [K] \cdot [X(t)] = [F(t)] \quad (\text{B.6})$$

Seja:

$$\{w(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\dot{w}(t)\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Para desacoplar as equações, transformam-se N equações diferenciais de segunda ordem em 2N equações diferenciais de primeira ordem.

$$[M] \cdot \{\dot{w}(t)\} + [C] \cdot \{w(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (\text{B.8})$$

$$\{\dot{w}(t)\} = -[M]^{-1}[C] \cdot \{w(t)\} - [M]^{-1}[K] \cdot \{x(t)\} + [M]^{-1}\{F(t)\} \quad (\text{B.9})$$

Seja:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

pode-se escrever o vetor de estado como:

$$\{z(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\left\{ \begin{matrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} [0] \\ -[M]^{-1}[F(t)] \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\left\{ \begin{matrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{matrix} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{-(c_1+c_2)}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{-c_2}{m_2} \end{bmatrix}}_{[A]} \left\{ \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f_1(t)}{m_1} \\ \frac{f_2(t)}{m_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Desta forma consegue-se transformar duas equações diferenciais de segunda ordem para quatro equações diferenciais de primeira ordem. Assim uma das matrizes encontradas neste tipo de operação é a Matriz Dinâmica [A] que pode ser definida de uma forma geral, para um sistema de N graus de liberdade como:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0]_{N \times N} & [I]_{N \times N} \\ -([M]^{-1}[K])_{N \times N} & -([M]^{-1}[C])_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Através da Matriz Dinâmica consegue-se determinar os parâmetros modais do sistema (frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração), calculando-se os autovalores e os autovetores.